

# *Astérisque*

AST

**Sur les Conjectures de Gross et Prasad. I -  
Pages préliminaires**

*Astérisque*, tome 346 (2012), p. III-XI

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_2012\\_\\_346\\_\\_R1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_2012__346__R1_0)

© Société mathématique de France, 2012, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**346**

**ASTÉRISQUE**

**2012**

SUR LES CONJECTURES DE GROSS ET PRASAD. I

W. T. GAN, B. H. GROSS, D. PRASAD & J.-L. WALDSPURGER

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

*Wee Teck Gan*

Department of Mathematics, University of California at San Diego, 9500 Gilman Drive, La Jolla, 92093  
wgan@math.ucsd.edu

*Benedict H. Gross*

Department of Mathematics, Harvard University, Cambridge, MA 02138  
gross@math.harvard.edu

*Dipendra Prasad*

School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Colaba, Mumbai-400005, India  
dprasad@math.tifr.res.in

*Jean-Loup Waldspurger*

Institut de Mathématiques de Jussieu-CNRS, 2 place Jussieu, 75005 Paris, France  
waldspur@math.jussieu.fr

---

*Classification mathématique par sujet (2000).* — 22E50, 22E55, 11F70, 11R39, 11S37.

*Mots-clefs.* — Conjectures de Gross-Prasad, conjecture locale de Gross-Prasad, correspondance thêta, groupes classiques, groupes métaplectiques, groupes spéciaux orthogonaux, groupes unitaires,  $L$ -valeur centrale critique, lois de branchement, multiplicité 1, nombres de racines locales, représentations tempérées, supercuspidales de profondeur zéro.

## SUR LES CONJECTURES DE GROSS ET PRASAD

Wee Teck GAN, Benedict H. GROSS, Dipendra PRASAD  
& Jean-Loup WALDSPURGER

**Abstract.** — Il y a environ 20 ans, Gross et Prasad ont proposé une conjecture pour déterminer la restriction d'une représentation irréductible admissible du groupe  $G = SO(n)$  sur un corps local à un sous-groupe de la forme  $G' = SO(n-1)$ . La conjecture affirme que, étant donnée une paire de  $L$ -paquets génériques de  $G$  et  $G'$ , il existe un unique accouplement non-trivial, à un facteur scalaire près, entre exactement un membre de chaque paquet, où on a le droit de faire varier  $G$  et  $G'$  parmi leurs formes intérieures. Par ailleurs, les membres des  $L$ -paquets qui réalisent l'accouplement sont déterminés par une formule explicite où interviennent des signes locaux d'équations fonctionnelles. Pour les corps locaux non-archimédiens cette conjecture a été démontrée par Waldspurger et Mœglin, à l'aide de diverses méthodes de la théorie locale des représentations. La formule de Plancherel y joue un rôle primordial. Il est également une conjecture globale pour les représentations automorphes, ce qui intervient la valeur centrale critique de fonctions  $L$ .

Ce volume est le premier de deux numéros d'*Astérisque* consacrés à la conjecture et à sa démonstration. Le premier tome contient deux longs articles de Gan, Gross, et Prasad, qui formulent des versions de la conjecture originale de Gross et Prasad pour des paires plus générales de groupes classiques y compris métaplectique, et qui donnent des exemples pour des groupes unitaires de petite dimension, et pour des représentations avec une ramification limitée. Le deuxième tome contient deux articles de Waldspurger : un article court qui déduit la conjecture locale de multiplicité un pour les paires  $(SO(n), SO(n-1))$  des résultats de Aizenbud-Gourevitch-Rallis-Schiffmann sur les groupes orthogonaux, et un article plus long qui termine la première partie de la démonstration de la conjecture de Gross-Prasad : la formule d'intégrale de Waldspurger qui relie les dimensions des espaces d'accouplements à l'analyse harmonique sur les groupes est généralisée du cas où les deux représentations sont supercuspidales au cas de représentations tempérées.

**Résumé (On the conjectures of Gross and Prasad.)** — About 20 years ago Gross and Prasad formulated a conjecture determining the restriction of an irreducible admissible representation of the group  $G = SO(n)$  over a local field to a subgroup of the

form  $G' = SO(n-1)$ . The conjecture stated that for a given pair of generic  $L$ -packets of  $G$  and  $G'$ , there is a unique non-trivial pairing, up to scalars, between precisely one member of each packet, where  $G$  and  $G'$  are allowed to vary among inner forms; moreover, the relevant members of the  $L$ -packets are determined by an explicit formula involving local root numbers. For non-archimedean local fields this conjecture has now been proved by Waldspurger and Mœglin, using a variety of methods of local representation theory; the Plancherel formula plays an important role in the proof. There is also a global conjecture for automorphic representations, which involves the central critical value of  $L$ -functions.

This volume is the first of two volumes devoted to the conjecture and its proof for non-archimedean local fields. It contains two long articles by Gan, Gross, and Prasad, formulating extensions of the original Gross-Prasad conjecture to more general pairs of classical groups including metaplectic groups, and providing examples for low rank unitary groups and for representations with restricted ramification. It also includes two articles by Waldspurger: a short one deriving the local multiplicity one conjecture for special orthogonal groups from the results of Aizenbud-Gourevitch-Rallis-Schiffmann on orthogonal groups, and a long one completing the first part of the proof of the Gross-Prasad conjecture by extending an integral formula relating multiplicities in the restriction problem to harmonic analysis from supercuspidal representations (which appeared in *Compositio Mathematica* in 2010) to general tempered representations here.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Wee Teck Gan, Benedict H. Gross &amp; Dipendra Prasad — <i>Symplectic local root numbers, central critical <math>L</math>-values, and restriction problems in the representation theory of classical groups</i></b> .....		1
1. Introduction .....		1
Acknowledgments .....		5
2. Classical groups and restriction of representations .....		5
3. Selfdual and conjugate-dual representations .....		7
4. The centralizer and its group of components .....		13
5. Local root numbers .....		15
6. Characters of component groups .....		20
7. $L$ -groups of classical groups .....		23
8. Langlands parameters for classical groups .....		27
9. Vogan $L$ -packets - Desiderata .....		31
10. Vogan $L$ -packets for the classical groups .....		33
The General Linear Group $G = \mathrm{GL}(V)$ .....		33
The Symplectic Group $G = \mathrm{Sp}(V)$ .....		34
The Odd Special Orthogonal Group $G = \mathrm{SO}(V)$ , $\dim(V) = 2n + 1$ ...		34
The Even Special Orthogonal Group $G = \mathrm{SO}(V)$ , $\dim(V) = 2n$ , disc( $V$ ) = $d$ .....		34
The Odd Unitary Group $G = \mathrm{U}(V)$ , $\dim V = 2n + 1$ .....		35
The Even Unitary Group $G = \mathrm{U}(V)$ , $\dim V = 2n$ .....		36
11. Vogan $L$ -packets for the metaplectic group .....		36
12. The representation $\nu$ of $H$ and generic data .....		42
Orthogonal and Hermitian Cases (Bessel Models) .....		43
Symplectic and Skew-Hermitian Cases (Fourier-Jacobi Models) .....		46
Remarks .....		51
13. Bessel and Fourier-Jacobi models for $\mathrm{GL}(n)$ .....		52
Bessel Models for $\mathrm{GL}(n)$ .....		53
Fourier-Jacobi models for $\mathrm{GL}(n)$ .....		54
14. Restriction Problems and Multiplicity One Theorems .....		55
Remarks .....		57

15. Uniqueness of Bessel Models .....	57
Remarks .....	62
16. Uniqueness of Fourier-Jacobi Models .....	62
17. Local Conjectures .....	66
$G = \mathrm{SO}(V) \times \mathrm{SO}(W)$ , $\dim W^\perp$ odd .....	67
$G = \mathrm{U}(V) \times \mathrm{U}(W)$ , $\dim W^\perp$ odd .....	67
$G = \widetilde{\mathrm{Sp}}(V) \times \mathrm{Sp}(W)$ or $\mathrm{Sp}(V) \times \widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ , $\dim W^\perp$ even .....	68
$G = \mathrm{U}(V) \times \mathrm{U}(W)$ , $W \subset V$ skew-hermitian and $\dim W \equiv \dim V \equiv 1$ mod 2 .....	68
$G = \mathrm{U}(V) \times \mathrm{U}(W)$ , $W \subset V$ skew-hermitian, $\dim W \equiv \dim V \equiv 0$ mod 2 .....	69
18. Compatibilities of local conjectures .....	69
19. Reduction to basic cases .....	74
20. Variant of the local conjecture .....	75
21. Unramified parameters .....	77
22. Automorphic forms and $L$ -functions .....	80
23. Global Restriction Problems .....	83
24. Global conjectures: central values of $L$ -functions .....	86
Remarks .....	87
25. Global $L$ -parameters and Multiplicity Formula .....	90
The Langlands-Arthur Conjecture .....	90
Example 1 .....	97
Example 2 .....	97
26. Revisiting the global conjecture .....	97
27. The first derivative .....	100
References .....	105
<b>Wee Teck Gan, Benedict H. Gross &amp; Dipendra Prasad — <i>Restrictions of representations of classical groups: examples</i></b> .....	111
1. Introduction .....	111
Acknowledgments .....	112
2. Discrete series parameters .....	113
3. Depth zero supercuspidals .....	115
4. Branching laws for $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ .....	120
5. Branching laws for $\mathrm{U}_n(\mathbb{F}_q)$ .....	122
6. Langlands-Vogan packets for small unitary groups .....	127
7. Theta correspondence .....	132
Working hypothesis .....	134
8. Endoscopic packets and theta correspondence .....	135
9. Skew-hermitian case: $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$ .....	140
10. Restriction from $\mathrm{U}(2)$ to $\mathrm{U}(1)$ .....	141
11. Theta correspondence for $\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(2)$ .....	144

12. Trilinear forms for $U(2)$ .....	147
13. Restriction from $U(3)$ to $U(2)$ : endoscopic case .....	153
14. Restriction from $U(3)$ to $U(2)$ : stable case .....	156
15. A global argument .....	160
Proof of Theorem 15.1 .....	162
16. A finer global argument .....	165
References .....	168
<b>Jean-Loup Waldspurger — Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad, 2<sup>e</sup> partie : extension aux représentations tempérées .....</b>	<b>171</b>
Introduction .....	171
1. Notations et rappels .....	175
1.1. Notations générales .....	175
1.2. Mesures .....	177
1.3. Représentations induites, opérateurs d'entrelacement .....	178
1.4. Caractères pondérés .....	179
1.5. Le $R$ -groupe .....	180
1.6. La formule de Plancherel-Harish-Chandra .....	182
2. Fonctions très cuspidales .....	183
2.1. Un lemme d'annulation .....	183
2.2. Caractères pondérés et fonctions très cuspidales .....	185
2.3. Induction de quasi-caractères .....	186
2.4. Intégrales orbitales pondérées invariantes .....	191
2.5. Fonctions cuspidales et quasi-caractères .....	192
2.6. Les deux quasi-caractères associés à une fonction très cuspidale ..	193
2.7. Fonctions cuspidales et fonctions très cuspidales .....	195
3. Majorations pour le groupe linéaire $GL_k$ .....	195
3.1. Le groupe linéaire .....	195
3.2. Une majoration .....	196
3.3. Un lemme auxiliaire .....	196
3.4. Preuve de la proposition 3.2 .....	199
3.5. Modèles de Whittaker et intégrales de coefficients .....	200
3.6. Quelques égalités d'intégrales .....	201
3.7. Propriétés des fonctionnelles de Whittaker .....	205
4. Majorations pour un groupe spécial orthogonal .....	206
4.1. Les groupes spéciaux orthogonaux .....	206
4.2. Espaces quadratiques compatibles .....	207
4.3. Les résultats .....	208
4.4. Preuve de la majoration 4.3(1) .....	210
4.5. Majoration d'une intégrale unipotente, cas $r \geq 2$ .....	210
4.6. Majoration d'une intégrale unipotente, cas $r = 1$ .....	216
4.7. Preuve de 4.3(3) .....	217
4.8. Majoration d'intégrales doubles sur $U(F)$ .....	218



4.9. Comparaison de $\Xi^G$ et $\Xi^H$ .....	221
4.10. Preuve des relations 4.3(4) et 4.3(5) .....	222
4.11. Majoration d'une intégrale de fonctions d'Harish-Chandra, cas $r = 0$ .....	223
4.12. Majoration d'une intégrale de fonctions d'Harish-Chandra, cas $r > 0$ .....	227
4.13. Preuve de la relation 4.3(2) .....	231
4.14. Preuve de la relation 4.3(7) .....	232
4.15. Preuve de la relation 4.3(8) .....	233
4.16. Preuve de la relation 4.3(6) .....	235
5. Entrelacements tempérés .....	235
5.1. Définition des entrelacements tempérés .....	235
5.2. Induction d'entrelacements tempérés .....	236
1 <sup>re</sup> étape : un résultat de convergence .....	237
2 <sup>e</sup> étape : l'implication $\mathcal{L}_{\bar{\pi},\rho} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_{\pi,\rho} = 0$ quand $k \leq r$ .....	237
3 <sup>e</sup> étape : l'implication $\mathcal{L}_{\bar{\pi},\rho} \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}_{\pi,\rho} \neq 0$ quand $k \leq r$ .....	239
4 <sup>e</sup> étape : l'implication $\mathcal{L}_{\bar{\pi},\rho} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_{\pi,\rho} = 0$ quand $k > r$ .....	239
5 <sup>e</sup> étape : l'implication $\mathcal{L}_{\bar{\pi},\rho} \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}_{\pi,\rho} \neq 0$ quand $k > r$ .....	249
5.3. Variable d'induction et entrelacements tempérés .....	250
5.4. Le cas des induites réductibles .....	252
5.5. Le cas $r = 0$ : majoration des entrelacements .....	253
5.6. Le cas $r = 0$ : tout entrelacement est tempéré .....	261
5.7. Tout entrelacement est tempéré .....	263
6. Expression spectrale de la limite d'une intégrale .....	264
6.1. Le théorème .....	264
6.2. Utilisation de la formule de Plancherel .....	265
6.3. Apparition des entrelacements tempérés .....	266
6.4. Une première approximation .....	270
6.5. Rappels sur les termes constants faibles des coefficients des représentations tempérées .....	272
6.6. Changement de fonction de troncature .....	274
6.7. Utilisation des calculs spectraux d'Arthur .....	284
6.8. Simplification de $\Phi(g')$ .....	288
6.9. Evaluation d'une limite .....	291
6.10. Preuve du théorème 6.1 .....	294
7. Une formule intégrale calculant la multiplicité ; application .....	296
7.1. Le théorème principal .....	296
7.2. Multiplicités géométriques pour les quasi-caractères et induction ..	297
7.3. Fonctions cuspidales sur les groupes spéciaux orthogonaux .....	304
7.4. Pseudo-coefficients .....	305
7.5. Une conséquence du théorème .....	305
7.6. Le cas du groupe linéaire .....	306
7.7. Début de la preuve ; le cas où $\pi$ est induite .....	307

7.8. Comparaison de deux limites .....	308
7.9. Fin de la preuve .....	310
7.10. Conséquence pour la conjecture locale de Gross-Prasad .....	310
Références .....	311
<b>Jean-Loup Waldspurger — <i>Une variante d'un résultat de Aizenbud, Gourevitch, Rallis et Schiffmann</i></b> .....	313
Références .....	318