Astérisque

JEAN-LOUP WALDSPURGER

Calcul d’une valeur d’un facteur ε par une formule intégrale

Astérisque, tome 347 (2012), p. 1-101

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2012__347__1_0>

Astérisque
347, 2012, p. 1–102

CALCUL D'UNE VALEUR D'UN FACTEUR ε PAR UNE FORMULE INTÉGRALE

par

Jean-Loup Waldspurger

Introduction

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique nulle, V un espace vectoriel de dimension finie sur F, muni d'une forme quadratique non dégénérée q, D_0 une droite de V qui n'est pas isotrope pour q, W l'orthogonal de D_0 dans V. Notons G le groupe spécial orthogonal de V et H celui de W, que l'on identifie à un sous-groupe de G. Soient π, resp. ρ, une représentation admissible irréductible de $G(F)$, resp. $H(F)$, que l'on réalise dans un espace E_π, resp. E_ρ. Notons $\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi,\rho)$ l'espace des applications linéaires $\varphi : E_\pi \to E_\rho$ telles que $\varphi \circ \pi(h) = \rho(h) \circ \varphi$ pour tout $h \in H(F)$. Notons $m(\rho,\pi)$ la dimension de cet espace. D'après un théorème de Aizenbud, Gourevitch, Rallis et Schiffmann ([**1**]), on a $m(\rho,\pi) \leq 1$. Supposons π et ρ tempérées. Dans les articles [**12**] et [**14**], on a établi une formule qui calcule $m(\rho,\pi)$ comme somme d'intégrales sur des sous-tores non nécessairement maximaux de H de fonctions qui se déduisent des caractères de π et ρ. D'après les travaux encore en cours d'Arthur, la théorie de l'endoscopie tordue relie les représentations π et ρ, ou plus exactement les L-paquets qui contiennent ces représentations, à des représentations autoduales de groupes linéaires. Indiquons plus précisément de quel groupe linéaire il s'agit, par exemple pour la représentation π. Notons d la dimension de V. Si d est pair, le groupe est GL_d. Si d est impair, G apparaît usuellement comme groupe endoscopique de GL_{d-1} tordu. Mais G est aussi un groupe endoscopique de GL_d tordu et, pour ce que nous faisons, il semble que cette deuxième interprétation soit plus pertinente. D'après la conjecture locale de Gross-Prasad, le nombre $m(\rho,\pi)$ doit être relié à un facteur ε de la paire de représentations de groupes linéaires correspondant à la paire (ρ,π). Cela suggère l'existence d'une formule intégrale, parallèle à celle évoquée ci-dessus, qui calcule ce facteur ε de paire. Inversement, une telle formule devrait permettre, via la théorie de l'endoscopie tordue, de prouver la conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées. Le but de l'article est d'établir cette formule intégrale.

Oublions maintenant les objets introduits ci-dessus, qui n'ont servi que de motivation. On conserve toutefois le corps F. Soient r et m deux entiers positifs ou nuls. Posons $d = m + 1 + 2r$, $G = GL_d$, $H = GL_m$. Soit π une représentation admissible irréductible et tempérée de $G(F)$. On suppose π autoduale, c'est-à-dire qu'elle est isomorphe à sa contragrédiente $\pi^\vee$. Soit ρ une représentation de $H(F)$ vérifiant des conditions similaires. Notons θ_d l'automorphisme de G défini par $\theta_d(g) = J_d {}^t g^{-1} J_d^{-1}$, où J_d est la matrice antidiagonale de coefficients $(J_d)_{i,d+1-i} = (-1)^i$. Introduisons le groupe non connexe $G \rtimes \{1, \theta_d\}$ et sa composante connexe $\tilde{G} = G\theta_d$. Puisque π est autoduale, elle se prolonge en une représentation du groupe non connexe $G(F) \rtimes \{1, \theta_d\}$. Elle se prolonge même de deux façons. Fixons un caractère $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ continu et non trivial. La théorie des modèles de Whittaker permet de choisir l'un des prolongements. On note $\tilde{\pi}$ la restriction de ce prolongement à $\tilde{G}(F)$. On effectue des constructions analogues pour H et ρ. Selon Jacquet, Piatetskii-Shapiro et Shalika, on définit le facteur $\varepsilon(s, \pi \times \rho, \psi)$ pour $s \in \mathbb{C}$. Notons ω_π et ω_ρ les caractères centraux de π et ρ. Soit enfin ν un élément de $F^\times$. On pose

$$\varepsilon_\nu(\tilde{\pi}, \tilde{\rho}) = \omega_\pi((-1)^{[m/2]} 2\nu) \omega_\rho((-1)^{1+[d/2]} 2\nu) \varepsilon(1/2, \pi \times \rho, \psi).$$

C'est ce terme que nous allons calculer par une formule intégrale.

Remarque. — Pour éviter un piège, signalons que l'équation fonctionnelle locale n'entraîne pas que ce terme est un signe ± 1, mais seulement que c'est une racine quatrième de l'unité.

Pour manier plus aisément les objets $\tilde{G}$ et $\tilde{H}$, on les interprète comme des groupes tordus. Soient V un espace vectoriel de dimension d sur F, W un sous-espace de dimension m et Z un sous-espace de V supplémentaire de W. Par le choix d'une base de V, G s'identifie au groupe $GL(V)$ des automorphismes linéaires de V. Notons V^* l'espace dual de V. Alors $\tilde{G}$ s'identifie à l'espace $\mathrm{Isom}(V, V^*)$ des isomorphismes linéaires de V sur V^* ou, si l'on préfère, à l'espace des formes bilinéaires non dégénérées sur V. Le groupe G agit à droite et à gauche sur $\tilde{G}$ par

$$(g, \tilde{x}, g') \mapsto {}^t g^{-1} \circ \tilde{x} \circ g'$$

pour $g, g' \in G$ et $\tilde{x} \in \tilde{G}$. On note simplement $(g, \tilde{x}, g') \mapsto g\tilde{x}g'$ ces actions. Le point base θ_d s'identifie à une forme symplectique si d est pair, à une forme quadratique si d est impair. On renvoie à 2.1 pour plus de précision. De même, $\tilde{H}$ s'identifie à $\mathrm{Isom}(W, W^*)$. Fixons une forme quadratique non dégénérée $\tilde{\zeta}$ sur Z. On suppose qu'elle est somme orthogonale d'une forme hyperbolique et de la forme $x \mapsto 2\nu x^2$ de dimension 1. On interprète $\tilde{\zeta}$ comme un élément de $\mathrm{Isom}(Z, Z^*)$. On plonge alors $\tilde{H}$ dans $\tilde{G}$: un élément $\tilde{y} \in \mathrm{Isom}(W, W^*)$ s'identifie à l'élément de $\mathrm{Isom}(V, V^*)$ qui envoie W sur W^*, Z sur Z^*, et dont les restrictions à W, resp. Z, coïncident avec $\tilde{y}$, resp. $\tilde{\zeta}$.

Tout élément $\tilde{x} \in \tilde{G}$ définit un automorphisme $\theta_{\tilde{x}}$ de G caractérisé par l'égalité $\tilde{x}g = \theta_{\tilde{x}}(g)\tilde{x}$. On définit la notion de sous-tore maximal de $\tilde{G}$ de la façon suivante. Soient T un sous-tore maximal de G défini sur F et B un sous-groupe de Borel de G, contenant T mais pas forcément défini sur F. Notons $\tilde{T}$ le sous-ensemble des éléments $\tilde{x} \in \tilde{G}$ tels que $\theta_{\tilde{x}}$ conserve T et B. C'est un espace principal homogène pour chacune des actions de T à droite ou à gauche. Pour $\tilde{x} \in \tilde{T}$, la restriction à T de $\theta_{\tilde{x}}$ ne dépend pas de $\tilde{x}$. On note cet automorphisme $\theta_{\tilde{T}}$. Nous dirons que $\tilde{T}$ est un sous-tore maximal de $\tilde{G}$ si $\tilde{T}(F)$ n'est pas vide.

Considérons une décomposition $W = W' \oplus W''$. Posons $H' = GL(W')$, $\tilde{H}' = \mathrm{Isom}(W', W'^*)$. Soit $\tilde{T}'$ un sous-tore maximal de $\tilde{H}'$, auquel est associé un sous-tore maximal T' de H', et soit $\tilde{\zeta}_{H,T} \in \mathrm{Isom}(W'', W''^*)$ une forme quadratique. On impose les conditions suivantes :

- la dimension de W' est paire ;
- $\tilde{T}'$ est anisotrope, c'est-à-dire que le seul sous-tore déployé contenu dans le sous-ensemble des éléments de T' fixes par $\theta_{\tilde{T}'}$ est égal à $\{1\}$;
- le groupe spécial orthogonal de la forme $\tilde{\zeta}_{H,T}$ sur W'' est quasi-déployé ainsi que celui de la forme $\tilde{\zeta}_{G,T} = \tilde{\zeta}_{H,T} \oplus \tilde{\zeta}$ sur $W'' \oplus Z$.

On note $\tilde{T}$ l'ensemble des éléments $\tilde{y} \in \tilde{H}$ tels que $\tilde{y}(W') = W'^*$, $\tilde{y}(W'') = W''^*$, que la restriction de $\tilde{y}$ à W' appartienne à $\tilde{T}'$ et que la restriction de $\tilde{y}$ à W'' coïncide avec $\tilde{\zeta}_{H,T}$. On note $\underline{\mathcal{T}}$ l'ensemble des sous-ensembles $\tilde{T}$ de $\tilde{H}$ obtenus de cette façon. Le groupe $H(F)$ agit par conjugaison sur $\tilde{H}$. Cette action conserve l'ensemble $\underline{\mathcal{T}}$. On fixe un ensemble de représentants $\mathcal{T}$ de l'ensemble des orbites.

Soit $\tilde{T} \in \underline{\mathcal{T}}$, reprenons pour cet élément les objets définis ci-dessus, en notant simplement $T = T'$. L'action de $T(F)$ par conjugaison conserve $\tilde{T}(F)$. On note $\tilde{T}(F)_{/\theta}$ l'ensemble des orbites. C'est une variété analytique sur F sur laquelle on définit une certaine mesure. On définit aussi sur cette variété deux fonctions $\Delta^{\tilde{H}}$ et Δ_r, des valeurs absolues de certains déterminants. On définit également un groupe de Weyl $W(H, \tilde{T})$. Tous ces termes sont élémentaires, on renvoie à 1.4 et 3.2 pour des définitions précises. Ce qui est plus crucial est d'associer à $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\rho}$ deux fonctions $c_{\tilde{\pi}}$ et $c_{\tilde{\rho}}$ sur $\tilde{T}(F)_{/\theta}$. Soit $\tilde{t}$ un élément de $\tilde{T}(F)$ en position générale, notons $G_{\tilde{t}}$ la composante neutre du sous-groupe des points fixes par $\theta_{\tilde{t}}$ dans G. Ce groupe se décompose en $T_\theta \times SO(\tilde{\zeta}_{G,T})$, où $T_\theta = T \cap G_{\tilde{t}}$ et $SO(\tilde{\zeta}_{G,T})$ est le groupe spécial orthogonal de la forme quadratique $\tilde{\zeta}_{G,T}$ introduite ci-dessus. A $\tilde{\pi}$ est associé un caractère $\Theta_{\tilde{\pi}}$ qui est une fonction localement intégrable sur $\tilde{G}(F)$. Plus précisément, d'après un résultat d'Harish-Chandra généralisé au cas non connexe par Clozel, ce caractère admet au voisinage de $\tilde{t}$ un développement en combinaison linéaire de transformées de Fourier d'intégrales orbitales nilpotentes. C'est-à-dire, notons $\mathfrak{g}_{\tilde{t}}$ l'algèbre de Lie de $G_{\tilde{t}}$ et $\mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_{\tilde{t}})$ l'ensemble des orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}_{\tilde{t}}(F)$. Il existe un voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}_{\tilde{t}}(F)$ et, pour tout $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_{\tilde{t}})$, il existe un nombre complexe $c_{\tilde{\pi},\mathcal{O}}(\tilde{t})$ de sorte que, pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\tilde{t}}(F))$ à support dans ω, on ait l'égalité

$$\int_{\mathfrak{g}_{\tilde{t}}(F)} \Theta_{\tilde{\pi}}(\tilde{t}\exp(X))\varphi(X)dX = \sum_{\mathcal{O}\in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_{\tilde{t}})} c_{\tilde{\pi},\mathcal{O}}(\tilde{t}) \int_{\mathcal{O}} \hat{\varphi}(X)dX,$$

où $\hat{\varphi}$ est la transformée de Fourier de φ. Evidemment, pour que cette formule ait un sens, on doit définir précisément la transformation de Fourier ainsi que les diverses mesures. Remarquons que les orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}_{\tilde{t}}(F)$ sont les mêmes que celles dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(\tilde{\zeta}_{G,T})(F)$. Supposons d'abord d impair. Alors, parce que $\dim(W')$ est paire, l'espace $W''\oplus Z$ de la forme $\tilde{\zeta}_{G,T}$ est de dimension impaire. Puisque cette forme est quasi-déployée, il y a une unique orbite nilpotente régulière dans $\mathfrak{so}(\tilde{\zeta}_{G,T})(F)$. On la note $\mathcal{O}_{\mathrm{reg}}$ et on pose $c_{\tilde{\pi}}(\tilde{t}) = c_{\tilde{\pi},\mathcal{O}_{\mathrm{reg}}}(\tilde{t})$. Supposons maintenant d pair. Alors $\mathfrak{so}(\tilde{\zeta}_{G,T})(F)$ possède en général plusieurs orbites nilpotentes régulières. Mais on peut en sélectionner une de la façon suivante. On peut décomposer l'espace $W''\oplus Z$ muni de sa forme $\tilde{\zeta}_{G,T}$ en somme orthogonale d'un hyperplan X et d'une droite D_0 sur laquelle la forme quadratique est équivalente à $x \mapsto 2\nu x^2$. Nos hypothèses impliquent que le groupe spécial orthogonal $SO(X)$ est quasi-déployé. Puisque $\dim(X)$ est impaire, $\mathfrak{so}(X)(F)$ possède une unique orbite nilpotente régulière. Fixons un point de cette orbite et notons $\mathcal{O}_\nu$ l'orbite dans $\mathfrak{so}(\tilde{\zeta}_{G,T})(F)$ qui contient ce point. C'est encore une orbite nilpotente régulière. On pose $c_{\tilde{\pi}}(\tilde{t}) = c_{\tilde{\pi},\mathcal{O}_\nu}(\tilde{t})$. On a ainsi défini une fonction $c_{\tilde{\pi}}$ presque partout sur $\tilde{T}(F)$. Cette fonction est invariante par conjugaison par $T(F)$ et peut être considérée comme une fonction sur $\tilde{T}(F)_{/\theta}$. Par une construction similaire, on définit une fonction $c_{\tilde{\rho}}$ presque partout sur le même ensemble.

Posons

$$\varepsilon_{\text{géom},\nu}(\tilde{\pi},\tilde{\rho}) = \sum_{\tilde{T}\in\mathcal{T}} |W(H,\tilde{T})|^{-1} \int_{\tilde{T}(F)_{/\theta}} c_{\tilde{\pi}}(\tilde{t})c_{\tilde{\rho}}(\tilde{t})D^{\tilde{H}}(\tilde{t})\Delta_r(\tilde{t})d\tilde{t}.$$

Cette expression est absolument convergente. Notre résultat principal est le théorème 7.1 dont voici l'énoncé.

Théorème 0.1. — *Soit π, resp. ρ, une représentation admissible, irréductible, tempérée et autoduale de $G(F)$, resp. $H(F)$. Alors on a l'égalité*

$$\varepsilon_{\text{géom},\nu}(\tilde{\pi},\tilde{\rho}) = \varepsilon_\nu(\tilde{\pi},\tilde{\rho}).$$

Comme nous l'avons expliqué, notre motivation est la conjecture locale de Gross-Prasad. Nous ignorons si cette façon, plutôt compliquée, de calculer un facteur ε peut avoir d'autres applications.

La démonstration reprend celle de **[12]** et **[14]**. Donnons de très brèves indications dans le cas où $r = 0$ et $d = m+1$ (en fait, ce cas ne peut pas être traité à part car la preuve utilise une récurrence compliquée sur le couple (d,m)). Considérons une fonction $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ qui est très cuspidale, cf. 1.7. On définit une suite $(\Omega_N)_{N\geq 1}$ de sous-ensembles ouverts compacts de $H(F)\backslash G(F)$ vérifiant les propriétés usuelles

$$\Omega_N \subset \Omega_{N+1} \text{ pour tout N et } \bigcup_N \Omega_N = H(F)\backslash G(F).$$

On note κ_N la fonction caractéristique de l'image réciproque de Ω_N dans $G(F)$. Cela étant, on pose

$$J_N(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) = \int_{G(F)} \int_{\tilde{H}(F)} \Theta_{\tilde{\rho}}(\tilde{y}) \tilde{f}(g^{-1}\tilde{y}g) d\tilde{y} \kappa_N(g) dg.$$

Cette intégrale est absolument convergente. Comme pour la formule des traces locale d'Arthur, il y a deux façons de calculer la limite de cette expression quand N tend vers l'infini. L'une, que l'on peut qualifier de « géométrique », et qui est la réplique de celle de **[12]** ; l'autre, que l'on peut qualifier de « spectrale », qui s'appuie sur la formule de Plancherel pour le groupe $G(F)$ et qui est la réplique de celle de **[14]**. Ces deux voies conduisent à une égalité

$$J_{\text{géom}}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) = \lim_{N \to \infty} J_N(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) = J_{\text{spec}}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}).$$

Les deux expressions extrêmes contiennent des distributions (en $\tilde{f}$) qui ne sont pas invariantes : des intégrales orbitales pondérées et des caractères pondérés. Le procédé habituel d'Arthur permet par récurrence d'en déduire d'autres expressions qui ne contiennent plus que des distributions invariantes, et qui continuent d'être égales entre elles. Supposons que $\tilde{\pi}$ est « elliptique », le cas général s'en déduisant assez facilement. On prend pour $\tilde{f}$ un pseudo-coefficient de $\tilde{\pi}$. Alors les deux expressions « invariantes » ci-dessus deviennent respectivement $\varepsilon_{\text{géom},\nu}(\tilde{\pi}, \tilde{\rho})$ et $\varepsilon_\nu(\tilde{\pi}, \tilde{\rho})$, ce qui prouve l'égalité de ces deux termes.

Expliquons pourquoi apparaît le terme $\varepsilon(1/2, \pi \times \rho, \psi)$. Notons E_π et E_ρ des espaces dans lesquels se réalisent π et ρ. Considérons l'espace $\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \rho)$ des applications linéaires $\varphi : E_\pi \to E_\rho$ telles que $\varphi \circ \pi(h) = \rho(h) \circ \varphi$ pour tout $h \in H(F)$. D'après **[1]**, cet espace est de dimension 1. Pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \rho)$ et $\tilde{y} \in \tilde{H}(F)$, l'application linéaire $\tilde{\rho}(\tilde{y})^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{\pi}(\tilde{y})$ appartient encore à $\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \rho)$ et ne dépend pas de $\tilde{y}$. Il existe donc un nombre $c \in \mathbb{C}^\times$ tel que

$$\tilde{\rho}(\tilde{y})^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{\pi}(\tilde{y}) = c\varphi$$

pour tous $\varphi \in \mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \rho)$ et $\tilde{y} \in \tilde{H}(F)$. C'est ce nombre c qui apparaît naturellement dans nos calculs spectraux. Or le théorème 2.7 de **[7]** permet de calculer c : à des termes élémentaires près, c'est $\varepsilon(1/2, \pi \times \rho, \psi)$.

Voici le contenu de l'article. La première section rassemble des définitions et résultats généraux sur les « groupes tordus », selon la terminologie de Labesse. La deuxième introduit plus précisément les groupes GL_d tordus. La partie « géométrique » de notre formule intégrale est traitée dans la section 3. La section 4 contient les majorations nécessaires pour prouver les diverses convergences d'intégrales utilisées dans la section 6. La section 5 établit le résultat évoqué ci-dessus, à savoir que $\varepsilon(1/2, \pi \times \rho, \psi)$ mesure la compatibilité des deux prolongements $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\rho}$. La partie « spectrale » de la formule intégrale est traitée dans la section 6. Le théorème principal est prouvé dans la septième et dernière section. Ainsi qu'on l'a déjà dit, nos preuves sont parallèles à celles de **[12]** et **[14]**, au point d'être parfois identiques. Pour épargner le lecteur, ou par paresse, on s'est souvent contenté d'indiquer sommairement les modifications à apporter ou même simplement d'affirmer les résultats sans démonstration.

Remarque sur la notation. — Dans les articles **[12]** et **[14]**, on avait utilisé la lettre θ pour noter les caractères ou quasi-caractères (θ_π, θ_f etc.). Ici, cette lettre sera réservée aux automorphismes des groupes linéaires. Les caractères ou quasi-caractères seront notés par la lettre Θ.

Je remercie R. Beuzart pour m'avoir signalé une erreur dans une première version de ce texte.

1. Notations, groupes tordus

1.1. Notations générales. — Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. On note $|.|_F$ la valeur absolue usuelle de F, val_F la valuation, $\mathfrak{o}_F$ l'anneau des entiers et $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal. On fixe une clôture algébrique $\bar{F}$ de F et une uniformisante ϖ_F de F.

Toutes les variétés algébriques seront supposées définies sur F, sauf mention explicite du contraire. De même pour les actions d'un groupe algébrique sur une variété. Soit G un groupe algébrique réductif connexe. On note A_G le plus grand tore déployé central dans G, $X(G)$ le groupe des caractères de G définis sur F, $\mathcal{A}_G = \mathrm{Hom}(X(G), \mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_G^* = X(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ le dual de $\mathcal{A}_G$. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ (g, X) & \mapsto & gXg^{-1} \end{array}$$

l'action adjointe.

Quand on définit un objet relatif au groupe G, on peut préciser si besoin est la notation en introduisant la lettre G en exposant. Par exemple, les intégrales orbitales pondérées sont notées $J_M(x, f)$ s'il n'y a pas d'ambigüité sur le groupe ambiant G, ou $J_M^G(x, f)$ si cela semble préférable.

Pour toute bijection θ d'un ensemble X dans lui-même, on note X^θ le sous-ensemble des points fixes.

1.2. Groupes tordus. — On appelle groupe tordu un couple $(G, \tilde{G})$ vérifiant les conditions qui suivent. Le terme G est un groupe réductif connexe. Le terme $\tilde{G}$ est une variété algébrique telle que $\tilde{G}(F) \neq \emptyset$. Il y a deux actions de groupe algébrique de G sur $\tilde{G}$, à droite et à gauche, notées

$$\begin{array}{ccccccc} G \times \tilde{G} & \to & \tilde{G} & \quad & \tilde{G} \times G & \to & \tilde{G} \\ (g, \tilde{x}) & \mapsto & g\tilde{x} & & (\tilde{x}, g) & \mapsto & \tilde{x}g. \end{array}$$

Chacune d'elles fait de $\tilde{G}$ un espace principal homogène sur G.

Considérons un tel groupe tordu. Notons $Aut(G)$ le groupe des automorphismes de G. Il existe une unique application algébrique

$$\begin{array}{ccc}\tilde{G} & \to & Aut(G) \\ \tilde{x} & \mapsto & \theta_{\tilde{x}}\end{array}$$

de sorte que l'on ait l'égalité $\tilde{x}g = \theta_{\tilde{x}}(g)\tilde{x}$ pour tous $\tilde{x} \in \tilde{G}$ et $g \in G$. De $\theta_{\tilde{x}}$ se déduit des automorphismes de $X(G)$, de A_G, de $\mathcal{A}_G$ etc. qui ne dépendent pas de $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$. On les note $\theta_{\tilde{G}}$. On suppose

Hypothèse. — $\theta_{\tilde{G}}$ est d'ordre fini.

Le groupe G opère sur $\tilde{G}$ par conjugaison : $(g, \tilde{x}) \mapsto g\tilde{x}g^{-1}$. Pour tout sous-ensemble $\tilde{X}$ de $\tilde{G}$, on note $\mathrm{Norm}_G(\tilde{X})$ le normalisateur de $\tilde{X}$ dans G et $Z_G(\tilde{X})$ son centralisateur. Si $\tilde{X}$ est réduit à un point $\{\tilde{x}\}$, on note simplement ces groupes $Z_G(\tilde{x})$ et on note $G_{\tilde{x}}$ la composante neutre de $Z_G(\tilde{x})$. La variété $\tilde{G}$ opère sur G par $(\tilde{x}, g) \mapsto \theta_{\tilde{x}}(g)$. Si X est un sous-ensemble de G, on définit alors son normalisateur $N_{\tilde{G}}(X)$ et son centralisateur $Z_{\tilde{G}}(X)$, avec la variante $Z_{\tilde{G}}(x)$ quand X est réduit à un point $\{x\}$.

On note $A_{\tilde{G}}$ le plus grand sous-tore de A_G sur lequel $\theta_{\tilde{G}}$ agit trivialement. On note $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$, resp. $\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$, le sous-groupe des éléments de $\mathcal{A}_G$, resp. $\mathcal{A}^*_G$ fixés par $\theta_{\tilde{G}}$. On note $a_{\tilde{G}}$ la dimension de $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$. On définit un homomorphisme $H_{\tilde{G}} : G(F) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}$ par $H_{\tilde{G}}(g)(\chi) = \log(|\chi(g)|_F)$ pour tous $g \in G(F)$ et $\chi \in X(G)^{\theta_{\tilde{G}}}$.

On note $\tilde{G}_{ss}$ le sous-ensemble des éléments semi-simples de $\tilde{G}$, c'est-à-dire des $\tilde{x} \in \tilde{G}$ tels qu'il existe un sous-tore maximal T de G, défini sur $\bar{F}$, et un sous-groupe de Borel B de G, défini sur $\bar{F}$ et contenant T, tels que $\theta_{\tilde{x}}$ conserve T et B. Si $\tilde{x} \in \tilde{G}_{ss}(F)$, on pose

$$D^{\tilde{G}}(\tilde{x}) = |\det(1 - \theta_{\tilde{x}})_{|\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\tilde{x}}}|_F.$$

On note $\tilde{G}_{\mathrm{reg}}$ l'ensemble des éléments fortement réguliers de $\tilde{G}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $\tilde{x}$ tels que $Z_G(\tilde{x})$ soit abélien et $G_{\tilde{x}}$ soit un tore.

On appelle sous-groupe parabolique tordu $(P, \tilde{P})$ un couple vérifiant les conditions suivantes. Le terme P est un sous-groupe parabolique de G. Le terme $\tilde{P}$ est son normalisateur dans $\tilde{G}$ et on suppose $\tilde{P}(F) \neq \varnothing$. Pour un tel couple, on appelle composante de Lévi tordue un couple $(M, \tilde{M})$ tel que M soit une composante de Lévi de P et $\tilde{M}$ est l'intersection des normalisateurs de P et M dans $\tilde{G}$. On appelle groupe de Lévi tordu de $(G, \tilde{G})$ un couple $(M, \tilde{M})$ tel qu'il existe un sous-groupe parabolique tordu $(P, \tilde{P})$ dont $(M, \tilde{M})$ est une composante de Lévi tordue. On vérifie qu'un groupe de Lévi tordu est un groupe tordu (c'est-à-dire que $\tilde{M}(F) \neq \varnothing$, cf. **[11]** 1.6). Pour un tel groupe de Lévi tordu, on note $\mathcal{P}(\tilde{M})$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques tordus $(P, \tilde{P})$ de composante de Lévi tordue $(M, \tilde{M})$, $\mathcal{F}(\tilde{M})$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques tordus $(Q, \tilde{Q})$ tels que $M \subset Q$ et $\tilde{M} \subset \tilde{Q}$ et $\mathcal{L}(\tilde{M})$ l'ensemble des groupes de Lévi tordus $(L, \tilde{L})$ tels que $M \subset L$ et $\tilde{M} \subset \tilde{L}$. Soit $(Q, \tilde{Q})$ un sous-groupe parabolique tordu. On écrit simplement $\tilde{Q} = \tilde{L}U$ pour signifier que :

– $\tilde{L}$ est le second membre d'une composante de Lévi tordue $(L, \tilde{L})$ de $(Q, \tilde{Q})$;

– U est le radical unipotent de Q.

Si $(M, \tilde{M})$ est un groupe de Lévi fixé et que $(Q, \tilde{Q})$ appartient à $\mathcal{F}(\tilde{M})$, il sera de plus supposé que $\tilde{L}$ contient $\tilde{M}$.

Comme dans le cas non tordu, les Lévi tordus se caractérisent comme les commutants de tores déployés. Précisément, soit A un sous-tore déployé de G, notons M son commutant dans G et $Z_{\tilde{G}}(A)$ son commutant dans $\tilde{G}$. Supposons $Z_{\tilde{G}}(A)(F) \neq \varnothing$. Alors $(M, Z_{\tilde{G}}(A))$ est un Lévi tordu. Prouvons cela. On sait bien que M est un Lévi de G. Choisissons un élément $x_* \in X_*(A)$ en position générale et posons $a = x_*(\varpi_F)$. Alors M est le commutant de a. Notons P le sous-groupe parabolique de G, de composante de Lévi M, dont le radical unipotent est engendré par les sous-groupes radiciels associés aux racines α de A_M telles que $|\alpha(a)|_F > 1$. Soit $\tilde{x} \in Z_{\tilde{G}}(A)$. Puisque $\theta_{\tilde{x}}$ fixe a, il conserve aussi M et P. Donc $\tilde{x}$ appartient à l'ensemble $\tilde{M}$ défini comme plus haut, et $Z_{\tilde{G}}(A) \subset \tilde{M}$. Puisque $Z_{\tilde{G}}(A)(F)$ n'est pas vide, $\tilde{M}(F)$ ne l'est pas non plus, ce qui est la condition pour que $(M, \tilde{M})$ soit un groupe de Lévi tordu. De plus, $Z_{\tilde{G}}(A)$ et $\tilde{M}$ sont évidemment tous deux des espaces principaux homogènes pour le groupe M. Ils sont donc égaux, ce qui prouve l'assertion. Inversement, tout groupe de Lévi tordu $(M, \tilde{M})$ est le commutant au sens ci-dessus du tore $A_{\tilde{M}}$.

Soit $P_{\min}$ un sous-groupe parabolique minimal de G et $M_{\min}$ une composante de Lévi de $P_{\min}$. On peut compléter ces données, de façon unique, en un sous-groupe parabolique tordu $(P_{\min}, \tilde{P}_{\min})$ et une composante de Lévi tordue $(M_{\min}, \tilde{M}_{\min})$. En effet, $\tilde{P}_{\min}$ est le normalisateur de $P_{\min}$ dans $\tilde{G}$ et $\tilde{M}_{\min}$ est le normalisateur de $M_{\min}$ dans $\tilde{P}_{\min}$. On doit voir que $\tilde{M}_{\min}(F) \neq \varnothing$. Soit $\tilde{y} \in \tilde{G}(F)$. Alors le couple $(\theta_{\tilde{y}}(P_{\min}), \theta_{\tilde{y}}(M_{\min}))$ est formé d'un sous-groupe parabolique minimal de G et d'une composante de Lévi de ce sous-groupe. Deux tels couples sont conjugués par un élément de $G(F)$. Choisissons donc $g \in G(F)$ tel que la conjugaison par g envoie $(\theta_{\tilde{y}}(P_{\min}), \theta_{\tilde{y}}(M_{\min}))$ sur $(P_{\min}, M_{\min})$. Posons $\tilde{x} = g\tilde{y}$. Alors $\tilde{x}$ appartient à $\tilde{M}_{\min}(F)$.

On appelle sous-tore maximal tordu un couple $(T, \tilde{T})$ vérifiant les conditions suivantes. Le terme T est un sous-tore maximal de G. Le terme $\tilde{T}$ est une sous-variété de $\tilde{G}$. L'ensemble $\tilde{T}(F)$ n'est pas vide et il existe un sous-groupe de Borel B de G, défini sur $\bar{F}$, contenant T, tel que $\tilde{T}$ soit l'intersection des normalisateurs de T et B dans $\tilde{G}$. Cela entraîne que l'on a $\tilde{T} = T\tilde{x} = \tilde{x}T$ pour tout $\tilde{x} \in \tilde{T}$. La restriction à T de l'automorphisme $\theta_{\tilde{x}}$ ne dépend pas de $\tilde{x}$, on la note $\theta_{\tilde{T}}$ ou simplement θ si cela ne crée pas d'ambigüité. On note T_θ la composante neutre du sous-groupe des points fixes T^θ.

Evidemment, pour un couple $(G, \tilde{G})$, ou $(P, \tilde{P})$ etc. le premier terme G ou P etc. est uniquement déterminé par le second $\tilde{G}$ ou $\tilde{P}$ etc. Dans la suite de l'article, on parlera simplement du groupe tordu $\tilde{G}$, ou du sous-groupe parabolique tordu $\tilde{P}$ etc. Les termes G ou P etc. seront utilisés si besoin est sans les définir explicitement. D'autre part, on peut utiliser les définitions que l'on vient d'introduire dans le cas où $\tilde{G} = G$ muni des multiplications à droite et à gauche. On supprime alors les $\tilde{}$; par exemple, on définit les ensembles $\mathcal{P}(M)$, $\mathcal{L}(M)$, la fonction H_P etc.

Remarque. — Les espaces tordus ont été introduits par Labesse. D'autres auteurs préfêrent étudier les groupes non connexes. Un espace tordu $(G, \tilde{G})$ apparaît comme une composante d'un tel groupe. En effet, fixons $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$. D'après l'hypothèse de finitude faite plus haut, on peut choisir un entier $n \geq 1$ tel que l'image de $\theta_{\tilde{x}}^n$ dans le groupe des automorphismes extérieurs de G soit égale à 1. Donc $\theta_{\tilde{x}}^n$ est l'automorphisme intérieur associé à un élément du groupe adjoint $G_{ad}(F)$. L'image de $G(F)$ dans $G_{ad}(F)$ est d'indice fini. Quitte à accroître n, on peut donc supposer que $\theta_{\tilde{x}}^n$ est l'automorphisme intérieur associé à un élément $x \in G(F)$. Fixons un tel x. Considérons le groupe abélien libre $\tilde{X}$ engendré par $\tilde{x}$. Il agit sur G : $\tilde{x}^m$ agit par $\theta_{\tilde{x}}^m$. Considérons le produit semi-direct $G \rtimes \tilde{X}$, puis le plus petit sous-groupe distingué de ce produit contenant $x^{-1}\tilde{x}^n$. Notons G^+ le quotient. Alors G^+ est un groupe linéaire algébrique de composante neutre G et $\tilde{G}$ s'identifie à la composante connexe de G^+ qui contient $\tilde{x}$. Cette remarque permet d'appliquer les résultats démontrés dans la littérature pour des groupes non connexes.

1.3. Les espaces $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. — Soit $\tilde{G}$ un groupe tordu. Fixons un Lévi minimal $M_{\min}$ de G. On note $\mathcal{L}^{\tilde{G}}$ l'ensemble des Lévis tordus $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$ tels que $M_{\min} \subset M$. On définit le groupe de Weyl usuel $W^G = \mathrm{Norm}_{G(F)}(M_{\min})/M_{\min}$.

On munit $\mathcal{A}_{M_{\min}}$ d'un produit scalaire invariant par l'action du groupe de Weyl W^G. Pour tout Lévi tordu $\tilde{M}$, on en déduit par conjugaison et restriction un produit scalaire sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. Si $\tilde{L}$ est un Lévi tordu tel que $\tilde{M} \subset \tilde{L}$, on note $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}$ l'orthogonal de $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$ dans $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. On note $\zeta \mapsto \zeta_{\tilde{L}}$ et $\zeta \mapsto \zeta^{\tilde{L}}$ les projections orthogonales de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$, resp. sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}$. Fixons un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à $M_{\min}$ et supposons $M_{\min} \subset M$. Soit $\tilde{P} = \tilde{M}U \in \mathcal{P}(\tilde{M})$. On définit une fonction $H_{\tilde{P}} : G(F) \to \mathcal{A}_{\tilde{M}}$ par $H_{\tilde{P}}(g) = H_{\tilde{M}}(m)$ pour $g = muk$, avec $m \in M(F)$, $u \in U(F)$ et $k \in K$.

On fixe une extension de $H_{\tilde{G}}$ à $\tilde{G}(F)$, c'est-à-dire une fonction que l'on note encore $H_{\tilde{G}} : \tilde{G}(F) \to \mathcal{A}_{\tilde{G}}$ telle que $H_{\tilde{G}}(g\tilde{x}g') = H_{\tilde{G}}(g) + H_{\tilde{G}}(\tilde{x}) + H_{\tilde{G}}(g')$ pour tous $g, g' \in G(F)$ et $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$. Pour tout Lévi tordu $\tilde{M}$, on en déduit une fonction analogue $H_{\tilde{M}} : \tilde{M}(F) \to \mathcal{A}_{\tilde{M}}$ de la façon suivante. Posons $W^{\tilde{M}} = \mathrm{Norm}_{G(F)}(\tilde{M})/M(F)$. Fixons, ainsi qu'il est loisible, une extension $H'_{\tilde{M}}$ de $H_{\tilde{M}}$ à $\tilde{M}(F)$ de sorte que la composée de cette fonction et de la projection orthogonale de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{G}}$ coïncide avec la restriction de $H_{\tilde{G}}$ à $\tilde{M}(F)$. Pour $g \in \mathrm{Norm}_{G(F)}(\tilde{M})$ et $\tilde{x} \in \tilde{M}(F)$, le terme $H'_{\tilde{M}}(g\tilde{x}g^{-1})$ ne dépend que de l'image w de g dans $W^{\tilde{M}}$. Notons-le $H'_{\tilde{M}}(w\tilde{x}w^{-1})$. D'autre part, le groupe $W^{\tilde{M}}$ agit naturellement dans $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$. On pose

$$H_{\tilde{M}}(\tilde{x}) = |W^{\tilde{M}}|^{-1} \sum_{w \in W^{\tilde{M}}} w^{-1} H'_{\tilde{M}}(w\tilde{x}w^{-1}).$$

L'application $H_{\tilde{M}}$ ainsi définie sur $\tilde{M}(F)$ est un prolongement de l'application notée de la même façon sur $M(F)$. Elle ne dépend pas de l'application auxiliaire $H'_{\tilde{M}}$. Si $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$, la restriction de $H_{\tilde{L}}$ à $\tilde{M}(F)$ coïncide avec la composée de $H_{\tilde{M}}$ et de la projection orthogonale de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$. Pour $g \in G(F)$, la conjugaison par g définit un isomorphisme de $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$ sur $\mathcal{A}_{g\tilde{M}g^{-1}}$ et on a l'égalité $H_{g\tilde{M}g^{-1}}(g\tilde{x}g^{-1}) = gH_{\tilde{M}}(\tilde{x})g^{-1}$ pour tout $\tilde{x} \in \tilde{M}(F)$.

1.4. Mesures. — Soient G un groupe réductif connexe, $M_{\min}$ un groupe de Lévi minimal de G et K un sous-groupe compact spécial de $G(F)$ en bonne position relativement à $M_{\min}$. Fixons une mesure de Haar sur $G(F)$ et munissons K de la mesure de masse totale 1 (remarquons que l'on ne suppose pas que cette mesure sur K soit égale à la restriction de la mesure sur $G(F)$). Alors, pour tout $P = MU \in \mathcal{P}(M_{\min})$, Arthur a défini une mesure de Haar sur les groupes $M(F)$ et $U(F)$, cf. **[4]** paragraphe 1. Soit T un tore. Si T est déployé, on munit $T(F)$ de la mesure telle que le plus grand sous-groupe compact de $T(F)$ soit de mesure 1. En général, on munit $A_T(F)$ de cette mesure puis $T(F)$ de celle pour laquelle la mesure quotient sur $T(F)/A_T(F)$ soit de masse totale 1.

Fixons un caractère continu non trivial ψ de F. On munit F de la mesure autoduale pour ψ. Fixons une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $< .,. >$ sur $\mathfrak{g}(F)\times\mathfrak{g}(F)$, invariante par l'action adjointe de $G(F)$. Pour toute sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que la restriction de $< .,. >$ à $\mathfrak{h}(F)$ soit non dégénérée, on munit $\mathfrak{h}(F)$ de la mesure de Haar autoduale pour le bicaractère $(X,Y) \mapsto \psi(< X,Y >)$. Soit H un sous-groupe de G, supposons que l'on a muni $H(F)$ d'une mesure de Haar dh et que la restriction de $< .,. >$ soit non dégénérée. La mesure sur $\mathfrak{h}(F)$ se relève par l'exponentielle en une mesure de Haar $d'h$ sur $H(F)$ qui n'a aucune raison d'être celle que l'on a fixée. On note $\nu(H)$ la constante telle $dh = \nu(H)d'h$ (en fait, nous n'utiliserons cette notation que dans le cas où H est un sous-tore de G).

Supposons que G soit la première composante d'un groupe tordu $(G, \tilde{G})$. La mesure sur $G(F)$ en détermine une sur l'espace principal homogène $\tilde{G}(F)$. Considérons un sous-tore maximal tordu $(T, \tilde{T})$. Le groupe $T(F)$ agit par conjugaison sur $\tilde{T}(F)$. Notons $\tilde{T}(F)_{/\theta}$ l'ensemble des orbites. Il est naturellement muni d'une structure de groupe de Lie sur F et d'une action de $T(F)$ par multiplication à gauche. Pour tout $\tilde{t} \in \tilde{T}(F)_{/\theta}$, l'application

$$\begin{array}{ccc} T_\theta(F) & \to & \tilde{T}(F)_{/\theta} \\ t & \mapsto & t\tilde{t} \end{array}$$

est un isomorphisme local. Il existe une mesure sur $\tilde{T}(F)_{/\theta}$, invariante par l'action de $T(F)$ et indépendante du choix de $\tilde{t}$, telle que cette application conserve localement les mesures. On munit $\tilde{T}(F)_{/\theta}$ de cette mesure. On pose

$$W(G, \tilde{T}) = \mathrm{Norm}_{G(F)}(\tilde{T})/T(F).$$

On dit que $\tilde{T}$ est elliptique dans $\tilde{G}$ si $A_{\tilde{T}} = A_{\tilde{G}}$. Fixons un ensemble $\mathcal{T}(\tilde{G})$, resp. $\mathcal{T}_{ell}(\tilde{G})$, de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans l'ensemble des sous-tores maximaux tordus, resp. et elliptiques, de $\tilde{G}$. On fixe des ensembles analogues pour tout Lévi tordu. La formule de Weyl prend l'une ou l'autre des formes suivantes

$$\int_{\tilde{G}(F)} \tilde{f}(\tilde{x})d\tilde{x} = \sum_{\tilde{T}\in\mathcal{T}(\tilde{G})} |W(G,\tilde{T})|^{-1}[T(F)^{\theta}:T_{\theta}(F)]^{-1}$$
$$\int_{\tilde{T}(F)_{/\theta}} \int_{T_{\theta}(F)\backslash G(F)} \tilde{f}(g^{-1}\tilde{t}g)dgD^{\tilde{G}}(\tilde{t})d\tilde{t}$$
$$= \sum_{\tilde{M}\in\mathcal{L}^{\tilde{G}}} |W^M||W^G|^{-1} \sum_{\tilde{T}\in\mathcal{T}_{ell}(\tilde{M})} |W(M,\tilde{T})|^{-1}[T(F)^{\theta}:T_{\theta}(F)]^{-1}$$
$$\int_{\tilde{T}(F)_{/\theta}} \int_{T_{\theta}(F)\backslash G(F)} \tilde{f}(g^{-1}\tilde{t}g)dgD^{\tilde{G}}(\tilde{t})d\tilde{t}$$

pour toute fonction $\tilde{f} \in C_c^{\infty}(\tilde{G}(F))$.

On note $\mathcal{A}_{\tilde{G},F}$, resp. $\mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}$, l'image par l'application $H_{\tilde{G}}$ de $G(F)$, resp. $A_{\tilde{G}}(F)$. On note $\mathcal{A}^{\vee}_{\tilde{G},F}$, resp. $\mathcal{A}^{\vee}_{A_{\tilde{G}},F}$, le réseau dans $\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$ formé des λ tels que $\lambda(\zeta) \in 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout $\zeta \in \mathcal{A}_{\tilde{G},F}$, resp. $\zeta \in \mathcal{A}_{A_{\tilde{G}},F}$. On munit le quotient $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}/i\mathcal{A}^{\vee}_{A_{\tilde{G}},F}$ de la mesure de Haar de masse totale 1. On pose $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F} = i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}/i\mathcal{A}^{\vee}_{\tilde{G},F}$ et on le munit de la mesure telle que l'application naturelle $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F} \to i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}/i\mathcal{A}^{\vee}_{A_{\tilde{G}},F}$ préserve localement les mesures.

1.5. Intégrales orbitales pondérées. — Dans la suite de cette section, on fixe un groupe tordu $(G,\tilde{G})$. On suppose fixés un Lévi minimal $M_{\min}$ de G et un sous-groupe compact spécial K de $G(F)$ en bonne position relativement à $M_{\min}$. Soit $\tilde{M} \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}$. La théorie des (G,M)-familles se généralise au cas tordu en une théorie des $(\tilde{G},\tilde{M})$-familles. En particulier, soit $g \in G(F)$. De la famille de points $(H_{\tilde{P}}(g))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$ se déduit une $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille $(v_{\tilde{P}}(g))_{\tilde{P}\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$: on pose $v_{\tilde{P}}(g,\lambda) = e^{-\lambda(H_{\tilde{P}}(g))}$ pour $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{M}}$. De cette $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille se déduit un nombre $v_{\tilde{M}}(g)$, cf. **[2]** p.37. Soient $\tilde{f} \in C_c^{\infty}(\tilde{G}(F))$ et $\tilde{x} \in \tilde{M}(F) \cap \tilde{G}_{\mathrm{reg}}(F)$. On définit l'intégrale orbitale pondérée

$$J_{\tilde{M}}(\tilde{x},\tilde{f}) = D^{\tilde{G}}(\tilde{x})^{1/2} \int_{G_{\tilde{x}}(F)\backslash G(F)} \tilde{f}(g^{-1}\tilde{x}g)v_{\tilde{M}}(g)dg.$$

Ces intégrales vérifient les mêmes conditions de régularité et de croissance que dans le cas non tordu.

1.6. Quasi-caractères. — Soit $\tilde{x} \in \tilde{G}_{ss}(F)$. On définit la notion de bon voisinage $\omega \subset \mathfrak{g}_{\tilde{x}}(F)$: la définition est la même qu'en **[12]** 3.1, en ajoutant quelques $\tilde{}$. On note $\mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_{\tilde{x}})$ l'ensemble des orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}_{\tilde{x}}(F)$. Pour tout $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_{\tilde{x}})$, l'intégrale orbitale sur $\mathcal{O}$ a pour transformée de Fourier une distribution localement intégrable, que l'on note $X \mapsto \hat{j}(\mathcal{O},X)$. Evidemment, on doit définir correctement les mesures, on renvoie pour cela à **[12]** 1.2.

Soit Θ une fonction définie presque partout sur $\tilde{G}(F)$ et invariante par conjugaison par $G(F)$. On dit que c'est un quasi-caractère si, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{G}_{ss}(F)$, il existe un bon voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}_{\tilde{x}}(F)$ et, pour tout $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_{\tilde{x}})$, il existe $c_{\Theta,\mathcal{O}}(\tilde{x}) \in \mathbb{C}$ de sorte que l'on ait l'égalité

$$\Theta(\tilde{x}\exp(X)) = \sum_{\mathcal{O}\in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_{\tilde{x}})} c_{\Theta,\mathcal{O}}(\tilde{x})\hat{j}(\mathcal{O},X)$$

pour presque tout $X \in \omega$. Cette définition est la même qu'en **[12]** 4.1. Dans cette référence, on avait noté θ les quasi-caractères. Pour une raison évidente, on croit bon ici de modifier cette notation.

1.7. Fonctions très cuspidales. — Soit $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$. On dit que $\tilde{f}$ est très cuspidale si et seulement si, pour tout sous-groupe parabolique tordu propre $\tilde{P} = \tilde{M}U$ de $\tilde{G}$ et pour tout $\tilde{x} \in \tilde{M}(F)$, on a l'égalité

$$\int_{U(F)} \tilde{f}(\tilde{x}u)du = 0.$$

Les intégrales orbitales pondérées des fonctions très cuspidales possèdent les mêmes propriétés que dans le cas non tordu. En particulier, soient $\tilde{f}$ une fonction très cuspidale et $\tilde{x} \in \tilde{G}_{\mathrm{reg}}(F)$. Notons $\tilde{M}(\tilde{x})$ le commutant de $A_{G_{\tilde{x}}}$ dans $\tilde{G}$, au sens de 1.2. C'est un Lévi tordu de $\tilde{G}$. Quitte à conjuguer $M_{\min}$ et K, on peut supposer $\tilde{M}(\tilde{x}) \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}$. On pose

$$\Theta_{\tilde{f}}^J(\tilde{x}) = (-1)^{a_{\tilde{M}(\tilde{x})}-a_{\tilde{G}}} D^{\tilde{G}}(\tilde{x})^{-1/2} J_{\tilde{M}(\tilde{x})}(\tilde{x},\tilde{f}).$$

Cela ne dépend pas de la conjugaison effectuée. La fonction $\Theta_{\tilde{f}}^J$ ainsi définie est invariante par conjugaison par $G(F)$.

Proposition 1.1. - *Soit $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ une fonction très cuspidale. Alors $\Theta_{\tilde{f}}^J$ est un quasi-caractère.*

La preuve est exactement la même que dans le cas non tordu, cf. **[12]** corollaire 5.9.

1.8. Distributions locales associées à une fonction très cuspidale. — Soit $\tilde{x} \in \tilde{G}_{ss}(F)$. Supposons que $G_{\tilde{x}}$ soit le produit de deux groupes réductifs connexes $G_{\tilde{x}} = G' \times G''$, chacun conservé par $Z_G(\tilde{x})(F)$. Tout élément $X \in \mathfrak{g}_{\tilde{x}}(F)$ se décompose en la somme d'un élément de $\mathfrak{g}'(F)$ et d'un élément de $\mathfrak{g}''(F)$. On note $X = X' + X''$ cette décomposition. On note $f \mapsto f^\sharp$ la transformation de Fourier partielle dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\tilde{x}}(F))$ relative à la deuxième variable, c'est-à-dire

$$f^\sharp(X) = \int_{\mathfrak{g}''(F)} f(X'+Y'')\psi(<Y'',X''>)dY''.$$

Soit $\omega \subset \mathfrak{g}_{\tilde{x}}(F)$ un bon voisinage de 0. On suppose que $\omega = \omega' + \omega''$, avec $\omega' \subset \mathfrak{g}'(F)$ et $\omega'' \subset \mathfrak{g}''(F)$.

Soit $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ une fonction très cuspidale. On définit une fonction $\Theta^J_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}$ sur $\mathfrak{g}_{\tilde{x},\mathrm{reg}}(F)$ par

$$\Theta^J_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}(X) = \begin{cases} 0, & \text{si } X \notin \omega, \\ \Theta^J_{\tilde{f}}(\tilde{x}\exp(X)), & \text{si } X \in \omega. \end{cases}$$

Pour $g \in G(F)$, on définit ${}^g\tilde{f}_{\tilde{x},\omega} \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\tilde{x}}(F))$ par

$${}^g\tilde{f}_{\tilde{x},\omega}(X) = \begin{cases} 0, & \text{si } X \notin \omega, \\ \tilde{f}(g^{-1}\tilde{x}\exp(X)g), & \text{si } X \in \omega. \end{cases}$$

On pose ${}^g\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega} = ({}^g\tilde{f}_{\tilde{x},\omega})^\sharp$. Cette fonction vérifie la propriété suivante :

(1) soit $\tilde{P} = \tilde{M}U$ un sous-groupe parabolique tordu tel que $\tilde{P} \neq \tilde{G}$ et $\tilde{x} \in \tilde{M}(F)$; alors

$$\int_{U(F)} {}^u\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X)du = 0$$

pour tout $X \in \mathfrak{m}_{\tilde{x}}(F)$.

La preuve est la même que celle de [**12**] lemme 5.5(i).

Soit $\tilde{M}$ un Lévi de $\tilde{G}$ tel que $\tilde{x} \in \tilde{M}(F)$. Quitte à conjuguer $M_{\min}$ et K, on peut supposer $\tilde{M} \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}$. On définit une fonction $J^\sharp_{\tilde{M},\tilde{x},\omega}(.,\tilde{f})$ sur $\mathfrak{m}_{\tilde{x}}(F) \cap \mathfrak{g}_{\tilde{x},\mathrm{reg}}(F)$ par

$$J^\sharp_{\tilde{M},\tilde{x},\omega}(X,\tilde{f}) = D^{G_{\tilde{x}}}(X)^{1/2}\int_{G_{\tilde{x}\exp(X)}(F)\backslash G(F)} {}^g\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X)v_{\tilde{M}}(g)dg.$$

Cela ne dépend pas de la conjugaison effectuée. On a

(2) Si $A_{\tilde{M}} \subsetneq A_{G_{\tilde{x}\exp(X)}}$, on a $J^\sharp_{\tilde{M},\tilde{x},\omega}(X,\tilde{f}) = 0$.

La preuve est la même que celle de [**12**] lemme 5.5(ii).

Soit $X \in \mathfrak{g}_{\tilde{x},\mathrm{reg}}(F)$. Notons $\tilde{\mathbf{M}}(X)$ le commutant de $A_{G_{\tilde{x}\exp(X)}}$ dans $\tilde{G}$. C'est un Lévi tordu de $\tilde{G}$ qui contient $\tilde{x}$. On pose

$$\Theta^{J,\sharp}_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}(X) = (-1)^{a_{\tilde{\mathbf{M}}(X)}-a_{\tilde{G}}}D^{G_{\tilde{x}}}(X)^{-1/2}J^\sharp_{\tilde{\mathbf{M}}(X),\tilde{x},\omega}(X,\tilde{f}).$$

La fonction $\Theta^{J,\sharp}_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}$ ainsi définie est invariante par conjugaison par $G_{\tilde{x}}(F)$.

On définit la notion de quasi-caractère sur une algèbre de Lie de même que l'on a défini cette notion sur un groupe ou un groupe tordu.

Proposition 1.2. – *Les fonctions $\Theta^J_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}$ et $\Theta^{J,\sharp}_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}$ sont des quasi-caractères sur $\mathfrak{g}_{\tilde{x}}(F)$. La seconde est la transformée de Fourier partielle de la première, c'est-à-dire que, pour toute $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\tilde{x}}(F))$, on a l'égalité*

$$\int_{\mathfrak{g}_{\tilde{x}}(F)} \Theta^{J,\sharp}_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}(X)\varphi(X)dX = \int_{\mathfrak{g}_{\tilde{x}}(F)} \Theta^J_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}(X)\varphi^\sharp(X)dX.$$

La première assertion concernant la fonction $\Theta^J_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}$ résulte de la proposition du paragraphe précédent. La deuxième assertion se démontre comme dans le cas non tordu, cf. **[12]** proposition 5.8. Puisque $\Theta^J_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}$ est un quasi-caractère à support compact modulo conjugaison, il existe une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\tilde{x}}(F))$, très cuspidale, telle que $\Theta^J_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}$ soit égal au quasi-caractère Θ^J_φ associé à φ, cf. **[12]** proposition 6.4. Le lemme 6.1 de **[12]** se généralise immédiatement aux transformées de Fourier partielles : la transformée de Fourier partielle de Θ^J_φ est $\Theta^J_{\varphi^\sharp}$, et c'est un quasi-caractère. Puisque cette transformée de Fourier est $\Theta^{J,\sharp}_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}$, cela entraîne la première assertion concernant cette fonction.

1.9. Représentations de groupes tordus. — On appelle représentation de $\tilde{G}(F)$ un triplet $(\pi, \tilde{\pi}, E)$, où E est un espace vectoriel complexe, π une représentation de $G(F)$ dans E et $\tilde{\pi}$ une application de $\tilde{G}(F)$ dans le groupe $Aut(E)$ des automorphismes $\mathbb{C}$-linéaires de E telle que $\pi(g)\tilde{\pi}(\tilde{x})\pi(g') = \tilde{\pi}(gxg')$ pour tous $g, g' \in G(F)$ et $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$. Deux représentations $(\pi_1, \tilde{\pi}_1, E_1)$ et $(\pi_2, \tilde{\pi}_2, E_2)$ sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire $A : E_1 \to E_2$ et un élément $B \in Aut(E_1)$, commutant à la représentation π_1, de sorte que $\pi_1(g) = A^{-1}\pi_2(g)A$ pour tout $g \in G(F)$ et $\tilde{\pi}_1(\tilde{x}) = BA^{-1}\tilde{\pi}_2(\tilde{x})A$ pour tout $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$.

Soit $(\pi, \tilde{\pi}, E)$ une représentation de $\tilde{G}(F)$. On dit qu'elle est lisse, ou admissible, si π l'est. On dit qu'elle est unitaire s'il existe un produit hermitien défini positif sur E tel que $\tilde{\pi}$ prenne ses valeurs dans le groupe unitaire pour ce produit. Nous dirons qu'elle est tempérée si elle est unitaire, si π est de longueur finie et si toutes les composantes irréductibles de π sont tempérées. On définit la contragrédiente $(\pi^\vee, \tilde{\pi}^\vee, E^\vee)$: $(\pi^\vee, E^\vee)$ est la contragrédiente de (π, E) et $\tilde{\pi}^\vee$ est définie par $< \tilde{\pi}^\vee(\tilde{x})\check{e}, e >=< \check{e}, \tilde{\pi}(\tilde{x})^{-1}e >$. Pour $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{G}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, on définit $(\pi_\lambda, \tilde{\pi}_\lambda, E)$ par $\tilde{\pi}_\lambda(\tilde{x}) = e^{\lambda(H_{\tilde{G}}(\tilde{x}))}\tilde{\pi}(\tilde{x})$. On dit que la représentation est $G(F)$-irréductible si π est irréductible. Fixons un point quelconque $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$. La donnée d'une représentation $G(F)$-irréductible est simplement la donnée de deux objets

– une représentation irréductible (π, E) de $G(F)$ telle que la représentation $g \mapsto \pi(\theta_{\tilde{x}}(g))$ soit équivalente à π ;
– un opérateur $\tilde{\pi}(\tilde{x})$ de E tel que $\pi(\theta_{\tilde{x}}(g)) = \tilde{\pi}(\tilde{x})\pi(g)\tilde{\pi}(\tilde{x})^{-1}$ pour tout $g \in G(F)$.

En pratique, nous noterons simplement $\tilde{\pi}$ la représentation $(\pi, \tilde{\pi}, E)$. Nous noterons sans plus de commentaire π la représentation de $G(F)$ associée et $E_{\tilde{\pi}}$ l'espace E. On note $\mathrm{Temp}(\tilde{G})$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations admissibles irréductibles et tempérées de $\tilde{G}(F)$, que nous identifions à un ensemble de représentants de ces classes.

Soient $\tilde{P} = \tilde{M}U$ un sous-groupe parabolique tordu de $\tilde{G}$ et $\tilde{\tau}$ une représentation admissible de $\tilde{M}(F)$. On définit la représentation induite $\mathrm{Ind}_{\tilde{P}}^{\tilde{G}}(\tilde{\tau})$ de $\tilde{G}(F)$. Elle se réalise dans l'espace habituel de la représentation $\mathrm{Ind}_P^G(\tau)$, que l'on note $E^G_{P,\tau}$. Soient $e \in E^G_{P,\tau}$ et $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$. Fixons $\tilde{y} \in \tilde{M}(F)$, soit γ l'élément de $G(F)$ tel que $\tilde{x} = \gamma\tilde{y}$.

Alors on a l'égalité

$$(\mathrm{Ind}_P^G(\tilde{\tau},\tilde{x})e)(g) = \delta_P(\tilde{y})^{1/2}\tilde{\tau}(\tilde{y})e(\theta_{\tilde{y}}^{-1}(g\gamma))$$

pour tout $g \in G(F)$, où δ_P est étendu de façon naturelle à $\tilde{M}(F)$. Supposons que M contienne $M_{\min}$. On peut aussi réaliser la représentation induite dans l'espace $\mathcal{K}_{P,\tau}^G$ des restrictions à K des éléments de $E_{P,\tau}^G$. Supposons $\tilde{\tau}$ tempérée. On définit une $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille $(\mathcal{R}_{\tilde{P}'}(\tau))_{\tilde{P}'\in\mathcal{P}(\tilde{M})}$, qui prend ses valeurs dans l'espace des opérateurs de $\mathcal{K}_{P,\tau}^G$, par

$$\mathcal{R}_{\tilde{P}'}(\tau,\lambda) = R_{P'|P}(\tau)^{-1}R_{P'|P}(\tau_\lambda)$$

pour $\lambda \in i\mathcal{A}_{\tilde{M}}^*$, où $R_{P'|P}(\tau)$ est l'opérateur d'entrelacement normalisé, cf. **[3]** théorème 2.1. On associe à cette $(\tilde{G},\tilde{M})$-famille un opérateur $\mathcal{R}_{\tilde{M}}(\tilde{\tau})$. On définit le caractère pondéré de $\tilde{\tau}$: c'est la distribution

$$\tilde{f} \mapsto J_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\tilde{\tau},\tilde{f}) = \mathrm{trace}(\mathcal{R}_{\tilde{M}}(\tau)\mathrm{Ind}_P^G(\tilde{f}))$$

sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$. Dans le cas où $\tilde{M} = \tilde{G}$, c'est le caractère habituel de $\tilde{\tau}$ et on le note plutôt $\tilde{f} \mapsto \Theta_{\tilde{\tau}}(\tilde{f})$. D'après **[6]** theorem 2, ce caractère est une distribution localement intégrable.

1.10. Intégrales orbitales pondérées invariantes. — En utilisant les caractères pondérés de la section précédente, le procédé habituel d'Arthur permet de construire des intégrales orbitales pondérées invariantes à l'aide des intégrales $\tilde{f} \mapsto J_{\tilde{M}}(\tilde{x},\tilde{f})$. Rappelons la construction. Pour $\zeta \in \mathcal{A}_{\tilde{G}}$, notons $\mathbf{1}_{H_{\tilde{G}}=\zeta}$ la fonction caractéristique de l'ensemble des $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$ tels que $H_{\tilde{G}}(\tilde{x}) = \zeta$. Notons $\mathcal{H}_{ac}(\tilde{G}(F))$ l'espace des fonctions $\tilde{f} : \tilde{G}(F) \to \mathbb{C}$ telles que

(1) $\tilde{f}$ est biinvariante par un sous-groupe ouvert compact de $G(F)$;
(2) pour tout tout $\zeta \in \mathcal{A}_{\tilde{G}}$, la fonction $\mathbf{1}_{H_{\tilde{G}}=\zeta}\tilde{f}$ est à support compact sur $\tilde{G}(F)$.

Pour $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ et $\tilde{M} \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}$, Arthur montre qu'il existe une fonction $\phi_{\tilde{M}}(\tilde{f}) \in \mathcal{H}_{ac}(\tilde{M}(F))$ telle que, pour toute représentation $\tilde{\pi} \in \mathrm{Temp}(\tilde{M})$ et tout $\zeta \in H_{\tilde{M}}(\tilde{M}(F)) \subset \mathcal{A}_{\tilde{M}}$, on ait l'égalité

$$\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}} J_{\tilde{L}}(\tilde{\pi}_\lambda,\tilde{f})\exp(-\lambda(\zeta))d\lambda = \int_{i\mathcal{A}_{\tilde{M},F}} \Theta_{\tilde{\pi}_\lambda}(\phi_{\tilde{M}}(\tilde{f})\mathbf{1}_{H_{\tilde{M}}=\zeta})\exp(-\lambda(\zeta))d\lambda$$

$$= \mathrm{mes}(i\mathcal{A}_{\tilde{M},F})\Theta_{\tilde{\pi}}(\phi_{\tilde{M}}(\tilde{f})\mathbf{1}_{H_{\tilde{M}}=\zeta}).$$

On fixe de telles fonctions $\phi_{\tilde{M}}(\tilde{f})$. Pour $\tilde{x} \in \tilde{M}(F) \cap \tilde{G}_{\mathrm{reg}}(F)$, on définit l'intégrale orbitale invariante $I_{\tilde{M}}(\tilde{x},\tilde{f})$ par récurrence sur $a_{\tilde{M}} - a_{\tilde{G}}$ par la formule

$$I_{\tilde{M}}(\tilde{x},\tilde{f}) = J_{\tilde{M}}(\tilde{x},\tilde{f}) - \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}(\tilde{M}),\tilde{L}\neq\tilde{G}} I_{\tilde{M}}^{\tilde{L}}(\tilde{x},\phi_{\tilde{L}}(\tilde{f})\mathbf{1}_{H_{\tilde{L}}=H_{\tilde{L}}(\tilde{x})}).$$

Soit $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$. On lui associe une fonction $\Theta_{\tilde{f}}$ sur $\tilde{G}_{\rm reg}(F)$ de la façon suivante. Soit $\tilde{x} \in \tilde{G}_{\rm reg}(F)$. Notons $\tilde{M}(\tilde{x})$ le commutant de $A_{G_{\tilde{x}}}$ dans $\tilde{G}$. Choisissons $g \in G(F)$ tel que $g\tilde{M}(\tilde{x})g^{-1} \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}$. On pose

$$\Theta_{\tilde{f}}(\tilde{x}) = (-1)^{a_{\tilde{M}(\tilde{x})}-a_{\tilde{G}}} D^{\tilde{G}}(\tilde{x})^{-1/2} I_{g\tilde{M}(\tilde{x})g^{-1}}(g\tilde{x}g^{-1}, \tilde{f}).$$

Cela ne dépend pas du choix de g.

Pour $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, on dit que $\tilde{f}$ est cuspidale si et seulement si, pour tout groupe de Lévi tordu $\tilde{M} \subsetneq \tilde{G}$ et pour tout $\tilde{x} \in \tilde{G}_{\rm reg}(F) \cap \tilde{M}(F)$, on a $J_{\tilde{G}}(\tilde{x}, \tilde{f}) = 0$. On a la propriété suivante, que nous énonçons avant de l'expliquer :

(3) pour toute fonction cuspidale $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, pour tout $\tilde{M} \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}$ et pour tout élément $\tilde{x} \in \tilde{M}(F) \cap \tilde{G}_{\rm reg}(F)$ qui est elliptique dans $\tilde{M}(F)$, on a l'égalité

$$D^{\tilde{G}}(\tilde{x})^{-1/2}(-1)^{a_{\tilde{M}}-a_{\tilde{G}}} I_{\tilde{M}}(\tilde{x}, \tilde{f}) = \sum_{\mathcal{O} \in \{\Pi_{ell}(\tilde{G})\}} c(\mathcal{O}) \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{G},F}} \Theta_{\tilde{\pi}_\lambda}(\tilde{x}) \Theta_{(\tilde{\pi}_\lambda)^\vee}(\tilde{f}) d\lambda.$$

Que $\tilde{x}$ soit elliptique dans $\tilde{M}(F)$ signifie que $A_{G_{\tilde{x}}} = A_{\tilde{M}}$. L'ensemble $\Pi_{ell}(\tilde{G})$ est un certain sous-ensemble de celui des représentations tempérées virtuelles de $\tilde{G}(F)$. Il est stable par l'action $\tilde{\pi} \mapsto \tilde{\pi}_\lambda$ de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{G}}$. L'ensemble $\{\Pi_{ell}(\tilde{G})\}$ est l'ensemble des orbites de cette action. Pour chaque orbite $\mathcal{O}$, on choisit un point base $\tilde{\pi} \in \mathcal{O}$. Enfin, $c(\mathcal{O})$ est un certain coefficient. La somme est en fait finie car, pour tout sous-groupe ouvert compact K' de $G(F)$, il n'y a qu'un nombre fini d'orbites pour lesquelles une représentation de l'orbite admet des invariants non nuls par K'.

Cf. **[13]** théorème 7.1 et, dans le cas non tordu, **[5]** théorème 5.1.

Lemme 1.3. — *Soit $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ une fonction cuspidale. Alors $\Theta_{\tilde{f}}$ est un quasi-caractère de $\tilde{G}(F)$.*

La preuve est la même qu'en **[14]** 2.5, en utilisant **[6]** theorem 3.

1.11. Un lemme d'annulation. — Soient π une représentation admissible de $G(F)$ et B une forme bilinéaire sur $E_{\pi^\vee} \times E_\pi$. Soit $A \in {\rm End}_{\mathbb{C}}(E_\pi)$ un opérateur lisse, c'est-à-dire qu'il existe un sous-groupe ouvert compact K' de $G(F)$ tel que $\pi(k)A\pi(k') = A$ pour tous $k, k' \in K'$. Pour un tel sous-groupe K', fixons une base $\mathcal{B}^{K'}$ du sous-espace $E_\pi^{K'}$ et introduisons la base duale $\{\check{e}; e \in \mathcal{B}^{K'}\}$ de $E_{\pi^\vee}^{K'}$ (pour l'accouplement usuel, noté $< .,. >$, entre ces deux espaces). Posons

$${\rm trace}_B(A) = \sum_{e \in \mathcal{B}^{K'}} B(\check{e}, A(e)).$$

Ce terme ne dépend ni du choix de K', ni de celui de la base.

Soient $\tilde{P} = \tilde{M}U$ un sous-groupe parabolique tordu et τ une représentation admissible de $M(F)$. On suppose

(1) $\tilde{P} \neq \tilde{G}$.

Supposons $\pi = \mathrm{Ind}_P^G(\tau)$, $E_\pi = E_{P,\tau}^G$ et $E_{\pi^\vee} = E_{P,\tau^\vee}^G$. Pour un élément $\tilde{y} \in \tilde{M}(F)$, considérons la condition suivante :

$(H)_{\tilde{y}}$ soient $e \in E_{P,\tau}^G$ et $e' \in E_{P,\tau^\vee}^G$ tels que $e'(\theta_{\tilde{y}}(g)) \otimes e(g) = 0$ pour tout $g \in G(F)$; alors $B(e', e) = 0$.

Considérons aussi la condition :

(H) la représentation τ se prolonge en une représentation $\tilde{\tau}$ de $\tilde{M}(F)$; soient $e \in E_{P,\tau}^G$ et $e' \in E_{P,\tau^\vee}^G$ tels que $e'(g) \otimes e(g) = 0$ pour tous $g \in G(F)$; alors $B(e', e) = 0$.

Soit $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$. Supposons

(2) $\tilde{f}$ est très cuspidale.

Pour un élément $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$, on note $\tilde{f}_{\tilde{x}}$ la fonction sur $G(F)$ définie par $\tilde{f}_{\tilde{x}}(g) = \tilde{f}(g\tilde{x})$.

Lemme 1.4. — *On suppose vérifiées les conditions (1) et (2).*

(i) *Soit* $\tilde{y} \in \tilde{M}(F)$, *supposons vérifiée la condition* $(H)_{\tilde{y}}$. *Alors* $\mathrm{trace}_B(\mathrm{Ind}_P^G(\tau, \tilde{f}_{\tilde{y}})) = 0$.

(ii) *Supposons vérifiée la condition* (H). *Alors* $\mathrm{trace}_B(\mathrm{Ind}_P^G(\tilde{\tau}, \tilde{f})) = 0$.

Démonstration. — On ne perd rien à supposer que K est en bonne position relativement à M. Considérons la situation de (i). Fixons un sous-groupe ouvert compact K' de K tel que $\tilde{f}$ soit biinvariante par K' et par $K'' = \theta_{\tilde{y}}(K')$. On fixe un ensemble de représentants Γ' de l'ensemble des doubles classes $P(F)\backslash G(F)/K'$. L'ensemble $\Gamma'' = \theta_{\tilde{y}}(\Gamma')$ est un ensemble de représentants de l'ensemble des doubles classes $P(F)\backslash G(F)/K''$. Choisissons une base $\mathcal{B}^{K'}$ de $(E_{P,\tau}^G)^{K'}$ telle que, pour tout $e' \in \mathcal{B}^{K'}$, il existe $\gamma' \in \Gamma'$ de sorte que le support de e soit inclus dans $P(F)\gamma' K'$. L'élément correspondant $\check{e}'$ de la base duale vérifie la même propriété, avec le même γ'. Choisissons de même une base $\mathcal{B}^{K''}$ de $(E_{P,\tau}^G)^{K''}$. Pour tout $e' \in \mathcal{B}^{K''}$, on a l'égalité

$$\mathrm{Ind}_P^G(\tau, \tilde{f}_{\tilde{y}})e'' = \sum_{e' \in \mathcal{B}^{K'}} < \check{e}', \mathrm{Ind}_P^G(\tau, \tilde{f}_{\tilde{y}})e'' > e',$$

d'où

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{trace}_B(\mathrm{Ind}_P^G(\tau, \tilde{f}_{\tilde{y}})) = \sum_{e' \in \mathcal{B}^{K'}, e'' \in \mathcal{B}^{K''}} B(\check{e}'', e') < \check{e}', \mathrm{Ind}_P^G(\tau, \tilde{f}_{\tilde{y}})e'' > .$$

Fixons $e' \in \mathcal{B}^{K'}$ et $e'' \in \mathcal{B}^{K''}$. Soient $\gamma' \in \Gamma'$ et $\gamma'' \in \Gamma''$ tels que le support de e' soit contenu dans $P(F)\gamma' K'$ et celui de e'' soit contenu dans $P(F)\gamma'' K''$. Si $\gamma'' \neq \theta_{\tilde{y}}(\gamma')$, on a $\check{e}''(\theta_{\tilde{y}}(g)) \otimes e'(g) = 0$ pour tout $g \in G(F)$. Donc $B(\check{e}'', e') = 0$ d'après $(H)_{\tilde{y}}$. Supposons $\gamma'' = \theta_{\tilde{y}}(\gamma')$. On calcule

$$< \check{e}', \mathrm{Ind}_P^G(\tau, \tilde{f}_{\tilde{y}})e'' >= \int_K \int_{G(F)} \tilde{f}_{\tilde{y}}(g) < \check{e}'(h), e''(hg) > dg\, dh$$

$$= \int_K \int_{G(F)} \tilde{f}_{\tilde{y}}(h^{-1}g) < \check{e}'(h), e''(g) > dg\, dh$$

$$= \int_K \int_K \int_{M(F)} \int_{U(F)} \tilde{f}(h^{-1}muk\tilde{y}) < \check{e}'(h), \tau(m)e''(k) > \delta_P(m)^{1/2} du\, dm\, dk\, dh.$$

Par les changements de variables $k \mapsto \theta_{\tilde{y}}(k)$, $u \mapsto \theta_{\tilde{y}}(u)$, on obtient

$$< \check{e}', \mathrm{Ind}_P^G(\tau, \tilde{f}_{\tilde{y}})e'' >= \int_K \int_{\theta_{\tilde{y}}^{-1}(K)} \int_{M(F)} \int_{U(F)} \tilde{f}(h^{-1}m\tilde{y}uk)$$

$$< \check{e}'(h), \tau(m)e''(\theta_{\tilde{y}}(k)) > \delta_P(m\tilde{y})^{1/2} du\, dm\, dk\, dh.$$

Fixons h, k, m et supposons $< \check{e}'(h), \tau(m)e''(\theta_{\tilde{y}}(k)) >\neq 0$. Alors $h \in P(F)\gamma' K'$ et $\theta_{\tilde{y}}(k) \in P(F)\gamma'' K''$. Cette dernière condition entraîne $k \in P(F)\gamma' K'$. Mais alors $k \in P(F)hK'$. Ecrivons $k = m'u'hk'$, avec $m' \in M(F)$, $u' \in U(F)$, $k' \in K'$. Considérons l'intégrale intérieure de la formule ci-dessus. Puisque $\tilde{f}$ est invariante à droite par K', le k' disparaît. Par le changement de variables $u \mapsto m'uu'^{-1}m'^{-1}$, cette intégrale devient

$$\delta_{P'}(m')^{1/2} \int_{U(F)} \tilde{f}(h^{-1}m\tilde{y}m'uh)du.$$

Elle est nulle puisque $\tilde{f}$ est très cuspidale. Donc $< \check{e}', \mathrm{Ind}_P^G(\tau, \tilde{f}_{\tilde{y}})e'' >= 0$. Tous les termes de (3) sont donc nuls, ce qui prouve l'assertion (i) de l'énoncé.

Considérons la situation de (ii). Fixons $\tilde{y} \in \tilde{M}(F)$. On a l'égalité $\mathrm{Ind}_P^G(\tilde{\tau}, \tilde{f}) = \mathrm{Ind}_P^G(\tau, \tilde{f}_{\tilde{y}})\mathrm{Ind}_P^G(\tilde{\tau}, \tilde{y})$. Définissons une forme bilinéaire B' sur $E_{P,\tau^\vee}^G \times E_{P,\tau}^G$ par

$$B'(e', e) = B(\mathrm{Ind}_P^G(\tilde{\tau}, \tilde{y})^{-1}e', e).$$

On vérifie formellement que $\mathrm{trace}_B(\mathrm{Ind}_P^G(\tilde{\tau}, \tilde{f})) = \mathrm{trace}_{B'}(\mathrm{Ind}_P^G(\tau, \tilde{f}_{\tilde{y}}))$ et que la condition (H) pour B entraîne la condition $(H)_{\tilde{y}}$ pour B'. Il ne reste plus qu'à appliquer le (i) à la forme B' pour conclure. □

Remarque. — Quand π est unitaire, on peut considérer des formes sesquilinéaires sur $E_\pi \times E_\pi$ plutôt que des formes bilinéaires sur $E_{\pi^\vee} \times E_\pi$.

1.12. Induction de quasi-caractères. — Soit $\tilde{M}$ un Lévi tordu de $\tilde{G}$. Soit $\Delta^{\tilde{M}}$ une distribution sur $\tilde{M}(F)$ invariante par conjugaison par $M(F)$. On peut définir une distribution induite $\Delta = \mathrm{Ind}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\Delta^{\tilde{M}})$ sur $\tilde{G}(F)$, qui est invariante par conjugaison. La définition est similaire à celle du cas non tordu. Quitte à conjuguer $\tilde{M}$, on suppose $\tilde{M} \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}$. On fixe $\tilde{P} = \tilde{M}U \in \mathcal{P}(\tilde{M})$. Pour $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, on définit $\tilde{f}_P \in C_c^\infty(\tilde{M}(F))$ par

$$\tilde{f}_P(\tilde{m}) = \delta_P(\tilde{m})^{1/2} \int_K \int_{U(F)} \tilde{f}(k^{-1}\tilde{m}uk)du\, dk.$$

On pose $\Delta(\tilde{f}) = \Delta^{\tilde{M}}(\tilde{f}_P)$. Cela ne dépend pas des choix effectués. Dans le cas où $\Delta^{\tilde{M}}$ est un quasi-caractère sur $\tilde{M}(F)$, Δ est aussi un quasi-caractère sur $\tilde{G}(F)$. Le développement de Δ au voisinage d'un point semi-simple de $\tilde{G}(F)$ se calcule en fonction des développements de $\Delta^{\tilde{M}}$. Enonçons le résultat qui nous intéresse, qui est le même que dans le cas non tordu ([**14**] lemme 2.3).

Lemme 1.5. — *Soient $\Theta^{\tilde{M}}$ un quasi-caractère de $\tilde{M}(F)$ et $\Theta = \mathrm{Ind}_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}(\Theta^{\tilde{M}})$. Alors*

(i) *Θ est un quasi-caractère sur $\tilde{G}(F)$;*

(ii) *soient $\tilde{x}$ un élément semi-simple de $\tilde{G}(F)$ et $\mathcal{O} \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{g}_{\tilde{x}})$ une orbite régulière ; on a l'égalité*

$$c_{\Theta,\mathcal{O}}(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{x}' \in \mathcal{X}^{\tilde{M}}(\tilde{x})} \sum_{g \in \Gamma_{\tilde{x}'}/G_{\tilde{x}}(F)} \sum_{\mathcal{O}' \in \mathrm{Nil}(\mathfrak{m}_{\tilde{x}'})} D^{\tilde{G}}(\tilde{x})^{-1/2} D^{\tilde{M}}(\tilde{x}')^{1/2}$$

$$[Z_M(\tilde{x}')(F) : M_{\tilde{x}'}(F)]^{-1} [g\mathcal{O} : \mathcal{O}'] c_{\Theta^{\tilde{M}},\mathcal{O}'}(\tilde{x}').$$

Expliquons les notations. On a fixé un ensemble $\mathcal{X}^{\tilde{M}}(\tilde{x})$ de représentants des classes de conjugaison par $M(F)$ dans l'intersection de $\tilde{M}(F)$ avec la classe de conjugaison de $\tilde{x}$ par $G(F)$. Pour $\tilde{x}' \in \mathcal{X}^{\tilde{M}}(\tilde{x})$, $\Gamma_{\tilde{x}'}$ est l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $g\tilde{x}g^{-1} = \tilde{x}'$. Pour un tel g, la conjugaison par g transporte $\mathcal{O}$ en une orbite $g\mathcal{O}$ dans $\mathfrak{g}_{\tilde{x}'}(F)$. Pour une orbite nilpotente $\mathcal{O}'$ de $\mathfrak{m}_{\tilde{x}'}(F)$, on pose $[g\mathcal{O} : \mathcal{O}'] = 1$ si $g\mathcal{O}$ est incluse dans l'orbite induite de $\mathcal{O}'$, $[g\mathcal{O} : \mathcal{O}'] = 0$ sinon.

1.13. Propriétés des fonctions très cuspidales. — En utilisant le lemme du paragraphe 1.11, on peut adapter les preuves des lemmes 2.2, 2.6 et 2.7 de [**14**]. On obtient les résultats suivants.

Lemme 1.6. — (i) *Soit $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ une fonction très cuspidale, soient $\tilde{M} \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}$, $\tilde{\tau}$ une représentation tempérée de $\tilde{M}(F)$, $\tilde{L} \in \mathcal{L}(\tilde{M})$ et $\tilde{Q} \in \mathcal{F}(\tilde{L})$. Supposons $\tilde{L} \neq \tilde{M}$ ou $\tilde{Q} \neq \tilde{G}$. Alors $J_{\tilde{L}}^{\tilde{Q}}(\tilde{\tau}, \tilde{f}) = 0$.*

(ii) *Soit $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ une fonction très cuspidale. Alors, pour tout $\tilde{L} \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}$, la fonction $\phi_{\tilde{L}}(\tilde{f})$ est cuspidale. Admettons l'hypothèse de 1.10. Alors on a l'égalité*

$$\Theta_{\tilde{f}}^J = \sum_{\tilde{L} \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}} |W^L||W^G|^{-1}(-1)^{a_{\tilde{L}} - a_{\tilde{G}}} \mathrm{Ind}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\Theta_{\phi_{\tilde{L}}(\tilde{f})}).$$

(iii) *Soit $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ une fonction cuspidale. Alors il existe une fonction très cuspidale $\tilde{f}' \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ telle que $J_{\tilde{G}}(\tilde{x}, \tilde{f}') = J_{\tilde{G}}(\tilde{x}, \tilde{f})$ pour tout $\tilde{x} \in \tilde{G}_{\mathrm{reg}}(F)$.*

2. Le groupe GL_d tordu

2.1. Description du groupe tordu. — Soient $d \geq 1$ un entier et V un espace vectoriel sur F de dimension d. Notons V^* le dual de V, $G = GL(V)$ le groupe des automorphismes F-linéaires de V et $\tilde{G} = \mathrm{Isom}(V, V^*)$ l'ensemble des isomorphismes F-linéaires de V sur V^*. Le groupe G agit à droite et à gauche sur $\tilde{G}$ par

$$(g, \tilde{x}, g') \mapsto {}^t g^{-1} \circ \tilde{x} \circ g',$$

où ${}^t g$ est le transposé de g. Le couple $(G, \tilde{G})$ est un groupe tordu. Remarquons que $\tilde{G}(F)$ s'identifie à l'ensemble des formes bilinéaires non dégénérées sur V : à $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$, on associe la forme $(v', v) \mapsto \langle v', \tilde{x}v \rangle$.

Soit $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$ un élément semi-simple. Son commutant dans G est produit d'un groupe symplectique, d'un groupe orthogonal et de groupes qui sont des restrictions à la Weil de groupes linéaires ou unitaires. La composante orthogonale se construit de la façon suivante. Considérons l'élément $x = {}^t\tilde{x}^{-1}\tilde{x}$ de $G(F)$. Il est semi-simple. Notons $V''_{\tilde{x}}$ le sous-espace de V propre pour l'action de x, associé à la valeur propre 1. Notons $V'_{\tilde{x}}$ l'unique supplémentaire de $V''_{\tilde{x}}$ qui soit invariant par x. Alors $V = V'_{\tilde{x}} \oplus V''_{\tilde{x}}$ et $V^* = V'^*_{\tilde{x}} \oplus V''^*_{\tilde{x}}$. L'élément $\tilde{x}$ envoie $V'_{\tilde{x}}$ dans $V'^*_{\tilde{x}}$ et $V''_{\tilde{x}}$ dans $V''^*_{\tilde{x}}$. Sa restriction à $V''_{\tilde{x}}$ est une forme quadratique. La composante orthogonale de $Z_G(\tilde{x})$ est le groupe orthogonal de cette restriction.

Fixons une base $(v_i)_{i=1,\dots,d}$ de V. On peut alors identifier G au groupe GL_d des matrices $d \times d$ inversibles. Pour $g \in GL_d$, on note ses coefficients $g_{i,j}$, pour $i, j = 1, \dots, d$. On introduit les sous-groupes suivants : B_d le sous-groupe de Borel triangulaire supérieur, A_d le sous-tore diagonal, U_d le radical unipotent de B_d, K_d le sous-groupe compact spécial de $GL_d(F)$ formé des matrices à coefficients entiers et de déterminant de valuation nulle. On note ξ le caractère du groupe $U_d(F)$ défini par

$$\xi(u) = \psi(\sum_{i=1,\dots,d-1} u_{i,i+1}).$$

Introduisons la base duale $(v_i^*)_{i=1,\dots,d}$ de V^*. Notons $\boldsymbol{\theta}_d$ l'élément de $\tilde{G}(F)$ défini par $\boldsymbol{\theta}_d(v_i) = (-1)^{i+[(d+1)/2]}v^*_{d+1-i}$ pour tout i. Notons simplement θ_d l'automorphisme de G associé à $\boldsymbol{\theta}_d$. On a $\theta_d(g) = J_d{}^tg^{-1}J_d^{-1}$, où J_d est la matrice antidiagonale de coefficients $(J_d)_{i,d+1-i} = (-1)^i$. Cet automorphisme θ_d conserve les sous-groupes que l'on vient d'introduire. Il conserve aussi le caractère ξ. Le normalisateur de B_d dans $\tilde{G}$ est $\tilde{B}_d = B_d\boldsymbol{\theta}_d$. Le normalisateur commun de B_d et A_d est $\tilde{A}_d = A_d\boldsymbol{\theta}_d$.

Pour $g \in GL_d(F)$, on pose

$$\sigma(g) = \sup(\{1\} \cup \{\log(|g_{ij}|_F); i, j = 1, \dots, d\} \cup \{\log(|(g^{-1})_{ij}|_F); i, j = 1, \dots, d\}).$$

Pour $g \in G(F)$, on définit $\sigma(g)$ en identifiant G à GL_d par le choix d'une base. La fonction σ dépend évidemment du choix de la base, mais d'une façon inessentielle. Pour tout réel b, on note $\mathbf{1}_{\sigma<b}$, resp. $\mathbf{1}_{\sigma\geq b}$, la fonction caractéristique du sous-ensemble des $g \in G(F)$ tels que $\sigma(g) < b$, resp. $\sigma(g) \geq b$

Remarquons que $\mathcal{A}_{\tilde{G}} = \{0\}$. Pour tout Lévi tordu $\tilde{M}$ de $\tilde{G}$, le procédé de 1.3 munit $\tilde{M}(F)$ d'une extension canonique de la fonction $H_{\tilde{M}}$ à $\tilde{M}(F)$. On vérifie que $H_{\tilde{A}_d}(\boldsymbol{\theta}_d) = 0$.

2.2. Modèle de Whittaker. — Fixons une base $(v_i)_{i=1,\dots,d}$ de V. Soit (π, E) une représentation admissible irréductible de $G(F)$. On appelle fonctionnelle de Whittaker une application linéaire $\phi : E \to \mathbb{C}$ telle que $\phi(\pi(u)e) = \xi(u)\phi(e)$ pour tous $u \in U_d(F)$ et $e \in E$. Comme on le sait, l'espace de ces fonctionnelles est de dimension au plus 1. Supposons que cette dimension soit 1 et fixons une fonctionnelle de Whittaker non nulle ϕ. Pour $e \in E$, on définit une fonction W_e sur $G(F)$ par $W_e(g) = \phi(\pi(g)e)$. L'espace des fonctions W_e, pour $e \in E$, est le modèle de Whittaker de π.

On note $\theta_d(\pi)$ la représentation $g \mapsto \pi(\theta_d(g))$. Cette représentation est isomorphe à la contragrédiente $\pi^\vee$. La condition pour que π se prolonge en une représentation $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}(F)$ est que $\theta_d(\pi)$ soit isomorphe à π. Supposons qu'il en soit ainsi et soit $\tilde{\pi}$ un prolongement. Supposons aussi que π admette un modèle de Whittaker. L'application $\phi \mapsto \phi \circ \tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}_d)$ conserve la droite des fonctionnelles de Whittaker. Il existe donc un nombre complexe $w(\tilde{\pi}, \psi) \in \mathbb{C}^\times$ tel que $\phi \circ \tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}_d) = w(\tilde{\pi}, \psi)\phi$ pour toute fonctionnelle de Whittaker ϕ. Un calcul de changement de base montre que ce nombre ne dépend pas de la base $(v_i)_{i=1,\dots,d}$ choisie. Par contre, il dépend de ψ. Soit $b \in F^\times$, notons ψ^b le caractère $z \mapsto \psi(bz)$ de F, dont on déduit un caractère ξ^b de $U_d(F)$. Notons D^b la matrice diagonale de coefficients diagonaux $D^b_{i,i} = b^{d-i}$. Si ϕ est une fonctionnelle de Whittaker relative à ξ, alors $\phi \circ \pi(D^b)$ est une telle fonctionnelle relative à ξ^b. On a

$$\phi \circ \pi(D^b) \circ \tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}_d) = \phi \circ \tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}_d) \circ \pi(\theta_d(D^b)).$$

Mais $\theta_d(D^b)$ est égal à D^b multiplié par la matrice centrale de coefficients diagonaux égaux à b^{d-1}. On en déduit l'égalité

(1) $w(\tilde{\pi}, \psi^b) = \omega_\pi(b)^{d-1} w(\tilde{\pi}, \psi)$,

où ω_π est le caractère central de π (c'est un caractère d'ordre au plus 2). On a défini en 1.9 la contragrédiente $\tilde{\pi}^\vee$ de $\tilde{\pi}$. Supposons π tempérée. On a la relation

(2) $w(\tilde{\pi}^\vee, \psi^-) w(\tilde{\pi}, \psi) = 1$,

où $\psi^- = \psi^b$ pour $b = -1$. En effet, la condition $\pi^\vee \simeq \pi$ signifie qu'il existe une forme bilinéaire invariante sur $E \times E$. On sait construire cette forme bilinéaire. Introduisons comme ci-dessus l'espace des fonctions de Whittaker W_e pour $e \in E$ et introduisons l'espace similaire des fonctions W_e^- relatif au caractère ξ^-. On peut prendre pour forme bilinéaire la forme

$$(e', e) \mapsto < e', e >= \int_{GL_{d-1}(F)} W^-_{e'}(\gamma) W_e(\gamma) d\gamma,$$

où GL_{d-1} est identifié au groupe des automorphismes linéaires de l'hyperplan de V engendré par $v_1, \dots, v_{d-1}$. Par définition, on a $< \tilde{\pi}^\vee(\boldsymbol{\theta}_d)e', \tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}_d)e >=< e', e >$. Il suffit d'expliciter ces deux termes à l'aide de la formule intégrale ci-dessus pour obtenir (2).

On montre de même en utilisant l'unitarité de $\tilde{\pi}$ que $|w(\tilde{\pi}, \psi)| = 1$.

2.3. Représentations induites. — Soit $\tilde{L}$ un Lévi tordu de $\tilde{G}$. Il existe une décomposition

$$V = V_u \oplus \cdots \oplus V_1 \oplus V_0 \oplus V_{-1} \oplus \cdots \oplus V_{-u}$$

de sorte que $\tilde{L}(F)$ soit l'ensemble des $\tilde{x} \in \tilde{G}(F)$ tels que $\tilde{x}(V_j) = V^*_{-j}$ pour tout $j = -u, \dots, u$. On a

$$L = GL_{d_u} \times \cdots \times GL_{d_1} \times GL_{d_0} \times GL_{d_1} \times \cdots \times GL_{d_u},$$

où $d_j = \dim(V_j) = \dim(V_{-j})$. On peut choisir une base $(v_i)_{i=1,\dots,d}$ de V de sorte que V_j ait pour base les vecteurs v_i pour $i = d_u + \dots + d_{j+1} + 1, \dots, d_u + \dots + d_j$. Alors $\boldsymbol{\theta}_d$ appartient à $\tilde{L}(F)$. Soit $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Temp}(\tilde{L})$. On a

$$\sigma = \sigma_u \otimes \dots \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_0 \otimes \sigma_{-1} \otimes \dots \otimes \sigma_{-u},$$

où σ_j est une représentation irréductible et tempérée de $GL_{d_j}(F)$ et $\theta_{d_j}(\sigma_j) \simeq \sigma_{-j}$. Pour tout $j = 1, \dots, u$, choisissons un opérateur unitaire $A_j : E_{\sigma_j} \to E_{\sigma_{-j}}$ tel que $A_j\sigma_j(\theta_{d_j}(x_j)) = \sigma_{-j}(x_j)A_j$ pour tout $x_j \in GL_{d_j}(F)$. Notons $\tilde{G}_0$ l'analogue de $\tilde{G}$ quand d est remplacé par d_0. Alors il existe un unique prolongement $\tilde{\sigma}_0$ de σ_0 à $\tilde{G}_0(F)$ tel que, pour

$$e = e_u \otimes \dots \otimes e_1 \otimes e_0 \otimes e_{-1} \otimes \dots \otimes e_{-u} \in E_\sigma,$$

on ait

$$\tilde{\sigma}(\boldsymbol{\theta}_d)(e) = A_u^{-1}e_{-u} \otimes \dots \otimes A_1^{-1}e_{-1} \otimes \tilde{\sigma}_0(\boldsymbol{\theta}_{d_0})(e_0) \otimes A_1e_1 \otimes \dots \otimes A_ue_u.$$

Cela ne dépend pas du choix des A_j. Introduisons la représentation induite $\tilde{\pi} = \mathrm{Ind}_L^G(\tilde{\sigma})$. On vérifie que $w(\tilde{\pi}, \psi) = w(\tilde{\sigma}_0, \psi)$.

Il est utile de calculer le caractère de la représentation $\tilde{\sigma}$. Pour $\tilde{x} \in \tilde{L}(F)$ et $j = -u, \dots, u$, on note $\tilde{x}_j : V_j \to V_{-j}^*$ la restriction de $\tilde{x}$ à V_j.

Lemme 2.1. — *Pour tout $\tilde{x} \in \tilde{L}(F)$ assez régulier, on a l'égalité*

$$\Theta_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}) = \Theta_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{x}_0) \prod_{j=1,\dots,u} \Theta_{\sigma_j}((-1)^{d+1}{}^t\tilde{x}_{-j}^{-1}\tilde{x}_j).$$

Démonstration. — Pour $j = -u, \dots, u$ soit $f_j \in C_c^\infty(GL_{d_j}(F))$. Définissons $\tilde{f}$ sur $\tilde{L}(F)$ par $\tilde{f}(x\boldsymbol{\theta}_d) = \prod_{j=-u,\dots,u} f_j(x_j)$ pour $x \in L(F)$, où les x_j sont les différentes composantes de x. Pour

$$e = e_u \otimes \dots \otimes e_1 \otimes e_0 \otimes e_{-1} \otimes \dots \otimes e_{-u} \in E_\sigma,$$

on a l'égalité

$$\tilde{\sigma}(\tilde{f})e = \sigma_u(f_u)A_u^{-1}e_{-u} \otimes \dots \otimes \sigma_1(f_1)A_1^{-1}e_{-1} \otimes \sigma_0(f_0)\tilde{\sigma}_0(\boldsymbol{\theta}_{d_0})(e_0) \otimes \sigma_{-1}(f_{-1})A_1e_1 \otimes \dots \otimes \sigma_{-u}(f_{-u})A_ue_u.$$

Pour $j = 1, \dots, u$, l'opérateur

$$e_j \otimes e_{-j} \mapsto \sigma_j(f_j)A_j^{-1}e_{-j} \otimes \sigma_{-j}(f_{-j})A_je_j$$

a même trace que l'opérateur

$$e_j \mapsto \sigma_j(f_j)A_j^{-1}\sigma_{-j}(f_{-j})A_je_j = \sigma_j(f_j \star {}^\theta f_{-j})e_j$$

où ${}^\theta f_{-j}(y) = f_{-j}(\theta_{d_j}(y))$ et $\star$ est la convolution. Sa trace est

$$\int_{GL_{d_j}(F)^2} \Theta_{\sigma_j}(x_j\theta_{d_j}(x_{-j}))f_j(x_j)f_{-j}(x_{-j})dx_j\,dx_{-j}.$$

D'autre part, la trace de l'opérateur $\sigma_0(f_0)\tilde{\sigma}(\boldsymbol{\theta}_{d_0})$ est

$$\int_{GL_{d_0}(F)} \Theta_{\tilde{\sigma}_0}(x_0\boldsymbol{\theta}_{d_0})f_0(x_0)dx_0.$$

La trace de l'opérateur $\tilde{\sigma}(\tilde{f})$ est donc égale à

$$\int_{\tilde{L}(F)} \Theta_{\tilde{\sigma}_0}(x_0\boldsymbol{\theta}_{d_0})\Big(\prod_{j=1,\dots,u} \Theta_{\sigma_j}(x_j\theta_{d_j}(x_{-j}))\Big)\tilde{f}(\tilde{x})d\tilde{x},$$

où on a écrit $\tilde{x} = x\boldsymbol{\theta}_d$ avec $x \in L(F)$. On vérifie que $x_0\boldsymbol{\theta}_{d_0} = \tilde{x}_0$ et que $x_j\theta_{d_j}(x_{-j}) = (-1)^{d+1}{}^t\tilde{x}_{-j}^{-1}\tilde{x}_j$ pour tout $j = 1,\dots,u$. Cela entraîne l'égalité de l'énoncé. □

2.4. Représentations elliptiques des groupes linéaires tordus. — Soit $\tilde{L}$ un Lévi tordu de $\tilde{G}$ que l'on écrit comme dans le paragraphe précédent. Décrivons l'ensemble $\Pi_{ell}(\tilde{L})$ qui intervient en 1.10. Pour $j = 1,\dots,u$, soit σ_j une représentation admissible irréductible de $GL_{d_j}(F)$, de la série discrète. Soit Q_0 un sous-groupe parabolique standard de GL_{d_0}, de Lévi

$$L_0 = GL_{d'_1} \times \cdots \times GL_{d'_s}.$$

Pour $j = 1,\dots,s$, soit τ_j une représentation admissible irréductible de $GL_{d'_j}(F)$, de la série discrète. On suppose $\theta_{d'_j}(\tau_j) \simeq \tau_j$ et $\tau_k \not\simeq \tau_j$ si $j \neq k$. Posons $\sigma_0 = \mathrm{Ind}_{Q_0}^{GL_{d_0}}(\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_s)$ et

$$\sigma = \sigma_u \otimes \cdots \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_0 \otimes \theta_{d_1}(\sigma_1) \otimes \cdots \otimes \theta_{d_u}(\sigma_u).$$

Alors σ se prolonge en une représentation $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{L}(F)$ qui appartient à $\Pi_{ell}(\tilde{L})$. L'ensemble $\Pi_{ell}(\tilde{L})$ est l'ensemble des représentations qui se construisent par ce procédé.

Poursuivons avec la représentation $\tilde{\sigma}$ que l'on vient de construire. Notons $\mathcal{O}$ son orbite pour l'action $\tilde{\sigma} \mapsto \tilde{\sigma}_\lambda$ de $i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}$. On note $i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}}$ le stabilisateur de $\tilde{\sigma}$ dans $i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}}$. On note $s(\tilde{\sigma}) = s(\mathcal{O}) = s$ et

$$c(\mathcal{O}) = 2^{-s(\mathcal{O})-a_{\tilde{L}}}[i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}} : i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{L},F}]^{-1}.$$

Ce terme est le coefficient qui intervient dans la relation 1.10(3), cf. **[13]** théorème 7.1.

2.5. Facteurs ε. — Soit $m \in \mathbb{N}$ un entier tel que $m < d$ et m et d soient de parités distinctes. Posons $H = GL_m$. Soient $\tilde{\pi} \in \mathrm{Temp}(\tilde{G})$ et $\tilde{\rho} \in \mathrm{Temp}(\tilde{H})$. On introduit le facteur $\varepsilon(s, \pi \times \rho, \psi)$ de **[7]** théorème 2.7. Soit $\nu \in F^\times$. On pose

$$\varepsilon_\nu(\tilde{\pi},\tilde{\rho}) = \varepsilon_{-\nu}(\tilde{\rho},\tilde{\pi}) = w(\tilde{\pi},\psi)w(\tilde{\rho},\psi)\omega_\pi((-1)^{[m/2]}2\nu)\omega_\rho((-1)^{1+[d/2]}2\nu)\varepsilon(1/2,\pi\times\rho,\psi).$$

Ce terme ne dépend pas de ψ. Cela résulte de la relation 2.2(1) et de l'égalité bien connue

$$(1) \qquad \varepsilon(1/2,\pi\times\rho,\psi^b) = \omega_\pi(b)^m\omega_\rho(b)^d\varepsilon(1/2,\pi\times\rho,\psi).$$

Remarques 2.2. — (a) *Cette définition est dissymétrique en π et ρ.*

(b) *Dans le cas particulier où $m = 0$, on considère par convention que $\omega_\rho = 1$ et $\varepsilon(1/2, \pi \times \rho, \psi) = 1$.*

Soit $\tilde{L}$ un Lévi tordu de $\tilde{G}$ que l'on écrit comme en 2.3. Soit $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Temp}(\tilde{L})$. On écrit

$$\sigma = \sigma_u \otimes \cdots \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_0 \otimes \theta_{d_1}(\sigma_1) \otimes \cdots \otimes \theta_{d_u}(\sigma_u).$$

Le prolongement $\tilde{\sigma}$ de σ détermine un prolongement $\tilde{\sigma}_0$ de σ_0 comme en 2.3. On pose

$$\varepsilon_\nu(\tilde{\sigma}, \tilde{\rho}) = w(\tilde{\sigma}_0, \psi) w(\tilde{\rho}, \psi) \omega_{\sigma_0}((-1)^{[m/2]} 2\nu) \omega_\rho((-1)^{[d_0/2]+1} 2\nu) \Big(\prod_{j=1,\dots,u} \omega_{\sigma_j}(-1)^m\Big) \varepsilon(1/2, \sigma_0 \times \rho, \psi).$$

On vérifie que

$$\varepsilon_\nu(\tilde{\sigma}, \tilde{\rho}) = \varepsilon_\nu(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\rho}) \prod_{j=1,\dots,u} \omega_{\sigma_j}(-1)^m.$$

Remarquons que le terme $\varepsilon_\nu(\tilde{\sigma}, \tilde{\rho})$ ne dépend que de l'orbite $\mathcal{O}$ de $\tilde{\sigma}$ sous l'action de $i\mathcal{A}_{\tilde{L}}^*$. Soit $\tilde{Q} \in \mathcal{P}(\tilde{L})$, posons $\tilde{\pi} = \mathrm{Ind}_{\tilde{Q}}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma})$. On a l'égalité

(2) $\varepsilon_\nu(\tilde{\pi}, \tilde{\rho}) = \varepsilon_\nu(\tilde{\sigma}, \tilde{\rho})$.

Cela résulte aisément des égalités bien connues suivantes :

$$\varepsilon(s, \pi \times \rho, \psi) = \varepsilon(s, \sigma_0 \times \rho, \psi) \prod_{j=1,\dots,u} \varepsilon(s, \sigma_j \times \rho, \psi) \varepsilon(s, \theta_{d_j}(\sigma_j) \times \rho, \psi),$$

$$\varepsilon(1/2, \sigma_j \times \rho, \psi) \varepsilon(1/2, \sigma_j^\vee \times \rho^\vee, \psi) = \omega_{\sigma_j}(-1)^m \omega_\rho(-1)^{d_j},$$

et du fait que $\rho^\vee = \rho$.

3. La partie géométrique de la formule intégrale

3.1. Plongements de groupes linéaires tordus. — Soient V un espace vectoriel sur F de dimension $d \geq 1$, r un entier naturel tel que $2r + 1 \leq d$, W un sous-espace de V de dimension $m = d - 2r - 1$, $(z_i)_{i=-r,\dots,r}$ une base d'un supplémentaire Z de W dans V, et enfin ν un élément de $F^\times$. On note $G = GL(V)$, $H = GL(W)$ et on introduit les groupes tordus $\tilde{G} = \mathrm{Isom}(V, V^*)$, $\tilde{H} = \mathrm{Isom}(W, W^*)$. L'espace dual V^* se décompose en $V^* = W^* \oplus Z^*$. Notons $(z_i^*)_{i=-r,\dots,r}$ la base de Z^* duale de $(z_i)_{i=-r,\dots,r}$ et $\tilde{\zeta}$ l'élément de $\mathrm{Isom}(Z, Z^*)$ défini par $\tilde{\zeta}(z_i) = (-1)^i 2\nu z_{-i}^*$ pour tout $i = -r, \dots, r$. Le groupe H est un sous-groupe de G. On introduit un plongement $\iota : \tilde{H} \to \tilde{G}$. Pour $\tilde{y} \in \tilde{H}$, $\iota(\tilde{y})$ envoie W dans W^* et Z dans Z^*. La restriction de $\iota(\tilde{y})$ à W, resp. Z, coïncide avec $\tilde{y}$, resp. $\tilde{\zeta}$. Le plongement ι ainsi défini est équivariant pour les actions de H. Pour simplifier les notations, on identifie tout élément de $\tilde{H}$ à son image par ι. On pose $V_0 = W \oplus F z_0$ et on note G_0 le groupe des automorphismes F-linéaires de V_0.

Notons P le sous-groupe parabolique de G formé des éléments qui conservent le drapeau

$$F z_r \subset F z_r \oplus F z_{r-1} \subset \cdots \subset F z_r \oplus \cdots \oplus F z_1 \subset F z_r \oplus \cdots \oplus F z_1 \oplus V_0$$

$\subset Fz_r \oplus \cdots \oplus Fz_1 \oplus V_0 \oplus Fz_{-1} \subset \cdots \subset Fz_r \oplus \cdots \oplus Fz_1 \oplus V_0 \oplus Fz_{-1} \oplus \cdots \oplus Fz_{-r}$.
Notons A le tore isomorphe à GL_1^{2r} formé des éléments qui conservent chaque droite $Fz_{\pm i}$ pour $i = 1,\ldots,r$ et agissent trivialement sur V_0. Pour $a \in A$ et $i = \pm 1,\ldots,\pm r$, on note a_i la valeur propre de a sur z_i. Notons U le radical unipotent de P et M sa composante de Lévi qui contient A. On a $M = AG_0$, en particulier M contient H. Notons $\tilde{P}$ le normalisateur de P dans $\tilde{G}$ et $\tilde{M}$ le normalisateur commun de P et M. Le groupe $\tilde{M}$ contient $\tilde{H}$, en particulier $\tilde{M}(F) \neq \emptyset$, donc $\tilde{M}$ est un Lévi tordu de $\tilde{G}$. On définit un caractère ξ de $U(F)$ par

$$\xi(u) = \psi(\sum_{i=-r,\ldots,r-1} u_{i+1,i}),$$

où $u_{i+1,i} =< z^*_{-i-1}, uz_i >$. On vérifie que ξ est invariant par $\theta_{\tilde{y}}$ pour tout $\tilde{y} \in \tilde{H}(F)$.

Fixons un $\mathfrak{o}_F$-réseau R dans V qui est somme d'un $\mathfrak{o}_F$-réseau de V_0 et d'un $\mathfrak{o}_F$-réseau de base sur $\mathfrak{o}_F$ formée de vecteurs proportionnels aux $z_{\pm i}$ pour $i = 1,\ldots,r$. Notons K le stabilisateur de R dans $G(F)$ et $R^\vee$ le réseau dual de R dans V^*. On a l'égalité $G(F) = P(F)K$. Pour un entier $N \geq 0$, introduisons la fonction κ_N sur $G(F)$ définie de la façon suivante. Elle est invariante à gauche par $U(F)$ et à droite par K. Sur $M(F)$, c'est la fonction caractéristique de l'ensemble des $m \in M(F)$ qui s'écrivent $m = ag_0$, avec $a \in A(F)$, $g_0 \in G_0(F)$, tels que :

- pour tout $i = \pm 1,\ldots,\pm r$, $|\mathrm{val}_F(a_i)| \leq N$;
- $g_0^{-1}z_0 \in \mathfrak{p}_F^{-N}R$ et ${}^tg_0z_0^* \in \mathfrak{p}_F^{-N}R^\vee$.

3.2. Les ingrédients de la formule géométrique. — Considérons une décomposition $W = W' \oplus W''$ telle que la dimension de W' soit paire. Posons $H' = GL(W')$ et $\tilde{H}' = \mathrm{Isom}(W', W'^*)$. Soit $\tilde{T}'$ un sous-tore maximal de $\tilde{H}'$ qui est anisotrope, c'est-à-dire que $A_{\tilde{T}'} = \{1\}$. Soit $\tilde{\zeta}_{H,T} \in \mathrm{Isom}(W'', W''^*)$ une forme bilinéaire symétrique. Notons $V'' = W'' \oplus Z$ et $\tilde{\zeta}_{G,T} \in \mathrm{Isom}(V'', V''^*)$ la somme directe de $\tilde{\zeta}_{H,T}$ et $\tilde{\zeta}$. On suppose que les groupes spéciaux orthogonaux des formes quadratiques $\tilde{\zeta}_{H,T}$ et $\tilde{\zeta}_{G,T}$ sont quasi-déployés. Notons $\tilde{T}$ l'ensemble des éléments $\tilde{x} \in \tilde{H}$ tels que $\tilde{x}(W') = W'^*$ et $\tilde{x}(W'') = W''^*$, que la restriction de $\tilde{x}$ à W' appartienne à $\tilde{T}'$ et que la restriction de $\tilde{x}$ à W'' soit égale à $\tilde{\zeta}_{H,T}$. On note $\underline{\mathcal{T}}$ l'ensemble des sous-ensembles $\tilde{T}$ de $\tilde{H}$ obtenus de cette façon.

Pour un tel objet $\tilde{T}$, que l'on peut considérer comme un sous-tore tordu de $\tilde{H}$, en général non maximal, on note T le tore noté ci-dessus T', que l'on peut considérer comme un sous-groupe de H (un élément de T fixe tout point de W''). On définit comme dans le cas d'un sous-tore tordu maximal les ensembles T_θ et $\tilde{T}(F)_{/\theta}$. Il est utile de remarquer que, parce que $\dim(W')$ est paire, on a l'égalité $T(F)^\theta = T_\theta(F)$. On munit $T_\theta(F)$ de la mesure de Haar de masse totale 1. Comme en 1.4, on en déduit une mesure sur $\tilde{T}(F)_{/\theta}$. Le normalisateur $\mathrm{Norm}_H(\tilde{T})$ de $\tilde{T}$ dans H contient $T \times SO(\tilde{\zeta}_{H,T})$, ce dernier groupe étant le groupe spécial orthogonal de la forme quadratique $\tilde{\zeta}_{H,T}$ sur W''. On pose

$$W(H,\tilde{T}) = \mathrm{Norm}_H(\tilde{T})(F)/(T(F) \times SO(\tilde{\zeta}_{H,T})(F)).$$

Soit $\tilde{t} \in \tilde{T}(F)$. L'élément $t = {}^t\tilde{t}^{-1}\tilde{t}$ appartient à $GL(W')$. On pose

$$\Delta_r(\tilde{t}) = |2|_F^{r^2+r+r\dim(W'')}|\det((1-t)_{|W'}|_F^r.$$

Soit Γ un quasi-caractère de $\tilde{G}(F)$. On en déduit comme en **[12]** 7.3 une fonction c_Γ définie presque partout sur $\tilde{T}(F)$. Rappelons la définition. Soit $\tilde{t} \in \tilde{T}(F)$ en position générale. Son commutant connexe $G_{\tilde{t}}$ dans G est $T_\theta \times SO(\tilde{\zeta}_{G,T})$. Si d est impair, la dimension de V'' est elle-aussi impaire et l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\tilde{t}}(F)$ possède une unique orbite nilpotente régulière que l'on note $\mathcal{O}_{\mathrm{reg}}$. On pose $c_\Gamma(\tilde{t}) = c_{\Gamma,\mathcal{O}_{\mathrm{reg}}}(\tilde{t})$, cf. 1.6. Si d est pair et si la dimension de V'' est ≤ 2, la même construction s'applique. Si d est pair et si la dimension de V'' est ≥ 4, il y a plusieurs orbites nilpotentes régulières dans $\mathfrak{g}_{\tilde{t}}(F)$. Mais on sait les paramétrer, cf. **[12]** 7.1. En particulier, on peut associer à ν une orbite $\mathcal{O}_\nu$. On pose $c_\Gamma(\tilde{t}) = c_{\Gamma,\mathcal{O}_\nu}(\tilde{t})$. Soit maintenant Θ un quasi-caractère de $\tilde{H}(F)$. On lui associe une fonction c_Θ définie presque partout sur $\tilde{T}(F)$. La construction est la même que ci-dessus, à ceci près que l'on remplace V'' par W'' et, dans la dernière éventualité ci-dessus, le paramètre ν par $-\nu$. Les fonctions c_Γ et c_Θ sont invariantes par conjugaison par $T(F)$. On a

Lemme 3.1. — *Les fonctions c_Γ et c_Θ sont localement constantes sur un ouvert de Zariski non vide de $\tilde{T}(F)$. La fonction*

$$\tilde{t} \mapsto c_\Theta(\tilde{t})c_\Gamma(\tilde{t})D^{\tilde{H}}(\tilde{t})\Delta_r(\tilde{t})$$

est localement intégrable sur $\tilde{T}(F)_{/\theta}$.

La preuve est la même que celle de la proposition 7.3 de **[12]**.

Le groupe $H(F)$ agit par conjugaison sur $\underline{\mathcal{T}}$. On fixe un ensemble $\mathcal{T}$ de représentants des orbites.

3.3. La formule géométrique. — Soient Θ un quasi-caractère sur $\tilde{H}(F)$ et $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ une fonction très cuspidale. Pour $g \in G(F)$, posons

$$J(\Theta, \tilde{f}, g) = \int_{\tilde{H}(F)} \int_{U(F)} \Theta(\tilde{y})\tilde{f}(g^{-1}\tilde{y}ug)\xi(u)\,du\,d\tilde{y}.$$

Pour tout entier $N \geq 1$, posons

$$J_N(\Theta, \tilde{f}) = \int_{H(F)U(F)\backslash G(F)} J(\Theta, \tilde{f}, g)\kappa_N(g)dg.$$

Pour $\tilde{T} \in \underline{\mathcal{T}}$, on définit la fonction c_Θ sur $\tilde{T}(F)$. A $\tilde{f}$, on associe le quasi-caractère $\Theta^J_{\tilde{f}}$ sur $\tilde{G}(F)$, cf. 1.7, puis une fonction $c_{\Theta^J_{\tilde{f}}}$ sur $\tilde{T}(F)$. On note simplement $c_{\tilde{f}}$ cette fonction. Posons

$$J_{\mathrm{géom}}(\Theta, \tilde{f}) = \sum_{\tilde{T} \in \mathcal{T}} |W(H, \tilde{T})|^{-1} \int_{\tilde{T}(F)_{/\theta}} c_\Theta(\tilde{t})c_{\tilde{f}}(\tilde{t})D^{\tilde{H}}(\tilde{t})\Delta_r(\tilde{t})d\tilde{t}.$$

Théorème 3.2. — *On a l'égalité*

$$\lim_{N\to\infty} J_N(\Theta,\tilde{f}) = J_{\text{géom}}(\Theta,\tilde{f}).$$

La démonstration occupe la fin de la section. Remarquons que l'égalité du théorème ne dépend pas des mesures choisies, à l'exception de celles sur les tores compacts que l'on a supposées de masse totale 1 (la mesure sur $G(F)$ intervient directement dans le membre de gauche, mais aussi dans la définition du quasi-caractère $\Theta^J_{\tilde{f}}$ associé à $\tilde{f}$). Il est plus commode dans cette section de normaliser les mesures de la façon suivante :

- on munit $\mathfrak{g}(F)$ de la forme bilinéaire $(X,X')\mapsto \frac{1}{2}\text{trace}(XX')$ et tout sous-espace non dégénéré de la mesure autoduale ;
- on munit arbitrairement d'une mesure de Haar tout autre sous-espace de $\mathfrak{g}(F)$ (par exemple le radical nilpotent d'un sous-groupe parabolique) ;
- on relève ces mesures aux groupes via l'exponentielle.

Dans le cas d'un tore compact, la mesure de masse totale 1 n'est plus dt, mais $\nu(T)dt$.

3.4. Localisation. — Par partition de l'unité, on peut localiser le problème de la façon suivante. On fixe un point $\tilde{x}\in\tilde{G}_{ss}(F)$ et un bon voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{g}_{\tilde{x}}(F)$, aussi petit que l'on veut. On note $\Omega=(\tilde{x}\exp(\omega))^G=\{g^{-1}\tilde{x}\exp(X)g; g\in G(F), X\in\omega\}$. On suppose le support de $\tilde{f}$ inclus dans Ω.

Supposons d'abord que la classe de conjugaison de $\tilde{x}$ par $G(F)$ ne coupe pas $\tilde{H}(F)$. Alors, pour tout $\tilde{T}\in\mathcal{T}$, le quasi-caractère $\Theta^J_{\tilde{f}}$ est nul au voisinage de $\tilde{T}(F)$, donc la fonction $c_{\tilde{f}}$ est nulle. Donc $J_{\text{géom}}(\Theta,\tilde{f})=0$. Pour démontrer l'égalité du théorème, il suffit de prouver que $J(\Theta,\tilde{f},g)=0$ pour tout $g\in G(F)$. Il suffit de prouver que $\tilde{H}(F)U(F)$ ne coupe pas Ω. Puisque la partie semi-simple d'un élément de $\tilde{H}(F)U(F)$ est conjuguée à un élément de $\tilde{H}(F)$ et que Ω est stable par l'opération consistant à prendre les parties semi-simples, il suffit de prouver qu'aucun élément semi-simple de Ω n'est conjugué à un élément de $\tilde{H}(F)$. On se rappelle qu'en 2.1, on a associé à $\tilde{x}$ une forme quadratique sur le sous-espace propre $V''_{\tilde{x}}$ de V associé à la valeur propre 1 de ${}^t\tilde{x}^{-1}\tilde{x}$. Notons $(V''_{\tilde{x}},\tilde{x})$ l'espace quadratique formé de ce sous-espace propre et de la forme quadratique définie par la restriction de $\tilde{x}$. Dire que la classe de conjugaison de $\tilde{x}$ par $G(F)$ ne coupe pas $\tilde{H}(F)$ revient à dire qu'aucun sous-espace de $(V''_{\tilde{x}},\tilde{x})$ n'est isomorphe à l'espace quadratique $(Z,\tilde{\zeta})$. Soit $X\in\omega$ un élément semi-simple, posons $\tilde{x}'=\tilde{x}\exp(X)$. Si ω est assez petit, $V''_{\tilde{x}'}$ est le noyau de X dans $V''_{\tilde{x}}$ et la forme quadratique $\tilde{x}'$ sur ce noyau est la restriction de $\tilde{x}$. Donc $(V''_{\tilde{x}'},\tilde{x}')$ ne contient aucun sous-espace isomorphe à $(Z,\tilde{\zeta})$. Un tel élément ne peut pas être conjugué à un élément de $\tilde{H}(F)$. Cela démontre l'assertion.

On suppose désormais que la classe de conjugaison de $\tilde{x}$ coupe $\tilde{H}(F)$. On ne perd rien à supposer plus simplement $\tilde{x}\in\tilde{H}(F)$. On note W'', resp. V'', le sous-espace propre de W, resp. V, associé à la valeur propre 1 de $x={}^t\tilde{x}^{-1}\tilde{x}$. On munit ces espaces des formes quadratiques définies par $\tilde{x}$. On a la décomposition orthogonale $V''=W''\oplus Z$. On note $O(V'')$, $SO(V'')$ etc. les groupes orthogonaux et spéciaux orthogonaux de ces espaces. On note W' l'unique supplémentaire de W'' dans W stable par x et $H' = GL(W')$. On a les égalités $H_{\tilde{x}} = H'_{\tilde{x}}SO(W'')$, $H_{\tilde{x}} = H'_{\tilde{x}}SO(V'')$ (par abus de notations, on note $H'_{\tilde{x}}$ le commutant connexe dans H' de la restriction de $\tilde{x}$ à W'). On suppose $\omega = \omega' \times \omega''$, où $\omega' \subset \mathfrak{h}'_{\tilde{x}}(F)$ et $\omega'' \subset \mathfrak{so}(V'')(F)$.

On définit le quasi-caractère $\Theta_{\tilde{x},\omega}$ de $\mathfrak{h}_{\tilde{x}}(F)$ par

$$\Theta_{\tilde{x},\omega}(X) = \begin{cases} \Theta(\tilde{x}\exp(X)), & \text{si } X \in \omega, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $g \in G(F)$, on définit une fonction ${}^g\tilde{f}_{\tilde{x},\omega} \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\tilde{x}}(F))$ comme en 1.8, puis une fonction ${}^g\tilde{f}^\xi_{\tilde{x},\omega} \in C_c^\infty(\mathfrak{h}_{\tilde{x}}(F))$ par

$${}^g\tilde{f}^\xi_{\tilde{x},\omega}(X) = \int_{\mathfrak{u}_{\tilde{x}}(F)} {}^g\tilde{f}_{\tilde{x},\omega}(X+N)\xi(N)dN.$$

On a noté ici ξ le caractère $N \mapsto \xi(\exp(N))$ de $\mathfrak{u}_{\tilde{x}}(F)$. Posons

$$J_{\tilde{x},\omega}(\Theta,\tilde{f},g) = \int_{\mathfrak{h}_{\tilde{x}}(F)} \Theta_{\tilde{x},\omega}(X)\,{}^g\tilde{f}^\xi_{\tilde{x},\omega}(X)dX,$$

puis

$$J_{\tilde{x},\omega,N}(\Theta,\tilde{f}) = \int_{U_{\tilde{x}}(F)H_{\tilde{x}}(F)\backslash G(F)} J_{\tilde{x},\omega}(\Theta,\tilde{f},g)\kappa_N(g)dg.$$

Notons $\underline{\mathcal{T}}'$ l'ensemble des sous-tores maximaux de $H'_{\tilde{x}}$ qui sont anisotropes, c'est-à-dire ne contiennent pas de sous-tore déployé autre que $\{1\}$. Le couple d'espaces quadratiques (W'',V'') vérifient les conditions de **[12]** 7.1. On définit un ensemble $\underline{\mathcal{T}}''$ de sous-tores (en général non maximaux) de $SO(W'')$ comme en **[12]** 7.3. On vérifie que l'application $\tilde{T} \mapsto T_\theta$ est une bijection du sous-ensemble des éléments $\tilde{T} \in \underline{\mathcal{T}}$ qui contiennent $\tilde{x}$ sur l'ensemble $\underline{\mathcal{T}}' \times \underline{\mathcal{T}}''$. Pour $\tilde{T}$ dans l'ensemble de départ, les fonctions c_Θ et $c_{\tilde{f}}$ sont définies sur $\tilde{T}(F)$. On définit des fonctions $c_{\Theta,\tilde{x},\omega}$ et $c_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}$ sur $\mathfrak{t}_\theta(F)$: elles sont nulles hors de $\mathfrak{t}_\theta(F) \cap \omega$; pour $X \in \mathfrak{t}_\theta(F) \cap \omega$,

$$c_{\Theta,\tilde{x},\omega}(X) = c_\Theta(\tilde{x}\exp(X)),\ c_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}(X) = c_{\tilde{f}}(\tilde{x}\exp(X)).$$

Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{T}_{\tilde{x}}$ des classes de conjugaison par $H_{\tilde{x}}(F)$ dans $\underline{\mathcal{T}}' \times \underline{\mathcal{T}}''$. On définit une fonction Δ'' sur $\mathfrak{h}_{\tilde{x}}(F)$ par

$$\Delta''(X) = |\det(X_{|W''/W''(X)})|_F,$$

où $W''(X)$ est le noyau de X agissant dans W''. Posons

$$J_{\tilde{x},\omega,\text{géom}}(\Theta,\tilde{f}) = \sum_{I\in\mathcal{T}_{\tilde{x}}} |W(H_{\tilde{x}},I)|^{-1}\nu(I)\int_{\mathfrak{i}(F)} c_{\Theta,\tilde{x},\omega}(X)c_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}(X)D^{H_{\tilde{x}}}(X)\Delta''(X)^r dX.$$

Posons enfin

$$C(\tilde{x}) = |2|_F^{r^2+r+r\dim(W'')}[Z_H(\tilde{x})(F) : H_{\tilde{x}}(F)]^{-1}D^{\tilde{H}}(\tilde{x})|\det((1-x)_{|W''})|_F^r.$$

Lemme 3.3. — *On a les égalités*

$$J_N(\Theta,\tilde{f}) = C(\tilde{x})J_{\tilde{x},\omega,N}(\Theta,\tilde{f}),\ J_{\text{géom}}(\Theta,\tilde{f}) = C(\tilde{x})J_{\tilde{x},\omega,\text{géom}}(\Theta,\tilde{f}).$$

Démonstration. — Soit $g \in G(F)$. En utilisant la formule de Weyl, on a

$$(1) \qquad J(\Theta, \tilde{f}, g) = \sum_{\tilde{T} \in \mathcal{T}(\tilde{H})} |W(H, \tilde{T})|^{-1}[T(F)^{\theta} : T_{\theta}(F)]^{-1}$$

$$\int_{\tilde{T}(F)_{/\theta}} \int_{T_{\theta}(F)\backslash H(F)} {}^{g}\tilde{f}^{\xi}(h^{-1}\tilde{t}h)dh\Theta(\tilde{t})D^{\tilde{H}}(\tilde{t})d\tilde{t},$$

où, pour $\tilde{y} \in \tilde{H}(F)$, on a posé

$${}^{g}\tilde{f}^{\xi}(\tilde{y}) = \int_{U(F)} \tilde{f}(g^{-1}\tilde{y}ug)\xi(u)du.$$

Pour tout sous-tore maximal I de $H_{\tilde{x}}$, notons T_I son commutant dans H et $\tilde{T}_I = T_I\tilde{x}$, qui est un sous-tore maximal tordu de $\tilde{H}$. Introduisons un ensemble $\mathcal{T}(H_{\tilde{x}})$ de représentants des classes de conjugaison par $H_{\tilde{x}}(F)$ dans l'ensemble des sous-tores maximaux de $H_{\tilde{x}}$. Pour deux sous-tores maximaux tordus $\tilde{T}$ et $\tilde{T}'$ de $\tilde{H}$, notons

$$W(\tilde{T}, \tilde{T}') = \{h \in H(F); h\tilde{T}h^{-1} = \tilde{T}'\}/T(F).$$

Tout élément $w \in W(\tilde{T}, \tilde{T}')$ induit une bijection de $\tilde{T}(F)_{/\theta}$ sur $\tilde{T}'(F)_{/\theta}$. On va prouver les propriétés suivantes :

(2) soient $\tilde{T} \in \mathcal{T}(\tilde{H})$ et $\tilde{t} \in \tilde{T}(F)_{/\theta}$, en position générale ; supposons

$$\int_{T_{\theta}(F)\backslash H(F)} {}^{g}\tilde{f}^{\xi}(h^{-1}\tilde{t}h)dh \neq 0;$$

alors il existe $I \in \mathcal{T}(H_{\tilde{x}})$ et $w \in W(\tilde{T}_I, \tilde{T})$ tel que

$$\tilde{t} \in w(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}(F) \cap \omega));$$

(3) soit $\tilde{T} \in \mathcal{T}(\tilde{H})$ et, pour $i = 1, 2$, soit $I_i \in \mathcal{T}(H_{\tilde{x}})$ et $w_i \in W(\tilde{T}_{I_i}, \tilde{T})$; alors les sous-ensembles $w_1(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}_1(F) \cap \omega))$ et $w_2(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}_2(F) \cap \omega))$ de $\tilde{T}(F)_{/\theta}$ sont disjoints ou confondus ;

(4) soient $\tilde{T} \in \mathcal{T}(\tilde{H})$, $I_1 \in \mathcal{T}(H_{\tilde{x}})$ et $w_1 \in W(\tilde{T}_{I_1}, \tilde{T})$; alors le nombre de couples (I_2, w_2) tels que $I_2 \in \mathcal{T}(H_{\tilde{x}})$, $w_2 \in W(\tilde{T}_{I_2}, \tilde{T})$ et $w_2(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}_2(F) \cap \omega)) = w_1(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}_1(F) \cap \omega))$ est égal à

$$|W(H_{\tilde{x}}, I_1)|[Z_H(\tilde{x})(F) : H_{\tilde{x}}(F)][T(F)^{\theta} : T_{\theta}(F)]^{-1}.$$

Sous les hypothèses de (2), on voit comme au début du paragraphe que la classe de conjugaison par $G(F)$ de $\tilde{t}$ coupe l'ensemble $\tilde{x}\exp(\omega)$. Soient $X \in \omega$ et $g \in G(F)$ tels que $g\tilde{t}g^{-1} = \tilde{x}\exp(X)$. L'élément g se restreint en une isométrie entre les espaces quadratiques $(V''_{\tilde{t}}, \tilde{t})$ et $(V''_{\tilde{x}\exp(X)}, \tilde{x}\exp(X))$. Le premier de ces espaces contient $(Z, \tilde{\zeta})$ tandis que le second est inclus dans $(V''_{\tilde{x}}, \tilde{x}) = (V'', \tilde{x})$, qui contient lui-aussi $(Z, \tilde{\zeta})$. D'après le théorème de Witt, on peut trouver un élément $g'' \in O(V'')(F)$ tel que $g''g$ conserve Z et y agisse par l'identité. Rappelons que $O(V'') \subset Z_G(\tilde{x})$. Quitte à remplacer g par $g''g$ et X par $g''Xg''^{-1}$, on se ramène au cas où g conserve Z et agit par l'identité sur cet espace. Considérons l'égalité $g{}^t\tilde{t}^{-1}\tilde{t}g^{-1} = {}^t(\tilde{x}\exp(X))^{-1}\tilde{x}\exp(X)$.

Sur Z, le premier terme agit par l'identité. Le second agit par la restriction à Z de $\exp(2X)$. Cette restriction est donc l'identité, donc la restriction de X à Z est nulle. Un élément de $\mathfrak{g}_{\tilde{x}}$ dont la restriction à Z est nulle appartient à $\mathfrak{h}_{\tilde{x}}$. Donc $X \in \mathfrak{h}_{\tilde{x}}(F)$. L'élément g étant une isométrie de $(V''_{\tilde{t}}, \tilde{t})$ sur $(V''_{\tilde{x}\exp(X)}, \tilde{x}\exp(X))$ et conservant Z, il envoie l'orthogonal $W''_{\tilde{t}}$ de Z dans $V''_{\tilde{t}}$ sur l'orthogonal $W''_{\tilde{x}\exp(X)}$ de Z dans $V''_{\tilde{x}\exp(X)}$. Il envoie aussi $V'_{\tilde{t}} = W'_{\tilde{t}}$ sur $V'_{\tilde{x}\exp(X)} = W'_{\tilde{x}\exp(X)}$. Puisque $W = W'_{\tilde{t}} \oplus W''_{\tilde{t}} = W'_{\tilde{x}\exp(X)} \oplus W''_{\tilde{x}\exp(X)}$, g conserve W, donc $g \in H(F)$. Quitte à multiplier g par un élément de $H_{\tilde{x}}(F)$, on peut supposer que $X \in \mathfrak{i}(F)$ pour un élément $I \in \mathcal{T}(H_{\tilde{x}})$. Alors l'élément g^{-1} définit un élément w de $W(\tilde{T}_I, \tilde{T})$ pour lequel $\tilde{t}$ appartient à $w(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}(F) \cap \omega))$. Cela prouve (2).

Sous les hypothèses de (3), supposons que les ensembles $w_1(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}_1(F) \cap \omega))$ et $w_2(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}_2(F) \cap \omega))$ ne sont pas disjoints. On peut relever w_1 et w_2 en des éléments h_1 et h_2 de $H(F)$ tels que

$$h_1(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}_1(F) \cap \omega))h_1^{-1} \cap h_2(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}_2(F) \cap \omega))h_2^{-1} \neq \emptyset.$$

Posons $h = h_2^{-1}h_1$. D'après les propriétés des bons voisinages, h appartient à $Z_G(\tilde{x})(F)$. Donc la conjugaison par h conserve ω. D'autre part y conjugue $\tilde{T}_{I_1}$ en $\tilde{T}_{I_2}$, donc aussi I_1 en I_2. Alors

$$h(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}_1(F) \cap \omega))h^{-1} = \tilde{x}\exp(\mathfrak{i}_2(F) \cap \omega),$$

puis

$$h_1(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}_1(F) \cap \omega))h_1^{-1} = h_2h(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}_1(F) \cap \omega))h^{-1}h_2^{-1} = h_2(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}_2(F) \cap \omega))h_2^{-1}.$$

Cela prouve (3).

Sous les hypothèses de (4), posons

$$\mathcal{Y} = \{h \in Z_H(\tilde{x})(F); hI_1h^{-1} \in \mathcal{T}(H_{\tilde{x}})\}/(Z_H(\tilde{x})(F) \cap T_{I_1}(F)).$$

La preuve de (2) montre que l'application $h \mapsto (I_2 = hI_1h^{-1}, w_2 = w_1h^{-1})$ est une surjection de $\mathcal{Y}$ sur l'ensemble des paires dont on veut calculer le nombre. On voit que l'application est aussi injective. Le nombre cherché est donc $|\mathcal{Y}|$. Remarquons que $Z_H(\tilde{x})(F) \cap T_{I_1}(F) = T_{I_1}(F)^\theta$. Il y a une application naturelle

$$\mathcal{Y} \to H_{\tilde{x}}(F)\backslash Z_H(\tilde{x})(F)/T_{I_1}(F)^\theta.$$

Elle est surjective et ses fibres sont en bijection avec $W(H_{\tilde{x}}, I_1)$. D'autre part, $H_{\tilde{x}}$ est distingué dans $Z_H(\tilde{x})$ et son intersection avec $T_{I_1}(F)$ est $I_1(F)$. Le quotient ci-dessus a donc pour nombre d'éléments

$$[Z_H(\tilde{x})(F) : H_{\tilde{x}}(F)][T_{I_1}(F)^\theta : I_1(F)]^{-1}.$$

Enfin, $[T_{I_1}(F)^\theta : I_1(F)] = [T(F)^\theta : T_\theta(F)]$. L'assertion (4) résulte de ces calculs.

On utilise ces trois assertions pour transformer la formule (1). On doit rappeler que, d'après le choix de nos mesures, pour $I \in \mathcal{T}(H_{\tilde{x}})$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{i}(F) \cap \omega & \to & \tilde{T}_I(F)_{/\theta} \\ X & \mapsto & \tilde{x}\exp(X) \end{array}$$

préserve les mesures. On obtient

$$J(\Theta,\tilde{f},g)=[Z_H(\tilde{x})(F):H_{\tilde{x}}(F)]^{-1}\sum_{I\in\mathcal{T}(H_{\tilde{x}})}|W(H_{\tilde{x}},I)|^{-1}\sum_{\tilde{T}\in\mathcal{T}(\tilde{H})}|W(H,\tilde{T})|^{-1}\sum_{w\in W(\tilde{T}_I,\tilde{T})}$$

$$\int_{\mathfrak{i}(F)\cap\omega}\int_{T_\theta(F)\backslash H(F)}{}^g\tilde{f}^\xi(h^{-1}w\tilde{x}\exp(X)w^{-1}h)dh\Theta(w\tilde{x}\exp(X)w^{-1})D^{\tilde{H}}(w\tilde{x}\exp(X)w^{-1})dX.$$

On a ici identifié les éléments w à des représentants dans $H(F)$. Les éléments w disparaissent de cette formule par le changement de variables $h\mapsto wh$. Evidemment, pour tout I, il y a un seul $\tilde{T}$ tel que $W(\tilde{T}_I,\tilde{T})$ soit non vide et, pour ce $\tilde{T}$, le nombre d'éléments de $W(\tilde{T}_I,\tilde{T})$ est le même que celui de $W(H,\tilde{T})$. On obtient

$$J(\Theta,\tilde{f},g)=[Z_H(\tilde{x})(F):H_{\tilde{x}}(F)]^{-1}\sum_{I\in\mathcal{T}(H_{\tilde{x}})}|W(H_{\tilde{x}},I)|^{-1}\int_{\mathfrak{i}(F)\cap\omega}\int_{I(F)\backslash H(F)}$$

$${}^g\tilde{f}^\xi(h^{-1}\tilde{x}\exp(X)h)dh\Theta(\tilde{x}\exp(X))D^{\tilde{H}}(\tilde{x}\exp(X))dX.$$

On a $D^{\tilde{H}}(\tilde{x}\exp(X))=D^{\tilde{H}}(\tilde{x})D^{H_{\tilde{x}}}(X)$, d'où

$$J(\Theta,\tilde{f},g)=[Z_H(\tilde{x})(F):H_{\tilde{x}}(F)]^{-1}D^{\tilde{H}}(\tilde{x})\int_{H_{\tilde{x}}(F)\backslash H(F)}\sum_{I\in\mathcal{T}(H_{\tilde{x}})}|W(H_{\tilde{x}},I)|^{-1}$$

$$\int_{\mathfrak{i}(F)\cap\omega}\int_{I(F)\backslash H_{\tilde{x}}(F)}{}^{hg}\tilde{f}^\xi(y^{-1}\tilde{x}\exp(X)y)dy\Theta(\tilde{x}\exp(X))D^{H_{\tilde{x}}}(X)dX\,dh.$$

On peut remplacer les intégrations sur $\mathfrak{i}(F)\cap\omega$ par des intégrations sur $\mathfrak{i}(F)$, à condition de remplacer la fonction $\Theta(\tilde{x}\exp(X))$ par $\Theta_{\tilde{x},\omega}(X)$. Par la formule de Weyl appliquée dans $\mathfrak{h}_{\tilde{x}}(F)$, on obtient

$$J(\Theta,\tilde{f},g)=[Z_H(\tilde{x})(F):H_{\tilde{x}}(F)]^{-1}D^{\tilde{H}}(\tilde{x})\int_{H_{\tilde{x}}(F)\backslash H(F)}\int_{\mathfrak{h}_{\tilde{x}}(F)}\Theta_{\tilde{x},\omega}(X)\,{}^{hg}\tilde{f}^\xi(\tilde{x}\exp(X))dX.$$

Pour $X\in\omega$, on a

$$\begin{aligned}{}^{hg}\tilde{f}^\xi(\tilde{x}\exp(X))&=\int_{U(F)}{}^{hg}\tilde{f}(\tilde{x}\exp(X)u)\xi(u)du\\&=\int_{U_{\tilde{x}}(F)\backslash U(F)}\int_{U_{\tilde{x}}(F)}{}^{hg}\tilde{f}(\tilde{x}\exp(X)uv)\xi(uv)du\,dv.\end{aligned}$$

Pour $u\in U_{\tilde{x}}(F)$, l'application $v\mapsto\theta^{-1}_{\tilde{x}\exp(X)u}(v^{-1})v$ est un isomorphisme de $U_{\tilde{x}}(F)\backslash U(F)$ sur lui-même. Son jacobien est la valeur absolue du déterminant de $1-\theta_{\tilde{x}}^{-1}$ agissant sur $\mathfrak{u}(F)/\mathfrak{u}_{\tilde{x}}(F)$. Notons $d(\tilde{x})$ ce déterminant. Par changement de variables, et en remarquant que

$$\xi(\theta^{-1}_{\tilde{x}\exp(X)u}(v^{-1})v)=1,$$

on obtient

$${}^{hg}\tilde{f}^\xi(\tilde{x}\exp(X))=|d(\tilde{x})|_F\int_{U_{\tilde{x}}(F)\backslash U(F)}\int_{U_{\tilde{x}}(F)}{}^{hg}\tilde{f}(v^{-1}\tilde{x}\exp(X)uv)\xi(u)du\,dv$$

$$= |d(\tilde{x})|_F \int_{U_{\tilde{x}}(F)\backslash U(F)} \int_{U_{\tilde{x}}(F)} {}^{vhg}\tilde{f}(\tilde{x}\exp(X)u)\xi(u)du\,dv.$$

On remplace u par $\exp(N)$ avec $N \in \mathfrak{u}_{\tilde{x}}(F)$. D'après les propriétés de ω, la condition $X \in \omega$ entraîne $X + N \in \omega$ pour tout N. On obtient alors

$${}^{hg}\tilde{f}^{\xi}(\tilde{x}\exp(X)) = |d(\tilde{x})|_F \int_{U_{\tilde{x}}(F)\backslash U(F)} {}^{vhg}\tilde{f}^{\xi}_{\tilde{x},\omega}(X)dv.$$

Reportons cette expression dans (5), multiplions l'expression obtenue par $\kappa_N(g)$, puis intégrons sur $g \in H(F)U(F)\backslash G(F)$. On obtient

$$J_N(\Theta, \tilde{f}) = [Z_H(\tilde{x})(F) : H_{\tilde{x}}(F)]^{-1} D^{\tilde{H}}(\tilde{x})|d(\tilde{x})|_F J_{\tilde{x},\omega,N}(\Theta, \tilde{f}).$$

Pour obtenir la première égalité de l'énoncé, il reste à calculer $d(\tilde{x})$. Pour cela, on peut étendre le corps des scalaires et se placer sur $\bar{F}$. On peut fixer une base $(v_i)_{i=1,\dots,d}$ de V et une famille $(\lambda_i)_{i=1,\dots,d}$ d'éléments de $\bar{F}^{\times}$ de sorte que :

- Z ait pour base la famille des v_i pour $i \in \{1, \dots, r\} \cup \{d - r, \dots, d\}$;
- le sous-groupe P est le stabilisateur du drapeau

$$Fv_1 \subset Fv_1 \oplus Fv_2 \subset \dots \subset Fv_1 \oplus \dots \oplus Fv_r \subset Fv_1 \oplus \dots \oplus Fv_{d-r}$$

$$\subset Fv_1 \oplus \dots \oplus Fv_{d-r+1} \subset \dots \subset Fv_1 \oplus \dots \oplus Fv_d;$$

- pour tout i, $\tilde{x}v_i = \lambda_i v^*_{d+1-i}$.

L'élément $x = {}^t\tilde{x}^{-1}\tilde{x}$ est l'élément diagonal qui envoie v_i sur $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{d+1-i}}v_i$. Le sous-espace W' est engendré par les v_i tels que $\mu_i \neq 1$. Puisque $W' \cap Z = \{0\}$, on a $\mu_i = 1$ si $v_i \in Z$. Introduisons la base $(E_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$ de $\mathfrak{g}(F)$, formée des matrices $E_{i,j}$ n'ayant qu'un coefficient non nul, le (i, j)-ième, lequel vaut 1. On calcule $\theta_{\tilde{x}}^{-1}(E_{i,j}) = -\frac{\lambda_{d+1-i}}{\lambda_{d+1-j}}E_{d+1-j,d+1-i}$. L'espace $\mathfrak{u}(F)$ se décompose en sommes des sous-espaces suivants, qui sont stables par $\theta_{\tilde{x}}^{-1}$:

- les espaces $FE_{i,j} \oplus FE_{d+1-j,d+1-i}$ pour $i = 1, \dots, r$, $i < j \leq r$ ou $d+1-r \leq j < d+1-i$;
- les droites $FE_{i,d+1-i}$ pour $i = 1, \dots, r$;
- les espaces $FE_{i,j} \oplus FE_{d+1-j,d+1-i}$, pour $i = 1, \dots, r$, $j = r+1, \dots, d-r$.

Considérons un sous-espace du troisième type. La matrice de $1 - \theta_{\tilde{x}}^{-1}$ s'y écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \\ \frac{\lambda_{d+1-i}}{\lambda_{d+1-j}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $\mu_j \neq 1$, c'est-à-dire si $v_j \in V'$, cette matrice est inversible donc le sous-espace ne coupe pas $\mathfrak{u}_{\tilde{x}}$. Le déterminant de la matrice est $1 - \mu_{d+1-j}$. La contribution de ces sous-espaces à $d(\tilde{x})$ est donc $\det((1-x)_{|W'})^r$. Si $\mu_j = 1$, la matrice a un noyau de dimension 1, qui est l'intersection du sous-espace avec $\mathfrak{u}_{\tilde{x}}$. L'autre valeur propre est 2 et la contribution du sous-espace à $d(\tilde{x})$ est 2. On voit de même que la contribution de chaque sous-espace du premier ou du deuxième type est 2. Il reste à compter le nombre de sous-espaces qui contribuent par 2. On trouve $r^2+r+r\dim(W'')$. D'où

$$d(\tilde{x}) = 2^{r^2+r+r\dim(W'')}\det((1-x)_{|W'})^r,$$

ce qui achève la preuve de la première égalité de l'énoncé.

Pour $I \in \mathcal{T}_{\tilde{x}}$, on note $\tilde{T}_I$ l'unique élément de $\underline{\mathcal{T}}$ qui contient $\tilde{x}$ et est tel que $\tilde{T}_{I,\theta} = I$. Pour deux éléments $\tilde{T}_1$ et $\tilde{T}_2$ de $\underline{\mathcal{T}}$, on pose

$$W(\tilde{T}_1,\tilde{T}_2) = \{h \in H(F); h\tilde{T}_1h^{-1} = \tilde{T}_2\}/(T_1(F) \times SO(\zeta_{H,T_1})(F)).$$

On a les propriétés suivantes :

(6) soient $\tilde{T} \in \mathcal{T}$ et $\tilde{t} \in \tilde{T}(F)_{/\theta}$ en position générale ; supposons $c_{\tilde{f}}(\tilde{t}) \neq 0$; alors il existe $I \in \mathcal{T}_{\tilde{x}}$ et $w \in W(\tilde{T}_I, \tilde{T})$ tel que $\tilde{t} \in w(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}(F) \cap \omega))$;

(7) soit $\tilde{T} \in \mathcal{T}$ et, pour $i = 1, 2$, soient $I_i \in \mathcal{T}_{\tilde{x}}$ et $w_i \in W(\tilde{T}_{I_i}, \tilde{T})$; alors les sous-ensembles $w_1(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}_1(F) \cap \omega))$ et $w_2(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}_2(F) \cap \omega))$ de $\tilde{T}(F)_{/\theta}$ sont disjoints ou confondus ;

(8) soient $\tilde{T} \in \mathcal{T}$, $I_1 \in \mathcal{T}_{\tilde{x}}$ et $w_1 \in W(\tilde{T}_{I_1}, \tilde{T})$; alors le nombre de couples (I_2, w_2) tels que $I_2 \in \mathcal{T}_{\tilde{x}}$, $w_2 \in W(\tilde{T}_{I_2}, \tilde{T})$ et $w_2(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}_2(F) \cap \omega)) = w_1(\tilde{x}\exp(\mathfrak{i}_1(F) \cap \omega))$ est égal à

$$|W(H_{\tilde{x}}, I_1)|[Z_H(\tilde{x})(F) : H_{\tilde{x}}(F)].$$

Ces propriétés se prouvent comme (2), (3) et (4) (en se rappelant qu'ici $T(F)^\theta = T_\theta(F)$). On laisse les preuves au lecteur. Comme ci-dessus, elles permettent de transformer $J_{\text{géom}}(\Theta, \tilde{f})$ en l'expression

$$J_{\text{géom}}(\Theta,\tilde{f}) = [Z_H(\tilde{x})(F) : H_{\tilde{x}}(F)]D^{\tilde{H}}(\tilde{x}) \sum_{I \in \mathcal{T}_{\tilde{x}}} |W(H_{\tilde{x}}, I)|^{-1}\nu(I)$$

$$\int_{\mathfrak{i}(F)} c_{\Theta,\tilde{x},\omega}(X)c_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}(X)D^{H_{\tilde{x}}}(X)\Delta_r(\tilde{x}\exp(X))dX.$$

Soit $I \in \mathcal{T}_{\tilde{x}}$ et $X \in \mathfrak{i}(F) \cap \omega$, en position générale. Notons $W'' = {}'W'' \oplus {}''W''$ la décomposition de W'' associée à I, posons $\tilde{t} = \tilde{x}\exp(X)$ et $t = {}^t\tilde{t}^{-1}\tilde{t}$. On a

$$\Delta_r(\tilde{t}) = |2|_F^{r^2+r+r\dim(''W'')}|\det((1-t)_{|W' \oplus 'W''})|_F^r.$$

L'élément $1-t$ agit sur W' comme $1-x$. Il agit sur $'W''$ comme $1-\exp(2X)$ et la valeur absolue du déterminant de cette application est la même que celle du déterminant de $2X$. C'est donc $|2|_F^{\dim('W'')}\Delta''(X)$. On obtient

$$\Delta_r(\tilde{t}) = |2|_F^{r^2+r+r\dim(W)}|\det((1-x)_{|W'})|_F^r\Delta''(X)^r.$$

Alors l'égalité ci-dessus devient

$$J_{\text{géom}}(\Theta,\tilde{f}) = C(\tilde{x})J_{\tilde{x},\omega,\text{géom}}(\Theta,\tilde{f}).$$

Cela achève la preuve. □

3.5. Une première expression de $J_{\tilde{x},\omega,N}(\Theta,\tilde{f})$. — Le lemme précédent nous ramène à prouver l'égalité

$$(1)\qquad \lim_{N\to\infty} J_{\tilde{x},\omega,N}(\Theta,\tilde{f}) = J_{\tilde{x},\omega,\text{géom}}(\Theta,\tilde{f}).$$

Posons $H''_{\tilde{x}} = SO(W'')$, $G''_{\tilde{x}} = SO(V'')$. On a $H_{\tilde{x}} = H'_{\tilde{x}}H''_{\tilde{x}}$ et $G_{\tilde{x}} = H'_{\tilde{x}}G''_{\tilde{x}}$. Un certain nombre d'objets relatifs à ces groupes se décomposent conformément à ces décompositions en produits. On affectera leurs composantes d'un $'$ ou d'un $''$. Par exemple, on décompose tout élément $X \in \mathfrak{h}_{\tilde{x}}(F)$ en $X = X' + X''$, avec $X' \in \mathfrak{h}'_{\tilde{x}}(F)$ et $X'' \in \mathfrak{h}''_{\tilde{x}}(F)$. Puisque Θ est un quasi-caractère, on peut supposer, en prenant ω assez petit, que $\Theta_{\tilde{x},\omega}$ est la restriction à $\mathfrak{h}_{\tilde{x}}(F)\cap\omega$ d'une combinaison linéaire de transformées de Fourier d'intégrales orbitales nilpotentes. Grâce à la « conjecture de Howe », on peut remplacer les intégrales orbitales nilpotentes par des intégrales orbitales associées à des éléments semi-simples réguliers et même « en position générale ». L'égalité que l'on veut prouver étant linéaire en Θ, on peut fixer un élément $S \in \mathfrak{h}''_{\tilde{x}}(F)$, en position générale, et supposer que, pour tout $X \in \mathfrak{h}_{\tilde{x}}(F) \cap \omega$, on a l'égalité

$$\Theta_{\tilde{x},\omega}(X) = \hat{j}_S(X')\hat{j}^{H''_{\tilde{x}}}(S,X''),$$

où la seconde fonction est la transformée de Fourier de l'intégrale orbitale associée à S et la première est une telle transformée de Fourier associée à un élément de $\mathfrak{h}'_{\tilde{x}}(F)$ que l'on n'a pas besoin de préciser. Pour $g \in G(F)$, on a l'égalité

$$J_{\tilde{x},\omega}(\Theta,\tilde{f},g) = \int_{\mathfrak{h}'_{\tilde{x}}(F)\times\mathfrak{h}''_{\tilde{x}}(F)} \Theta_{\tilde{x},\omega}(X)\,{}^g\tilde{f}^{\xi}_{\tilde{x},\omega}(X)dX.$$

En utilisant la formule de Weyl pour $\mathfrak{h}'_{\tilde{x}}(F)$, on obtient

$$J_{\tilde{x},\omega}(\Theta,\tilde{f},g) = \sum_{I'\in\mathcal{T}(H'_{\tilde{x}})} |W(H'_{\tilde{x}},I')|^{-1} \int_{\mathfrak{i}'(F)} \hat{j}_S(X')D^{H'_{\tilde{x}}}(X')$$

$$\int_{I'(F)\backslash H'_{\tilde{x}}(F)} \int_{\mathfrak{h}''_{\tilde{x}}(F)} \hat{j}^{H''_{\tilde{x}}}(S,X'')\,{}^g\tilde{f}^{\xi}_{\tilde{x},\omega}(h'^{-1}X'h' + X'')dX''\,dh'\,dX'.$$

D'où

$$J_{\tilde{x},\omega,N}(\Theta,\tilde{f}) = \sum_{I'\in\mathcal{T}(H'_{\tilde{x}})} |W(H'_{\tilde{x}},I')|^{-1} \int_{\mathfrak{i}'(F)} \hat{j}_S(X')D^{H'_{\tilde{x}}}(X')$$

$$\int_{I'(F)H''_{\tilde{x}}(F)U_{\tilde{x}}(F)\backslash G(F)} \int_{\mathfrak{h}''_{\tilde{x}}(F)} \hat{j}^{H''_{\tilde{x}}}(S,X'')\,{}^g\tilde{f}^{\xi}_{\tilde{x},\omega}(X' + X'')dX''\kappa_N(g)dg\,dX'.$$

Les deux dernières intégrales peuvent s'écrire

$$\int_{I'(F)G''_{\tilde{x}}(F)\backslash G(F)} \int_{H''_{\tilde{x}}(F)U_{\tilde{x}}(F)\backslash G''_{\tilde{x}}(F)} \int_{\mathfrak{h}''_{\tilde{x}}(F)} \hat{j}^{H''_{\tilde{x}}}(S,X'')\,{}^{g''g}\tilde{f}^{\xi}_{\tilde{x},\omega}(X' + X'')dX''\kappa_N(g''g)dg''\,dg.$$

On peut utiliser le paragraphe 9 de **[12]** pour calculer les deux intégrales intérieures ci-dessus. Pour retrouver les notations de cette référence, on doit poser $v_i = z_i$ pour

$i = 0,\dots,r$, $v_{-i} = z_{-i}/(2\nu(-1)^i)$ pour $i = 1,\dots,r$ et définir des constantes ξ_i, $i = 0,\dots,r-1$, de sorte que, pour $u \in U_{\tilde{x}}(F)$, on ait

$$\sum_{i=-r,\dots,r-1} < z^*_{-i-1}, uz_i >= \sum_{i=0,\dots,r-1} \xi_i < v_{-i-1}, \tilde{x}uv_i > .$$

On a défini en **[12]** 9.2 et 9.3 un élément $\Xi \in \mathfrak{g}''_{\tilde{x}}(F)$ et un sous-espace Σ de $\mathfrak{g}''_{\tilde{x}}(F)$. Avec les notations ci-dessus, Ξ est l'élément de $\mathfrak{g}''_{\tilde{x}}(F)$ qui annule W'' et vérifie $\Xi v_{i+1} = \xi_i v_i$ pour tout $i = 0,\dots,r-1$. L'espace Σ est la somme directe de $\mathfrak{a}(F) \cap \mathfrak{g}''_{\tilde{x}}(F)$, de l'orthogonal de $\mathfrak{h}''_{\tilde{x}}(F)$ dans $\mathfrak{g}''_{\tilde{x}}(F) \cap \mathfrak{g}_0(F)$ et de $\mathfrak{u}_{\tilde{x}}(F)$. Pour tout sous-tore maximal I'' de $G''_{\tilde{x}}$, on note $\mathfrak{i}''(F)^S$ le sous-ensemble des éléments de $\mathfrak{i}''(F)$ qui sont conjugués à un élément de $\Xi + S + \Sigma$ par un élément de $G''_{\tilde{x}}(F)$. Pour tout $X'' \in \mathfrak{i}''(F)^S$, on fixe un élément $\gamma_{X''} \in G''_{\tilde{x}}(F)$ tel que $\gamma_{X''}^{-1} X'' \gamma_{X''} \in \Xi + S + \Sigma$. On peut imposer à $\gamma_{X''}$ diverses contraintes de croissance et de régularité. On introduit la fonction ${}^g\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}$ comme en 1.8 et la formule 9.8(2) de **[12]** appliquée à nos deux dernières intégrales ci-dessus conduit à l'égalité :

$$(2) \qquad J_{\tilde{x},\omega,N}(\Theta,\tilde{f}) = \sum_{I \in \mathcal{T}(G_{\tilde{x}})} \nu(A_{I''})^{-1} |W(G_{\tilde{x}},I)|^{-1} \int_{\mathfrak{i}'(F)\times\mathfrak{i}''(F)^S} \hat{j}_S(X') D^{G'_{\tilde{x}}}(X') D^{G''_{\tilde{x}}}(X'')^{1/2}$$
$$\int_{I'(F)A_{I''}(F)\backslash G(F)} {}^g\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X'+X'')\kappa_{N,X''}(g)\,dg\,dX''\,dX',$$

où

$$\kappa_{N,X''}(g) = \nu(A_{I''}) \int_{A_{I''}(F)} \kappa_N(\gamma_{X''}^{-1} a g)\,da.$$

On voit comme en **[12]** 10.1 que cette expression est absolument convergente et bornée par une puissance de N.

3.6. Changement de fonction de troncature. — Fixons $I \in \mathcal{T}(G_{\tilde{x}})$. On a défini en **[12]** 10.1 trois polynômes non nuls sur $\mathfrak{i}(F)$. Pour $\varepsilon > 0$, on note $\mathfrak{i}(F)[\leq \varepsilon]$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{i}(F)$ pour lesquels on a $|Q(X)|_F \leq \varepsilon$ pour l'un au moins de ces polynômes Q. On note $\mathfrak{i}(F)[> \varepsilon]$ le complémentaire. On a

(1) il existe un entier $b \geq 1$ tel que

$$\int_{(\mathfrak{i}'(F)\times\mathfrak{i}''(F)^S)\cap\mathfrak{i}(F)[\leq N^{-b}]} |\hat{j}_S(X')| D^{G'_{\tilde{x}}}(X') D^{G''_{\tilde{x}}}(X'')^{1/2}$$
$$\int_{I'(F)A_{I''}(F)\backslash G(F)} |{}^g\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X'+X'')| \kappa_{N,X''}(g)\,dg\,dX''\,dX' \ll N^{-1}$$

pour tout $N \geq 1$.

La notation $\ll$ signifie qu'il existe une constante $c > 0$ telle que le membre de gauche soit inférieure ou égale à c fois le membre de droite. La relation ci-dessus se prouve comme le (ii) du lemme 10.1 de **[12]**. On fixe b vérifiant cette relation.

Notons $\tilde{M}_\natural$ le commutant de $A_{I''}$ dans $\tilde{G}$. C'est un Lévi tordu de $\tilde{G}$ qui contient $G'\tilde{x}$. On a l'égalité $A_{\tilde{M}_\natural} = A_{I''}$. Fixons un Lévi minimal $M_{\min}$ de G contenu dans

$M_\natural$ et un sous-groupe parabolique $P_{\min} = M_{\min}U_{\min} \in \mathcal{P}(M_{\min})$. Pour simplifier, on peut supposer que K est en bonne position relativement à $M_{\min}$. On utilise le groupe K pour définir les fonctions $H_{\tilde{Q}}$ sur $G(F)$, pour $\tilde{Q} \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}$. Notons Δ l'ensemble des racines simples de $A_{M_{\min}}$ dans $\mathfrak{u}_{\min}$. Fixons $Y \in \mathcal{A}_{M_{\min}}$. Pour tout $P' \in \mathcal{P}(M_{\min})$, il y a un unique $w \in W^G$ tel que $wP_{\min}w^{-1} = P'$. On pose $Y_{P'} = wY$. Pour $\tilde{Q} \in \mathcal{P}(\tilde{M}_\natural)$, notons $Y_{\tilde{Q}}$ la projection orthogonale de $Y_{P'}$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{M}_\natural}$, où P' est un élément quelconque de $\mathcal{P}(M_{\min})$ tel que $P' \subset Q$. Soit $g \in G(F)$. On pose $Y(g)_{\tilde{Q}} = Y_{\tilde{Q}} - H_{\bar{\tilde{Q}}}(g)$, où $\bar{\tilde{Q}}$ est le parabolique tordu opposé à $\tilde{Q}$. La famille $\mathcal{Y}(g) = (Y(g)_{\tilde{Q}})_{\tilde{Q} \in \mathcal{P}(\tilde{M}_\natural)}$ est $(\tilde{G}, \tilde{M}_\natural)$-orthogonale. Il existe une constante $c > 0$ telle que, si

$$\inf\{\sigma(mg); m \in M_\natural(F)\} < c \inf\{\alpha(Y); \alpha \in \Delta\},$$

on ait $\alpha(Y(g)_{\tilde{Q}}) > 0$ pour tout $\tilde{Q} = \tilde{M}_\natural U_Q \in \mathcal{P}(\tilde{M}_\natural)$ et toute racine α de $A_{\tilde{M}_\natural}$ dans $\mathfrak{u}_Q$. Supposons cette condition vérifiée. On note $\lambda \mapsto \sigma^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_\natural}(\lambda, \mathcal{Y}(g))$ la fonction caractéristique dans $\mathcal{A}_{\tilde{M}_\natural}$ de l'enveloppe convexe des points de la famille $\mathcal{Y}(g)$. On pose

$$v(g) = \nu(A_{I''}) \int_{A_{I''}(F)} \sigma^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_\natural}(H_{\tilde{M}_\natural}(a), \mathcal{Y}(g))da.$$

On a

(2) il existe $c > 0$ et un sous-ensemble compact ω_I de $\mathfrak{i}(F)$ tels que les propriétés suivantes soient vérifiées ; soient $g \in G(F)$ et $X \in \mathfrak{i}(F)[> N^{-b}]$ tels que ${}^g\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X) \neq 0$; alors $X \in \omega_I$ et il existe $t \in I(F)$ tel que $\sigma(tg) < c\log(N)$.

La preuve est la même que celle de **[12]** 10.4(2). Cette propriété assure que le membre de droite de l'égalité ci-dessous est bien défini.

Proposition 3.4. — *Il existe $c > 0$ et un entier $N_0 \geq 1$ tels que, si $N \geq N_0$ et*

$$c\log(N) < \inf\{\alpha(Y); \alpha \in \Delta\},$$

on ait l'égalité

$$\int_{I'(F)A_{I''}(F)\backslash G(F)} {}^g\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X)\kappa_{N,X''}(g)dg = \int_{I'(F)A_{I''}(F)\backslash G(F)} {}^g\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X)v(g)dg$$

pour tout $X \in \mathfrak{i}(F)[> N^{-b}] \cap (\mathfrak{i}'(F) \times \mathfrak{i}''(F)^S)$.

Démonstration. — Pour simplifier la notation, fixons un ensemble ω_I comme en (2), posons

$$\mathcal{X}_N = \omega_I \cap \mathfrak{i}(F)[> N^{-b}] \cap (\mathfrak{i}'(F) \times \mathfrak{i}''(F)^S)$$

et notons Ω_N l'ensemble des $g \in G(F)$ pour lesquels il existe $X \in \mathcal{X}_N$ tel que ${}^g\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X) \neq 0$. Soit $Z \in \mathcal{A}_{M_{\min}}$ tel que $\alpha(Z) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$ (on ne confond pas cet élément avec le sous-espace Z de V). En remplaçant Y par cet élément, on construit une famille de points $\mathcal{Z}(g)$ pour tout $g \in G(F)$. On suppose

$$\inf\{\alpha(Z); \alpha \in \Delta\} \geq c_1\log(N),$$

ce qui assure que, pour $g \in \Omega_N$, on a $Z(g)_{\tilde{Q}} \in \mathcal{A}^+_{\tilde{Q}}$ pour tout $\tilde{Q} \in \mathcal{P}(\tilde{M}_\natural)$. Pour $\tilde{Q} = \tilde{L}U_Q \in \mathcal{P}(\tilde{M}_\natural)$, notons $\lambda \mapsto \sigma^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}_\natural}(\lambda, \mathcal{Z}(g))$ la fonction caractéristique dans $\mathcal{A}_{\tilde{M}_\natural}$ de la somme de $\mathcal{A}_{\tilde{L}}$ et de l'enveloppe convexe des $Z(g)_{\tilde{P}'}$ pour $\tilde{P}' \in \mathcal{P}(\tilde{M}_{\min})$, $\tilde{P}' \subset \tilde{Q}$. Notons $\tau_{\tilde{Q}}$ la fonction caractéristique du sous-ensemble $\mathcal{A}^{\tilde{L}}_{\tilde{M}_\natural} \oplus \mathcal{A}^+_{\tilde{Q}}$ de $\mathcal{A}_{\tilde{M}_\natural}$. On a l'égalité

$$\sum_{\tilde{Q} \in \mathcal{F}(\tilde{M}_\natural)} \sigma^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}_\natural}(\lambda, \mathcal{Z}(g)) \tau_{\tilde{Q}}(\lambda - Z(g)_{\tilde{Q}}) = 1$$

pour tout $\lambda \in \mathcal{A}_{\tilde{M}_\natural}$. Pour $g \in \Omega_N$ et $X \in \mathcal{X}_N$, on peut donc écrire

$$v(g) = \nu(A_{I''}) \sum_{\tilde{Q} \in \mathcal{F}(\tilde{M}_\natural)} v(\tilde{Q}, g),$$

$$\kappa_{N,X''}(g) = \nu(A_{I''}) \sum_{\tilde{Q} \in \mathcal{F}(\tilde{M}_\natural)} \kappa_{N,X''}(\tilde{Q}, g),$$

où

$$v(\tilde{Q}, g) = \int_{A_{I''}(F)} \sigma^{\tilde{G}}_{\tilde{M}_\natural}(H_{\tilde{M}_\natural}(a), \mathcal{Y}(g)) \sigma^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}_\natural}(H_{\tilde{M}_\natural}(a), \mathcal{Z}(g)) \tau_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{M}_\natural}(a) - Z(g)_{\tilde{Q}}) da,$$

$$\kappa_{N,X''}(\tilde{Q}, g) = \int_{A_{I''}(F)} \kappa_N(\gamma_{X''}^{-1} a g) \sigma^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}_\natural}(H_{\tilde{M}_\natural}(a), \mathcal{Z}(g)) \tau_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{M}_\natural}(a) - Z(g)_{\tilde{Q}}) da.$$

Les fonctions $g \mapsto v(\tilde{Q}, g)$ et $g \mapsto \kappa_{N,X''}(\tilde{Q}, g)$ sont invariantes à gauche par $I'(F)A_{I''}(F)$. On peut donc décomposer le membre de gauche, resp. de droite, de l'égalité de l'énoncé en

$$\nu(A_{I''}) \sum_{\tilde{Q} \in \mathcal{F}(\tilde{M}_\natural)} \Phi_1(\tilde{Q}, X),$$

resp.

$$\nu(A_{I''}) \sum_{\tilde{Q} \in \mathcal{F}(\tilde{M}_\natural)} \Phi_2(\tilde{Q}, X),$$

où

$$\Phi_1(\tilde{Q}, X) = \int_{I'(F)A_{I''}(F)\backslash G(F)} {}^g\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X) \kappa_{N,X''}(\tilde{Q}, g) dg,$$

$$\Phi_2(\tilde{Q}, X) = \int_{I'(F)A_{I''}(F)\backslash G(F)} {}^g\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X) v(\tilde{Q}, g) dg.$$

On a :

(3) si Z vérifie les inégalités

$$sup\{\alpha(Z); \alpha \in \Delta\} \leq \left\{ \begin{array}{c} \inf\{\alpha(Y); \alpha \in \Delta\}, \\ \log(N)^2 \end{array} \right.$$

on a $\Phi_1(\tilde{G}, X) = \Phi_2(\tilde{G}, X)$ pour tout $X \in \mathcal{X}_N$, pourvu que N soit assez grand.

En effet, soit $g \in \Omega_N$. On vérifie comme en **[12]** 10.4(8) que, sous ces hypothèses, on a $\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}ag) = \sigma_{\tilde{M}_\natural}^{\tilde{G}}(H_{\tilde{M}_\natural}(a), \mathcal{Y}(g)) = 1$ pour tout $a \in A_{I''}(F)$ tel que $\sigma_{\tilde{M}_\natural}^{\tilde{G}}(H_{\tilde{M}_\natural}(a), \mathcal{Z}(g)) = 1$. Donc $\kappa_{N,X''}(\tilde{G}, g) = v(\tilde{G}, g)$ et la conclusion.

Fixons $\tilde{Q} = \tilde{L}U_Q \in \mathcal{F}(\tilde{M}_\natural)$, $\tilde{Q} \neq \tilde{G}$. On a :

(4) il existe $c > 0$ tel que, si $c\log(N) < \inf\{\alpha(Z); \alpha \in \Delta\}$, on a $\Phi_1(\tilde{Q}, X) = \Phi_2(\tilde{Q}, X) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{X}_N$.

On écrit

$$\Phi_1(\tilde{Q}, X) = \int_{K_{\min}} \int_{I'(F)A_{I''}(F)\backslash L(F)} \int_{U_{\bar{Q}}(F)} {}^{\bar{u}lk}\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X)\kappa_{N,X''}(\tilde{Q}, \bar{u}lk)d\bar{u}\delta_Q(l)dl\,dk.$$

On vérifie que, si ${}^{\bar{u}lk}\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X) \neq 0$ pour un $X \in \mathcal{X}_N$, on a une majoration $\sigma(\bar{u}) \ll \log(N)$ et on peut représenter l par un élément tel que $\sigma(l) \ll \log(N)$. Le point est que, pour de tels éléments, on a l'égalité

$$\kappa_{N,X''}(\tilde{Q}, \bar{u}lk) = \kappa_{N,X''}(\tilde{Q}, lk).$$

Cela résulte de l'assertion :

(5) soit $c > 0$; il existe $c' > 0$ tel que, si $c'\log(N) < \inf\{\alpha(Z); \alpha \in \Delta\}$, les propriétés suivantes sont vérifiées ; soient $X \in \mathcal{X}_N$, $g \in G(F)$ et $\bar{u} \in U_{\bar{Q}}(F)$; supposons $\sigma(g), \sigma(\bar{u}), \sigma(\bar{u}g) < c\log(N)$; alors on a l'égalité $\kappa_{N,X''}(\tilde{Q}, \bar{u}g) = \kappa_{N,X''}(\tilde{Q}, g)$.

Reportons la preuve de cette assertion à plus tard. A l'intérieur de l'intégrale ci-dessus apparaît donc l'intégrale

$$\int_{U_{\bar{Q}}(F)} {}^{\bar{u}lk}\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X)d\bar{u}.$$

Or celle-ci est nulle d'après 1.8(1). Donc $\Phi_1(\tilde{Q}, X) = 0$. On prouve de même que $\Phi_2(\tilde{Q}, X) = 0$, en utilisant une assertion similaire à (5) pour la fonction $v(\tilde{Q}, g)$.

On a utilisé l'élément auxiliaire Z. Il existe $c > 0$ tel que, si

$$c\log(N) < \inf\{\alpha(Y); \alpha \in \Delta\},$$

on peut choisir cet élément auxiliaire vérifiant les hypothèses de (3) et (4). Ces relations entraînent la conclusion de l'énoncé.

Il reste à prouver l'assertion (5) et son analogue pour la fonction $v(\tilde{Q}, g)$. La preuve de cette analogue est la même que celle de **[12]** 10.5 et on ne la fera pas. Soient c, X, g, $\bar{u}$ vérifiant les hypothèses de (5). Considérons la formule intégrale qui définit $\kappa_{N,X''}(\tilde{Q}, g)$. La fonction

$$\lambda \mapsto \sigma_{\tilde{M}_\natural}^{\tilde{Q}}(\lambda, \mathcal{Z}(g))\tau_{\tilde{Q}}(\lambda - \mathcal{Z}(g)_{\tilde{Q}})$$

ne dépend de g que par l'intermédiaire des $H_{\bar{\tilde{P}}'}(g)$ pour $\tilde{P}' \in \mathcal{P}(\tilde{M}_\natural)$, $\tilde{P}' \subset \tilde{Q}$. Or ces termes sont insensibles au changement de g en $\bar{u}g$. On en déduit :

(6) $$\kappa_{N,X''}(\tilde{Q}, \bar{u}g) - \kappa_{N,X''}(\tilde{Q}, g) = \int_{A_{I''}(F)} \sigma_{\tilde{M}_\natural}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{M}_\natural}(a), \mathcal{Z}(g))\tau_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{M}_\natural}(a) - \mathcal{Z}(g)_{\tilde{Q}})$$

$$(\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}a\bar{u}g) - \kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}ag))da.$$

Supposons prouvée l'assertion suivante :

(7) il existe $c'' > 0$, ne dépendant que de c (et pas de g, $\bar{u}$, X), tel que, pour tout $a \in A_{I''}(F)$ tel que $\alpha(H_{\tilde{M}_\natural}(a)) > c'' \log(N)$ pour toute racine α de $A_{I''}$ dans $\mathfrak{u}_Q$, on ait l'égalité $\kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}a\bar{u}g) = \kappa_N(\gamma_{X''}^{-1}ag)$.

On peut trouver $c' > 0$, ne dépendant que de c, tel que les deux conditions

$$c' \log(N) < \inf\{\alpha(Z); \alpha \in \Delta\}$$

et

$$\sigma_{\tilde{M}_\natural}^{\tilde{Q}}(H_{\tilde{M}_\natural}(a), \mathcal{Z}(g))\tau_{\tilde{Q}}(H_{\tilde{M}_\natural}(a) - \mathcal{Z}(g)_{\tilde{Q}}) = 1$$

entraînent $\alpha(H_{\tilde{M}_\natural}(a)) > c'' \log(N)$ pour toute racine α de $A_{I''}$ dans $\mathfrak{u}_Q$. Si l'on impose la première condition à Z, la fonction que l'on intègre dans la formule (6) est donc nulle, d'où la conclusion de (5). Cela nous ramène à prouver (7). La preuve est essentiellement la même que celle du lemme 10.8 de **[12]**. Signalons seulement les points à modifier. On voit comme dans cette référence que l'on peut étendre les scalaires. Remarquons qu'en étendant les scalaires, on peut changer le tore $A_{I''}$ mais celui-ci ne peut que devenir plus gros et l'assertion (7) n'en devient que plus forte. Après extension des scalaires, on peut supposer que le groupe spécial orthogonal $G''_{\tilde{x}}$ de la restriction de $\tilde{x}$ à V'' est quasi-déployé et que $I'' = A_{I''}$ en est un tore déployé maximal. On peut fixer un élément $\tilde{P}_\natural \in \mathcal{P}(\tilde{M}_\natural)$ et se limiter aux éléments $a \in A_{I''}(F)$ tels que $H_{\tilde{M}_\natural}(a)$ appartient à la chambre positive fermée pour ce parabolique tordu. Montrons que :

(8) il existe $\delta \in G''_{\tilde{x}}(F)$ tel que $\delta \tilde{P}_\natural \delta^{-1} \subset \bar{\tilde{P}}$ et $A_{\tilde{M}} \subset \delta A_{I''} \delta^{-1}$.

Le tore déployé $A_{\tilde{M}}$ est contenu dans $G''_{\tilde{x}}$ et $A_{I''}$ est un sous-tore maximal de ce groupe. On peut donc trouver $\delta \in G''_{\tilde{x}}(F)$ tel que $A_{\tilde{M}} \subset \delta A_{I''} \delta^{-1}$. Alors $\delta^{-1}\bar{\tilde{P}}\delta \in \mathcal{F}(\tilde{M}_\natural)$. Fixons $\tilde{P}' \in \mathcal{P}(\tilde{M}_\natural)$ tel que $\tilde{P}' \subset \delta^{-1}\bar{\tilde{P}}\delta$. Le tore $A_{I''}$ étant un sous-tore maximal d'un groupe spécial orthogonal, il a une forme particulière : ses sous-espaces propres dans V sont tous de dimension 1, sauf éventuellement celui sur lequel $A_{I''}$ agit par l'identite. Le Lévi $\tilde{M}_\natural$ étant le commutant de ce tore a lui-aussi une forme particulière : $M_\natural$ est un produit de GL_1 et éventuellement d'un unique bloc GL_k. Pour un tel Lévi, deux éléments quelconques de $\mathcal{F}(\tilde{M}_\natural)$ sont conjugués par le groupe $\mathrm{Norm}_{G(F)}(\tilde{M}_\natural)$. Si d est impair, l'application naturelle

$$\mathrm{Norm}_{G''_{\tilde{x}}(F)}(A_{I''}) \to \mathrm{Norm}_{G(F)}(\tilde{M}_\natural)/M_\natural(F)$$

est surjective. Donc $\tilde{P}_\natural$ et $\tilde{P}'$ sont conjugués par un élément de $\mathrm{Norm}_{G''_{\tilde{x}}(F)}(A_{I''})$. Quitte à multiplier δ à droite par un tel élément, on peut supposer $\tilde{P}' = \tilde{P}_\natural$ et la conclusion de (8) est vérifiée. Supposons d pair et introduisons le groupe orthogonal $O(V'')$ de la restriction à V'' de la forme $\tilde{x}$ ($G''_{\tilde{x}}$ en est sa composante neutre). L'application naturelle

$$\mathrm{Norm}_{O(V'')(F)}(A_{I''}) \to \mathrm{Norm}_{G(F)}(\tilde{M}_\natural)/M_\natural(F)$$

et on peut comme ci-dessus multiplier δ à droite par un élément de $\mathrm{Norm}_{O(V'')(F)}(A_{I''})$ de sorte que $\tilde{P}' = \tilde{P}_\natural$. Si cet élément appartient à $G''_{\tilde{x}}(F)$, on a fini. Sinon, on remarque que $A_{\tilde{M}}$ n'est pas maximal dans $\tilde{G}_{\tilde{x}}$, plus précisément, il agit trivialement sur un sous-espace non nul de V'' : il fixe z_0. Il en résulte qu'il existe un élément $y \in \mathrm{Norm}_{O(V'')(F)}(A_{I''}) \cap \delta^{-1}M\delta$ tel que le déterminant de y agissant dans V'' soit -1. En multipliant δ à droite par un tel élément, on obtient la conclusion de (8).

Grâce à (8), le même raisonnement qu'en **[12]** 10.8 nous ramène au cas où $r = 0$. Dans ce cas, κ_N est par définition le produit de deux fonctions $\kappa_{1,N}\kappa_{2,N}$. La première est la fonction caractéristique de l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $g^{-1}z_0 \in \mathfrak{p}_F^{-N}R$. La seconde est la fonction caractéristique de l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que ${}^tgz_0^* \in \mathfrak{p}_F^{-N}R^\vee$. La démonstration de **[12]** 10.8 s'applique sans changement pour la première fonction, c'est-à-dire que l'on démontre l'analogue de (7) où la conclusion est remplacée par $\kappa_{1,N}(\gamma_{X''}^{-1}a\bar{u}g) = \kappa_{1,N}(\gamma_{X''}^{-1}ag)$. Considérons la seconde fonction. On a $\tilde{x}(z_0) = \tilde{\zeta}(z_0) = 2\nu z_0^*$. La relation $\kappa_{N,2}(\gamma_{X''}^{-1}a\bar{u}g) = 1$ équivaut donc à ${}^tg{}^t\bar{u}{}^ta{}^t\gamma_{X''}^{-1}\tilde{x}z_0 \in 2\nu\mathfrak{p}_F^{-N}R^\vee$. Les produits sont ici les produits naturels et non pas les produits dans $\tilde{G}$. Faisons commuter $\tilde{x}$ aux éléments qui sont à sa gauche. La relation précédente équivaut à $\tilde{x}g'^{-1}\bar{u}'^{-1}a'^{-1}\gamma'_{X''}z_0 \in 2\nu\mathfrak{p}_F^{-N}R^\vee$, où $g' = \theta_{\tilde{x}}^{-1}(g)$, $\bar{u}' = \theta_{\tilde{x}}^{-1}(\bar{u})$, $a' = \theta_{\tilde{x}}^{-1}(a)$, $\gamma'_{X''} = \theta_{\tilde{x}}^{-1}(\gamma_{X''})$. Elle équivaut encore à $g'^{-1}\bar{u}'^{-1}a'^{-1}\gamma'_{X''}z_0 \in \mathfrak{p}_F^{-N}R'$, où $R' = 2\nu\tilde{x}^{-1}(R^\vee)$. Mais $a' = a$ et $\gamma'_{X''} = \gamma_{X''}$ car ces éléments sont dans $G_{\tilde{x}}(F)$. Alors la condition précédente est du même type que la condition $\kappa_{N,1}(\gamma_{X''}^{-1}a\bar{u}g) = 1$: on a simplement remplacé $\bar{u}$ par $\bar{u}'$, g par g' et R par R'. Ces objets vérifient les mêmes hypothèses que $\bar{u}$, g et R. Alors la même démonstration qu'en **[12]** 10.8 s'applique et on démontre l'analogue de (7) où la conclusion est remplacée par $\kappa_{2,N}(\gamma_{X''}^{-1}a\bar{u}g) = \kappa_{2,N}(\gamma_{X''}^{-1}ag)$. Evidemment, les deux analogues de (7) pour les fonctions $\kappa_{1,N}$ et $\kappa_{2,N}$ entraînent l'assertion (7) elle-même. Cela achève la preuve. □

3.7. Apparition des intégrales orbitales pondérées. — Le tore I et la constante b sont fixés comme dans le paragraphe précédent.

Lemme 3.5. — *Il existe $N_0 \geq 1$ tel que, pour tout $N \geq N_0$ et tout $X \in \mathfrak{i}(F)[> N^{-b}] \cap (\mathfrak{i}'(F) \times \mathfrak{i}''(F)^S)$, on ait les égalités*

$$\int_{I'(F)A_{I''}(F)\backslash G(F)} {}^g\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X)\kappa_{N,X''}(g)dg = 0,$$

si $A_{I'} \neq \{1\}$;

$$\int_{I'(F)A_{I''}(F)\backslash G(F)} {}^g\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X)\kappa_{N,X''}(g)dg = \nu(I')\nu(A_{I''})\Theta^{J,\sharp}_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}(X)$$

si $A_{I'} = \{1\}$.

Démonstration. — Notons $v(g,Y)$ la fonction notée $v(g)$ dans le paragraphe précédent. La proposition 3.4 nous autorise à remplacer $\kappa_{N,X''}(g)$ par $v(g,Y)$ dans les intégrales de l'énoncé, pourvu que Y vérifie une minoration

$$\inf\{\alpha(Y); \alpha \in \Delta\} \gg \log(N).$$

Fixons X. Les intégrales sont à support compact. On peut faire tendre Y vers l'infini. Dans le cas non tordu, Arthur a calculé en [**4**] p.46 le comportement de $v(g,Y)$ quand Y tend vers l'infini. Le même calcul vaut dans le cas tordu. Pour Y dans un certain réseau $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{M_{\min}}$, la fonction $Y \mapsto v(g,Y)$ est une somme de fonctions $Y \mapsto q_\zeta(Y)\exp(\zeta(Y))$, où q_ζ est un polynôme et $\zeta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{R}, 2\pi i\mathbb{Q}/2\pi i\mathbb{Z})$. De telles fonctions sont linéairement indépendantes. Puisque l'expression que l'on calcule est indépendante de Y, on peut aussi bien remplacer $v(g,Y)$ par son « terme constant » $q_0(0)$. D'après [**4**] p.92 (adapté au cas tordu), on a

$$q_0(0) = (-1)^{a_{\tilde{M}_\natural}} \sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{F}(\tilde{M}_\natural)} c'_{\tilde{Q}} v^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}_\natural}(g).$$

Les $c'_{\tilde{Q}}$ sont des constantes et on a $c'_{\tilde{G}} = 1$. Cela conduit à l'égalité

$$\int_{I'(F)A_{I''}(F)\backslash G(F)} {}^g\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X)\kappa_{N,X''}(g)dg = (-1)^{a_{\tilde{M}_\natural}} \sum_{\tilde{Q}\in\mathcal{F}(\tilde{M}_\natural)} c'_{\tilde{Q}}\Phi(\tilde{Q}),$$

où

$$\Phi(\tilde{Q}) = \int_{I'(F)A_{I''}(F)\backslash G(F)} {}^g\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X) v^{\tilde{Q}}_{\tilde{M}_\natural}(g)dg.$$

Pour $\tilde{Q} = \tilde{L}U_Q \neq \tilde{G}$, on décompose l'intégrale sur $I'(F)A_{I''}(F)\backslash G(F)$ en produit d'intégrales sur $I'(F)A_{I''}(F)\backslash L(F)$, $U_Q(F)$ et K. On voit apparaître une intégrale

$$\int_{U_Q(F)} {}^{ulk}\tilde{f}^\sharp_{\tilde{x},\omega}(X)du,$$

qui est nulle d'après 1.8(1). Il ne reste plus que le terme pour $\tilde{Q} = \tilde{G}$, qui vaut

$$\Phi(\tilde{G}) = \mathrm{mes}(I(F)/I'(F)A_{I''}(F))D^{\tilde{G}_{\tilde{x}}}(X)^{-1/2}J^\sharp_{\tilde{M}_\natural,\tilde{x},\omega}(X,\tilde{f}).$$

Si $A_{I'} \neq \{1\}$, on a $A_{\tilde{M}_\natural} = A_{I''} \subsetneq A_{\tilde{G}_{\tilde{x}\exp(X)}} = A_{I'}A_{I''}$, donc $J^\sharp_{\tilde{M}_\natural,\tilde{x},\omega}(X,\tilde{f}) = 0$ d'après 1.8(2). D'où la première assertion de l'énoncé. Supposons $A_{I'} = \{1\}$. Alors $\tilde{M}_\natural$ est le Lévi tordu noté $\tilde{M}(X)$ en 1.8 et on obtient

$$\Phi(\tilde{G}) = (-1)^{a_{\tilde{M}_\natural}}\nu(I)\mathrm{mes}(I(F)/I'(F)A_{I''}(F))\Theta^{J,\sharp}_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}(X).$$

On rappelle que l'on n'utilise pas les mêmes mesures qu'en 1.8 (cf. 3.3), ce qui explique l'apparition de $\nu(I)$. Il reste à vérifier que

$$\nu(I)\mathrm{mes}(I(F)/I'(F)A_{I''}(F)) = \nu(I')\nu(A_{I''})$$

pour obtenir le (ii) de l'énoncé. □

3.8. Preuve du théorème 3.2. — Si $\mathcal{A}_{H'_{\tilde{x}}} \neq \{1\}$, on a $A_{I'} \neq \{1\}$ pour tous les tores I intervenant dans la formule 3.5(2). En utilisant la relation 3.6(1) et le lemme 3.5, on voit que

$$\lim_{N\to\infty} J_{\tilde{x},\omega,N}(\Theta,\tilde{f}) = 0.$$

On a aussi $J_{\tilde{x},\omega,\text{géom}}(\Theta,\tilde{f}) = 0$ d'après la définition de ce terme : il n'y a pas de sous-tore maximal de $H'_{\tilde{x}}$ qui soit anisotrope. D'où la relation 3.5(1) dans ce cas.

Supposons $\mathcal{A}_{H'_{\tilde{x}}} = \{1\}$. Le même raisonnement nous débarrasse de tous les tores I intervenant dans 3.5(2) tels que I' n'est pas elliptique. Posons

$$J_{\tilde{x},\omega,\infty}(\Theta,\tilde{f}) = \sum_{I=I'I''\in\mathcal{T}_{ell}(H'_{\tilde{x}})\times\mathcal{T}(G''_{\tilde{x}})} \nu(I')|W(G_{\tilde{x}},I)|^{-1}$$

$$\int_{\mathfrak{i}'(F)\times\mathfrak{i}''(F)^S} \hat{j}_S(X')D^{G'_{\tilde{x}}}(X')D^{G''_{\tilde{x}}}(X'')^{1/2}\Theta^{J,\sharp}_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}(X)dX.$$

Un calcul familier montre que cette expression est absolument convergente. Cette fois, la relation 3.6(1) et le lemme 3.5 montrent que

$$\lim_{N\to\infty} J_{\tilde{x},\omega,N}(\Theta,\tilde{f}) = J_{\tilde{x},\omega,\infty}(\Theta,\tilde{f}).$$

On a supposé

$$\Theta_{\tilde{x},\omega}(X) = \hat{j}_S(X')\hat{j}^{H''_{\tilde{x}}}(S,X'').$$

Notons maintenant Θ'' la fonction $X'' \mapsto \hat{j}^{H''_{\tilde{x}}}(S,X'')$. Un quasi-caractère à support dans ω se décompose en combinaison linéaire de produits d'un quasi-caractère dans ω' et d'un quasi-caractère dans ω''. Ecrivons ainsi

$$\Theta^J_{\tilde{f},\tilde{x},\omega}(X) = \sum_{b\in B}\Theta'_{\tilde{f},b}(X')\Theta''_{\tilde{f},b}(X''),$$

où B est un ensemble fini d'indices. On a alors

$$J_{\tilde{x},\omega,\infty}(\Theta,\tilde{f}) = \sum_{b\in B} J'_b J''_{b,\infty},$$

$$J_{\tilde{x},\omega,\text{géom}}(\Theta,\tilde{f}) = \sum_{b\in B} J'_b J''_{b,\text{géom}},$$

où

$$J'_b = \sum_{I'\in\mathcal{T}_{ell}(G'_{\tilde{x}})} |W(G'_{\tilde{x}},I')|^{-1}\nu(I')\int_{\mathfrak{i}'(F)} \hat{j}_S(X')\Theta'_{\tilde{f},b}(X')D^{G'_{\tilde{x}}}(X')dX',$$

$$J''_{b,\infty} = \sum_{I''\in\mathcal{T}(G''_{\tilde{x}})} |W(G''_{\tilde{x}},I'')|^{-1}\int_{\mathfrak{i}''(F)^S} \hat{\Theta}''_{\tilde{f},b}(X'')D^{G''_{\tilde{x}}}(X'')^{1/2}dX'',$$

$$J''_{b,\text{géom}} = \sum_{I''\in\mathcal{T}''} \nu(I'')\int_{\mathfrak{i}''(F)} c_{\Theta''}(X'')c_{\Theta''_{\tilde{f},b}}(X'')D^{H''_{\tilde{x}}}(X'')\Delta''(X)^r dX''.$$

D'après **[12]** théorème 7.9 et lemme 11.2(ii), on a l'égalité $J''_{b,\infty} = J''_{b,\text{géom}}$ pour tout $b\in B$. D'où l'égalité $J_{\tilde{x},\omega,\infty}(\Theta,\tilde{f}) = J_{\tilde{x},\omega,\text{géom}}(\Theta,\tilde{f})$, puis l'égalité 3.5(1) qu'il fallait prouver. □

4. Majorations

4.1. Les résultats. — On énonce dans ce paragraphe les majorations qui seront prouvées dans cette section. Les hypothèses sont celles de 3.1.

Pour un entier $N \geq 1$ et un réel D, posons

$$I(N,D) = \int_{G(F)} \Xi^G(g)^2 \kappa_N(g)\sigma(g)^D dg.$$

(1) Cette intégrale est convergente. Le réel D étant fixé, il existe un réel R tel que

$$I(N,D) \ll N^R$$

pour tout entier $N \geq 1$.

Pour $u \in U(F)$ et $i = -r, \ldots, r-1$, rappelons que l'on a noté $u_{i+1,i}$ la coordonnée $< z_{i+1}^*, uz_i >$ de u. Pour un entier $c \geq 1$, on note $U(F)_c$ le sous-ensemble des $u \in U(F)$ tels que $\mathrm{val}_F(u_{i+1,i}) \geq -c$ pour tout $i = -r, \ldots, r-1$. C'est un sous-groupe de $U(F)$ conservé par la conjugaison par $H(F)$. Pour un réel D et un élément $m \in M(F)$, posons

$$X(c,D,m) = \int_{U(F)_c} \Xi^G(um)\sigma(um)^D du.$$

(2) Cette expression est convergente. Pour D fixé, il existe un réel R tel que

$$X(c,D,m) \ll c^R \sigma(m)^R \delta_P(m)^{1/2} \Xi^M(m)$$

pour tous $c \geq 1$ et tout $m \in M(F)$.

(3) Pour tout réel D et tout entier $c \geq 1$, l'intégrale

$$\int_{H(F)U(F)_c} \Xi^H(h)\Xi^G(hu)\sigma(hu)^D du\, dh$$

est convergente.

(4) Pour tout réel D et tout entier $c \geq 1$, l'intégrale

$$\int_{H(F)U(F)_c} \int_{H(F)U(F)_c} \Xi^G(hu)\Xi^H(h'h)\Xi^G(h'u')\sigma(hu)^D\sigma(h'u')^D du'\, dh'\, du\, dh$$

est convergente.

Soient D et C deux réels, c, c' et N trois entiers. On suppose $C, c, c', N \geq 1$. Pour $m \in M(F)$, $h \in H(F)$, $u, u' \in U(F)$, posons

$$\phi(m,h,u,u';D) = \Xi^H(h)\Xi^G(u'm)\Xi^G(u^{-1}h^{-1}u'm)\kappa_N(m)\sigma(u')^D\sigma(u)^D\sigma(h)^D\sigma(m)^D\delta_P(m)^{-1}.$$

Posons

$$I(c,N,D)=\int_{M(F)}\int_{H(F)U(F)_c}\int_{U(F)}\phi(m,h,u,u';D)du'\,du\,dh\,dm,$$

$$I(c,c',N,D)=\int_{M(F)}\int_{H(F)U(F)_c}\int_{U(F)-U(F)_{c'}}\phi(m,h,u,u';D)du'\,du\,dh\,dm,$$

$$I(c,c',N,C,D)=\int_{M(F)}\int_{H(F)U(F)_c}\int_{U(F)_{c'}}\mathbf{1}_{\sigma\geq C}(hu)\phi(m,h,u,u';D)du'\,du\,dh\,dm.$$

(5) L'intégrale $I(c,N,D)$ est convergente. Les termes c et D étant fixés, il existe un réel R tel que

$$I(c,N,D)\ll N^R$$

pour tout $N\geq 1$.

(6) L'intégrale $I(c,c',N,D)$ est convergente. Les termes c et D étant fixés, pour tout réel R, il existe $\alpha>0$ tel que

$$I(c,c',N,D)\ll N^{-R}$$

pour tout $N\geq 2$ et tout $c'\geq\alpha\log(N)$.

(7) L'intégrale $I(c,c',N,C,D)$ est convergente. Les termes c et D étant fixés, pour tout réel R, il existe $\alpha>0$ tel que

$$I(c,c',N,C,D)\ll N^{-R}$$

pour tout $N\geq 1$, tout $c'\geq 1$ et tout $C\geq\alpha(\log(N)+c')$.

4.2. Choix d'une base. — On fixe une base $(v_i)_{i=r+1,\dots,d-r-1}$ de W. On la complète en une base de V en posant $v_i=z_{r+1-i}$ pour $i=1,\dots,r$, $v_i=z_{d-i-r}$ pour $i=d-r,\dots,d$. Dans cette section, le réseau R que l'on a fixé n'intervient que via les fonctions κ_N. Considérons un autre réseau R', qui donne naissance à d'autres fonctions κ'_N. On vérifie qu'il existe $c\geq 0$ tel que

$$\kappa'_N(g)\leq\kappa_{N+c}(g)\leq\kappa'_{N+2c}(g)$$

pour tout $g\in G(F)$ et tout $N\geq 1$. Les majorations que l'on veut obtenir sont donc insensibles au changement de κ_N en κ'_N. Cela nous autorise à supposer que R est le réseau de base $(v_i)_{i=1,\dots,d}$ sur $\mathfrak{o}_F$. Donc $K=K_d$. On introduit le tore A_d et le sous-groupe de Borel B_d. Notons $\mathfrak{S}_d$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\dots,d\}$. Pour tout $s\in\mathfrak{S}_d$, on note $A_d(F)^-_s$ le sous-ensemble des $a\in A_d(F)$ tels que

$$\mathrm{val}_F(a_{s(1)})\geq\mathrm{val}_F(a_{s(2)})\geq\cdots\geq\mathrm{val}_F(a_{s(d)}).$$

Pour s égal à l'identité, on pose simplement $A_d(F)^-=A_d(F)^-_s$.

4.3. Comparaison de Ξ^H et Ξ^G

Lemme 4.1. — *Supposons $r = 0$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\Xi^G(h) \ll \exp(-\varepsilon\sigma(h))\Xi^H(h)$ pour tout $h \in H(F)$.*

Démonstration. — Pour $r = 0$, on a $H = GL_{d-1}$. En vertu de l'égalité $H(F) = K_{d-1}A_{d-1}(F)^- K_{d-1}$, on peut supposer $h = a \in A_{d-1}(F)^-$. Si $\mathrm{val}_F(a_1) < 0$, posons $k = 1$. Sinon, soit k le plus grand entier tel que $2 \leq k \leq d$ tel que $\mathrm{val}_F(a_{k-1}) \geq 0$. Introduisons l'élément $b \in A_d(F)$ tel que $b_i = a_i$ pour $i = 1, \ldots, k-1$, $b_k = 1$ et $b_i = a_{i-1}$ pour $i = k+1, \ldots, d$. L'élément b appartient à $A_d(F)^-$ et est conjugué à a. En vertu du lemme II.1.1 de **[9]**, il existe un entier D, indépendant de a, tel que

$$\Xi^G(a) = \Xi^G(b) \ll \delta_{B_d}(b)^{1/2}\sigma(a)^D.$$

On a aussi

$$\delta_{B_{d-1}}(a)^{1/2} \ll \Xi^H(a).$$

On calcule

$$\delta_{B_d}(b)^{1/2} = \delta_{B_{d-1}}(a)^{1/2}\Big(\prod_{i=1,\ldots,k-1} |a_i|_F^{1/2}\Big)\Big(\prod_{i=k,\ldots,d-1} |a_i|_F^{-1/2}\Big).$$

En vertu de la définition de k, cela équivaut à

$$\delta_{B_d}(b)^{1/2} = \delta_{B_{d-1}}(a)^{1/2}q^{-\Sigma(a)},$$

où q est le nombre d'éléments du corps résiduel et

$$\Sigma(a) = \sum_{i=1,\ldots,d-1} |\mathrm{val}_F(a_i)|.$$

On obtient

$$\Xi^G(a) \ll \sigma(a)^D q^{-\Sigma(a)}\Xi^H(a).$$

Mais $\Sigma(a) \ll \sigma(a)$ et le lemme s'ensuit. □

4.4. Majorations d'intégrales unipotentes. — Pour simplifier les notations, on pose $B = B_d$. Pour tout $Q = M_Q U_Q \in \mathcal{F}(A_d)$ et pour tout $g \in G(F)$, on fixe une décomposition $g = m_Q(g)u_Q(g)k_Q(g)$, avec $m_Q(g) \in M_Q(F)$, $u_Q(g) \in U_Q(F)$, $k_Q(g) \in K$. Dans le cas particulier où $Q \in \mathcal{P}(A_d)$, on note plutôt $a_Q(g)$ le terme $m_Q(g)$.

Supposons $r \geq 1$. Notons V_{r-1} le sous-espace de V engendré par V_0 et les vecteurs $z_{\pm j}$ pour $j = 0, \ldots, r-1$. Notons P_r le sous-groupe parabolique de G formé des éléments qui conservent le drapeau

$$Fz_r \subset Fz_r \oplus V_{r-1}.$$

On note U_r son radical unipotent et M_r sa composante de Lévi qui contient M. Notons $U_{r,\natural}$ le sous-groupe des éléments $u \in U_r$ tels que $u_{r,r-1} = u_{1-r,-r} = 0$. Pour deux réels b et D, posons

$$I_{r,\natural}(b, D) = \int_{U_{r,\natural}(F)} \mathbf{1}_{\sigma \geq b}(u)\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u))^{1/2}\Xi^M(m_{\bar{P}}(u))\sigma(u)^D du.$$

Lemme 4.2. — *Cette intégrale est convergente. Pour D fixé, il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$I_{r,\natural}(b, D) \ll \exp(-\varepsilon b)$$

pour tout $b \geq 0$.

Démonstration. — Supposons $r \geq 2$. Remarquons que l'on peut aussi bien travailler avec l'intégrale

$$J_{r,\natural}(b, D) = \int_{U_{r,\natural}(F)} \mathbf{1}_{\sigma \geq b}(u) \delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(u))^{1/2} \sigma(u)^D du.$$

En effet, d'après **[9]** lemmes II.1.1 et II.3.2, il existe un réel D_1 tel que

$$\delta_{\bar{P}}(m)^{1/2} \Xi^M(m) \ll \delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B} \cap M}(m))^{1/2} \sigma(m)^{D_1}$$

pour tout $m \in M(F)$. Pour $g \in G(F)$, on peut supposer $a_{\bar{B}}(g) = a_{\bar{B} \cap M}(m_{\bar{P}}(g))$ et on a $\sigma(m_{\bar{P}}(g)) \ll \sigma(g)$. Alors $I_{r,\natural}(b, D) \ll J_{r,\natural}(b, D + D_1)$.

Notons P' le sous-groupe parabolique de G formé des éléments qui conservent la droite Fz_r. Notons U' son radical unipotent et M' sa composante de Lévi contenant M. Posons $P'' = M' \cap P_r$ et notons $U'' = M' \cap P_r$ le radical unipotent de P''. On a $P'' = M_r U''$. On pose $U'_\natural = U' \cap U_{r,\natural}$, $U''_\natural = U'' \cap U_{r,\natural}$. On a $U_r = U'U'' = U''U'$ et $U_{r,\natural} = U'_\natural U''_\natural = U''_\natural U'_\natural$. Posons

$$J'_\natural(b, D) = \int_{U'_\natural(F)} \mathbf{1}_{\sigma \geq b}(u) \delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(u))^{1/2} \sigma(u)^D du,$$

$$J''_\natural(b, D) = \int_{U''_\natural(F)} \mathbf{1}_{\sigma \geq b}(u) \delta_{\bar{B} \cap M'}(a_{\bar{B} \cap M'}(u))^{1/2} \sigma(u)^D du.$$

On a

(1) ces intégrales sont convergentes ; pour D fixé, il existe $\varepsilon_D > 0$ tel que

$$J'_\natural(b, D) \ll \exp(-\varepsilon_D b), \;\; J''_\natural(b, D) \ll \exp(-\varepsilon_D b)$$

pour tout $b \geq 0$.

L'assertion concernant $J'_\natural(b, D)$ est l'assertion (1) de **[14]** 3.3. Considérons $J''_\natural(b, D)$. On a $M' = GL_1 \times GL_{d-1}$ et tout se passe dans le bloc GL_{d-1}. Appliquons dans ce bloc l'automorphisme θ_{d-1}. Cela transforme le groupe $U''_\natural$ en l'analogue de $U'_\natural$ quand on remplace d par $d-1$. Alors l'assertion résulte de la même assertion (1) de **[14]** 3.3, appliquée au groupe GL_{d-1}.

D'autre part, on vérifie facilement qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$(2) \qquad \delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(gg'))^{1/2} \ll \delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(g))^{1/2} \delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(g'))^{1/2} \exp(\alpha\sigma(g'))$$

pour tous $g, g' \in G(F)$.

Fixons un réel auxiliaire $\beta > 0$ que l'on précisera plus tard. Décomposons $J_{r,\natural}(b, D)$ en

$$J_{r,\natural}(b, D) = J_{\geq}(b, D) + J_{<}(b, D),$$

où

$$J_{\geq}(b,D)=\int_{U''_{\natural}(F)}\int_{U'_{\natural}(F)}\mathbf{1}_{\sigma\geq b}(u'u'')\mathbf{1}_{\sigma\geq\beta\sigma(u'')+b/2}(u')\delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(u'u''))^{1/2}\sigma(u'u'')^{D}du'\,du'',$$

$$J_{<}(b,D)=\int_{U''_{\natural}(F)}\int_{U'_{\natural}(F)}\mathbf{1}_{\sigma\geq b}(u'u'')\mathbf{1}_{\sigma<\beta\sigma(u'')+b/2}(u')\delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(u'u''))^{1/2}\sigma(u'u'')^{D}du'\,du''.$$

Dans $J_{\geq}(b,D)$, on majore $\mathbf{1}_{\sigma\geq b}(u'u'')$ par 1 et on utilise (2). On obtient

$$J_{\geq}(b,D)\ll\int_{U''_{\natural}(F)}\exp(\alpha\sigma(u''))\delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(u''))^{1/2}\sigma(u'')^{D}$$

$$\int_{U'_{\natural}(F)}\mathbf{1}_{\sigma\geq\beta\sigma(u'')+b/2}(u')\delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(u'))^{1/2}\sigma(u')^{D}du'\,du''.$$

L'intégrale intérieure est $J'_{\natural}(\beta\sigma(u'')+b/2,D)$. On déduit de (1) la majoration

$$J_{\geq}(b,D)\ll\exp(-\varepsilon_{D}b/2)\int_{U''_{\natural}(F)}\exp((\alpha-\beta\varepsilon_{D})\sigma(u''))\delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(u''))^{1/2}\sigma(u'')^{D}du''.$$

Remarquons que $\delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(u''))^{1/2}=\delta_{\bar{B}\cap M'}(a_{\bar{B}\cap M'}(u''))^{1/2}$. Introduisons le sous-groupe radiciel évident $U_{-r+1,-r}$ de U. On a $U''=U''_{\natural}U_{-r+1,-r}$. Soit $v\in U_{-r+1,-r}(F)\cap K$. On ne modifie pas l'intégrale précédente en remplaçant u'' par $u''v$. On peut ensuite intégrer sur $v\in U_{-r+1,-r}(F)$. On obtient alors une intégrale sur un sous-ensemble ouvert de $U''(F)$, que l'on majore par l'intégrale sur tout le groupe. D'où

$$J_{\geq}(b,D)\ll\exp(-\varepsilon_{D}b/2)\int_{U''(F)}\exp((\alpha-\beta\varepsilon_{D})\sigma(u''))\delta_{\bar{B}\cap M'}(a_{\bar{B}\cap M'}(u''))^{1/2}\sigma(u'')^{D}du''.$$

On fixe maintenant β tel que $\beta>0$ et $\alpha-\beta\varepsilon_{D}<0$. D'après le lemme II.4.2 de **[9]**, l'intégrale est convergente. On obtient

$$(3)\qquad J_{\geq}(b,D)\ll\exp(-\varepsilon_{D}b/2).$$

Le groupe U'' normalise U'. Dans $J_{<}(b,D)$, effectuons le changement de variables $u'\mapsto u''u'u''^{-1}$. Le terme $\mathbf{1}_{\sigma<\beta\sigma(u'')+b/2}(u')$ devient $\mathbf{1}_{\sigma<\beta\sigma(u'')+b/2}(u''u'u''^{-1})$. Puisque $\sigma(u')\leq\sigma(u''u'u''^{-1})+2\sigma(u'')$, ce terme est majoré par $\mathbf{1}_{\sigma<(\beta+2)\sigma(u'')+b/2}(u')$. Il y a aussi le terme $\mathbf{1}_{\sigma\geq b}(u''u')$. Si les deux termes précédents sont non nuls, on a

$$b\leq\sigma(u''u')\leq\sigma(u'')+\sigma(u')\leq(\beta+3)\sigma(u'')+b/2,$$

d'où $\sigma(u'')\geq b/(2\beta+6)$ et $\mathbf{1}_{\sigma\geq b/(2\beta+6)}(u'')=1$. On a donc

$$J_{<}(b,D)\ll\int_{U''_{\natural}(F)}\int_{U'_{\natural}(F)}\mathbf{1}_{\sigma\geq b/(2\beta+6)}(u'')\mathbf{1}_{\sigma<(\beta+2)\sigma(u'')+b/2}(u')\delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(u''u'))^{1/2}\sigma(u''u')^{D}du'\,du''.$$

Comme ci-dessus, on peut remplacer l'intégrale intérieure par une intégrale sur le groupe $U'(F)$ tout entier. On a $a_{\bar{B}}(u''u')=a_{\bar{B}\cap M'}(u'')a_{\bar{B}}(k_{\bar{B}\cap M'}(u'')u')$. Le groupe $U'(F)$ est normalisé par $M'(F)$. On effectue le changement de variables $u' \mapsto k_{\bar{B}\cap M'}(u'')^{-1}u'k_{\bar{B}\cap M'}(u'')$ et on obtient

$$J_<(b,D) \ll \int_{U''_\natural(F)} \mathbf{1}_{\sigma\geq b/(2\beta+6)}(u'')\delta_{\bar{B}\cap M'}(a_{\bar{B}\cap M'}(u''))^{1/2}\sigma(u'')^D$$

$$\int_{U'(F)} \mathbf{1}_{\sigma<(\beta+2)\sigma(u'')+b/2}(u')\delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(u'))^{1/2}\sigma(u')^D du'\, du''.$$

On peut majorer le terme $\mathbf{1}_{\sigma<(\beta+2)\sigma(u'')+b/2}(u')$ par $((\beta+2)\sigma(u'')+b/2)^R\,\sigma(u')^{-R}$ pour n'importe quel réel $R>0$. Remarquons que, quand $\mathbf{1}_{\sigma\geq b/(2\beta+6)}(u'')=1$, ce terme est essentiellement majoré par $\sigma(u'')^R\sigma(u')^{-R}$. D'où

$$J_<(b,D) \ll \int_{U''_\natural(F)} \mathbf{1}_{\sigma\geq b/(2\beta+6)}(u'')\delta_{\bar{B}\cap M'}(a_{\bar{B}\cap M'}(u''))^{1/2}\sigma(u'')^{D+R}$$

$$\int_{U'(F)} \delta_{\bar{B}}(a_{\bar{B}}(u'))^{1/2}\sigma(u')^{D-R} du'\, du''.$$

D'après le lemme II.4.2 de **[9]**, on peut fixer R de sorte que l'intégrale intérieure soit convergente. Ce nombre R étant maintenant fixé, l'intégrale restante est $J''_\natural(b/(2\beta+6), D+R)$. Grâce à (1), on obtient

$$J_<(b,D) \ll \exp(-\varepsilon_{D+R}b/(2\beta+6)).$$

Jointe à (3), cette inégalité entraîne celle de l'énoncé.

Supposons maintenant $r=1$. Dans ce cas, on a $P_1=P$ et $z_0=v_{d-1}$. Introduisons l'espace V' engendré par les vecteurs v_i pour $i\in\{1,\dots,d\}-\{d-1\}$. Notons $G'\simeq GL_{d-1}$ son groupe d'automorphismes linéaires. Posons $P'=G'\cap P$, $U'=G'\cap U$ et $M'=G'\cap M$. Le groupe $U_{1,\natural}$ est égal à U' et $M'=GL(1)\times H\times GL(1)$. Soit $u\in U'(F)$. On peut supposer $m_{\bar{P}}(u)=m_{\bar{P}'}(u)$. Ecrivons ce terme sous la forme $m_{\bar{P}'}(u)=(a_1,h,a_d)$, avec $a_1,a_d\in F^\times$ et $h\in H(F)$. On a

$$\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u))^{1/2}\Xi^M(m_{\bar{P}}(u)) = |a_1|_F^{-(d-1)/2}|a_d|_F^{(d-1)/2}\Xi^{G_0}(h),$$

tandis que

$$\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}'}(u))^{1/2}\Xi^{M'}(m_{\bar{P}'}(u)) = |a_1|_F^{-(d-2)/2}|a_d|_F^{(d-2)/2}\Xi^H(h).$$

En vertu du lemme 4.1, on en déduit

$$(4)\qquad \delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u))^{1/2}\Xi^M(m_{\bar{P}}(u)) \ll |a_1|_F^{-1/2}|a_d|_F^{1/2}\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}'}(u))^{1/2}\Xi^{M'}(m_{\bar{P}'}(u)).$$

On calcule a_1 et a_d selon la méthode habituelle. C'est-à-dire que l'on munit V' et $\bigwedge^{d-2}V'$ de normes invariantes par K. On a

$$\begin{aligned}|a_d^{-1}|_F &\ll |a_d^{-1}v_d|\\ &= |k_{\bar{P}'}(u)^{-1}u_{\bar{P}'}(u)^{-1}m_{\bar{P}'}(u)^{-1}v_d| = |u^{-1}v_d|.\end{aligned}$$

Les coordonnées de $u^{-1}v_d$ sont 1 et les $(u^{-1})_{i,d}$, pour $i=1,\dots,d-2$. D'où

$$(5)\qquad |a_d|_F^{-1} \geq \sup(\{1\}\cup\{|(u^{-1})_{i,d}|_F; i=1,\dots,d-2\}).$$

On a

$$|\det(h)^{-1}a_d^{-1}|_F \ll |m_{\bar{P}'}(u)^{-1}(v_2 \wedge \cdots \wedge v_{d-2} \wedge v_d)|$$
$$= |k_{\bar{P}'}(u)^{-1}u_{\bar{P}'}(u)^{-1}m_{\bar{P}'}(u)^{-1}(v_2 \wedge \cdots \wedge v_{d-2} \wedge v_d)| = |u^{-1}(v_2 \wedge \cdots \wedge v_{d-2} \wedge v_d)|.$$

On peut supposer que $a_1 a_d \det(h) = \det(u) = 1$. Les coordonnées $(u^{-1})_{1,j}$, pour $j = 2, \ldots, d-2$ sont aussi des coordonnées de $u^{-1}(v_2 \wedge \cdots \wedge v_{d-2} \wedge v_d)$: $(u^{-1})_{1,j}$ est la coordonnée de $u^{-1}(v_2 \wedge \cdots \wedge v_{d-2} \wedge v_d)$ sur $v_2 \wedge \cdots \wedge v_{j-1} \wedge v_1 \wedge v_{j+1} \wedge \cdots \wedge v_{d-2} \wedge v_d$. La constante 1 est aussi la coordonnée de $u^{-1}(v_2 \wedge \cdots \wedge v_{d-2} \wedge v_d)$ sur $v_2 \wedge \cdots \wedge v_{d-2} \wedge v_d$. D'où

$$|a_1|_F \geq \sup(\{1\} \cup \{|(u^{-1})_{1,j}|_F ; j = 2, \ldots, d-2\}).$$

De cette inégalité et de (5), on déduit l'existence de $\alpha > 0$ tel que

$$|a_1|_F |a_d|_F^{-1} \geq \exp(\alpha\sigma(u)).$$

Alors (4) devient

$$\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}}(u))^{1/2}\Xi^M(m_{\bar{P}}(u)) \ll \exp(-\alpha\sigma(u)/2)\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}'}(u))^{1/2}\Xi^{M'}(m_{\bar{P}'}(u)).$$

Donc

$$I_{1,\natural}(b, D) \ll \int_{U'(F)} \mathbf{1}_{\sigma \geq b}(u)\exp(-\alpha\sigma(u)/2)\delta_{\bar{P}}(m_{\bar{P}'}(u))^{1/2}\Xi^{M'}(m_{\bar{P}'}(u))du.$$

Quand $\mathbf{1}_{\sigma \geq b}(u) = 1$, on peut majorer $\exp(-\alpha\sigma(u)/2)$ par $\exp(-\alpha b/4)\exp(-\alpha\sigma(u)/4)$. D'après le lemme II.4.3 de **[9]**, l'intégrale est convergente et on obtient

$$I_{1,\natural}(b, D) \ll \exp(-\alpha b/4).$$

Cela achève la démonstration. □

4.5. Majoration d'une intégrale de fonctions d'Harish-Chandra. — On suppose dans ce paragraphe $r = 0$. Soit D un réel. Pour $h \in H(F)$ et $N \geq 1$ un entier, posons

$$\chi(h, N, D) = \int_{G(F)} \Xi^G(hx)\Xi^G(x)\kappa_N(x)\sigma(x)^D dx.$$

Lemme 4.3. — *Cette intégrale est convergente. Le réel D étant fixé, il existe un réel R tel que*

$$\chi(h, N, D) \ll \Xi^G(h)N^R\sigma(h)^R$$

pour tout $h \in H(F)$ et tout entier $N \geq 1$.

Démonstration. — Comme en 4.3, on a $H = GL_{d-1}$. Ecrivons $h = k_1 a k_2$, avec $k_1, k_2 \in K_{d-1}$ et $a \in A_{d-1}(F)$. On effectue le changement de variables $x \mapsto k_2^{-1}x$. Puisque Ξ^G est biinvariante par K_d et κ_N est invariante à gauche par $H(F)$, on obtient l'égalité $\chi(h, N, D) = \chi(a, N, D)$. Cela nous ramène au cas où $h \in A_{d-1}(F)$, ce que l'on suppose désormais.

On introduit le sous-groupe d'Iwahori standard I de $G(F)$, c'est-à-dire le sous-ensemble des $k \in K_d$ tel que $\mathrm{val}_F(k_{i,j}) \geq 1$ pour $i > j$. Notons Λ le sous-ensemble des $a \in A_d(F)$ tels que toutes les coordonnées a_i sont des puissances de ϖ_F. On a l'égalité

$$G(F) = \sqcup_{a\in\Lambda} IaK.$$

On a donc

$$\chi(h,N,D,a) = \sum_{a\in\Lambda} \chi(h,N,D,a),$$

où

$$\chi(h,N,D,a) = \int_{IaK} \Xi^G(hx)\Xi^G(x)\kappa_N(x)\sigma(x)^D dx.$$

Pour $s \in \mathfrak{S}_d$, posons $\Lambda_s^- = \Lambda \cap A_d(F)_s^-$, cf. 4.2. L'ensemble Λ est réunion des Λ_s^-. On peut donc fixer s et se contenter de majorer

$$(1) \qquad \sum_{a\in\Lambda_s^-} \chi(h,N,D,a).$$

Quitte à réindexer nos vecteurs de base, on peut supposer que s est l'identité. On note simplement Λ^- l'ensemble correspondant. Cette réindexation change toutefois deux données : le groupe I n'est plus le même ; le vecteur z_0 n'est plus égal à v_d, mais à un autre vecteur de base que nous notons v_k. D'après le lemme II.1.1 de **[9]**, il existe un réel R_1 tel que $\Xi^G(x) \ll \delta_{B_d}(a)^{1/2}\sigma(a)^{R_1}$ pour tout $a \in \Lambda^-$ et tout $x \in IaK$. Pour $a \in \Lambda^-$, on a l'égalité $IaK = (I \cap U_d(F))aK$ et on vérifie que l'on a une majoration $\mathrm{mes}(IaK) \ll \delta_{B_d}(a)^{-1}$. On obtient

$$(2) \qquad \chi(h,N,D,a) \ll \delta_{B_d}(a)^{-1/2}\sigma(a)^{R_1+D}Y(h,N,a),$$

où

$$Y(h,N,a) = \int_{I\cap U_d(F)} \Xi^G(hua)\kappa_N(ua)du.$$

Posons

$$X(h,N,a) = \int_{I\cap U_d(F)} \Xi^G(hua)du.$$

Définissons quatre entiers

$$\begin{aligned} N_1(h) &= N + 1 + \sup(0, -\mathrm{val}_F(h_1)),\\ N_d(h) &= N + 1 + \sup(0, \mathrm{val}_F(h_d)),\\ b_1(h,N,a) &= \sup(0, \mathrm{val}_F(a_1) - N_1(h)),\\ b_d(h,N,a) &= \sup(0, -\mathrm{val}_F(a_d) - N_d(h)). \end{aligned}$$

Montrons que

(3) il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$Y(h,N,a) \ll \exp(-\varepsilon(b_1(h,N,a) + b_d(h,N,a)))X(h,N,a)$$

pour tout $h \in A_d(F) \cap H(F)$, tout $N \geq 1$ et tout $a \in \Lambda^-$.

Supposons d'abord $k \neq 1$ et $k \neq d$. Introduisons le sous-groupe Γ de $U_d(F)$ formé des éléments $u(x,y,t)$ pour $x,y,t \in F$ tels que $u(x,y,t)v_k = v_k + xv_1$, $u(x,y)v_d =$

$v_d + yv_k + tv_1$ et $u(x,y,t)$ fixe tout autre vecteur de base. Considérons le sous-groupe Γ_h de Γ formé des éléments $u(x,y,t)$ tels que

- $\mathrm{val}_F(x) \geq 1$, $\mathrm{val}_F(y) \geq 1$, $\mathrm{val}_F(t) \geq 1$;
- $\mathrm{val}_F(x) \geq -\mathrm{val}_F(h_1)+1$, $\mathrm{val}_F(y) \geq \mathrm{val}_F(h_d)+1$, $\mathrm{val}_F(t) \geq -\mathrm{val}_F(h_1)+\mathrm{val}_F(h_d)+1$.

Remarquons que les conditions portant sur x et y peuvent s'écrire $\mathrm{val}_F(x) \geq N_1(h)-N$ et $\mathrm{val}_F(y) \geq N_d(h)-N$. Puisque $h \in H(F)$, on a $h_k = 1$, d'où l'égalité $hu(x,y,t)h^{-1} = u(h_1x, h_d^{-1}y, h_1h_d^{-1}t)$. Les conditions ci-dessus assurent que $\gamma \in I \cap U_d(F)$ et $h\gamma h^{-1} \in I \cap U_d(F)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_h$. Soit $\gamma \in \Gamma_h$. On ne modifie pas $Y(h,N,a)$ en remplaçant $\Xi^G(hua)$ par $\Xi^G(h\gamma h^{-1}hua)$. On effectue ensuite le changement de variables $u \mapsto \gamma^{-1}u$. On peut enfin intégrer en $\gamma \in \Gamma_h$, à condition de diviser par $\mathrm{mes}(\Gamma_h)$.On obtient

$$(4) \qquad Y(h,N,a) = \int_{I \cap U_d(F)} \Xi^G(hua)\kappa_{N,h}(ua)du,$$

où

$$\kappa_{N,h}(ua) = \mathrm{mes}(\Gamma_h)^{-1} \int_{\Gamma_h} \kappa_N(\gamma^{-1}ua)d\gamma.$$

Soient $\gamma = u(x,y,t) \in \Gamma_h$ et $u \in U_d(F)$. La condition $\kappa_N(\gamma^{-1}ua) = 1$ équivaut à

$$a^{-1}u^{-1}\gamma v_k \in \mathfrak{p}_F^{-N}R \text{ et } {}^ta{}^tu{}^t\gamma^{-1}v_k \in \mathfrak{p}_F^{-N}R,$$

ou encore

$$a_1^{-1}xv_1 + a^{-1}u^{-1}v_k \in \mathfrak{p}_F^{-N}R \text{ et } -a_dyv_d + {}^ta{}^tuv_k \in \mathfrak{p}_F^{-N}R.$$

En notant x_u la composante de $u^{-1}v_k$ sur v_1 et y_u celle de ${}^tuv_k$ sur v_d, ces conditions entraînent

$$\mathrm{val}_F(x+x_u) \geq \mathrm{val}_F(a_1) - N \text{ et } \mathrm{val}_F(y-y_u) \geq -\mathrm{val}_F(a_d) - N.$$

Rappelons que l'on a aussi $\mathrm{val}_F(x) \geq N_1(h)-N$ et $\mathrm{val}_F(y) \geq N_d(h)-N$. Les relations précédentes peuvent ne pas avoir de solution, auquel cas $\kappa_{N,h}(ua) = 0$. Si elles en ont, elles déterminent une classe modulo un sous-groupe Γ'_h de Γ_h et on a $\kappa_{N,h}(ua) = [\Gamma_h : \Gamma'_h]^{-1}$. L'indice de Γ'_h dans Γ_h se calcule aisément. Les relations portant sur x contribuent par 1 si $\mathrm{val}_F(a_1) \leq N_1(h)$ et par $q^{N_1(h)-\mathrm{val}_F(a_1)}$ si $\mathrm{val}_F(a_1) \geq N_1(h)$. Autrement dit, elles contribuent par $q^{-b_1(h,N,a)}$. De même, les relations portant sur y contribuent par $q^{-b_d(h,N,a)}$. Dans l'égalité (4), on peut donc majorer $\kappa_{N,h}(ua)$ par $q^{-b_1(h,N,a)-b_d(h,N,a)}$ et la majoration (3) s'en déduit.

Supposons maintenant $k=1$ (le cas $k=d$ est similaire). Pour $u \in U_d(F)$, la condition $\kappa_N(ua) = 1$ entraîne $a^{-1}u^{-1}v_1 \in \mathfrak{p}_F^{-N}R$, c'est-à-dire $a_1^{-1}v_1 \in \mathfrak{p}_F^{-N}R$, ou encore $\mathrm{val}_F(a_1) \leq N$. Donc $b_1(h,N,a) = 0$ et on peut oublier ce terme dans la relation (3). On introduit maintenant le sous-groupe Γ de $U_d(F)$ formé des $u(y)$, pour $y \in F$, tels que $u(y)v_d = v_d + yv_1$ et $u(y)$ fixe tout autre vecteur de base. A l'aide de ce sous-groupe, le même raisonnement que ci-dessus conduit à la majoration (3).

Montrons que

(5) il existe un réel R_2 tel que

$$X(h,N,a) \ll \Xi^G(h)\delta_{B_d}(a)^{1/2}\sigma(h)^{R_2}\sigma(a)^{R_2}$$

pour tout $h \in A_d(F) \cap H(F)$ et tout $a \in \Lambda^-$.

On peut fixer $s \in \mathfrak{S}_d$ tel que $h \in A_d(F)^-_s$. Introduisons le sous-groupe de Borel $B_{d,s} = A_d U_{d,s}$ de G formé des éléments qui conservent le drapeau

$$Fv_{s(1)} \subset Fv_{s(1)} \oplus Fv_{s(2)} \subset \cdots \subset Fv_{s(1)} \oplus \cdots \oplus Fv_{s(d)}.$$

On a l'égalité $I \cap U_d(F) = (I \cap U_d(F) \cap U_{d,s}(F))(I \cap U_d(F) \cap \bar{U}_{d,s}(F))$. Pour $u \in I \cap U_d(F) \cap U_{d,s}(F)$, on a $huh^{-1} \in I$. Le groupe $I \cap U_d(F) \cap U_{d,s}(F)$ contribue donc trivialement à $X(h,N,a)$ et on obtient

$$X(h,N,a) \ll \int_{I \cap U_d(F) \cap \bar{U}_{d,s}(F)} \Xi^G(hua)du$$

$$\ll \delta_0(h) \int_{h(I \cap U_d(F) \cap \bar{U}_{d,s}(F))h^{-1}} \Xi^G(uha)du,$$

où $\delta_0(h)$ est la valeur absolue du déterminant de $ad(h^{-1})$ agissant sur $\mathfrak{u}_d(F) \cap \bar{\mathfrak{u}}_{d,s}(F)$. Soit $u' \in I \cap U_d(F) \cap U_{d,s}(F)$. On ne modifie pas l'intégrale ci-dessus en remplaçant $\Xi^G(uha)$ par $\Xi^G(u'uha)$. On peut ensuite intégrer en u'. En regroupant les deux intégrales, on obtient une intégrale sur un ouvert de $U_d(F)$. Sur cet ouvert, la variable d'intégration u vérifie une majoration $\sigma(u) \ll \sigma(h)$. Pour tout réel $R_3 > 0$, on peut donc glisser le terme $\sigma(h)^{R_3}\sigma(u)^{-R_3}$ dans l'intégrale et on obtient

$$X(h,N,a) \ll \delta_0(h)\sigma(h)^{R_3} \int_{U_d(F)} \sigma(u)^{-R_3}\Xi^G(uha)du.$$

D'après **[9]**, proposition II.4.5, on peut choisir R_3 de sorte que cette intégrale soit convergente et essentiellement bornée par $\sigma(ha)^{R_3}\delta_{B_d}(ha)^{1/2}$. D'où

$$X(h,N,a) \ll \delta_0(h)\delta_{B_d}(h)^{1/2}\delta_{B_d}(a)^{1/2}\sigma(h)^{2R_3}\sigma(a)^{R_3}.$$

On vérifie que $\delta_0(h)\delta_{B_d}(h)^{1/2} = \delta_{B_{d,s}}(h)^{1/2}$. D'après **[9]** lemme II.1.1, ce terme est essentiellement borné par $\Xi^G(h)$. La majoration précédente entraîne donc (5).

Grâce à (2), (3) et (5), il existe R_5 tel que

$$\chi(h,N,D,a) \ll \exp(-\varepsilon(b_1(h,N,a) + b_d(h,N,a)))\Xi^G(h)\sigma(a)^{R_5}\sigma(h)^{R_5}.$$

La somme (1) est bornée par

$$\sigma(h)^{R_5}\Xi^G(h) \sum_{a \in \Lambda^-} \sigma(a)^{R_5}\exp(-\varepsilon(b_1(h,N,a) + b_d(h,N,a))).$$

On vérifie qu'il existe R_6 tel que la série soit essentiellement bornée par $N_1(h)^{R_6}N_d(h)^{R_6}$. Ce terme est lui-même essentiellement borné par $N^{2R_6}\sigma(h)^{2R_6}$. Alors la majoration précédente devient celle de l'énoncé. □

4.6. Preuve (sic !) des majorations de 4.1. — Dans la section 4 de **[14]**, on a démontré les analogues des majorations de 4.1 pour les groupes spéciaux orthogonaux. On vient de démontrer en 4.3 ci-dessus l'analogue du lemme 4.9 de **[14]**, en 4.4 les analogues des lemmes 4.5 et 4.6 de **[14]** et en 4.5 l'analogue du lemme 4.11 de **[14]**. On l'a fait parce que les preuves pour GL_d diffèrent quelque peu de celles pour les groupes spéciaux orthogonaux. En inspectant les preuves des autres paragraphes de **[14]** (paragraphes 4.7, 4.8, 4.10 et 4.12 à 4.16), on constate qu'on peut les reprendre sans changement pour le groupe GL_d. On obtient ainsi une preuve des assertions de 4.1.

5. Produits bilinéaires et facteurs ε

5.1. Modèles de Whittaker. — Fixons une base $(v_i)_{i=1,\dots,d}$ de V et identifions G à GL_d. Soit (π, E) une représentation admissible irréductible de $G(F)$. On suppose qu'elle est tempérée et qu'elle admet un modèle de Whittaker, que l'on construit comme en 2.2.

Pour $c \in \mathbb{Z}$, notons ι_c la fonction caractéristique du sous-ensemble de $A_d(F)$ formé des $a \in A_d(F)$ tels que $\mathrm{val}_F(a_i) \geq \mathrm{val}_F(a_{i+1}) - c$ pour tout $i = 1, \dots, d-1$. On sait qu'il existe un réel R et, pour tout $e \in E$, un entier c de sorte que

$$(1) \qquad |W_e(a)| \ll \iota_c(a)\delta_{B_d}(a)^{1/2}\sigma(a)^R$$

pour tout $a \in A_d(F)$.

Pour $h = 1, \dots, d$, on identifie GL_h au sous-groupe de G qui conserve le sous-espace de V engendré par $v_1, \dots, v_h$ et fixe v_i pour $i > h$. Pour $h, k, l \in \mathbb{N}$ tels que $h < k \leq l \leq d$, on note $\bar{U}_{h,k,l}$ le sous-groupe de $\bar{U}_d$ formé des éléments $\bar{u} \in \bar{U}_d$ tels que, pour $i, j = 1, \dots, d$, $i \neq j$, $\bar{u}_{i,j}$ n'est non nul que si (i, j) appartient au rectangle défini par les inégalités $k \leq i \leq l$, $1 \leq j \leq h$.

Lemme 5.1. — *On suppose π tempérée. Soit $h \in \{1, \dots, d-2\}$. Pour tout $e \in E$, il existe un sous-ensemble compact $\Omega \subset \bar{U}_{h,h+1,d-1}(F)$ tel que, pour tout $g \in GL_h(F)$, la fonction $\bar{u} \mapsto W_e(g\bar{u})$ sur $\bar{U}_{h,h+1,d-1}(F)$ soit à support dans Ω.*

Démonstration. — La preuve se trouve dans **[7]** lemme 2.6. Rappelons-la. On remarque que $\bar{U}_{h,h+1,d-1}$ est le radical unipotent du sous-groupe parabolique de GL_{d-1} qui est triangulaire inférieur et de Lévi $GL_h \times GL_{d-h-1}$. Supposons $W_e(g\bar{u}) \neq 0$. On écrit $g\bar{u} = uak$, avec $u \in U_{d-1}(F)$, $a \in A_{d-1}(F)$, $k \in K_{d-1}$. Grâce à (1), on a une majoration $|a_i|_F \leq c$, où c est indépendant de g. La base de V détermine une base du produit $\bigwedge^{d-1-h} V$. On munit ce produit de la norme $|.|$ qui est le sup des valeurs absolues des coefficients dans la base en question. Ce produit est invariant par K_d. On a

$$|{}^t(uak)(v_{h+1} \wedge \cdots \wedge v_{d-1})| = |a_{h+1} \cdots a_{d-1}| \leq c^{d-1-h}.$$

Mais un coefficient $\bar{u}_{i,j}$ est le coefficient de ${}^t(uak)(v_{h+1}\wedge\cdots\wedge v_{d-1}) = {}^t(g\bar{u})(v_{h+1}\wedge\cdots\wedge v_{d-1})$ sur le vecteur de base $v_{h+1}\wedge\cdots v_{i-1}\wedge v_j\wedge v_{i+1}\wedge\cdots\wedge v_{d-1}$. Donc les coefficients de $\bar{u}$ sont bornés. □

5.2. Entrelacements. — Soient $(\pi,E_\pi)\in \mathrm{Temp}(G)$ et $(\rho,E_\rho)\in\mathrm{Temp}(H)$. On munit les espaces de ces représentations de produits scalaires invariants. Pour $c\in\mathbb{Z}$, on a défini en 4.1 le sous-groupe $U(F)_c$ de $U(F)$. Pour $e,e'\in E_\pi$ et $\varepsilon,\varepsilon'\in E_\rho$, posons

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho,c}(\varepsilon'\otimes e',\varepsilon\otimes e) = \int_{H(F)}\int_{U(F)_c}(\rho(h)\varepsilon',\varepsilon)(e',\pi(hu)e)\bar{\xi}(u)du\,dh.$$

D'après 4.1(3), cette intégrale est absolument convergente.

Lemme 5.2. — *Pour tous $\varepsilon,\varepsilon',e,e'$, il existe c_0 tel que $\mathcal{L}_{\pi,\rho,c}(\varepsilon'\otimes e',\varepsilon\otimes e)$ soit indépendant de c pour $c\geq c_0$.*

La preuve est similaire à celle du lemme 3.5 de **[14]**. Rappelons-la. Pour un entier $c'\geq 1$, notons $\omega(c')$ le sous-groupe des $a\in A(F)$ tels que $\mathrm{val}_F(1-a_i)\geq c'$ pour tout $i=\pm1,\dots,\pm r$. Choisissons c' tel que e et e' soient fixés par $\omega(c')$. Alors

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho,c}(\varepsilon'\otimes e',\varepsilon\otimes e) = \mathrm{mes}(\omega(c'))^{-1}\int_{\omega(c')}\int_{H(F)}\int_{U(F)_c}(\rho(h)\varepsilon',\varepsilon)(\pi(a)e',\pi(hua)e)\bar{\xi}(u)du\,dh\,da.$$

Par le changement de variable $u\mapsto aua^{-1}$, on transforme cette expression en

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho,c}(\varepsilon'\otimes e',\varepsilon\otimes e) = \mathrm{mes}(\omega(c'))^{-1}\int_{H(F)}\int_{U(F)_c}(\rho(h)\varepsilon',\varepsilon)(e',\pi(hu)e)\int_{\omega(c')}\bar{\xi}(aua^{-1})du\,dh\,da.$$

Mais il existe c_0, ne dépendant que de c', tel que l'intégrale intérieure en a soit nulle si $u\notin U(F)_{c_0}$. D'où le lemme. □

On définit une forme sesquilinéaire $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ sur $E_\rho\otimes_{\mathbb{C}}E_\pi$ par

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\varepsilon'\otimes e',\varepsilon\otimes e) = \lim_{c\to\infty}\mathcal{L}_{\pi,\rho,c}(\varepsilon'\otimes e',\varepsilon\otimes e).$$

5.3. Entrelacements et modèles de Whittaker. — Fixons une base $(v_i)_{i=1,\dots,m}$ de W et complétons-la en une base $(v_i)_{i=1,\dots,d}$ de V par $v_{m+i}=z_{r+1-i}$ pour $i=1,\dots,2r+1$. Pour tout $h=1,\dots,d$, introduisons le sous-groupe parabolique standard $Q^h=L^hU^h$ tel que

$$L^h = GL_h\times GL_1\times\cdots\times GL_1.$$

Notons $\beta: GL_{r+1}\to G$ le plongement qui identifie GL_{r+1} au sous-groupe des éléments de G qui conservent le sous-espace de V engendré par $v_{m+1},\dots,v_{m+r+1}$ et fixent les autres vecteurs de base. On vérifie que notre groupe U est produit des trois sous-groupes $\beta(U_{r+1})$, $\bar{U}_{m,m+1,m+r}$ et U^{m+r+1}. Le caractère ξ de $U(F)$ est trivial sur $\bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)$ et coïncide sur les deux autres facteurs avec le caractère ξ de $U_d(F)$. Notons $U_d(F)_c$ le sous-groupe des $u\in U_d(F)$ tels que $\mathrm{val}_F(u_{i,i+1})\geq -c$ pour tout $i=1,\dots,d-1$. Alors $U(F)_c$ est produit des trois sous-groupes $\beta(U_{r+1}(F)_c)$, $\bar{U}_{m,m+1,m+r}$ et $U^{m+r+1}(F)_c = U_d(F)_c\cap U^{m+r+1}(F)$. Soient $(\pi,E_\pi)\in\mathrm{Temp}(G)$ et $(\rho,E_\rho)\in$

Temp(H). Fixons comme en 5.1 des modèles de Whittaker de π et ρ. Pour $e \in E_\pi$ et $\varepsilon' \in E_\rho$, posons

$$L_{\pi,\rho}(\varepsilon', e) = \int_{\bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)} \int_{U_m(F)\backslash H(F)} \bar{W}_{\varepsilon'}(h) W_e(h\bar{u}) |\det(h)|^{-r} dh\, d\bar{u}.$$

Lemme 5.3. — (i) *L'intégrale ci-dessus est absolument convergente.*

(ii) *Il existe $C > 0$ tel que, pour tous $e, e' \in E_\pi$ et $\varepsilon, \varepsilon' \in E_\rho$, on ait l'égalité*

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\varepsilon' \otimes e', \varepsilon \otimes e) = C L_{\pi,\rho}(\varepsilon', e)\overline{L_{\pi,\rho}(\varepsilon, e')}.$$

Démonstration. — Considérons $L(\varepsilon', e)$. D'après le lemme 5.1, l'intégrale sur $\bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)$ est à support compact et on n'a pas à s'en soucier. On décompose $h \in U_m(F)\backslash H(F)$ en $h = ak$, avec $a \in A_m(F)$ et $k \in K_m$. La mesure devient $\delta_{B_m}(a)^{-1} da\, dk$. L'intégrale en k ne nous importe pas. D'après 5.1(1), l'intégrale restante est bornée par

$$\int_{A_m(F)} \iota_{c'}(a) \delta_{B_m}(a)^{-1/2} \delta_{B_d}(a)^{1/2} |\det(a)|_F^{-r} da,$$

pour un entier c' convenable. On calcule

$$\delta_{B_m}(a)^{-1/2} \delta_{B_d}(a)^{1/2} |\det(a)|_F^{-r} = |\det(a)|_F^{1/2}$$

et on vérifie que l'intégrale ci-dessus est convergente. Cela prouve (i).

La première étape pour prouver (ii) est de calculer

$$\int_{U(F)_c} (e', \pi(u)e)\bar{\xi}(u) du$$

pour un entier $c \geq 1$ et deux éléments $e, e' \in E_\pi$. On a

$$(1) \qquad \int_{U(F)_c} (e', \pi(u)e) du = \int_{\bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)} \int_{\beta(U_{r+1}(F)_c)} \int_{U^{m+r+1}(F)_c} (e', \pi(u'u\bar{u})e)\bar{\xi}(u'u) du'\, du\, d\bar{u}$$

et cette expression est absolument convergente. Pour un entier $h = 0, \dots, d-1$, notons $\omega_{[h+1,d-1]}(c)$ le sous-groupe des éléments $a \in A_d(F)$ tels que $a_1 = \cdots = a_h = 1$, $a_d = 1$ et $\mathrm{val}_F(1 - a_i) \geq c$ pour tout $i = h+1, \dots, d-1$. Notons c_ψ l'exposant du conducteur de ψ, c'est-à-dire que ψ est trivial sur $\mathfrak{p}_F^{c_\psi}$ mais pas sur $\mathfrak{p}_F^{c_\psi - 1}$. Posons

$$(2) \qquad I^h(e', e) = \int_{\omega_{[h+1,d-1]}(c+c_\psi)} \int_{U_h(F)\backslash GL_h(F)} \bar{W}_{e'}(ag) W_e(ag) |\det(g)|_F^{h+1-d} dg\, da.$$

On suppose $c \geq 1$ et $c + c_\psi \geq 1$. D'après le lemme 3.6 de **[14]**, cette expression est absolument convergente et il existe $C_{r+1} > 0$, ne dépendant que de c et des mesures de Haar, tel que l'intégrale intérieure de l'expression (1) soit égale à $C_{r+1} I^{m+r}(e', \pi(u\bar{u})e)$. Pour $k = 2, \dots, r+1$, notons X^k le sous-groupe de $\beta(U_{r+1})$ formé des $u \in U_d$ tels que, pour $i, j = 1, \dots, d$, $i \neq j$, on n'a $u_{i,j} \neq 0$ que si $j = m + k$ et $i = m+1, \dots, m+k-1$. On a l'égalité $\beta(U_{r+1}) = X^{r+1} X^r \cdots X^2$.

Fixons un entier $N \geq c$. Pour $k = 2, \dots, r+1$, notons $\mathcal{X}_N^k$ le sous-groupe des éléments $u \in X^k(F)$ tels que $\mathrm{val}_F(u_{i,m+k}) \geq -kN$ pour $i = m+1, \dots, m+k-2$ et $\mathrm{val}_F(u_{m+k-1,m+k}) \geq -c$. Notons $\bar{\mathcal{U}}_N$ le sous-groupe des éléments $\bar{u} \in \bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)$ tels que $\mathrm{val}_F(\bar{u}_{i,j}) \geq -(2r+1)N$ pour tous $i \neq j$. On a

$$\int_{U(F)_c} (e', \pi(u)e)\bar{\xi}(u)du = C_{r+1} \lim_{N\to\infty} \int_{\bar{\mathcal{U}}_N} \int_{\mathcal{X}_N^2} \cdots \int_{\mathcal{X}_N^{r+1}}$$

$$I^{m+r}(e', \pi(u_{r+1}\cdots u_2\bar{u})e)\bar{\xi}(u_{r+1}\cdots u_2)du_{r+1} \dots du_2\, d\bar{u}.$$

Pour $k = 1, \dots, r+1$, posons

$$J_N^k = \int_{\bar{\mathcal{U}}_N} \int_{\mathcal{X}_N^2} \cdots \int_{\mathcal{X}_N^k} \int_{\bar{U}_{m,m+k,m+r}(F)} I^{m+k-1}(\pi(\bar{v})e', \pi(u_k\cdots u_2\bar{u})e)\bar{\xi}(u_k\cdots u_2)d\bar{v}\, du_k \cdots du_2\, d\bar{u}.$$

La formule précédente se récrit

$$(3) \qquad \int_{U(F)_c} (e', \pi(u)e)\bar{\xi}(u)du = C_{r+1} \lim_{N\to\infty} J_N^{r+1}.$$

Montrons que pour tout $k = 2, \dots, r+1$, il existe $C'_k > 0$ ne dépendant que de c et des mesures de Haar de sorte que

$$(4) \qquad J_N^k = C'_k J_N^{k-1}$$

si N est assez grand. Remplaçons dans J_N le terme $I^{m+k-1}(\pi(\bar{v})e', \pi(u_k\cdots u_2\bar{u})e)$ par son expression intégrale (2). On obtient

$$(5) \qquad J_N^k = \int_{\bar{\mathcal{U}}_N} \int_{\mathcal{X}_N^2} \cdots \int_{\mathcal{X}_N^k} \int_{\bar{U}_{m,m+k,m+r}(F)} \int_{\omega_{[m+k,d-1]}(c+c_\psi)} \int_{U_{m+k-1}(F)\backslash GL_{m+k-1}(F)}$$

$$\bar{W}_{e'}(ag\bar{v})W_e(agu_k\cdots u_2\bar{u})|\det(g)|_F^{m+k-d}\bar{\xi}(u_k\cdots u_2)dg\, da\, d\bar{v}\, du_k \cdots du_2\, d\bar{u}.$$

Cette expression est absolument convergente. En effet, les variables $u_k, \dots, u_2$, $\bar{u}$ restent dans des compacts. La variable $\bar{v}$ n'intervient que dans $\bar{W}_{e'}(ag\bar{v})$ et g appartient à $GL_{m+k-1}(F)$. Si on ne tient pas compte de a, le lemme 5.1 nous dit que cette fonction est à support compact en $\bar{v}$. Le a ne gêne pas : en le faisant commuter à $\bar{v}$, on obtient que $a\bar{v}a^{-1}$ reste dans un compact, ce qui équivaut à ce que $\bar{v}$ reste dans un compact, puisque a lui-même reste dans un compact. Mais alors, la convergence absolue de notre expression résulte de celle de (2).

Notons Y le sous-groupe des éléments de GL_{m+k-1} formé des y dont les seuls coefficients non nuls sont :

- $y_{i,i} = 1$ pour $i = 1, \dots, m+k-2$;
- les $y_{m+k-1,j}$ pour $j = 1, \dots, m+k-1$.

On note dy le produit des mesures additives $dy_{m+k-1,j}$. On a la formule d'intégration

$$\int_{U_{m+k-1}(F)\backslash GL_{m+k-1}(F)} \varphi(g)dg = C' \int_{Y(F)} \int_{U_{m+k-2}(F)\backslash GL_{m+k-2}(F)}$$

$$\varphi(g'y)|\det(g')|_F^{-1}dg'|y_{m+k-1,m+k-1}|^{-1}dy$$

pour toute fonction intégrable φ sur $U_{m+k-1}(F)\backslash GL_{m+k-1}(F)$, où C' est une constante positive. On utilise cette formule pour calculer l'intégrale en g de la formule (5).On remplace donc g par $g'y$, avec $g' \in GL_{m+k-2}(F)$ et $y \in Y(F)$. On a l'égalité $ag'yu_k = nag'y$, où n est un élément de $U_d(F)$ qui n'a de coefficients non nuls, hormis les diagonaux, que sur la $(m+k)$-ième colonne, et qui vérifie

$$n_{m+k-1,m+k} = a_{m+k}^{-1} \sum_{i=m+1,\ldots,m+k-1} y_{m+k-1,i}(u_k)_{i,m+k}.$$

On a $W_e(ag'yu_k \cdots u_2\bar{u}) = \psi(n_{m+k-1,m+k})W_e(ag'yu_{k-1}\cdots u_2\bar{u})$. L'intégrale en u_k de la formule (5) est donc simplement

$$\int_{\mathcal{X}_N^k} \psi(-(u_k)_{m+k-1,m+k} + a_{m+k}^{-1} \sum_{i=m+1,\ldots,m+k-1} y_{m+k-1,i}(u_k)_{i,m+k})du_k.$$

Notons Y_N le sous-ensemble des $y \in Y(F)$ tels que $\mathrm{val}_F(y_{m+k-1,i}) \geq kN + c_\psi$ pour $i = m+1,\ldots,m+k-2$ et $\mathrm{val}_F(1 - y_{m+k-1,m+k-1}) \geq c + c_\psi$. Posons

$$C(N) = \mathrm{mes}(\mathfrak{p}_F^{-kN})^{k-2}\mathrm{mes}(\mathfrak{p}_F^{-c}).$$

L'intégrale ci-dessus vaut $C(N)$ si $y \in Y_N$ et 0 sinon. Décomposons Y_N en produit de trois groupes : son intersection avec $A_d(F)$, que l'on note $\omega_{[m+k-1,m+k-1]}(c+c_\psi)$; le sous-groupe des y unipotents tels que $y_{m+k-1,j} = 0$ pour $j = m+1,\ldots,m+k-2$, qui est égal à $\bar{U}_{m,m+k-1,m+k-1}(F)$; le sous-groupe des y unipotents tels que $y_{m+k-1,j} = 0$ pour $j = 1,\ldots,m$, que l'on note Y_N'. À ce point, on a obtenu l'égalité

$$J_N^k = C'C(N) \int_{\bar{\mathcal{U}}_N} \int_{\mathcal{X}_N^2} \cdots \int_{\mathcal{X}_N^{k-1}} \int_{\bar{U}_{m,m+k,m+r}(F)} \int_{\omega_{[m+k,d-1]}(c+c_\psi)} \int_{U_{m+k-2}(F)\backslash GL_{m+k-2}(F)}$$

$$\int_{\omega_{[m+k-1,m+k-1]}(c+c_\psi)} \int_{\bar{U}_{m,m+k-1,m+k-1}(F)} \int_{Y_N'} \bar{W}_{e'}(aga'\bar{u}'y'\bar{v})W_e(aga'\bar{u}'y'u_{k-1}\cdots u_2\bar{u})$$

$$|\det(g)|_F^{m+k-1-d}\bar{\xi}(u_{k-1}\cdots u_2)dy'\,d\bar{u}'\,da'\,dg\,da\,d\bar{v}\,du_{k-1}\cdots du_2\,d\bar{u}.$$

On a dejà dit que $\bar{v}$ restait dans un compact, qui est indépendant de N. Alors l'élément $\bar{v}^{-1}y'\bar{v}$ est proche de 1 quand N est grand, donc $\bar{W}_{e'}(aga'\bar{u}'y'\bar{v}) = \bar{W}_{e'}(aga'\bar{u}'\bar{v})$. Les termes y', $u_{k-1},\ldots,u_2$ appartiennent à $\beta(GL_r(F))$, donc aussi $y'' = (u_{k-1}\cdots u_2)^{-1}y'u_{k-1}\cdots u_2$. De plus, les coefficients de $u_{k-1}\cdots u_2$ sont de valuations $\geq -(k-1)N$ tandis que les coefficients non diagonaux de y' sont de valuations $\geq kN + c_\psi$. Donc y'' est proche de 1 quand N est grand. Le groupe $\beta(GL_r(F))$ normalise $\bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)$ et un élément proche de 1 de $\beta(GL_r(F))$ normalise $\bar{\mathcal{U}}_N$. Quitte à effectuer le changement de variables $\bar{u} \mapsto y''^{-1}\bar{u}y''$, on remplace $W_e(aga'\bar{u}'y'u_{k-1}\cdots u_2\bar{u})$ par $W_e(aga'\bar{u}'u_{k-1}\cdots u_2\bar{u}y'')$, qui est égal à $W_e(aga'\bar{u}'u_{k-1}\cdots u_2\bar{u})$. Alors y' disparaît de notre formule. Posons $C'' = C(N)\mathrm{mes}(Y_N')$. Cette constante est indépendante de N et on a obtenu

$$J_N^k = C'C'' \int_{\bar{\mathcal{U}}_N} \int_{\mathcal{X}_N^2} \cdots \int_{\mathcal{X}_N^{k-1}} \int_{\bar{U}_{m,m+k,m+r}(F)} \int_{\omega_{[m+k,d-1]}(c+c_\psi)} \int_{U_{m+k-2}(F)\backslash GL_{m+k-2}(F)}$$

$$\int_{\omega_{[m+k-1,m+k-1]}(c+c_\psi)} \int_{\bar{U}_{m,m+k-1,m+k-1}(F)} \bar{W}_{e'}(aga'\bar{u}'\bar{v})W_e(aga'\bar{u}'u_{k-1}\cdots u_2\bar{u})$$
$$|\det(g)|_F^{m+k-1-d}\bar{\xi}(u_{k-1}\cdots u_2)d\bar{u}'\,da'\,dg\,da\,d\bar{v}\,du_{k-1}\cdots du_2\,d\bar{u}.$$

De même que l'on a prouvé que $\bar{v}$ restait dans un compact, on montre maintenant que $\bar{u}'\bar{v}$ reste dans un compact, donc aussi $\bar{u}'$. Cet élément appartient à $\bar{U}_{m,m+1,r}(F)$ et, comme ci-dessus, ce groupe est normalisé par $\beta(GL_r(F))$. Donc l'élément $\bar{u}'' = (u_{k-1}\cdots u_2)^{-1}\bar{u}'u_{k-1}\cdots u_2$ appartient à $\bar{U}_{m,m+1,r}(F)$. Puisque $\bar{u}'$ reste dans un compact et que les coefficients de $u_{k-1}\cdots u_2$ sont de valuation $\geq -(k-1)N$, on a $\bar{u}'' \in \bar{\mathcal{U}}_N$. Quitte à effectuer le changement de variable $\bar{u} \mapsto \bar{u}''^{-1}\bar{u}$, on remplace $W_e(aga'\bar{u}'u_{k-1}\cdots u_2\bar{u})$ par $W_e(aga'u_{k-1}\cdots u_2\bar{u})$. Le terme $\bar{u}'$ n'intervient plus que dans $\bar{W}_{e'}(aga'\bar{u}'\bar{v})$. Les intégrales en $\bar{u}'$ et $\bar{v}$ se combinent en une intégrale en $\bar{v} \in \bar{U}_{m,m+k-1,m+r}(F)$. Les éléments a' et g commutent. Ensuite, les intégrales en a et a' se combinent pour former une intégrale en $a \in \omega_{[m+k-1,d-1]}(c+c_\psi)$. Cela conduit à l'égalité

$$J_N^k = C'C'' \int_{\bar{\mathcal{U}}_N} \int_{\mathcal{X}_N^2} \cdots \int_{\mathcal{X}_N^{k-1}} \int_{\bar{U}_{m,m+k-1,m+r}(F)} \int_{\omega_{[m+k-1,d-1]}(c+c_\psi)} \int_{U_{m+k-2}(F)\backslash GL_{m+k-2}(F)}$$
$$\bar{W}_{e'}(ag\bar{v})W_e(agu_{k-1}\cdots u_2\bar{u})|\det(g)|_F^{m+k-1-d}\bar{\xi}(u_{k-1}\cdots u_2)dg\,da\,d\bar{v}\,du_{k-1}\cdots du_2\,d\bar{u},$$

c'est-à-dire $J_N^k = C'C''J_N^{k-1}$. On a prouvé (4).

En utilisant (3) et (4), on obtient l'existence d'une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\int_{U(F)_c} (e', \pi(u)e)\bar{\xi}(u)du = C_1 \lim_{N\to\infty} J_N^1.$$

On a

$$J_N^1 = \int_{\bar{\mathcal{U}}_N} \int_{\bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)} I^m(\pi(\bar{v})e', \pi(\bar{u})e)d\bar{v}\,d\bar{u}.$$

Le même argument qui nous a dit que $\bar{v}$ restait dans un compact nous dit que $\bar{u}$ reste lui-aussi dans un compact. Pour N grand, on peut remplacer $\bar{\mathcal{U}}_N$ par $\bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)$ et on obtient

$$\int_{U(F)_c} (e', \pi(u)e)\bar{\xi}(u)du = C_1 \int_{\bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)^2} \int_{\omega_{[m+1,d-1]}(c+c_\psi)} \int_{U_m(F)\backslash GL_m(F)}$$
$$\bar{W}_{e'}(ag\bar{v})W_e(ag\bar{u})|\det(g)|_F^{m+1-d}dg\,da\,d\bar{v}\,d\bar{u}.$$

Par les changements de variables $\bar{u} \mapsto a^{-1}\bar{u}a$ et $\bar{v} \mapsto a^{-1}\bar{v}a$, et en supposant que c soit assez grand pour que e et e' soient invariants par $\omega_{[m+1,d-1]}(c+c_\psi)$, l'intégrale en a disparaît. D'autre part, $m+1-d = -2r$. On obtient

$$(6) \qquad \int_{U(F)_c} (e', \pi(u)e)\bar{\xi}(u)du = C_1 \int_{\bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)^2} \int_{U_m(F)\backslash GL_m(F)}$$
$$\bar{W}_{e'}(g\bar{v})W_e(g\bar{u})|\det(g)|_F^{-2r}dg\,d\bar{v}\,d\bar{u}.$$

Rappelons que $H = GL_m$. Donc

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho,c}(\varepsilon' \otimes e', \varepsilon \otimes e) = \int_{GL_m(F)} (\rho(h)\varepsilon', \varepsilon) \int_{U(F)_c} (e', \pi(uh)e)\bar{\xi}(u)du\,dh.$$

On a

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho,c}(\varepsilon'\otimes e',\varepsilon\otimes e)=\lim_{N\to\infty}L_N,$$

où

$$L_N=\int_{GL_m(F)}(\rho(h)\varepsilon',\varepsilon)\int_{U(F)_c}(e',\pi(uh)e)\bar{\xi}(u)\mathbf{1}_{\sigma<N}(h)du\,dh.$$

Fixons N. On peut remplacer l'intégrale intérieure par son expression (6). L'expression obtenue est absolument convergente. On effectue les changements de variables $\bar{u}\mapsto h\bar{u}h^{-1}$ puis $h\mapsto g^{-1}h$. Cela introduit un Jacobien $|\det(g^{-1}h)|_F^{-r}$. On décompose ensuite h en $u'a'k'$, avec $u'\in U_m(F)$, $a'\in A_m(F)$, $k'\in K_m$, et g en ak, avec $a\in A_m(F)$ et $k\in K_m$. La mesure devient $\delta_{B_m}(aa')^{-1}du'\,da'\,dk'\,da\,dk$. On obtient

$$L_N=C_1\int_{\bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)^2}\int_{A_m(F)^2}\int_{K_m^2}\int_{U_m(F)}(\rho(u'a'k')\varepsilon',\rho(ak)\varepsilon)\bar{W}_{e'}(ak\bar{v})W_e(u'a'k'\bar{u})$$

$$\delta_{B_m}(aa')^{-1}|\det(aa')|_F^{-r}\mathbf{1}_{\sigma<N}(k^{-1}a^{-1}u'a'k')du'\,dk'\,dk\,da'\,da\,d\bar{v}\,d\bar{u}.$$

On a $W_e(u'a'k'\bar{u})=\xi(u')W_e(a'k'\bar{u})$. Alors le même raisonnement qu'au lemme 5.2 montre que l'on peut remplacer l'intégrale sur $U_m(F)$ par une intégrale sur $U_m(F)_c$, pourvu que c soit assez grand. Posons

$$L=C_1\int_{\bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)^2}\int_{A_m(F)^2}\int_{K_m^2}\int_{U_m(F)_c}(\rho(u'a'k')\varepsilon',\rho(ak)\varepsilon)\bar{W}_{e'}(ak\bar{v})W_e(a'k'\bar{u})$$

$$\delta_{B_m}(aa')^{-1}|\det(aa')|_F^{-r}\xi(u')du'\,dk'\,dk\,da'\,da\,d\bar{v}\,d\bar{u}.$$

On a

(7) cette expression est absolument convergente.

Considérons l'intégrale

$$\int_{U_m(F)_c}|(\rho(nu'a'k')\varepsilon',\rho(ak)\varepsilon)|du'.$$

On effectue le changement de variable $u'\mapsto au'a^{-1}$. Cela introduit un jacobien $\delta_{B_m}(a)$. La nouvelle variable parcourt un ensemble qui dépend de a, mais il existe $c_0>0$ tel que cet ensemble soit inclus dans $U_m(F)_{c+c_0\sigma(a)}$. L'intégrale ci-dessus est donc essentiellement bornée par

$$\delta_{B_m}(a)\int_{U_m(F)_{c+c_0\sigma(a)}}\Xi^H(u'a^{-1}a')du'.$$

D'après **[14]** proposition 3.2, ceci est essentiellement majoré par $\sigma(a)^R\sigma(a')^R\delta_{B_m}(aa')^{1/2}$ pour un certain réel R. Revenons à l'expression L. Les variables k, k', $\bar{v}$ et $\bar{u}$ restent dans des compacts, on peut les négliger. Il reste à prouver que l'expression

$$\int_{A_m(F)^2}|W_{e'}(a)W_e(a')|\delta_{B_m}(aa')^{-1/2}|\det(aa')|_F^{-r}\sigma(a)^R\sigma(a')^R da'\,da$$

est convergente. Il suffit pour cela de reprendre le calcul de la preuve du (i) de l'énoncé. Cela prouve (7).

Grâce à (7), le théorème de convergence dominée implique $\lim_{N\to\infty} L_N = L$, d'où

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho,c}(\varepsilon'\otimes e', \varepsilon\otimes e) = L.$$

En appliquant à ρ le lemme 3.7 de [**14**], on voit que, si c est assez grand, il existe $C_2 > 0$ tel que

$$\int_{U_m(F)_c} (\rho(u'a'k')\varepsilon, \rho(ak)\varepsilon)\xi(u')du' = C_2\bar{W}_{\varepsilon'}(a'k')W_\varepsilon(ak).$$

Remplaçons le membre de gauche par celui de droite dans l'expression de L. Remplaçons ensuite $a'k'$ et ak par $g', g \in U_m(F)\backslash GL_m(F)$. On reconnaît alors

$$L = C_1C_2L_{\pi,\rho}(\varepsilon', e)\overline{L_{\pi,\rho}(\varepsilon, e')},$$

d'où l'égalité du (ii) de l'énoncé. On n'a pas été précis quant aux constantes, c'est-à-dire que l'on n'a pas vérifié qu'elles ne dépendaient pas de l'entier auxiliaire c. Cela n'a pas d'importance. Puisque l'égalité finale du (ii) de l'énoncé compare des termes indépendants de c, ou bien tous les termes intervenant dans cette égalité sont nuls, et on peut prendre C quelconque, ou bien la constante C ne peut qu'être indépendante de c. □

5.4. Non-nullité des entrelacements

Lemme 5.4. — *Soient $\pi \in$ Temp(G) et $\rho \in$ Temp(H). Alors les formes sesquilinéaires $L_{\pi,\rho}$ et $\mathcal{L}_{\pi,\rho}$ sont non nulles.*

Démonstration. — D'après le lemme précédent, il suffit de prouver l'assertion relative à $L_{\pi,\rho}$. Pour $e \in E_\pi$, $\varepsilon' \in E_\rho$ et $s \in \mathbb{C}$, posons

$$L_{\pi,\rho}(\varepsilon', e, s) = \int_{\bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)} \int_{U_m(F)\backslash H(F)} \bar{W}_{\varepsilon'}(h)W_e(h\bar{u})|\det(h)|^{s-r-1/2}dh\,d\bar{u}.$$

Le même calcul que celui de la preuve du (i) du lemme précédent montre que cette intégrale est absolument convergente pour $Re(s) > 0$. Elle définit dans ce domaine une fonction holomorphe de s et on a $L_{\pi,\rho}(\varepsilon', e) = L_{\pi,\rho}(\varepsilon', e, 1/2)$. Mais la fonction $s \mapsto L_{\pi,\rho}(\varepsilon', e, s)$ est celle étudiée par Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika. Ils montrent que pour tout s, on peut trouver ε' et e tels que $L_{\pi,\rho}(\varepsilon', e, s) \neq 0$ ([**7**] théorème 2.7(ii)). D'où la conclusion. □

5.5. Entrelacements et groupes tordus. — Soient $\tilde{\pi} \in$ Temp$(\tilde{G})$ et $\tilde{\rho} \in$ Temp$(\tilde{H})$. On a introduit un nombre $\varepsilon_\nu(\tilde{\pi}, \tilde{\rho})$ en 2.5.

Proposition 5.5. — *Soient $\varepsilon, \varepsilon' \in E_\rho$, $e, e' \in E_\pi$ et $\tilde{y} \in \tilde{H}(F)$. On a l'égalité*

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\varepsilon'\otimes\tilde{\pi}(\tilde{y})e', \tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon\otimes e) = \varepsilon_\nu(\tilde{\pi}^\vee, \tilde{\rho})\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\varepsilon'\otimes e', \varepsilon\otimes e).$$

Démonstration. — On vérifie que, pour tout $h \in H(F)$, on a l'égalité

$$\mathcal{L}_{\pi,\rho}(\varepsilon'\otimes\pi(h)e', \rho(h)\varepsilon\otimes e) = \mathcal{L}_{\pi,\rho}(\varepsilon'\otimes e', \varepsilon\otimes e).$$

Il suffit donc de prouver l'égalité de la proposition pour un élément $\tilde{y}$ bien choisi. On fixe des bases comme en 5.3 et on choisit $\tilde{y} = \boldsymbol{\theta}_m$. Le lemme 5.3 nous ramène à prouver l'égalité

$$(1) \qquad L_{\pi,\rho}(\tilde{\rho}(\boldsymbol{\theta}_m)\varepsilon, \tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}_m)e') = \overline{\varepsilon_\nu(\tilde{\pi}^\vee, \tilde{\rho})} L_{\pi,\rho}(\varepsilon, e').$$

Une telle égalité est indépendante des normalisations de $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\rho}$. On peut supposer $w(\tilde{\pi}, \psi) = w(\tilde{\rho}, \psi) = 1$. Dans ce cas, on a $W_{\tilde{\rho}(\boldsymbol{\theta}_m)\varepsilon}(h) = W_\varepsilon(\theta_m(h))$ pour tout $h \in H(F)$. Notons γ l'élément de $G(F)$ tel que $\boldsymbol{\theta}_m = \boldsymbol{\theta}_d\gamma$. On a de même

$$W_{\tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}_m)e'}(g) = W_{\tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}_d\gamma)e'}(g) = W_{\pi(\gamma)e'}(\theta_d(g)) = W_{e'}(\theta_d(g)\gamma)$$

pour tout $g \in G(F)$. Alors

$$L_{\pi,\rho}(\tilde{\rho}(\boldsymbol{\theta}_m)\varepsilon, \tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}_m)e') = \int_{\bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)} \int_{U_m(F)\backslash H(F)} \overline{W_\varepsilon(\theta_m(h))} W_{e'}(\theta_d(h\bar{u})\gamma) |\det(h)|^{-r} dh\, d\bar{u}.$$

Notons $w_m \in GL_m(F)$ la matrice de permutation antidiagonale, $D_m \in GL_m(F)$ la matrice diagonale telle que $(D_m)_{i,i} = (-1)^{m+1+i}$ et, pour $z \in F^\times$, notons $z_m \in GL_m(F)$ la matrice centrale de coefficients diagonaux z. Fixons $z \in F^\times$. On a $J_m = w_m D_m$, donc $\theta_m(h) = w_m D_m {}^t h^{-1} J_m^{-1}$. De même $\theta_d(h\bar{u})\gamma = w_d D_d {}^t h^{-1} {}^t \bar{u}^{-1} J_d^{-1}\gamma$. Effectuons le changement de variables $h \mapsto D_m z_m^{-1} h^t J_m^{-1}$. On obtient

$$L_{\pi,\rho}(\tilde{\rho}(\boldsymbol{\theta}_m)\varepsilon, \tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}_m)e') = \int_{\bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)} \int_{U_m(F)\backslash H(F)} \overline{W_\varepsilon(w_m z_m {}^t h^{-1})}$$

$$W_{e'}(w_d D_d D_m z_m {}^t h^{-1} J_m {}^t\bar{u}^{-1} J_d^{-1}\gamma) |\det(h)|_F^{-r} |z|_F^{rm} dh\, d\bar{u}.$$

On a

$$\overline{W_\varepsilon(w_m z_m {}^t h^{-1})} = \overline{\omega_\rho(z)}\, \overline{W_\varepsilon(w_m {}^t h^{-1})}.$$

On vérifie que $D_d D_m z_m$ commute à $GL_m(F)$ et que $D_d D_m z_m J_m$ normalise $\bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)$. Par le changement de variable $\bar{u} \mapsto {}^t(D_d D_m z_m J_m)\bar{u}^t(D_d D_m z_m J_m)^{-1}$, qui est de Jacobien $|z|_F^{-rm}$, on obtient

$$L_{\pi,\rho}(\tilde{\rho}(\boldsymbol{\theta}_m)\varepsilon, \tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}_m)e') = \overline{\omega_\rho(z)} \int_{\bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)} \int_{U_m(F)\backslash H(F)} \overline{W_\varepsilon(w_m {}^t h^{-1})}$$

$$W_{e'}(w_d {}^t h^{-1} {}^t \bar{u}^{-1} \gamma') |\det(h)|_F^{-r} dh\, d\bar{u},$$

où $\gamma' = D_d D_m z_m J_m J_d^{-1}\gamma = w_m z_m w_d \gamma$. Rappelons que, d'après notre construction du plongement de $\tilde{H}$ dans $\tilde{G}$, l'élément $\boldsymbol{\theta}_m$, vu comme un élément de $\tilde{G}(F)$, coïncide avec l'élément $\boldsymbol{\theta}_m$ de départ sur les vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ et avec l'élément $\tilde{\zeta}$ sur les vecteurs $v_{m+1}, \ldots, v_d$. C'est-à-dire que

$$\boldsymbol{\theta}_m(v_i) = \begin{cases} (-1)^{i+[(m+1)/2]} v^*_{m+1-i}, & \text{si } i = 1, \ldots, m, \\ (-1)^{i+m+1+r} 2\nu v^*_{m+1+d-i}, & \text{si } i = m+1, \ldots, d. \end{cases}$$

Puisque $\boldsymbol{\theta}_m = \boldsymbol{\theta}_d\gamma$, on calcule :

$$\gamma(v_i) = \begin{cases} (-1)^{m+d+[(d+1)/2]+[(m+1)/2]} v_{d-m+i}, & \text{si } i = 1, \ldots, m, \\ (-1)^{r+1+[(d+1)/2]} 2\nu v_{i-m}, & \text{si } i = m+1, \ldots, d, \end{cases}$$

puis

$$\gamma'(v_i) = \begin{cases} (-1)^{m+d+[(d+1)/2]+[(m+1)/2]} z v_i, & \text{si } i = 1,\dots,m, \\ (-1)^{r+1+[(d+1)/2]} 2\nu v_{d+m+1-i}, & \text{si } i = m+1,\dots,d. \end{cases}$$

Posons $z' = (-1)^{r+1+[(d+1)/2]}2\nu$ et choisissons

$$z = (-1)^{m+d+[(d+1)/2]+[(m+1)/2]} z' = (-1)^{r+[(m+1)/2]}2\nu.$$

Alors $\gamma' = z'_d w_0$ où w_0 est la matrice de permutation obtenue en remplaçant les constantes par 1 dans la formule ci-dessus. On a

$$W_{e'}(w_d {}^t h^{-1} {}^t \bar{u}^{-1} \gamma') = \omega_\pi(z') W_{e'}(w_d {}^t h^{-1} {}^t \bar{u}^{-1} w_0),$$

et

$$L_{\pi,\rho}(\tilde{\rho}(\boldsymbol{\theta}_m)\varepsilon, \tilde{\pi}(\boldsymbol{\theta}_m)e') = \overline{\omega_\rho(z)}\omega_\pi(z') \int_{\bar{U}_{m,m+1,m+r}(F)} \int_{U_m(F)\backslash H(F)} \overline{W_\varepsilon(w_m {}^t h^{-1})}$$

$$W_{e'}(w_d {}^t h^{-1} {}^t \bar{u}^{-1} w_0) |\det(h)|_F^{-r} \, dh \, d\bar{u}.$$

D'après [7] théorème 2.7(iii), l'intégrale ci-dessus est égale à $\omega_\rho(-1)^{d-1}\varepsilon(1/2, \pi \times \bar{\rho}, \psi) L_{\pi,\rho}(\varepsilon, e')$. Pour obtenir l'égalité (1), il reste à prouver l'égalité

$$(2) \qquad \overline{\omega_\rho((-1)^{d-1}z)}\omega_\pi(z')\varepsilon(1/2, \pi \times \bar{\rho}, \psi) = \overline{\varepsilon_\nu(\tilde{\pi}, \tilde{\rho})}.$$

On a supposé $w(\tilde{\rho}, \psi) = w(\tilde{\pi}, \psi) = 1$. D'après 2.2(1) et (2), on calcule $\overline{w(\tilde{\pi}^\vee, \psi)} = w(\tilde{\pi}, \psi^-) = \omega_\pi(-1)^{d-1}$. D'après 2.5(1),

$$\overline{\varepsilon(1/2, \pi \times \rho, \psi)} = \varepsilon(1/2, \bar{\pi} \times \bar{\rho}, \psi^-) = \omega_\pi(-1)^m \omega_\rho(-1)^d \varepsilon(1/2, \pi \times \rho, \psi).$$

Remarquons que, puisque ρ est à la fois tempérée, donc unitaire, et isomorphe à sa contragrédiente, on a $\rho \simeq \bar{\rho} \simeq \check{\rho}$. De même pour π. De plus ω_ρ et ω_π prennent leurs valeurs dans $\{\pm 1\}$. Le membre de droite de (2) vaut donc

$$\omega_\pi((-1)^{d-1+m+[m/2]}2\nu)\omega_\rho(-1)^{d+1+[d/2]}2\nu)\varepsilon(1/2, \pi \times \bar{\rho}, \psi).$$

Pour prouver (2) et la proposition, il reste à remarquer que $(-1)^{d-1}z = (-1)^{d+1+[d/2]}2\nu$ et $z' = (-1)^{d-1+m+[m/2]}2\nu$. □

5.6. Entrelacements et induction. — Soient $Q = LU_Q \in \mathcal{F}(A_d)$ et $\tau \in \mathrm{Temp}(L)$. Pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$, on définit τ_λ et la représentation induite $\pi_\lambda = \mathrm{Ind}_Q^G(\tau_\lambda)$. On la réalise dans l'espace $\mathcal{K}^G_{Q,\tau}$ qui ne dépend pas de λ. Soit $\rho \in \mathrm{Temp}(H)$. L'espace $\mathcal{K}^G_{Q,\tau}$ est muni d'un produit scalaire qui est invariant par π_λ pour tout λ, et on utilise ce produit scalaire pour définir la forme sesquilinéaire $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}$.

Lemme 5.6. — (i) *Soient $e, e' \in \mathcal{K}^G_{Q,\tau}$ et $\varepsilon, \varepsilon' \in E_\rho$. La fonction $\lambda \mapsto \mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\varepsilon' \otimes e', \varepsilon \otimes e)$ est C^∞ sur $i\mathcal{A}^*_{L,F}$.*

(ii) *Il existe une famille finie* $(\varepsilon_j)_{j=1,\dots,n}$ *d'éléments de* E_ρ, *une famille finie* $(e_j)_{j=1,\dots,n}$ *d'éléments de* $\mathcal{K}^G_{Q,\tau}$ *et une famille finie* $(\varphi_j)_{j=1,\dots,n}$ *de fonctions* C^∞ *sur* $i\mathcal{A}^*_{L,F}$ *de sorte que*

$$\sum_{j=1,\dots,n} \varphi_j(\lambda)\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\varepsilon_j\otimes e_j,\varepsilon_j\otimes e_j)=1$$

pour tout $\lambda\in i\mathcal{A}^*_{L,F}$.

La preuve est identique à celle du lemme 5.3 de **[14]**.

6. La partie spectrale de la formule intégrale

6.1. Enoncé du théorème. — On fixe une base $(v_i)_{i=1,\dots,d}$ de V et on utilise les notations introduites en 2.1. On prend pour Lévi minimal $\tilde{M}_{\min}=\tilde{A}_d$. Pour simplifier, on peut supposer que $(v_i)_{i=1,\dots,d}$ est aussi une base du réseau R sur $\mathfrak{o}_F$. On choisit pour sous-groupe compact spécial de $G(F)$ le groupe $K=K_d$.

Soient $\tilde{\rho}\in \mathrm{Temp}(\tilde{H})$ et $\tilde{f}\in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ une fonction très cuspidale. Pour tout entier $N\geq 1$, on a défini $J_N(\Theta_{\tilde{\rho}},\tilde{f})$ en 3.3. Posons

$$J_{\mathrm{spec}}(\Theta_{\tilde{\rho}},\tilde{f})=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}^{\tilde{G}}}(-1)^{a_{\tilde{L}}}|W^L||W^G|^{-1}\sum_{\mathcal{O}\in\{\Pi_{ell}(\tilde{L})\}}[i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}}:i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{L},F}]^{-1}$$
$$2^{-s(\mathcal{O})-a_{\tilde{L}'}}\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F}}\varepsilon_\nu(\tilde{\sigma}^\vee,\tilde{\rho})J^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}(\tilde{\sigma}_\lambda,\tilde{f})d\lambda.$$

On a fixé dans toute orbite $\mathcal{O}$ un point base que l'on a noté $\tilde{\sigma}$.

Théorème 6.1. — *On a l'égalité*

$$\lim_{N\to\infty}J_N(\Theta_\rho,\tilde{f})=J_{\mathrm{spec}}(\Theta_\rho,\tilde{f}).$$

6.2. Utilisation de la formule de Plancherel. — Fixons $\tilde{y}\in\tilde{H}(F)$. On définit une fonction f sur $G(F)$ par $f(g)=\tilde{f}(g\tilde{y})$. Pour $g\in G(F)$, on a l'égalité

$$J(\Theta_{\tilde{\rho}},\tilde{f},g)=\int_{H(F)}\int_{U(F)}\Theta_{\tilde{\rho}}(h\tilde{y})\tilde{f}(g^{-1}hu\tilde{y}g)\xi(u)du\,dh,$$
$$=\int_{H(F)}\int_{U(F)}\Theta_{\tilde{\rho}}(h\tilde{y})f(g^{-1}hu\theta_{\tilde{y}}(g))\xi(u)du\,dh.$$

On exprime f à l'aide de la formule de Plancherel, que l'on a reprise en **[14]** 1.6. Pour tout $g\in G(F)$, on a l'égalité

$$f(g)=\sum_{L\in\mathcal{L}(A_d)}|W^L||W^G|^{-1}\sum_{\mathcal{O}\in\{\Pi_2(L)\}}f_{\mathcal{O}}(g),$$

où

$$f_{\mathcal{O}}(g)=[i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}}:i\mathcal{A}^\vee_{L,F}]^{-1}\int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}}m(\tau_\lambda)\mathrm{trace}(\mathrm{Ind}^G_Q(\tau_\lambda,g^{-1})\mathrm{Ind}^G_Q(\tau_\lambda,f))d\lambda.$$

Rappelons que $\Pi_2(L)$ est l'ensemble des représentations irréductibles et de carré intégrable de $L(F)$. L'ensemble $\{\Pi_2(L)\}$ est celui des orbites de l'action $\lambda \mapsto \tau_\lambda$ de $i\mathcal{A}^*_{L,F}$ dans $\Pi_2(L)$. Pour tout $\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}$, on a fixé un point base τ et, pour tout L, on a fixé $Q \in \mathcal{P}(L)$. La fonction $\lambda \mapsto m(\tau_\lambda)$ est la mesure de Plancherel.

L'ensemble des orbites $\mathcal{O}$ pour lesquelles $f_\mathcal{O} \neq 0$ est fini. On fixe un tel ensemble $\{\Pi_2(L)\}_f$. Fixons un sous-groupe ouvert compact K_f de K tel que f soit biinvariante par K_f. Remarquons que toutes les fonctions $f_\mathcal{O}$ sont aussi biinvariantes par ce groupe. Pour tout $g \in M(F)K$, fixons un sous-groupe ouvert compact $K'_g \subset H(F)$ tel que $gK'_g g^{-1} \subset K_f$ et $\theta_{\tilde{y}}(g)K'_g\theta_{\tilde{y}}(g^{-1}) \subset K_f$. Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}_\rho^{K'_g}$ du sous-espace des invariants $E_\rho^{K'_g}$. Alors, pour $g \in M(F)K$, on a l'égalité

$$J(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}, g) = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}_\rho^{K'_g}} \int_{H(F)} (\varepsilon, \tilde{\rho}(h\tilde{y})\varepsilon) \int_{U(F)} \sum_{L \in \mathcal{L}(A_d)} |W^L||W^G|^{-1}$$

$$\sum_{\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}_f} f_\mathcal{O}(g^{-1}hu\theta_{\tilde{y}}(g))\xi(u)du\, dh.$$

Pour $\varepsilon \in E_\rho$, $L \in \mathcal{L}(A_d)$, $\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}$ et $g \in G(F)$, posons

$$J_{L,\mathcal{O}}(\varepsilon, f, g) = \int_{H(F)U(F)} (\varepsilon, \tilde{\rho}(h\tilde{y})\varepsilon) f_\mathcal{O}(g^{-1}hu\theta_{\tilde{y}}(g))\xi(u)du\, dh.$$

Comme en **[14]** 6.2(2), on prouve que cette expression est absolument convergente. Pour $g \in M(F)K$, on a donc

(1) $$J(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}, g) = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}_\rho^{K'_g}} \sum_{L \in \mathcal{L}(A_d)} |W^L||W^G|^{-1} \sum_{\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}_f} J_{L,\mathcal{O}}(\varepsilon, f, g).$$

6.3. Apparition des entrelacements. — Fixons $L \in \mathcal{L}(A_d)$ et $\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}_f$. On a

(1) il existe $c_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $c \geq c_0$, tout $g \in M(F)K$ et tout $h \in H(F)$, on ait l'égalité

$$\int_{U(F)} f_\mathcal{O}(g^{-1}hu\theta_{\tilde{y}}(g))\xi(u)du = \int_{U(F)_c} f_\mathcal{O}(g^{-1}hu\theta_{\tilde{y}}(g))\xi(u)du.$$

C'est la même preuve qu'au lemme 5.2, en utilisant le fait que A commute à M.

On fixe $\tau \in \mathcal{O}$ et $Q \in \mathcal{P}(L)$. On pose $\pi_\lambda = \mathrm{Ind}_Q^G(\tau_\lambda)$ pour tout $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$. On réalise ces représentations dans l'espace $\mathcal{K}^G_{Q,\tau}$. On fixe une base orthonormée $\mathcal{B}_\mathcal{O}^{K_f}$ du sous-espace $(\mathcal{K}^G_{Q,\tau})^{K_f}$. Pour $g \in G(F)$, on a l'égalité

$$f_\mathcal{O}(g) = [i\mathcal{A}_\mathcal{O}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1}$$

$$\sum_{e \in \mathcal{B}_\mathcal{O}^{K_f}} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} m(\tau_\lambda)(e, \pi_\lambda(g^{-1})\pi_\lambda(f)e)d\lambda.$$

Pour $\varepsilon \in E_\rho$, $g \in M(F)K$ et $c \geq c_0$, on a

$$J_{L,\mathcal{O}}(\varepsilon, f, g) = [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1} \int_{H(F)U(F)_c} (\varepsilon, \tilde{\rho}(h\tilde{y})\varepsilon)$$

$$\sum_{e \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}} \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} m(\tau_\lambda)(\pi_\lambda(\theta_{\tilde{y}}(g))e, \pi_\lambda((hu)^{-1}g)\pi_\lambda(f)e)\xi(u) d\lambda\, du\, dh.$$

En changeant h et u en leurs inverses, on obtient

$$J_{L,\mathcal{O}}(\varepsilon, f, g) = [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1} \int_{H(F)U(F)_c} (\rho(h)\varepsilon, \tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon)$$

$$\sum_{e \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}} \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} m(\tau_\lambda)(\pi_\lambda(\theta_{\tilde{y}}(g))e, \pi_\lambda(hug)\pi_\lambda(f)e)\bar{\xi}(u) d\lambda\, du\, dh.$$

Pour $g \in M(F)K$ fixé, on a une majoration

$$|(\pi_\lambda(\theta_{\tilde{y}}(g))e, \pi_\lambda(hug)\pi_\lambda(f)e)| \ll \Xi^G(hu)$$

pour tous λ, h et u. Grâce à 4.1(3), l'expression ci-dessus est absolument convergente. On peut permuter les intégrales :

$$J_{L,\mathcal{O}}(\varepsilon, f, g) = [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1} \sum_{e \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}} \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} m(\tau_\lambda)$$

$$\int_{H(F)U(F)_c} (\rho(h)\varepsilon, \tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon)(\pi_\lambda(\theta_{\tilde{y}}(g))e, \pi_\lambda(hug)\pi_\lambda(f)e)\bar{\xi}(u) d\lambda\, du\, dh.$$

L'intégrale intérieure est $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho,c}(\varepsilon \otimes \pi_\lambda(\theta_{\tilde{y}}(g))e, \tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon \otimes \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e)$. Quitte à accroître c_0, c'est aussi $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\varepsilon \otimes \pi_\lambda(\theta_{\tilde{y}}(g))e, \tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon \otimes \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e)$ (l'utilisation directe du lemme 5.2 nous fournit pour chaque λ un c_0 convenable ; comme en (1) ci-dessus, on voit qu'en fait, on peut choisir c_0 indépendant de λ). D'où

$$(2) \qquad J_{L,\mathcal{O}}(\varepsilon, f, g) = [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1}$$

$$\sum_{e \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}} \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} m(\tau_\lambda)\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\varepsilon \otimes \pi_\lambda(\theta_{\tilde{y}}(g))e, \tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon \otimes \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e) d\lambda.$$

On fixe des familles $(\varepsilon_j)_{j=1,\ldots,n}$, $(e_j)_{j=1,\ldots,n}$ et $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,n}$ vérifiant le lemme 5.6(ii). Pour $e \in \mathcal{K}_{Q,\tau}^G$, $g \in M(F)K$ et $\lambda \in i\mathcal{A}_{L,F}^*$, posons

$$X_\lambda(e, g) = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}_\rho^{K_g'}} \mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\varepsilon \otimes e', \underline{\varepsilon} \otimes \underline{e}),$$

où $\underline{\varepsilon} = \tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon$, $e' = \pi_\lambda(\theta_{\tilde{y}}(g))e$ et $\underline{e} = \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e$. Introduisons une forme sesquilinéaire $L_{\pi_\lambda,\rho}$ comme en 5.3, soit $C_\lambda > 0$ la constante telle que le (ii) du lemme 5.3 soit vérifiée. On a

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\varepsilon \otimes e', \underline{\varepsilon} \otimes \underline{e}) = C_\lambda \overline{L_{\pi_\lambda,\rho}(\underline{\varepsilon}, e')} L_{\pi_\lambda,\rho}(\varepsilon, \underline{e}),$$

tandis que la propriété du lemme 5.6(ii) s'écrit

$$1=\sum_{j=1,\dots,n}C_\lambda\varphi_j(\lambda)\overline{L_{\pi_\lambda,\rho}(\varepsilon_j,e_j)}L_{\pi_\lambda,\rho}(\varepsilon_j,e_j).$$

Par multiplication, on obtient

$$X_\lambda(e,g)=\sum_{j=1,\dots,n}\varphi_j(\lambda)X_{\lambda,j}(e,g),$$

où

$$X_{\lambda,j}(e,g)=\sum_{\varepsilon\in\mathcal{B}_\rho^{K'_g}}C_\lambda^2\overline{L_{\pi_\lambda,\rho}(\underline{\varepsilon},e')}L_{\pi_\lambda,\rho}(\varepsilon,\underline{e})\overline{L_{\pi_\lambda,\rho}(\varepsilon_j,e_j)}L_{\pi_\lambda,\rho}(\varepsilon_j,e_j).$$

Fixons j. Le produit d'un C_λ et des deux facteurs extrêmes ci-dessus est égal à

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\varepsilon_j\otimes e',\underline{\varepsilon}\otimes e_j).$$

Le produit d'un C_λ et des deux facteurs restants est égal à

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}(\varepsilon\otimes e_j,\varepsilon_j\otimes\underline{e}).$$

Supposons $g\in M(F)K$. Par un argument déjà utilisé plusieurs fois, on peut fixer c_0 indépendant de g et λ de sorte que l'on puisse remplacer $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho}$ par $\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho,c}$ dans ces expressions, pourvu que $c\geq c_0$. On obtient

$$X_{\lambda,j}(e,g)=\sum_{\varepsilon\in\mathcal{B}_\rho^{K'_g}}\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho,c}(\varepsilon\otimes e_j,\varepsilon_j\otimes\underline{e})\int_{H(F)U(F)_c}(\rho(h)\varepsilon_j,\underline{\varepsilon})(e',\pi_\lambda(hu)e_j)\bar{\xi}(u)du\,dh,$$

puis

$$(3)\qquad X_{\lambda,j}(e,g)=\int_{H(F)U(F)_c}(\rho(h)\varepsilon_j,\varepsilon^\sharp)(e',\pi_\lambda(hu)e_j)\bar{\xi}(u)du\,dh,$$

où

$$\varepsilon^\sharp=\sum_{\varepsilon\in\mathcal{B}_\rho^{K'_g}}\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho,c}(\varepsilon\otimes e_j,\varepsilon_j\otimes\underline{e})\underline{\varepsilon}.$$

Ecrivons

$$\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho,c}(\varepsilon\otimes e_j,\varepsilon_j\otimes\underline{e})=\int_{H(F)}(\rho(h')\varepsilon,\varepsilon_j)\Lambda(h')dh',$$

où

$$\Lambda(h')=\int_{U(F)_c}(e_j,\pi_\lambda(h'u')\underline{e})\bar{\xi}(u')du'.$$

Pour tout $\varepsilon''\in E_\rho$, on a

$$(\varepsilon'',\varepsilon^\sharp)=\sum_{\varepsilon\in\mathcal{B}_\rho^{K'_g}}\mathcal{L}_{\pi_\lambda,\rho,c}(\varepsilon\otimes e_j,\varepsilon_j\otimes\underline{e})(\varepsilon'',\underline{\varepsilon})=\int_{H(F)}\sum_{\varepsilon\in\mathcal{B}_\rho^{K'_g}}(\varepsilon,\rho(h'^{-1})\varepsilon_j)(\varepsilon'',\underline{\varepsilon})\Lambda(h')dh'$$

$$=\sum_{H(F)/K'_g}\sum_{\varepsilon\in\mathcal{B}_\rho^{K'_g}}(\varepsilon,\varepsilon_j(h'))(\varepsilon'',\underline{\varepsilon}),$$

où

$$\varepsilon_j(h') = \int_{K'_g} \rho(k^{-1}h'^{-1})\varepsilon_j\Lambda(h'k)dk.$$

La fonction Λ est invariante à droite par K'_g et $\varepsilon_j(h')$ est invariant par K'_g. Donc

$$\varepsilon_j(h') = \sum_{\varepsilon\in\mathcal{B}_\rho^{K'_g}} (\varepsilon, \varepsilon_j(h'))\varepsilon,$$

et

$$\tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon_j(h')) = \sum_{\varepsilon\in\mathcal{B}_\rho^{K'_g}} (\varepsilon, \varepsilon_j(h'))\underline{\varepsilon}.$$

On obtient alors

$$(\varepsilon'', \varepsilon^\sharp) = \sum_{H(F)/K'_g} (\varepsilon'', \tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon_j(h')) = \int_{H(F)} (\varepsilon'', \tilde{\rho}(\tilde{y}h'^{-1})\varepsilon_j)\Lambda(h')dh'$$

$$= \int_{H(F)U(F)_c} (\rho(\theta_{\tilde{y}}(h')\varepsilon'', \tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon_j)(e_j, \pi_\lambda(h'u')\underline{e})\bar{\xi}(u')du'\,dh'.$$

Reportons cette expression dans (3). On obtient

$$(4) \qquad X_{\lambda,j}(e,g) = \int_{H(F)U(F)_c}\int_{H(F)U(F)_c} (\rho(\theta_{\tilde{y}}(h')h)\varepsilon_j, \tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon_j)$$
$$(e_j, \pi_\lambda(h'u'g)\pi_\lambda(f)e)(\pi_\lambda(\theta_{\tilde{y}}(g))e, \pi_\lambda(hu)e_j)\bar{\xi}(u)\bar{\xi}(u')du'\,dh'\,du\,dh.$$

On a

(5) cette expression est absolument convergente.

En effet, pour g fixé, elle est majorée en valeur absolue par

$$\int_{H(F)U(F)_c}\int_{H(F)U(F)_c} \Xi^G(h'u')\Xi^H(\theta_{\tilde{y}}(h')h)\Xi^G(hu)du'\,dh'\,du\,dh,$$

qui est convergente d'après 4.1(4).

Pour deux entiers $c, c' \in \mathbb{N}$ et pour $g \in M(F)K$, posons

$$X_{\lambda,j,c,c'}(e,g) = \int_{H(F)U(F)_c}\int_{H(F)U(F)_{c'}} (\rho(h)\varepsilon_j, \tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon_j)$$
$$(e_j, \pi_\lambda(h'u'g)\pi_\lambda(f)e))(\pi_\lambda(\theta_{\tilde{y}}(h'u'g))e, \pi_\lambda(hu)e_j)\bar{\xi}(u)du'\,dh'\,du\,dh.$$

Cette expression est absolument convergente comme la précédente. On a

(6) il existe c_0 indépendant de N et λ tel que, pour $g \in M(F)K$, $X_{\lambda,j,c,c'}(e,g)$ ne dépende pas de c et c', pourvu que $c \geq c_0$ et $c' \geq c_0$; pour de tels c, c', on a l'égalité $X_{\lambda,j}(e,g) = X_{\lambda,j,c,c'}(e,g)$.

Le procédé habituel montre qu'il existe c_0 tel que, pour $c \geq c_0$ et $g \in M(F)K$, $X_{\lambda,j,c,c'}(e,g)$ ne dépend pas de c. Soient $c, c' \geq c_0$. Alors $X_{\lambda,j,c,c'}(e,g) = X_{\lambda,j,c',c'}(e,g)$. Par les changements de variables $h \mapsto \theta_{\tilde{y}}(h')h$, puis $u \mapsto h^{-1}\theta_{\tilde{y}}(u')hu$, $X_{\lambda,j,c',c'}(e,g)$ est égal au membre de droite de (4) où l'on a remplacé c par c'. Mais celui-ci ne dépend pas de c'. Cela prouve (6).

Pour $g \in M(F)K$, posons

$$J_{L,\mathcal{O}}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}, g) = [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^{\vee} : i\mathcal{A}_{L,F}^{\vee}]^{-1} \sum_{e \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}} \sum_{j=1,\dots,n} \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^{*}} m(\tau_\lambda)\varphi_j(\lambda) X_{\lambda,j,c,c'}(e,g) d\lambda,$$

où $c, c' \geq c_0$, c_0 vérifiant (6). En revenant à la formule (2) et en rassemblant les calculs ci-dessus, on a montré :

(7) on a l'égalité

$$\sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}_{\rho}^{K_N}} J_{L,\mathcal{O}}(\varepsilon, f, g) = J_{L,\mathcal{O}}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}, g)$$

pour tout $g \in M(F)K$.

6.4. Une première approximation. — D'après 6.2(1) et 6.3(7), on a l'égalité

$$J(\Theta_{\tilde{\rho}}, f, g) = \sum_{L \in \mathcal{L}(A_d)} |W^L||W^G|^{-1} \sum_{\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}_f} J_{L,\mathcal{O}}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}, g)$$

pour tout $g \in M(F)K$. Soit $N \geq 1$. Par définition, $J_N(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f})$ est l'intégrale de $J(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}, g)\kappa_N(g)$ sur $g \in H(F)U(F)\backslash G(F)$ ou, ce qui revient au même, l'intégrale de $J(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}, mk)\kappa_N(m)\delta_P(m)^{-1}$ sur $m \in H(F)\backslash M(F)$ et $k \in K$. C'est-à-dire

$$J_N(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) = \int_{H(F)/M(F)} \int_K \sum_{L \in \mathcal{L}(A_d)} |W^L||W^G|^{-1}$$

$$\sum_{\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}_f} J_{L,\mathcal{O}}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}, mk)\kappa_N(m)\delta_P(m)^{-1} dk\, dm.$$

Soient $L \in \mathcal{L}(A_d)$ et $\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}_f$. Reprenons les notations du paragraphe précédent. Soit c_0 vérifiant la relation (6) de ce paragraphe et soit $c \geq c_0$. Pour tout entier $C \in \mathbb{N}$, posons

$$J_{L,\mathcal{O},N,C}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) = [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^{\vee} : i\mathcal{A}_{L,F}^{\vee}]^{-1} \sum_{e \in \mathcal{B}_{\mathcal{O}}^{K_f}} \sum_{j=1,\dots,n} \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^{*}} m(\tau_\lambda)\varphi_j(\lambda) \int_{H(F)U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma < C\log(N)}(hu)$$

$$(\rho(h)\varepsilon_j, \tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon_j)\bar{\xi}(u) \int_{G(F)} (e_j, \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f)e))(\pi_\lambda(\theta_{\tilde{y}}(g))e, \pi_\lambda(hu)e_j)\kappa_N(g) dg\, du\, dh\, d\lambda.$$

Lemme 6.2. — (i) *Cette expression est absolument convergente.*

(ii) *Il existe C tel que l'on ait la majoration*

$$|J_N(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) - \sum_{L \in \mathcal{L}(A_d)} |W^L||W^G|^{-1} \sum_{\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}_f} J_{L,\mathcal{O},N,C}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f})| \ll N^{-1}$$

pour tout entier $N \geq 1$.

La preuve est la même que celle du lemme 6.4 de **[14]**, en utilisant les majorations 4.1(5), (6) et (7).

On fixe C vérifiant l'assertion (ii) ci-dessus. Dans les paragraphes suivants et jusqu'en 6.9, on fixe $L \in \mathcal{L}(A_d)$ et $\mathcal{O} \in \{\Pi_2(L)\}_f$.

6.5. Changement de fonction de troncature. — Notons Δ l'ensemble des racines simples de A_d dans $\mathfrak{u}_d$. A toute racine $\alpha \in \Delta$ sont associées une coracine $\check{\alpha}$, un poids $\varpi_{\check{\alpha}}$ et un copoids ϖ_α. Notons $\tilde{\Delta}$ l'ensemble des restrictions à $\tilde{A}_d$ des éléments de Δ. Posons simplement $\theta = \theta_d$. L'ensemble $\tilde{\Delta}$ est en bijection avec l'ensemble des orbites dans Δ pour l'action de θ. Notons $\alpha \mapsto (\alpha)$ cette bijection et notons $n(\alpha)$ le nombre d'éléments de l'orbite (α). On a alors l'égalité

$$\alpha = n(\alpha)^{-1} \sum_{\beta \in (\alpha)} \beta$$

dans $\mathcal{A}^*_{A_d}$. On utilise des égalités analogues pour définir $\check{\alpha}$, $\varpi_{\check{\alpha}}$ et ϖ_α. Par exemple

$$\varpi_{\check{\alpha}} = n(\alpha)^{-1} \sum_{\beta \in (\alpha)} \varpi_{\check{\beta}}.$$

Notons $\mathcal{A}^+_{A_d}$ le sous-ensemble des $\zeta \in \mathcal{A}_{A_d}$ tels que $\alpha(\zeta) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Fixons un réel δ tel que $0 < \delta < 1$. Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des $Y \in \mathcal{A}^+_{A_d} \cap (\mathcal{A}_{\tilde{A}_d,F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ tels que

$$\inf\{\alpha(Y); \alpha \in \tilde{\Delta}\} \geq \delta sup\{\alpha(Y); \alpha \in \tilde{\Delta}\}.$$

Dans ce domaine, les fonctions $Y \mapsto \inf\{\alpha(Y); \alpha \in \tilde{\Delta}\}$, $Y \mapsto sup\{\alpha(Y); \alpha \in \tilde{\Delta}\}$ et $Y \mapsto |Y|$ sont équivalentes. Soit $Y \in \mathcal{D}$. Notons $\zeta \mapsto \varphi^+(\zeta, Y)$ la fonction caractéristique du sous-ensemble des $\zeta \in \mathcal{A}_{A_d}$ qui vérifient les deux conditions :

- $\alpha(\zeta) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$;
- $\varpi_{\check{\alpha}}(Y - \zeta) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \tilde{\Delta}$.

Remarquons que ce sous-ensemble est compact modulo $\mathcal{A}_G$. Notons $g \mapsto \tilde{u}(g, Y)$ la fonction caractéristique de l'ensemble des $g \in G(F)$ pour lesquels il existe $k, k' \in K$ et $a \in A_d(F)$ de sorte que $g = kak'$ et $\varphi^+(H_{A_d}(a), Y) = 1$.

De même que l'on a défini la fonction f, définissons une fonction f' sur $G(F)$ par $f'(g) = \tilde{f}(g\boldsymbol{\theta}_d)$. Fixons un sous-groupe ouvert compact $K_{f'}$ de K tel que f' soit biinvariante par $K_{f'}$, $K_{f'}$ soit distingué dans K et invariant par θ. Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}_\theta^{K_{f'}}$ du sous-espace des invariants $(\mathcal{K}^G_{Q,\tau})^{K_{f'}}$. Fixons $e', e'' \in \mathcal{K}^G_{Q,\tau}$ et une fonction φ sur $i\mathcal{A}^*_{L,F}$, que l'on suppose C^∞. Pour $e \in \mathcal{K}^G_{Q,\tau}$, $g, g' \in G(F)$ et $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$, posons

$$\Phi(e, g, g', \lambda) = (\pi_\lambda(\theta(g))e, \pi_\lambda(g')e')(e'', \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f')e).$$

Posons

$$\Phi_N(g') = \sum_{e \in \mathcal{B}_\theta^{K_{f'}}} \int_{G(F)} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} m(\tau_\lambda)\varphi(\lambda)\Phi(e, g, g', \lambda)\kappa_N(g)\, d\lambda\, dg,$$

$$\Phi_Y(g') = \sum_{e \in \mathcal{B}_\theta^{K_{f'}}} \int_{G(F)} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} m(\tau_\lambda)\varphi(\lambda)\Phi(e, g, g', \lambda)\tilde{u}(g, Y)\, d\lambda\, dg.$$

La première expression est absolument convergente : cela résulte de la convergence de

$$(1) \qquad \int_{G(F)} \kappa_N(g)\Xi^G(g)^2 dg,$$

cf. 4.1(1). Montrons que la seconde est convergente dans l'ordre indiqué. On peut l'écrire

$$\Phi_Y(g') = \sum_{e\in\mathcal{B}_\theta^{K_f'}} \int_{A_G(F)\backslash G(F)} \tilde{u}(g,Y) \int_{A_G(F)} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} m(\tau_\lambda)\varphi(\lambda)\Phi(e,zg,g',\lambda)\,d\lambda\,dz\,dg.$$

Parce que la fonction $g \mapsto \tilde{u}(g,Y)$ est à support compact modulo $A_G(F)$ et que la fonction à intégrer est localement constante, l'intégrale extérieure est une somme finie. Il suffit de prouver la convergence dans l'ordre de la double intégrale intérieure. Notons ω la restriction à $A_G(F)$ du caractère central de τ. On a l'égalité

$$\Phi(e,zg,g',\lambda) = \omega(z\theta(z)^{-1})e^{\lambda(H_G(z)-H_G(\theta(z)))}\Phi(e,g,g',\lambda)$$

pour tous z, g, λ. Ainsi, l'intégrale intérieure en λ définit une fonction de z qui, au facteur $\omega(z\theta(z)^{-1})$ près, est une transformée de Fourier partielle de la fonction que l'on a intégrée, évaluée au point $H_G(z) - H_G(\theta(z))$. Puisque la fonction de λ est C^∞, cette transformée de Fourier est à décroissance rapide. On obtient une majoration

$$\left|\int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} m(\tau_\lambda)\varphi(\lambda)\Phi(e,zg,g',\lambda)\,d\lambda\right| \ll (1+|H_G(z)-H_G(\theta(z))|)^{-r}$$

pour tout réel r. Mais la fonction $H \mapsto H - \theta(H)$ est injective sur $\mathcal{A}_G$. On a donc aussi une majoration

$$(1+|H_G(z)-H_G(\theta(z))|)^{-r} \ll \sigma(z)^{-r}.$$

Or l'intégrale

$$\int_{A_G(F)} \sigma(z)^{-r}\,dz$$

est convergente pour r assez grand. L'intégrabilité cherchée en résulte.

Proposition 6.3. — *Soient R et η deux réels, avec $0 < \eta < 1$. Il existe des réels $c_1, c_2 > 0$ tels que l'on ait la majoration*

$$|\Phi_N(g') - \Phi_Y(g')| \ll N^{-R}$$

pour tout $N \geq 2$, tout $g' \in G(F)$ tel que $\sigma(g') \leq C\log(N)$ et tout $Y \in \mathcal{D}$ vérifiant les inégalités $c_1N^\eta \leq |Y| \leq c_2N$.

Démonstration. — Montrons d'abord :

(2) il existe $R_1 \geq 0$ tel que

$$|\Phi_N(g')| \ll N^{R_1} \text{ et } |\Phi_Y(g')| \ll N^{R_1}|Y|^{R_1}$$

pour tout $N \geq 1$, tout $Y \in \mathcal{D}$ et tout $g' \in G(F)$ tel que $\sigma(g') \leq C\log(N)$.

Pour $e \in \mathcal{K}^G_{Q,\tau}$, on a la majoration

$$|\Phi(e,g,g',\lambda)| \ll \Xi^G(g'^{-1}g)\Xi^G(g)$$

pour tous λ, g, g'. Grâce à **[14]** 3.3(5), il existe $R_2 \geq 0$ tel que

$$\Xi^G(g'^{-1}g) \ll \exp(R_2\sigma(g'))\Xi^G(g).$$

D'après l'hypothèse sur g', on en déduit

$$|\Phi(e,g,g',\lambda)| \ll N^{CR_2}\Xi^G(g)^2.$$

D'après 4.1(1), il existe $R_3 \geq 0$ tel que l'intégrale (1) soit essentiellement majorée par N^{R_3}. On en déduit l'assertion (2) pour $\Phi_N(g')$.

Pour prouver l'assertion concernant la fonction $\Phi_Y(g')$, on reprend le raisonnement montrant la convergence de cette expression. On peut écrire

$$\Phi_Y(g') = \sum_{e\in\mathcal{B}_\theta^{K_{f'}}} \int_{A_G(F)\backslash G(F)} \tilde{u}(g,Y) \int_{A_G(F)} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}/i\mathcal{A}^*_{G,F}}$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{G,F}} m(\tau_{\lambda+\xi})\varphi(\lambda+\xi)\Phi(e,zg,g',\lambda+\xi)\,d\xi\,d\lambda\,dz\,dg.$$

On peut identifier $i\mathcal{A}^*_{L,F}/i\mathcal{A}^*_{G,F}$ à $i\mathcal{A}^{G,*}_L/(i\mathcal{A}^{G,*}_L \cap (i\mathcal{A}^\vee_{L,F} + i\mathcal{A}^*_G))$. On peut identifier $A_G(F)\backslash G(F)$ à un ensemble de représentants sur lequel la fonction H_G est bornée. On peut aussi décomposer f' en $f' = \sum_{X\in\mathcal{X}} f'_X$, où $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble fini de $\mathcal{A}_{G,F}$ et f'_X est une fonction dont le support est contenu dans l'ensemble des $x \in G(F)$ tels que $H_G(x) = X$. On a alors

$$\Phi(e,zg,g',\lambda+\xi) = \omega(z\theta(z)^{-1}) \sum_{X\in\mathcal{X}} e^{\xi(B(z,g,g',X))}(\pi_\lambda(\theta(g))e, \pi_\lambda(g')e')(e'', \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f'_X)e),$$

où $B(z,g,g',X) = H_G(g') + H_G(g) - H_G(\theta(g)) + X + H_G(z) - H_G(\theta(z))$. Par inversion de Fourier, on a une majoration

$$\left|\int_{i\mathcal{A}^*_{G,F}} m(\tau_{\lambda+\xi})\varphi(\lambda+\xi)e^{\xi(B(z,g,g',X))}\,d\xi\right| \ll$$

$$(1 + |H_G(g') + H_G(g) - H_G(\theta(g)) + X + H_G(z) - H_G(\theta(z))|)^{-r}$$

pour tout réel r, et ce dernier terme est lui-même essentiellement majoré par

$$(1 + |H_G(g')|)^r(1 + |H_G(z) - H_G(\theta(z))|)^{-r},$$

puis par $\log(N)^r\sigma(z)^{-r}$. Alors $\Phi_Y(g')$ est majoré par une somme finie d'expressions

$$\log(N)^r \int_{A_G(F)\backslash G(F)} \tilde{u}(g,Y) \int_{A_G(F)} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}/i\mathcal{A}^*_{G,F}} \sigma(z)^{-r}$$

$$|(\pi_\lambda(\theta(g))e, \pi_\lambda(g')e')(e'', \pi_\lambda(g)\pi_\lambda(f'_X)e)|\,d\lambda\,dz\,dg.$$

Par les mêmes calculs utilisés ci-dessus pour majorer $\Phi_N(g')$, ceci est essentiellement majoré par

$$\log(N)^r N^{R_4}\left(\int_{A_G(F)\backslash G(F)} \Xi^G(g)^2 \tilde{u}(g,Y)\,dg\right)\left(\int_{A_G(F)} \sigma(z)^{-r}\,dz\right)$$

pour un réel R_4 convenable. L'intégrale en g est majorée par $|Y|^{R_5}$ pour un réel R_5 convenable. Il suffit de fixer r tel que l'intégrale en z soit convergente pour obtenir la majoration (2) pour $\Phi_Y(g')$.

On note $A_d(F)^+$ l'ensemble des $a \in A_d(F)$ tels que $\alpha(H_{A_d}(a)) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$. On définit une fonction D sur cet ensemble par

$$D(a) = \mathrm{mes}(KaK)\mathrm{mes}(K \cap A_d(F))^{-1}.$$

On a la formule d'intégration

$$\int_{G(F)} \phi(g)dg = \int_K \int_K \int_{A_d(F)^+} D(a)\phi(k_1 a k_2)da\,dk_1\,dk_2$$

pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty(G(F))$. De Y se déduit comme en 3.6 une famille (G, A_d) orthogonale $\mathcal{Y}$. Pour tout $Q_1 = L_1U_1 \in \mathcal{F}(A_d)$, on en déduit des fonctions $\zeta \mapsto \sigma_{A_d}^{Q_1}(\zeta, \mathcal{Y})$ et $\zeta \mapsto \tau_{Q_1}(\zeta - Y_{Q_1})$ sur $\mathcal{A}_{A_d}$. Tous ces termes ont été définis par Arthur. En fait, nous ne les utiliserons que dans le cas où $B_d \subset Q_1$ et $\zeta \in \mathcal{A}_{A_d}^+$. Dans ce cas, on a

$$\sigma_{A_d}^{Q_1}(\zeta, \mathcal{Y}) = 1 \iff \varpi_\alpha(Y^{L_1} - \zeta^{L_1}) \geq 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Delta^{L_1},$$

$$\tau_{Q_1}(\zeta - Y_{Q_1}) = 1 \iff \alpha(\zeta_{L_1} - Y_{L_1}) > 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Delta - \Delta^{L_1},$$

où, pour tout ζ, on note ζ^{L_1} et ζ_{L_1} les projections orthogonales de ζ sur $\mathcal{A}_{A_d}^{L_1}$, resp. $\mathcal{A}_{L_1}$, et Δ^{L_1} est l'ensemble des racines simples de A_d dans $\mathfrak{u}_d \cap \mathfrak{l}_1$. On a l'égalité

$$\sum_{Q_1 \in \mathcal{F}(A_d), B_d \subset Q_1} \sigma_{A_d}^{Q_1}(\zeta, \mathcal{Y})\tau_{Q_1}(\zeta - Y_{Q_1}) = 1$$

pour tout $\zeta \in \mathcal{A}_{A_d}^+$. Pour $Q_1 \in \mathcal{F}(A_d)$ contenant B_d, posons

$$\Phi_{N,Y,Q_1}(g') = \sum_{e \in \mathcal{B}_\theta^{K_{f'}}} \int_K \int_K \int_{A_d(F)^+} \int_{i\mathcal{A}_{L,F}^*} m(\tau_\lambda)\varphi(\lambda)$$

$$\Phi(e, k_1ak_2, g', \lambda)\kappa_N(k_1ak_2)D(a)\sigma_{A_d}^{Q_1}(H_{A_d}(a), \mathcal{Y})\tau_{Q_1}(H_{A_d}(a) - Y_{Q_1})\,d\lambda\,da\,dk_1\,dk_2.$$

Définissons de même $\Phi_{Y,Q_1}(g')$ en remplaçant la fonction $\kappa_N(k_1ak_2)$ par $\tilde{u}(k_1ak_2, Y)$. Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$\Phi_N(g') = \sum_{Q_1 \in \mathcal{F}(A_d), B_d \subset Q_1} \Phi_{N,Y,Q_1}(g'),$$

$$\Phi_Y(g') = \sum_{Q_1 \in \mathcal{F}(A_d), B_d \subset Q_1} \Phi_{Y,Q_1}(g').$$

On va montrer :

(3) il existe $c_2 > 0$ tel que, si $|Y| \leq c_2 N$, on a la majoration $|\Phi_{N,Y,G}(g') - \Phi_{Y,G}(g')| \ll N^{-R}$ pour tout $N \geq 1$ et tout $g' \in G(F)$ tel que $\sigma(g') \leq C\log(N)$;

(4) il existe $c_1, c_2 > 0$ tel que, si $c_1 N^{\eta} \leq |Y| \leq c_2 N$, on a les majorations

$$|\Phi_{N,Y,Q_1}(g')| \ll N^{-R} \text{ et } |\Phi_{Y,Q_1}(g')| \ll N^{-R}$$

pour tout $N \geq 1$, tout g' comme ci-dessus et tout $Q_1 \in \mathcal{F}(A_d)$ tel que $B_d \subset Q_1 \subsetneq G$.

Cela démontrera la proposition.

Prouvons (3). Le support de la fonction $\zeta \mapsto \sigma_{A_d}^G(\zeta, \mathcal{Y})$ sur $\mathcal{A}_{A_d}^+$ est contenu dans celui de la fonction $\zeta \mapsto \varphi^+(\zeta, Y)$. On peut donc supprimer le terme $\tilde{u}(k_1 a k_2, Y)$ dans la définition de $\Phi_{Y,G}(g')$. La fonction $\Phi_{N,Y,G}(g') - \Phi_{Y,G}(g')$ est donc définie par la même intégrale que $\Phi_{N,Y,G}(g')$, où on remplace $\kappa_N(k_1 a k_2, Y)$ par $\kappa_N(k_1 a k_2, Y) - 1$. On vérifie qu'il existe $c_3 > 0$ tel que le support de κ_N contienne l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $\sigma(g) \leq c_3 N$. On peut donc remplacer $\kappa_N(k_1 a k_2, Y) - 1$ par la fonction caractéristique de l'ensemble des a tels que $\sigma(a) > c_3 N$. La condition $\sigma_{A_d}^G(H_{A_d}(a), \mathcal{Y}) = 1$ entraîne une majoration $|H_{A_d}^G(a)| \ll |Y|$. Pour c_2 assez petit, la double condition ci-dessus entraîne $|H_G(a)| > c_4 N$, pour un certain $c_4 > 0$. On peut alors reprendre la preuve de l'assertion (2) concernant $\Phi_Y(g')$. On obtient une majoration

$$|\Phi_{N,Y,G}(g') - \Phi_{Y,G}(g')| \ll \log(N)^r N^{R_4} \int_{A_G(F)\backslash A_d(F)^+} \Xi^G(a)^2 \sigma_{A_d}(H_{A_d}(a), \mathcal{Y}) D(a)\, da$$

$$\int_{z \in A_G(F); |H_G(z)| > c_4 N - c_5} \sigma(z)^{-r}\, dz,$$

où c_5 est un majorant de la fonction H_G sur un ensemble de représentants du quotient $A_G(F)\backslash A_d(F)$. La première intégrale est majorée par

$$\int_{g \in A_G(F)\backslash G(F); \sigma(g) \leq c_6 |Y|} \Xi(g)^2\, dg$$

pour $c_6 > 0$ convenable, donc par $|Y|^{R_6}$ pour un réel R_6 convenable, ou encore par $|N|^{R_6}$. La seconde intégrale est essentiellement majorée par $|N|^{-r}$. Le tout est essentiellement majoré par $\log(N)^r N^{R_4 + R_6 - r}$. En prenant r assez grand, on obtient (3).

On fixe désormais $Q_1 \in \mathcal{F}(A_d)$ tel que $B_d \subset Q_1 \subsetneq G$. Introduisons un réel ε tel que $0 < \varepsilon < 1$. Comme ci-dessus, on a

$$\sum_{Q_2 \in \mathcal{F}(A_d), B_d \subset Q_2} \sigma_{A_d}^{Q_2}(\zeta, \varepsilon\mathcal{Y}) \tau_{Q_2}(\zeta - \varepsilon Y_{Q_2}) = 1$$

pour tout $\zeta \in \mathcal{A}_{A_d}^+$. Supposons $\sigma_{A_d}^{Q_1}(\zeta, \mathcal{Y}) \tau_{Q_1}(\zeta - Y_{Q_1}) = 1$. Pour $\alpha \in \Delta - \Delta^{L_1}$, on a $\alpha(\zeta - Y) > 0$. Si $\sigma_{A_d}^{Q_2}(\zeta, \varepsilon\mathcal{Y}) = 1$, on a $\alpha(\zeta) \ll \varepsilon|Y|$ pour $\alpha \in \Delta^{L_2}$. Si ε est assez petit, ces inégalités ne sont compatibles que si $\Delta^{L_2} \subset \Delta^{L_1}$. C'est-à-dire que, pour un tel ζ, la somme ci-dessus se limite aux $Q_2 \subset Q_1$. Pour un tel Q_2 et pour $a \in A_d(F)$, posons

$$S_{Q_1,Q_2}(a) = \sigma_{A_d}^{Q_1}(H_{A_d}(a), \mathcal{Y}) \tau_{Q_1}(H_{A_d}(a) - Y_{Q_1}) \sigma_{A_d}^{Q_2}(H_{A_d}(a), \varepsilon\mathcal{Y}) \tau_{Q_2}(H_{A_d}(a) - \varepsilon Y_{Q_2}).$$

On peut décomposer

$$\Phi_{N,Y,Q_1}(g') = \sum_{Q_2 \in \mathcal{F}(A_d); B_d \subset Q_2 \subset Q_1} \Phi_{N,Y,Q_1,Q_2}(g'),$$

où

$$\Phi_{N,Y,Q_1,Q_2}(g') = \sum_{e \in \mathcal{B}_\theta^{K_{f'}}} \int_K \int_K \int_{A_d(F)^+} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} m(\tau_\lambda)\varphi(\lambda)$$

$$\Phi(e, k_1ak_2, g', \lambda)\kappa_N(k_1ak_2)D(a)S_{Q_1,Q_2}(a)\, d\lambda\, da\, dk_1\, dk_2.$$

On peut décomposer de même $\Phi_{Y,Q_1}(g')$. Fixons $Q_2 = L_2U_2$ avec $B_d \subset Q_2 \subset Q_1$. On va montrer

(5) il existe $\varepsilon_0 > 0$ et, pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que, si $c_1N^\eta \leq |Y| \leq c_2N$, on a les majorations

$$|\Phi_{N,Y,Q_1,Q_2}(g')| \ll N^{-R} \text{ et } |\Phi_{Y,Q_1,Q_2}(g')| \ll N^{-R}$$

Pour simplifier la rédaction, on va fixer c_1 et c_2 et supposer $c_1N^\eta \leq |Y| \leq c_2\log(N)$. On montrera que toutes les propriétés dont on a besoin sont vérifiées si ε est assez petit, c_1 est assez grand relativement à ε et c_2 est assez petit relativement à ε.

Soient $g' \in G(F)$ tel que $\sigma(g') \leq C\log(N)$, $k_1, k_2 \in K$ et $a \in A_d(F)^+$. On pose $\zeta = H_{A_d}(a)$ et on suppose $\sigma_{A_d}^{Q_2}(\zeta, \varepsilon\mathcal{Y})\tau_{Q_2}(\zeta - \varepsilon Y_{Q_2}) = 1$. Cette propriété entraîne l'existence de $c_3 > 0$ tel que, pour toute racine α de A_d dans $\mathfrak{u}_2$, on ait la minoration

$$c_3\inf\{\varepsilon\beta(Y); \beta \in \Delta\} \leq \alpha(\zeta),$$

donc aussi, quitte à changer c_3,

$$(6) \qquad \varepsilon c_1c_3N^\eta \leq \alpha(\zeta).$$

Ecrivons $\theta(k_1^{-1})g' = u'l'k'$, avec $u' \in \theta(U_2)(F)$, $l' \in \theta(L_2)(F)$ et $k' \in K$. Notons $A_d(F)^{L_2,+}$ le sous-ensemble des $a' \in A_d(F)$ tels que $\alpha(H_{A_d}(a')) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta^{L_2}$ et posons $K_2 = K \cap L_2(F)$. On a $\theta(l')^{-1}a \in L_2(F)$ et on peut écrire $\theta(l')^{-1}a = k_3a'k_4$, avec $k_3, k_4 \in K_2$ et $a' \in A_d(F)^{L_2,+}$. On pose $\zeta' = H_{A_d}(a')$. On a :

(7) si εc_1 est assez grand, $k_2^{-1}a^{-1}\theta(u')^{-1}ak_2$ appartient à $K_{f'}$;

(8) pour tout $c > 0$, a' appartient à $A_d(F)^+$ et vérifie $\alpha(\zeta') > cN^{\eta/2}$ pour tout $\alpha \in \Delta - \Delta^{L_2}$ pourvu que εc_1 soit assez grand.

Ces deux propriétés résultent aisément de (6), cf. **[14]** 6.6(7) et (8) pour plus de détails. Soient $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$ et $e \in \mathcal{B}_\theta^{K_{f'}}$. On a l'égalité

$$\Phi(e, k_1ak_2, g', \lambda) = (\pi_\lambda(\theta(\theta(l')^{-1}\theta(u')^{-1}ak_2))e, \pi_\lambda(k')e')(\pi_\lambda(k_1^{-1})e'', \pi_\lambda(ak_2)\pi_\lambda(f')e).$$

Grâce à (7), on peut supprimer $\theta(u')^{-1}$ dans cette expression, pourvu que εc_1 soit assez grand. On obtient

$$(9) \qquad \Phi(e, k_1ak_2, g', \lambda) = (\pi_\lambda(\theta(a'k_4k_2))e, \pi_\lambda(\theta(k_3)^{-1}k')e')(\pi_\lambda(k_1^{-1})e'', \pi_\lambda(ak_2)\pi_\lambda(f')e).$$

Grâce aux résultats d'Harish-Chandra, on va approximer les produits scalaires par leurs termes constants faibles. Introduisons quelques notations. Posons

$$W(L_2|G|L) = \{s \in W^G; sLs^{-1} \subset L_2, B_d \cap L_2 \subset sQs^{-1}\}.$$

Pour un élément s de cet ensemble, on note $\gamma(s) : \mathcal{K}^G_{Q,\tau} \to \mathcal{K}^G_{sQs^{-1},\tau}$ l'opérateur défini par $(\gamma(s)e_0)(k) = e_0(s^{-1}k)$ pour tout $k \in K$. On pose $Q_{2,s} = (L_2 \cap sQs^{-1})U_2$, $\underline{Q}_{2,s} = (L_2 \cap sQs^{-1})\bar{U}_2$, où $\bar{U}_2$ est le radical unipotent du parabolique $\bar{Q}_2$ opposé à Q_2. Pour $\lambda \in i\mathcal{A}^*_{L,F}$, on définit les opérateurs

$$J_{Q_{2,s}|sQs^{-1}}((s\tau)_{s\lambda}) \circ \gamma(s) : \mathcal{K}^G_{Q,\tau} \to \mathcal{K}_{Q_{2,s},s\tau}$$

et

$$J_{\underline{Q}_{2,s}|sQs^{-1}}((s\tau)_{s\lambda}) \circ \gamma(s) : \mathcal{K}^G_{Q,\tau} \to \mathcal{K}_{\underline{Q}_{2,s},s\tau}.$$

Les termes $s\tau$ et $s\lambda$ ont la signification usuelle. Pour $e_1 \in \mathcal{K}^G_{Q_{2,s},s\tau}$ et $e_2 \in \mathcal{K}^G_{\underline{Q}_{2,s},s\tau}$, les restrictions de e_1 et e_2 à K_2 appartiennent au même espace $\mathcal{K}^{L_2}_{L_2 \cap sQs^{-1},s\tau}$, qui est muni d'un produit scalaire naturel. On pose

$$(e_1, e_2)^{L_2} = \int_{K_2} (e_1(x), e_2(x))dx.$$

Posons

$$(\pi_\lambda(k_1^{-1})e'', \pi_\lambda(ak_2)\pi_\lambda(f')e)_{Q_2,\lambda} =$$
$$\sum_{s \in W(L_2|G|L)} (J_{Q_{2,s}|sQs^{-1}}((s\tau)_{s\lambda}) \circ \gamma(s)\pi_\lambda(k_1^{-1})e'', J_{\underline{Q}_{2,s}|sQs^{-1}}((s\tau)_{s\lambda}) \circ \gamma(s)\pi_\lambda(ak_2)\pi_\lambda(f')e)^{L_2}.$$

Alors le lemme 6.5 de **[14]** (qui est dû à Harish-Chandra) nous dit qu'il existe $R_7 \geq 0$ et $\mu > 0$ tel que

$$|(\pi_\lambda(k_1^{-1})e'', \pi_\lambda(ak_2)\pi_\lambda(f')e) - (\pi_\lambda(k_1^{-1})e'', \pi_\lambda(ak_2)\pi_\lambda(f')e)_{Q_2,\lambda}| \ll$$
$$\delta_{Q_2}(a)^{-1/2}\Xi^{L_2}(a)\sigma(a)^{R_7} sup\{\exp(-\mu\alpha(\zeta)); \alpha \in \Delta - \Delta^{L_2}\}.$$

Grâce à (6), cela entraîne que, pour tout entier $b \geq 0$, on a

$$(10) \qquad |(\pi_\lambda(k_1^{-1})e'', \pi_\lambda(ak_2)\pi_\lambda(f')e) - (\pi_\lambda(k_1^{-1})e'', \pi_\lambda(ak_2)\pi_\lambda(f')e)_{Q_2,\lambda}| \ll$$
$$\delta_{Q_2}(a)^{-1/2}\Xi^{L_2}(a)\sigma(a)^{R_7}N^{-b},$$

pourvu que εc_1 soit assez grand.

De mêmes considérations s'appliquent à l'autre produit de la formule (9). A cause du θ qui figure dans ce produit, on doit remplacer Q_2 par $\theta(Q_2)$ dans les constructions. Pour $s \in W(\theta(L_2)|G|L)$, on pose $\theta(Q)_{2,s} = (\theta(L_2) \cap sQs^{-1})\theta(U_2)$ et $\theta(\underline{Q})_{2,s} = (\theta(L_2) \cap sQs^{-1})\theta(\bar{U}_2)$ (les notations sont un peu ambiguës : $\theta(Q)_{2,s}$ n'est pas l'image par θ d'un hypothétique parabolique $Q_{2,s}$). On pose

$$(\pi_\lambda(\theta(a'k_4k_2))e, \pi_\lambda(\theta(k_3)^{-1}k')e')_{\theta(Q_2),\lambda} = \sum_{s \in W(\theta(L_2)|G|L)}$$

$$(J_{\theta(\underline{Q})_{2,s}|sQs^{-1}}((s\tau)_{s\lambda}) \circ \gamma(s)\pi_\lambda(\theta(a'k_4k_2))e, J_{\theta(Q)_{2,s}|sQs^{-1}}((s\tau)_{s\lambda}) \circ \gamma(s)\pi_\lambda(\theta(k_3)^{-1}k')e')^{\theta(L_2)}.$$

On a une majoration analogue à (10), où, dans le deuxième membre, Q_2 et a sont remplacés par $\theta(Q_2)$ et $\theta(a')$ ou, ce qui revient au même, par Q_2 et a'.

Posons

$$\Phi_w(e, k_1ak_2, g', \lambda) = (\pi_\lambda(\theta(a'k_4k_2))e, \pi_\lambda(\theta(k_3)^{-1}k')e')_{\theta(Q_2),\lambda}(\pi_\lambda(k_1^{-1})e'', \pi_\lambda(ak_2)\pi_\lambda(f')e)_{Q_2,\lambda}.$$

Notons $\Phi_{N,Y,Q_1,Q_2,w}(g')$ et $\Phi_{Y,Q_1,Q_2,w}(g')$ les termes obtenus en remplaçant $\Phi(e,k_1ak_2,g',\lambda)$ par $\Phi_w(e,k_1ak_2,g',\lambda)$ dans les définitions de $\Phi_{N,Y,Q_1,Q_2}(g')$ et $\Phi_{Y,Q_1,Q_2}(g')$. D'après ce qui précède, $\Phi(e,k_1ak_2,g',\lambda)-\Phi_w(e,k_1ak_2,g',\lambda)$ est borné par la somme de

$$\delta_{Q_2}(a)^{-1/2}\Xi^{L_2}(a)\sigma(a)^{R_7}N^{-b}|(\pi_\lambda(\theta(a'k_4k_2))e,\pi_\lambda(\theta(k_3)^{-1}k')e')|$$

et de

$$\delta_{Q_2}(a')^{-1/2}\Xi^{L_2}(a')\sigma(a')^{R_7}N^{-b}|(\pi_\lambda(k_1^{-1})e'',\pi_\lambda(ak_2)\pi_\lambda(f')e)_{Q_2,\lambda}|.$$

Si on oublie les termes N^{-b} un calcul analogue à celui utilisé dans la preuve de (2) conduit à des majorations

$$|\Phi_{N,Y,Q_1,Q_2}(g')-\Phi_{N,Y,Q_1,Q_2,w}(g')|\ll N^{R_8},$$

$$|\Phi_{Y,Q_1,Q_2}(g')-\Phi_{Y,Q_1,Q_2,w}(g')|\ll N^{R_8}|Y|^{R_8},$$

pour un certain réel R_8. En réintroduisant le terme N^{-b}, où b peut être quelconque, et en se rappelant que l'on suppose $|Y|\ll N$, les deux expressions ci-dessus sont majorées par N^{-b} pourvu que εc_1 soit assez grand. Le bilan est que, pour démontrer (5), on peut y remplacer $\Phi_{N,Y,Q_1,Q_2}(g')$ et $\Phi_{Y,Q_1,Q_2}(g')$ par $\Phi_{N,Y,Q_1,Q_2,w}(g')$ et $\Phi_{Y,Q_1,Q_2,w}(g')$.

On a

$$\Phi_w(e,k_1ak_2,g',\lambda)=\sum_{s_1\in W(\theta(L_2)|G|L),s_2\in W(L_2|G|L)}\Phi_{s_1,s_2}(e,k_1ak_2,g',\lambda),$$

où

$$\Phi_{s_1,s_2}(e,k_1ak_2,g',\lambda)=$$

$$(J_{\theta(\underline{Q})_{2,s_1}|s_1Qs_1^{-1}}((s_1\tau)_{s_1}\lambda)\circ\gamma(s_1)\pi_\lambda(\theta(a'k_4k_2))e,J_{\theta(Q)_{2,s_1}|s_1Qs_1^{-1}}((s_1\tau)_{s_1}\lambda)\circ\gamma(s_1)\pi_\lambda(\theta(k_3)^{-1}k')e')^{\theta(L_2)}$$

$$(J_{Q_{2,s_2}|s_2Qs_2^{-1}}((s_2\tau)_{s_2}\lambda)\circ\gamma(s_2)\pi_\lambda(k_1^{-1})e'',J_{\underline{Q}_{2,s_2}|s_2Qs_2^{-1}}((s_2\tau)_{s_2}\lambda)\circ\gamma(s_2)\pi_\lambda(ak_2)\pi_\lambda(f')e)^{L_2}.$$

Au moins formellement, on peut décomposer de même $\Phi_{N,Y,Q_1,Q_2,w}(g')$ et $\Phi_{Y,Q_1,Q_2,w}(g')$ en somme de termes $\Phi_{N,Y,Q_1,Q_2,s_1,s_2}(g')$ et $\Phi_{Y,Q_1,Q_2,s_1,s_2}(g')$. Il y a un problème de convergence car les opérateurs d'entrelacement peuvent avoir des pôles. Ce problème disparaît grâce à la multiplication par la mesure de Plancherel. En effet, soient $s_1\in W(\theta(L_2)|G|L)$ et $s_2\in W(L_2|G|L)$. On a

(11) pour e fixé, la fonction $m(\tau_\lambda)\Phi_{s_1,s_2}(e,k_1ak_2,g',\lambda)$ est combinaison linéaire de fonctions qui sont elles-mêmes des produits $f_1(a',\lambda)f_2(a,\lambda)f_3(k_1,k_2,k_3,k_4,k')f_4(\lambda)$, où

$$f_1(a',\lambda)=\delta_{Q_2}(a')^{-1/2}(\mathrm{Ind}_{\theta(L_2)\cap s_1Qs_1^{-1}}^{\theta(L_2)}((s_1\tau)_{s_1}\lambda,\theta(a'))e_1',e_1),$$

pour des éléments $e_1,e_1'\in\mathcal{K}^{\theta(L_2)}_{\theta(L_2)\cap s_1Qs_1^{-1},s_1\tau}$;

$$f_2(a,\lambda)=\delta_{Q_2}(a)^{1/2}(e_2',\mathrm{Ind}_{L_2\cap s_2Qs_2^{-1}}^{L_1}((s_2\tau)_{s_2}\lambda,a)e_2),$$

pour des éléments $e_2,e_2'\in\mathcal{K}^{L_2}_{L_2\cap s_2Qs_2^{-1},s_2\tau}$;

f_3 est une fonction localement constante des variables k_1, k_2, k_3, k_4 et k' ;

f_4 est une fonction C^∞ de λ.

La preuve est la même qu'en **[14]** 6.6(10). Le point central est le suivant. Soient $e_1 \in \mathcal{K}^G_{Q,\tau}$ et $e'_1 \in \mathcal{K}^G_{Q_{2,s_1},s_1\tau}$. Posons

$$j_{Q_{2,s_2}}(\lambda) = (e'_1, J_{Q_{2,s_2}|s_2Qs_2}((s_2\tau)_{s_2\lambda}) \circ \gamma(s_2)e_1).$$

Définissons de même des fonctions $j_{\underline{Q}_{2,s_2}}(\lambda)$, $j_{\theta(Q)_{2,s_1}}(\lambda)$ et $j_{\theta(\underline{Q})_{2,s_1}}(\lambda)$. Alors la fonction

$$\lambda \mapsto m(\tau_\lambda)\overline{j_{\theta(\underline{Q})_{2,s_1}}(\lambda)j_{Q_{2,s_2}}(\lambda)}j_{\underline{Q}_{2,s_2}}(\lambda)j_{\theta(Q)_{2,s_1}}(\lambda)$$

est C^∞ sur $i\mathcal{A}^*_L$. Cela résulte de la preuve du corollaire V.2.3 de **[9]**.

Grâce à (11), les termes $\Phi_{N,Y,Q_1,Q_2,s_1,s_2}(g')$ et $\Phi_{Y,Q_1,Q_2,s_1,s_2}(g')$ sont bien définis. On peut fixer s_1 et s_2 et il nous suffit d'établir la majoration

$$(12) \qquad |\Phi_{N,Y,Q_1,Q_2,s_1,s_2}(g')| \ll N^{-R} \text{ et } |\Phi_{Y,Q_1,Q_2,s_1,s_2}(g')| \ll N^{-R}.$$

Posons $s = s_1s_2^{-1}$. Supposons d'abord

Hypothèse. — Il n'existe pas de sous-groupe parabolique $Q' = L'U'$ de G tel que $Q_2 \subset Q' \subsetneq G$, $\theta(Q') = Q'$ et $s \in W^{L'}$.

Dans ce cas, on exprime $m(\tau_\lambda)\Phi_{s_1,s_2}(e, k_1ak_2, g', \lambda)$ comme dans l'assertion (11). Quitte à multiplier f_4 par φ, $\Phi_{N,Y,Q_1,Q_2,s_1,s_2}(g')$ s'écrit comme combinaison linéaire d'intégrales

$$\Psi_{N,Y} = \int_K\int_K\int_{A_d(F)^+}\int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} f_1(a',\lambda)f_2(a,\lambda)f_3(k_1,k_2,k_3,k_4,k')f_4(\lambda)$$
$$\kappa_N(k_1ak_2)D(a)S_{Q_1,Q_2}(a)d\lambda\, da\, dk_1\, dk_2.$$

Pour tout $x \in L_2$, choisissons des éléments $l(x) \in s_2L(F)s_2^{-1}$, $u(x) \in L_2(F) \cap s_2U_Q(F)s_2^{-1}$ et $k(x) \in K_2$ de sorte que $x = l(x)u(x)k(x)$. On a l'égalité

$$f_2(a,\lambda) = \int_{K_2} f'_2(a,x)\exp((s_2\lambda)(H_{L_2\cap s_2Qs_2^{-1}}(xa)))dx,$$

où

$$f'_2(a,x) = \delta_{Q_2}(a)^{-1/2}\delta^{L_2}_{L_2\cap s_2Qs_2^{-1}}(l(xm))^{1/2}(e'_2(x),(s_2\tau)(l(xa))(e_2(k(xa))).$$

La fonction $f_1(a',\lambda)$ s'exprime de façon analogue : L_2 et a doivent être remplacés par $\theta(L_2)$ et $\theta(a')$, et il y a un signe $-$ dans l'exponentielle car a' intervient dans le premier terme du produit scalaire et non dans le second. Alors

$$\Psi_{N,Y} = \int_K\int_K\int_{A_d(F)^+}\int_{\theta(K_2)}\int_{K_2} f'_1(a',y)f'_2(a,x)f_3(k_1,k_2,k_3,k_4,k')f_5(xa,y\theta(a'))$$
$$\kappa_N(k_1ak_2)D(a)S_{Q_1,Q_2}(a)dx\, dy\, da\, dk_1\, dk_2,$$

où

$$f_5(xa,y\theta(a')) = \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} f_4(\lambda)\exp(-(s_1\lambda)(H_{\theta(L_2)\cap s_1Qs_1^{-1}}(y\theta(a'))) + (s_2\lambda)(H_{L_2\cap s_2Qs_2^{-1}}(xa)))d\lambda$$
$$= \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} f_4(\lambda)\exp(\lambda(\zeta(xa,y\theta(a'))))d\lambda,$$

où
$$\zeta(xa, y\theta(a')) = s_2^{-1}(H_{L_2\cap s_2Qs_2^{-1}}(xa)) - s_1^{-1}(H_{\theta(L_2)\cap s_1Qs_1^{-1}}(y\theta(a'))).$$
Montrons que

(13) si ε est assez petit et c_1 est assez grand, on a
$$|\zeta(xa, y\theta(a'))| \gg N^{\eta/2} + |H_G(a)|$$
pour tous x, y, a, k_1, k_2 intervenant dans $\Psi_{N,Y}$ avec $S_{Q_1,Q_2}(a) \neq 0$.

On pose $\zeta = H_{A_d}(a)$, $\zeta' = H_{A_d}(a')$. On a $xa = aa^{-1}xa$, d'où
$$H_{L_2\cap s_2Qs_2^{-1}}(xa) = H_{L_2\cap s_2Qs_2^{-1}}(a) + H_{L_2\cap s_2Qs_2^{-1}}(a^{-1}xa).$$
Parce que $x \in K_2 \subset L_2(F)$, on a une majoration
$$\sigma(a^{-1}xa) \ll sup\{\alpha(\zeta); \alpha \in \Delta^{L_2}\}.$$
La condition $\sigma_{A_d}^{Q_2}(\zeta, \varepsilon\mathcal{Y}) = 1$ entraîne $\alpha(a) \ll \varepsilon|Y|$ pour $\alpha \in \Delta^{L_2}$. D'où $\sigma(a^{-1}xa) \ll \varepsilon|Y|$, puis $|H_{L_2\cap s_2Qs_2^{-1}}(a^{-1}xa)| \ll \varepsilon|Y|$. Pour la même raison, on a
$$|H_{L_2\cap s_2Qs_2^{-1}}(a) - H_{L_2}(a)| = |H_{L_2\cap s_2Qs_2^{-1}}(a) - \zeta_{L_2}| \ll \varepsilon|Y|,$$
d'où
$$|H_{L_2\cap s_2Qs_2^{-1}}(xa) - \zeta_{L_2}| \ll \varepsilon|Y|.$$
Rappelons que $a' = k_3^{-1}\theta(l')^{-1}ak_4^{-1}$. Les termes k_3, k_4 appartiennent à K_2, $\theta(l')$ appartient à $L_2(F)$ et vérifie une majoration $\sigma(\theta(l')) \ll C\log(N)$. On en déduit une majoration $\alpha(\zeta') \ll C\log(N) + \varepsilon|Y|$ pour tout $\alpha \in \Delta^{L_2}$. On démontre alors comme ci-dessus
$$|H_{\theta(L_2)\cap s_1Qs_1^{-1}}(y\theta(a')) - H_{\theta(L_2)}(\theta(a'))| \ll C\log(N) + \varepsilon|Y|.$$
De la définition de a' rappelée ci-dessus résulte que
$$|H_{\theta(L_2)}(\theta(a')) - H_{\theta(L_2)}(\theta(a))| \ll C\log(N).$$
Puisque $H_{\theta(L_2)}(\theta(a)) = \theta(\zeta_{L_2})$, on obtient
$$|H_{\theta(L_2)\cap s_1Qs_1^{-1}}(y\theta(a')) - \theta(\zeta_{L_2})| \ll C\log(N) + \varepsilon|Y|.$$
De ces calculs résulte la majoration
$$(14) \qquad |\zeta(xa, y\theta(a')) - s_2^{-1}\zeta_{L_2} + s_1^{-1}\theta(\zeta_{L_2})| \ll C\log(N) + \varepsilon|Y|.$$
Pour tout sous-groupe G' de G stable par conjugaison par A_d, notons $\Sigma^{G'}$ l'ensemble des racines de A_d dans $\mathfrak{g}'$. Montrons que

(15) l'un au moins des ensembles $s_2^{-1}(\Sigma^{U_1}) \cap s_1^{-1}\theta(\Sigma^{\bar{Q}_2})$ ou $s_2^{-1}(\Sigma^{\bar{Q}_2}) \cap s_1^{-1}\theta(\Sigma^{U_1})$ est non vide.

Supposons que le premier ensemble est vide. Alors $s_2^{-1}(\Sigma^{U_1}) \subset s_1^{-1}\theta(\Sigma^{U_2})$, ou encore $sU_1s^{-1} \subset \theta(U_2)$. Pour deux sous-groupes paraboliques $P' = M'U'$ et $P'' = M''U''$ de G, les inclusions $U' \subset U''$ et $P'' \subset P'$ sont équivalentes. Donc $\theta(Q_2) \subset sQ_1s^{-1}$. Le sous-groupe parabolique $\theta(Q_2)$ est standard, donc aussi sQ_1s^{-1}. Mais Q_1 est lui-aussi standard. Deux sous-groupes paraboliques standard n'étant conjugués que s'ils sont égaux, on a $Q_1 = sQ_1s^{-1}$, donc $s \in W^{L_1}$. L'inclusion $\theta(Q_2) \subset sQ_1s^{-1}$

devient $\theta(Q_2) \subset Q_1$. Supposons que le second ensemble de (15) soit vide. Un calcul similaire montre que $s \in W^{\theta(L_1)}$. Posons $Q' = L'U' = Q_1 \cap \theta(Q_1)$. On a alors $Q_2 \subset Q'$ et $s \in W^{L'}$. Cela contredit l'hypothèse sur s. D'où (15).

Supposons par exemple le premier ensemble ci-dessus non vide. Soit α un de ses éléments. On a

$$\alpha(s_2^{-1}\zeta_{L_2}) = (s_2\alpha)(\zeta) - (s_2\alpha)(\zeta^{L_2}),$$

où ζ^{L_2} est la projection orthogonale de ζ sur $\mathcal{A}_{A_d}^{L_2}$. Parce que $s_2\alpha \in \Sigma^{U_1}$ et $\sigma_{A_d}^{Q_1}(\zeta, \mathcal{Y})\tau_{Q_1}(\zeta - Y_{Q_1}) = 1$, on a $(s_2\alpha)(\zeta) \gg |Y|$. Parce que $\sigma_{A_d}^{Q_2}(\zeta, \varepsilon\mathcal{Y}) = 1$, on a $|(s_2\alpha)(\zeta^{L_2})| \ll \varepsilon|Y|$. Il existe donc $c_4 > 0$ tel que

$$\alpha(s_2^{-1}\zeta_{L_2}) \gg (1 - c_4\varepsilon)|Y|.$$

On a $\alpha(s_1^{-1}\theta(\zeta_{L_2})) = (\theta s_1\alpha)(\zeta_{L_2})$. L'élément $\theta s_1\alpha$ appartient à $\Sigma^{\bar{Q}_2}$. Sa projection sur $\mathcal{A}_{L_2}^*$ est une combinaison linéaire à coefficients négatifs ou nuls d'éléments de $\Delta - \Delta^{L_2}$. Donc

$$\alpha(s_1^{-1}\theta(\zeta_{L_2})) \leq 0.$$

D'où

$$\alpha(s_2^{-1}\zeta_{L_2} - s_1^{-1}\theta(\zeta_{L_2})) \gg (1 - c_4\varepsilon)|Y|,$$

a fortiori

$$|s_2^{-1}\zeta_{L_2}^G - s_1^{-1}\theta(\zeta_{L_2}^G)| \gg (1 - c_4\varepsilon)|Y|.$$

On a aussi

$$|s_2^{-1}\zeta_G - s_1^{-1}\theta(\zeta_G)| = |\zeta_G - \theta(\zeta_G)| \gg |\zeta_G|$$

D'où

$$|s_2^{-1}\zeta_{L_2} - s_1^{-1}\theta(\zeta_{L_2})| \gg (1 - c_4\varepsilon)|Y| + |\zeta_G|.$$

Un raisonnement analogue, avec la même conclusion, vaut si le deuxième ensemble de (15) est non vide. La minoration que l'on vient d'obtenir, jointe à (14) et à l'hypothèse $|Y| \geq c_1 N^\eta$, démontre (13).

Le terme $f_5(xa, y\theta(a'))$ est la valeur au point $\zeta(xa, y\theta(a'))$ de la transformée de Fourier d'une fonction C^∞ sur $i\mathcal{A}_{L,F}^*$. Cette transformée de Fourier est à décroissance rapide. Grâce à (13), pour tout entier b, on a une majoration

$$|f_5(xa, y\theta(a')) \ll N^{-b}(1 + |H_G(a)|)^{-b}$$

pourvu que ε soit assez petit et c_1 assez grand. D'où

$$\Psi_{N,Y} \ll N^{-b} \int_K \int_K \int_{A_d(F)^+} \int_{\theta(K_2)} \int_{K_2} |f_1'(a', y) f_2'(a, x) f_3(k_1, k_2, k_3, k_4, k')|$$
$$(1 + |H_G(a)|)^{-b} \kappa_N(k_1 a k_2) D(a) S_{Q_1,Q_2}(a) dx\, dy\, da\, dk_1\, dk_2.$$

On n'a aucun mal à montrer qu'il existe R_9 tel que l'intégrale soit essentiellement bornée par N^{R_9}. Puisque b est quelconque, on obtient la première majoration de (12). La seconde s'obtient de la même façon. Le seul changement est que, dans l'intégrale ci-dessus, $\kappa_N(k_1 a k_2)$ est remplacé par $\tilde{u}(a, Y)$. L'intégrale est alors majorée par $N^{R_9}|Y|^{R_9}$ et il faut utiliser la majoration $|Y| \ll c_2 N$ pour conclure.

Supposons maintenant que l'hypothèse imposée plus haut à s ne soit pas vérifiée. Dans ce cas, on va montrer que $\Phi_{N,Y,Q_1,Q_2,s_1,s_2}(g') = \Phi_{Y,Q_1,Q_2,s_1,s_2}(g') = 0$. D'après la définition de ces termes, il suffit de prouver

(16) pour $\lambda \in i\mathcal{A}_{L,F}^*$, $a \in A_d(F)^+$ et $k_1, k_2 \in K$, on a

$$\sum_{e \in \mathcal{B}_\theta^{K_{f'}}} \Phi_{s_1,s_2}(e, k_1ak_2, g', \lambda) = 0.$$

On note $X(\lambda)$ la somme ci-dessus. C'est la restriction à $i\mathcal{A}_{L,F}^*$ d'une fonction méromorphe sur $(\mathcal{A}_L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})/i\mathcal{A}_{L,F}^\vee$. Il suffit de démontrer qu'elle est nulle en un point λ général. On peut donc supposer que tous les opérateurs d'entrelacement qui apparaîtront ci-dessous n'ont ni zéro ni pôle en λ. On a une égalité

$$\Phi_{s_1,s_2}(e, k_1ak_2, g', \lambda) =$$
$$(J_{\theta(\underline{Q})_{2,s_1}|s_1Qs_1^{-1}}((s_1\tau)_{s_1}\lambda) \circ \gamma(s_1) \circ \pi_\lambda(\theta(a'k_4k_2))e, e_1)^{\theta(L_2)}$$
$$(e_2, J_{\underline{Q}_{2,s_2}|s_2Qs_2^{-1}}((s_2\tau)_{s_2}\lambda) \circ \gamma(s_2) \circ \pi_\lambda(ak_2)\pi_\lambda(f')e)^{L_2},$$

pour des éléments $e_1 \in \mathcal{K}_{Q_{2,s_1},s_1\tau}^G$ et $e_2 \in \mathcal{K}_{Q_{2,s_2},s_2\tau}^G$. On a $\pi_\lambda(k_2)\pi_\lambda(f') = \pi_\lambda(f'')\pi_\lambda(\theta(k_2))$, où f'' est défini par $f''(g) = f(k_2^{-1}g\theta(k_2))$. Posons $\mathcal{B}_\natural^{K_{f'}} = \{\pi_\lambda(\theta(k_2))e; e \in \mathcal{B}_\theta^{K_{f'}}\}$. C'est encore une base orthonormée de $(\mathcal{K}_{Q,\tau}^G)^{K_{f'}}$ (rappelons que $K_{f'}$ est distingué dans K) et on a

$$X(\lambda) = \sum_{e \in \mathcal{B}_\natural^{K_{f'}}} (J_{\theta(\underline{Q})_{2,s_1}|s_1Qs_1^{-1}}((s_1\tau)_{s_1}\lambda) \circ \gamma(s_1) \circ \pi_\lambda(\theta(a'k_4))e, e_1)^{\theta(L_2)}$$
$$(e_2, J_{\underline{Q}_{2,s_2}|s_2Qs_2^{-1}}((s_2\tau)_{s_2}\lambda) \circ \gamma(s_2) \circ \pi_\lambda(a)\pi_\lambda(f')e)^{L_2}.$$

Il existe une fonction $j_1(\lambda)$ qui est méromorphe (au même sens que ci-dessus) et telle que

$$J_{\theta(\underline{Q})_{2,s_1}|s_1Qs_1^{-1}}((s_1\tau)_{s_1}\lambda) \circ \gamma(s_1) =$$
$$j_1(\lambda)J_{\theta(\underline{Q})_{2,s_1}|s\underline{Q}_{2,s_2}s^{-1}}((s_1\tau)_{s_1}\lambda) \circ \gamma(s) \circ J_{\underline{Q}_{2,s_2}|s_2Qs_2^{-1}}((s_2\tau)_{s_2}\lambda) \circ \gamma(s_2).$$

L'ensemble

$$\{J_{\underline{Q}_{2,s_2}|s_2Qs_2^{-1}}((s_2\tau)_{s_2}\lambda) \circ \gamma(s_2)e; e \in \mathcal{B}_\natural^{K_{f'}}\}$$

est une base de $(\mathcal{K}_{\underline{Q}_{2,s_2},s_2\tau}^G)^{K_{f'}}$. Les propriétés d'adjonction et de composition des opérateurs d'entrelacement entraînent qu'elle est orthogonale et que tous ses éléments ont la même norme. Notons $j_2(\lambda)$ cette norme et divisons tout élément de la base par $\sqrt{j_2(\lambda)}$. On obtient une base orthonormée de $(\mathcal{K}_{\underline{Q}_{2,s_2},s_2\tau}^G)^{K_{f'}}$ que l'on note $\mathcal{B}_\sharp^{K_{f'}}$. On a l'égalité

$$X(\lambda) = j_1(\lambda)j_2(\lambda) \sum_{e \in \mathcal{B}_\sharp^{K_{f'}}} (J_{\theta(\underline{Q})_{2,s_1}|s\underline{Q}_{2,s_2}s^{-1}}((s_1\tau)_{s_1}\lambda) \circ \gamma(s) \circ \mathrm{Ind}_{\underline{Q}_{2,s_2}}^G((s_2\tau)_{s_2}\lambda, \theta(a'k_4))e, e_1)^{\theta(L_2)}$$

$$(e_2, \mathrm{Ind}^G_{\underline{Q}_{2,s_2}}((s_2\tau)_{s_2\lambda}, a)\mathrm{Ind}^G_{\underline{Q}_{2,s_2}}((s_2\tau)_{s_2\lambda}, f'')e)^{L_2}.$$

Maintenant, le groupe Q n'apparaît plus. Pour simplifier les notations, on peut supposer $s_2 = 1$ et $Q = \underline{Q}_{2,s_2}$. Alors $s = s_1$, $Q \subset \bar{Q}_2$ et l'expression précédente se simplifie en

$$X(\lambda) = j_1(\lambda)j_2(\lambda) \sum_{e \in \mathcal{B}_\sharp^{K_{f'}}} (J_{\theta(\underline{Q})_{2,s}|sQs^{-1}}((s\tau)_{s\lambda}) \circ \gamma(s) \circ \pi_\lambda(\theta(a'k_4))e, e_1)^{\theta(L_2)}$$

$$(e_2, \pi_\lambda(a)\pi_\lambda(f'')e)^{L_2}.$$

Puisque l'hypothèse indiquée plus haut sur s n'est pas vérifiée, on peut fixer un sous-groupe parabolique $Q' = L'U'$ de G tel que $Q_2 \subset Q' \subsetneq G$, $\theta(Q') = Q'$ et $s \in W^{L'}$. Les deux sous-groupes paraboliques $\theta(\underline{Q})_{2,s}$ et sQs^{-1} sont inclus dans $\bar{Q}'$. Introduisons la représentation $\pi' = \mathrm{Ind}^{L'}_{L'\cap Q}(\tau_\lambda)$, que l'on réalise dans $\mathcal{K}^{L'}_{L'\cap Q,\tau}$. On peut identifier $\mathcal{K}^G_{Q,\tau}$ à $\mathcal{K}^G_{\bar{Q}',\pi'}$. Modulo cette identification, on définit une forme sesquilinéaire B sur $\mathcal{K}^G_{\bar{Q}',\pi'} \times \mathcal{K}^G_{\bar{Q}',\pi'}$ par

$$B(e', e) = (J_{\theta(\underline{Q})_{2,s}|sQs^{-1}}((s\tau)_{s\lambda}) \circ \gamma(s) \circ \pi_\lambda(\theta(a'k_4))e, e_1)^{\theta(L_2)}(e_2, \pi_\lambda(a)\pi_\lambda(f'')e)^{L_2}.$$

Alors

$$X(\lambda) = \mathrm{trace}_B(\pi'(f'')).$$

Pour prouver que cette expression est nulle, on va utiliser le lemme 1.4, ou plutôt sa variante « unitaire » évidente. Posons $\tilde{Q}' = Q'\boldsymbol{\theta}_d$, $\tilde{L}' = L'\boldsymbol{\theta}_d$. Puisque $\theta(Q') = Q'$, $\tilde{Q}'$ est bien un sous-groupe parabolique tordu de $\tilde{G}$, de Lévi tordu $\tilde{L}'$. Il est différent de $\tilde{G}$. La fonction f'' coïncide avec $\tilde{f}''_{\boldsymbol{\theta}_d}$, où $\tilde{f}''$ est définie par $\tilde{f}''(\tilde{x}) = \tilde{f}(k_2^{-1}\tilde{x}k_2)$. Cette fonction $\tilde{f}''$ est très cuspidale. Il reste à vérifier que B vérifie l'hypothèse $(H)_{\boldsymbol{\theta}_d}$ de 1.4. Il suffit pour cela de montrer que, pour $e, e' \in \mathcal{K}^G_{\bar{Q}',\pi'}$, $B(e', e)$ ne dépend que de la restriction de e et e' à $K \cap \bar{Q}'(F)$. Introduisons l'espace $\mathcal{K}^{L'}_{L'\cap\theta(\underline{Q})_{2,s}}$. On dispose de l'opérateur

$$J^{L'}_{L'\cap\theta(\underline{Q})_{2,s}|L'\cap sQs^{-1}}((s\tau)_{s\lambda}) \circ \gamma(s) : \mathcal{K}^{L'}_{L'\cap Q,\tau} \to \mathcal{K}^{L'}_{L'\cap\theta(\underline{Q})_{2,s},s\tau}.$$

On vérifie la formule

$$B(e', e) = \delta_{Q'}(\theta(a'k_4))^{-1/2}\delta_{Q'}(a)^{-1/2}$$

$$\int_{K_2} ((J^{L'}_{L'\cap\theta(\underline{Q})_{2,s}|L'\cap sQs^{-1}}((s\tau)_{s\lambda}) \circ \gamma(s) \circ \pi'(\theta(a'k_4)(e'(1)))(x), e_1(x))dx$$

$$\int_{K_2} (e_2(y), (\pi'(a)(e(1)))(y))dy.$$

Donc $B(e', e)$ ne dépend que de $e(1)$ et $e'(1)$. On peut donc appliquer le lemme 1.4 (ou plutôt sa variante) et on conclut que $X(\lambda) = 0$. Cela prouve (16) et la proposition. □

Erratum. — La preuve de la proposition 6.6 de **[14]** contient une erreur : la minoration (11) de cette preuve n'entraîne pas la majoration $|f_5(xm', ym)| \ll N^{-D}$ mais seulement $|f_5(xm', ym)| \ll \log(N)^{-D}$. On doit remplacer (11) par une minoration $|\zeta(xm', ym)| \gg N^{\varepsilon}$ pour un $\varepsilon > 0$. Pour l'obtenir, il suffit de remplacer la condition $c_1\log(N) \ll \alpha(Y)$ pour tout α de l'énoncé de la proposition 6.6 par une condition $c_1 N^{\eta} \ll \alpha(Y)$ où η est un réel fixé tel que $0 < \eta < 1$.

6.6. Un résultat extrait de la formule des traces locale tordue. — Pour $i = 1, \dots, 4$, soit $e_i \in \mathcal{K}^G_{Q,\tau}$. Soient $\varphi \in C_c^{\infty}(i\mathcal{A}^*_{L,F})$ et $Y \in \mathcal{D}$. Posons

$$\Phi_Y((e_i)_{i=1,\dots,4}, \varphi) = \int_{G(F)} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} m(\tau_\lambda)\varphi(\lambda)(\pi_\lambda(\theta(g))e_1, e_2)(e_3, \pi_\lambda(g)e_4)\tilde{u}(g, Y) dg\, d\lambda.$$

Soit $\tilde{L}' \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}$ tel que L' contient L. Posons

$$W^{\tilde{L}'} = \{\tilde{t} \in \tilde{L}'(F); \theta_{\tilde{t}}(A_d) = A_d\}/A_d(F),$$

$$W^{\tilde{L}'}(L) = \{\tilde{t} \in W^{\tilde{L}'}; \theta_{\tilde{t}}(L) = L\}/W^L.$$

On représente tout élément $\tilde{t} \in W^{\tilde{L}'}$ sous la forme $\tilde{t} = t\boldsymbol{\theta}_d$, où $t \in K \cap \mathrm{Norm}_{G(F)}(A_d)$. Pour tout $\tilde{t} \in W^{\tilde{L}'}(L)$, l'automorphisme $\theta_{\tilde{t}}$ agit naturellement sur $\mathcal{A}_L$ et son ensemble de points fixes contient $\mathcal{A}_{\tilde{L}'}$. Notons $W^{\tilde{L}'}(L)_{\mathrm{reg}}$ le sous-ensemble des $\tilde{t} \in W^{\tilde{L}'}(L)$ tels que cet ensemble de points fixes soit égal à $\mathcal{A}_{\tilde{L}'}$. Considérons un tel élément $\tilde{t}$. On définit la représentation $\theta_{\tilde{t}}(\tau)$ de $L(F)$ par $\theta_{\tilde{t}}(\tau)(l) = \tau(\theta_{\tilde{t}}^{-1}(l))$. Notons $\Lambda_{\mathcal{O}}(\tilde{t})$ l'ensemble des $\lambda \in i\mathcal{A}^*_L$ tels que $\theta_{\tilde{t}}(\tau_\lambda) \simeq \tau_\lambda$. Il est stable par translations par $i\mathcal{A}^\vee_{L,F} + i\mathcal{A}_{\tilde{L}'}$. Soit λ un élément de cet ensemble. On définit un signe $\varepsilon_{\tau_\lambda}(\tilde{t})$ de la façon suivante. Introduisons l'ensemble $\Sigma_L^{L'}$ des racines de A_L dans $\mathfrak{l}'$. On le munit du sous-ensemble « positif » formé des racines dans $\mathfrak{l}' \cap \mathfrak{q}$. A chaque racine, on peut associer une mesure de Plancherel $m_\alpha(\tau_\lambda)$. Notons $n^{L'}(\tilde{t})$ le nombre des racines $\alpha \in \Sigma_L^{L'}$ telles que $\alpha > 0$, $\theta_{\tilde{t}}(\alpha) < 0$ et $m_\alpha(\tau_\lambda) = 0$. On pose $\varepsilon_{\tau_\lambda}(\tilde{t}) = (-1)^{n^{L'}(\tilde{t})}$. Introduisons l'opérateur d'entrelacement normalisé

$$R_{Q|\theta_{\tilde{t}}(Q)}(\tau_\lambda) : \mathcal{K}^G_{\theta_{\tilde{t}}(Q),\tau} \to \mathcal{K}^G_{Q,\tau}.$$

Ici, la normalisation choisie n'a pas d'importance, pouvu que cet opérateur préserve les produits scalaires. Fixons un automorphisme $A(\tau_\lambda)$ de l'espace de τ tel que

$$\tau_\lambda(l) \circ A(\tau_\lambda) = A(\tau_\lambda) \circ \theta_{\tilde{t}}(\tau_\lambda)(l)$$

pour tout $l \in L(F)$. Définissons un opérateur

$$A(\tau_\lambda, \tilde{t}) : \mathcal{K}^G_{Q,\tau} \to \mathcal{K}^G_{\theta_{\tilde{t}}(Q),\tau}$$

par

$$(A(\tau_\lambda, \tilde{t})e)(k) = A(\tau_\lambda) \circ e(\theta(t^{-1}k))$$

pour tous $e \in \mathcal{K}^G_{Q,\tau}$, $k \in K$. Pour $\tilde{Q}' = \tilde{L}'U' \in \mathcal{P}(\tilde{L}')$, posons $Q(Q') = (L' \cap Q)U'$. C'est un élément de $\mathcal{P}(L)$. On définit les deux fonctions $\mu \mapsto j^{1,4}_{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda, \mu)$ et $\mu \mapsto j^{2,3}_{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda, \mu)$ sur $i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}'}$ par

$$j^{1,4}_{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda, \mu) = (R_{Q|\theta_{\tilde{t}}(Q)}(\tau_\lambda)A(\tau_\lambda, \tilde{t})e_1, J_{Q(\bar{Q}')|Q}(\tau_\lambda)^{-1}J_{Q(\bar{Q}')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})e_4),$$

$$j^{2,3}_{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda, \mu) = (J_{Q(Q')|Q}(\tau_\lambda)^{-1}J_{Q(Q')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})e_2, R_{Q|\theta_{\tilde{t}}(Q)}(\tau_\lambda)A(\tau_\lambda, \tilde{t})e_3).$$

Les familles $(j^{1,4}_{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda))_{\tilde{Q}' \in \mathcal{P}(\tilde{L}')}$ et $(j^{2,3}_{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda))_{\tilde{Q}' \in \mathcal{P}(\tilde{L}')}$ sont des $(\tilde{G}, \tilde{L}')$-familles. Notons $(\mathcal{J}_{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda))_{\tilde{Q}' \in \mathcal{P}(\tilde{L}')}$ la famille produit :

$$\mathcal{J}_{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda, \mu) = j^{1,4}_{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda, \mu) j^{2,3}_{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda, \mu).$$

Comme à toute $(\tilde{G}, \tilde{L}')$-famille, on peut lui associer la fonction $\mathcal{J}_{\tilde{L}'}(\tilde{t}, \lambda, \mu)$, puis le nombre $\mathcal{J}_{\tilde{L}'}(\tilde{t}, \lambda) = \mathcal{J}_{\tilde{L}'}(\tilde{t}, \lambda, 0)$. Admettons que ce nombre soit fonction C^∞ de λ. Posons

$$\Phi((e_i)_{i=1,\dots,4}, \varphi) = \sum_{\tilde{L}' \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}; L \subset L'} \sum_{\tilde{t} \in W^{\tilde{L}'}(L)_{\mathrm{reg}}} |\det(1 - \theta_{\tilde{t}})_{|\mathcal{A}_L/\mathcal{A}_{\tilde{L}'}}|^{-1}$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_\theta(\tilde{t})/(i\mathcal{A}^\vee_{L,F} + i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}'})} \varepsilon_{\tau_\lambda}(\tilde{t}) \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}',F}} \varphi(\lambda + \chi)\mathcal{J}_{\tilde{L}'}(\tilde{t}, \lambda + \chi)d\chi.$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, fixons une base $\mathcal{X}_k$ de l'espace des opérateurs différentiels sur $i\mathcal{A}^*_L$, à coefficients constants et d'ordre $\leq k$. Posons

$$|\varphi|_k = sup\{|X\varphi(\lambda)|; \lambda \in i\mathcal{A}^*_L, X \in \mathcal{X}_k\}.$$

Introduisons l'espace PolExp des fonctions Φ sur $\mathcal{A}_{\tilde{A}_d,F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ vérifiant la condition suivante. Soit $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{\tilde{A}_d,F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ un réseau. Alors il existe un ensemble fini $\Xi_{\mathcal{R}} \subset i\mathcal{A}^*_{\tilde{A}_d}/i\mathcal{R}^\vee$ (où $\mathcal{R}^\vee$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathcal{A}^*_{\tilde{A}_d}$ tel que $\lambda(Y) \in 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout $Y \in \mathcal{R}$) et, pour tout $\xi \in \Xi_{\mathcal{R}}$, il existe un polynôme $p_{\mathcal{R},\xi}$ sur $\mathcal{A}_{\tilde{A}_d}$ de sorte que

$$\Phi(Y) = \sum_{\xi \in \Xi_{\mathcal{R}}} e^{\xi(Y)} p_{\mathcal{R},\xi}(Y)$$

pour tout $Y \in \mathcal{R}$. Un tel développement est unique. On pose $c_{\mathcal{R},0}(\Phi) = p_{\mathcal{R},0}(0)$.

Proposition 6.4. — (i) *La fonction* $\lambda \mapsto \mathcal{J}_{\tilde{L}'}(\tilde{t}, \lambda)$ *est* C^∞.

(ii) *Il existe une unique fonction* $\Phi_{(e_i)_{i=1,\dots,4},\varphi} \in$ PolExp *de sorte que*

(a) *pour tout réseau* $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{\tilde{A}_d,F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$,

$$\lim_{k \to \infty} p_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(\Phi_{(e_i)_{i=1,\dots,4},\varphi}) = \Phi((e_i)_{i=1,\dots,4}, \varphi);$$

(b) *pour tout* $R > 0$, *il existe un entier* k *et une constante* $c > 0$ *dépendant de* R *et des* e_i *mais pas de* φ, *de sorte que*

$$|\Phi_Y((e_i)_{i=1,\dots,4}, \varphi) - \Phi_{(e_i)_{i=1,\dots,4},\varphi}(Y)| \leq c|\varphi|_k|Y|^{-R}$$

pour tout $Y \in \mathcal{D}$.

Démonstration. — L'existence d'un élément de $\Phi_{(e_i)_{i=1,\dots,4},\varphi} \in$ PolExp vérifiant la propriété (ii)(b) est le lemme 3.19 de **[13]**, précisé par la relation 3.19(1). Un tel élément est forcément unique. Le corollaire 3.24 de **[13]** calcule $\lim_{k\to\infty} p_{\frac{1}{k}\mathcal{R},0}(\Phi_{(e_i)_{i=1,\dots,4},\varphi})$, mais exprime cette limite sous une forme différente de celle que l'on veut. Dans la preuve de la proposition 3.24 de **[13]**, on montre qu'après sommation sur un certain ensemble de quadruplets $(e_i)_{i=1,\dots,4}$, ces deux formes sont équivalentes. En fait, la même preuve vaut pour un quadruplet fixé. Cette preuve démontre en même temps l'assertion (i). □

6.7. Utilisation de la formule des traces locale tordue. — Revenons aux données de 6.5. Pour $g' \in G(F)$ et $Y \in \mathcal{D}$, on a défini $\Phi_Y(g')$ dans ce paragraphe. Soit $\tilde{L}' \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}$ tel que $L \subset L'$ et soient $\tilde{t} \in W^{\tilde{L}'}(L)_{\text{reg}}$ et $\lambda \in \Lambda_\theta(\tilde{t})$. On définit les deux $(\tilde{G}, \tilde{L}')$-familles suivantes. Pour $\tilde{Q}' \in \mathcal{P}(\tilde{L}')$ et $\mu \in i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}'}$, on pose

$$j_{\tilde{Q}'}(\tilde{t},\lambda,\mu) = \sum_{e\in\mathcal{B}_\theta^{K_{f'}}} (R_{Q|\theta_{\tilde{t}}(Q)}(\tau_\lambda)A(\tau_\lambda,\tilde{t})e, J_{Q(\bar{Q}')|Q}(\tau_\lambda)^{-1}J_{Q(\bar{Q}')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})\pi_\lambda(f')e),$$

$$d_{\tilde{Q}'}(\tilde{t},\lambda,g',\mu) = (J_{Q(Q')|Q}(\tau_\lambda)^{-1}J_{Q(Q')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})e'', R_{Q|\theta_{\tilde{t}}(Q)}(\tau_\lambda)A(\tau_\lambda,\tilde{t})\pi_\lambda(g')e').$$

Posons

$$(jd)_{\tilde{Q}'}(\tilde{t},\lambda,g',\mu) = j_{\tilde{Q}'}(\tilde{t},\lambda,\mu)d_{\tilde{Q}'}(\tilde{t},\lambda,g',\mu)c_{\tilde{Q}'}(\mu).$$

La famille $((jd)_{\tilde{Q}'}(\tilde{t},\lambda,g'))_{\tilde{Q}'\in\mathcal{P}(\tilde{L}')}$ est une $(\tilde{G},\tilde{L}')$-famille et on lui associe le nombre $(jd)_{\tilde{L}'}(\tilde{t},\lambda,g')$. Le (i) de la proposition du paragraphe précédent entraîne que ce nombre est fonction C^∞ de λ. On pose

$$\Phi(g') = \sum_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}^{\tilde{G}};L\subset L'} \sum_{\tilde{t}\in W^{\tilde{L}'}(L)_{\text{reg}}} |\det(1-\theta_{\tilde{t}})_{|\mathcal{A}_L/\mathcal{A}_{\tilde{L}'}}|^{-1}$$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_\theta(\tilde{t})/(i\mathcal{A}^\vee_{L,F}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}'})} \varepsilon_{\tau_\lambda}(\tilde{t}) \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}',F}} \varphi(\lambda+\chi)(jd)_{\tilde{L}'}(\tilde{t},\lambda+\chi,g')d\chi.$$

Proposition 6.5. — *Pour tout réel $R \geq 1$, il existe un entier $k \geq 0$ tel que l'on ait une majoration*

$$|\Phi_Y(g') - \Phi(g')| \ll \sigma(g')^k \Xi^G(g')|Y|^{-R}$$

pour tous $g' \in G(F)$ et $Y \in \mathcal{D}$.

Démonstration. — Fixons un sous-groupe ouvert compact K_0 de K, conservé par l'automorphisme θ, et qui fixe e''. La fonction $g \mapsto \tilde{u}(g,Y)$ est biinvariante par K. Dans la définition de $\Phi_Y(g')$ donnée en 6.5, on peut remplacer g par kg pour $k \in K_0$, puis intégrer en k, en divisant l'expression obtenue par mes(K_0). Cela remplace $\Phi_Y(g')$ par une expression analogue, où $\pi_\lambda(g')e'$ est remplacé par

$$\text{mes}(K_0)^{-1}\int_{K_0} \pi_\lambda(kg')e'dk.$$

Fixons une base orthonormée $\mathcal{B}_{\theta}^{K_0}$ de $(\mathcal{K}_{Q,\tau}^G)^{K_0}$. Le terme ci-dessus est égal à

$$\sum_{e_0\in\mathcal{B}_{\theta}^{K_0}}(e_0,\pi_\lambda(g')e')e_0.$$

De même, pour $e\in\mathcal{B}_{\theta}^{K_{f'}}$, on peut remplacer $\pi_\lambda(f')e$ par son expression dans la base $\mathcal{B}_{\theta}^{K_{f'}}$. On voit alors que

$$\Phi_Y(g')=\sum_{e,e_4\in\mathcal{B}_{\theta}^{K_{f'}},e_0\in\mathcal{B}_{\theta}^{K_0}}\Phi_Y(e,e_0,e'',e_4,\varphi_{e,e_0,e_4,g'}),$$

où

$$\varphi_{e,e_0,e_4,g'}(\lambda)=\varphi(\lambda)(e_4,\pi_\lambda(f')e)(e_0,\pi_\lambda(g')e').$$

La proposition du paragraphe précédent nous fournit une fonction

$$\Phi_{g'}=\sum_{e,e_4\in\mathcal{B}_{\theta}^{K_{f'}},e_0\in\mathcal{B}_{\theta}^{K_0}}\Phi_{(e,e_0,e'',e_4),\varphi_{e,e_0,e_4,g'}}.$$

Elle appartient à PolExp. Le (ii)(b) de la proposition nous dit que, pour tout réel $R\geq 1$, il existe un entier k et une constante $c>0$ indépendants de g' telle que

$$|\Phi_Y(g')-\Phi_{g'}(Y)|\leq c\,sup_{e,e_0,e_4}|\varphi_{e,e_0,e_4,g'}|_k|Y|^{-R}$$

pour tout $Y\in\mathcal{D}$. On montre que

$$sup_{e,e_0,e_4}|\varphi_{e,e_0,e_4,g'}|_k\ll\sigma(g')^k\Xi^G(g'),$$

cf. [14] 6.7. La majoration précédente devient

$$(1)\qquad |\Phi_Y(g')-\Phi_{g'}(Y)|\leq c\sigma(g')^k\Xi^G(g')|Y|^{-R}.$$

Montrons que cela entraîne que $\Phi_{g'}$ est constante. Pour cela, on peut fixer g'. Fixons c_1 et c_2 vérifiant les conditions de la proposition 6.3 pour $\eta=1/2$. Pour $Y\in\mathcal{D}$, notons N_Y la partie entière de $2c_2^{-1}|Y|+1$. Soit $Y'\in\mathcal{D}$ tel que $|Y-Y'|\leq|Y|/2$. Si $|Y|$ est assez grand, les deux couples (N_Y,Y) et (N_Y,Y') vérifient les conditions de la proposition 6.5 (et on a aussi $\sigma(g')\leq C\log(N_Y)$). Cette proposition appliquée aux deux couples entraîne

$$|\Phi_Y(g')-\Phi_{Y'}(g')|\ll N_Y^{-R}\ll|Y|^{-R}.$$

Grâce à (2), on en déduit

$$|\Phi_{g'}(Y)-\Phi_{g'}(Y')|\ll|Y|^{-R}.$$

Or un élément de PolExp qui vérifie une telle majoration pour tout $Y\in\mathcal{D}$ tel que $|Y|$ soit assez grand et tout $Y'\in\mathcal{D}$ tel que $|Y-Y'|\leq|Y|/2$ ne peut qu'être constant. Cela prouve l'assertion.

Puisque $\Phi_{g'}$ est constant, sa valeur n'est autre que $c_{\mathcal{R},0}(\Phi_{g'})$ pour tout réseau $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{\tilde{A}_d,F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. L'assertion (ii)(a) de la proposition 6.4 implique alors que cette valeur est égale à

$$\sum_{e,e_4 \in \mathcal{B}_\theta^{K_{f'}}, e_0 \in \mathcal{B}_\theta^{K_0}} \Phi(e, e_0, e'', e_4, \varphi_{e,e_0,e_4,g'}).$$

Mais on reconstitue aisément cette somme : c'est $\Phi(g')$. Alors la majoration (1) devient celle de l'énoncé. $\square$

6.8. Simplification de $\Phi(g')$. — Soit $\tilde{L}' \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}$ tel que $L \subset L'$. Fixons $\tilde{S}' = \tilde{L}'U' \in \mathcal{P}(\tilde{L}')$. Notons $\Lambda_{\theta,ell}^{\tilde{L}'}$ l'ensemble des $\lambda \in i\mathcal{A}_L^*$ tels que la représentation $\mathrm{Ind}_{Q\cap L'}^{L'}(\tau_\lambda)$ s'étende en une représentation elliptique de $\tilde{L}'(F)$. On a décrit ces représentations en 2.4. Pour tout élément λ de cet ensemble, fixons un prolongement unitaire $\tilde{\sigma}_\lambda$ de $\mathrm{Ind}_{Q\cap L'}^{L'}(\tau_\lambda)$ à $\tilde{L}'(F)$. A cette représentation est associé un caractère pondéré $J_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}_\lambda, .)$ sur $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, cf. 1.9. La représentation $\pi_\lambda = \mathrm{Ind}_Q^G(\tau_\lambda)$ s'identifie à l'induite de $S'(F)$ à $G(F)$ de la représentation précédente (remarquons que, pour les groupes linéaires, toutes ces induites sont irréductibles). Du prolongement fixé $\tilde{\sigma}_\lambda$ se déduit un prolongement $\tilde{\pi}_\lambda$ de π_λ à $\tilde{G}(F)$.

Remarquons que $\Lambda_{\theta,ell}^{\tilde{L}'}$ est invariant par translations par $i\mathcal{A}_{L,F}^\vee + i\mathcal{A}_{\tilde{L}'}^*$. On peut supposer et on suppose que, pour $\chi \in i\mathcal{A}_{L,F}^\vee + i\mathcal{A}_{\tilde{L}'}^*$, $\tilde{\sigma}_{\lambda+\chi} = (\tilde{\sigma}_\lambda)_\chi$. Rappelons que l'on a noté $a_{\tilde{L}'}$ la dimension de $\mathcal{A}_{\tilde{L}'}$ et que, pour tout $\lambda \in \Lambda_{\theta,ell}^{\tilde{L}'}$, on a défini un entier $s(\tilde{\sigma}_\lambda)$ en 2.4.

Lemme 6.6. — *Pour tout $g' \in G(F)$, on a l'égalité*

$$\Phi(g') = \sum_{\tilde{L}' \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}; L \subset L'} (-1)^{a_{\tilde{L}'}} \sum_{\lambda \in \Lambda_{\theta,ell}^{\tilde{L}'}/(i\mathcal{A}_{L,F}^\vee + i\mathcal{A}_{\tilde{L}'}^*)} 2^{-s(\tilde{\sigma}_\lambda)-a_{\tilde{L}'}}$$

$$\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{L}',F}^*} (\tilde{\pi}_{\lambda+\chi}(\boldsymbol{\theta}_d)e'', \pi_{\lambda+\chi}(g')e') J_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}_{\lambda+\chi}, \tilde{f})\varphi(\lambda+\chi)d\chi.$$

Démonstration. — Fixons $\tilde{L}' \in \mathcal{L}^{\tilde{G}}$ tel que $L \subset L'$, $\tilde{t} \in W^{\tilde{L}'}(L)_{\mathrm{reg}}$ et $\lambda \in \Lambda_\theta(\tilde{t})$. Considérons le terme $(jd)_{\tilde{L}'}(\tilde{t}, \lambda, g')$ du paragraphe précédent. Remplaçons dans les définitions des $(\tilde{G}, \tilde{L}')$-familles les opérateurs d'entrelacement par des opérateurs normalisés. Cela remplace la famille produit $((jd)_{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda, g', \mu))_{\tilde{Q}' \in \mathcal{P}(\tilde{L}')}$ par un triple produit $((jdc)_{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda, g', \mu))_{\tilde{Q}' \in \mathcal{P}(\tilde{L}')}$, où maintenant les familles $(j_{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda, \mu))_{\tilde{Q}' \in \mathcal{P}(\tilde{L}')}$ et $(d_{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda, g', \mu))_{\tilde{Q}' \in \mathcal{P}(\tilde{L}')}$ sont définies à l'aide d'opérateurs normalisés et $(c_{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda, g', \mu))_{\tilde{Q}' \in \mathcal{P}(\tilde{L}')}$ est formée des facteurs de normalisation. On a donc maintenant

$$j_{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda, \mu) = \sum_{e \in \mathcal{B}_\theta^{K_{f'}}} (R_{Q|\theta_{\tilde{t}}(Q)}(\tau_\lambda)A(\tau_\lambda, \tilde{t})e, R_{Q(\bar{Q}')|Q}(\tau_\lambda)^{-1}R_{Q(\bar{Q}')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})\pi_\lambda(f')e).$$

Puisque $\theta_{\tilde{t}}(\tau_\lambda) = \tau_\lambda$, la représentation $\mathrm{Ind}_{L'\cap Q}^{L'}(\tau_\lambda)$ s'étend en une représentation irréductible de $\tilde{L}'(F)$. Celle-ci n'a pas de raison d'être elliptique, mais on peut tout de même définir comme avant l'énoncé les représentations $\tilde{\sigma}_\lambda$ et $\tilde{\pi}_\lambda$. Considérons l'opérateur

$$R_{Q|\theta_{\tilde{t}}(Q)}(\tau_\lambda)A(\tau_\lambda,\tilde{t}).$$

En revenant à sa définition, on voit qu'il vérifie

$$\pi_\lambda(g)R_{Q|\theta_{\tilde{t}}(Q)}(\tau_\lambda)A(\tau_\lambda,\tilde{t}) = R_{Q|\theta_{\tilde{t}}(Q)}(\tau_\lambda)A(\tau_\lambda,\tilde{t})\pi_\lambda(\theta(g))$$

pour tout $g \in G(F)$. Mais $\tilde{\pi}_\lambda(\boldsymbol{\theta}_d)^{-1}$ vérifie la même propriété. Puisque π_λ est irréductible, les deux opérateurs sont proportionnels. Puisqu'ils sont tous deux unitaires, il existe un nombre complexe z de module 1 tel que

$$R_{Q|\theta_{\tilde{t}}(Q)}(\tau_\lambda)A(\tau_\lambda,\tilde{t}) = z\tilde{\pi}_\lambda(\boldsymbol{\theta}_d)^{-1}.$$

L'ensemble $\{\tilde{\pi}_\lambda(\boldsymbol{\theta}_d)e; e \in \mathscr{B}_{\theta}^{K_{f'}}\}$ est encore une base orthonormée de $(\mathscr{K}_{Q,\tau}^G)^{K_{f'}}$. Notons-la $\mathscr{B}_{\natural}^{K_{f'}}$. Par le changement de variables $e \mapsto \tilde{\pi}_\lambda(\boldsymbol{\theta}_d)e$, on obtient

$$j_{\tilde{Q}'}(\tilde{t},\lambda,\mu) = \sum_{e\in\mathscr{B}_{\natural}^{K_{f'}}} (ze, R_{Q(\bar{Q}')|Q}(\tau_\lambda)^{-1}R_{Q(\bar{Q}')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})\pi_\lambda(f')\tilde{\pi}_\lambda(\boldsymbol{\theta}_d)e).$$

En se rappelant que $f'(g) = \tilde{f}(g\boldsymbol{\theta}_d)$, on vérifie que

$$\pi_\lambda(f')\tilde{\pi}_\lambda(\boldsymbol{\theta}_d) = \tilde{\pi}_\lambda(\tilde{f}).$$

Alors

$$j_{\tilde{Q}'}(\tilde{t},\lambda,\mu) = \bar{z}\,\mathrm{trace}(R_{Q(\bar{Q}')|Q}(\tau_\lambda)^{-1}R_{Q(\bar{Q}')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})\tilde{\pi}_\lambda(\tilde{f})).$$

On peut encore remplacer le sous-groupe parabolique Q par $Q(S')$. En effet, les propriétés de composition des opérateurs d'entrelacement entraînent que

$$j_{\tilde{Q}'}(\tilde{t},\lambda,\mu) = \bar{z}\,\mathrm{trace}(R_{Q(\bar{Q}')|Q(S')}(\tau_\lambda)^{-1}R_{Q(\bar{Q}')|Q(S')}(\tau_{\lambda+\mu})r(\lambda,\mu)\tilde{\pi}_\lambda(\tilde{f})),$$

où on réalise maintenant $\tilde{\pi}_\lambda$ dans $\mathscr{K}_{Q(S'),\tau}^G$ et où

$$r(\lambda,\mu) = R_{Q(S')|Q}(\tau_{\lambda+\mu})R_{Q(S')|Q}(\tau_\lambda)^{-1}.$$

Cet opérateur ne dépend pas de Q' et une propriété familière des $(\tilde{G},\tilde{L}')$-familles entraîne qu'il disparaît quand on calcule le nombre associé $j_{\tilde{L}'}(\tilde{t},\lambda)$. Autrement dit, si on définit une $(\tilde{G},\tilde{L}')$-famille $(j'_{\tilde{Q}'}(\tilde{t},\lambda))_{\tilde{Q}'\in\mathscr{P}(\tilde{L}')}$ par

$$j'_{\tilde{Q}'}(\tilde{t},\lambda,\mu) = \bar{z}\,\mathrm{trace}(R_{Q(\bar{Q}')|Q(S')}(\tau_\lambda)^{-1}R_{Q(\bar{Q}')|Q(S')}(\tau_{\lambda+\mu})\tilde{\pi}_\lambda(\tilde{f})),$$

on a l'égalité $j_{\tilde{L}'}(\tilde{t},\lambda) = j'_{\tilde{L}'}(\tilde{t},\lambda)$. Mais on reconnaît ce dernier terme en se reportant à la définition de 1.9. On obtient

$$j_{\tilde{L}'}(\tilde{t},\lambda) = \bar{z}J_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}_\lambda,\tilde{f}).$$

Si $\tilde{Q}'' = \tilde{L}''U'' \in \mathscr{F}(\tilde{L}')$, le même calcul vaut pour les $(\tilde{L}'',\tilde{L}')$-familles déduites, c'est-à-dire que l'on a

$$j_{\tilde{L}'}^{\tilde{Q}''}(\tilde{t},\lambda) = \bar{z}J_{\tilde{L}'}^{\tilde{Q}''}(\tilde{\sigma}_\lambda,\tilde{f}).$$

On se rappelle que $\tilde{f}$ est très cuspidale. D'après le lemme 1.6(i), le terme ci-dessus est nul si $\tilde{Q}'' \neq \tilde{G}$. En appliquant les formules de descente habituelles, on obtient

$$(jdc)_{\tilde{L}'}(\tilde{t}, \lambda, g') = j_{\tilde{L}'}(\tilde{t}, \lambda) d_{\tilde{L}'}^{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda, g') c_{\tilde{L}'}^{\tilde{Q}'}(\lambda),$$

où $\tilde{Q}'$ est un élément quelconque de $\mathscr{P}(\tilde{L}')$. On vérifie que $c_{\tilde{L}'}^{\tilde{Q}'}(\lambda) = 1$ et

$$d_{\tilde{L}'}^{\tilde{Q}'}(\tilde{t}, \lambda, g') = (e'', R_{Q|\theta_{\tilde{t}}(Q)}(\tau_\lambda) A(\tau_\lambda, \tilde{t}) \pi_\lambda(g') e')$$
$$= (e'', z\tilde{\pi}_\lambda(\boldsymbol{\theta}_d)^{-1} \pi_\lambda(g') e') = z(\tilde{\pi}_\lambda(\boldsymbol{\theta}_d) e'', \pi_\lambda(g') e').$$

Les termes $z\bar{z}$ disparaissent puisque z est de module 1.Toujours d'après le lemme 1.6(i), le caractère pondéré $J_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}_\lambda, \tilde{f})$ est nul si $\tilde{\sigma}_\lambda$ est une induite propre, ce qui équivaut à ce qu'elle ne soit pas elliptique. On a obtenu

$$(jdc)_{\tilde{L}'}(\tilde{t}, \lambda, g') = \begin{cases} (\tilde{\pi}_\lambda(\boldsymbol{\theta}_d) e'', \pi_\lambda(g') e') J_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}_\lambda, \tilde{f}), & \text{si } \lambda \in \Lambda_{\theta, ell}^{\tilde{L}'}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il reste à remarquer que pour tout $\lambda \in \Lambda_{\theta, ell}^{\tilde{L}'}$, il existe exactement un $\tilde{t} \in W^{\tilde{L}'}(L)_{\text{reg}}$ tel que $\lambda \in \Lambda_\theta(\tilde{t})$ et que, pour ce $\tilde{t}$, on a $|\det(1 - \theta_{\tilde{t}})_{|\mathscr{A}_M/\mathscr{A}_{\tilde{L}'}}| = 2^{s(\tilde{\sigma}_\lambda) + a_{\tilde{L}'}}$. Ces propriétés se vérifient aisément sur la description de 2.4. Cela achève la preuve. □

6.9. Évaluation d'une limite

Lemme 6.7. — *On a l'égalité*

$$\lim_{N \to \infty} J_{L,\theta,N,C}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) = [i\mathscr{A}_\theta^\vee : i\mathscr{A}_{L,F}^\vee]^{-1} \sum_{\tilde{L}' \in \mathscr{L}^{\tilde{G}}; L \subset L'} (-1)^{a_{\tilde{L}'}}$$
$$\sum_{\lambda \in \Lambda_{\theta,ell}^{\tilde{L}'}/((i\mathscr{A}_{L,F}^\vee + i\mathscr{A}_{\tilde{L}'})} 2^{-s(\pi_\lambda^{L'}) - a_{\tilde{L}'}} \varepsilon_\nu((\tilde{\sigma}_\lambda)^\vee, \tilde{\rho}) \int_{i\mathscr{A}_{\tilde{L}',F}^*} J_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}_{\lambda+\chi}, \tilde{f}) d\chi.$$

Démonstration. — Considérons la définition de $J_{L,\theta,N,C}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f})$ donnée avant le lemme 6.2. Un calcul formel montre qu'elle ne dépend pas du choix de la base orthonormée $\mathscr{B}_\theta^{K_f}$, ni de celui du groupe K_f pourvu qu'il soit assez petit. En faisant entrer la sommation en e dans la dernière intégrale, on peut même remplacer $\mathscr{B}_\theta^{K_f}$ par une base dépendant de λ. Soit γ l'élément de $G(F)$ tel que $\tilde{y} = \gamma\boldsymbol{\theta}_d$. On a les égalités $f(g) = \tilde{f}(g\tilde{y}) = \tilde{f}(g\gamma\boldsymbol{\theta}_d) = f'(g\gamma)$ pour tout $g \in G(F)$. On peut donc supposer que $K_f = \gamma K_{f'} \gamma^{-1}$ et remplacer $\mathscr{B}_\theta^{K_f}$ par

$$\{\pi_\lambda(\gamma)e; e \in \mathscr{B}_\theta^{K_{f'}}\}.$$

On a $\pi_\lambda(f)\pi_\lambda(\gamma)e = \pi_\lambda(f')e$, et $\pi_\lambda(\theta_{\tilde{y}}(g))\pi_\lambda(\gamma)e = \pi_\lambda(\gamma)\pi_\lambda(\theta(g))e$. On obtient ainsi

$$J_{L,\theta,N,C}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) = [i\mathscr{A}_\theta^\vee : i\mathscr{A}_{L,F}^\vee]^{-1} \sum_{j=1,\dots,n}$$
$$\int_{H(F)U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma < C\log(N)}(hu)(\rho(h)\varepsilon_j, \tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon_j)\bar{\xi}(u)\Phi_{N,j}(\gamma^{-1}hu)du\,dh,$$

où

$$\Phi_{N,j}(\gamma^{-1}hu) = \sum_{e\in\mathcal{B}_{\theta}^{K_{f'}}} \int_{i\mathcal{A}^*_{L,F}} m(\tau_\lambda)\varphi_j(\lambda)$$

$$\int_{G(F)} (e_j, \pi_\lambda(f')e)(\pi_\lambda(\theta(g))e, \pi_\lambda(\gamma^{-1}hu)e_j)\kappa_N(g)dg\, d\lambda.$$

Ce terme $\Phi_{N,j}(\gamma^{-1}hu)$ est exactement le terme $\Phi_N(g')$ défini en 6.5, associé aux données auxiliaires $e' = e'' = e_j$, $\varphi = \varphi_j$, évalué au point $g' = \gamma^{-1}hu$. Notons $\Phi_{Y,j}$ et Φ_j les fonctions associées à ces données définies en 6.3 et 6.5. Remarquons que, si $\mathbf{1}_{\sigma<C\log(N)}(hu) = 1$, l'élément $g' = \gamma^{-1}hu$ vérifie l'hypothèse de la proposition 6.3, quitte à agrandir C, ce qui importe évidemment peu. Fixons c_1 et c_2 vérifiant les conditions de la proposition 6.3 pour $\eta = 1/2$ et pour tout $j = 1, \dots, n$. Si N est assez grand, on peut choisir $Y \in \mathcal{D}$ tel que $c_1N^{1/2} \leq c_2N/2 \leq |Y| \leq c_2N$. En appliquant successivement les propositions 6.3 et 6.5 pour cet Y, on obtient pour tout R une majoration

$$|\Phi_{N,j}(\gamma^{-1}hu) - \Phi_j(\gamma^{-1}hu)| \ll (1 + \sigma(hu)^{k(R)}\Xi^G(hu))N^{-R}$$

pour tout j, tout N assez grand et tous h, u tels que $\mathbf{1}_{\sigma<C\log(N)}(hu) = 1$, où $k(R)$ est un entier dépendant de R comme la notation l'indique. On peut oublier le terme $\Xi^G(hu)$ qui est borné. Posons

$$X_N = [i\mathcal{A}_\theta^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1} \sum_{j=1,\dots,n} \int_{H(F)U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma<C\log(N)}(hu)(\rho(h)\varepsilon_j, \tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon_j)\bar{\xi}(u)\Phi_j(\gamma^{-1}hu)du\, dh.$$

Alors

$$|J_{L,\theta,N,C}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) - X_N| \ll N^{-R} \int_{H(F)U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma<C\log(N)}(hu)\Xi^H(h)\sigma(hu)^{k(R)}du\, dh$$

$$\ll \log(N)^{k(R)}N^{-R} \int_{H(F)U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma<C\log(N)}(hu)\Xi^H(h)du\, dh.$$

On vérifie qu'il existe R_1 tel que l'intégrale soit bornée par N^{R_1}, cf. **[14]** 4.3(1). Puisque R est quelconque, on obtient que

$$\lim_{N\to\infty} (J_{L,\theta,N,C}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) - X_N) = 0.$$

Il reste à calculer $\lim_{N\to\infty} X_N$. En utilisant le lemme 6.6, on a

$$X_N = [i\mathcal{A}_\theta^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1} \sum_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}^{\tilde{G}};L\subset L'} (-1)^{a_{\tilde{L}'}} \sum_{\lambda\in\Lambda^{\tilde{L}'}_{\theta,ell}/(i\mathcal{A}^\vee_{L,F}+i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}'})} 2^{-s(\tilde{\sigma}_\lambda)-a_{\tilde{L}'}}$$

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{L}',F}} J^{\tilde{G}}_{\tilde{L}'}(\tilde{\sigma}_{\lambda+\chi}, \tilde{f}) \sum_{j=1,\dots,n} \varphi_j(\lambda+\chi)$$

$$\int_{H(F)U(F)_c} \mathbf{1}_{\sigma<C\log(N)}(hu)(\rho(h)\varepsilon_j, \tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon_j)(\tilde{\pi}_{\lambda+\chi}(\boldsymbol{\theta}_d)e_j, \pi_{\lambda+\chi}(\gamma^{-1}hu)e_j)\bar{\xi}(u)du\, dh\, d\chi.$$

Les permutations d'intégrales sont justifiées par la convergence absolue de cette expression, qui provient elle-même de la convergence de

$$\int_{H(F)U(F)_c} \Xi^H(h)\Xi^G(hu)du\,dh,$$

cf. 4.1(3). Pour la même raison, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour calculer

(1) $$\lim_{N\to\infty} X_N = [i\mathcal{A}_\theta^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1} \sum_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}^{\tilde{G}};L\subset L'} (-1)^{a_{\tilde{L}'}} \sum_{\lambda\in\Lambda_{\theta,ell}^{\tilde{L}'}/(i\mathcal{A}_{L,F}^\vee+i\mathcal{A}_{\tilde{L}'}^*)} 2^{-s(\tilde{\sigma}_\lambda)-a_{\tilde{L}'}}$$

$$\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{L}',F}^*} J_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}_{\lambda+\chi},\tilde{f}) \sum_{j=1,\dots,n} \varphi_j(\lambda+\chi)$$

$$\int_{H(F)U(F)_c} (\rho(h)\varepsilon_j,\tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon_j)(\tilde{\pi}_{\lambda+\chi}(\boldsymbol{\theta}_d)e_j,\pi_{\lambda+\chi}(\gamma^{-1}hu)e_j)\bar{\xi}(u)du\,dh\,d\chi.$$

On a l'égalité

$$(\tilde{\pi}_{\lambda+\chi}(\boldsymbol{\theta}_d)e_j,\pi_{\lambda+\chi}(\gamma^{-1}hu)e_j) = (\tilde{\pi}_{\lambda+\chi}(\tilde{y})e_j,\pi_{\lambda+\chi}(hu)e_j).$$

On reconnaît alors la dernière intégrale en h, u : elle vaut

$$\mathcal{L}_{\pi_{\lambda+\chi},\rho}(\varepsilon_j\otimes\tilde{\pi}_{\lambda+\chi}(\tilde{y})e_j,\tilde{\rho}(\tilde{y})\varepsilon_j\otimes e_j).$$

D'après la proposition 5.5, c'est aussi

$$\varepsilon_\nu((\tilde{\pi}_{\lambda+\chi})^\vee,\tilde{\rho})\mathcal{L}_{\pi_{\lambda+\chi},\rho}(\varepsilon_j\otimes e_j,\varepsilon_j\otimes e_j).$$

Par définition des familles $(\varepsilon_j)_{j=1,\dots,n}$, $(e_j)_{j=1,\dots,n}$ et $(\varphi_j)_{j=1,\dots,n}$, on a l'égalité

$$\sum_{j=1,\dots,n} \varphi_j(\lambda+\chi)\mathcal{L}_{\pi_{\lambda+\chi},\rho}(\varepsilon_j\otimes e_j,\varepsilon_j\otimes e_j) = 1.$$

D'après 2.5(2), on a $\varepsilon_\nu((\tilde{\pi}_{\lambda+\chi})^\vee,\tilde{\rho}) = \varepsilon_\nu((\tilde{\sigma}_\lambda)^\vee,\tilde{\rho})$. Mais alors le membre de droite de la formule (1) devient celui de l'égalité de l'énoncé. □

6.10. Preuve du théorème 6.1. — Les lemmes 6.2 et 6.7 prouvent que $J_N(\Theta_{\tilde{\rho}},\tilde{f})$ a une limite quand N tend vers l'infini et ils calculent cette limite. En intervertissant les sommations en L et $\tilde{L}'$, on obtient

(1) $$\lim_{N\to\infty} J_N(\Theta_{\tilde{\rho}},\tilde{f}) = \sum_{\tilde{L}'\in\mathcal{L}^{\tilde{G}}} (-1)^{a_{\tilde{L}'}}|W^G|^{-1}X(\tilde{L}'),$$

où

$$X(\tilde{L}') = \sum_{L\in\mathcal{L}^{L'}(A_d)} |W^L| \sum_{\mathcal{O}\in\{\Pi_2(L)\}_f} [i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1}$$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_{\mathcal{O},ell}^{\tilde{L}'}/((i\mathcal{A}_{L,F}^\vee+i\mathcal{A}_{\tilde{L}'}^*)} 2^{-s(\sigma_\lambda)-a_{\tilde{L}'}}\varepsilon_\nu((\tilde{\sigma}_\lambda)^\vee,\tilde{\rho}) \int_{i\mathcal{A}_{L',F}^*} J_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}_{\lambda+\chi},\tilde{f})d\chi.$$

Fixons $\tilde{L}'$. Dans la formule ci-dessus, on peut remplacer la sommation sur $\mathcal{O}\in\{\Pi_2(L)\}_f$ par une sommation sur tout $\{\Pi_2(L)\}$: pour une orbite dans le complémentaire, les fonctions $J_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}_{\lambda+\chi},\tilde{f})$ sont nulles. Considérons l'ensemble $\mathcal{Z}$ des triplets $(L,\mathcal{O},\lambda)$ intervenant dans $X(\tilde{L}')$. A un tel triplet, associons l'orbite de $\tilde{\sigma}_\lambda$ sous l'action de $i\mathcal{A}_{\tilde{L}'}^*$. On obtient une application $\iota : \mathcal{Z} \to \{\Pi_{ell}(\tilde{L}')\}$. Cette application est surjective. D'où

$$X(\tilde{L}') = \sum_{\mathcal{O}'\in\{\Pi_{ell}(\tilde{L}')\}} x(\mathcal{O}')\int_{i\mathcal{A}_{\tilde{L}',F}^*} J_{\tilde{L}'}^{\tilde{G}}(\tilde{\sigma}'_\chi,\tilde{f})d\chi,$$

où, dans chaque orbite $\mathcal{O}'$, on a fixé un point base $\tilde{\sigma}'$, et où on a posé

$$(2)\qquad x(\mathcal{O}') = \sum_{z=(L,\mathcal{O},\lambda)\in\mathcal{Z},\iota(z)=\mathcal{O}'} |W^L|[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1}2^{-s(\tilde{\sigma}_\lambda)-a_{\tilde{L}'}}\varepsilon_\nu((\tilde{\sigma}_\lambda)^\vee,\tilde{\rho}).$$

Fixons $\mathcal{O}'$ et notons $\mathcal{Z}'$ l'ensemble des triplets $(L,\mathcal{O},\lambda)$ vérifiant les conditions suivantes. Les termes L et $\mathcal{O}$ sont comme ci-dessus. L'élément λ appartient à $\Lambda_{\mathcal{O},ell}^{\tilde{L}'}/i\mathcal{A}_{L,F}^\vee$. On impose que $\tilde{\sigma}_\lambda \simeq \tilde{\sigma}'$. Les projections de $\Lambda_{\mathcal{O},ell}^{\tilde{L}'}/i\mathcal{A}_{L,F}^\vee$ sur $\Lambda_{\mathcal{O},ell}^{\tilde{L}'}/(i\mathcal{A}_{L,F}^\vee + i\mathcal{A}_{\tilde{L}'}^*)$ induisent une surjection de $\mathcal{Z}$ sur la fibre de ι au-dessus de $\mathcal{O}'$. Deux éléments $(L,\mathcal{O},\lambda)$ et $(L_1,\mathcal{O}_1,\lambda_1)$ de $\mathcal{Z}'$ ont même image dans $\mathcal{Z}$ si et seulement si $L_1 = L$, $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}$ et il existe $\chi \in i\mathcal{A}_{\tilde{L}'}^*$ tel que $\lambda_1 = \lambda+\chi$. La condition $\tilde{\sigma}_\lambda = \tilde{\sigma}_{\lambda_1} = \tilde{\sigma}'$ impose que $\chi \in i\mathcal{A}_{\mathcal{O}'}^\vee$. Autrement dit, ce sont des orbites pour les actions du groupe $i\mathcal{A}_{\mathcal{O}'}^\vee$ sur les espaces $i\mathcal{A}_L^*/i\mathcal{A}_{L,F}^\vee$. Puisque $i\mathcal{A}_{\tilde{L}'}^*\cap i\mathcal{A}_{L,F}^\vee = i\mathcal{A}_{\tilde{L}',F}^\vee$, toutes les fibres ont pour nombre d'éléments $[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}'}^\vee : i\mathcal{A}_{\tilde{L}',F}^\vee]$. Dans (2), on peut remplacer la sommation sur les $z \in \mathcal{Z}$ tels que $\iota(z) = \mathcal{O}'$ par une sommation sur les $z \in \mathcal{Z}'$, à condition de diviser par $[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}'}^\vee : i\mathcal{A}_{\tilde{L}',F}^\vee]$. Fixons $(L,\mathcal{O},\lambda) \in \mathcal{Z}'$ et soit $(L_1,\mathcal{O}_1,\lambda_1)$ un autre élément. D'après Harish-Chandra, la condition $\tilde{\sigma}_\lambda \simeq \tilde{\sigma}' \simeq \tilde{\sigma}_{1,\lambda_1}$ équivaut à l'existence de $w \in W^{L'}$ tel que $L_1 = wLw^{-1}$, $\mathcal{O}_1 = w\mathcal{O}$ et $\tau_{1,\lambda_1} \simeq (w\tau)_{w\lambda}$. Il en résulte d'abord que les termes associés à $(L_1,\mathcal{O}_1,\lambda_1)$ qui apparaissent dans (2) sont égaux à ceux associés à $(L,\mathcal{O},\lambda)$. Donc

$$(3)\qquad x(\mathcal{O}') = |\mathcal{Z}'|[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}'}^\vee : i\mathcal{A}_{\tilde{L}',F}^\vee]^{-1}|W^L|[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]^{-1}2^{-s(\tilde{\sigma}_\lambda)-a_{\tilde{L}'}}\varepsilon_\nu((\tilde{\sigma}_\lambda)^\vee,\tilde{\rho}).$$

D'autre part, pour $w \in W^{L'}$, soit $\Lambda(w)$ l'ensemble des $\lambda_1 \in \Lambda_{w\mathcal{O},ell}^{\tilde{L}'}/i\mathcal{A}_{wLw^{-1},F}^\vee$ tels que $\tau_{1,\lambda_1} \simeq (w\tau)_{w\lambda}$ (où τ_1 est le point base fixé dans $\mathcal{O}_1 = w\mathcal{O}$). Posons $\mathcal{Z}'' = \{(w,\lambda_1); w \in W; \lambda_1 \in \Lambda(w)\}$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}'' & \to & \mathcal{Z}' \\ (w,\lambda_1) & \mapsto & (wLw^{-1},w\mathcal{O},\lambda_1) \end{array}$$

est surjective. Ses fibres ont toutes le même nombre d'éléments, à savoir le nombre de $w \in W^{L'}$ tels que $wLw^{-1} = L$ et $w\tau_\lambda \simeq \tau_\lambda$. Il résulte de la description de 2.4 que cet ensemble se réduit à W^L. D'autre part, les ensembles $\Lambda(w)$ ont tous le même nombre d'éléments, à savoir $[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]$. On obtient

$$|\mathcal{Z}''| = |W^{L'}|[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee],$$

$$|\mathcal{Z}'| = |\mathcal{Z}''||W^L|^{-1} = |W^{L'}|[i\mathcal{A}_{\mathcal{O}}^\vee : i\mathcal{A}_{L,F}^\vee]|W^L|^{-1}.$$

On reporte cette valeur dans l'expression (3). Cela calcule explicitement $X(\tilde{L}')$. On reporte cette valeur dans l'expression (1) et on obtient le théorème 6.1. □

7. Une formule intégrale calculant une valeur d'un facteur ε

7.1. Énoncé du théorème. — On considère la situation de 3.1. Soient $\tilde{\pi} \in \mathrm{Temp}(\tilde{G})$ et $\tilde{\rho} \in \mathrm{Temp}(\tilde{H})$. On reprend les définitions de 3.2, en particulier on introduit l'ensemble $\mathcal{T}$. Soit $\tilde{T} \in \mathcal{T}$. Aux caractères $\Theta_{\tilde{\pi}}$ et $\Theta_{\tilde{\rho}}$ sont associées des fonctions $c_{\Theta_{\tilde{\pi}}}$ et $c_{\Theta_{\tilde{\rho}}}$ sur $\tilde{T}(F)_{/\theta}$. On les note simplement $c_{\tilde{\pi}}$ et $c_{\tilde{\rho}}$. On pose

$$\varepsilon_{\text{géom},\nu}(\tilde{\pi}, \tilde{\rho}) = \sum_{\tilde{T} \in \mathcal{T}} |W(H, \tilde{T})|^{-1} \int_{\tilde{T}(F)_{/\theta}} c_{\tilde{\pi}}(\tilde{t}) c_{\tilde{\rho}}(\tilde{t}) D^{\tilde{H}}(\tilde{t}) \Delta_r(\tilde{t}) d\tilde{t}.$$

On rappelle que l'on a défini un nombre $\varepsilon_\nu(\tilde{\pi}, \tilde{\rho})$ en 2.5.

Théorème 7.1. — *Pour tous $\tilde{\pi} \in \mathrm{Temp}(\tilde{G})$ et $\tilde{\rho} \in \mathrm{Temp}(\tilde{H})$, on a l'égalité*

$$\varepsilon_{\text{géom},\nu}(\tilde{\pi}, \tilde{\rho}) = \varepsilon_\nu(\tilde{\pi}, \tilde{\rho}).$$

7.2. Terme géométrique et induction. — Soient Γ un quasi-caractère sur $\tilde{G}(F)$ et Θ un quasi-caractère sur $\tilde{H}(F)$. Posons

$$\Xi_\nu(\Gamma, \Theta) = \Xi_{-\nu}(\Theta, \Gamma) = \sum_{\tilde{T} \in \mathcal{T}} |W(H, \tilde{T})|^{-1} \int_{\tilde{T}(F)_{/\theta}} c_\Gamma(\tilde{t}) c_\Theta(\tilde{t}) D^{\tilde{H}}(\tilde{t}) \Delta_r(\tilde{t}) d\tilde{t}.$$

Considérons un Lévi tordu $\tilde{L}$ de $\tilde{G}$. On reprend les notations de 2.3, en particulier, on introduit une décomposition

$$V = V_u \oplus \cdots \oplus V_1 \oplus V_0 \oplus V_{-1} \oplus \cdots \oplus V_{-u}$$

telle que $\tilde{L}$ soit l'ensemble des éléments $\tilde{x} \in \tilde{G}$ tels que $\tilde{x}(V_j) = V_{-j}^*$ pour tout $j = -u, \ldots, u$. On a

$$L = GL_{d_u} \times \cdots \times GL_{d_1} \times GL_{d_0} \times GL_{d_1} \times \cdots \times GL_{d_u}.$$

On introduit le groupe tordu $\tilde{G}_0$ analogue de $\tilde{G}$ quand on remplace d par d_0.

Remarque. — Les termes V_0 et G_0 n'ont plus la même signification qu'en 3.1.

Soient Γ_0 un quasi-caractère sur $\tilde{G}_0(F)$ et, pour tout $j = 1, \ldots, u$, soit Γ_j un quasi-caractère sur $GL_{d_j}(F)$. Pour $j = 1, \ldots, u$, le quasi-caractère Γ_j admet un développement au voisinage de l'élément neutre, avec des coefficients $c_{\Gamma_j, \mathcal{O}}(1)$, où $\mathcal{O}$ parcourt les orbites nilpotentes de $\mathfrak{gl}_j(F)$. Il y a une unique orbite nilpotente régulière, notons-la $\mathcal{O}_{\text{reg}}$. On pose

$$\Xi(\Gamma_j) = c_{\Gamma_j, \mathcal{O}_{\text{reg}}}(1).$$

Si $d_0 = \dim(V_0) > m = \dim(W)$, posons $r_0 = (d_0 - m - 1)/2$ et notons Z_0, resp. Z_0^* le sous-espace de Z, resp. Z^* engendré par les vecteurs z_i, resp. z_i^*, pour $i = -r_0, \ldots, r_0$. Quitte à conjuguer $\tilde{L}$, on peut supposer que $V_0 = W \oplus Z_0$. On note $\tilde{\zeta}_0 \in \mathrm{Isom}(Z_0, Z_0^*)$ la restriction de $\tilde{\zeta}$, cf. 3.1, et on définit le plongement $\iota_0 : \tilde{H} \to \tilde{G}_0$

comme en 3.1, en remplaçant $\tilde{\zeta}$ par $\tilde{\zeta}_0$. En appliquant les constructions précédentes au couple $(\tilde{H}, \tilde{G}_0)$, on définit le nombre $\Xi_\nu(\Gamma_0, \Theta)$.

Si $d_0 < m$, posons $r_0 = (m-d_0-1)/2$. Quitte à conjuguer $\tilde{L}$, on peut supposer $V_0 \subset W$. On fixe un supplémentaire Z_0 de V_0 dans W et une base $(z_{0,i})_{i=-r_0,\dots,r_0}$ de Z_0. On identifie W^* à $V_0^* \oplus Z_0^*$. On note $(z_{0,i}^*)_{i=-r_0,\dots,r_0}$ la base de Z_0^* duale de $(z_{0,i})_{i=-r_0,\dots,r_0}$. On définit $\tilde{\zeta}_0 \in \mathrm{Isom}(Z_0, Z_0^*)$ par $\tilde{\zeta}(z_{0,i}) = (-1)^{i+1} 2\nu z_{0,i}^*$. Remarquons que le signe n'est pas le même qu'en 3.1 : on a remplacé ν par $-\nu$. En utilisant ces données, on définit un plongement $\iota_0 : \tilde{G}_0 \to \tilde{H}$. En appliquant les constructions précédentes au couple $(\tilde{G}_0, \tilde{H})$, on définit le nombre $\Xi_\nu(\Gamma_0, \Theta)$ (le changement de signe de ν compense l'inversion entre les rôles des deux groupes tordus).

Considérons la fonction $\Gamma^{\tilde{L}}$ sur $\tilde{L}(F)$ définie par

$$\Gamma^{\tilde{L}}(\tilde{x}) = \Gamma_0(\tilde{x}_0) \prod_{j=1,\dots,t} \Gamma_j({}^t\tilde{x}_{-j}^{-1}\tilde{x}_j).$$

On vérifie que c'est un quasi-caractère. On peut l'induire en un quasi-caractère $\Gamma = \mathrm{Ind}_{\tilde{L}}^{\tilde{G}}(\Gamma^{\tilde{L}})$, cf. 1.12, puis on définit comme ci-dessus $\Xi_\nu(\Gamma, \Theta)$.

Lemme 7.2. — *Sous ces hypothèses, on a l'égalité*

$$\Xi_\nu(\Gamma, \Theta) = \Xi_\nu(\Gamma_0, \Theta) \prod_{j=1,\dots,u} \Xi(\Gamma_j).$$

Démonstration. — Supposons d'abord $d_0 > m$. En plus de l'hypothèse déjà faite sur V_0, on peut supposer que, pour tout $j = 1, \dots, u$, il y a un sous-ensemble $I_j \subset \{r_0+1, \dots, r\}$ tel que V_j, resp. V_{-j}, soit engendré par les vecteurs z_i pour $i \in D_j$, resp. les z_{-i} pour $i \in D_j$. Alors $\tilde{H} \subset \tilde{L}$. Considérons les formules qui définissent $\Xi_\nu(\Gamma, \Theta)$ et $\Xi_\nu(\Gamma_0, \Theta)$. On voit que les ensembles $\mathcal{T}$ qui y apparaissent sont les mêmes. Fixons $\tilde{T} \in \mathcal{T}$. Les fonctions c_Θ sont aussi les mêmes, ainsi que les fonctions $D^{\tilde{H}}$. La fonction Δ_r de la première formule est changée en Δ_{r_0}. En introduisant la décomposition $W = W' \oplus W''$ attachée à $\tilde{T}$, on a

$$\Delta_r(\tilde{t}) = |2|_F^a |\det((1-t)_{|W'})|_F^{r-r_0} \Delta_{r_0}(\tilde{t})$$

pour tout $\tilde{t} \in \tilde{T}(F)$, où $t = {}^t\tilde{t}^{-1}\tilde{t}$ et

$$a = r^2 + r - r_0^2 - r_0 + (r - r_0)\dim(W'').$$

Pour démontrer l'égalité cherchée, il suffit de prouver que, pour un élément général $\tilde{t} \in \tilde{T}(F)$, on a l'égalité

$$(1) \qquad c_\Gamma(\tilde{t})|2|_F^a |\det((1-t)_{|W'})|_F^{r-r_0} = c_{\Gamma_0}(\tilde{t}) \prod_{j=1,\dots,t} \Xi(\Gamma_j).$$

A $\tilde{T}$ est associée une décomposition $V = W' \oplus V''$ et V'' est muni d'une forme quadratique $\tilde{\zeta}_{G,T}$. De même, on a $V_0 = W' \oplus V_0''$, où $V_0'' = V'' \cap V_0$ et V_0'' est muni de la forme quadratique $\tilde{\zeta}_{G_0,T}$, égale à la restriction de $\tilde{\zeta}_{G,T}$. Soit $\tilde{t} \in \tilde{T}(F)$ en position générale. Alors $G_{\tilde{t}} = T_\theta \times G''_{\tilde{t}}$, où $G''_{\tilde{t}} = SO(V'')$, et $G_{0,\tilde{t}} = T_\theta \times G''_{0,\tilde{t}}$, où $G''_{0,\tilde{t}} = SO(V_0'')$. On a $c_\Theta(\tilde{t}) = c_{\Theta,\mathcal{O}}(\tilde{t})$, où $\mathcal{O}$ est une certaine orbite nilpotente régulière de $\mathfrak{g}''_{\tilde{t}}(F)$. Ce coefficient est calculé par le lemme 1.5. Dans ce qui suit, on utilise les notations de ce lemme.Montrons que

(2) l'ensemble $\mathcal{X}^{\tilde{L}}(\tilde{t})$ n'a qu'un élément, que l'on peut supposer être $\tilde{t}$ lui-même.

Soit $g \in G(F)$ tel que $g\tilde{t}g^{-1} \in \tilde{L}(F)$. Alors $g^{-1}A_{\tilde{L}}g$ est inclus dans $G_{\tilde{t}}$. C'est un tore déployé. Par définition de $\mathcal{T}$, T_θ ne contient pas de tore déployé non trivial, donc $g^{-1}A_{\tilde{L}}g \subset G''_{\tilde{t}}$. Les espaces V_j sont déterminés par le tore $A_{\tilde{L}}$: ce sont des espaces propres pour l'action de ce tore dans V. L'inclusion précédente entraîne que $g^{-1}V_j \subset V''$ pour tout $j = \pm 1, \dots, \pm u$. On a mieux. Parce que $g\tilde{t}g^{-1}$ appartient à $\tilde{L}(F)$, les espaces V_j sont isotropes pour la forme bilinéaire $g\tilde{t}g^{-1}$ et deux espaces V_j et V_{-j} sont en dualité pour cette forme. Il en est donc de même pour les espaces $g^{-1}V_j$, relativement à la forme $\tilde{\zeta}_{G,T}$. Mais les espaces V_j eux-mêmes vérifient les mêmes conditions, et, bien sûr, $\dim(V_j) = \dim(g^{-1}V_j)$. Sauf dans le cas exceptionnel expliqué ci-dessous, deux telles familles de sous-espaces isotropes, dont les dimensions se correspondent, se déduisent l'une de l'autre par l'action d'un élément de $G''_{\tilde{t}}(F)$. Le cas exceptionnel est celui où $\dim(V'')$ est paire et V'' est égal à la somme des sous-espaces isotropes. Il y a dans ce cas deux classes de conjugaison de telles familles. Mais ce cas ne se produit pas car l'inégalité $d_0 > m$ entraîne que $V''_0 \neq \{0\}$ et V'' ne peut pas être égal à la somme des V_j pour $j = \pm 1, \dots, \pm u$. Donc, quitte à multiplier g à droite par un élément de $G''_{\tilde{t}}(F)$, on peut supposer $gV_j = V_j$ pour tout $j = \pm 1, \dots, \pm u$. Les égalités $g\tilde{t}g^{-1}(V_j) = V^*_{-j} = \tilde{t}(V_j)$ entraînent ${}^tgV^*_j = V^*_j$. Par dualité, cela implique que gV_0 est annulé par V^*_j pour tout $j = \pm 1, \dots, \pm u$, donc $gV_0 = V_0$. Mais alors $g \in L(F)$ et $g\tilde{t}g^{-1}$ appartient à la classe de conjugaison par $L(F)$ de $\tilde{t}$. Cela prouve (2).

L'ensemble $\Gamma_{\tilde{t}}$ du lemme 1.5 est celui des $g \in G(F)$ tels que $g\tilde{t}g^{-1} = \tilde{t}$, autrement dit $\Gamma_{\tilde{t}} = Z_G(\tilde{t})(F) = T(F)^\theta \times O(V'')(F) = T_\theta(F) \times O(V'')(F)$. Remarquons que, dans le lemme 1.5, l'élément g n'intervient que par l'intermédiaire de l'orbite $g\mathcal{O}$. Or les orbites nilpotentes régulières dans l'algèbre de Lie d'un groupe spécial orthogonal sont invariantes par l'action du groupe orthogonal tout entier. On peut donc remplacer la somme en g par la valeur en $g = 1$ multipliée par le nombre d'éléments de $\Gamma_{\tilde{t}}/G_{\tilde{t}}(F)$, c'est-à-dire par $[O(V'')(F) : SO(V'')(F)]$. On calcule

$$(3) \qquad Z_L(\tilde{t})(F) \simeq T(F)^\theta \times O(V''_0) \times \prod_{j=1,\dots,u} GL_{d_j}(F) =\simeq T_\theta(F) \times O(V''_0) \times \prod_{j=1,\dots,u} GL_{d_j}(F).$$

Les deux premiers termes sont des sous-groupes de $GL_{d_0}(F)$. Pour $j = 1, \dots, u$, un élément $g_j \in GL_{d_j}(F)$ agit de façon naturelle dans V_j et par $g_j^\sharp$ dans V_{-j}, où $g_j^\sharp$ est tel que le couple $(g_j, g_j^\sharp)$ appartienne au groupe spécial orthogonal de $V_j \oplus V_{-j}$.On en déduit l'égalité

$$[O(V'')(F) : SO(V'')(F)] = [Z_L(\tilde{t})(F) : L_{\tilde{t}}(F)],$$

et la formule du lemme 1.5 devient simplement

$$(4) \qquad c_{\Gamma,\mathcal{O}}(\tilde{t}) = D^{\tilde{G}}(\tilde{t})^{-1/2} D^{\tilde{L}}(\tilde{t})^{1/2} c_{\Gamma^{\tilde{L}},\mathcal{O}^L}(\tilde{t}),$$

où $\mathcal{O}^L$ est l'unique orbite nilpotente régulière de $\mathfrak{l}_{\tilde{t}}(F)$ telle que $[\mathcal{O}:\mathcal{O}^L]=1$. Le calcul du produit des deux premiers facteurs est similaire au calcul du terme $d(\tilde{x})$ que l'on a fait en 3.4. On le laisse au lecteur. Le résultat est

$$(5)\qquad D^{\tilde{G}}(\tilde{t})^{-1/2}D^{\tilde{L}}(\tilde{t})^{1/2}=|2|_F^{-a+b}|\det((1-t)_{|W'})|_F^{r_0-r},$$

où $b=\sum_{j=1,\dots,u}d_j(d_j-1)/2$. Il reste à calculer $c_{\Gamma^{\tilde{L}},\mathcal{O}^L}(\tilde{t})$. Rappelons que, pour $\mathcal{O}'\in \mathrm{Nil}(\mathfrak{l}_{\tilde{t}})$, le coefficient $c_{\Gamma^{\tilde{L}},\mathcal{O}'}(\tilde{t})$ est déterminé par le développement en combinaison linéaire de transformées de Fourier d'intégrales orbitales nilpotentes de la fonction $X\mapsto \Gamma^{\tilde{L}}(\tilde{t}\exp(X))$ au voisinage de 0 dans $\mathfrak{l}_{\tilde{t}}(F)$. En vertu de (2), X se décompose en $X_0+\sum_{j=1,\dots,u}X_j$, avec $X_0\in\mathfrak{g}_{0,\tilde{t}}(F)$ et, pour tout $j=1,\dots,u$, $X_j\in\mathfrak{gl}_{d_j}(F)$. De même, une orbite $\mathcal{O}'$ se décompose en $\mathcal{O}_0+\sum_{j=1,\dots,u}\mathcal{O}_j$. Si on pose $\tilde{x}=\tilde{t}\exp(X)$, on a $\tilde{x}_0=\tilde{t}\exp(X_0)$ tandis que ${}^t\tilde{x}_{-j}\tilde{x}_j=\exp(2X_j)$ pour $j=1,\dots,u$. Donc

$$\Gamma^{\tilde{L}}(\tilde{t}\exp(X))=\Gamma_0(\tilde{t}\exp(X_0))\prod_{j=1,\dots,u}\Gamma_j(\exp(2X_j)).$$

On en déduit que, pour une orbite $\mathcal{O}'=\mathcal{O}_0+\sum_{j=1,\dots,u}\mathcal{O}_j$, on a l'égalité

$$c_{\Gamma^{\tilde{L}},\mathcal{O}'}(\tilde{t})=c_{\Gamma_0,\mathcal{O}_0}(\tilde{t})\prod_{j=1,\dots,u}\gamma(\mathcal{O}_j)c_{\Gamma_j,\mathcal{O}_j}(1),$$

où $\gamma(\mathcal{O}_j)$ est le nombre complexe tel que $\hat{j}^{GL_{d_j}}(\mathcal{O}_j,2X)=\gamma(\mathcal{O}_j)\hat{j}^{GL_{d_j}}(\mathcal{O}_j,X)$. On vérifie sur la définition de $\mathcal{O}$ donnée en 3.2 que $\mathcal{O}^L$ est la somme de l'orbite $\mathcal{O}_0$ de $\mathfrak{g}''_{0,\tilde{t}}(F)$ qui intervient dans la définition de $c_{\Gamma_0}(\tilde{t})$ et, pour tout $j=1,\dots,u$, de l'unique orbite régulière de $\mathfrak{gl}_{d_j}(F)$, notons-la $\mathcal{O}_{j,\mathrm{reg}}$. Pour cette orbite, $\gamma(\mathcal{O}_{j,\mathrm{reg}})=|2|_F^{-d_j(d_j-1)/2}$, cf. par exemple **[12]** 2.6(1). Alors

$$(6)\qquad c_{\Gamma^{\tilde{L}},\mathcal{O}^L}(\tilde{t})=c_{\Gamma_0,\mathcal{O}_0}(\tilde{t})|2|_F^{-b}\prod_{j=1,\dots,u}\Xi(\Gamma_j).$$

Les formules (4), (5) et (6) entraînent l'égalité (1) cherchée.

Passons au cas où $d_0<m$. Considérons l'espace $Z''=Z\oplus Z_0$ muni de la forme quadratique $\tilde{\zeta}''=\tilde{\zeta}\oplus\tilde{\zeta}_0$. Il est de dimension $2r''$, où $r''=r+r_0+1$. Le noyau anisotrope du sous-espace Z est la forme $x\mapsto 2\nu x^2$ tandis que le noyau anisotrope du sous-espace Z_0 est $x\mapsto -2\nu x^2$. L'espace total $Z\oplus Z_0$ est donc hyperbolique. On peut en fixer une base $(z''_i)_{i=\pm1,\dots,\pm r''}$ hyperbolique, c'est-à-dire telle que $\tilde{\zeta}''z''_i=z''^{*}_{-i}$. Quitte à conjuguer $\tilde{L}$, on peut supposer que, pour tout $j=1,\dots,u$, il existe un sous-ensemble $I_j\subset\{1,\dots,r''\}$ tel que V_j soit engendré par les z''_i pour $i\in I_j$ tandis que V_{-j} est engendré par les z''_{-i} pour $i\in I_j$. Alors l'image du composé des deux plongements $\tilde{G}_0\subset\tilde{H}\subset\tilde{G}$ est incluse dans $\tilde{L}$.

Les ensembles de tores tordus qui interviennent dans les définitions de $\Xi_\nu(\Gamma,\Theta)$ et $\Xi_\nu(\Gamma_0,\Theta)$ ne sont plus les mêmes, notons-les $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_0$. Le premier est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $H(F)$ dans un ensemble $\underline{\mathcal{T}}$. Le second est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G_0(F)$ dans un ensemble $\underline{\mathcal{T}}_0$. On a plongé $\tilde{G}_0$ dans $\tilde{H}$. Via ce plongement, on a

(7) $\underline{\mathcal{T}}_0 \subset \underline{\mathcal{T}}$.

Soit $\tilde{T} \in \underline{\mathcal{T}}_0$. A $\tilde{T}$ sont associées des décompositions $V_0 = V' \oplus V_0''$, $W = V' \oplus W''$, $V = V' \oplus V''$. Les espaces V_0'', W'' et V'' sont munis de formes quadratiques. Pour montrer que $\tilde{T}$ appartient à $\underline{\mathcal{T}}$, la seule condition non évidente est de vérifier que les groupes spéciaux orthogonaux de W'' et V'' sont quasi-déployés. Celui de W'' l'est par définition de $\underline{\mathcal{T}}_0$. Celui de V_0'' aussi. Mais $V'' = Z'' \oplus V_0''$. Comme on l'a déjà dit, la forme quadratique sur Z'' est hyperbolique. Donc le groupe spécial orthogonal de V_0'' est quasi-déployé si et seulement si celui de V'' l'est. D'où (7).

Montrons que

(8) deux éléments de $\underline{\mathcal{T}}_0$ sont conjugués par un élément de $G_0(F)$ si et seulement s'ils le sont par un élément de $H(F)$.

Soient $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2 \in \underline{\mathcal{T}}_0$ et $h \in H(F)$ tel que $h\tilde{T}_1h^{-1} = \tilde{T}_2$. On introduit les décompositions d'espaces relatives aux deux tores tordus, que l'on affecte d'indices 1 et 2. On a forcément $hW_1'' = W_2''$, plus précisément h induit une isométrie entre les espaces quadratiques W_1'' et W_2''. Mais Z_0 est contenu (comme espace quadratique) dans ces deux espaces. D'après le théorème de Witt, il existe un élément $\gamma \in O(W_2'')(F)$ tel que γh fixe tout élément de Z_0. On prolonge γ en le faisant agir par l'identité sur $V_{0,2}'$ et on remplace h par γh. Alors h agit trivialement sur Z_0. Il envoie forcément l'orthogonal $V_{0,1}''$ de Z_0 dans W_1'' sur son analogue $V_{0,2}''$. L'égalité $h\tilde{T}_1h^{-1} = \tilde{T}_2$ l'oblige aussi à envoyer V_1' sur V_2'. Donc il conserve $V_0 = V_1' \oplus V_{0,1}'' = V_2' \oplus V_{0,2}''$. Alors $h \in G_0(F)$, ce qui prouve (8).

D'après (7) et (8), on peut supposer que $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$. Montrons que

(9) si $\tilde{T} \in \mathcal{T} - \mathcal{T}_0$, la fonction c_Γ est nulle en un point général de $\tilde{T}(F)$.

Soit $\tilde{t} \in \tilde{T}(F)$ en position générale, supposons $c_\Gamma(\tilde{t}) \neq 0$. Le terme $c_\Gamma(\tilde{t})$ est calculé par le lemme 1.5 qui entraîne qu'il existe $g \in G(F)$ tel que $g\tilde{t}g^{-1} \in \tilde{L}(F)$. Fixons un tel g et notons $W = W' \oplus W''$ et $V = W' \oplus V''$ les décompositions attachées à $\tilde{T}$. On a $g^{-1}A_{\tilde{L}}g \subset G_{\tilde{t}} = T_\theta \times G_{\tilde{t}}''$, avec les notations de la première partie de la preuve. Puisque T_θ est anisotrope, on a $g^{-1}A_{\tilde{L}}g \subset G_{\tilde{t}}''$. Comme précédemment, cela entraîne que, pour $j = \pm 1, \dots, \pm u$, les espaces $g^{-1}V_j$ sont inclus dans V'', que ce sont des sous-espaces isotropes et que $g^{-1}V_j$ est en dualité avec V_{-j}. L'espace quadratique V'' contient donc un sous-espace hyperbolique de dimension $2r''$. Puisqu'il contient Z, l'orthogonal W'' de Z dans V'' contient nécessairement un sous-espace isomorphe à Z_0 (muni de $\tilde{\zeta}_0$). Fixons un tel sous-espace W_0'' et notons W_1'' son orthogonal dans W''. Fixons un élément $h \in H(F)$ tel que $h(W_0'') = Z_0$, $h(W' \oplus W_1'') = V_0$ et h induise une isométrie de W_0'' muni de $\tilde{\zeta}_{H,T}$ sur Z_0 muni de $\tilde{\zeta}_0$. Quitte à remplacer $\tilde{T}$ par $h\tilde{T}h^{-1}$, on est ramené au cas où $W' \subset V_0$, $Z_0 \subset W''$ et $\tilde{\zeta}_{H,T}$ a même restriction à Z_0 que $\tilde{\zeta}_0$. Alors $\tilde{T} \subset \tilde{G}_0$. Un raisonnement analogue à celui de la preuve de (7) montre que $\tilde{T} \in \underline{\mathcal{T}}_0$. En revenant à notre tore de départ, on a montré que $\tilde{T}$ était conjugué à un élément de $\underline{\mathcal{T}}_0$ par un élément de $H(F)$. Cela contredit l'hypothèse que $\tilde{T} \in \mathcal{T} - \mathcal{T}_0$. D'où (9).

Par définition, $\Xi_\nu(\Gamma, \Theta)$ est une somme indexée par $\mathcal{T}$. Pour tout $\tilde{T} \in \mathcal{T}$, notons $\Xi_{\nu,\tilde{T}}(\Gamma, \Theta)$ le terme correspondant de cette somme. Pour tout $\tilde{T} \in \mathcal{T}_0$, notons de même $\Xi_{\nu,\tilde{T}}(\Gamma_0,\Theta)$ la contribution de $\tilde{T}$ à $\Xi_\nu(\Gamma_0,\Theta)$. Grâce à (9), pour démontrer l'égalité de l'énoncé, il suffit de prouver l'égalité

(10) $\Xi_{\nu,\tilde{T}}(\Gamma,\Theta)=\Xi_{\nu,\tilde{T}}(\Gamma_0,\Theta)\prod_{j=1,\dots,u}\Xi(\Gamma_j)$

pour tout $\tilde{T}\in\mathcal{T}_0$. Fixons $\tilde{T}\in\mathcal{T}_0$ et introduisons les décompositions habituelles $V_0=V'\oplus V_0''$, $W=V'\oplus W''$. Nous allons comparer les différents termes qui interviennent dans les définitions de $\Xi_{\nu,\tilde{T}}(\Gamma,\Theta)$ et $\Xi_{\nu,\tilde{T}}(\Gamma_0,\Theta)$. Posons

$$C=\begin{cases}1, & \text{si } V'\neq V_0,\\ 2, & \text{si } V'=V_0.\end{cases}$$

Montrons que

$$(11)\qquad |W(H,\tilde{T})|=C|W(G_0,\tilde{T})|.$$

Introduisons le groupe linéaire G' de l'espace V' et l'espace tordu $\tilde{G}'=\mathrm{Isom}(V',V'^*)$. On le plonge dans $\tilde{G}_0$ en prolongeant tout élément de $\tilde{G}'$ par l'isomorphisme $\zeta_{G_0,T}:V_0''\to V_0''^*$. On a $\tilde{T}\subset\tilde{G}'$ et les égalités

$$\mathrm{Norm}_H(\tilde{T})=\mathrm{Norm}_{G'}(\tilde{T})\times O(W''),\ \mathrm{Norm}_{G_0}(\tilde{T})=\mathrm{Norm}_{G'}(\tilde{T})\times O(V_0'').$$

D'où

$$|W(H,\tilde{T})|=|\mathrm{Norm}_{G'}(\tilde{T})(F)/T(F)||O(W'')(F)/SO(W'')(F)|,$$
$$|W(G_0,\tilde{T})|=|\mathrm{Norm}_{G'}(\tilde{T})(F)/T(F)||O(V_0'')(F)/SO(V_0'')(F)|.$$

L'espace W'' n'est pas nul, donc $|O(W'')(F)/SO(W'')(F)|=2$. Si $V_0''\neq\{0\}$, on a aussi $|O(V_0'')(F)/SO(V_0'')(F)|=2$. Si $V_0''=\{0\}$, $|O(V_0'')(F)/SO(V_0'')(F)|=1$. D'où (11).

Considérons un élément $\tilde{t}\in\tilde{T}(F)$, en position générale. Les fonctions $c_\Theta(\tilde{t})$ sont les mêmes dans les deux formules. Quand on passe d'une formule à l'autre, ν est changé en $-\nu$, mais le rôle des groupes est lui-aussi changé : H est le plus petit groupe pour l'une et le plus grand pour l'autre. Quand on se rappelle les définitions, on voit que ces deux changements se compensent. Il intervient des fonctions $\Delta_r(\tilde{t})$ et $\Delta_{r_0}(\tilde{t})$. On a l'égalité

$$\Delta_r(\tilde{t})=|2|_F^{a'}|\det((1-t)_{|V'})|_F^{r-r_0}\Delta_{r_0}(\tilde{t}),$$

où $a'=r^2+r-r_0^2-r_0+r\mathrm{dim}(W'')-r_0\mathrm{dim}(V_0'')$. Un calcul similaire à celui du terme $d(\tilde{x})$ en 3.4 conduit aux égalités

$$D^{\tilde{H}}(\tilde{t})=D^{\tilde{G}'}(\tilde{t})|2|_F^{\dim(W'')(\dim(W'')+1)/2}|\det((1-t)_{|V'})|_F^{\dim(W'')},$$
$$D^{\tilde{G}_0}(\tilde{t})=D^{\tilde{G}'}(\tilde{t})|2|_F^{\dim(V_0'')(\dim(V_0'')+1)/2}|\det((1-t)_{|V'})|_F^{\dim(V_0'')}.$$

Puisque $\dim(W'')=\dim(V_0'')+2r_0+1$, on obtient

$$D^{\tilde{H}}(\tilde{t})\Delta_r(\tilde{t})=|2|_F^{b'}|\det((1-t)_{|V'})|_F^{r+r_0+1}D^{\tilde{G}_0}(\tilde{t})\Delta_{r_0}(\tilde{t}),$$

où $b'=(r+r_0+1)^2+(r+r_0+1)\mathrm{dim}(V_0'')$. Compte tenu de cette égalité et de (11), il suffit pour prouver (10) d'établir l'égalité

(12) $c_\Gamma(\tilde{t})=C|2|_F^{-b'}|\det((1-t)_{|V'})|_F^{-(r+r_0+1)}c_{\Gamma_0}(\tilde{t})$.

On utilise le lemme 1.5. Montrons que

(13) l'ensemble $\mathcal{X}^{\tilde{L}}(\tilde{t})$ est réduit à un élément.

Soit $g \in G(F)$ tel que $g\tilde{t}g^{-1} \in \tilde{L}(F)$. Posons $\tilde{t}_\natural = g\tilde{t}g^{-1}$. On peut certainement conjuguer $\tilde{t}_\natural$ par un élément de $L(F)$ de sorte que, pour $j = 1, \dots, u$, l'application $\tilde{t}_{\natural,j} : V_j \to V_{-j}^*$ soit égale à $\tilde{\zeta}_{G,T,j}$. Supposons qu'il en soit ainsi, posons $\tilde{T}_\natural = g\tilde{T}g^{-1}$, soit $V = V'_\natural \oplus V''_\natural$ la décomposition associée à $\tilde{T}_\natural$. Par un raisonnement déjà fait plusieurs fois, l'inclusion $A_{\tilde{L}} \subset G_{\tilde{t}_\natural}$ entraîne que, pour $j = \pm 1, \dots, \pm u$, les espaces V_j sont inclus dans $V''_\natural$, qu'ils sont isotropes et que V_j est en dualité avec V_{-j} pour la forme $\tilde{\zeta}_{G,T_\natural}$. Cela entraîne d'abord que $V'_\natural \subset V_0$ (il doit être annulé par V_j^* pour tout $j = \pm 1, \dots, \pm u$). Cela entraîne aussi que, pour $j = 1, \dots, u$, ${}^t\tilde{t}_{\natural,-j}^{-1}\tilde{t}_{\natural,j} = 1 = {}^t\tilde{\zeta}_{G,T,-j}^{-1}\tilde{\zeta}_{G,T,j}$. D'après l'hypothèses faite sur $\tilde{t}_{\natural,j}$, cela entraîne que $\tilde{t}_{\natural,-j} = \tilde{\zeta}_{G,T,-j}$. Donc les formes $\tilde{\zeta}_{G,T_\natural}$ et $\tilde{\zeta}_{G,T}$ coïncident sur $Z + Z_0 = \sum_{j=\pm 1,\dots,\pm u} V_j$. En utilisant le théorème de Witt, on peut trouver un élément $\gamma \in O(V''_\natural)(F)$ tel que γg conserve $Z + Z_0$ et y agisse par l'identité. On prolonge γ par l'identité de $V'_\natural$ et on pose $g_\natural = \gamma g$. On a encore $g_\natural \tilde{t} g_\natural^{-1} = \tilde{t}_\natural$. Cela entraîne que g envoie V' dans $V'_\natural$ et l'orthogonal V''_0 de $Z + Z_0$ dans V'' dans l'orthogonal $V''_{\natural,0}$ de $Z + Z_0$ dans $V''_\natural$. Puisque $V' \oplus V''_0 = V_0 = V'_\natural \oplus V''_{\natural,0}$, $g_\natural$ conserve V_0. On sait aussi que $g_\natural$ agit par l'identité sur $Z \oplus Z_0 = \sum_{j=\pm 1,\dots,\pm u} V_j$. Mais alors $g_\natural \in L(F)$ et $\tilde{t}_\natural$ est conjugué à $\tilde{t}$ par un élément de $L(F)$. D'où (13).

On peut donc supposer $\mathcal{X}^{\tilde{L}}(\tilde{t}) = \{\tilde{t}\}$. On a $\Gamma_{\tilde{t}} = Z_G(\tilde{t})(F) = T(F)^\theta \times O(V'')(F)$. Comme dans la première partie de la preuve, on peut remplacer la somme en g du lemme 1.5 par sa valeur en $g = 1$, multipliée par $|\Gamma_{\tilde{t}}/G_{\tilde{t}}(F)|$, c'est-à-dire par

$$|T(F)^\theta/T_\theta(F)||O(V'')(F)/SO(V'')(F)| = |O(V'')(F)/SO(V'')(F)|.$$

Certainement V'' est non nul, donc ce terme vaut 2. Le groupe $Z_L(\tilde{t})(F)$ est décrit par (3). Donc

$$[Z_L(\tilde{t})(F) : L_{\tilde{t}}(F)]^{-1} = |T(F)^\theta/T_\theta(F)|^{-1}|O(V''_0)(F)/SO(V''_0)(F)|^{-1} = |O(V''_0)(F)/SO(V''_0)(F)|^{-1}.$$

Ce terme vaut 2 si $V''_0 \neq \{0\}$, 1 sinon. On en déduit que le produit des deux facteurs précédents vaut C et la formule du lemme 1.5 devient simplement

$$(14) \qquad c_\Gamma(\tilde{t}) = c_{\Gamma,\mathcal{O}}(\tilde{t}) = CD^{\tilde{G}}(\tilde{t})^{-1/2}D^{\tilde{L}}(\tilde{t})^{1/2}c_{\Gamma^{\tilde{L}},\mathcal{O}^L}(\tilde{t}),$$

avec les mêmes notations qu'en (4). On a encore la formule (6). L'orbite $\mathcal{O}_0$ est la bonne : ici encore, quand on passe du couple $(\tilde{G}, \tilde{H})$ au couple $(\tilde{G}_0, \tilde{H})$, on change ν en $-\nu$ et on échange les rôles des deux groupes, et ces deux changements se compensent. Enfin, on calcule le produit $D^{\tilde{G}}(\tilde{t})^{-1/2}D^{\tilde{L}}(\tilde{t})^{1/2}$ en imitant le calcul de 3.4 et on obtient

$$D^{\tilde{G}}(\tilde{t})^{-1/2}D^{\tilde{L}}(\tilde{t})^{1/2} = |2|_F^{-b'+b}|\det((1-t)_{|V'})|_F^{-(r+r_0+1)}.$$

Alors la formule (14) entraîne (12), ce qui achève la preuve. □

7.3. Début de la preuve : le cas des représentations induites. — Nous démontrons le théorème 7.1 par récurrence sur $\dim(G)+\dim(H)$. Soient $\tilde{\pi} \in \mathrm{Temp}(\tilde{G})$ et $\tilde{\rho} \in \mathrm{Temp}(\tilde{H})$. On suppose dans ce paragraphe que $\tilde{\pi}$ n'est pas elliptique. Il existe donc un sous-groupe parabolique tordu $\tilde{Q} = \tilde{L}U_Q$ de $\tilde{G}$, avec $\tilde{Q} \neq \tilde{G}$, et une représentation $\tilde{\sigma} \in \mathbf{Temp}(\tilde{L})$ telle que $\tilde{\sigma}$ soit elliptique et $\tilde{\pi} = \mathrm{Ind}_Q^G(\tilde{\sigma})$. On écrit $\tilde{L}$ et σ comme en 2.3. On réalise $\tilde{\sigma}$ comme dans ce paragraphe : il suffit pour cela de choisir le prolongement $\tilde{\sigma}_0$ de σ_0 à $\tilde{G}_0(F)$ de sorte que $w(\tilde{\sigma}_0, \psi) = w(\tilde{\pi}, \psi)$. Notons Γ_0 le caractère $\Theta_{\tilde{\sigma}_0}$ et, pour $j = 1, \ldots, u$, notons Γ_j le caractère Θ_{σ_j} multiplié par $\omega_{\sigma_j}((-1)^{d+1})$. D'après le lemme 2.1, le caractère $\Theta_{\tilde{\sigma}}$ coïncide avec le quasi-caractère $\Gamma^{\tilde{L}}$ du paragraphe précédent. Le caractère $\Theta_{\tilde{\pi}}$ coïncide avec $\Gamma = \mathrm{Ind}_L^G(\Gamma^{\tilde{L}})$. En appliquant le lemme 7.2, on a

$$\varepsilon_{\text{géom},\nu}(\tilde{\pi}, \tilde{\rho}) = \Xi_\nu(\Gamma, \Theta_{\tilde{\rho}}) = \Xi_\nu(\Gamma_0, \Theta_{\tilde{\rho}}) \prod_{j=1,\ldots,u} \Xi(\Gamma_j) = \varepsilon_{\text{géom},\nu}(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\rho}) \prod_{j=1,\ldots,u} \Xi(\Gamma_j).$$

Soit $j \in \{1, \ldots, u\}$. On a $\Xi(\Gamma_j) = \omega_{\sigma_j}((-1)^{d+1})\Xi(\Theta_{\sigma_j})$. Le dernier terme est le coefficient de l'orbite régulière dans le développement du caractère Θ_{σ_j} au voisinage de 1. D'après un résultat de Rodier ([8], théorème p.161 et remarque 2, p.162), ce coefficient est 1 si σ_j admet un modèle de Whittaker, 0 sinon. Mais σ_j est tempérée donc admet un modèle de Whittaker. Donc $\Xi(\Theta_{\sigma_j}) = 1$ et $\Xi(\Gamma_j) = \omega_{\sigma_j}((-1)^{d+1})$.

On a l'égalité

$$\varepsilon_{\text{géom},\nu}(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\rho}) = \varepsilon_\nu(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\rho}).$$

En effet, si $d_0 > m$, cela résulte de l'hypothèse de récurrence. Si $d_0 < m$, on utilise les égalités $\varepsilon_{\text{géom},\nu}(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\rho}) = \varepsilon_{\text{géom},-\nu}(\tilde{\rho}, \tilde{\sigma}_0)$ et $\varepsilon_\nu(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\rho}) = \varepsilon_{-\nu}(\tilde{\rho}, \tilde{\sigma}_0)$, plus l'hypothèse de récurrence pour le couple $(\tilde{\rho}, \tilde{\sigma}_0)$.

En rassemblant ces égalités, on obtient

$$\varepsilon_{\text{géom},\nu}(\tilde{\pi}, \tilde{\rho}) = \varepsilon_\nu(\tilde{\sigma}_0, \tilde{\rho}) \prod_{j=1,\ldots,u} \omega_{\sigma_j}((-1)^{d+1}).$$

Compte tenu du fait que $d+1$ est de même parité que m, la relation 2.5(2) nous dit que le membre de droite est égal à $\varepsilon_\nu(\tilde{\pi}, \tilde{\rho})$. L'égalité ci-dessus devient celle que l'on cherchait à établir.

7.4. Le cas elliptique. — Il reste à établir le théorème dans le cas où $\tilde{\pi}$ est elliptique, ce que l'on suppose désormais. La théorie des pseudo-coefficients est valable pour le groupe tordu $\tilde{G}$. C'est une conséquence de la formule des traces locale tordue, cf. [13] 7.2. Mais on peut aussi le vérifier grâce aux constructions de Schneider et Stuhler, cf. [10] corollaire 2.2. On peut donc choisir une fonction $\tilde{f} \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ qui est cuspidale et telle que :

(1) pour $\tilde{\pi}' \in \Pi_{ell}(\tilde{G})$, $\tilde{\pi}' \not\simeq \tilde{\pi}^\vee$, $\Theta_{\tilde{\pi}'}(\tilde{f}) = 0$;
(2) $\Theta_{\tilde{\pi}^\vee}(\tilde{f}) = 1$.

Grâce au lemme 1.6(iii), on peut supposer que $\tilde{f}$ est très cuspidale. Pour tout entier $N \geq 1$, on définit $J_N(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f})$ comme en 3.3. On comparant les théorèmes 3.2 et 6.1, on obtient l'égalité

$$(3) \qquad J_{\text{géom}}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) = J_{\text{spec}}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}).$$

En utilisant la notation de 7.2 et la définition des fonctions $c_{\tilde{f}}$, on a l'égalité

$$J_{\text{géom}}(\Theta_{\tilde{\rho}}, \tilde{f}) = \Xi_\nu(\Theta_{\tilde{f}}^J, \Theta_{\tilde{\rho}}).$$

Le lemme 1.6(ii) nous dit que

$$\Theta^J_{\tilde{f}} = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}^{\tilde{G}}} |W^L||W^G|^{-1}(-1)^{a_{\tilde{L}}}\mathrm{Ind}_L^G(\Theta^L_{\phi_{\tilde{L}}(\tilde{f})}).$$

Pour tout $\tilde{L}$, la fonction $\phi_{\tilde{L}}(\tilde{f})$ appartient à l'espace $\mathcal{H}_{ac}(\tilde{L}(F))$ introduit en 1.10 et doit être interprétée comme une somme

$$\sum_{\zeta\in\mathcal{A}_{\tilde{L},F}} \mathbf{1}_{H_{\tilde{L}}=\zeta}\phi_{\tilde{L}}(\tilde{f}),$$

Chaque terme est une fonction cuspidale à support compact. D'après sa définition, la distribution $\Theta^L_{\phi_{\tilde{L}}(\tilde{f})}$ est calculée par la relation 1.10(3). On a

$$\Theta^L_{\phi_{\tilde{L}}(\tilde{f})} = \sum_{\mathcal{O}\in\{\Pi_{ell}(\tilde{L})\}} c(\mathcal{O})\Theta_{\mathcal{O}},$$

où $\Theta_{\mathcal{O}}$ est le quasi-caractère défini par

$$\Theta_{\mathcal{O}}(\tilde{x}) = \int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F}} \Theta_{\tilde{\sigma}_\lambda}(\tilde{x})\Theta_{(\tilde{\sigma}_\lambda)^\vee}(\phi_{\tilde{L}}(\tilde{f})\mathbf{1}_{H_{\tilde{L}}=H_{\tilde{L}}(\tilde{x})})d\lambda.$$

On a noté ici $\tilde{\sigma}$ le point base de $\mathcal{O}$. D'où

$$J_{\text{géom}}(\Theta_{\tilde{\rho}},\tilde{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}^{\tilde{G}}} |W^L||W^G|^{-1}(-1)^{a_{\tilde{L}}} \sum_{\mathcal{O}\in\{\Pi_{ell}(\tilde{L})\}} c(\mathcal{O})I_{\text{géom}}(\tilde{L},\mathcal{O}),$$

où

$$I_{\text{géom}}(\tilde{L},\mathcal{O}) = \Xi_\nu(\mathrm{Ind}_L^G(\Theta_{\mathcal{O}}),\Theta_{\tilde{\rho}}).$$

Considérons la définition de $J_{\text{spec}}(\Theta_{\tilde{\rho}},\tilde{f})$ donnée en 6.1. On peut y échanger les rôles des représentations et de leurs contragrédientes. D'après 2.4, on peut remplacer le produit $[i\mathcal{A}^\vee_{\mathcal{O}} : i\mathcal{A}^\vee_{\tilde{L},F}]^{-1}2^{-s(\mathcal{O})-a_{\tilde{L}}}$ par $c(\mathcal{O})$. Enfin, par définition de la fonction $\phi_{\tilde{L}}(\tilde{f})$, l'intégrale

$$\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F}} J^{\tilde{G}}_{\tilde{L}}((\tilde{\sigma}_\lambda)^\vee,\tilde{f})d\lambda$$

est égale à $\mathrm{mes}(i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F})\Theta_{\tilde{\sigma}^\vee}(\tilde{f}_{\tilde{L}})$, où $\tilde{f}_{\tilde{L}} = \phi_{\tilde{L}}(\tilde{f})\mathbf{1}_{H_{\tilde{L}}=0}$. On obtient

$$J_{\text{spec}}(\Theta_{\tilde{\rho}},\tilde{f}) = \sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}^{\tilde{G}}} |W^L||W^G|^{-1}(-1)^{a_{\tilde{L}}} \sum_{\mathcal{O}\in\{\Pi_{ell}(\tilde{L})\}} c(\mathcal{O})I_{\text{spec}}(\tilde{L},\mathcal{O}),$$

où

$$I_{\text{spec}}(\tilde{L},\mathcal{O}) = \varepsilon_\nu(\tilde{\sigma},\tilde{\rho})\mathrm{mes}(i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F})\Theta_{\tilde{\sigma}^\vee}(\tilde{f}_{\tilde{L}}).$$

Considérons d'abord le cas $\tilde{L} = \tilde{G}$. Alors $\phi_{\tilde{G}}(\tilde{f}) = \tilde{f}_{\tilde{G}} = \tilde{f}$ et les orbites n'ont qu'un élément. Les propriétés (1) et (2) entraînent que $I_{\text{géom}}(\tilde{G},\mathcal{O}) = 0 = I_{\text{spec}}(\tilde{G},\mathcal{O})$ si $\mathcal{O} \neq \{\tilde{\pi}\}$. Pour $\mathcal{O} = \{\tilde{\pi}\}$, on a

$$I_{\text{géom}}(\tilde{G},\mathcal{O}) = \varepsilon_{\text{géom},\nu}(\tilde{\pi},\tilde{\rho}) \text{ et } I_{\text{spec}}(\tilde{G},\mathcal{O}) = \varepsilon_\nu(\tilde{\pi},\tilde{\rho}).$$

Alors l'égalité (3) se récrit

$$\varepsilon_{\text{géom},\nu}(\tilde{\pi},\tilde{\rho})-\varepsilon_{\nu}(\tilde{\pi},\tilde{\rho})=\sum_{\tilde{L}\in\mathcal{L}^{\tilde{G}},\tilde{L}\neq\tilde{G}}|W^L||W^G|^{-1}(-1)^{a_{\tilde{L}}}$$

$$\sum_{\mathcal{O}\in\{\Pi_{ell}(\tilde{L})\}}c(\mathcal{O})(I_{\text{spec}}(\tilde{L},\mathcal{O})-I_{\text{géom}}(\tilde{L},\mathcal{O})).$$

Pour démontrer le théorème 7.1, il suffit de fixer $\tilde{L}\neq\tilde{G}$ et $\mathcal{O}\in\{\Pi_{ell}(\tilde{L})\}$ et de prouver l'égalité

$$(5)\qquad I_{\text{géom}}(\tilde{L},\mathcal{O})=I_{\text{spec}}(\tilde{L},\mathcal{O}).$$

Fixons donc de tels $\tilde{L}$ et $\mathcal{O}$. On peut décomposer

$$\Theta_{\mathcal{O}}=\sum_{\zeta\in\mathcal{A}_{\tilde{L},F}}\Theta_{\mathcal{O},\zeta},$$

où, pour $\tilde{x}\in\tilde{L}(F)$,

$$\Theta_{\mathcal{O},\zeta}(\tilde{x})=\mathbf{1}_{H_{\tilde{L}}=\zeta}(\tilde{x})\Theta_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})\int_{i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F}}\exp(\lambda(\zeta))\Theta_{(\tilde{\sigma}_\lambda)^\vee}(\phi_{\tilde{L}}(\tilde{f}\mathbf{1}_{H_{\tilde{L}}=\zeta}))d\lambda$$

$$=\mathbf{1}_{H_{\tilde{L}}=\zeta}(\tilde{x})\Theta_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})\text{mes}(i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F})\Theta_{\tilde{\sigma}^\vee}(\phi_{\tilde{L}}(\tilde{f})\mathbf{1}_{H_{\tilde{L}}=\zeta}).$$

Si l'on regroupe les ζ selon leur classe de conjugaison par W^G, la somme des quasi-caractères induits $\text{Ind}_L^G(\Theta_{\mathcal{O},\zeta})$ devient une somme de quasi-caractères à supports disjoints. On en déduit aisément que

$$I_{\text{géom}}(\tilde{L},\mathcal{O})=\sum_{\zeta\in\mathcal{A}_{\tilde{L},F}}\Xi_\nu(\text{Ind}_L^G(\Theta_{\mathcal{O},\zeta}),\Theta_{\tilde{\rho}}).$$

On écrit $\tilde{L}$ et $\tilde{\sigma}$ comme dans le paragraphe précédent. Le même raisonnement que dans ce paragraphe , c'est-à-dire essentiellement le lemme 7.2, nous permet de calculer l'expression ci-dessus. On a $\Xi_\nu(\text{Ind}_L^G(\Theta_{\mathcal{O},\zeta}),\Theta_{\tilde{\rho}})=0$ si $\zeta\neq0$: les termes $\Xi(\Gamma_j)$ de 7.2 sont nuls. Si $\zeta=0$, $\phi_{\tilde{L}}(\tilde{f})\mathbf{1}_{H_{\tilde{L}}=0}=\tilde{f}_{\tilde{L}}$ et on obtient

$$I_{\text{géom}}(\tilde{L},\mathcal{O})=\Xi_\nu(\text{Ind}_L^G(\Theta_{\mathcal{O},0}),\Theta_{\tilde{\rho}})$$

$$=\text{mes}(i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F})\varepsilon_{\text{géom},\nu}(\tilde{\sigma}_0,\tilde{\rho})\Big(\prod_{j=1,\dots,u}\omega_{\sigma_j}((-1)^{d+1})\Big)\Theta_{\tilde{\sigma}^\vee}(\tilde{f}_{\tilde{L}}).$$

Toujours comme dans le paragraphe précédent, l'hypothèse de récurrence nous dit que ceci est égal à

$$\text{mes}(i\mathcal{A}^*_{\tilde{L},F})\varepsilon_\nu(\tilde{\sigma},\tilde{\rho})\Theta_{\tilde{\sigma}^\vee}(\tilde{f}_{\tilde{L}}),$$

c'est-à-dire à $I_{\text{spec}}(\tilde{L},\mathcal{O})$. Cela prouve (5) et le théorème. □

Références

[1] A. Aizenbud, D. Gourevitch, S. Rallis & G. Schiffmann – Multiplicity one theorems, *Ann. of Math.* **172** (2010), p. 1407–1434.

[2] J. Arthur – The trace formula in invariant form, *Ann. of Math.* **114** (1981), p. 1–74.

[3] ———, Intertwining operators and residues. I. Weighted characters, *J. Funct. Anal.* **84** (1989), p. 19–84.

[4] ———, A local trace formula, *Publ. Math. I.H.É.S.* **73** (1991), p. 5–96.

[5] ———, On elliptic tempered characters, *Acta Math.* **171** (1993), p. 73–138.

[6] L. Clozel – Characters of nonconnected, reductive p-adic groups, *Canad. J. Math.* **39** (1987), p. 149–167.

[7] H. Jacquet, I. I. Piatetskii-Shapiro & J. A. Shalika – Rankin-Selberg convolutions, *Amer. J. Math.* **105** (1983), p. 367–464.

[8] F. Rodier – Modèle de Whittaker et caractères de représentations, *Lecture Notes in Math.* **466** (1975), p. 151–171.

[9] J.-L. Waldspurger – La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques (d'après Harish-Chandra), *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), p. 235–333.

[10] ———, Le groupe $\mathbf{GL}_N$ tordu, sur un corps p-adique. I, *Duke Math. J.* **137** (2007), p. 185–234.

[11] ———, À propos du lemme fondamental pondéré tordu, *Math. Ann.* **343** (2009), p. 103–174.

[12] ———, Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad, *Compos. Math.* **146** (2010), p. 1180–1290.

[13] ———, La formule des traces locale tordue, prépublication, 2012.

[14] ———, Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad, 2e partie : extension aux représentations tempérées, *Astérisque* **346** (2012), p. 171–311.

J.-L. Waldspurger, CNRS Institut de mathématiques de Jussieu, 2, place Jussieu, 75005 Paris
E-mail : `waldspur@math.jussieu.fr`