Astérisque

ANTOINE CHAMBERT-LOIR

Relations de dépendance et intersections exceptionnelles

Astérisque, tome 348 (2012), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 1032, p. 149-188
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2012__348__149_0>

Séminaire BOURBAKI Janvier 2011
63e année, 2010-2011, n° 1032, p. 149 à 188

RELATIONS DE DÉPENDANCE ET INTERSECTIONS EXCEPTIONNELLES

par **Antoine CHAMBERT-LOIR**

1. RELATIONS DE DÉPENDANCE

Cet exposé est consacré à un ensemble de travaux apparus depuis une quinzaine d'années sous la plume de divers mathématiciens autour de ce qu'on appelle maintenant la *conjecture de Zilber–Pink*. Je voudrais débuter avec le cas le plus simple et le plus frappant.

THÉORÈME 1.1. — *Soit C une courbe algébrique complexe (irréductible) et considérons n fonctions rationnelles $f_1, \dots, f_n$ non identiquement nulles et multiplicativement indépendantes sur C. Alors, les points x de C où leurs valeurs $f_1(x), \dots, f_n(x)$ vérifient au moins deux relations de dépendance multiplicative indépendantes forment un ensemble fini.*

Dire que $f_1, \dots, f_n$ sont multiplicativement indépendantes signifie que pour tout vecteur non nul $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{Z}^n$, la fonction rationnelle $f_1^{a_1} \dots f_n^{a_n}$ sur C n'est pas constante de valeur 1.

De même, si x est un point de C qui n'est ni un zéro ni un pôle des f_i, les relations de dépendance multiplicative entre les valeurs $f_i(x)$ des f_i sont les vecteurs $(a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbf{Z}^n$ tels que $\prod_{i=1}^n f_i(x)^{a_i} = 1$. Ces relations forment un sous-groupe de $\mathbf{Z}^n$; le théorème concerne les points x pour lesquels ce sous-groupe est de rang $\geqslant 2$.

Sous l'hypothèse que les fonctions f_i sont multiplicativement indépendantes modulo les constantes, c'est-à-dire qu'aucune combinaison non triviale $\prod f_i^{a_i}$ n'est constante, ce théorème a été démontré par E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier dans l'article **[12]** qui, le premier, a mis en avant ces questions. L'hypothèse supplémentaire a été levée par G. Maurin **[42]**, puis, par une autre approche, par Bombieri, P. Habegger, Masser et Zannier **[11]**. Ces articles reposent sur des techniques de géométrie diophantienne et supposent en outre que toute la situation est définie sur le corps $\overline{\mathbf{Q}}$

des nombres algébriques. Dans l'intervalle, l'article **[16]** démontre que ce cas entraîne le théorème sur le corps des nombres complexes.

Remarquons pour finir que l'énoncé est optimal au sens où l'ensemble des points x de C où les valeurs $f_1(x), \dots, f_n(x)$ sont multiplicativement dépendantes est *infini* (à moins que les f_i ne soient toutes constantes). Si, disons, f_1 n'est pas constante, il suffit de considérer l'ensemble des points x de C tels que $f_1(x)$ soit une racine de l'unité.

Malgré la simplicité de l'énoncé ci-dessus, il convient de l'écrire dans le cadre plus général des groupes algébriques commutatifs, voire des variétés de Shimura mixtes. Il s'insère alors dans un faisceau de conjectures dues à B. Zilber **[82]**, S.-W. Zhang (non publié, voir **[13]**), R. Pink **[50]** (voir aussi **[49]**) et Bombieri, Masser, Zannier **[13]**. Par ailleurs, et ce n'est pas l'aspect le moins fascinant du sujet, ces conjectures complètent les conjectures de type Manin–Mumford, Mordell–Lang et André–Oort. Toutefois, je me limiterai au cas des groupes algébriques dans ce rapport et ne dirai rien de la conjecture d'André–Oort dont l'importance et la beauté des derniers développements, dus pour l'essentiel à J. Pila (voir **[46]**), exigent qu'un exposé autonome leur soit consacré. Signalons quand même qu'ils trouvent leur origine dans la nouvelle démonstration de la conjecture de Manin–Mumford qu'ont découverte Pila et Zannier **[47]** et que ces techniques jouent un rôle dans l'étude de questions voisines que nous évoquerons à la fin de ce rapport.

Revenons au théorème 1.1. Puisque l'on discute de relations de dépendance multiplicative, introduisons donc le groupe multiplicatif (complexe) $\mathbf{G}_{\mathrm{m}} = \mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$ et considérons la famille des fonctions $f_1, \dots, f_n$ comme une application rationnelle f de C dans le *tore algébrique* $G = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. Notons X son image, ou plutôt l'adhérence, pour la topologie de Zariski dans G, de l'image d'un ouvert dense de C sur lequel f est définie. Laissons de côté le cas inintéressant où les f_i sont toutes constantes ; l'application f est alors de degré fini et X est une courbe irréductible dans G. Comme les f_i sont multiplicativement indépendantes, la courbe X n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique strict de G : de tels sous-groupes sont en effet définis par des équations monomiales $g_1^{a_1} \dots g_n^{a_n} = 1$ en les coordonnées $(g_1, \dots, g_n) \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. Plus précisément, les sous-groupes algébriques (pas forcément connexes) de G sont en bijection avec les sous-modules de $\mathbf{Z}^n$, la codimension d'un sous-groupe étant égale au rang du module de ses relations. Pour tout entier $r \in \mathbf{N}$, notons ainsi $G^{[r]}$ la réunion des sous-groupes algébriques de G qui sont de codimension $\geqslant r$; c'est aussi l'ensemble des points $(g_1, \dots, g_n) \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ qui vérifient r relations de dépendance multiplicative indépendantes. Ainsi, le théorème 1.1 équivaut à l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1.1′. — *Soit X une sous-variété fermée de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, irréductible et de dimension* 1*, qui n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique strict. L'ensemble*

$X \cap G^{[2]}$ des points x de X qui sont contenus dans un sous-groupe de codimension $\geqslant 2$ est fini.

Les conjectures auxquelles ce rapport est consacré visent à remplacer le groupe G par une variété semi-abélienne, la courbe X par une sous-variété fermée de G, irréductible et distincte de G, de dimension quelconque d, et l'ensemble $G^{[2]}$ par un ensemble $G^{[c]}$, où c est un entier tel que $c > d$, voire un ensemble de la forme $\Gamma \cdot G^{[c]}$ où Γ est un sous-groupe de rang fini de G, et même, lorsque tout est défini sur le corps des nombres algébriques, des « épaississements » d'un tel ensemble au sens de la théorie des hauteurs.

Dans ce cas, une généralisation naturelle du théorème 1.1′ est la conjecture suivante de R. Pink (voir **[49]**, conjecture 5.1). Avant de l'énoncer, rappelons qu'une variété semi-abélienne est un groupe algébrique commutatif qui se décompose en une extension d'une variété abélienne par un tore ; un sous-groupe algébrique connexe d'une variété semi-abélienne est encore une variété semi-abélienne.

CONJECTURE 1.2. — *Soit G une variété semi-abélienne complexe. Soit X une sous-variété fermée et irréductible de G, de dimension d. Si X n'est pas contenue dans un sous-groupe algébrique strict de G, l'intersection $X \cap G^{[d+1]}$ n'est pas dense dans X pour la topologie de Zariski.*

Cette conjecture est connue lorsque X est une courbe ($d = 1$) et G un tore ; on retrouve le théorème 1.1′. Pour l'essentiel, tous les autres résultats se restreignent au cas de variétés définies sur le corps $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques et peuvent donc ne considérer que des points algébriques. Toujours lorsque $d = 1$, un théorème de G. Rémond établit cette variante pour les variétés abéliennes à multiplications complexes (**[64]**, corollaire 1.6), tandis qu'un résultat plus récent d'E. Viada (*cf.* **[27]**, théorème H) traite le cas des variétés abéliennes qui sont produit de variétés abéliennes à multiplications complexes, surfaces abéliennes et courbes elliptiques. En dimension plus grande, à l'exception de quelques cas comme les sous-variétés de codimension 2 d'un tore (théorème 1.7 de **[14]**), cette conjecture n'est démontrée que sous une hypothèse géométrique sur X. Introduisons une terminologie proposée par Z. Ran dans le cas des variétés abéliennes (voir **[55]**) :

DÉFINITION 1.3. — *Soit X une sous-variété (fermée, irréductible) d'une variété semi-abélienne G. On dit que X est* géométriquement dégénérée *s'il existe un sous-groupe algébrique G' de G, tel que l'image de X dans G/G' est de dimension strictement inférieure à* $\min(\dim(X), \dim(G/G'))$.

Pour qu'une courbe soit géométriquement dégénérée, il faut et il suffit qu'elle soit contenue dans un translaté d'un sous-groupe algébrique strict. En revanche, en dimension supérieure, il peut exister des sous-variétés géométriquement dégénérées qui ne sont contenues dans aucun translaté de sous-groupe algébrique.

THÉORÈME 1.4 (Habegger, **[29, 31]**). — *Soit G une variété semi-abélienne définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Soit X une sous-variété fermée, irréductible et de dimension d, définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$, qui n'est pas géométriquement dégénérée. Supposons de plus que G soit un tore ou une variété abélienne à multiplications complexes. Alors $X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[d+1]}$ n'est pas dense dans X pour la topologie de Zariski.*

Expliquons maintenant le lien entre la conjecture 1.2 et celles de Manin–Mumford ou de Mordell–Lang.

Un point g de G est de torsion si et seulement s'il appartient à un sous-groupe algébrique de dimension 0 (celui qu'il engendre !) ; par suite, la conjecture 1.2 étend la conjecture de Manin–Mumford qui concerne précisément les points de torsion de G situés sur la sous-variété X. Rappelons que cette conjecture a été démontrée par M. Laurent **[38]** pour les tores, M. Raynaud **[57, 56]** dans le cas des variétés abéliennes, et M. Hindry **[32]** en général. Profitons aussi de l'occasion pour mentionner diverses preuves plus récentes : **[69]**, via la preuve d'une conjecture de Bogomolov (**[80, 17, 22, 79]** pour les tores, **[74, 81, 21]** pour les variétés abéliennes, **[23]** pour les variétés semi-abéliennes), *via* la théorie des modèles de corps aux différences (**[34]** et **[51, 52, 68]** qui s'en inspirent), enfin **[47]**.

Soit maintenant Γ un sous-groupe de G de rang fini r ; soit $(g_1, \dots, g_r)$ des éléments de Γ tels que $\Gamma/\langle g_1, \dots, g_r\rangle$ soit de torsion. Reprenant un argument de Rémond qui consiste à remplacer G par une puissance $G \times G^r$ et X par la sous-variété $X \times \{(g_1, \dots, g_r)\}$, Pink observe que la conjecture 1.2 est équivalente à la conjecture suivante :

CONJECTURE 1.5. — *Soit G une variété semi-abélienne complexe. Soit X une sous-variété fermée de G, irréductible et distincte de G, de dimension d. Soit Γ un sous-groupe de rang fini de G. Si X n'est pas contenue dans un translaté de sous-groupe algébrique strict de G, l'intersection $X \cap (\Gamma \cdot G^{[d+1]})$ n'est pas dense dans X pour la topologie de Zariski.*

Bien sûr, si $X \neq G$, $G^{[d+1]}$ n'est pas vide et $\Gamma \cdot G^{[d+1]}$ contient Γ, donc la conjecture 1.5 entraîne en particulier la conjecture de Mordell–Lang selon laquelle $X \cap \Gamma$ n'est pas dense dans X. Rappelons que celle-ci est maintenant un théorème, suite aux travaux de P. Liardet **[39]** pour les courbes dans les tores, M. Laurent **[38]** pour les tores, G. Faltings **[26]** pour les variétés abéliennes, M. Hindry **[32]**, P. Vojta **[78]** et M. McQuillan **[44]** pour les variétés semi-abéliennes.

Rémond et Maurin ont tiré parti de la méthode de Vojta pour établir le résultat suivant en direction de la conjecture 1.5, analogue avec un groupe Γ du théorème 1.4.

THÉORÈME 1.6 (Rémond [**65**], Maurin [**43**]). — *Supposons que G soit un tore ou une variété abélienne à multiplications complexes. Soit X une sous-variété fermée et irréductible de dimension d de G, définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et qui n'est pas géométriquement dégénérée. Soit Γ un sous-groupe de rang fini de $G(\overline{\mathbf{Q}})$. Alors $X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap (\Gamma \cdot G^{[d+1]})$ n'est pas dense dans X pour la topologie de Zariski.*

Leur approche permet aussi d'obtenir une autre démonstration du théorème 1.4.

Par ailleurs, une approche récente d'E. Viada [**77**] fondée sur une forme effective de la conjecture de Bogomolov permet d'étendre le théorème précédent à une classe de variétés abéliennes comprenant les produits de variétés abéliennes à multiplications complexes, de courbes elliptiques et de surfaces abéliennes.

Dans le §2 de ce rapport, je décris les « lieux exceptionnels » que l'étude de ces conjectures oblige à prendre en compte. Le §3 est un rappel des concepts de géométrie diophantienne utilisés dans les preuves : théorie des hauteurs, problème de Lehmer, conjecture de Bogomolov. Dans le §4, je résume les différentes approches des théorèmes précédents : après la preuve d'un important théorème de majoration de hauteurs, j'y décris successivement l'utilisation du problème de Lehmer, de la méthode de Vojta et des formes effectives de la conjecture de Bogomolov.

2. INTERSECTIONS EXCEPTIONNELLES

Motivé par l'étude de la conjecture de Schanuel dans le cadre des corps différentiels, B. Zilber avait énoncé une conjecture voisine de la conjecture 1.2 ([**82**], conjecture 2).

Soit G une variété semi-abélienne complexe. Soit X une sous-variété fermée de G, irréductible.

DÉFINITION 2.1. — *Soit H une sous-variété fermée, équidimensionnelle de G. On dit qu'une composante irréductible Y de l'intersection $X \cap H$ est* atypique *si sa dimension vérifie*

$$\dim(Y) > \dim(X) + \dim(H) - \dim(G).$$

On peut aussi écrire cette inégalité sous la forme $\operatorname{codim}_H(Y) < \operatorname{codim}_G(X)$. Rappelons que si $X \cap H$ n'est pas vide, la théorie de l'intersection affirme que toute composante irréductible en est de dimension supérieure ou égale à $\dim(X) + \dim(H) - \dim(G)$; les composantes atypiques sont donc celles dont la dimension dépasse la dimension attendue.

Dans la suite, cette notion n'interviendra que dans le cas particulier où H est un sous-groupe algébrique de G, ou un translaté d'un tel sous-groupe.

CONJECTURE 2.2. — *Soit G une variété semi-abélienne complexe. Soit X une sous-variété fermée de G, irréductible. Il existe une famille* finie *Φ de sous-groupes algébriques stricts de G telle que pour tout sous-groupe algébrique H de G, toute composante atypique de $X \cap H$ soit contenue dans l'un des éléments de Φ.*

Avec ces notations, notons X^{ta} le complémentaire dans X de la réunion des composantes atypiques de dimension strictement positive d'une intersection $X \cap H$, où H est un sous-groupe algébrique de G.(1) Une variante de la conjecture 2.2 due à Bombieri, Masser et Zannier ([**14**], *Torsion Openness Conjecture*, p. 25) affirme que X^{ta} est ouvert dans X.

Zilber observe aussi dans son article ([**82**], propositions 2 et 3) comment la conjecture 2.2 entraîne celles de Manin–Mumford ou de Mordell–Lang.

C'est d'ailleurs très simple dans le cas Manin–Mumford. Considérons en effet une sous-variété (fermée, irréductible) X de G, distincte de G et qui n'est pas contenue dans un sous-groupe algébrique strict de G. Soit alors x un point de X qui est de torsion dans G et soit H_x le sous-groupe algébrique qu'il engendre. Alors, $Y = \{x\}$ est une composante irréductible de l'intersection $X \cap H_x$; puisque $X \subsetneq G$, la dimension de Y vérifie

$$\dim(Y) = 0 > \dim(X) - \dim(G) = \dim(X) + \dim(H_x) - \dim(G),$$

si bien que Y est une composante atypique de cette intersection. Supposant la conjecture 2.2 satisfaite, il existe $H \in \Phi$ tel que $x \in H$. Autrement dit, les points de X qui sont de torsion dans G sont contenus dans la réunion finie des sous-variétés $X \cap H$, pour $H \in \Phi$. À moins que $X \cap H = X$ pour l'un de ces sous-groupes, ce qui entraîne que X est contenue dans un sous-groupe algébrique strict, les points de X qui sont de torsion dans G ne sont donc pas denses dans X pour la topologie de Zariski.

Le théorème suivant est dû à Zilber [**82**] lorsque G est un tore et à J. Kirby [**35**] en général. La différence avec la conjecture 2.2 vient du fait qu'on met en jeu tous les translatés de sous-variétés semi-abéliennes et pas seulement les sous-groupes algébriques (qui sont réunion finie de translatés de sous-variétés semi-abéliennes par des *points de torsion*).

THÉORÈME 2.3. — *Soit G une variété semi-abélienne complexe et soit X une sous-variété (fermée, irréductible) de G. Il existe une famille* finie *Φ de sous-variétés semi-abéliennes strictes de G telle que : pour tout translaté gK d'une sous-variété semi-abélienne K de G et toute composante atypique Y de l'intersection $X \cap gK$, il existe*

(1) Les lettres ta signifient *torsion anomalous.*

$H \in \Phi$ et $h \in G$ tels que $Y \subset hH$ et

$$\dim(H) + \dim(Y) = \dim(K) + \dim(X \cap hH).$$

Cette dernière condition de dimension entraîne que la codimension de H est au moins égale à l'excès t de dimension de la composante atypique Y, excès que l'on définit par

$$t = \dim(Y) - (\dim(X) + \dim(K) - \dim(G)).$$

Au moins lorsque H contient K, elle signifie que Y est une composante *typique* de l'intersection de $X \cap hH$ avec gK dans le translaté gH.

Le théorème 2.3 et son précurseur sur les tores ([**82**], corollaire 3 ; voir aussi [**53**]) reposent sur un théorème de J. Ax établissant une variante de la conjecture de Schanuel dans le cas différentiel ([**6**], théorème 3). Par des arguments de théorie des modèles des corps différentiels (le théorème de compacité en logique du premier ordre), Zilber et Kirby en déduisent une version uniforme à paramètres, puis l'énoncé ci-dessus avec la condition $\operatorname{codim}(H) \geqslant t$. Lorsque Y est une composante atypique de l'intersection $(X \cap hH) \cap gK$, on applique de nouveau l'argument.

Signalons que Bombieri, Masser et Zannier dans le cas des tores ([**14**], théorème 1.4), puis Rémond dans le cas des variétés abéliennes ([**66**], partie 3), démontrent des résultats de même nature, mais *effectifs*, au sens où ils contrôlent le degré d'une partie maximale qui est une composante atypique d'une intersection de X avec un translaté de sous-groupe algébrique.

COROLLAIRE 2.4. — *Soit X^{oa} le complémentaire dans X des composantes atypiques de dimension strictement positive d'une intersection $X \cap gH$, où H parcourt l'ensemble des sous-variétés semi-abéliennes non nulles de G de codimension $\leqslant \dim(X)$ et g parcourt G. Alors X^{oa} est ouvert dans X pour la topologie de Zariski.*[2]

Démonstration. — On commence par remarquer que si H est une sous-variété semi-abélienne fixée, la réunion $\mathscr{Z}_H$ des composantes atypiques de dimension strictement positive d'une intersection $X \cap hH$ est une partie fermée de X. Considérons en effet le morphisme $\varphi \colon G \to G/H$ et sa restriction $\varphi_X \colon X \to \varphi(X)$ à X ; on a $X \cap xH = \varphi_X^{-1}(\varphi_X(x))$ pour tout $x \in X$. Les composantes en question sont celles des fibres de φ_X qui sont de dimension $> \max(0, \dim(X) - \dim(G/H))$. D'après le théorème de semi-continuité de la dimension des fibres d'un morphisme, c'est une partie fermée de X.

Nous allons démontrer que $X \setminus X^{\mathrm{oa}}$ est la réunion des parties $\mathscr{Z}_H$, où H décrit l'ensemble fini Φ du théorème 2.3.

[2] Les lettres oa sont l'abréviation de *open anomalous.*

Considérons donc une sous-variété Y de X de dimension strictement positive, composante irréductible atypique d'une intersection $X \cap yK$, où $y \in Y$ et K est une sous-variété semi-abélienne de G. On peut supposer, quitte à remplacer K par cette sous-variété, que K est la plus petite sous-variété semi-abélienne de G telle que $Y \subset yK$. Sous l'hypothèse supplémentaire que Y est maximale parmi les composantes atypiques, nous allons démontrer que $K \in \Phi$; nous aurons donc $Y \subset \mathscr{Z}_K$, puis $Y \subset \bigcup_{H\in\Phi} \mathscr{Z}_H$ et le corollaire en résultera d'après la première partie de la démonstration.

Soit $H \in \Phi$ la sous-variété semi-abélienne de G fournie par le théorème 2.3 : on a $Y \subset yH$ et

$$\dim(H) + \dim(Y) = \dim(K) + \dim(X \cap yH).$$

Par définition de K, on a $K \subset H$. Soit Y' une composante irréductible de l'intersection $X \cap yH$ qui contient Y. L'inégalité $\dim(Y) \geqslant \dim(Y') - \operatorname{codim}_H(K)$ donnée par la théorie de l'intersection entraîne que $\dim(Y') = \dim(X \cap yH)$. Comme Y est une sous-variété irréductible maximale dans l'ensemble des composantes atypiques d'intersections de X avec un translaté d'une sous-variété semi-abélienne, on a l'alternative suivante :

- Si $Y' = Y$, l'égalité de dimensions ci-dessus entraîne $H = K$;
- Sinon, $Y \subsetneq Y'$, donc Y est une composante typique de l'intersection $Y' \cap yK$, c'est-à-dire

  $$\dim(Y') = \dim(X) + \dim(H) - \dim(G) = \dim(Y) + \dim(H) - \dim(K);$$

  on en déduit que

  $$\dim(Y) = \dim(X) + \dim(K) - \dim(G),$$

  ce qui contredit l'hypothèse que Y est une composante atypique de l'intersection $X \cap yK$.

Cela conclut la preuve du corollaire. □

Notons que X^{oa} peut fort bien être vide ; c'est le cas si X est contenu dans un translaté de sous-variété semi-abélienne, plus généralement si X est géométriquement dégénérée (cf. **[65]**, Prop. 4.2) :

Proposition 2.5. — *L'ouvert X^{oa} est vide si et seulement si X est géométriquement dégénérée.*

Plus généralement, $X \setminus X^{\mathrm{oa}}$ est la réunion des sous-variétés Y de X pour lesquelles il existe une sous-variété semi-abélienne H telle que

$$\dim(YH/H) < \min(\dim(Y), \dim(G/H) - \operatorname{codim}_X(Y)).$$

Démonstration. — Soit Y une sous-variété de X et H une sous-variété semi-abélienne de G telle que $\dim(YH/H) < \min(\dim(Y), \dim(G/H) - \operatorname{codim}_X(Y))$. Notons φ la projection de G sur G/H et $\varphi_Y \colon Y \to \varphi(Y) = YH/H$ le morphisme qui s'en déduit par restriction à Y. Pour tout $y \in Y$, on a

$$\begin{aligned}\dim_y(X \cap yH) &\geqslant \dim_y(Y \cap yH) = \dim_y \varphi_Y^{-1}(\varphi_Y(y))\\ &\geqslant \dim(Y) - \dim(\varphi_Y(Y))\\ &> \dim(Y) - \min(\dim(Y), \dim(G/H) - \dim(X) + \dim(Y))\\ &= \max(0, \dim(X) - \operatorname{codim}_G(H)).\end{aligned}$$

Cela prouve qu'au moins une composante irréductible de l'intersection $X \cap yH$ passant par y est atypique. Par suite, $y \notin X^{\mathrm{oa}}$.

Inversement, il suffit de démontrer que toute composante irréductible Y d'un ensemble $\mathscr{Z}_H$ introduit dans la preuve du corollaire 2.4 vérifie cette inégalité. Or, par la définition même de $\mathscr{Z}_H$, toute fibre du morphisme $\varphi_Y \colon Y \to YH/H \subset G/H$ est de dimension $> \max(0, \dim(X) + \dim(H) - \dim(G))$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\dim(YH/H) &< \dim(Y) - \max(0, \dim(X) + \dim(H) - \dim(G))\\ &= \min(\dim(Y), \dim(G/H) - \operatorname{codim}_X(Y)),\end{aligned}$$

comme annoncé. □

Plus généralement, si t est un entier naturel, on peut définir l'ensemble $X^{\mathrm{oa},[t]}$ comme le complémentaire, dans X, de l'ensemble des points $x \in X$ tels qu'il existe une sous-variété semi-abélienne H de G telle que

$$\dim_x(X \cap xH) \geqslant \max(1, t - \operatorname{codim}_G(H)).$$

Lorsque $t = 1 + \dim(X)$, on a $X^{\mathrm{oa},[t]} = X^{\mathrm{oa}}$. Inversement, lorsque $t \leqslant \dim(X)$ et $\dim(X) > 0$, on a $\dim_x(X \cap xG) = \dim(X) > \max(0, t)$ pour tout $x \in X$, ce qui entraîne que $X^{\mathrm{oa},[t]} = \varnothing$.

La proposition suivante généralise le corollaire 2.4.

Proposition 2.6. — *Pour tout entier naturel t, $X^{\mathrm{oa},[t]}$ est ouvert dans X.*

3. HAUTEURS

Le reste de ce rapport est consacré à résumer comment procèdent les preuves des théorèmes 1.1′ ou 1.4.

Tout d'abord, il s'agit de démonstrations où l'arithmétique joue un rôle fondamental, par la considération des hauteurs, et surtout par l'utilisation de minorations extrêmement fines des hauteurs dans le contexte du problème de Lehmer et de ses variantes, ou du problème de Bogomolov. De sorte, même si j'avais donné jusqu'à présent des énoncés sur le corps des nombres complexes, tous les arguments qui suivent supposent que les variétés considérées sont définies sur le corps $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques.

Comme je l'ai dit à propos du théorème 1.1, Bombieri, Masser et Zannier ont expliqué dans leur article **[16]** comment l'on peut démontrer des résultats sur $\mathbf{C}$ lorsqu'on dispose de la conjecture 1.2 sur $\overline{\mathbf{Q}}$, voire des cas particuliers de la conjecture obtenus en bornant $\dim(X)$ et $\dim(G)$. Ils se sont limités au cas des tores et il serait intéressant de développer ces arguments dans le cas général des variétés semi-abéliennes et même dans le contexte que considère Pink dans **[49]**. (Dans le cadre de la conjecture de Mordell–Lang sur les variétés semi-abéliennes, des arguments de spécialisation se trouvent dans **[32]**.)

En outre, la littérature se divise entre tores et variétés abéliennes, le cas général des variétés semi-abéliennes n'étant, à ma connaissance, pas encore traité.

3.1. La machine des hauteurs

Rappelons rapidement la notion de hauteur sur l'ensemble des points algébriques d'une variété projective.

Sur l'espace projectif, la hauteur standard est la fonction $h\colon \mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}}) \to \mathbf{R}_+$ définie par la formule

$$h(x) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_v [K_v : \mathbf{Q}_v] \log \max(|x_0|_v, \dots, |x_n|_v)$$

dans laquelle K est un corps de nombres, x est un point de $\mathbf{P}^n(K)$ de coordonnées homogènes $[x_0 : \dots : x_n]$ dans K, v parcourt l'ensemble des valeurs absolues sur K qui étendent la valeur absolue réelle ou une valeur absolue p-adique sur $\mathbf{Q}$, K_v est le complété de K pour cette valeur absolue et $\mathbf{Q}_v$ est le corps réel $\mathbf{R}$ ou le corps p-adique $\mathbf{Q}_p$ suivant les cas. La formule du produit garantit que le second membre ne dépend pas du choix des coordonnées homogènes ; il ne dépend pas non plus du choix d'un corps de nombres K sur lequel le point x est défini. Par exemple, si le point $x \in \mathbf{P}^n(\overline{\mathbf{Q}})$ a pour coordonnées homogènes $[x_0 : \dots : x_n]$ formée d'entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble, on a $h(x) = \log\max(|x_0|, \dots, |x_n|)$. Remarquons aussi que la fonction h est invariante sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$.

Lorsque X est une variété algébrique projective définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et $\varphi\colon X \to \mathbf{P}^n$ est un morphisme de X dans un espace projectif, on en déduit une fonction $h_\varphi = h \circ \varphi$ sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$, invariante sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/K)$ si X et φ sont définis sur un sous-corps K de $\overline{\mathbf{Q}}$. Pour l'essentiel, la fonction h_φ ne dépend de φ que par l'intermédiaire de la classe d'isomorphisme du fibré en droites $\varphi^*\mathscr{O}(1)$ dans le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X)$.

En effet, si ψ est un morphisme de X dans un espace projectif $\mathbf{P}^m$ tel que $\varphi^*\mathscr{O}(1)$ et $\psi^*\mathscr{O}(1)$ soient isomorphes, la différence $h_\varphi - h_\psi$ est une fonction bornée sur $X(\overline{\mathbf{Q}})$.

Notons $\mathscr{F}(X(\overline{\mathbf{Q}}), \mathbf{R})$ l'espace des fonctions de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ dans $\mathbf{R}$ et $\mathscr{B}$ son sous-espace des fonctions bornées. Via l'étude des plongements de Segre ou Veronese, on démontre qu'il existe un unique morphisme d'espaces vectoriels

$$\operatorname{Pic}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \to \mathscr{F}(X(\overline{\mathbf{Q}}), \mathbf{R})/\mathscr{B}(X(\overline{\mathbf{Q}}), \mathbf{R})$$

qui applique la classe d'un fibré en droites $\mathscr{L}$ sur celle de la fonction h_φ lorsque φ est un morphisme de X dans un espace projectif tel que $\varphi^*\mathscr{O}(1) \simeq \mathscr{L}$. Si $\mathscr{L}$ est un ($\mathbf{R}$-)fibré en droites sur X, on notera abusivement $h_{\mathscr{L}}$ une fonction de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ dans $\mathbf{R}$ qui représente l'image de $\mathscr{L}$ par ce morphisme de groupes.

Nous ferons usage des résultats suivants :

Proposition 3.1. — *Soit X une variété projective définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur X.*

1. *La fonction $h_{\mathscr{L}}$ est minorée en dehors du support du diviseur de toute section globale de $\mathscr{L}$;*
2. *Si $\mathscr{L}$ est engendré par ses sections globales, $h_{\mathscr{L}}$ est minorée ;*
3. *Supposons que $\mathscr{L}$ soit ample. Alors, pour tout entier B, l'ensemble des points $x \in X(\overline{\mathbf{Q}})$ tels que $[\mathbf{Q}(x) : \mathbf{Q}] \leqslant B$ et $h_{\mathscr{L}}(x) \leqslant B$ est fini* (théorème de Northcott) *;*
4. *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de variétés algébriques définies sur $\overline{\mathbf{Q}}$, alors $h_{f^*\mathscr{L}} - h_{\mathscr{L}} \circ f$ est une fonction bornée sur $Y(\overline{\mathbf{Q}})$.*

Pour plus de détails et des démonstrations, je renvoie aux ouvrages d'introduction à la géométrie diophantienne, notamment **[36, 72, 33, 10]**.

Le point de vue de la théorie d'Arakelov (voir **[18]**) fournit un moyen efficace pour ne pas travailler à une fonction bornée près. Dans le cas des variétés semi-abéliennes, il existe un moyen simple pour *normaliser* les hauteurs que je dois rappeler brièvement ; les hauteurs normalisées interviennent en effet de manière cruciale dans l'étude des conjectures auxquelles ce rapport est consacré.

3.2. Hauteurs normalisées sur les variétés semi-abéliennes

Soit G une variété semi-abélienne. Comme je l'ai rappelé plus haut, G est extension d'une variété abélienne A par un tore T :

$$1 \to T \to G \xrightarrow{p} A \to 0,$$

et (sur $\overline{\mathbf{Q}}$, ou quitte à effectuer une extension finie) T est isomorphe à une puissance $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^t$ du groupe multiplicatif. Comme G n'est que quasi-projectif (à moins que $T = \{1\}$), les hauteurs dépendent d'une compactification projective de G. Lorsque

$G = T = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^t$, on peut considérer G comme un ouvert de l'espace projectif $\mathbf{P}^t$; toute autre compactification équivariante P (disons projective, lisse) convient, par exemple $(\mathbf{P}^1)^t$. Soit $\overline{G}$ le produit contracté $\overline{G} = G \times^T P$; c'est une compactification équivariante de G munie d'une fibration vers A, toujours notée p, dont les fibres sont isomorphes à P. Pour $n \geqslant 2$, les endomorphismes de multiplication par n sur G s'étendent en des endomorphismes de $\overline{G}$. En outre, le groupe de Picard de $\overline{G}$ se décompose (non canoniquement) en une somme directe

$$\mathrm{Pic}(\overline{G}) \simeq \mathrm{Pic}(A) \oplus \mathrm{Pic}(P),$$

où $\mathrm{Pic}(A)$ est identifié à son image dans $\mathrm{Pic}(\overline{G})$ par l'homomorphisme injectif p^*. Après tensorisation par $\mathbf{Q}$, le groupe de Picard de A se décompose sous l'action de l'endomorphisme $[-1]$ en une partie paire et une partie impaire, provenant respectivement du groupe de Néron–Severi de A et du groupe des classes d'isomorphisme de fibrés en droites algébriquement équivalent à 0, d'où finalement une décomposition

$$\mathrm{Pic}(\overline{G})_{\mathbf{Q}} \simeq \mathrm{NS}(A)_{\mathbf{Q}} \oplus \mathrm{Pic}^0(A)_{\mathbf{Q}} \oplus \mathrm{Pic}(P)_{\mathbf{Q}}.$$

Sous l'action des endomorphismes de multiplication par un entier $n \geqslant 2$, le premier facteur est de poids n^2, tandis que les deux autres sont de poids n. Supposons que la classe de $\mathscr{L}$ appartient à l'un de ces trois facteurs et posons respectivement $w = 2$, $w = 1$, $w = 1$. On déduit alors du point 4 de la proposition 3.1 que la fonction $x \mapsto h_{\mathscr{L}}([n]x) - n^w h_{\mathscr{L}}(x)$ est bornée sur $\overline{G}(\overline{\mathbf{Q}})$. Par le procédé de Tate qui consiste à poser

$$\hat{h}_{\mathscr{L}}(x) = \lim_{k \to \infty} n^{-wk} h_{\mathscr{L}}([n]^k x),$$

on obtient une fonction $\hat{h}_{\mathscr{L}}$ sur $\overline{G}(\overline{\mathbf{Q}})$ telle que $\hat{h}_{\mathscr{L}}([n]x) = n^w \hat{h}_{\mathscr{L}}(x)$ pour tout $x \in \overline{G}(\overline{\mathbf{Q}})$. Elle ne dépend pas du choix de n. En outre, la différence $\hat{h}_{\mathscr{L}} - h_{\mathscr{L}}$ est bornée sur $\overline{G}(\overline{\mathbf{Q}})$: la fonction $\hat{h}_{\mathscr{L}}$ est appelée *hauteur normalisée* pour le fibré en droites $\mathscr{L}$. Lorsque $G = A$ est une variété abélienne et $\mathscr{L}$ est symétrique, on retrouve bien sûr la forme quadratique de Néron–Tate ; lorsque G est le tore $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, ouvert de $P = \mathbf{P}^n$, et $\mathscr{L} = \mathscr{O}(1)$, $\hat{h}_{\mathscr{L}}$ est la hauteur standard.

Par additivité, on en déduit un morphisme d'espaces vectoriels

$$\mathrm{Pic}(\overline{G})_{\mathbf{R}} \to \mathscr{F}(\overline{G}(\overline{\mathbf{Q}}), \mathbf{R}), \qquad \mathscr{L} \mapsto \hat{h}_{\mathscr{L}}.$$

La proposition 3.1 s'étend facilement, seule la propriété 4 de fonctorialité requiert un ajustement : Sous l'hypothèse que $f \colon G' \to G$ soit un morphisme de variétés semi-abéliennes qui s'étend en un morphisme $\overline{f} \colon \overline{G}' \to \overline{G}$ des compactifications fixées, on a $\hat{h}_{\mathscr{L}}(\overline{f}(x)) = \hat{h}_{\overline{f}^*\mathscr{L}}(x)$ pour tout $x \in \overline{G}'(\overline{\mathbf{Q}})$.

Les points de torsion sont de hauteur normalisée nulle ; inversement, si $\mathscr{L}$ est ample, on déduit du théorème de Northcott que les points x de $G(\overline{\mathbf{Q}})$ tels que $\hat{h}_{\mathscr{L}}(x) = 0$ sont des points de torsion.

3.3. Le problème de Lehmer

En 1933, D. H. Lehmer demandait s'il existe, pour $\varepsilon > 0$, un polynôme P, unitaire à coefficients entiers, dont la mesure de Mahler $\mathrm{M}(P)$ vérifie $1 < \mathrm{M}(P) < 1 + \varepsilon$; il ajoutait ne pas savoir si ce problème a une solution pour $\varepsilon < 0{,}176$. En termes de hauteurs(3), la question est l'existence d'un nombre réel $c > 0$ tel que pour tout nombre algébrique $\xi \in \overline{\mathbf{Q}}^*$ qui n'est pas une racine de l'unité, on ait $h(\xi) \geqslant c/[\mathbf{Q}(\xi) : \mathbf{Q}]$. Une telle minoration serait optimale puisque $h(2^{1/n}) = \frac{1}{n}\log 2$ et $\deg(2^{1/n}) = n$. En particulier, c'est le fait que la hauteur standard d'un nombre algébrique vérifie une équation fonctionnelle qui permet de formuler cette question de façon pertinente.

Bien qu'elle soit encore ouverte, un théorème de Dobrowolski résout cette question à ε près (et même un peu plus...) :

THÉORÈME 3.2 (Dobrowolski **[25]**). — *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $c(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout nombre algébrique ξ qui n'est ni nul ni une racine de l'unité, on ait*

$$h(\xi) \geqslant \frac{c(\varepsilon)}{[\mathbf{Q}(\xi) : \mathbf{Q}]^{1+\varepsilon}}.$$

La démonstration est astucieuse mais élémentaire, l'idée principale consistant à exploiter les congruences issues du petit théorème de Fermat pour de nombreux nombres premiers p.

La question se pose, plus généralement, de fournir une minoration fine de la *hauteur normalisée* $\hat{h}$ d'un point d'une variété semi-abélienne, lorsque ce point n'est pas de torsion. Dans le cas torique ou abélien, S. David a proposé la conjecture suivante. Comme D. Bertrand me l'a fait remarquer, le cas des variétés semi-abéliennes générales pose des problèmes spécifiques.

CONJECTURE 3.3 (Problème de Lehmer). — *Soit G un tore ou une variété abélienne sur $\overline{\mathbf{Q}}$, soit g sa dimension. Soit $\hat{h}$ une hauteur normalisée associée à un fibré en droites ample d'une compactification. Il existe un nombre réel $c > 0$ tel que pour tout point $x \in G(\overline{\mathbf{Q}})$ qui n'est contenu dans aucun sous-groupe algébrique strict de G, on ait la minoration :*

$$\hat{h}(x) \geqslant c\,[\mathbf{Q}(x) : \mathbf{Q}]^{-1/g}.$$

(3) La mesure de Mahler d'un polynôme P est définie par $\mathrm{M}(P) = \exp\left(\int_0^1 \log\left|P(e^{2i\pi\theta})\right|\,\mathrm{d}\theta\right)$. Si P est le polynôme minimal d'un nombre algébrique ξ, on a $\mathrm{M}(P) = \exp(\deg(P)h(\xi))$; les polynômes irréductibles de $\mathbf{Z}[T]$ de mesure de Mahler nulle sont, outre le polynôme T, les polynômes cyclotomiques. Dans son article, Lehmer donne l'exemple du polynôme minimal d'un nombre de Salem de degré 10 pour lequel $\mathrm{M}(P) \approx 1{,}1762$.

Lorsque G est définie sur un corps de nombres K, une conjecture plus précise remplace le degré $[\mathbf{Q}(x):\mathbf{Q}]^{1/g}$ par l'indice d'obstruction $\omega_K(x)$, défini comme le minimum des quantités $\deg(V)^{1/\operatorname{codim}(V)}$, où V est une sous-variété de G définie sur K contenant x. Elle affirme l'existence d'un nombre réel $c>0$ tel que si x n'est pas de torsion et si $\hat{h}(x)$ est inférieur à $c\,\omega_K(x)^{-1}$, alors il existe un sous-groupe algébrique H de G, contenant x, tel que $\deg(H^\circ)^{1/\operatorname{codim}(H)} \leqslant c\,\omega_K(x)$.

De fait, M. Laurent avait démontré un tel résultat à ε près pour les courbes elliptiques à multiplications complexes dans **[37]**. Dans l'approche de Dobrowolski, pour transformer le petit théorème de Fermat en une congruence, il faut en effet disposer, pour beaucoup d'idéaux maximaux de l'anneau des entiers du corps de base, d'un endomorphisme de la courbe elliptique qui relève l'endomorphisme de Frobenius de sa réduction. C'est précisément ce que permet la théorie de la multiplication complexe.

Dans des articles extrêmement délicats, F. Amoroso et David ont étendu cette approche au cas des tores, tandis que David et M. Hindry ont traité le cas des variétés abéliennes à multiplications complexes (voir **[2]**, **[20]**). Ainsi, quitte à remplacer l'exposant $-1/g$ par $-1/g-\varepsilon$, la conjecture 3.3 est donc vraie dans le cas des tores ou des variétés abéliennes à multiplications complexes. Les preuves reposent sur les méthodes d'approximation diophantienne, mais leur technicité m'empêche d'en dire quoi que ce soit dans ce rapport.

Dès le théorème initial de Bombieri, Masser et Zannier, ces minorations de hauteurs ont joué un rôle crucial dans la démonstration des théorèmes de finitude auxquels ce rapport est consacré. Toutefois, des raffinements récents permettent de simplifier leur utilisation, voire d'en améliorer l'efficacité. Présentons-les brièvement.

En 2000, Amoroso et R. Dvornicich ont démontré que la hauteur d'un élément ξ de l'extension cyclotomique maximale de $\mathbf{Q}$ est minorée par $\log(5)/12$, à moins que ξ ne soit nul ou une racine de l'unité. Ce théorème a suscité toute une série d'articles visant à remplacer, dans les conjectures de type Lehmer, le degré sur $\mathbf{Q}$, ou l'indice d'obstruction sur le corps de base K, par les quantités équivalentes sur le corps K_{tors} engendré sur K par les coordonnées des points de torsion de G.

CONJECTURE 3.4 (Problème de Lehmer relatif). — *Soit G un tore ou une variété abélienne sur un corps de nombres K, soit g sa dimension. Soit K_{tors} l'extension de K engendrée par les coordonnées des points de torsion de G. Il existe un nombre réel $c>0$ tel que pour tout point $x\in G(\overline{\mathbf{Q}})$ qui n'est contenu dans aucun sous-groupe algébrique strict de G, on ait la minoration :*

$$\hat{h}(x) \geqslant c\,[K_{\text{tors}}(x):K_{\text{tors}}]^{-1/g}.$$

Après divers travaux, les meilleurs résultats dans cette direction sont dus à E. Delsinne pour les tores et à M. Carrizosa pour les variétés abéliennes.

THÉORÈME 3.5 (Delsinne [**24**], Carrizosa [**19**]). — *Soit G une variété semi-abélienne définie sur un corps de nombres K, soit g la dimension de G et soit K_{tors} l'extension de K engendrée par les points de torsion de G. Supposons que G soit un tore ou une variété abélienne à multiplications complexes. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $c > 0$ tel que pour tout point $x \in G(\overline{\mathbf{Q}})$ qui n'appartient à aucun sous-groupe algébrique strict de G,*

$$h(x) \geqslant c\,[K_{\mathrm{tors}}(x) : K_{\mathrm{tors}}]^{-1/g-\varepsilon}.$$

3.4. La conjecture de Bogomolov

La conjecture énoncée par F. Bogomolov dans [**8**] suggère un autre énoncé de minoration de la hauteur d'un point d'une variété abélienne dans lequel la contrainte n'est pas le corps de définition de ce point, mais son appartenance à une sous-variété fixée.

Soit G une variété semi-abélienne définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$; considérons un fibré en droites ample d'une compactification $\overline{G}$ et les fonctions degré et hauteur canonique, naturellement notées deg et $\hat{h}$, qui lui sont associées.

Soit X une sous-variété (fermée, irréductible) de G. En considérant un morphisme fini de l'adhérence de X dans $\overline{G}$ vers un espace projectif associé à ce fibré en droites, on démontre aisément qu'il existe un nombre réel θ tel que l'ensemble des points de $X(\overline{\mathbf{Q}})$ de hauteur $\leqslant \theta$ est dense dans X pour la topologie de Zariski. Le *minimum essentiel* de X est la borne inférieure de ces nombres réels ; on le note $\hat{\mu}(X)$. Si X est une sous-variété semi-abélienne de G, l'ensemble de ses points de torsion est dense dans X et $\hat{\mu}(X) = 0$; c'est essentiellement la seule possibilité pour que $\hat{\mu}(X)$ soit nul.

THÉORÈME 3.6. — *Si X n'est pas le translaté d'une sous-variété semi-abélienne de G par un point de torsion, on a $\hat{\mu}(X) > 0$.*

Le cas des tores est dû à S.-W. Zhang [**80**] (une preuve ultérieure, plus élémentaire, se trouve dans [**17, 79**]). Dans le cas des variétés abéliennes, la démonstration de ce théorème par E. Ullmo (lorsque X est une courbe dans sa jacobienne) et S.-W. Zhang (en général) repose sur des techniques d'équidistribution en géométrie d'Arakelov ; elle a été exposée dans ce séminaire (voir [**1**]). Par une méthode plus proche de la géométrie diophantienne « traditionnelle », S. David et P. Philippon ont redémontré ces résultats et traité le cas général des variétés semi-abéliennes (voir [**21, 22, 23**]).

Ces dernières démonstrations ont en outre l'intérêt de fournir une minoration effective de $\hat{\mu}(X)$. Dans le cas où X n'est pas le translaté d'une sous-variété semi-abélienne de G, ces auteurs établissent en effet une minoration de $\hat{\mu}(X)$ inversement proportionnelle à une puissance du degré de X. (La minoration établie dans [**17**] pour les tores, de moins bonne qualité, montrait comment déduire une minoration géométrique du théorème ci-dessus.) Dans cette optique, un énoncé essentiellement optimal a été prouvé par Amoroso et David dans **[3]** dans le cas des tores (voir aussi **[5]**) ; les énoncés de ces références sont explicites, je simplifie ici les termes logarithmiques :

THÉORÈME 3.7. — *Soit G un tore, $\overline{G}$ une compactification équivariante de G, $\mathscr{L}$ un fibré en droites ample sur $\overline{G}$,* deg *et $\hat{h}$ les fonctions degré et hauteur normalisée associées. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel c (ne dépendant que de G, $\overline{G}$, $\mathscr{L}$ et ε) tel que l'on ait, pour toute sous-variété fermée $X \subsetneq G$, l'inégalité*

$$\hat{\mu}(X) \geqslant c \deg(X)^{-1/\operatorname{codim}(X)-\varepsilon},$$

pourvu que X ne soit contenue dans aucun translaté de sous-groupe algébrique strict de G.

À ε près, cet énoncé est optimal : en remplaçant X par son inverse par la multiplication par des entiers $n \geqslant 2$, on voit que le meilleur exposant possible du degré est l'opposé de l'inverse de la codimension de X dans le plus petit sous-groupe algébrique de G qui le contient. Noter aussi que lorsque X est un translaté d'un sous-groupe algébrique H de G par un point qui n'est pas de torsion modulo H, on a bien $\hat{\mu}(X) > 0$, mais l'obtention d'une meilleure borne relève du problème de Lehmer dans G/H.

Il est naturel de poser une conjecture similaire dans le cas des variétés abéliennes (voire des variétés semi-abéliennes) :

CONJECTURE 3.8 (Problème de Bogomolov effectif). — *Soit G un tore ou une variété abélienne. Soit $\hat{h}$ une hauteur normalisée associée à un fibré en droites ample d'une compactification. Il existe un nombre réel $c > 0$ tel que pour toute sous-variété (fermée, irréductible) X de G, distincte de G, qui n'est pas contenue dans un translaté de sous-groupe algébrique strict de G, on ait la minoration*

$$\hat{\mu}(X) \geqslant c\,(\deg(X))^{-1/\operatorname{codim}(X)}.$$

A. Galateau a fait de grands progrès dans cette direction ; l'intérêt pour les questions présentées dans ce rapport est qu'il dépasse le strict cadre des variétés abéliennes à multiplications complexes.

Le théorème de Galateau est alors le suivant :

THÉORÈME 3.9 (**[27]**). — *Soit G une variété abélienne définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$, $\mathscr{L}$ un fibré en droites ample sur G,* deg *et $\hat{h}$ les fonctions degré et hauteur normalisée associées. On suppose vérifiée l'hypothèse suivante :*

> *Il existe un corps de nombres K sur lequel G est définie et tel que l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de l'anneau des entiers de K en lequel G a bonne réduction ordinaire soit de densité strictement positive.*

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $c > 0$ (ne dépendant que de G, $\mathscr{L}$, ε) tel que

$$\hat{\mu}(X) > c\,(\deg(X))^{-1/\operatorname{codim}(X)-\varepsilon}$$

pour toute sous-variété fermée irréductible X de G, distincte de G qui n'est pas contenue dans un translaté de sous-variété abélienne stricte.

Rappelons qu'on dit que G a bonne réduction en l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de K s'il existe un schéma abélien $\mathscr{G}$ sur l'anneau $\mathfrak{o}_{K,\mathfrak{p}}$ qui étend G ; sa réduction est alors la variété abélienne $G_{\mathfrak{p}} = \mathscr{G} \otimes \mathbf{F}_{\mathfrak{p}}$ sur le corps résiduel $\mathbf{F}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{K,\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$. Elle a de plus bonne réduction ordinaire si, dans une clôture algébrique de $\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}$, le groupe des points de p-torsion de $G_{\mathfrak{p}}$ est de cardinal $p^{\dim(G)}$, où l'on a noté p la caractéristique du corps fini $\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}$.

Enfin, la densité considérée est la densité naturelle.

Pour évaluer le statut de l'hypothèse faite dans le théorème précédent, posons une définition.

DÉFINITION 3.10. — *Soit G une variété abélienne définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$. On dit que G est banale s'il existe un corps de nombres K sur lequel G est définie et tel que l'ensemble des idéaux premiers de K en lesquels G ait bonne réduction* ordinaire *soit de densité égale à* 1.

Un produit de variétés abéliennes banales, un quotient d'une variété abélienne banale sont banals. En outre, pour une variété abélienne sur un corps de caractéristique $p > 0$, être ordinaire est une propriété générique dans l'espace des modules des variétés abéliennes. Il est ainsi conjecturé que toute variété abélienne G définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$ est banale (*cf.* Pink [**48**], §7). Dans cette direction, on a les résultats suivants :

PROPOSITION 3.11. — *Soit G une variété abélienne définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Si* $\dim(G) \leqslant 2$ *ou si G est une variété abélienne à multiplications complexes, alors G est banale.*

Le cas des courbes elliptiques est dû à J-P. Serre [**71**], celui des surfaces abéliennes à A. Ogus [**45**], et le cas des variétés abéliennes à multiplications complexes résulte de cette théorie. Lorsque G est définie sur un corps de nombres K, R. Noot et Pink ont aussi donné des conditions suffisantes sur l'action du groupe de Galois $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/K)$ sur les modules de Tate de G assurant la conclusion de la proposition.

4. THÉORÈMES DE FINITUDE

4.1. Majoration de la hauteur hors de l'ensemble exceptionnel

Soit G une variété semi-abélienne et soit X une sous-variété (fermée, irréductible) de G. Pour prouver la finitude de l'ensemble $\Sigma = X^{\mathrm{ta}}(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[1+\dim(X)]}$, l'approche inaugurée par Bombieri, Masser et Zannier dans leur article **[12]** fonctionne en deux étapes.

La première étape, peut-être la plus délicate, consiste à prouver que l'ensemble Σ est de hauteur bornée. La seconde utilise des minorations de hauteurs dans l'esprit de la conjecture de Lehmer pour en déduire que le degré du corps de définition des points de Σ est uniformément borné. Le théorème de Northcott entraîne alors que Σ est fini.

C'est à cette première étape qu'est consacré ce paragraphe. Le cas des courbes possède une solution assez simple mais l'étude de la dimension supérieure s'avère plus délicate. Après de nombreux résultats partiels dans cette direction, Habegger a finalement démontré le résultat suivant. (Dans le cas des tores, il s'agit de la *Bounded Height Conjecture* de **[14]**.)

THÉORÈME 4.1 (Habegger, **[30, 31]**). — *Soit G un tore ou une variété abélienne et soit X une sous-variété (fermée, irréductible) de G. L'ensemble $X^{\mathrm{oa}}(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[\dim(X)]}$ est de hauteur bornée.*

Commençons par deux remarques sur le caractère essentiellement optimal de cet énoncé (voir **[28, 76]**).

Remarque 4.2. — L'ensemble $X^{\mathrm{oa}}(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[\dim(X)]}$ peut être dense dans X.

On l'a par exemple vu dans le cas d'une courbe de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, un peu après l'énoncé du théorème 1.1.

Remarque 4.3. — Si Y est une composante irréductible de $X \setminus X^{\mathrm{oa}}$, il n'existe pas forcément d'ouvert dense U de Y tel que la hauteur soit bornée sur $U(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[\dim(X)]}$.

Contentons-nous de traiter le cas d'une courbe X dans $G = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ telle que $X = X^{\mathrm{oa}}$. Dans ce cas, nous devons démontrer qu'exiger une relation de dépendance multiplicative non triviale entre les coordonnées d'un point de X ne suffit pas à majorer sa hauteur. Par un changement de coordonnées sur $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, on se ramène en effet au cas où les restrictions à X des m premières coordonnées sont multiplicativement indépendantes et celles des $n-m>0$ dernières sont constantes de valeurs $\xi_{m+1}, \dots, \xi_n$. Si ξ_n est une racine de l'unité, X est contenu dans un sous-groupe algébrique d'équation $x_n^e = 1$, tout point de X satisfait une relation de dépendance multiplicative non triviale et la hauteur n'est bornée sur aucun ouvert non vide de X. Sinon, pour presque tout entier naturel a, l'intersection de X avec le sous-tore d'équation $x_1 = x_n^a$ n'est pas vide et contient un point P_a dont la hauteur vérifie $h(P_a) \geqslant h(x_1(P_a)) = h(x_n(P_a)^a) = ah(\xi_n)$, donc tend vers l'infini avec a.

Expliquons maintenant la preuve du théorème 4.1 dans le cas des tores, suivant **[31]** ; je renvoie à **[30]** pour celle, voisine, du cas abélien.

Si m et n sont des entiers naturels, rappelons qu'un morphisme φ de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ est donné par m monômes en n variables ; on identifie alors φ à la matrice M_φ de taille $m \times n$ formée par les exposants de ces monômes. On notera aussi $\|\varphi\|$ la norme euclidienne de cette matrice.

Posons $m = \dim(X)$. Si φ est un morphisme de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$, notons $\Delta_X(\varphi)$ le degré générique du morphisme $\varphi|_X \colon X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$. Il est homogène de degré m en la matrice de φ : pour tout entier $a \in \mathbf{Z}$, $\Delta_X(\varphi^a) = |a|^m \Delta_X(\varphi)$. Il se calcule aussi à l'aide de la théorie de l'intersection. Soit en effet X_φ l'adhérence du graphe de φ dans $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$ et notons p_1, p_2 les deux projections de X_φ sur $\mathbf{P}^n$ et $\mathbf{P}^m$. Alors,

$$\Delta_X(\varphi) = \deg(c_1(p_2^*\mathscr{O}(1))^m \cap [X_\varphi]). \tag{1}$$

LEMME 4.4. — *Pour tout $\varphi \colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$, il existe un nombre réel $c(\varphi)$ et un ouvert dense U_φ de X tel que l'on ait, pour tout $x \in U_\varphi(\overline{\mathbf{Q}})$,*

$$h(\varphi(x)) \gg \frac{\Delta_X(\varphi)}{\|\varphi\|^{m-1}} h(x) - c(\varphi), \tag{2}$$

où la constante implicite dans le symbole $\gg$ est indépendante de φ.[4]

Démonstration. — Soit $t \in \mathbf{Q}$ et soit $\mathscr{L}_t$ le $\mathbf{Q}$-fibré en droites[5] $p_2^*\mathscr{O}(1) - t p_1^*\mathscr{O}(1)$ sur X_φ. Il suffit, pour démontrer ce lemme, d'établir que $\mathscr{L}_t$ est $\mathbf{Q}$-effectif pour une valeur de t de l'ordre de $\Delta_X(\varphi)/\|\varphi\|^{m-1}$. D'après un théorème de Siu **[73]**, c'est le cas dès que l'inégalité

$$\deg(c_1(p_2^*\mathscr{O}(1))^m \cap [X_\varphi]) > m\,t \deg(c_1(p_1^*\mathscr{O}(1)) c_1(p_2^*\mathscr{O}(1))^{m-1} \cap [X_\varphi])$$

est satisfaite. Grâce à une inégalité de type Bézout due à P. Philippon, le degré d'intersection du membre de droite est majoré par un multiple de $\|\varphi\|^{m-1}$, ce qui permet de conclure. □

LEMME 4.5. — *Soit Ω un voisinage de l'ensemble des matrices orthogonales*[6] *dans $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{R})$. Il existe un nombre réel Q_0 tel que pour tout nombre réel $Q > Q_0$, l'assertion suivante soit satisfaite : Si $x \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n(\overline{\mathbf{Q}})$ appartient à un sous-groupe*

---

[4] Si u et v sont deux fonctions, j'utilise la notation $u \gg v$ pour dire qu'il existe un nombre réel $c > 0$ tel que $u \geqslant cv$; si w est un paramètre, $u \gg_w v$ signifie que pour tout w, il existe un nombre réel $c_w > 0$ tel que $u \geqslant c_w v$.

[5] Je note additivement la loi de groupe sur le groupe de Picard déduite du produit tensoriel.

[6] J'entends par là que leurs lignes forment une famille orthonormée.

de codimension $\geqslant m$, il existe un entier $q \in \{1, \ldots, Q\}$ et un homomorphisme $\varphi\colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ tel que $\varphi \in q\Omega$, $\|\varphi\| \ll q$

$$h(\varphi(x)) \ll qQ^{-1/mn} h(x). \tag{3}$$

Démonstration. — Par hypothèse, il existe un morphisme surjectif $\varphi_0\colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ tel que $\varphi_0(x) = 1$. Par le procédé d'orthogonalisation de Gram–Schmidt, on écrit $\varphi_0 = \theta_1\varphi_1$, où $\theta_1 \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{R})$ et où $\varphi_2 \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ est orthogonale. Soit θ_2 une matrice à coefficients rationnels assez proche de θ_1, de sorte que $\theta_2^{-1}\varphi_0$ appartienne à Ω. D'après le lemme de Dirichlet, on peut alors approcher cette dernière matrice par une matrice à coefficients rationnels de la forme $q^{-1}\varphi$ appartenant à Ω telle que $\|q^{-1}\varphi - \theta_2^{-1}\varphi_0\| \ll Q^{-1/mn}$, où $1 \leqslant q \leqslant Q$ et $\varphi \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{Z})$. Ces inégalités entraînent que

$$\left|h(\varphi(x)) - h(\theta_2^{-1}\varphi_0(x)^q)\right| \ll qQ^{-1/mn} h(x),$$

d'où le lemme puisque $\varphi_0(x) = 1$. □

Soit $\varphi\colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ un morphisme surjectif de groupes algébriques. Si $X^{\mathrm{oa}} \neq \varnothing$, observons que l'application $\varphi|_X$ est génériquement quasi-finie. En effet, dans le cas contraire, il passerait par tout point de X une composante Y de dimension > 0 de $X \cap \ker(\varphi)$; puisque $\dim\ker(\varphi) = \dim(X)$, Y est alors une composante atypique de X, ce qui entraîne $X^{\mathrm{oa}} = \varnothing$, d'où une contradiction. On a donc $\Delta_X(\varphi) > 0$.

La proposition suivante est une minoration uniforme. Si r est un entier naturel tel que $r < m$, on appelle projection standard de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ sur $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^r$ un morphisme de groupes algébriques défini par l'oubli de $m - r$ coordonnées. Je renvoie à **[31]**, §6–7, pour sa démonstration.

Proposition 4.6. — *Soit Y une sous-variété fermée, irréductible de X telle que $Y \cap X^{\mathrm{oa}} \neq \varnothing$, soit $r = \dim(Y)$. Il existe un nombre réel $c > 0$ et un voisinage Ω de l'ensemble des matrices orthogonales dans $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ tels que pour tout $\varphi \in \Omega$, il existe une projection standard $\pi\colon \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^r$ telle que $\Delta_Y(\pi\varphi) \geqslant c$.*

On peut alors conclure la démonstration du théorème 4.1. Soit Q un entier naturel assez grand. Appliquons la proposition 4.6 à $Y = X$; soit $c > 0$ tel que $\Delta_X(\varphi) \geqslant c$ pour tout φ dans un voisinage Ω de l'ensemble des matrices orthogonales de taille $m \times n$. Soit x un point de $X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[m]}$. Soit q un entier et soit φ un morphisme de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ comme dans le lemme 4.5 ; on a

$$h(\varphi(x)) \ll qQ^{-1/mn} h(x).$$

L'entier Q étant fixé, l'ensemble des couples (q, φ) que peut fournir le lemme 4.5 est fini ; le lemme 4.4 implique donc l'existence d'un ouvert dense U de X et d'un nombre réel $c(Q)$ tel que, si $x \in U$,

$$h(\varphi(x)) \gg \frac{\Delta_X(\varphi)}{\|\varphi\|^{m-1}} h(x) - c(Q).$$

Comme $\varphi \in q\Omega$,

$$\frac{\Delta_X(\varphi)}{\|\varphi\|^{m-1}} = \frac{q^m \Delta_X(q^{-1}\varphi)}{\|\varphi\|^{m-1}} \geqslant qc.$$

Mises bout à bout, ces inégalités entraînent l'existence d'un nombre réel $a > 0$ et, pour tout entier Q assez grand, d'un nombre réel c_Q et d'un ouvert dense U_Q de X tel que tout point $x \in U_Q(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[m]}$ vérifie

$$ch(x) - c_Q \leqslant aQ^{-1/mn} h(x),$$

d'où $h(x) \leqslant c_Q/(c - aQ^{-1/mn})$ si Q est assez grand.

Cela fournit la majoration de hauteurs souhaitée sur un ouvert dense U de X^{oa}. En considérant les composantes irréductibles de $X \setminus U$, un argument de récurrence descendante l'entraîne alors sur X^{oa} tout entier.

En fait, Habegger démontre un théorème plus général où interviennent des épaississements de l'ensemble $G^{[\dim(X)]}$ au sens de la théorie des hauteurs. Supposons donc fixée une hauteur canonique $\hat{h}$ sur G, associée à un fibré ample d'une compactification équivariante. Pour toute partie Σ de $G(\overline{\mathbf{Q}})$, notons $\mathscr{C}(\Sigma, \varepsilon)$ l'ensemble[(7)] des points de $G(\overline{\mathbf{Q}})$ qui s'écrivent sous la forme xy, où $x \in \Sigma$ et $\hat{h}(y) \leqslant \varepsilon \max(1, \hat{h}(x))$.

Avec ces notations, on a alors le théorème :

THÉORÈME 4.7. — *Soit G un tore ou une variété abélienne et soit X une sous-variété (fermée, irréductible) de G. Il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $X^{\mathrm{oa}}(\overline{\mathbf{Q}}) \cap \mathscr{C}(G^{[\dim(X)]}, \varepsilon)$ soit de hauteur bornée.*

La preuve de ce théorème s'établit de la même façon que celle du théorème 4.1, avec quelques modifications consistant essentiellement à majorer, lorsque $x \in \Sigma$ et $\hat{h}(y) \leqslant \varepsilon(\max(1, \hat{h}(x)))$, la hauteur de x en fonction de celle de xy.

4.2. Finitude

Nous commençons par traiter le cas des tores.

PROPOSITION 4.8 ([**15**], Lemme 8.1). — *Soit X une sous-variété fermée, irréductible, stricte d'un tore $G = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. Alors, pour tout nombre réel B, l'ensemble des points $x \in X^{\mathrm{ta}}(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[1+\dim(X)]}$ tels que $h(x) \leqslant B$ est fini.*

---

(7) La lettre $\mathscr{C}$ est l'initiale de cône.

Remarque 4.9. — Pour obtenir un tel énoncé de finitude, il est nécessaire de considérer l'ensemble X^{ta}. Considérons en effet une composante irréductible Y d'une intersection $X \cap H$, où H est un sous-groupe algébrique strict de G ; supposons qu'elle soit atypique et de dimension positive. En considérant l'image réciproque des points de torsion par une projection de H sur un tore $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{\dim(Y)}$ dont la restriction à Y est génériquement finie, on voit que $Y(\overline{\mathbf{Q}}) \cap H^{[\dim(Y)]}$ contient un ensemble de hauteur bornée qui est dense dans Y. Par suite, si B est assez grand, l'adhérence de l'ensemble des points de $X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[1+\dim(X)]}$ dont la hauteur est $\leqslant B$ contient Y.

Démonstration. — Pour simplifier les notations, on note $m = \dim(X)$. Notons aussi K un corps de définition de X. On définit la norme $\|\cdot\|$ d'un vecteur comme le maximum de ses coordonnées.

Soit $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in X^{\mathrm{ta}}(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[1+m]}$. Soit r la dimension du plus petit sous-groupe algébrique T_x qui contient x : c'est le rang du sous-groupe multiplicatif Γ_x de $\overline{\mathbf{Q}}^*$ engendré par $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Par hypothèse, $\operatorname{codim}(T_x) \geqslant m+1$, c'est-à-dire $r + m + 1 \leqslant n$.

Un théorème de Schlickewei **[70]** fournit des éléments $\eta_1, \ldots, \eta_r \in \mathbf{Q}(x)$ vérifiant les conditions suivantes :

- Il existe des entiers relatifs a_{ij} (pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant r$) et des racines de l'unité $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ dans $\mathbf{Q}(x)$ tels que $\xi_i = \zeta_i \eta_1^{a_{i1}} \ldots \eta_r^{a_{ir}}$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$;
- Pour toute famille $(e_1, \ldots, e_r) \in \mathbf{Z}^r$, $h(\eta_1^{e_1} \ldots \eta_r^{e_r}) \geqslant c(r) \sum_{j=1}^r |e_j| \, h(\eta_j)$.

La preuve de cet énoncé consiste à introduire l'espace vectoriel $\Gamma_x \otimes \mathbf{R}$ (isomorphe à $\mathbf{R}^r$) muni de la jauge ω donnée par la hauteur (on étend h à $\Gamma_x \otimes \mathbf{Q}$ par linéarité, puis à $\Gamma_x \otimes \mathbf{R}$ par continuité). On remplace alors cette jauge par une autre, quadratique, correspondant à l'ellipsoïde de John de la boule $\{\omega(\xi) \leqslant 1\}$. La famille $(\eta_1, \ldots, \eta_r)$ provient d'une base LLL réduite du réseau Γ_x modulo torsion.

On retient en particulier les inégalités

$$h(\xi_i) \gg \sum_{j=1}^r |a_{ij}| \, h(\eta_j), \qquad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Puisqu'on ne considère que des points x de hauteur au plus B et que h est positive ou nulle, il vient en particulier

$$\|a_j\| \, h(\eta_j) \ll 1, \qquad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant r, \tag{4}$$

où l'on a posé $a_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})$.

Soit L le ppcm des ordres des ζ_i et soit $\zeta \in \mathbf{Q}(x)$ une racine de l'unité d'ordre L ; pour tout i, soit ℓ_i un entier tel que $0 \leqslant \ell_i < L$ et $\zeta_i = \zeta^{\ell_i}$. Considérons alors les $r+1$

formes linéaires indépendantes sur $\mathbf{Z}^{n+1}$:

$$\varphi_0(\mathbf{x}) = -Lx_0 + \sum_{i=1}^{n} \ell_i x_i, \quad \text{et} \quad \varphi_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i \qquad (\text{pour } 1 \leqslant j \leqslant r).$$

Un argument de géométrie des nombres (par exemple, le lemme de Siegel de Bombieri–Vaaler) garantit l'existence d'éléments $b_1, \dots, b_{n-r} \in \mathbf{Z}^{n+1}$, linéairement indépendants, satisfaisant les relations $\varphi_j(b_k) = 0$ pour tout j et tout k, et de tailles contrôlées :

$$\prod_{k=1}^{n-r} \|b_k\| \ll L \prod_{j=1}^{r} \|a_j\|.$$

Pour simplifier les notations, posons $A = \prod_{j=1}^{r} \|a_j\|$. On supposera aussi, ce qui est loisible, que $\|b_1\| \leqslant \dots \leqslant \|b_{n-r}\|$.

Pour $1 \leqslant k \leqslant n-r$, notons $(b_{k0}, \dots, b_{kn})$ les coordonnées de b_k. Les caractères $\mathbf{x} \mapsto \prod_{i=1}^{n} x_i^{b_{ki}}$ sur $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, pour $1 \leqslant k \leqslant m$, sont indépendants et définissent un sous-groupe algébrique T_b de codimension m dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. D'après le théorème de Bézout, son degré (calculé dans l'espace projectif $\mathbf{P}^n$) est majoré par

$$\deg(T_b) \ll \prod_{k=1}^{m} \|b_k\| \ll (LA)^{m/(n-r)} \ll (LA)^{m/(m+1)}.$$

Par construction, on a $\prod_{i=1}^{n} \xi_i^{b_{ki}} = 1$ pour tout $k \in \{1, \dots, n-r\}$; autrement dit, $x \in T_b$.

Considérons maintenant la composante Y_x passant par x de l'intersection $X \cap T_b$. Comme $x \in X^{\mathrm{ta}}$, cette composante est de dimension typique ou de dimension nulle. Puisque $\dim(X) + \dim(T_b) - \dim(G) = 0$, on a nécessairement $Y_x = \{x\}$. Une nouvelle application du théorème de Bézout dans l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ entraîne que le nombre de composantes ponctuelles de $X \cap T_b$ est au plus égal à $\deg(X)\deg(T_b) \ll (LA)^{m/(m+1)}$. Comme tous les conjugués de x sur le corps de définition K de X appartiennent à $X \cap T_b$, on en déduit l'inégalité

$$[\mathbf{Q}(x) : \mathbf{Q}] \ll (LA)^{m/(m+1)}. \tag{5}$$

C'est à ce stade qu'entrent en jeu les minorations effectives concernant le problème de Lehmer dans les tores : elles permettent de déduire de cette majoration du degré de x, donc du point η, une minoration de la hauteur des η_j. Les éléments $(\eta_1, \dots, \eta_r)$ de $\mathbf{Q}(x)^*$ sont multiplicativement indépendants et ζ est une racine de l'unité contenue dans $\mathbf{Q}(x)$. Le théorème 3.5 entraîne donc, pour tout $\varepsilon > 0$, une inégalité

$$h(\eta_1) \dots h(\eta_r) \gg_\varepsilon [\mathbf{Q}(\eta) : \mathbf{Q}(\zeta)]^{-1-\varepsilon}.$$

Puisque ζ est d'ordre L, $[\mathbf{Q}(\zeta) : \mathbf{Q}] = \varphi(L) \gg_\varepsilon L^{1-\varepsilon}$. On en déduit alors la minoration

$$A\, h(\eta_1) \dots h(\eta_r) \gg_\varepsilon (LA)^{(1-m\varepsilon)/(m+1)}. \tag{6}$$

Si nous comparons cette inégalité à l'inégalité (4), on obtient

$$LA \ll_{\varepsilon} 1,$$

ce qui signifie que le produit LA est borné indépendamment de x. L'inégalité (5) entraîne alors que lorsque x parcourt l'ensemble qui nous intéresse, $[\mathbf{Q}(x) : \mathbf{Q}]$ est borné. La proposition découle alors du théorème de Northcott. □

Signalons que dans cette approche, la pleine force du théorème 3.5 de Delsinne n'est pas vraiment nécessaire mais simplifie grandement les démonstrations en court-circuitant, par exemple, les arguments galoisiens qui avaient permis à Bombieri, Masser et Zannier de prouver la proposition 4.8 (voir **[12]**, §4, ainsi que **[13]**, Lemme 1 p. 2249) lorsque X est une courbe. Dans **[15]**, ils utilisent la borne un peu plus faible de **[4]**.

Compte tenu du théorème 4.1 d'Habegger, on a donc le théorème suivant :

COROLLAIRE 4.10 (**[30]**, Corollaire 1.4). — *Soit X une sous-variété (fermée, irréductible) du tore $G = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. L'ensemble $X^{\mathrm{oa}}(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[1+\dim(X)]}$ est fini.*

Cela démontre en particulier le théorème 1.4 dans le cas des tores : si X n'est pas géométriquement dégénérée, $X \setminus X^{\mathrm{oa}}$ est une partie fermée stricte de X et $X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[1+\dim(X)]}$ n'est pas dense dans X pour la topologie de Zariski.

L'analogue abélien de la proposition 4.8 a été démontré par Rémond dans **[63]** (théorème 2.1) en supposant la conjecture 3.4 vérifiée. Compte tenu du théorème 3.5 de Carrizosa, on a donc :

PROPOSITION 4.11. — *Soit G une variété abélienne à multiplications complexes (définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$), soit X une sous-variété fermée, irréductible, de A définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Alors, pour tout nombre réel B, l'ensemble des points $x \in X^{\mathrm{ta}}(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[\dim(X)]}$ tels que $h(x) \leqslant B$ est fini. En particulier, l'ensemble $X^{\mathrm{oa}}(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[1+\dim(X)]}$ est fini.*

La démonstration, bien que du même esprit que celle de la proposition 4.8, en diffère par plusieurs points. Des arguments de géométrie des nombres et le théorème de Carrizosa permettent de prouver l'existence d'une famille finie de sous-variétés abéliennes de codimension $\geqslant \dim(X)$ telles que tout point x comme dans la proposition appartienne, modulo un point de torsion, à l'une d'entre elles. Rémond conclut alors à l'aide du théorème de Raynaud sur la conjecture de Manin–Mumford.

Signalons aussi que Rémond démontre dans la même proposition un théorème de finitude analogue pour une intersection $X^{\mathrm{oa},[s]} \cap G^{[t]}$ valable pour toute variété abélienne, où $s \leqslant t$ sont des entiers convenables (mais on a toujours $t > s$ lorsqu'on doit se contenter de résultats partiels en direction de la conjecture 3.4).

Signalons encore que Carrizosa a raffiné le cas abélien du théorème 3.5 (voir le théorème 1.15 de [19]) ; cela lui permet de simplifier la preuve de la proposition 4.11.

Enfin, et de manière analogue au cas des tores, la version abélienne du théorème 1.4 est une conséquence directe du théorème 4.1 et de cette proposition.

4.3. Quand l'exception est la règle

Les théorèmes précédents ne donnent un théorème de finitude que dans l'ouvert X^{oa}. En particulier, ils sont vides quand X^{oa} l'est, c'est-à-dire quand X est géométriquement dégénérée. La démonstration du théorème 1.1′ requiert donc des arguments supplémentaires.

Nous décrirons au paragraphe suivant l'approche de Rémond vers la conjecture 1.5 et la façon dont elle permit à Maurin de prouver ce théorème. Expliquons pour l'instant comment Bombieri, Habegger, Masser et Zannier utilisent le théorème 4.1 pour y parvenir.

Nous considérons donc une courbe (irréductible, fermée) X du tore $G = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, définie sur un corps de nombres K, qui n'est pas contenue dans un sous-groupe algébrique strict de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$. Il s'agit de démontrer que $X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[2]}$ est fini. On raisonne par récurrence sur n ; le cas $n < 2$ est trivial et le cas $n = 2$ résulte de la finitude de l'ensemble des points de torsion situés sur X.

Lorsque X n'est pas dégénérée, c'est-à-dire n'est contenue dans aucun translaté de sous-groupe algébrique strict de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, le résultat est couvert par le théorème 1.4, prouvé dans ce cas par [12]. Supposons donc que X soit contenue dans un translaté d'un sous-groupe algébrique strict. Au prix d'un changement de coordonnées sur $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, il existe un entier $m \in \{1, \dots, n-1\}$, une courbe non dégénérée $C \subset \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ et un point $P_0 \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n-m}$ tels que $X = C \times \{P_0\}$. On peut même supposer, et on le fait, que le stabilisateur de C dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ est réduit à $\{1\}$.

Puisque X n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique strict de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, il en est de même du point P_0 dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n-m}$. En outre, comme on s'intéresse à l'intersection de X avec des sous-groupes de codimension 2 de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, on peut supposer que $m \geqslant 2$, cette intersection étant vide sinon. Soit $\varphi \colon X \times X \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ le morphisme tel que $\varphi(P, Q) = P \cdot Q^{-1}$; soit $\psi \colon C \times C \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ le morphisme analogue. Ainsi, on a $\varphi((P, P_0), (Q, Q_0)) = (\psi(P, Q), 1, \dots, 1)$ pour tout couple $(P, Q) \in C \times C$. Soit S l'adhérence de $\varphi(C \times C)$ pour la topologie de Zariski dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$, c'est une surface contenue dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m \times \{(1, \dots, 1)\}$ et elle n'est pas dégénérée dans ce sous-groupe, car, sinon, C serait dégénérée dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$.

Soit $\overline{X}$ l'adhérence de X dans $\mathbf{P}^n$, soit W celle de S. En résolvant les indéterminées de l'application rationnelle φ de $\overline{X} \times \overline{X}$ dans W, on obtient une surface projective V contenant $X \times X$ comme ouvert dense, munie d'un morphisme birationnel et propre π vers $\overline{X} \times \overline{X}$ et d'un morphisme génériquement fini vers W prolongeant φ ; notons-le encore φ. Par suite, le fibré en droites $\varphi^*\mathscr{O}(1)$ sur W est big et nef (gros et numériquement effectif) ; décomposons-le sous la forme $\mathscr{L}(E)$, où $\mathscr{L}$ est un $\mathbf{Q}$-diviseur ample et E est un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif. Cela entraîne, sur l'ouvert dense $U = V \setminus |E|$, une inégalité de hauteurs

$$h_{\mathscr{O}(1)}(\varphi(P)) = h_{\varphi^*\mathscr{O}(1)}(P) \geqslant h_{\mathscr{L}}(P) + c_1$$

pour tout point $P \in V(\overline{\mathbf{Q}})$ n'appartenant pas à $|E|$. En tirant par π le fibré ample $\mathscr{O}(1) \boxtimes \mathscr{O}(1)$ sur $\overline{X} \times \overline{X}$ on obtient un fibré en droites big et nef sur V et une inégalité de hauteurs

$$h_{\mathscr{L}}(P) \gg h(P_1) + h(P_2) - 1,$$

où $(P_1, P_2) = \pi(P)$. Le fermé complémentaire $V \setminus U$ est une réunion finie de courbes et de points. Si la restriction de φ à une telle courbe $Y \subset V \setminus U$ est un morphisme fini, on a encore une inégalité similaire. Sinon, $\varphi(Y)$ est réduit à un point R de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$; si de plus Y rencontre $X \times X$, on constate que R appartient au stabilisateur de X dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$, donc $R = 1$.

On en déduit ainsi une inégalité

$$h(\varphi(P,Q)) \gg h(P) + h(Q) - 1, \tag{7}$$

valable pour tout couple (P,Q) de $X(\overline{\mathbf{Q}}) \times X(\overline{\mathbf{Q}})$ tel que $P \neq Q$

Cette analyse entraîne, pour un point (P,Q) de $X \times X$, l'« alternative » suivante :

1. $P = Q$;
2. $P \neq Q$ et $\varphi(P,Q) \in S^{\mathrm{oa}}$;
3. $P \neq Q$ et $\varphi(P,Q)$ appartient à une courbe atypique maximale de S.

Précisément, on va prouver la finitude de l'ensemble $X \cap G^{[2]}$ en considérant un point P de cet ensemble et en choisissant Q de la forme $\sigma(P)$, où $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/K)$.

Il s'agit de conclure à la finitude dans chacun des trois cas, qu'on discute maintenant un par un.

Quitte à remplacer K par une extension finie, on suppose que toutes les courbes atypiques maximales de S sont de la forme $Y = S \cap R \cdot H$, où H est un sous-tore minimal de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ de codimension $\geqslant 2$ et R un point K-rationnel de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m(K)$. On suppose aussi que le point P_0 est K-rationnel. Rappelons enfin que l'on raisonne par récurrence et que l'on suppose le théorème 1.1′ vrai pour une courbe d'un tore de dimension $< n$ qui n'est pas contenue dans un sous-tore strict.

LEMME 4.12. — *L'ensemble $X(K) \cap G^{[2]}$ est fini.*

Démonstration. — En analysant les équations des $n(n-1)/2$ projections évidentes de $X \subset \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ sur $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^2$, on prouve qu'il existe une famille finie $\Delta \subset \mathbf{Z}^n$ et une famille finie de places Σ de K telles que, pour tout point $P = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in X(K)$ et toute valuation discrète $v \notin \Sigma$, le vecteur $v(P) = (v(\xi_1), \dots, v(\xi_n))$ soit proportionnel à l'un des éléments de δ.

Les points $P \in X(K)$ tels que $v(P) = 0$ pour tout $v \notin \Sigma$ sont des points Σ-entiers de X. Leur finitude est garantie par le théorème de Liardet **[39]** sur la conjecture de Mordell–Lang pour les courbes dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$.

Si P est un point de $X(K)$, toute valuation $v \notin \Sigma$ telle que $v(P) \neq 0$ fournit une contrainte sur les sous-groupes possibles contenant P. Supposons en effet $v(P)$ parallèle à un élément δ de Δ. Quitte à changer les coordonnées sur $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$, on peut supposer $\delta = (0, \dots, 0, 1)$, et tout sous-groupe de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n$ contenant P est contenu dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n-1} \times \{1\}$. Si $P \in G^{[2]}$, il en est alors de même de la projection de P dans $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{n-1}$ et l'hypothèse de récurrence conclut à la finitude voulue. $\square$

LEMME 4.13. — *L'ensemble des points $P \in X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[2]}$ pour lesquels il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/K)$ tel que $\varphi(P, \sigma(P)) \in S^{\mathrm{oa}}$ est fini.*

Démonstration. — D'après le théorème 4.1, il existe un nombre réel B tel que $h(\varphi(P, \sigma(P))) \leqslant B$. Comme $h(\sigma(P)) = h(P)$, l'inégalité de hauteurs (7) implique alors que $h(P)$ est majoré sur l'ensemble considéré par le lemme. On conclut alors par la proposition 4.8. $\square$

LEMME 4.14. — *Soit $Y \subset S$ une courbe atypique maximale. L'ensemble des points $P \in X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[2]}$ pour lesquels il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/K)$ tel que $P \neq \sigma(P)$ et $\varphi(P, \sigma(P)) \in Y$ est fini.*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe un sous-tore H de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ et un point rationnel $R \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m(K)$ tel que Y soit une composante de $S \cap R \cdot H$. Appliquons $\sigma, \sigma^2, \dots$ à la relation $P \cdot \sigma(P)^{-1} \in R \cdot H$ et faisons-en le produit. Si e est l'ordre de σ dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/K)$, on obtient que $R^e \in H$. Dans des coordonnées de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m$ où $H = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^k \times \{(1, \dots, 1)\}$, on voit que les coordonnées d'indices $k+1$ à m de R sont des racines de l'unité contenues dans K ; il en résulte que $R \cdot H = R_1 \cdot H$, où $R_1 \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^m(K)$ est d'ordre e.

Soit A (*resp.* B) le sous-groupe de $\mathbf{Z}^n$ formé des vecteurs $(a_1, \dots, a_n)$ tels que le caractère $x \mapsto x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ s'annule sur P (*resp.* sur $\varphi(P, \sigma(P))$). Sauf si $\varphi(P, \sigma(P))$ appartient à un ensemble fini de points exceptionnels de Y, le sous-groupe B annule H. Supposons pour l'instant que ce soit le cas. Alors, B contient $A + \{(0, \dots, 0)\} \times \mathbf{Z}^{n-m}$. En passant au quotient par H, on obtient une courbe X_H de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n/H$ qui n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique strict ; de plus, les relations de dépendance satisfaites par P en fournissent pour l'image P_H de P ; on en déduit la finitude requise par récurrence.

Il reste à traiter le cas où $\varphi(P, \sigma(P))$ est un point exceptionnel de Y. Dans ce cas, quitte à étendre le corps K, on peut supposer que $Q = \varphi(P, \sigma(P)) \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^n(K)$. Si e est l'ordre de σ dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/K)$, on a de nouveau $Q^e = 1$; quitte à remplacer P et X

par leur image par l'élévation à la puissance e, on se ramène au cas où $e = 1$, ce qui contredit le fait que $\sigma(P) \neq P$. □

Cela conclut la preuve du théorème 1.1′.

4.4. Inégalité de Vojta et sous-groupes de rang fini

Les conjectures 1.2 et 1.5 généralisent les questions de Manin–Mumford et Mordell–Lang. On peut en fait les considérer comme des variantes uniformes de ces questions modulo tous les quotients de la variété semi-abélienne G qui sont de dimension $> \dim(X)$. La stratégie de Rémond consiste à appliquer une version uniforme des méthodes développées par Vojta, Faltings et McQuillan, ainsi que de la version **[9]** qu'en a donnée Bombieri, pour établir la conjecture de Mordell–Lang dans les variétés semi-abéliennes. Il l'a développée dans plusieurs articles (**[58, 59, 60, 62]**), l'application à la question du présent rapport fait l'objet des articles **[67, 64, 66]** (le premier, en collaboration avec E. Viada) et est résumée dans l'article de survol **[65]** et les lignes qui suivent n'en sont qu'une rapide synthèse. Pour simplifier la discussion, nous supposons ici que G est une variété abélienne (Maurin a traité le cas des tores dans **[43]**, le cas des variétés semi-abéliennes est encore ouvert).

Soit donc X une sous-variété (fermée, irréductible) d'une variété abélienne G ; posons $m = \dim(X)$. Si X est une courbe de genre $\geqslant 2$, l'inégalité de Vojta compare de façon uniforme la hauteur (de Néron–Tate, *i.e.*, normalisée et symétrique) d'un couple (x, y) de $X \times X$ à celle du point $ax - y$: elle affirme qu'il existe des nombres réels c_1, c_2, c_3 tels que

$$h(ax - y) \geqslant c_1(a^2 h(x) + h(y))$$

pour tout couple (x, y) de points de $X^2(\overline{\mathbf{Q}})$ et tout entier naturel a tels que $a \geqslant c_2$, $h(x) \geqslant c_3$, $a^2 h(y) \geqslant c_3$. Si l'on choisit a^2 proche de $h(y)/h(x)$, on obtient une minoration de l'angle formé par les droites $\mathbf{R}x$ et $\mathbf{R}y$ dans l'espace vectoriel réel $G(\overline{\mathbf{Q}}) \otimes \mathbf{R}$. Lorsque X et G sont définies sur un corps de nombres K, et x, y appartiennent à $X(K)$, le théorème de Mordell–Weil entraîne alors que l'ensemble des points de $X(K)$ de hauteur $\geqslant c_3$ est fini ; il en est par suite de même de $X(K)$ lui-même et l'on a prouvé, suivant Vojta, la conjecture de Mordell.

Revenons au cas général et soit Z_0 la réunion des translatés de sous-variétés abéliennes de G qui sont contenues dans X ; c'est l'ensemble exceptionnel pour le problème de Mordell–Lang. Soit $a = (a_0, \dots, a_m) \in \mathbf{Z}^{m+1}$; si $Z_0 \neq X$, le morphisme

$$\beta_a \colon X^{m+1} \to G^m, \quad (x_0, \dots, x_m) \mapsto (a_1 x_1 - a_0 x_0, \dots, a_m x_m - a_{m-1} x_{m-1})$$

est génériquement fini et l'inégalité de Vojta affirme que

$$\sum_{i=1}^{m} h(a_i x_i - a_{i-1} x_{i-1}) \gg \sum_{i=0}^{m} a_i^2 h(x_i)$$

pour tout $x \in (X \setminus Z_0)^{m+1}(\overline{\mathbf{Q}})$ et tout $a \in \mathbf{Z}^{m+1}$ tels que pour tout i, $a_{i+1} \ll a_i$ et $a_i^2 h(x_i) \gg a_0^2$.

Soit maintenant Γ un sous-groupe de rang fini de $G(\overline{\mathbf{Q}})$; nous supposerons toujours que Γ est *saturé*, c'est-à-dire que tout endomorphisme surjectif de G induit un endomorphisme surjectif de Γ. Dans **[66]**, Rémond introduit plusieurs candidats pour un lieu exceptionnel. La généralisation la plus évidente de l'ensemble $X \setminus X^{\mathrm{ta}}$ est définie ainsi : il s'agit de l'ensemble $Z_{X,\Gamma}$ des points $x \in X$ pour lesquels il existe une sous-variété abélienne H de G et un point γ de Γ tels que $\dim_x(X \cap (\gamma + H)) > \max(0, \dim(X) - \operatorname{codim}(H))$.

En vue de généraliser la définition de l'ensemble X^{oa} (son complémentaire dans X, plutôt), Rémond définit trois séries d'ensembles exceptionnels, indexées par un entier $r \in \{0, \dots, \dim(G)\}$:

- L'ensemble $Z^{(r)}_{X,\mathrm{ano}} = X \setminus X^{\mathrm{oa},[r]}$ formé des tels points x pour lesquels il existe une sous-variété abélienne H de G telle que[8]

$$\dim_x(X \cap (x + H)) > \max(0, r - 1 - \operatorname{codim}(H)).$$

- L'ensemble $Z^{(r)}_{X,\mathbf{Q}}$ réunion des sous-variétés fermées irréductibles Y de X telles qu'il existe des diviseurs effectifs $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ sur G et un entier a tels que

$$\deg(c_1(\mathscr{L}_1)^a c_1(\mathscr{L}_2)^{\dim(Y)-a} \cap [Y]) = 0$$
$$\operatorname{rang}(\mathscr{L}_1) - 1 \leqslant a \leqslant \dim(Y)$$
$$\operatorname{rang}(\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2) \geqslant r.$$

  (Le rang d'un fibré en droites $\mathscr{L}$ est le plus grand entier naturel r tel que $c_1(\mathscr{L})^r$ ne soit pas numériquement trivial.)
- L'ensemble $Z^{(r)}_X$ défini de façon analogue à $Z^{(r)}_{X,\mathbf{Q}}$ mais en considérant des diviseurs à coefficients réels.

D'après le théorème 1.4 de **[66]**, ce sont des parties fermées de X qui vérifient

$$Z^{(r)}_{X,\mathbf{Q}} \subset Z^{(r)}_X \subset Z^{(r)}_{X,\mathrm{ano}}.$$

Observons aussi que lorsque Γ parcourt l'ensemble des sous-groupes de rang fini de $G(\overline{\mathbf{Q}})$, la réunion des $Z_{X,\Gamma}$ est égale à $Z^{(1+\dim(X))}_{X,\mathrm{ano}}$.

Grâce au théorème de complète réductibilité de Poincaré, toute sous-variété abélienne H de G est la composante neutre du noyau d'un endomorphisme φ de G. Plutôt que de travailler dans G/H, on peut appliquer φ. On peut en outre se restreindre à un ensemble Φ d'endomorphismes qui sont presque des projecteurs, au sens où il existe un entier naturel a tel que $\varphi \circ \varphi = a\varphi$ et $\|\varphi\| \ll a$ (on a fixé une norme sur l'espace

[8] Les lettres ano signifient *anomalous*, Rémond utilise la notation an.

vectoriel réel $\mathrm{End}(G)_{\mathbf{R}}$), et dont les images forment un ensemble fini de sous-variétés abéliennes de G.

L'inégalité de Vojta uniforme que démontre Rémond est la suivante :

THÉORÈME 4.15 ([**64**], proposition 5.1). — *Avec ces notations, il existe des nombres réels $c_1, c_2, c_3 > 0$ tels que l'on ait*

$$\sum_{i=1}^{m} h(\varphi(a_i x_i - a_{i-1} x_{i-1})) \geqslant c_1 \|\varphi\|^2 \sum_{i=0}^{m} a_i^2 h(x_i)$$

pour tout $x \in (X \setminus Z_X^{(r)})^{m+1}$, tout $a \in \mathbf{N}^{m+1}$ et tout $\varphi \in \Phi$ dont l'image est de dimension $\geqslant r$ tels que $a_{i+1} \leqslant c_2 a_i$ et $h(x_i) \geqslant c_3$ pour tout i.

Ce théorème affirme ainsi l'existence d'une inégalité de hauteurs pour des points en dehors du lieu exceptionnel $Z_X^{(r)}$. L'ensemble $Z_{X,\mathrm{ano}}^{(r)}$, de définition peut-être plus naturelle, est parfois plus gros. En outre, la proposition 1.3 de [**64**] (déjà mentionnée) montre qu'il est nécessaire d'exclure les points de lieu $Z_{X,\mathbf{Q}}^{(r)}$; il est possible que ce soit aussi suffisant.

La preuve du théorème 4.15 consiste en la vérification, délicate, des hypothèses de l'« inégalité de Vojta généralisée » que Rémond avait établie dans [**62**]. Il faut notamment établir des minorations uniformes de degrés d'intersection, parmi lesquelles :

$$\deg(c_1(\beta_a^*(\varphi, \dots, \varphi)^* \mathscr{L})^{m(m+1)} \cap [X^{m+1}]) \geqslant c_4 (a_0 \dots a_m)^{2m} \|\varphi\|^{2m(m+1)},$$

où c_4 est un nombre réel strictement positif. L'existence de c_4, lorsque a et φ sont fixés, équivaut à ce que l'homomorphisme $(\varphi, \dots, \varphi) \circ \beta_a$ soit génériquement fini. Rémond établit cette minoration uniforme en combinant des propriétés d'homogénéité du membre de gauche (qui permettent de supposer que $a = (1, \dots, 1)$) et la possibilité d'étendre de façon continue ce degré d'intersection au cas où φ appartient à $\mathrm{End}(G)_{\mathbf{R}}$: la définition de l'ensemble exceptionnel $Z_X^{(r)}$ assure que ce degré soit toujours strictement positif, de même que toutes les variantes requises par le théorème de [**62**].

Pour toute partie Σ de $G(\overline{\mathbf{Q}})$ et tout nombre réel $\varepsilon > 0$, notons $\mathscr{B}(\Sigma, \varepsilon)$ l'ensemble[9] des points de $G(\overline{\mathbf{Q}})$ de la forme $x + y$, où $x \in \Sigma$ et $\hat{h}(y) \leqslant \varepsilon$.

COROLLAIRE 4.16 ([**64**], Théorème 1.2). — *Il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble $(X(\overline{\mathbf{Q}}) \setminus Z_X^{(r)}) \cap \mathscr{B}(\Gamma + G^{[r]}, \varepsilon)$ soit de hauteur bornée.*

Remarque 4.17. — Il convient de noter que dans ce résultat, il n'y a pas le décalage d'exposants que l'on trouvait dans le théorème 4.1. C'est en quelque sorte le prix à payer pour permettre de traiter des sous-groupes de rang fini. En effet, d'après la proposition 1.3 de [**64**], si Z est un fermé de X tel que $(X(\overline{\mathbf{Q}}) \setminus Z) \cap \mathscr{B}(\Gamma + G^{[r]}, \varepsilon)$ est de hauteur bornée pour tout sous-groupe Γ de rang fini de $G(\overline{\mathbf{Q}})$, alors Z contient $Z_{X,\mathbf{Q}}^{(r)}$.

(9) La lettre $\mathscr{B}$ est l'initiale du mot boule.

Démonstration. — Pour simplifier, on ne traite que la variante du corollaire sans ε et on démontre que l'ensemble $(X(\overline{\mathbf{Q}}) \setminus Z_X^{(r)}) \cap (\Gamma + G^{[r]})$ est de hauteur bornée. Considérons, par l'absurde, une suite (x_n) dans cet ensemble dont la hauteur tend vers l'infini. On écrit $x_n = \gamma_n + P_n + Q_n$, où $\gamma_n \in \Gamma$ et P_n appartient à une sous-variété abélienne de codimension $\geqslant \dim(X)$. On fixe un endomorphisme $\varphi_n \in \Phi$ tel que $\varphi_n(P_n) = 0$; on peut en outre supposer que $\max(h(\gamma_n), h(P_n)) \ll h(x_n)$. Enfin, comme $\mathrm{End}(G)_{\mathbf{R}}$ et $\Gamma \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ sont des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, et quitte à considérer des sous-suites convenables de la suite (x_n), on peut supposer que $\varphi_n / \|\varphi_n\|$ et $\gamma_n / h(\gamma_n)$ sont assez proches d'un même élément de $\mathrm{End}(G)_{\mathbf{R}}$, *resp.* de $\Gamma_{\mathbf{R}}$. Au prix d'une éventuelle extraction supplémentaire, il est alors possible de construire des entiers $a_0, \ldots, a_m$ de sorte à contredire le théorème 4.15 (avec $\varphi = \varphi_0$). □

Lorsque X n'est pas géométriquement dégénérée, $X^{\mathrm{oa}} \subset X \setminus Z_X^{(1+\dim(X))}$ n'est pas vide et le corollaire entraîne donc que $X^{\mathrm{oa}}(\overline{\mathbf{Q}}) \cap (\Gamma + G^{[\dim(X)]})$ est de hauteur bornée. Si, de plus, G est à multiplications complexes, la proposition 4.11 entraîne que cet ensemble est fini, démontrant du même coup le théorème 1.6.

L'analogue abélien du théorème 1.1$'$ s'ensuit facilement :

COROLLAIRE 4.18 ([**64**], Corollaire 1.6). — *Soit X une courbe irréductible d'une variété abélienne à multiplications complexes G. Si X n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique strict de G, alors $X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[2]}$ est fini.*

Démonstration. — Soit H la plus petite sous-variété abélienne de G contenant un translaté de X et soit g un point de X tel que $X \subset g + H$. Alors, la courbe $Y = X - g$ est non dégénérée dans H, tandis que g engendre G/H. Soit Γ le plus petit sous-groupe saturé de $H(\overline{\mathbf{Q}})$ contenant l'image de g par tout homomorphisme de G dans H ; c'est un sous-groupe de rang fini de $H(\overline{\mathbf{Q}})$. On constate que pour tout point x de $X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[2]}$, $x - g$ appartient à $Y(\overline{\mathbf{Q}}) \cap (\Gamma + H^{[2]})$. Appliqué à Y et au groupe Γ, le théorème 1.6 entraîne donc que $X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap G^{[2]}$ n'est pas dense dans X. Comme X est une courbe, il est donc fini. □

Remarque 4.19. — Lorsqu'on oublie la partie $G^{[r]}$, les énoncés précédents fournissent un cas particulier de l'énoncé suivant, combinaison des conjectures de Mordell–Lang et Bogomolov : *Si X n'est pas un translaté d'un sous-groupe algébrique de G, l'intersection de X et de $\mathscr{B}(\Gamma, \varepsilon)$ n'est pas dense dans X pour la topologie de Zariski.* Ce résultat a été établi par B. Poonen [**54**] (pour les produits de variétés abéliennes et de tores) et par Rémond [**61**] en général.

4.5. Conjecture de Bogomolov et finitude

Habegger [**30**], Maurin [**43**] et Viada [**75, 77**] ont montré comment utiliser les versions effectives de la conjecture de Bogomolov pour déduire du théorème 4.1 (ou de ses variantes) des énoncés de finitude. Ces deux premiers auteurs traitaient le cas des tores, la dernière des variétés abéliennes, cas sur lequel nous allons nous concentrer maintenant. Pour un énoncé similaire au théorème 4.20 dans le cas des tores, voir le théorème 11.6 de [**43**].

Dans tout ce paragraphe, on considère donc une variété abélienne G définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$, un fibré en droites ample $\mathscr{L}$ sur G et la hauteur canonique $\hat{h}_{\mathscr{L}}$ associée.

Avec ces notations, Viada démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 4.20 ([**77**], Theorem 1.6). — *On suppose vérifiée la conjecture 3.8. Soit X une sous-variété (fermée, irréductible) de G, distincte de G.*

1. *Supposons que X ne soit contenue dans aucun sous-groupe algébrique strict de G. Pour tout nombre réel B, il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble des points de $X \cap \mathscr{B}(G^{[1+\dim(X)]}, \varepsilon)$ dont la hauteur est $\leqslant B$ ne soit pas dense dans X pour la topologie de Zariski.*
2. *Supposons que X ne soit contenue dans aucun translaté de sous-variété abélienne de G. Soit Γ un sous-groupe de rang fini de G. Pour tout nombre réel B, il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble des points de $X \cap \mathscr{B}(\Gamma \cdot G^{[1+\dim(X)]}, \varepsilon)$ dont la hauteur est $\leqslant B$ ne soit pas dense dans X pour la topologie de Zariski.*

En fait, la preuve ne requiert la conjecture 3.8 que sous une forme affaiblie, et pour un ensemble fini de sous-quotients de puissances de G, ce qui permet, dans cet énoncé, de choisir la constante c indépendamment de G.

Viada commence par établir l'équivalence des deux assertions du théorème ; la démonstration se concentre alors sur la seconde.

De manière analogue à ce qui a été fait dans le paragraphe sur l'inégalité de Vojta, on écrit une sous-variété abélienne de codimension au moins $1 + \dim(X)$ comme la composante neutre du noyau d'un homomorphisme surjectif. Pour simplifier les notations, supposons ici que G est une puissance A^g d'une variété abélienne simple A de dimension a. Notons $E = \operatorname{End}_{\overline{\mathbf{Q}}}(A)$; c'est un sous-anneau du corps $E \otimes \mathbf{Q}$. Il suffit de considérer des homomorphismes surjectifs de but A^r, où $r \in \{0, \dots, g\}$ est un entier tel que $ar \geqslant 1 + \dim(X)$. Ces homomorphismes sont donnés par une matrice $r \times g$ à coefficients dans E. Un argument de réduction de Gauß couplé avec un énoncé d'approximation diophantienne (lemme de Dirichlet) ramène à considérer un ensemble fini Φ d'homomorphismes $\varphi \colon A^{g+s} \to A^r$ dont la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} m\mathrm{I}_r & L & L' \end{pmatrix}$ et est de norme $\ll |m|$.

Il reste à prouver que pour tout $\varphi \in \Phi$ et tout point γ de A^s, l'ensemble des points de A^{g+s} de la forme (x, γ), où $x \in X$ est de hauteur $\leqslant B$, où $(x, \gamma) \in \mathscr{B}(\ker(\varphi), \varepsilon / \|\varphi\|^2)$ n'est pas dense dans $X \times \{\gamma\}$ pour la topologie de Zariski. En revanche, le processus d'approximation modifie ε et on n'a pas de contrôle a priori de $\|\varphi\|$. Il suffit cependant de trouver un nombre réel ε qui entraîne la non-densité pour tout homomorphisme φ comme ci-dessus. C'est là qu'intervient la forme effective conjecturale de la conjecture de Bogomolov.

Lorsque $\|\varphi\|$ n'est pas trop grande, on obtient directement la non-densité voulue en considérant l'image par φ de $X \times \{\gamma\}$ dans A^s et en notant qu'elle est de codimension au moins 1 et de degré $\ll \|\varphi\|^{2\dim(X)}$. Les images par φ dans $\varphi(X \times \{\gamma\})$ des points $p = (x, \gamma)$ considérés sont en effet de hauteur $\ll \varepsilon \|\varphi\|^2$; leur densité entraîne que $\varepsilon \|\varphi\|^{2\dim(X)+2} \gg 1$.

Dans l'autre cas, on considère l'isogénie ψ de A^g de matrice $\begin{pmatrix} m\mathrm{I}_r & L \\ 0 & \mathrm{I}_{g-r} \end{pmatrix}$ et une composante irréductible Y de $[m]^{-1}\psi(X)$ dans A^g ; on démontre que son degré est majoré par un multiple de $\|\varphi\|^{2a(g-r)}$. Si $p = (x, \gamma)$ vérifie les relations envisagées, on constate que $\hat{h}(\psi(x)) \ll \max(B, \varepsilon \|\varphi\|^2)$. Sous l'hypothèse qu'ils forment un ensemble dense dans $X \times \{\gamma\}$, la version effective de la conjecture de Bogomolov entraîne que $\max(B, \varepsilon \|\varphi\|^2) \ll \|\varphi\|^{2/(ag-\dim(X)}$.

On vérifie que si ε est assez petit (indépendamment de φ), ces deux inégalités sont toutes deux fausses, ce qui conclut la démonstration.

Sous l'hypothèse que G a une densité positive de réductions ordinaires, le théorème 3.9 de Galateau fournit une version effective de la conjecture de Bogomolov à peine plus faible que celle conjecturée. En outre, cette hypothèse est vérifiée pour l'ensemble fini de quotients de G considérés dans la preuve. En reprenant les calculs ci-dessus, on constate que cela suffit pour assurer la conclusion du théorème 4.20.

Compte tenu du théorème 4.7, il en résulte le théorème :

THÉORÈME 4.21. — *Soit G une variété abélienne banale et soit X une sous-variété (fermée, irréductible) non dégénérée dans G. Soit Γ un sous-groupe de rang fini de $G(\overline{\mathbf{Q}})$. Il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap \mathscr{B}(G^{[1+\dim(X)]} + \Gamma, \varepsilon)$ ne soit pas dense dans X pour la topologie de Zariski.*

En raisonnant comme dans la preuve du corollaire 4.18, on en déduit un résultat pour les courbes :

COROLLAIRE 4.22. — *Soit G une variété abélienne banale et soit X une courbe (fermée, irréductible) dans G qui n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique strict de G. Il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap \mathscr{B}(G^{[1+\dim(X)]}, \varepsilon)$ soit fini.*

4.6. Familles de variétés semi-abéliennes

Comme je l'ai évoqué dans l'introduction, Pink a proposé une généralisation commune des conjectures d'André–Oort, Manin–Mumford, Mordell–Lang dans le cadre des variétés de Shimura mixtes. Une variante de cette dernière conjecture, d'énoncé plus élémentaire, concerne les familles de variétés semi-abéliennes.

Soit S une variété algébrique complexe et soit $p\colon G \to S$ un schéma semi-abélien sur S, c'est-à-dire une famille de variétés semi-abéliennes paramétrée par S. Pour tout entier r, on note $G^{[r]}$ la réunion, pour $s \in S$, des sous-ensembles $G_s^{[r]}$ de G_s : un point g de G, d'image $p(g) \in S$, appartient à $G^{[r]}$ si et seulement s'il appartient à un sous-groupe algébrique de codimension $\geqslant r$ de sa fibre $G_{p(g)}$.

Dans ces conditions, Pink conjecturait l'énoncé suivant :

Conjecture 4.23 ([**49**], Conjecture 6.2). — *Soit $p\colon G \to S$ un schéma semi-abélien et soit $X \subset G$ une sous-variété fermée irréductible. Si X n'est pas contenue dans un sous-schéma en groupes strict de G, alors $X \cap G^{[1+\dim(X)]}$ n'est pas dense dans X pour la topologie de Zariski.*

Donnons un exemple : prenons pour S le complémentaire de $\{0, 1, \infty\}$ dans la droite projective et soit $p\colon E \to S$ la famille de Legendre des courbes elliptiques, définie par l'équation affine $y^2 = x(x-1)(x-s)$ dans $\mathbf{A}^2_S$. Soit alors $G = E \times_S E$, le produit fibré de deux copies de E. L'ensemble $G^{[2]}$ est l'ensemble des couples (s, e_1, e_2) où $s \in S$ et e_1, e_2 sont des points de torsion de la courbe E_s. Dans ce cas, Masser et Zannier démontrent le théorème suivant ([**41**], voir aussi [**40**]) :

Théorème 4.24. — *Soit $E \to S$ une famille non constante de courbes elliptiques et soit G le schéma abélien $E \times_S E$. Soit X une courbe fermée irréductible dans G. Alors, $X \cap G^{[2]}$ est contenu dans une réunion finie de sous-schémas abéliens stricts de G.*

La preuve de ce théorème, d'une nature assez différente de celles esquissées dans ce rapport, repose sur l'approche de la conjecture de Manin–Mumford découverte par Pila et Zannier [**47**] et sur un théorème de Pila et Wilkie concernant les points rationnels des ensembles définissables dans une structure o-minimale.

Toutefois, en reprenant une construction (due à K. Ribet) de points spéciaux sur des extensions de schémas abéliens par un tore, D. Bertrand [**7**] a observé récemment que la conjecture 4.23 est fausse.

Théorème 4.25 ([**7**], Theorem 1). — *Soit E une courbe elliptique à multiplications complexes, soit S une courbe algébrique complexe et soit $p\colon G \to S$ un schéma semi-abélien qui est extension non constante de E_S par $\mathbf{G}_{\mathrm{m},S}$. Il existe une section $\beta\colon S \to G$ dont l'image n'est contenue dans aucun sous-schéma en groupes strict de G,* *mais tel que l'ensemble des points $s \in S$ tels que $\beta(s)$ soit un point de torsion de G_s soit infini.*

Démonstration. — Soit E' la courbe elliptique duale de E (on a $E \simeq E'$, mais il est plus pratique de les différencier) et notons $\mathscr{P} \to E \times E'$ la biextension de Poincaré. L'extension G est donnée par un morphisme non constant $\gamma\colon S \to E'$; l'universalité de la biextension de Poincaré implique que si l'on note $\gamma_E = \gamma \times \mathrm{Id}_E$, $\gamma_E^* \mathscr{P}$ est égal au $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur sur E_S donné par G. Il y a ainsi une bijection canonique entre l'ensemble des sections $\beta\colon S \to G$ et celui des couples formé d'un morphisme q de S dans E et d'une trivialisation du fibré en droites $(\gamma \times q)^* \mathscr{P}$ sur S.

Soit $f\colon E' \to E$ une isogénie telle que $f' \neq f$ et notons g l'isogénie antisymétrique donnée par $g = f - f'$. La bidualité de $\mathscr{P}$ entraîne l'existence d'un isomorphisme canonique

$$(\gamma, f \circ \gamma)^* \mathscr{P} \simeq (\gamma, f' \circ \gamma)^* \mathscr{P}.$$

Comme $\mathscr{P}$ est une biextension, on a donc

$$(\gamma, (f - f') \circ \gamma))^* \mathscr{P} \simeq \mathscr{O}_S,$$

d'où l'existence d'une section canonique $\beta\colon S \to G$ relevant $g \circ \gamma\colon S \to E$.

Pour tout $s \in S$ tel que $\gamma(s)$ est un point de torsion de E, on démontre que le point $\beta(s)$ est de torsion. Toutefois, comme l'extension G n'est pas constante, les seuls sous-schémas en groupes stricts de G sont ou bien finis sur S, ou bien de la forme $T\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, où T est fini sur S. Comme $g \circ \gamma$ n'est pas constante, elle n'est pas d'ordre fini et $\beta(S)$ n'est contenue dans aucun sous-schéma en groupes strict de G. □

Comme l'explique Bertrand dans son article, ce contre-exemple s'interprète parfaitement dans le cadre de la conjecture générale de Pink ([**49**], conjecture 1.3). Avec les notations du théorème 4.25, l'image $\beta(S)$ provient d'une sous-variété spéciale d'une sous-variété de Shimura mixte. Autrement dit, contrairement au cas absolu, toutes les sous-variétés spéciales d'un schéma semi-abélien ne sont pas des translatés de sous-schémas abéliens par des points de torsion.

Il est intéressant de remarquer que les points de Ribet analogues à ceux du théorème précédent, lorsque S est un point, fournissent des contre-exemples à une généralisation hâtive des conjectures 3.3 et 3.4 aux variétés semi-abéliennes générales.

Restreinte au cas des schémas abéliens, la conjecture 4.23 est une conséquence de la conjecture générale de Pink et reste ouverte.

Remerciements

Je voudrais remercier D. Bertrand, S. David, A. Galateau, D. Masser, G. Rémond, E. Ullmo et U. Zannier pour leur aide dans la préparation de ce rapport.

En outre, les dix années qui séparent l'article fondateur [**12**] et la preuve des résultats exposés dans ce rapport ont bien sûr vu de nombreux progrès intermédiaires ; je n'ai pas pu tous les mentionner et m'en excuse auprès de leurs auteurs.

RÉFÉRENCES

[1] A. Abbes – Hauteurs et discrétude (d'après L. Szpiro, E. Ullmo et S. Zhang), Séminaire Bourbaki, vol. 1996/97, exposé n° 825, *Astérisque* **245** (1997), p. 141–166.

[2] F. Amoroso & S. David – Le problème de Lehmer en dimension supérieure, *J. reine angew. Math.* **513** (1999), p. 145–179.

[3] ______, Minoration de la hauteur normalisée dans un tore, *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), p. 335–381.

[4] ______, Distribution des points de petite hauteur dans les groupes multiplicatifs, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* **3** (2004), p. 325–348.

[5] F. Amoroso & E. Viada – Small points on subvarieties of a torus, *Duke Math. J.* **150** (2009), p. 407–442.

[6] J. Ax – Some topics in differential algebraic geometry. I. Analytic subgroups of algebraic groups, *Amer. J. Math.* **94** (1972), p. 1195–1204.

[7] D. Bertrand – Special points and Poincaré biextensions, prépublication arXiv:1104.5178.

[8] F. A. Bogomolov – Points of finite order on abelian varieties, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **44** (1980), p. 782–804, 973.

[9] E. Bombieri – The Mordell conjecture revisited, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **17** (1990), p. 615–640.

[10] E. Bombieri & W. Gubler – *Heights in Diophantine geometry*, New Mathematical Monographs, vol. 4, Cambridge Univ. Press, 2006.

[11] E. Bombieri, P. Habegger, D. Masser & U. Zannier – A note on Maurin's theorem, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **21** (2010), p. 251–260.

[12] E. Bombieri, D. Masser & U. Zannier – Intersecting a curve with algebraic subgroups of multiplicative groups, *Int. Math. Res. Not.* (1999), n° 20, p. 1119–1140.

[13] ______, Intersecting curves and algebraic subgroups : conjectures and more results, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), p. 2247–2257.

[14] ———, Anomalous subvarieties—structure theorems and applications, *Int. Math. Res. Not.* (2007), n° 19, p. 1–33.

[15] ———, Intersecting a plane with algebraic subgroups of multiplicative groups, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* **7** (2008), p. 51–80.

[16] ———, On unlikely intersections of complex varieties with tori, *Acta Arith.* **133** (2008), p. 309–323.

[17] E. Bombieri & U. Zannier – Algebraic points on subvarieties of $\mathbf{G}_m^n$, *Int. Math. Res. Not.* (1995), n° 7, p. 333–347.

[18] J.-B. Bost, H. Gillet & C. Soulé – Heights of projective varieties and positive Green forms, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), p. 903–1027.

[19] M. Carrizosa – Petits points et multiplication complexe, *Int. Math. Res. Not.* (2009), n° 16, p. 3016–3097.

[20] S. David & M. Hindry – Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M, *J. reine angew. Math.* **529** (2000), p. 1–74.

[21] S. David & P. Philippon – Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes, in *Number theory (Tiruchirapalli, 1996)*, Contemp. Math., vol. 210, Amer. Math. Soc., 1998, p. 333–364.

[22] ———, Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **28** (1999), p. 489–543.

[23] ———, Sous-variétés de torsion des variétés semi-abéliennes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **331** (2000), p. 587–592.

[24] E. Delsinne – Le problème de Lehmer relatif en dimension supérieure, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **42** (2009), p. 981–1028.

[25] E. Dobrowolski – On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial, *Acta Arith.* **34** (1979), p. 391–401.

[26] G. Faltings – Diophantine approximation on abelian varieties, *Ann. of Math.* **133** (1991), p. 549–576.

[27] A. Galateau – Le problème de Bogomolov effectif sur les variétés abéliennes, *Algebra Number Theory* **4** (2010), p. 547–598.

[28] P. Habegger – Intersecting subvarieties of $\mathbf{G}_m^n$ with algebraic subgroups, *Math. Ann.* **342** (2008), p. 449–466.

[29] ———, A Bogomolov property for curves modulo algebraic subgroups, *Bull. Soc. Math. France* **137** (2009), p. 93–125.

[30] ———, Intersecting subvarieties of abelian varieties with algebraic subgroups of complementary dimension, *Invent. Math.* **176** (2009), p. 405–447.

[31] ———, On the bounded height conjecture, *Int. Math. Res. Not.* (2009), n° 5, p. 860–886.

[32] M. Hindry – Autour d'une conjecture de Serge Lang, *Invent. Math.* **94** (1988), p. 575–603.

[33] M. HINDRY & J. H. SILVERMAN – *Diophantine geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 201, Springer, 2000.

[34] E. HRUSHOVSKI – The Manin-Mumford conjecture and the model theory of difference fields, *Ann. Pure Appl. Logic* **112** (2001), p. 43–115.

[35] J. KIRBY – The theory of the exponential differential equations of semiabelian varieties, *Selecta Math. (N.S.)* **15** (2009), p. 445–486.

[36] S. LANG – *Fundamentals of Diophantine geometry*, Springer, 1983.

[37] M. LAURENT – Minoration de la hauteur de Néron-Tate, in *Seminar on number theory, Paris 1981–82 (Paris, 1981/1982)*, Progr. Math., vol. 38, Birkhäuser, 1983, p. 137–151.

[38] ______, Équations diophantiennes exponentielles, *Invent. Math.* **78** (1984), p. 299–327.

[39] P. LIARDET – Sur une conjecture de Serge Lang, in *Journées Arithmétiques de Bordeaux (Conf., Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1974)*, Soc. Math. France, 1975, p. 187–210. Astérisque, Nos. 24–25.

[40] D. MASSER & U. ZANNIER – Torsion anomalous points and families of elliptic curves, *Amer. J. Math.* **132** (2010), p. 1677–1691.

[41] ______, Torsion points on families of squares of elliptic curves, *Math. Ann.* **352** (2012), p. 453–484.

[42] G. MAURIN – Courbes algébriques et équations multiplicatives, *Math. Ann.* **341** (2008), p. 789–824.

[43] ______, Équations multiplicatives sur les sous-variétés des tores, *Int. Math. Res. Not.* (2011), n° 23, p. 5259–5366.

[44] M. MCQUILLAN – Division points on semi-abelian varieties, *Invent. Math.* **120** (1995), p. 143–159.

[45] A. OGUS – Hodge cycles and crystalline cohomology, *Lecture Notes in Math.* **900** (1981), p. 357–414.

[46] J. PILA – O-minimality and the André-Oort conjecture for $\mathbb{C}^n$, *Ann. of Math.* **173** (2011), p. 1779–1840.

[47] J. PILA & U. ZANNIER – Rational points in periodic analytic sets and the Manin-Mumford conjecture, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **19** (2008), p. 149–162.

[48] R. PINK – l-adic algebraic monodromy groups, cocharacters, and the Mumford-Tate conjecture, *J. reine angew. Math.* **495** (1998), p. 187–237.

[49] ______, A combination of the conjectures of Mordell-Lang and André-Oort, in *Geometric methods in algebra and number theory*, Progr. Math., vol. 235, Birkhäuser, 2005, p. 251–282.

[50] ______, A common generalization of the conjectures of André-Oort, Manin-Mumford, and Mordell-Lang, 2005, Tech. report, ETH, Zürich, 2005, `http://www.math.ethz.ch/~pink/ftp/AOMMML.pdf`.

[51] R. PINK & D. ROESSLER – On Hrushovski's proof of the Manin-Mumford conjecture, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002)*, Higher Ed. Press, 2002, p. 539–546.

[52] ———, On ψ-invariant subvarieties of semiabelian varieties and the Manin-Mumford conjecture, *J. Algebraic Geom.* **13** (2004), p. 771–798.

[53] B. POIZAT – L'égalité au cube, *J. Symbolic Logic* **66** (2001), p. 1647–1676.

[54] B. POONEN – Mordell-Lang plus Bogomolov, *Invent. Math.* **137** (1999), p. 413–425.

[55] Z. RAN – On subvarieties of abelian varieties, *Invent. Math.* **62** (1981), p. 459–479.

[56] M. RAYNAUD – Around the Mordell conjecture for function fields and a conjecture of Serge Lang, in *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, Lecture Notes in Math., vol. 1016, Springer, 1983, p. 1–19.

[57] ———, Courbes sur une variété abélienne et points de torsion, *Invent. Math.* **71** (1983), p. 207–233.

[58] G. RÉMOND – Inégalité de Vojta en dimension supérieure, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **29** (2000), p. 101–151.

[59] ———, Sur le théorème du produit, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **13** (2001), p. 287–302.

[60] ———, Sur les sous-variétés des tores, *Compositio Math.* **134** (2002), p. 337–366.

[61] ———, Approximation diophantienne sur les variétés semi-abéliennes, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **36** (2003), p. 191–212.

[62] ———, Inégalité de Vojta généralisée, *Bull. Soc. Math. France* **133** (2005), p. 459–495.

[63] ———, Intersection de sous-groupes et de sous-variétés. I, *Math. Ann.* **333** (2005), p. 525–548.

[64] ———, Intersection de sous-groupes et de sous-variétés. II, *J. Inst. Math. Jussieu* **6** (2007), p. 317–348.

[65] ———, Autour de la conjecture de Zilber-Pink, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **21** (2009), p. 405–414.

[66] ———, Intersection de sous-groupes et de sous-variétés. III, *Comment. Math. Helv.* **84** (2009), p. 835–863.

[67] G. RÉMOND & E. VIADA – Problème de Mordell-Lang modulo certaines sous-variétés abéliennes, *Int. Math. Res. Not.* (2003), n° 35, p. 1915–1931.

[68] D. ROESSLER – A note on the Manin-Mumford conjecture, in *Number fields and function fields—two parallel worlds*, Progr. Math., vol. 239, Birkhäuser, 2005, p. 311–318.

[69] P. SARNAK & S. ADAMS – Betti numbers of congruence groups, *Israel J. Math.* **88** (1994), p. 31–72.

[70] H. P. SCHLICKEWEI – Lower bounds for heights on finitely generated groups, *Monatsh. Math.* **123** (1997), p. 171–178.

[71] J-P. SERRE – *Abelian l-adic representations and elliptic curves*, McGill University lecture notes written with the collaboration of Willem Kuyk and John Labute, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968.

[72] ______, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, third éd., Aspects of Mathematics, Friedr. Vieweg & Sohn, 1997.

[73] Y. T. SIU – An effective Matsusaka big theorem, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **43** (1993), p. 1387–1405.

[74] E. ULLMO – Positivité et discrétion des points algébriques des courbes, *Ann. of Math.* **147** (1998), p. 167–179.

[75] E. VIADA – The intersection of a curve with a union of translated codimension-two subgroups in a power of an elliptic curve, *Algebra Number Theory* **2** (2008), p. 249–298.

[76] ______, The optimality of the bounded height conjecture, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **21** (2009), p. 769–784.

[77] ______, Lower bounds for the normalized height and non-dense subsets of subvarieties of abelian varieties, *Int. J. Number Theory* **6** (2010), p. 471–499.

[78] P. VOJTA – Integral points on subvarieties of semiabelian varieties. I, *Invent. Math.* **126** (1996), p. 133–181.

[79] U. ZANNIER – *Lecture notes on Diophantine analysis*, Appunti. Scuola Normale Superiore di Pisa (Nuova Serie), vol. 8, Edizioni della Normale, Pisa, 2009.

[80] S.-W. ZHANG – Positive line bundles on arithmetic varieties, *J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995), p. 187–221.

[81] ______, Equidistribution of small points on abelian varieties, *Ann. of Math.* **147** (1998), p. 159–165.

[82] B. ZILBER – Exponential sums equations and the Schanuel conjecture, *J. London Math. Soc.* **65** (2002), p. 27–44.

Antoine CHAMBERT-LOIR

Université de Rennes 1 & Institut universitaire de France
Irmar & UFR de mathématiques
Campus de Beaulieu
F–35042 Rennes Cedex
E-mail : `antoine.chambert-loir@univ-rennes1.fr`