

Astérisque

AST

**Séminaire Bourbaki, volume 2009/2010, exposés
1012-1026 - Pages préliminaires**

Astérisque, tome 339 (2011), p. I-X

http://www.numdam.org/item?id=AST_2011__339__R1_0

© Société mathématique de France, 2011, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

339

ASTÉRISQUE

2011

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2009/2010
EXPOSÉS 1012-1026

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki. École normale supérieure,
45, rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05.

URL : <http://www.bourbaki.ens.fr>

Mots-clefs et classification mathématique par sujet (2000)

Exposé n° 1012. — Groupes de Chow, cycles algébriques, zéro-cycles, corps p -adiques — 11G25, 14C25, 14G20, 14C35.

Exposé n° 1013. — Algèbres de Hecke p -adiques, familles ordinaires, courbe de Hecke, représentations galoisiennes p -adiques — 11F33, 11F80.

Exposé n° 1014. — Algèbre amassée, théorie de Lie, base canonique, positivité totale, représentation de carquois, système dynamique discret — 16S99, 05E15, 22E46, 16G20, 18E30.

Exposé n° 1015. — Trou noir, stabilité, Kerr, Schwarzschild, linéaire, méthode du champ de vecteurs — 35J10.

Exposé n° 1016. — Équations de Navier-Stokes, ergodicité, turbulence — 37A25, 37A60, 37N10, 37L55, 76F55, 76F20, 60H15, 60H07, 35R60, 60H15, 60H30, 60H07, 76F20, 76B03, 35J60.

Exposé n° 1017. — Correspondance de Langlands, représentations galoisiennes p -adiques, théorie de Hodge p -adique, (φ, Γ) -modules — 11Fxx, 11Sxx, 22Exx.

Exposé n° 1018. — Métrique extrémale, variété torique, K -stabilité — 53C55, 32Q26.

Exposé n° 1019. — Matrices aléatoires — 15B52.

Exposé n° 1020. — Groupes de Lie compacts, espaces classifiants, espaces de lacets, p -complétion, groupes de pseudo-réflexions — 55R35, 55P35, 20F55.

Exposé n° 1021. — Groupe algébrique linéaire, groupe (pseudo-) réductif, restriction des scalaires, conjugaison, structure, classification — 20Gxx, 10G07, 20G15, 14L15, 20G30, 20G35.

Exposé n° 1022. — Groupe fondamental, variété kählérienne, groupe résoluble, invariant de Bieri-Neumann-Strebel — 14F35, 20F65, 32J27.

Exposé n° 1023. — Groupe d'automorphismes, groupe libre, groupe de surface, groupe spécial linéaire, action de groupe sur les arbres, espace de Teichmüller, outre-espace de Culler-Vogtmann, géométrie asymptotique des groupes — 20E08, 20E36, 20E05, 20F69, 20G20.

Exposé n° 1024. — Applications harmoniques, lois de conservation, régularité, suites de Palais-Smale, systèmes antisymétriques, surfaces de Willmore — 53C42, 35J60, 35J40, 35D10, 35J60, 58E20.

Exposé n° 1025. — Conjecture des modèles minimaux, seuil log-canonique, condition de chaîne ascendante, approximation m -adique, théorème de connexité de Shokurov — 14B05, 14E30, 14E15.

Exposé n° 1026. — Groupes profinis, sous-groupes d'indice fini, sous-groupes verbaux, valeurs des mots — 20E18, 20F12, 20F10, 20D99.

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2009/2010
EXPOSÉS 1012–1026

Résumé. — Comme les précédents volumes de ce séminaire, qui compte maintenant plus de mille exposés, celui-ci contient quinze exposés de synthèse sur des sujets d'actualité : cinq exposés concernant les groupes dans différents contextes, trois de physique mathématique, deux liés au programme de Langlands, deux de géométrie algébrique, un de géométrie différentielle, un sur les algèbres amassées et un sur les matrices aléatoires.

Abstract (Séminaire Bourbaki, volume 2009/2010, exposés 1012–1026)

As in the preceding volumes of this seminar, which now counts more than one thousand talks, one finds here fifteen survey lectures on topics of current interest : five lectures around group theory, three about mathematical physics, two related to Langlands' program, two on algebraic geometry, one about differential geometry, one on clusters algebras, and one about random matrices.

Résumés des exposés	vii
---------------------------	-----

NOVEMBRE 2009

1012	J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE — <i>Groupe de Chow des zéro-cycles sur les variétés p-adiques (d'après S. Saito, K. Sato et al.)</i>	1
1013	M. EMERTON — <i>p-adic families of modular forms (after Hida, Coleman, and Mazur)</i>	31
1014	B. KELLER — <i>Algèbres amassées et applications (d'après Fomin-Zelevinsky, ...)</i>	63
1015	S. KLAINERMAN — <i>Linear stability of black holes (d'après M. Dafermos et I. Rodnianski)</i>	91
1016	A. KUPIAINEN — <i>Ergodicity of two dimensional turbulence (after Hairer and Mattingly)</i>	137

MARS 2010

1017	L. BERGER — <i>La correspondance de Langlands locale p-adique pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ (d'après C. Breuil et P. Colmez)</i>	157
1018	O. BIQUARD — <i>Métriques kählériennes extrémales sur les surfaces toriques (d'après S. Donaldson)</i>	181
1019	A. GUIONNET — <i>Grandes matrices aléatoires et théorèmes d'universalité (d'après Erdős, Schlein, Tao, Vu et Yau)</i>	201
1020	B. OLIVER — <i>La classification des groupes p-compacts (d'après Andersen, Grodal, Møller, et Viruel)</i>	237
1021	B. RÉMY — <i>Groupes algébriques pseudo-réductifs et applications (d'après J. Tits et B. Conrad-O. Gabber-G. Prasad)</i>	257

JUIN 2010

1022	M. BURGER — <i>Fundamental groups of Kähler manifolds and geometric group theory</i>	303
1023	F. PAULIN — <i>Sur les automorphismes de groupes libres et de groupes de surface</i>	321
1024	S. SERFATY — <i>Lois de conservation et régularité par compensation pour les systèmes antisymétriques et les surfaces de Willmore (d'après Tristan Rivière)</i>	357

1025	B. TOTARO — <i>The ACC conjecture for log canonical thresholds (after de Fernex, Ein, Mustață, Kollár)</i>	371
1026	J. S. WILSON — <i>Finite index subgroups and verbal subgroups in profinite groups</i>	387

J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE — *Groupe de Chow des zéro-cycles sur les variétés p -adiques (d'après S. Saito, K. Sato et al.)*

À toute variété algébrique projective et lisse sur un corps k , on associe le groupe de Chow $CH_0(X)$, quotient du groupe des cycles de dimension zéro par l'équivalence rationnelle. Pour X de dimension 1, ce groupe est contrôlé par les points rationnels d'une variété abélienne ; sur un corps p -adique k , cela mène à des théorèmes classiques de dualité (Tate, Lichtenbaum) entre $CH_0(X)$ et le groupe de Brauer de la courbe X . Ces théorèmes sont en défaut en dimension supérieure.

Dans l'article qui fait l'objet de ce séminaire, S. Saito et K. Sato montrent que la situation est plus contrôlable si l'on s'intéresse à un groupe qui couvre le groupe $CH_0(X)$, à savoir le groupe des cycles de dimension 1 modulo l'équivalence rationnelle sur un modèle régulier convenable de X au-dessus de l'anneau des entiers du corps p -adique k . Pour ce faire, ils ont recours à diverses techniques développées par U. Jannsen et S. Saito.

M. EMERTON — *p -adic families of modular forms (after Hida, Coleman, and Mazur)*

We describe the theory of p -adic families of modular Hecke eigenforms, as developed by Hida, Coleman and Mazur, and others. We also describe the relationships (both known and conjectured) between this theory and the theory of two-dimensional p -adic representations of the absolute Galois group of \mathbb{Q} .

B. KELLER — *Algèbres amassées et applications (d'après Fomin-Zelevinsky, ...)*

Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky ont inventé les algèbres amassées (cluster algebras) au début des années 2000 dans le but de fournir un cadre algébrique à l'étude des bases canoniques dans les groupes quantiques et de la positivité totale dans les groupes algébriques. Il s'est avéré rapidement que la combinatoire des algèbres amassées intervenait également dans de nombreux autres sujets et notamment en théorie des représentations des carquois et des algèbres de dimension finie. Dans cet exposé, nous donnons une introduction concise aux algèbres amassées et esquissons deux applications significatives portant sur l'étude de certains systèmes dynamiques discrets et la construction de bases duales semi-canoniques.

S. KLAINERMAN — *Linear stability of black holes (d'après M. Dafermos et I. Rodnianski)*

Nonlinear stability of black holes is one of the central open problem in General Relativity today. Heuristic, physics type, arguments have been advanced to establish the first necessary step, i.e. linear stability; yet none of them were either convincing or sufficiently robust to apply to the nonlinear setting. This situation has changed dramatically in the last few years through new geometric methods introduced by a number of authors. In my talk I will try to present the main ideas behind these results and focus, in particular, on the remarkable new results of M. Dafermos and I. Rodnianski on the boundedness and decay of solutions to the wave equation in a Kerr background.

A. KUPIAINEN — *Ergodicity of two dimensional turbulence (after Hairer and Mattingly)*

The phenomenon of turbulence in fluid flow can be posed in mathematical terms as a property of a stationary state of the flow generated by Navier-Stokes equations subjected to a spatially smooth random source term. A basic question concerns the existence and uniqueness of such a stationary state. We discuss this question in the context of two dimensional flows and in particular we describe the work of Hairer and Mattingly who prove ergodicity of the flow in a very degenerate situation.

L. BERGER — *La correspondance de Langlands locale p -adique pour $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ (d'après C. Breuil et P. Colmez)*

La correspondance de Langlands locale p -adique pour $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ est une bijection entre certaines représentations de dimension 2 de $\text{Gal}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Q}_p)$ et certaines représentations de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$. Cette bijection peut en fait être construite en utilisant la théorie des (φ, Γ) -modules et des résultats d'analyse p -adique. On déduit alors des propriétés de cette construction quelques applications intéressantes en arithmétique.

O. BIQUARD — *Métriques kählériennes extrémales sur les surfaces toriques (d'après S. Donaldson)*

Un des grands problèmes de la géométrie différentielle complexe est l'existence de métriques kählériennes à courbure scalaire constante sur les variétés complexes. Une conjecture de Yau-Tian-Donaldson relie cette existence à une forme de stabilité algébrique de la variété. Donaldson a démontré cette conjecture dans le cas des surfaces toriques. On expliquera cette première confirmation de la conjecture.

A. GUIONNET — *Grandes matrices aléatoires et théorèmes d'universalité (d'après Erdős, Schlein, Tao, Vu et Yau)*

L'étude du spectre de matrices aléatoires dont la taille tend vers l'infini est apparue dans de nombreux problèmes de physique et de mathématique depuis les travaux de Wishart et Wigner il y a plus d'un demi-siècle. Dans le cas de matrices hermitiennes gaussiennes, le comportement local des valeurs propres (espacements typiques des valeurs propres au centre du spectre et fluctuations des valeurs propres extrêmes) est bien compris depuis une quinzaine d'années. Nous discuterons de l'extension très récente de ces résultats à des modèles bien plus généraux, en suivant les travaux de Soshnikov, Johansson, Erdős, Schlein, Yau, Tao et Vu.

B. OLIVER — *La classification des groupes p -compacts (d'après Andersen, Grodal, Møller, et Viruel)*

Un groupe p -compact (p un nombre premier fixé) est la donnée d'un espace X dont la cohomologie modulo p est finie et d'un « espace classifiant » BX qui est « p -complet ». Le prototype d'un tel objet est le p -complété d'un groupe de Lie compact connexe. Dwyer et Wilkerson ont montré (vers 1990) que les groupes p -compacts connexes possèdent des « tores maximaux » et des « groupes de Weyl », ces derniers étant engendrés par des pseudo-réflexions p -adiques.

La liste de tous les groupes engendrés par des pseudo-réflexions p -adiques a été faite par Clarke et Ewing dans les années 1970. Ce qu'ont montré les quatre auteurs cités dans le titre est qu'il y a une correspondance bijective entre ces groupes de pseudo-réflexions (à isomorphisme près) et les groupes p -compacts connexes (à homotopie près), au moins pour p impair ; pour $p = 2$, la correspondance qu'ils établissent est un peu plus subtile.

B. RÉMY — *Groupes algébriques pseudo-réductifs et applications (d'après J. Tits et B. Conrad-O. Gabber-G. Prasad)*

Les groupes algébriques réductifs forment une classe naturelle de groupes de matrices. Celle-ci contient les groupes dits classiques, notamment des groupes d'automorphismes de formes bilinéaires. Les groupes réductifs ont été analysés et classés par C. Chevalley sur les corps algébriquement clos, et par A. Borel et J. Tits sur les corps quelconques. Au début des années 90, J. Tits a entamé l'étude des groupes pseudo-réductifs : dans le cas d'un corps de base non parfait, il s'agit d'une généralisation non triviale des groupes réductifs. Cette étude

vient d'être menée à bien par B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad. En retour, ce travail et un complément de B. Conrad contiennent et impliquent des résultats généraux de structure et de finitude pour les groupes algébriques quelconques en caractéristique positive.

M. BURGER — *Fundamental groups of Kähler manifolds and geometric group theory*

The general topic of the talk concerns the problem of which are the additional restrictions imposed on a finitely presented group if one assumes that it is the fundamental group of a compact Kähler manifold (Kähler group). Since Gromov's seminal work showing that such a group cannot be a nontrivial free product, methods of geometric group theory have become important in that field. As an illustration, we will explain Delzant's recent result that a solvable Kähler group contains a finite index nilpotent subgroup.

F. PAULIN — *Sur les automorphismes de groupes libres et de groupes de surface*

Les groupes spéciaux linéaires entiers, les groupes modulaires de surfaces et les groupes des automorphismes extérieurs de groupes libres apparaissent dans de nombreux domaines. Leurs analogies, soulignées en particulier par les travaux de K. Vogtmann, font couler beaucoup d'encre. Dans ce rapport, nous nous concentrerons sur les espaces contractiles sur lesquels ces groupes agissent de manière analogue, sur les propriétés communes de leurs sous-groupes et sur les propriétés semblables (ou envisagées semblables) de leur géométrie asymptotique.

S. SERFATY — *Lois de conservation et régularité par compensation pour les systèmes antisymétriques et les surfaces de Willmore (d'après Tristan Rivière)*

Dans des travaux récents, Tristan Rivière a découvert que les problèmes variationnels correspondant à des lagrangiens quadratiques invariants conformes en dimension deux, tels que le problème des applications harmoniques et l'équation de courbure moyenne prescrite appartiennent à une classe plus large de systèmes de Schrödinger antisymétriques, que l'on peut écrire sous forme d'une loi de conservation. Ces lois de conservation font apparaître une structure particulière de compensation : équations elliptiques avec non-linéarité de forme jacobienne, ce qui permet de déduire la régularité höldérienne des solutions et la compacité des suites de Palais-Smale. Ceci place dans un cadre unique et étend tous les résultats antérieurs de régularité. Il a également démontré des résultats de même nature pour la fonctionnelle de Willmore.

B. TOTARO — *The ACC conjecture for log canonical thresholds (after de Fernex, Ein, Mustață, Kollár)*

The minimal model conjecture in algebraic geometry tries to produce a "simplest" projective variety which is birational to any given variety. Shokurov showed that the minimal model conjecture would follow if certain invariants of singularities satisfied the ascending chain condition (ACC). These invariants are rational numbers, with milder singularities corresponding to larger invariants. Thus the ACC conjectures say that singularities cannot be "improved" infinitely many times. Although the general ACC conjectures remain open, de Fernex, Ein and Mustață (with contributions by Kollár) gave an elegant proof of ACC for log canonical thresholds of hypersurfaces in smooth varieties of any dimension.

J. S. WILSON — *Finite index subgroups and verbal subgroups in profinite groups*

In the 1970s, after proving a weaker statement, J-P. Serre commented that he did not know whether all subgroups of finite index in finitely generated profinite groups are open. A result of Nikolov and Segal concerning finite groups proved in 2003 shows that this is indeed the case. This result is the most spectacular achievement in a type of group theory whose importance is being increasingly recognised: the study of the distribution of the values of a fixed group word in finite groups.