

# *Astérisque*

BERNHARD KELLER

**Algèbres amassées et applications [d'après  
Fomin-Zelevinsky, ...]**

*Astérisque*, tome 339 (2011), Séminaire Bourbaki, exp. n° 1014, p. 63-90

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_2011\\_\\_339\\_\\_63\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_2011__339__63_0)

© Société mathématique de France, 2011, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ALGÈBRES AMASSÉES ET APPLICATIONS [d'après Fomin-Zelevinsky, ...]

par **Bernhard KELLER**

### INTRODUCTION

Les algèbres amassées (cluster algebras), inventées [38] par Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky au début des années 2000, sont des algèbres commutatives, dont les générateurs et les relations sont construits de façon récursive. Parmi ces algèbres se trouvent les algèbres de coordonnées homogènes sur les grassmanniennes, les variétés de drapeaux et beaucoup d'autres variétés qui jouent un rôle important en géométrie et théorie des représentations. La motivation principale de Fomin et Zelevinsky était de trouver un cadre combinatoire pour l'étude des bases canoniques dont on dispose [68] [81] dans ces algèbres et qui sont étroitement liées à la notion de positivité totale [82] dans les variétés associées. Il s'est avéré rapidement que la combinatoire des algèbres amassées intervenait également dans de nombreux autres sujets, par exemple dans

- la géométrie de Poisson [52] [53] [54] [5] ... ;
- les systèmes dynamiques discrets [41] [69] [24] [63] ... ;
- les espaces de Teichmüller supérieurs [32] [33] [30] [34] ... ;
- la combinatoire et en particulier l'étude de polyèdres tels les associaèdres de Stasheff [19] [18] [60] [76] [36] [37] [85] [86] ... ;
- la géométrie algébrique (commutative ou non commutative) et en particulier l'étude des conditions de stabilité de Bridgeland [6], les algèbres Calabi-Yau [64] [55], les invariants de Donaldson-Thomas [66] [75] [91] [46] ... ;
- et la théorie des représentations des carquois et des algèbres de dimension finie, voir par exemple les articles de synthèse [8] [92] [93] [50] [71].

Nous renvoyons aux articles d'initiation [40] [107] [104] [105] [106] et au portail des algèbres amassées [35] pour plus d'informations sur les algèbres amassées et leurs liens avec d'autres sujets mathématiques (et physiques).

Dans cet exposé, nous donnons une introduction concise aux algèbres amassées (section 1) et présentons deux applications :

- la démonstration de la périodicité de certains systèmes dynamiques discrets, d'après Fomin-Zelevinsky [41] et l'auteur [71] [72] (section 2.3) ;
- la construction de bases duales semi-canoniques, d'après Geiss-Leclerc-Schröer [48] (section 3.4).

Ces applications sont fondées sur la catégorification additive des algèbres amassées à l'aide de catégories de représentations de carquois (avec relations). Nous en décrivons les idées principales à la section 4. Nous y esquissons également des développements récents importants liés à la catégorification monoïdale d'algèbres amassées [58] [88] et à leur étude via les carquois à potentiel [22] [23].

## 1. DESCRIPTION ET PREMIERS EXEMPLES

### 1.1. Description

Une *algèbre amassée* est une  $\mathbb{Q}$ -algèbre commutative munie d'un ensemble de générateurs distingués (les *variables d'amas*) regroupés dans des parties (les *amas*) de cardinal constant (le *rang*) qui sont construites récursivement par *mutation* à partir d'un *amas initial*. L'ensemble des variables d'amas peut être fini ou infini.

**THÉORÈME 1.1 ([39]).** — *Les algèbres amassées n'ayant qu'un nombre fini de variables d'amas sont paramétrées par les systèmes de racines finis.*

La classification est donc analogue à celle des algèbres de Lie semi-simples complexes. Nous allons préciser le théorème (dans le cas simplement lacé) à la section 2.

### 1.2. Premier exemple

Pour illustrer la description et le théorème, présentons [106] l'algèbre amassée  $\mathcal{A}_{A_2}$  associée au système de racines  $A_2$ . Par définition, elle est engendrée sur  $\mathbb{Q}$  par les variables d'amas  $x_m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , soumises aux *relations d'échange*

$$x_{m-1}x_{m+1} = 1 + x_m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Ses amas sont par définition les paires de variables consécutives  $\{x_m, x_{m+1}\}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . L'amas initial est  $\{x_1, x_2\}$  et deux amas sont reliés par une mutation si et seulement si ils ont exactement une variable d'amas en commun.

Les relations d'échange permettent d'exprimer toute variable d'amas comme fonction rationnelle des variables initiales  $x_1, x_2$  et donc d'identifier l'algèbre  $\mathcal{A}_{A_2}$  à une sous-algèbre du corps  $\mathbb{Q}(x_1, x_2)$ . Afin d'expliciter cette sous-algèbre, calculons les  $x_m$  pour  $m \geq 3$ . Nous avons :

$$(1.2.1) \quad x_3 = \frac{1 + x_2}{x_1}$$

$$(1.2.2) \quad x_4 = \frac{1 + x_3}{x_2} = \frac{x_1 + 1 + x_2}{x_1 x_2}$$

$$(1.2.3) \quad x_5 = \frac{1 + x_4}{x_3} = \frac{x_1 x_2 + x_1 + 1 + x_2}{x_1 x_2} \div \frac{1 + x_2}{x_1} = \frac{1 + x_1}{x_2}.$$

Notons que, contrairement à ce qu'on pourrait attendre, le dénominateur dans 1.2.3 reste un monôme ! En fait, toute variable d'amas dans une algèbre amassée quelconque est un polynôme de Laurent, voir le théorème 2.1. Continuons le calcul :

$$(1.2.4) \quad x_6 = \frac{1 + x_5}{x_4} = \frac{x_2 + 1 + x_1}{x_2} \div \frac{x_1 + 1 + x_2}{x_1 x_2} = x_1$$

$$(1.2.5) \quad x_7 = (1 + x_1) \div \frac{1 + x_1}{x_2} = x_2.$$

Il est alors clair que la suite des  $x_m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , est 5-périodique et que le nombre de variables d'amas est effectivement fini et égal à cinq. Outre les deux variables initiales  $x_1$  et  $x_2$  nous avons trois variables non initiales  $x_3, x_4$  et  $x_5$ . En examinant leurs dénominateurs, nous voyons qu'elles sont en bijection naturelle avec les racines positives  $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2$  du système de racines de type  $A_2$ . Ceci se généralise à tout diagramme de Dynkin, voir le théorème 2.1.

### 1.3. Algèbres amassées de rang 2

À tout couple d'entiers positifs  $(b, c)$  est associée une algèbre amassée  $\mathcal{A}_{(b,c)}$ . On la définit de la même manière que  $\mathcal{A}_{A_2}$ , mais en remplaçant les relations d'échange par

$$x_{m-1}x_{m+1} = \begin{cases} x_m^b + 1 & \text{si } m \text{ est impair,} \\ x_m^c + 1 & \text{si } m \text{ est pair.} \end{cases}$$

L'algèbre  $\mathcal{A}_{(b,c)}$  n'a qu'un nombre fini de variables d'amas si et seulement si  $bc \leq 3$ , autrement dit si la matrice

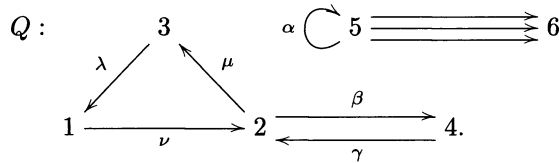
$$\begin{bmatrix} 2 & -b \\ -c & 2 \end{bmatrix}$$

est la matrice de Cartan d'un système de racines  $\Phi$  de rang 2. Le lecteur pourra s'amuser à vérifier que, dans ce cas, les variables d'amas non initiales sont toujours paramétrées par les racines positives de  $\Phi$ .

## 2. ALGÈBRES AMASSÉES ASSOCIÉES AUX CARQUOIS

### 2.1. Mutation des carquois

Un *carquois* est un graphe orienté, c'est-à-dire un quadruplet  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  formé d'un ensemble de sommets  $Q_0$ , d'un ensemble de flèches  $Q_1$  et de deux applications  $s$  et  $t$  de  $Q_1$  dans  $Q_0$  qui, à une flèche  $\alpha$ , associent respectivement sa source et son but. En pratique, on représente un carquois par un dessin comme dans l'exemple qui suit :



Une flèche  $\alpha$  dont la source et le but coïncident est une *boucle*; un *2-cycle* est un couple de flèches distinctes  $\beta$  et  $\gamma$  telles que  $s(\beta) = t(\gamma)$  et  $t(\beta) = s(\gamma)$ . De même, on définit les *n-cycles* pour tout entier positif  $n$ . Un sommet  $i$  d'un carquois est une *source* (respectivement un *puits*) s'il n'existe aucune flèche de but  $i$  (respectivement de source  $i$ ).

Appelons *bon carquois* un carquois fini sans boucles ni 2-cycles dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des entiers  $1 \dots n$  pour un entier positif  $n$ . À un isomorphisme fixant les sommets près, un tel carquois  $Q$  est donné par la matrice antisymétrique  $B = B_Q$  dont le coefficient  $b_{ij}$  est la différence entre le nombre de flèches de  $i$  à  $j$  et le nombre de flèches de  $j$  à  $i$  pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ . Réciproquement, toute matrice antisymétrique  $B$  à coefficients entiers provient d'un bon carquois  $Q_B$ .

Soient  $Q$  un bon carquois et  $k$  un sommet de  $Q$ . La *carquois muté*  $\mu_k(Q)$  est le carquois obtenu à partir de  $Q$  comme suit :

- (1) pour tout sous-carquois  $i \xrightarrow{\beta} k \xrightarrow{\alpha} j$ , on rajoute une nouvelle flèche  $[\alpha\beta] : i \rightarrow j$ ;
- (2) on renverse toutes les flèches de source ou de but  $k$ ;
- (3) on supprime les flèches d'un ensemble maximal de 2-cycles disjoints deux à deux.

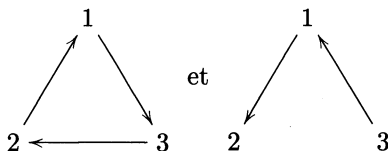
Si  $B$  est la matrice antisymétrique associée à  $Q$  et  $B'$  celle associée à  $\mu_k(Q)$ , on a

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } i = k \text{ ou } j = k; \\ b_{ij} + \operatorname{sgn}(b_{ik}) \max(0, b_{ik}b_{kj}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est la règle de *mutation des matrices* antisymétriques (plus généralement : antisymétrisables) introduite par Fomin-Zelevinsky dans [38], voir aussi [42].

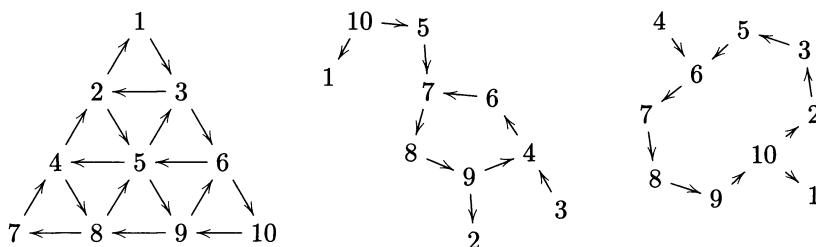
On vérifie sans peine que  $\mu_k$  est une involution. Par exemple, les carquois

(2.1.1)



sont reliés par la mutation par rapport au sommet 1. Notons que, du point de la théorie des représentations, ces carquois sont très différents. Deux carquois sont *équivalents par mutation* s'ils sont reliés par une suite finie de mutations. On vérifie facilement, par exemple à l'aide de [73], que les trois carquois suivants sont équivalents par mutation

(2.1.2)



La classe de mutation commune de ces carquois comporte 5739 carquois (à isomorphisme près). La classe de mutation de la « plupart » des carquois est infinie. La classification des carquois ayant une classe de mutation finie est un problème difficile, résolu récemment par Felikson-Shapiro-Tumarkin [28] : outre les carquois à deux sommets et les carquois associés à des surfaces à bord marquées [37], la liste contient 11 carquois exceptionnels, dont le plus grand est dans la classe de mutation des carquois 2.1.2.

## 2.2. Mutation des graines, algèbres amassées

Soient  $n \geq 1$  un entier et  $\mathcal{F}$  le corps  $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$  engendré par  $n$  indéterminées  $x_1, \dots, x_n$ . Une *graine* (appelée aussi *X-graine*) est un couple  $(R, u)$ , où  $R$  est un bon carquois et  $u$  une suite  $u_1, \dots, u_n$  qui engendre librement le corps  $\mathcal{F}$ . Si  $(R, u)$  est une graine et  $k$  un sommet de  $R$ , la *mutation*  $\mu_k(R, u)$  est la graine  $(R', u')$ , où  $R' = \mu_k(R)$  et  $u'$  est obtenu à partir de  $u$  en remplaçant l'élément  $u_k$  par l'élément  $u'_k$  défini par la *relation d'échange*

$$(2.2.1) \quad u'_k u_k = \prod_{s(\alpha)=k} u_{t(\alpha)} + \prod_{t(\alpha)=k} u_{s(\alpha)}.$$

On vérifie que  $\mu_k^2(R, u) = (R, u)$ . Par exemple, les mutations de la graine

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3, \{x_1, x_2, x_3\}$$

par rapport aux sommets 1 et 2 sont les graines

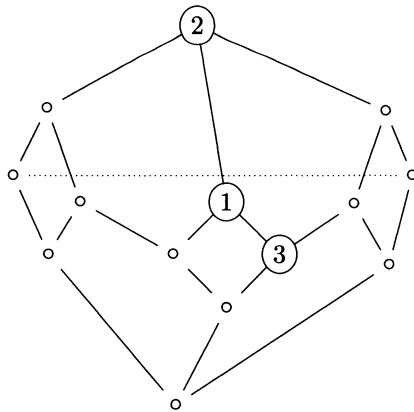
(2.2.2)

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3, \left\{ \frac{1+x_2}{x_1}, x_2, x_3 \right\} \quad \text{et} \quad 1 \overset{\curvearrowright}{\longleftarrow} 2 \overset{\curvearrowleft}{\longrightarrow} 3, \left\{ x_1, \frac{x_1+x_3}{x_2}, x_3 \right\}.$$

Fixons maintenant un bon carquois  $Q$ . La *graine initiale* est  $(Q, \{x_1, \dots, x_n\})$ . Un *amas* associé à  $Q$  est une suite  $u$  qui apparaît dans une graine  $(R, u)$  obtenue à partir de la graine initiale par mutation itérée. Les *variables d'amas* sont les éléments des amas. L'*algèbre amassée*  $\mathcal{A}_Q$  est la sous-algèbre de  $\mathcal{F}$  engendrée par les variables d'amas. Clairement, si  $(R, u)$  est une graine associée à  $Q$ , l'isomorphisme naturel

$$\mathbb{Q}(u_1, \dots, u_n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$$

induit un isomorphisme de  $\mathcal{A}_R$  sur  $\mathcal{A}_Q$  qui préserve les variables d'amas et les amas. L'algèbre amassée  $\mathcal{A}_Q$  est donc un invariant de la classe de mutation de  $Q$ . Il est utile d'introduire un objet combinatoire qui code la construction récursive des graines : le *graphe d'échange*. Par définition, ses sommets sont les classes d'isomorphisme de graines (les isomorphismes renumérotent les sommets et les variables) et ses arêtes correspondent aux mutations. Par exemple, le graphe d'échange obtenu à partir du carquois  $Q : 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$  est le 1-squelette de l'associaèdre de Stasheff [97] [19] :



Le sommet 1 correspond à la graine initiale et les sommets 2 et 3 aux graines 2.2.2.

Fixons un bon carquois connexe  $Q$ . Si son graphe sous-jacent est un diagramme de Dynkin simplement lacé de type  $\Delta$ , nous disons que  $Q$  est un *carquois de Dynkin de type  $\Delta$* .

**THÉORÈME 2.1 ([39]).** — (a) *Toute variable d'amas de  $\mathcal{A}_Q$  est un polynôme de Laurent à coefficients entiers [38].*

- (b) L'algèbre amassée  $\mathcal{A}_Q$  n'a qu'un nombre fini de variables d'amas si et seulement si  $Q$  est équivalent par mutation à un carquois de Dynkin. Dans ce cas, le graphe  $\Delta$  sous-jacent à ce carquois est unique et s'appelle le type amassé de  $Q$ .
- (c) Si  $Q$  est un carquois de Dynkin de type  $\Delta$ , alors les variables d'amas non initiales de  $\mathcal{A}_Q$  sont en bijection avec les racines positives du système de racines  $\Phi$  de  $\Delta$ ; plus précisément, si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont les racines simples, alors pour toute racine positive  $\alpha = d_1\alpha_1 + \dots + d_n\alpha_n$ , il existe une unique variable d'amas non initiale  $X_\alpha$  de dénominateur  $x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$ .

Un monôme d'amas est un produit de puissances positives de variables d'amas qui appartiennent toutes au même amas. La construction d'une « base canonique » de l'algèbre amassée  $\mathcal{A}_Q$  est un problème important et encore très largement ouvert, voir par exemple [96] [26] [17]. On s'attend à ce qu'une telle base contienne tous les monômes d'amas, d'où la conjecture :

CONJECTURE 2.2 ([39]). — *Les monômes d'amas sont linéairement indépendants sur le corps  $\mathbb{Q}$ .*

Si  $Q$  est un carquois de Dynkin, on sait [15] que les monômes d'amas forment une base de  $\mathcal{A}_Q$ . Si  $Q$  est *acyclique*, c'est-à-dire n'admet aucun cycle orienté, la conjecture résulte d'un théorème de Geiss-Leclerc-Schröer [51], qui montrent l'existence d'une « base générique » contenant les monômes d'amas. La conjecture a aussi été démontrée pour des classes d'algèbres amassées à coefficients (voir la section 3), par exemple dans les travaux [44] [51] [21].

CONJECTURE 2.3 ([39]). — *Les variables d'amas s'écrivent comme des polynômes de Laurent à coefficients entiers positifs en les variables de tout amas.*

La catégorification monoïdale développée par Leclerc [80] et Hernandez-Leclerc [58] (voir la section 4.3) a permis récemment de montrer cette conjecture d'abord pour les carquois de type  $A_n$  et  $D_4$ , voir [58], puis pour tout carquois admettant une orientation bipartite [88], c'est-à-dire une orientation où tout sommet est une source ou un puits. Elle est démontrée de façon combinatoire par Musiker-Schiffler-Williams [86] pour tous les carquois associés à des surfaces à bord marquées [37] et par Di Francesco-Kedem [25] pour les carquois associés au  $T$ -système de type  $A$ .

Nous renvoyons à [40] et [42] pour de nombreuses autres conjectures sur les algèbres amassées et à [23] pour la solution d'une bonne partie de ces conjectures grâce à la catégorification (voir la section 4.4).



### 2.3. $Y$ -graines, application à la conjecture de périodicité

Soient  $n \geq 1$  un entier et  $\mathcal{G}$  le corps  $\mathbb{Q}(y_1, \dots, y_n)$  engendré par des indéterminées  $y_i$ . Une  $Y$ -graine est un couple  $(R, v)$ , où  $R$  est un bon carquois et  $v$  une suite  $v_1, \dots, v_n$  qui engendre librement le corps  $\mathcal{G}$  (nous nous écartons quelque peu de la définition dans [42]). Si  $(R, v)$  est une  $Y$ -graine et  $k$  un sommet de  $R$ , la *mutation*  $\mu_k(R, v)$  est la  $Y$ -graine  $(R', v')$ , où  $R' = \mu_k(R)$  et

$$v'_i = \begin{cases} v_i^{-1} & \text{si } i = k, \\ v_i(1 + v_k)^m & \text{si le nombre de flèches } i \rightarrow k \text{ est } m \geq 1, \\ v_i(1 + v_k^{-1})^{-m} & \text{si le nombre de flèches } k \rightarrow i \text{ est } m \geq 1, \\ v_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, les  $Y$ -graines obtenues à partir de  $y_1 \rightarrow y_2$  par mutation sont, en écrivant les variables  $v_i$  à la place des sommets  $i$  :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{y_1} \leftarrow \frac{y_1 y_2}{1 + y_1} \right) &\xrightarrow{\mu_2} \left( \frac{y_2}{1 + y_1 + y_1 y_2} \rightarrow \frac{1 + y_1}{y_2} \right) \xrightarrow{\mu_1} \left( \frac{1 + y_1 + y_1 y_2}{y_2} \leftarrow \frac{1}{y_1(1 + y_2)} \right) \\ &\xrightarrow{\mu_2} \left( \frac{1}{y_2} \rightarrow y_1(1 + y_2) \right) \xrightarrow{\mu_1} (y_2 \leftarrow y_1). \end{aligned}$$

Les  $Y$ -graines jouent un rôle important dans la théorie de Teichmüller supérieure de Fock-Goncharov [32] [31] et dans l'étude par Kontsevich-Soibelman [75] des invariants de Donaldson-Thomas des carquois à potentiel [22]. Elles sont liées aux  $X$ -graines par des conjectures de dualité [32] étudiées systématiquement par Fomin-Zelevinsky dans [42]. En particulier, dans [42], les auteurs montrent que les deux types de graines se déterminent mutuellement si, en même temps que  $\mathcal{A}_Q$ , on considère aussi  $\mathcal{A}_{\tilde{Q}}$ , où  $\tilde{Q}$  est l'*extension principale* de  $Q$  obtenue à partir de  $Q$  en rajoutant de nouveaux sommets  $n+1, \dots, 2n$  et une nouvelle flèche  $(n+i) \rightarrow i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Ces liens combinés avec la catégorification additive (voir section 4.1) ont permis récemment une application des algèbres amassées à l'étude de systèmes dynamiques discrets issus de la physique mathématique.

Soient  $\Delta$  et  $\Delta'$  deux diagrammes de Dynkin simplement lacés. Notons  $1, \dots, n$  et  $1, \dots, n'$  leurs sommets et  $A$  et  $A'$  leurs matrices d'incidence, le coefficient en position  $(i, j)$  valant 1 s'il existe une arête entre  $i$  et  $j$  et 0 sinon. Notons  $h$  et  $h'$  les nombres de Coxeter de  $\Delta$  et  $\Delta'$ . Le  $Y$ -système associé à  $\Delta$  et  $\Delta'$  est un système infini d'équations de récurrence en des variables  $Y_{i,j,t}$  associées aux sommets  $(i, j)$  du produit  $\Delta \times \Delta'$  et dépendant d'un paramètre de temps discret  $t \in \mathbb{Z}$ . Les équations du  $Y$ -système sont

$$(2.3.1) \quad Y_{i,i',t-1} Y_{i,i',t+1} = \frac{\prod_{j=1}^n (1 + Y_{j,i',t})^{a_{ij}}}{\prod_{j'=1}^{n'} (1 + Y_{i,j',t}^{-1})^{a'_{i'j'}}},$$

pour tout sommet  $(i, i')$  du produit et tout entier  $t$ .

**THÉORÈME 2.4.** — *Toutes les solutions du  $Y$ -système sont périodiques par rapport au paramètre  $t$  de période divisant  $2(h + h')$ .*

Ce théorème vient confirmer la « conjecture de périodicité » formulée par Al. B. Zamolodchikov [103, (12)] pour  $\Delta' = A_1$ , par Kuniba-Nakanishi [77, (2a)] pour  $\Delta' = A_m$  et par Ravanini-Valleriani-Tateo [90, (6.2)] dans le cas général. Le théorème a été démontré

- pour  $(A_n, A_1)$  par Frenkel-Szenes [43] (qui donnent des solutions explicites) et par Gliozzi-Tateo [56] (à l'aide de calculs de volumes de 3-variétés) ;
- par Fomin-Zelevinsky [41] pour  $(\Delta, A_1)$ , où  $\Delta$  n'est pas nécessairement simplement lacé (ils utilisent les méthodes de leur théorie des algèbres amassées et un calcul sur ordinateur pour les types exceptionnels ; ce calcul peut être évité maintenant grâce à [102]) ;
- pour  $(A_n, A_m)$  par Volkov [100], qui construit des solutions explicites grâce à des considérations de géométrie projective élémentaire, et par Szenes [98], qui interprète le système comme un système de connexions plates sur un graphe ; la démonstration d'un énoncé équivalent est due à Henriques [57] ;
- pour  $(\Delta, \Delta')$  quelconques dans [71] [72] à l'aide de la catégorification additive, voir la section 4.1.

Pour des diagrammes non simplement lacés  $\Delta$  et  $\Delta'$ , deux variantes généralisées de la conjecture existent : la première se ramène au théorème 2.4 par la technique du « pliage », voir [41] ; la deuxième, formulée par Kuniba-Nakanishi [77, (2a)] et Kuniba-Nakanishi-Suzuki [78, B.6], fait intervenir le double de la somme des nombres de Coxeter *duaux* (voir par exemple le chapitre 6 de [67]) ; elle a été démontrée dans [61] [62].

### 3. ALGÈBRES AMASSÉES À COEFFICIENTS

Nous allons généraliser légèrement la définition donnée à la section 2 pour obtenir la classe des « algèbres amassées antisymétriques de type géométrique ». Cette classe contient de nombreuses algèbres d'origine géométrique munies de « bases duales semi-canoniques ». La construction d'une grande partie d'une telle base est l'une des applications les plus remarquables des algèbres amassées.

Nous renvoyons à [42] pour la définition des « algèbres amassées antisymétrisables à coefficients dans un semi-corps », qui constituent la classe la plus générale considérée jusqu'à maintenant.

### 3.1. Définition

Soient  $1 \leq n \leq m$  des entiers. Soit  $\tilde{Q}$  un *carquois glacé de type*  $(n, m)$ , c'est-à-dire un bon carquois à  $m$  sommets et qui ne comporte aucune flèche entre sommets  $i, j$  tous les deux strictement plus grands que  $n$ . La *partie principale* de  $\tilde{Q}$  est le sous-carquois plein  $Q$  dont les sommets sont  $1, \dots, n$  (un sous-carquois est *plein* si, avec deux sommets, il contient toutes les flèches qui les relient). Les sommets  $n + 1, \dots, m$  sont les *sommets gelés*. L'*algèbre amassée associée au carquois glacé*  $\tilde{Q}$

$$\mathcal{A}_{\tilde{Q}} \subset \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_m)$$

est définie de la même façon que l'algèbre amassée associée à un carquois (section 2) sauf que

- seules les mutations par rapport à des sommets non gelés sont admises et aucune flèche entre sommets gelés n'est introduite lors des mutations ;
- les variables  $x_{n+1}, \dots, x_m$ , qui font partie de tous les amas, sont appelées *coefficients* plutôt que variables d'amas ;
- le *type amassé* du carquois glacé est celui de sa partie principale (s'il est défini).

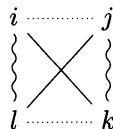
Souvent, on considère des localisations de  $\mathcal{A}_{\tilde{Q}}$  obtenues en inversant certains des coefficients. Si  $K$  est une extension de  $\mathbb{Q}$  et  $A$  une  $K$ -algèbre (associative avec 1), une *structure d'algèbre amassée à coefficients de type*  $\tilde{Q}$  sur  $A$  est la donnée d'un isomorphisme  $\varphi$  de  $\mathcal{A}_{\tilde{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} K$  sur  $A$ . Un tel isomorphisme est déterminé par les images des coefficients et des variables de la graine initiale  $\varphi(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Nous appellerons *graine initiale de*  $A$  la donnée du carquois  $\tilde{Q}$  et des  $\varphi(x_i)$ .

### 3.2. Exemple : le cône sur la grassmannienne des plans d'un espace vectoriel

Soit  $n \geq 1$  un entier. Soit  $A$  l'algèbre des fonctions polynomiales sur le cône au-dessus de la grassmannienne des plans de  $\mathbb{C}^{n+3}$ . Cette algèbre est engendrée par les coordonnées de Plücker  $x_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n + 3$ , assujetties aux relations de Plücker : pour tout quadruplet d'entiers  $i < j < k < l$  compris entre 1 et  $n + 3$ , nous avons

$$(3.2.1) \quad x_{ik}x_{jl} = x_{ij}x_{kl} + x_{jk}x_{il}.$$

Notons que les monômes dans cette relation sont naturellement associés aux diagonales et aux côtés du carré



L'idée est d'interpréter cette relation comme une relation d'échange dans une algèbre amassée (à coefficients). Pour décrire cette algèbre, considérons, dans le plan affine

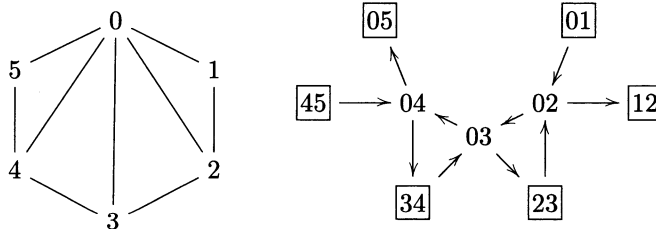
euclidien, un polygone régulier  $P$  dont les sommets sont numérotés de 1 à  $n + 3$ . Considérons la variable  $x_{ij}$  comme associée au segment  $[ij]$  joignant les sommets  $i$  et  $j$ .

PROPOSITION 3.1 ([39, Exemple 12.6]). — *L'algèbre  $A$  a une structure d'algèbre amassée à coefficients telle que*

- les coefficients soient les variables  $x_{ij}$  associées aux côtés de  $P$  ;
- les variables d'amas soient les variables  $x_{ij}$  associées aux diagonales de  $P$  ;
- les amas soient les  $n$ -uplets de variables d'amas correspondant à des diagonales qui forment une triangulation de  $P$ .

En outre, les relations d'échange sont exactement les relations de Plücker et le type amassé est  $A_n$ .

Une triangulation de  $P$  détermine une graine initiale pour l'algèbre amassée et les relations d'échange vérifiées par les variables d'amas initiales déterminent le carquois glacé  $\tilde{Q}$ . Par exemple, on vérifie que, dans le dessin suivant, la triangulation et le carquois glacé (dont les sommets gelés sont entourés de boîtes) se correspondent



De nombreuses autres algèbres de coordonnées (homogènes) de variétés algébriques classiques admettent également des structures d'algèbres amassées (supérieures, voir la section 3.3), notamment les grassmanniennes [95] et les doubles cellules de Bruhat [3]. Certaines de ces algèbres n'ont qu'un nombre fini de variables d'amas et donc un type amassé bien défini. Voici quelques exemples extraits de [40], où  $N$  est un sous-groupe unipotent maximal :

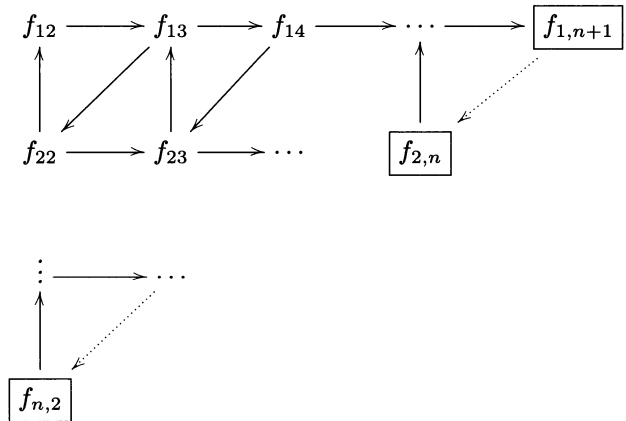
$\text{Gr}_{2,n+3}$	$\text{Gr}_{3,6}$	$\text{Gr}_{3,7}$	$\text{Gr}_{3,8}$	$\text{SL}_3/N$	$\text{SL}_4/N$	$\text{SL}_5/N$	$\text{Sp}_4/N$	$\text{SL}_2$	$\text{SL}_3$
$A_n$	$D_4$	$E_6$	$E_8$	$A_1$	$A_3$	$D_6$	$B_2$	$A_1$	$D_4$

Un analogue de la proposition 3.1 pour les doubles cellules de Bruhat réduites [4] est dû à Yang et Zelevinsky [102]. Ils obtiennent ainsi une algèbre amassée (à coefficients principaux) avec une description explicite des variables d'amas pour tout diagramme de Dynkin.

**3.3. Exemple : le sous-groupe unipotent maximal de  $SL(n + 1, \mathbb{C})$**

Soient  $n$  un entier positif et  $N$  le sous-groupe de  $SL(n + 1, \mathbb{C})$  formé des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1. Pour  $1 \leq i, j \leq n + 1$  et  $g \in N$ , soit  $F_{ij}(g)$  la sous-matrice carrée de taille maximale de  $g$  qui comporte le coefficient  $g_{ij}$  dans son coin inférieur gauche. Soit  $f_{ij}(g)$  le déterminant de  $F_{ij}(g)$ . Nous considérons les fonctions polynomiales  $f_{ij} : N \rightarrow \mathbb{C}$  pour  $1 \leq i \leq n$  et  $i + j \leq n + 2$ . L'algèbre amassée supérieure associée à un carquois glacé  $\tilde{Q}$  à  $m$  sommets est la sous-algèbre de  $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_m)$  formée des éléments qui s'expriment comme des polynômes de Laurent en les variables de tout amas associé à  $\tilde{Q}$ .

**THÉORÈME 3.1 ([3]).** — *L'algèbre des fonctions polynomiales  $\mathbb{C}[N]$  a une structure d'algèbre amassée supérieure dont la graine initiale est donnée par*



Il n'est pas difficile de vérifier que cette structure est de type amassé  $A_3$  pour  $n = 3$ ,  $D_6$  pour  $n = 4$  et qu'elle a une infinité de variables d'amas pour  $n \geq 5$ .

Un théorème de Fekete [27], généralisé dans [2], affirme qu'une matrice carrée à  $n+1$  lignes et à coefficients réels est *totalelement positive* (i.e. tous ses mineurs sont  $> 0$ ) si les  $(n + 1)^2$  mineurs suivants sont strictement positifs : tous les mineurs formés des  $k$  premières lignes et de  $k$  colonnes consécutives pour  $1 \leq k \leq n+1$ . Une matrice  $g \in N$  à coefficients réels est *totalelement positive* si tous les mineurs non identiquement nuls sur  $N$  sont strictement positifs en  $g$ . Cette condition est équivalente à ce que l'on ait  $f_{ij}(g) > 0$  pour les  $f_{ij}$  de la graine initiale du théorème. Comme les relations d'échange ne font pas intervenir de soustraction, tout amas non initial  $C$  donne également un critère de positivité : la matrice  $g \in N$  est totalelement positive si et seulement si l'on a  $u_{ij}(g) > 0$  pour toute variable d'amas  $u_{ij}$  dans  $C$ .

### 3.4. Exemple d'application aux bases duales semi-canoniques

L'exemple 3.3 se généralise. Soient, en effet,  $G$  un groupe algébrique semi-simple complexe et  $N$  un sous-groupe unipotent maximal de  $G$ . Alors d'après [3], l'algèbre  $\mathbb{C}[N]$  est munie d'une structure canonique d'algèbre amassée supérieure. Soit  $\mathfrak{n}$  l'algèbre de Lie du groupe algébrique  $N$ . Dans [83], Lusztig construit une base distinguée, la *base semi-canonique*, de (l'espace vectoriel complexe sous-jacent à) l'algèbre enveloppante  $U(\mathfrak{n})$ . Le dual restreint de la cogèbre  $U(\mathfrak{n})$  est canoniquement isomorphe à  $\mathbb{C}[N]$ , qui est donc muni de la base duale de celle construite par Lusztig, appelée *base duale semi-canonique*.

**THÉORÈME 3.2** (Geiss-Leclerc-Schröer [48]). — *Tout monôme d'amas de  $\mathbb{C}[N]$  (munie de la structure d'algèbre amassée du théorème 3.1) fait partie de la base duale semi-canonique.*

Notons que ce théorème implique la conjecture 2.2 sur l'indépendance des monômes d'amas pour cette classe d'algèbres amassées. L'algèbre  $U(\mathfrak{n})$  est également munie de la *base canonique* obtenue par spécialisation à partir de la base canonique [68] [81] du groupe quantique  $U_q(\mathfrak{n})$ .

**THÉORÈME 3.3** (Geiss-Leclerc-Schröer [47]). — *Pour  $G = \mathrm{SL}(n + 1, \mathbb{C})$ , la base canonique coïncide avec la base semi-canonique de  $U(\mathfrak{n})$  si et seulement si  $n \leq 4$ .*

Néanmoins, Geiss-Leclerc-Schröer conjecturent qu'au moins les « parties rigides » des bases duales canonique et semi-canonique coïncident. Plus précisément, un cas particulier de la conjecture 23.2 de [51] nous donne la conjecture qui suit.

**CONJECTURE 3.4** (Geiss-Leclerc-Schröer [51]). — *Tout monôme d'amas de  $\mathbb{C}[N]$  appartient aussi à la base duale canonique.*

Dans un travail de longue haleine qui a abouti à [51], Geiss-Leclerc-Schröer ont généralisé les théorèmes 3.1 et 3.2 de l'algèbre  $\mathbb{C}[N]$  aux algèbres de coordonnées de cellules unipotentes de groupes de Kac-Moody simplement lacés. Nous renvoyons à [50] pour une introduction et une synthèse des résultats dans le cas fini, et à [21] pour une extension (partielle) au cas non simplement lacé.

## 4. CATÉGORIFICATIONS

Les démonstrations du théorème de périodicité (Théorème 2.4) et du théorème sur la base duale semi-canonique (Théorème 3.2) s'appuient sur la « catégorification additive » des algèbres amassées ; celle des cas connus de la conjecture de positivité 2.3 sur la « catégorification monoïdale ». Nous allons esquisser les idées principales de ces

méthodes. La section 4.4 est consacrée à la méthode de la catégorification à l'aide des « carquois à potentiel ». À ce jour, c'est la seule méthode qui permette de traiter des algèbres amassées associées à des carquois finis arbitraires (sans boucles ni 2-cycles).

#### 4.1. Catégorification additive : la catégorie amassée

Soit  $Q$  un carquois fini d'ensemble de sommets  $\{1, \dots, n\}$ . Un *chemin de  $Q$*  est une composition formelle  $(j|\alpha_s|\dots|\alpha_1|i)$  d'un nombre  $s$  positif ou nul de flèches  $\alpha_i$  telle que  $s(\alpha_i) = t(\alpha_{i-1})$  pour  $1 \leq i \leq s$ . En particulier, pour tout sommet  $i$ , nous avons le *chemin paresseux*  $e_i = (i|i)$  de longueur nulle, neutre pour la composition naturelle des chemins. Une *représentation* (complexe) de  $Q$  est la donnée  $V$  d'espaces vectoriels complexes de dimension finie  $V_i$ ,  $i \in Q_0$ , et d'applications linéaires  $V_\alpha : V_i \rightarrow V_j$  pour toute flèche  $\alpha : i \rightarrow j$  de  $Q$ . Une représentation est donc un diagramme d'espaces vectoriels de la forme donnée par  $Q$ . Un *morphisme de représentations* est un morphisme de diagrammes. On obtient ainsi la *catégorie*  $\text{rep}(Q)$  des représentations de  $Q$ . C'est une catégorie abélienne équivalente à la catégorie des modules de  $\mathbb{C}$ -dimension finie sur une algèbre, à savoir *l'algèbre des chemins*  $\mathbb{C}Q$  (une base de cette algèbre est formée des chemins de  $Q$ ; le produit de deux chemins composables est leur composition, le produit de chemins non composables est nul). En particulier, nous avons des notions naturelles de sous-représentation, de représentation simple, de somme directe et de représentation indécomposable (= représentation non nulle qui n'est pas somme directe de deux sous-représentations non nulles).

Supposons que  $Q$  est un carquois de Dynkin de type  $\Delta$ . Alors d'après le théorème de Gabriel [45], on a une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations indécomposables de  $Q$  sur l'ensemble des racines positives de  $\Delta$ ; à une représentation indécomposable  $V$ , cette bijection associe la racine  $\sum_{i=1}^n (\dim V_i)\alpha_i$ , où les  $\alpha_i$  sont les racines simples. En composant cette bijection avec celle de la partie c) du théorème 2.1 de Fomin-Zelevinsky, nous obtenons une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations indécomposables sur l'ensemble des variables d'amas non initiales de l'algèbre amassée  $\mathcal{A}_Q$ : à une représentation indécomposable  $V$ , cette bijection associe l'unique variable d'amas non initiale  $X_V$  dont le dénominateur est  $x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$ , où  $d_i = \dim V_i$ . Il est remarquable que le numérateur de  $X_V$  admette aussi une interprétation naturelle en termes de la représentation  $V$ . Pour expliciter cette interprétation, nous avons besoin de quelques notations supplémentaires: soient  $V$  une représentation quelconque de  $Q$  et  $d_i = \dim V_i$ ,  $i \in Q_0$ . Pour un élément  $e \in \mathbb{N}^n$ , notons  $\text{Gr}_e(V)$  l'ensemble des sous-représentations  $U$  de  $V$  telles que  $\dim U_i = e_i$ . La donnée d'un point de  $\text{Gr}_e(V)$  est donc la donnée d'une famille de sous-espaces vectoriels  $U_i \subset V_i$  telle que  $U_i$  soit de dimension  $e_i$  et que  $V_\alpha(U_i) \subset U_j$  pour toute flèche  $\alpha : i \rightarrow j$  de  $Q$ . Cette description montre que  $\text{Gr}_e(V)$  est une sous-variété fermée du produit des grassmanniennes  $\text{Gr}_{e_i}(V_i)$ . En particulier, c'est une

variété projective (singulière en général). Elle est appelée *grassmannienne des sous-représentations* (quiver Grassmannian) et étudiée dans [16], par exemple. On note  $\chi(\text{Gr}_e(V_i))$  la caractéristique d'Euler-Poincaré de son espace topologique sous-jacent. Posons

$$CC(V) = \frac{1}{x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}} \sum_e \chi(\text{Gr}_e(V)) \prod_{i=1}^n x_i^{\sum_{j \rightarrow i} e_j + \sum_{i \rightarrow j} (d_j - e_j)},$$

où les sommes dans l'exposant portent sur les flèches de but  $i$  respectivement de source  $i$ .

**THÉORÈME 4.1** (Caldero-Chapoton [12]). — *Si  $V$  est indécomposable, nous avons  $X_V = CC(V)$ .*

Notons que la formule pour  $CC(V)$  a un sens pour toute représentation de tout carquois fini  $Q$ . Supposons maintenant que  $Q$  est un carquois sans cycles orientés quelconque. Une représentation  $V$  de  $Q$  est *rigide* si son groupe d'auto-extensions  $\text{Ext}^1(V, V)$  dans la catégorie  $\text{rep}(Q)$  s'annule. La partie c) du théorème 2.1 ne s'applique plus, mais nous avons néanmoins une paramétrisation des variables d'amas non initiales en termes de représentations de  $Q$ .

**THÉORÈME 4.2** ([14]). — *L'application  $V \mapsto CC(V)$  induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations rigides indécomposables de  $Q$  sur l'ensemble des variables d'amas non initiales de  $\mathcal{A}_Q$ .*

Ce théorème fournit une interprétation catégorique de la quasi-totalité des variables d'amas de l'algèbre amassée. Il se pose la question d'étendre cette interprétation aux variables initiales, aux relations d'échange et aux amas. Pour ce faire, on agrandit la catégorie des représentations : soit  $\mathcal{D}_Q$  la catégorie dérivée bornée de la catégorie abélienne  $\text{rep}(Q)$ . Les objets de  $\mathcal{D}_Q$  sont donc les complexes bornés de représentations et ses morphismes sont obtenus à partir des morphismes de complexes en inversant formellement les quasi-isomorphismes. La catégorie  $\mathcal{D}_Q$  est une catégorie triangulée ; on note  $\Sigma$  son foncteur suspension (qui n'est autre que le foncteur de décalage des complexes  $X \mapsto X[1]$ ). Les ensembles de morphismes de  $\mathcal{D}_Q$  sont des espaces vectoriels de dimension finie et  $\mathcal{D}_Q$  admet un *foncteur de Serre*, c'est-à-dire une auto-équivalence  $S : \mathcal{D}_Q \rightarrow \mathcal{D}_Q$  telle qu'on ait des isomorphismes bifonctoriels

$$D \text{Hom}(X, Y) = \text{Hom}(Y, SX),$$

où  $D = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(?, \mathbb{C})$  est la dualité des espaces vectoriels complexes. La *catégorie amassée* est la catégorie d'orbites

$$\mathcal{C}_Q = \mathcal{D}_Q / (S^{-1} \circ \Sigma^2)^{\mathbb{Z}}$$



de  $\mathcal{D}_Q$  sous l'action du groupe cyclique engendré par l'automorphisme  $S^{-1} \circ \Sigma^2$ . Elle est due à Buan-Marsh-Reineke-Reiten-Todorov [9] et, de façon indépendante et sous une forme très différente, à Caldero-Chapoton-Schiffler [13] pour les carquois de Dynkin de type  $A$ . La catégorie  $\mathcal{C}_Q$  est canoniquement triangulée [70]. Ses espaces de morphismes sont de dimension finie et son foncteur de Serre (induit par  $S$ ) est isomorphe au carré de son foncteur suspension (induit par  $\Sigma$ ). Cela signifie que  $\mathcal{C}_Q$  est *Calabi-Yau de dimension 2*. Notons  $\pi : \mathcal{D}_Q \rightarrow \mathcal{C}_Q$  le foncteur de projection canonique et

$$\mathrm{Ext}^1(L, M) = \mathrm{Hom}(L, \Sigma M)$$

pour des objets  $L$  et  $M$  de  $\mathcal{C}_Q$ . Grâce à la propriété de Calabi-Yau, on a  $D\mathrm{Ext}^1(L, M) = \mathrm{Ext}^1(M, L)$ . On appelle *rigide* un objet  $L$  tel que  $\mathrm{Ext}^1(L, L)$  s'annule. Notons  $P_i$  la représentation qui correspond au  $\mathbb{C}Q$ -module  $\mathbb{C}Qe_i$ ,  $i \in Q_0$ . On peut montrer [9] que tout objet  $L$  de  $\mathcal{C}_Q$  se décompose de façon unique (à isomorphisme près) sous la forme

$$L = \pi(M) \oplus \bigoplus_{i \in Q_0} \Sigma \pi(P_i)^{m_i},$$

pour une représentation  $M$  et des multiplicités  $m_i$ . On pose

$$CC(L) = CC(M) \cdot \prod_{i \in Q_0} x_i^{m_i}.$$

**THÉORÈME 4.3 ([14]).** — a) On a  $CC(L \oplus M) = CC(L) \cdot CC(M)$  pour tous  $L$  et  $M$  dans  $\mathcal{C}_Q$ ,

b) si  $L$  et  $M$  sont des objets de  $\mathcal{C}_Q$  tels que  $\mathrm{Ext}^1(L, M)$  soit de dimension 1 et

$$L \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow \Sigma L \text{ et } M \rightarrow E' \rightarrow L \rightarrow \Sigma M$$

soient deux triangles non scindés, on a

$$(4.1.1) \quad CC(L) \cdot CC(M) = CC(E) + CC(E').$$

- c) L'application  $CC$  induit une bijection de l'ensemble des objets rigides de  $\mathcal{C}_Q$  sur l'ensemble des monômes d'amas de  $\mathcal{A}_Q$ .
- d) Par cette bijection, les objets rigides indécomposables correspondent aux variables d'amas, et un ensemble d'indécomposables rigides  $T_1, \dots, T_n$  correspond à un amas si et seulement si  $\mathrm{Ext}^1(T_i, T_j) = 0$  pour tous  $i, j$ .

Les propriétés a) et b) fournissent une interprétation des relations d'échange. La démonstration du théorème est fondée sur le travail de plusieurs groupes d'auteurs : Buan-Marsh-Reiten-Todorov [11], Buan-Marsh-Reiten [10], Buan-Marsh-Reineke-Reiten-Todorov [9], Marsh-Reineke-Zelevinsky [84], ... et surtout Caldero-Chapoton [12]. Une autre démonstration de la formule de multiplication 4.1.1 est due à Hubery

[59] pour des carquois dont le graphe sous-jacent est un diagramme de Dynkin étendu, et à Xiao-Xu [101] dans le cas général.

La construction de la catégorie amassée a été généralisée des algèbres  $\mathbb{C}Q$  à une classe d'algèbres de dimension globale 2 par Amiot [1]. Une version généralisée de l'application de Caldero-Chapoton et de la formule de multiplication 4.1.1 est due à Palu [89]. L'extension des résultats de Palu au cas de certaines algèbres amassées à coefficients est obtenue dans [44]. La mutation dans une catégorie 2-Calabi-Yau générale est construite par Iyama-Yoshino [65]. La démonstration du théorème de périodicité 2.4 dans [71] [72] est fondée sur ces travaux.

#### 4.2. Catégorification additive : modules sur les algèbres préprojectives

Nous allons décrire l'idée de base de la démonstration du théorème 3.2. Soient  $\Delta$  un diagramme de Dynkin,  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie simple complexe qui lui correspond et  $\mathfrak{n}$  une sous-algèbre nilpotente maximale de  $\mathfrak{g}$ . Soit  $N$  le groupe algébrique unipotent associé à  $\mathfrak{n}$ . L'algèbre de coordonnées  $\mathbb{C}[N]$  est le dual restreint de la cogèbre  $U(\mathfrak{n})$ . La base duale semi-canonique de l'algèbre  $\mathbb{C}[N]$  est duale de la base semi-canonique de  $U(\mathfrak{n})$  construite par Lusztig [83]. Dans un premier temps, nous allons décrire (suivant [48]) la base duale semi-canonique en termes de modules sur l'algèbre préprojective : soit  $Q$  un carquois de Dynkin de type  $\Delta$ . Soit  $\overline{Q}$  le double carquois, obtenu à partir de  $Q$  en rajoutant une flèche  $\alpha^* : j \rightarrow i$  pour chaque flèche  $\alpha : i \rightarrow j$ . Soit  $\Lambda$  l'algèbre préprojective de  $Q$ , c'est-à-dire le quotient de l'algèbre des chemins  $\mathbb{C}\overline{Q}$  (voir la section 4.1) par l'idéal bilatère engendré par la somme  $\sum[\alpha, \alpha^*]$  prise sur l'ensemble des flèches de  $Q$ . C'est une algèbre de dimension finie sur  $\mathbb{C}$  qui est auto-injective (c'est-à-dire injective comme module sur elle-même). Appelons  $\Lambda$ -module un  $\Lambda$ -module à gauche de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ . Pour un tel module  $M$ , son vecteur dimension est la suite des entiers  $\dim e_i M$ ,  $i \in Q_0$ . Soit  $d$  une famille d'entiers positifs indexés par  $Q_0$ . On note  $\text{rep}(\Lambda, d)$  la variété formée des familles de matrices

$$M_\alpha : \mathbb{C}^{d_{s(\alpha)}} \rightarrow \mathbb{C}^{d_{t(\alpha)}}, \alpha \in \overline{Q}_1,$$

qui vérifient les relations de  $\Lambda$ , c'est-à-dire définissent une structure de  $\Lambda$ -module sur la somme directe des  $\mathbb{C}^{d_i}$ ,  $i \in Q_0$ . La variété  $\text{rep}(\Lambda, d)$  porte une action naturelle par « changement de base » du groupe  $G_d = \prod GL(d_i, \mathbb{C})$  et les orbites de cette action sont en bijection avec les classes d'isomorphisme de  $\Lambda$ -modules de vecteur dimension  $d$ . Notons  $\mathcal{M}_d$  l'espace vectoriel des fonctions constructibles et  $G_d$ -invariantes sur la variété  $\text{rep}(\Lambda, d)$ . Notons  $U(\mathfrak{n})_d$  la composante graduée de  $U(\mathfrak{n})$  associée au vecteur  $\sum d_i \alpha_i$ , où les  $\alpha_i$  sont les racines simples. Lusztig [83] a défini une injection linéaire  $\lambda_d$  de  $U(\mathfrak{n})_d$  dans  $\mathcal{M}_d$ . Chaque  $\Lambda$ -module  $M$  définit une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_d$ , à savoir la forme qui, à une fonction  $f$ , associe sa valeur  $f(M)$  en l'orbite déterminée par  $M$ .

Par composition, le module  $M$  nous donne une forme linéaire

$$\delta_M : U(\mathfrak{n})_d \xrightarrow{\lambda_d} \mathcal{M}_d \rightarrow \mathbb{C}.$$

Or nous avons l'isomorphisme canonique  $\iota : U(\mathfrak{n})_d^* \rightarrow \mathbb{C}[N]_d$ . Comme dans [48], nous posons  $\varphi_M = \iota(\delta_M)$ . Nous obtenons ainsi une application  $M \mapsto \varphi_M$  de la classe des  $\Lambda$ -modules dans l'algèbre  $\mathbb{C}[N]$ . On peut expliciter cette application en termes de caractéristiques d'Euler-Poincaré de variétés de drapeaux de sous-représentations de  $M$ , voir [48]. Cette description montre que l'application  $M \mapsto \varphi_M$  est constructible sur la variété algébrique  $\text{rep}(\Lambda, d)$ . Donc chaque composante irréductible de cette variété contient un ouvert dense où la fonction  $M \mapsto \varphi_M$  est constante. On appelle *génériques* les modules  $M$  appartenant à de tels ouverts. Alors la base duale semi-canonique n'est autre que

$$\{\varphi_M \mid M \text{ est générique}\}.$$

Un module  $M$  est *rigide* si l'espace  $\text{Ext}^1(M, M)$  s'annule. De façon équivalente [48], l'orbite de  $M$  dans  $\text{rep}(\Lambda, d)$ , où  $d$  est le vecteur dimension de  $M$ , est ouverte. En particulier, si  $M$  est rigide, alors il est générique et la fonction  $\varphi_M$  appartient à la base duale semi-canonique. Pour montrer le théorème 3.2, il suffit donc de montrer que chaque monôme d'amas est de la forme  $\varphi_M$  pour un module rigide  $M$ . Pour cela, on procède par récurrence : on montre [49] que les éléments de la graine initiale sont des images de modules rigides indécomposables canoniques  $T_1^{(0)}, T_2^{(0)}, \dots, T_m^{(0)}$ . Puis on relève l'opération de mutation des amas à une classe convenable de suites  $T_1, \dots, T_m$  de modules rigides indécomposables. Appelons *accessibles* les modules rigides dont les facteurs directs indécomposables sont obtenus par mutation itérée à partir de la suite  $T_1^{(0)}, T_2^{(0)}, \dots, T_m^{(0)}$ . Le théorème suivant est l'analogue précis du théorème 4.3. Ses parties a) et b) permettent de relier la mutation des amas à la mutation des modules rigides et donc d'effectuer la récurrence qui termine la démonstration du théorème 3.2.

THÉORÈME 4.4 (Geiss-Leclerc-Schröer [48]). — *On a*

- a)  $\varphi_{L \oplus M} = \varphi_L \varphi_M$ ,
- b) *Si  $\text{Ext}^1(L, M)$  est de dimension 1 et que l'on a les suites exactes non scindées*

$$0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0 \text{ et } 0 \rightarrow M \rightarrow E' \rightarrow L \rightarrow 0,$$

*alors on a  $\varphi_L \varphi_M = \varphi_E + \varphi_{E'}$ .*

- c) *L'application  $M \mapsto \varphi_M$  induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de modules rigides accessibles sur l'ensemble des monômes d'amas.*
- d) *Les rigides indécomposables accessibles correspondent aux variables d'amas et une suite  $T_1, \dots, T_m$  de tels modules correspond à un amas si et seulement si l'on a  $\text{Ext}^1(T_i, T_j) = 0$  pour tous  $i$  et  $j$ .*

### 4.3. Catégorification monoïdale

Les catégorifications additives décrites ci-dessus se sont avérées très utiles et on sait les construire pour de grandes classes d'algèbres amassées. De l'autre côté, elles semblent difficiles à exploiter pour démontrer la conjecture de positivité 2.3, et la notion même de catégorification additive semble peu naturelle. La catégorification monoïdale, introduite par Leclerc [80] et Hernandez-Leclerc [58], consiste à réaliser une algèbre amassée comme l'anneau de Grothendieck d'une catégorie abélienne monoïdale. Elle est donc très naturelle. En outre, comme nous allons le voir, son existence donne immédiatement la conjecture de positivité 2.3 (et la conjecture d'indépendance 2.2). De l'autre côté, les catégorifications monoïdales semblent très difficiles à construire.

Les notions suivantes [80] sont fondamentales pour la suite : un objet simple  $S$  d'une catégorie abélienne monoïdale est *premier* s'il n'admet pas de factorisation tensorielle non triviale ; il est *réel* si son carré tensoriel est encore simple.

Soient  $\mathcal{A}$  une algèbre amassée à coefficients et  $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}$  son sous-anneau engendré par les variables d'amas et les coefficients. Suivant [58], une *catégorification monoïdale* de  $\mathcal{A}$  est la donnée d'une catégorie abélienne monoïdale  $\mathcal{M}$  et d'un isomorphisme d'anneaux

$$\varphi : \mathcal{A}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} K_0(\mathcal{M})$$

tel que  $\varphi$  induise

- a) une bijection de l'ensemble des monômes d'amas sur l'ensemble des classes d'objets simples réels de  $\mathcal{M}$  et
- b) une bijection de l'ensemble des variables d'amas et des coefficients sur l'ensemble des classes d'objets simples, réels et premiers de  $\mathcal{M}$ .

Le tableau suivant, extrait de [80], résume les correspondances entre les structures associées à une algèbre amassée et leurs relèvements dans une catégorification additive respectivement monoïdale.

algèbre amassée $\mathcal{A}$	catégorification additive $\mathcal{C}$	catégorification monoïdale $\mathcal{M}$
+	?	$\oplus$
$\times$	$\oplus$	$\otimes$
monôme d'amas	objet rigide	objet simple réel
variable d'amas	indécomposable rigide	simple premier réel

L'existence d'une catégorification monoïdale  $\mathcal{M}$  d'une algèbre amassée  $\mathcal{A}$  a des conséquences très fortes pour  $\mathcal{A}$  : en effet, l'algèbre  $\mathcal{A}$  est alors munie d'une « base canonique », à savoir la base fournie par les objets simples de  $\mathcal{M}$  et cette base contient les monômes d'amas car ceux-ci correspondent bijectivement aux classes dans  $K_0(\mathcal{M})$

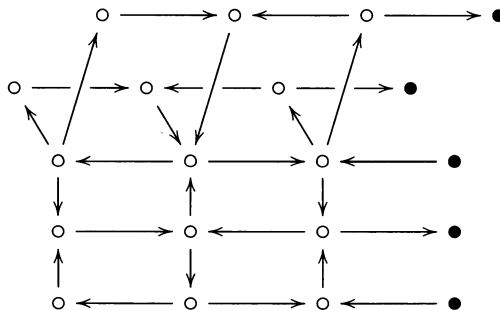
de certains objets simples. En particulier, la conjecture d'indépendance est vérifiée pour  $\mathcal{A}$ . De même, la conjecture de positivité est vérifiée pour  $\mathcal{A}$ . En effet, si on exprime une variable d'amas  $x$  comme polynôme de Laurent

$$x = \frac{P(u_1, \dots, u_m)}{u_1^{d_1} \dots u_m^{d_m}}$$

en les variables d'un amas  $u_1, \dots, u_m$ , alors les coefficients de  $P$  sont les multiplicités de certains objets simples dans la classe du produit tensoriel  $\varphi(xu_1^{d_1} \dots u_m^{d_m})$  et sont donc des entiers positifs.

L'existence d'une catégorification monoïdale  $\varphi : \mathcal{A}_{\mathbb{Z}} \rightarrow K_0(\mathcal{M})$  donne également des renseignements précieux sur la structure monoïdale de  $\mathcal{M}$  : en effet, elle montre que le comportement des objets simples réels de  $\mathcal{M}$  est gouverné par la combinatoire des amas de  $\mathcal{A}$ .

Dans [58], Hernandez-Leclerc exhibent des catégorifications monoïdales conjecturales  $\mathcal{M}_l$  pour les algèbres amassées  $\mathcal{A}_l$  associées à certains carquois glacés  $\widetilde{Q}(\Delta, l)$ , où  $\Delta$  est un diagramme de Dynkin simplement lacé et  $l \in \mathbb{N}$  un « niveau ». Voici l'exemple du carquois  $\widetilde{Q}(D_5, 3)$ , où les sommets gelés sont marqués par des  $\bullet$ .



Hernandez-Leclerc construisent les catégories  $\mathcal{M}_l$  comme des sous-catégories monoïdales de la catégorie des représentations de dimension finie de l'algèbre affine quantique  $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$  associée à  $\Delta$ . Ils construisent un morphisme d'anneaux  $\varphi : (\mathcal{A}_l)_{\mathbb{Z}} \rightarrow K_0(\mathcal{M}_l)$  qui envoie les variables de l'amas initial sur les classes de certains modules de Kirillov-Reshetikhin et conjecturent que  $\varphi$  est une catégorification monoïdale de  $\mathcal{A}_l$  (Conjecture 13.2 de [58]). Ils démontrent leur conjecture pour  $l \leq 1$  et  $\Delta$  de type  $A_n$ ,  $n \geq 1$ , ou  $D_4$  ainsi que pour  $\Delta$  de type  $A_2$  et  $l = 2$  (et observent que pour  $\Delta = A_1$  et tout  $l \in \mathbb{N}$ , la conjecture résulte du travail de Chari-Pressley [20]).

Dans [88], Nakajima construit des catégorifications monoïdales conjecturales  $\mathcal{M}_l$  pour les carquois  $\widetilde{Q}(R, l)$  associés à un carquois  $R$  bipartite et un niveau  $l \in \mathbb{N}$ . Les catégories  $\mathcal{M}_l$  sont réalisées comme des catégories de faisceaux pervers sur des variétés de carquois gradués [87] munies du produit tensoriel construit géométriquement

dans [99]. Si  $R$  est un carquois de Dynkin et  $l = 1$ , la catégorie  $\mathcal{N}_l$  est équivalente à  $\mathcal{M}_l$  et Nakajima démontre qu'elle est une catégorification monoïdale de l'algèbre  $\mathcal{A}_l$  confirmant ainsi la conjecture de Hernandez-Leclerc. Pour un carquois bipartite  $R$  quelconque et  $l = 1$ , il montre que l'anneau  $(\mathcal{A}_l)_{\mathbb{Z}}$  se plonge dans  $K_0(\mathcal{N}_l)$  de telle façon que les monômes d'amas sont envoyés sur des objets simples. Ceci entraîne la conjecture de positivité pour  $\mathcal{A}_l$ .

#### 4.4. Catégorification via les carquois à potentiel

Inspirés par des travaux de physiciens (voir par exemple la section 6 dans [29]) Derksen-Weyman-Zelevinsky ont étendu [22] l'opération de mutation des carquois aux carquois à potentiel et leurs représentations décorées. Décrivons brièvement ces notions en suivant [22]. Soit en effet  $Q$  un carquois fini. Notons  $\widehat{\mathbb{C}Q}$  l'algèbre des chemins complétée, c'est-à-dire la complétion de  $\mathbb{C}Q$  par rapport à l'idéal bilatère engendré par les flèches de  $Q$ . L'espace  $\widehat{\mathbb{C}Q}$  admet donc une base topologique formée de tous les chemins de  $Q$ . L'homologie de Hochschild continue  $HH_0(\widehat{\mathbb{C}Q})$  est le complété de l'espace quotient de  $\widehat{\mathbb{C}Q}$  par le sous-espace  $[\mathbb{C}Q, \mathbb{C}Q]$  engendré par tous les commutateurs. Il admet une base topologique formée de tous les cycles de  $Q$ , c'est-à-dire les orbites sous l'action du groupe cyclique  $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$  de chemins cycliques de longueur  $t \geq 0$ . Pour chaque flèche  $\alpha$  de  $Q$ , la dérivée cyclique [94] est l'unique application linéaire continue

$$\partial_\alpha : HH_0(\widehat{\mathbb{C}Q}) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}Q}$$

qui envoie la classe d'un chemin  $p$  sur la somme  $\sum vu$  prise sur toutes les décompositions  $p = uav$  en des chemins  $u$  et  $v$  de longueur supérieure ou égale à zéro. Soit  $W$  un potentiel sur  $Q$ , c'est-à-dire un élément de  $HH_0(\widehat{\mathbb{C}Q})$ . L'algèbre de Jacobi  $\mathcal{P}(Q, W)$  est la complétion du quotient de  $\widehat{\mathbb{C}Q}$  par l'idéal bilatère engendré par les dérivées cycliques  $\partial_\alpha W$ , où  $\alpha$  parcourt les flèches de  $Q$ . Une représentation décorée  $(M, V)$  de  $(Q, W)$  est formée d'un module  $M$  sur  $\mathcal{P}(Q, W)$  et d'une famille d'espaces vectoriels  $V_i$ ,  $i \in Q_0$ , où  $M$  et les  $V_i$  sont supposés de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ . Par exemple, si  $Q$  n'a pas de cycles orientés (et donc  $W = 0$  et  $\mathcal{P}(Q, W) = \mathbb{C}Q$ ), toute représentation décorée  $(M, V)$  fournit un objet

$$\pi(M) \oplus \bigoplus_{i \in Q_0} \Sigma \pi(V_i \otimes_{\mathbb{C}} P_i)$$

de la catégorie amassée (voir la section 4.1).

Dans [22] et [23], Derksen-Weyman-Zelevinsky construisent et étudient l'opération de mutation pour les carquois à potentiel et leurs représentations décorées. Des difficultés techniques nombreuses et subtiles sont dues au fait que cette opération n'est ni fonctorielle ni définie partout. Ceci est aussi la raison pour laquelle les représentations décorées ne forment pas, en général, une catégorie. Néanmoins, la théorie

développée par Derksen-Weyman-Zelevinsky est assez proche de la catégorification additive. Elle en diffère par le fait que les objets combinatoires centraux ne sont plus les variables d'amas mais les  $F$ -polynômes et  $g$ -vecteurs introduits dans [42] et qui sont peut-être encore plus fondamentaux que les variables d'amas. Dans [23], Derksen-Weyman-Zelevinsky appliquent leur théorie en démontrant de nombreuses conjectures formulées dans [42]. Ils y parviennent sous la seule hypothèse que les algèbres amassées considérées proviennent de bons carquois (non glacés), c'est-à-dire de matrices antisymétriques quelconques, ce qui représente un progrès remarquable par rapport aux approches précédentes. La construction de bases et la conjecture de positivité restent néanmoins des problèmes complètement ouverts dans cette généralité. Les idées de Derksen-Weyman-Zelevinsky ont été liées à la catégorification additive au sens des sections 4.2 et 4.1 dans [7] [74] [1]. Un lien important avec les surfaces à bord marquées est établi dans [79].

### Remerciements

Je remercie Caroline Gruson, Bernard Leclerc et Rached Mneimné pour leurs conseils avisés sur une version antérieure de ce texte.

### REFERENCES

- [1] C. AMIOT – Cluster categories for algebras of global dimension 2 and quivers with potential, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **59** (2009), p. 2525–2590.
- [2] A. BERENSTEIN, S. FOMIN & A. ZELEVINSKY – Parametrizations of canonical bases and totally positive matrices, *Adv. Math.* **122** (1996), p. 49–149.
- [3] ———, Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells, *Duke Math. J.* **126** (2005), p. 1–52.
- [4] A. BERENSTEIN & A. ZELEVINSKY – Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, *Invent. Math.* **143** (2001), p. 77–128.
- [5] ———, Quantum cluster algebras, *Adv. Math.* **195** (2005), p. 405–455.
- [6] T. BRIDGELAND – Stability conditions on triangulated categories, *Ann. of Math.* **166** (2007), p. 317–345.
- [7] A. B. BUAN, O. IYAMA, I. REITEN & D. SMITH – Mutation of cluster-tilting objects and potentials, à paraître dans *Am. J. Math.*
- [8] A. B. BUAN & R. J. MARSH – Cluster-tilting theory, in *Trends in representation theory of algebras and related topics*, Contemp. Math., vol. 406, Amer. Math. Soc., 2006, p. 1–30.
- [9] A. B. BUAN, R. J. MARSH, M. REINEKE, I. REITEN & G. TODOROV – Tilting theory and cluster combinatorics, *Adv. Math.* **204** (2006), p. 572–618.

- [10] A. B. BUAN, R. J. MARSH & I. REITEN – Cluster mutation via quiver representations, *Comment. Math. Helv.* **83** (2008), p. 143–177.
- [11] A. B. BUAN, R. J. MARSH, I. REITEN & G. TODOROV – Clusters and seeds in acyclic cluster algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), p. 3049–3060, with an appendix coauthored in addition by P. Caldero and B. Keller.
- [12] P. CALDERO & F. CHAPOTON – Cluster algebras as Hall algebras of quiver representations, *Comment. Math. Helv.* **81** (2006), p. 595–616.
- [13] P. CALDERO, F. CHAPOTON & R. SCHIFFLER – Quivers with relations arising from clusters ( $A_n$  case), *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), p. 1347–1364.
- [14] P. CALDERO & B. KELLER – From triangulated categories to cluster algebras. II, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **39** (2006), p. 983–1009.
- [15] ———, From triangulated categories to cluster algebras, *Invent. Math.* **172** (2008), p. 169–211.
- [16] P. CALDERO & M. REINEKE – On the quiver Grassmannian in the acyclic case, *J. Pure Appl. Algebra* **212** (2008), p. 2369–2380.
- [17] G. CERULLI IRELLI – Canonically positive basis of cluster algebras of type  $A_2^{(1)}$ , prépublication arXiv:0904.2543.
- [18] F. CHAPOTON – Enumerative properties of generalized associahedra, *Sém. Lothar. Combin.* **51** (2004/05), Art. B51b.
- [19] F. CHAPOTON, S. FOMIN & A. ZELEVINSKY – Polytopal realizations of generalized associahedra, *Canad. Math. Bull.* **45** (2002), p. 537–566.
- [20] V. CHARI & A. PRESSLEY – Quantum affine algebras, *Comm. Math. Phys.* **142** (1991), p. 261–283.
- [21] L. DEMONET – Categorification of skew-symmetrizable cluster algebras, prépublication arXiv:0909.1633.
- [22] H. DERKSEN, J. WEYMAN & A. ZELEVINSKY – Quivers with potentials and their representations I: Mutations, *Selecta Mathematica* **14** (2008), p. 59–119.
- [23] ———, Quivers with potentials and their representations II: Applications to cluster algebras, prépublication arXiv:0904.0676.
- [24] P. DI FRANCESCO & R. KEDEM –  $Q$ -systems as cluster algebras. II. Cartan matrix of finite type and the polynomial property, *Lett. Math. Phys.* **89** (2009), p. 183–216.
- [25] ———, Positivity of the  $T$ -system cluster algebra, prépublication arXiv:0908.3122.
- [26] G. DUPONT – Generic variables in acyclic cluster algebras, prépublication arXiv:0811.2909.
- [27] M. FEKETE – Über ein Problem von Laguerre, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **34** (1912), p. 89–100, 110–120.



- [28] A. FELIKSON, M. SHAPIRO & P. TUMARKIN – Skew-symmetric cluster algebras of finite mutation type, prépublication arXiv:0811.1703.
- [29] B. FENG, A. HANANY, Y.-H. HE & A. M. URANGA – Toric duality as Seiberg duality and brane diamonds, *J. High Energy Phys.* **12** (2001), Paper 35, 29.
- [30] V. V. FOCK & A. B. GONCHAROV – Cluster  $\mathcal{X}$ -varieties, amalgamation, and Poisson-Lie groups, in *Algebraic geometry and number theory*, Progr. Math., vol. 253, Birkhäuser, 2006, p. 27–68.
- [31] ———, Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **103** (2006), p. 1–211.
- [32] ———, Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **42** (2009), p. 865–930.
- [33] ———, Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm. II. The intertwiner, in *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, Progr. Math., vol. 269, Birkhäuser, 2009, p. 655–673.
- [34] ———, The quantum dilogarithm and representations of quantum cluster varieties, *Invent. Math.* **175** (2009), p. 223–286.
- [35] S. FOMIN – Cluster algebras portal, <http://www.math.lsa.umich.edu/~fomin/cluster.html>.
- [36] S. FOMIN & N. READING – Generalized cluster complexes and Coxeter combinatorics, *Int. Math. Res. Not.* **2005** (2005), p. 2709–2757.
- [37] S. FOMIN, M. SHAPIRO & D. THURSTON – Cluster algebras and triangulated surfaces. I. Cluster complexes, *Acta Math.* **201** (2008), p. 83–146.
- [38] S. FOMIN & A. ZELEVINSKY – Cluster algebras. I. Foundations, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), p. 497–529.
- [39] ———, Cluster algebras. II. Finite type classification, *Invent. Math.* **154** (2003), p. 63–121.
- [40] ———, Cluster algebras: notes for the CDM-03 conference, in *Current developments in mathematics, 2003*, Int. Press, Somerville, MA, 2003, p. 1–34.
- [41] ———, Y-systems and generalized associahedra, *Ann. of Math.* **158** (2003), p. 977–1018.
- [42] ———, Cluster algebras. IV. Coefficients, *Compos. Math.* **143** (2007), p. 112–164.
- [43] E. FRENKEL & A. SZENES – Thermodynamic Bethe ansatz and dilogarithm identities. I, *Math. Res. Lett.* **2** (1995), p. 677–693.
- [44] C. J. FU & B. KELLER – On cluster algebras with coefficients and 2-Calabi-Yau categories, *Trans. Amer. Math. Soc.* **362** (2010), p. 859–895.
- [45] P. GABRIEL – Représentations indécomposables, Séminaire Bourbaki, vol. 1973/1974, exp. n° 444, Lecture Notes in Math., vol. 431, Springer, 1975, p. 143–169.

- [46] D. GAIOTTO, G. W. MOORE & A. NEITZKE – Wall-crossing, Hitchin systems and the WKB approximation, prépublication arXiv:0907.3987.
- [47] C. GEISS, B. LECLERC & J. SCHRÖER – Semicanonical bases and preprojective algebras, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **38** (2005), p. 193–253.
- [48] ———, Rigid modules over preprojective algebras, *Invent. Math.* **165** (2006), p. 589–632.
- [49] ———, Partial flag varieties and preprojective algebras, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **58** (2008), p. 825–876.
- [50] ———, Preprojective algebras and cluster algebras, in *Trends in representation theory of algebras and related topics*, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2008, p. 253–283.
- [51] ———, Cluster algebra structures and semicanonical bases for unipotent groups, prépublication arXiv:math/0703039.
- [52] M. GEKHTMAN, M. SHAPIRO & A. VAINSHTEIN – Cluster algebras and Poisson geometry, *Mosc. Math. J.* **3** (2003), p. 899–934, 1199.
- [53] ———, Cluster algebras and Weil-Petersson forms, *Duke Math. J.* **127** (2005), p. 291–311.
- [54] ———, On the properties of the exchange graph of a cluster algebra, *Math. Res. Lett.* **15** (2008), p. 321–330.
- [55] V. GINZBURG – Calabi-Yau algebras, prépublication arXiv:math/0612139.
- [56] F. GLIOZZI & R. TATEO – Thermodynamic Bethe ansatz and three-fold triangulations, *Internat. J. Modern Phys. A* **11** (1996), p. 4051–4064.
- [57] A. HENRIQUES – A periodicity theorem for the octahedron recurrence, *J. Algebraic Combin.* **26** (2007), p. 1–26.
- [58] D. HERNANDEZ & B. LECLERC – Cluster algebras and quantum affine algebras, *Duke Math. J.* **154** (2010), p. 265–341.
- [59] A. HUBERY – Acyclic cluster algebras via Ringel-Hall algebras, prépublication <http://www.maths.leeds.ac.uk/~ahubery/Cluster.pdf>.
- [60] C. INGALLS & H. THOMAS – Noncrossing partitions and representations of quivers, *Compos. Math.* **145** (2009), p. 1533–1562.
- [61] R. INOUE, O. IYAMA, B. KELLER, A. KUNIBA & T. NAKANISHI – Periodicities of  $T$  and  $Y$ -systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I: type  $B_r$ , prépublication arXiv:1001.1880.
- [62] ———, Periodicities of  $T$  and  $Y$ -systems, dilogarithm identities, and cluster algebras II: types  $C_r$ ,  $F_4$ , and  $G_2$ , prépublication arXiv:1001.1881.
- [63] R. INOUE, O. IYAMA, A. KUNIBA, T. NAKANISHI & J. SUZUKI – Periodicities of  $T$ -systems and  $Y$ -systems, *Nagoya Math. J.* **197** (2010), p. 59–174.

- [64] O. IYAMA & I. REITEN – Fomin-Zelevinsky mutation and tilting modules over Calabi-Yau algebras, *Amer. J. Math.* **130** (2008), p. 1087–1149.
- [65] O. IYAMA & Y. YOSHINO – Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules, *Invent. Math.* **172** (2008), p. 117–168.
- [66] D. JOYCE & Y. SONG – A theory of generalized Donaldson-Thomas invariants. II. Multiplicative identities for Behrend functions, prépublication arXiv:0901.2872.
- [67] V. G. KAC – *Infinite-dimensional Lie algebras*, third ed., Cambridge Univ. Press, 1990.
- [68] M. KASHIWARA – Bases cristallines, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **311** (1990), p. 277–280.
- [69] R. KEDEM –  $Q$ -systems as cluster algebras, *J. Phys. A* **41** (2008), 194011, 14.
- [70] B. KELLER – On triangulated orbit categories, *Doc. Math.* **10** (2005), p. 551–581.
- [71] ———, Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories, in *Triangulated categories*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 375, Cambridge Univ. Press, 2010, p. 76–160.
- [72] ———, The periodicity conjecture for pairs of Dynkin diagrams, prépublication arXiv:1001.1531.
- [73] ———, Quiver mutation in Java, applet Java <http://www.math.jussieu.fr/~keller/quivermutation>.
- [74] B. KELLER & D. YANG – Derived equivalences from mutations of quivers with potential, *Advances in Math.* **226** (2011), p. 2118–2168.
- [75] M. KONTSEVICH & Y. SOIBELMAN – Stability structures, Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations, prépublication arXiv:0811.2435.
- [76] C. KRATTENTHALER – The  $F$ -triangle of the generalised cluster complex, in *Topics in discrete mathematics*, Algorithms Combin., vol. 26, Springer, 2006, p. 93–126.
- [77] A. KUNIBA & T. NAKANISHI – Spectra in conformal field theories from the Rogers dilogarithm, *Modern Phys. Lett. A* **7** (1992), p. 3487–3494.
- [78] A. KUNIBA, T. NAKANISHI & J. SUZUKI – Functional relations in solvable lattice models. I. Functional relations and representation theory, *Internat. J. Modern Phys. A* **9** (1994), p. 5215–5266.
- [79] D. LABARDINI-FRAGOSO – Quivers with potentials associated to triangulated surfaces, *Proc. Lond. Math. Soc.* **98** (2009), p. 797–839.
- [80] B. LECLERC – Algèbres affines quantiques et algèbres amassées, notes d’un exposé au séminaire d’algèbre à l’institut Henri Poincaré le 14 janvier 2008.

- [81] G. LUSZTIG – Canonical bases arising from quantized enveloping algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), p. 447–498.
- [82] ———, Total positivity in reductive groups, in *Lie theory and geometry*, Progr. Math., vol. 123, Birkhäuser, 1994, p. 531–568.
- [83] ———, Semicanonical bases arising from enveloping algebras, *Adv. Math.* **151** (2000), p. 129–139.
- [84] R. J. MARSH, M. REINEKE & A. ZELEVINSKY – Generalized associahedra via quiver representations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), p. 4171–4186.
- [85] G. MUSIKER – A graph theoretic expansion formula for cluster algebras of type  $B_n$  and  $D_n$ , prépublication arXiv:0710.3574.
- [86] G. MUSIKER, R. SCHIFFLER & L. WILLIAMS – Positivity for cluster algebras from surfaces, prépublication arXiv:0906.0748.
- [87] H. NAKAJIMA – Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), p. 145–238.
- [88] ———, Quiver varieties and cluster algebras, prépublication arXiv:0905.0002.
- [89] Y. PALU – Cluster characters for 2-Calabi-Yau triangulated categories, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **58** (2008), p. 2221–2248.
- [90] F. RAVANINI, A. VALLERIANI & R. TATEO – Dynkin TBAs, *Internat. J. Modern Phys. A* **8** (1993), p. 1707–1727.
- [91] M. REINEKE – Cohomology of quiver moduli, functional equations & integrality of Donaldson-Thomas type invariants, prépublication arXiv:0903.0261.
- [92] I. REITEN – Tilting theory and cluster algebras, prépublication <http://www.institut.math.jussieu.fr/~keller/ictp2006/lecturenotes/reiten.pdf>.
- [93] C. M. RINGEL – Some remarks concerning tilting modules and tilted algebras. Origin. Relevance. Future, in *Handbook of tilting theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 332, Cambridge Univ. Press, 2007, p. 49–104.
- [94] G.-C. ROTA, B. SAGAN & P. R. STEIN – A cyclic derivative in noncommutative algebra, *J. Algebra* **64** (1980), p. 54–75.
- [95] J. S. SCOTT – Grassmannians and cluster algebras, *Proc. London Math. Soc.* **92** (2006), p. 345–380.
- [96] P. SHERMAN & A. ZELEVINSKY – Positivity and canonical bases in rank 2 cluster algebras of finite and affine types, *Mosc. Math. J.* **4** (2004), p. 947–974, 982.
- [97] J. D. STASHEFF – Homotopy associativity of  $H$ -spaces. I, II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **108** (1963), p. 275–292; *ibid.* **108** (1963), p. 293–312.
- [98] A. SZENES – Periodicity of  $Y$ -systems and flat connections, *Lett. Math. Phys.* **89** (2009), p. 217–230.

- [99] M. VARAGNOLO & E. VASSEROT – Perverse sheaves and quantum Grothendieck rings, in *Studies in memory of Issai Schur (Chevaleret/Rehovot, 2000)*, Progr. Math., vol. 210, Birkhäuser, 2003, p. 345–365.
- [100] A. Y. VOLKOV – On the periodicity conjecture for  $Y$ -systems, *Comm. Math. Phys.* **276** (2007), p. 509–517.
- [101] J. XIAO & F. XU – Green’s formula with  $\mathbf{C}^*$ -action and Caldero-Keller’s formula for cluster algebras, prépublication arXiv:0707.1175.
- [102] S. W. YANG & A. ZELEVINSKY – Cluster algebras of finite type via Coxeter elements and principal minors, *Transform. Groups* **13** (2008), p. 855–955.
- [103] A. B. ZAMOLODCHIKOV – On the thermodynamic Bethe ansatz equations for reflectionless  $ADE$  scattering theories, *Phys. Lett. B* **253** (1991), p. 391–394.
- [104] A. ZELEVINSKY – From Littlewood-Richardson coefficients to cluster algebras in three lectures, in *Symmetric functions 2001: surveys of developments and perspectives*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., vol. 74, Kluwer Acad. Publ., 2002, p. 253–273.
- [105] ———, Cluster algebras: origins, results and conjectures, in *Advances in algebra towards millennium problems*, SAS Int. Publ., Delhi, 2005, p. 85–105.
- [106] ———, What is ... a cluster algebra?, *Notices Amer. Math. Soc.* **54** (2007), p. 1494–1495.
- [107] ———, Cluster algebras, notes for 2004 IMCC, prépublication arXiv:math.RT/0407414.

Bernhard KELLER

Université Paris Diderot – Paris 7  
Institut de Mathématiques de Jussieu  
U.M.R. 7586 du CNRS  
Case 7012  
Bâtiment Chevaleret  
F-75205 Paris Cedex 13  
*E-mail* : [keller@math.jussieu.fr](mailto:keller@math.jussieu.fr)