Astérisque

AST

Séminaire Bourbaki : volume 2008/2009 exposés 997-1011 - Avec table par noms d'auteurs de 1848/49 à 2008/09 - Pages préliminaires

Astérisque, tome 332 (2010), p. I-X

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__332__R1_0>

332

ASTÉRISQUE

2010

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2008/2009
EXPOSÉS 997-1011

Avec table par noms d'auteurs de 1948/49 à 2008/09

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki. École normale supérieure,
45, rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05.
URL : http://www.bourbaki.ens.fr

***Mots-clefs et classification mathématique par sujet* (2000)**

Exposé n° 997. — Dimères planaires, surfaces aléatoires, courbes de Harnack — 14H50, 82B23.
Exposé n° 998. — Groupe de Cremona, application birationnelle, espace métrique hyperbolique — 14E07, 32H50, 22E40.
Exposé n° 999. — Groupes discrets, géométrie convexe, représentations, groupes algébriques, structures géométriques localement homogènes, flots d'Anosov, groupes de Coxeter, espaces métriques hyperboliques, géométrie finslérienne — 20F55, 20F67, 20G20, 20J06, 20H15, 22E40, 22E45, 30C65, 37D20, 37D40, 52A20, 53A20, 53C23, 57N10, 57S30.
Exposé n° 1000. — Groupe de Cremona, fusion, surface de Del Pezzo, fibré en coniques, borne de Minkowski, sous-groupe fini — 11Gxx, 14Exx, 20Fxx.
Exposé n° 1001. — Équation d'Euler incompressible, plongement isométrique non lisse, inclusion différentielle, intégration convexe, solutions faibles paradoxales — 35B99, 58J99.
Exposé n° 1002. — Conjecture de Weinstein, équations de Seiberg-Witten, homologie de Seiberg-Witten-Floer, homologie de contact plongée — 57R17, 57R57, 57R58.
Exposé n° 1003. — Pincement, flot de Ricci, courbure isotrope — 53C44, 53C20, 58A05.
Exposé n° 1004. — Transformations de contact, groupes partiellement ordonnés, fonctions génératrices — 53D10, 53D40, 53D35, 53D50.
Exposé n° 1005. — Courbes elliptiques, géométrie algébrique dérivée, champs de modules — 55N34, 14H52, 14K10, 55N22, 55Q10.
Exposé n° 1006. — Corps de classes, schéma arithmétique, groupe fondamental abélianisé, zéro-cycles — 11G45, 14G25, 11R37.
Exposé n° 1007. — Marginales presque gaussiennes, corps convexes, mesures log-concaves, concentration — 52A38, 52A20, 60D05, 60F05.
Exposé n° 1008. — Flots sur les espaces homogènes, classification des mesures invariantes, rigidité entropique, approximation diophantienne, sous-convexité, fonctions L — 37A17, 37A45, 11E99.
Exposé n° 1009. — Transport optimal, équations du type Monge-Ampère, estimations a priori, courbure et géométrie riemannienne, lieu de coupure — 35J60, 35B65, 53C21, 49Q20.
Exposé n° 1010. — Programme de Langlands, théorie de jauge, S-dualité, symétrie miroir, espace de modules de Hitchin — 14D24, 81T13, 11R39.
Exposé n° 1011. — Variété hyperbolique, variété de dimension 3, volume — 57M50, 51M10, 51M25.

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2008/2009
EXPOSÉS 997-1011

Résumé. — Comme les précédents volumes de ce séminaire, qui compte maintenant plus de mille exposés, celui-ci contient quinze exposés de synthèse sur des sujets d'actualité : quatre exposés en lien avec la géométrie algébrique, deux d'analyse, un d'analyse harmonique, deux de probabilités, cinq en géométrie différentielle et un illustrant des liens nouveaux entre théorie des nombres et physique théorique.

Abstract **(Séminaire Bourbaki, volume 2008/2009, exposés 997-1011)**

As in the preceding volumes of this seminar, which now counts more than one thousand talks, one finds here fifteen survey lectures on topics of current interest: four lectures around algebraic geometry, two on analysis, one on harmonic analysis, two on probability, five on differentiable geometry, and one about new links between number theory and theoretical physics.

Résumés des exposés vii

NOVEMBRE 2008

997 R. CERF — *Dimères et surfaces aléatoires (d'après les travaux de Kenyon et d'Okounkov)* 1

998 C. FAVRE — *Le groupe de Cremona et ses sous-groupes de type fini* 11

999 J.-F. QUINT — *Convexes divisibles (d'après Yves Benoist)* 45

1000 J-P. SERRE — *Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis* ... 75

1001 C. VILLANI — *Paradoxe de Scheffer-Shnirelman revu sous l'angle de l'intégration convexe (d'après C. De Lellis et L. Székelyhidi)* 101

MARS 2009

1002 D. AUROUX — *La conjecture de Weinstein en dimension* 3 *(d'après C. H. Taubes)* 135

1003 G. BESSON — *Le théorème de la sphère différentiable (d'après Brendle-Schoen)* 161

1004 E. GIROUX — *Sur la géométrie et la dynamique des transformations de contact (d'après Y. Eliashberg, L. Polterovich et al.)* 183

1005 P. G. GOERSS — *Topological modular forms (after Hopkins, Miller, and Lurie)* 221

1006 T. SZAMUELY — *Corps de classes des schémas arithmétiques* ... 257

JUIN 2009

1007 F. BARTHE — *Un théorème de la limite centrale pour les ensembles convexes (d'après Klartag et Fleury-Guédon-Paouris)* 287

1008 E. BREUILLARD — *Équidistribution des orbites toriques sur les espaces homogènes (d'après M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, Ph. Michel, A. Venkatesh)* 305

1009 A. FIGALLI — *Regularity of optimal transport maps (after Ma–Trudinger–Wang and Loeper)* 341

1010 E. FRENKEL — *Gauge theory and Langlands duality* 369

1011 S. MAILLOT — *Variétés hyperboliques de petit volume (d'après D. Gabai, R. Meyerhoff, P. Milley, ...)* 405

Table par noms d'auteurs 419

R. CERF — *Dimères et surfaces aléatoires (d'après les travaux de Kenyon et d'Okounkov)*

Cet exposé est consacré aux travaux d'Andrei Okounkov et de Richard Kenyon sur les modèles de dimères et de surfaces aléatoires. À une configuration aléatoire de dimères sur un graphe périodique bipartite plan est naturellement associée une surface. Pour ces modèles de surfaces aléatoires, il est possible d'obtenir une formule explicite pour la tension de surface. Cette formule fait intervenir une certaine courbe algébrique plane, qui est la courbe spectrale de l'opérateur de Kasteleyn du graphe. L'amibe de cette courbe spectrale donne le diagramme de phase du modèle de dimère.

C. FAVRE — *Le groupe de Cremona et ses sous-groupes de type fini*

Le groupe $\mathrm{Cr}(2)$ des applications birationnelles du plan projectif complexe ou groupe de Cremona est un objet classique dont les propriétés restent encore assez mystérieuses. S. Cantat, J. Deserti et S. Lamy se sont récemment intéressés aux sous-groupes de type fini de $\mathrm{Cr}(2)$. En montrant comment le groupe de Cremona agissait par isométries sur un espace hyperbolique de dimension infinie, S. Cantat a obtenu une classification grossière de ces sous-groupes analogue à celles des sous-groupes discrets du groupe des isométries de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$. On peut déduire de ce fait plusieurs conséquences importantes, comme l'obstruction au plongement de certains groupes satisfaisant la propriété (T) de Kazhdan ou le fait que $\mathrm{Cr}(2)$ vérifie l'alternative de Tits.

J.-F. QUINT — *Convexes divisibles (d'après Yves Benoist)*

Un ouvert convexe Ω d'un espace projectif réel de dimension finie est dit saillant si son adhérence est contenue dans le complémentaire d'un hyperplan projectif. Un tel convexe est dit divisible s'il existe un groupe discret Γ d'automorphismes projectifs tel que Γ stabilise Ω et que le quotient de Ω par Γ soit compact. L'étude des convexes divisibles, initiée par Benzécri, Koszul et Vey dans les années 1960, a repris ces dernières années de l'actualité, grâce à des apports conceptuels nouveaux, notamment en provenance de la géométrie à courbure négative et des systèmes dynamiques. Dans cet exposé, nous présenterons des résultats issus de la série d'articles qu'Yves Benoist a récemment consacrée à ce sujet en nous concentrant sur trois points principaux : les propriétés d'hyperbolicité des convexes divisibles, la structure de l'espace des représentations d'un groupe donné qui divisent un convexe et la construction d'exemples nouveaux, au moyen de groupes de Coxeter.

J-P. SERRE — *Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis*

Soit k un corps. Le groupe de Cremona $\mathrm{Cr}_2(k)$ est le groupe des k-automorphismes de $k(X,Y)$ (= applications birationnelles inversibles du plan projectif dans lui-même). Ce n'est pas un groupe algébrique, mais il ressemble par certains aspects à un groupe semi-simple de rang 2. Jusqu'où va cette analogie ? On se propose de la discuter du point de vue des sous-groupes finis de $\mathrm{Cr}_2(k)$, en insistant sur l'aspect arithmétique : $k = \mathbf{Q}$ ou $k =$ corps fini. Les démonstrations sont de nature géométrique : elles utilisent la théorie des modèles minimaux et la classification des surfaces de del Pezzo.

C. VILLANI — *Paradoxe de Scheffer-Shnirelman revu sous l'angle de l'intégration convexe (d'après C. De Lellis et L. Székelyhidi)*

Dans des articles célèbres et difficiles, Scheffer et Shnirelman ont construit des solutions « paradoxales » de l'équation d'Euler incompressible, à support compact en espace-temps. Récemment, De Lellis et Székelyhidi ont proposé une nouvelle construction simple et élégante de telles solutions, basée entre autres sur l'analyse en ondes planes à la Tartar et l'intégration convexe à la Gromov.

D. AUROUX — *La conjecture de Weinstein en dimension* 3 *(d'après C. H. Taubes)*

Étant donnée une variété fermée munie d'une forme de contact α, la conjecture de Weinstein (1978) affirme l'existence d'orbites périodiques du champ de Reeb (le champ de vecteurs qui engendre le noyau de $d\alpha$). Cette conjecture a été prouvée fin 2006 par C. H. Taubes pour toute variété de contact de dimension 3. Cet exposé décrit le résultat de Taubes et les principaux ingrédients de la preuve, en particulier les équations de Seiberg-Witten en dimension 3.

G. BESSON — *Le théorème de la sphère différentiable (d'après Brendle-Schoen)*

Le théorème dit « de la sphère » affirme qu'une variété riemannienne simplement connexe de courbure positive dont le rapport entre le minimum et le maximum de la courbure sectionnelle est strictement plus grand que 1/4 est homéomorphe à une sphère. Notons que la valeur 1/4 est celle de ce rapport pour les espaces projectifs complexes de dimension complexe supérieure ou égale à deux. Ce résultat a été finalement obtenu, à la suite d'un article séminal de H.E. Rauch en 1951, dans les années soixante par M. Berger et W. Klingenberg. Pour passer de l'homéomorphisme au difféomorphisme il a fallu attendre le travail récent de S. Brendle et R. Schoen. La preuve utilise le flot de Ricci de R. Hamilton (version sans chirurgie) et une approche développée par Ch. Böhm et B. Wilking.

E. GIROUX — *Sur la géométrie et la dynamique des transformations de contact (d'après Y. Eliashberg, L. Polterovich et al.)*

Étant donnée une variété munie d'une structure de contact coorientée, les isotopies de contact engendrées par des champs de vecteurs qui pointent du côté positif du plan de contact définissent un cône normal dans le revêtement universel de la composante neutre du groupe des transformations de contact. On exposera les résultats obtenus par Y. Eliashberg, L. Polterovich et al. sur l'ordre partiel associé à ce cône et leurs implications sur la géométrie (propriétés de tassement limité) et dynamique (nombre de progression relatif) des transformations de contact.

P. G. GOERSS — *Topological modular forms (after Hopkins, Miller, and Lurie)*

In the early 1970s, Quillen discovered a strong connection between formal Lie groups and cohomology theories with a natural theory of Chern classes. The algebraic geometry of these Lie groups allowed us to make predictions about large scale phenomena in stable homotopy theory, but until recently we lacked a mathematical framework for making precise comparisons. This has now changed with the emergence of derived algebraic geometry from its roots in the work of Serre and Illusie into a mature theory. A centerpiece of this new theory is the Hopkins-Miller-Lurie work on topological modular forms, from which we learn that the Deligne-Mumford moduli space for elliptic curves is canonically realized as an object in derived algebraic geometry. This has had a large impact in homotopy theory, but we have also discovered some new phenomena in geometry; for example, the derived Deligne-Mumford moduli space exhibits a very strong form of Serre duality not immediately apparent in the underlying classical moduli space.

T. SZAMUELY — *Corps de classes des schémas arithmétiques*

La théorie des corps de classes globale classique décrit les revêtements finis abéliens d'un ouvert du spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres ou d'une courbe algébrique lisse sur un corps fini au moyen des sous-groupes ouverts d'indice fini du groupe de classes d'idèles associé. À partir de la fin des années 1970, une généralisation aux schémas réguliers de type fini sur $\mathbf{Z}$ a été initiée par Parshin et Bloch, puis développée par Kato et Saito.

Récemment Wiesend a trouvé une autre approche nettement plus simple, revue et complétée par Schmidt et Kerz. Elle donne également une nouvelle preuve de la finitude du groupe de Chow des zéro-cycles d'un schéma arithmétique qui n'utilise pas la K-théorie.

F. BARTHE — *Un théorème de la limite centrale pour les ensembles convexes (d'après Klartag et Fleury-Guédon-Paouris)*

On considère un vecteur aléatoire X uniformément distribué sur un ensemble convexe de l'espace euclidien de dimension n. On suppose que sa matrice de covariance est multiple de l'identité. Alors la grande majorité des marginales de dimension 1 de la loi de X sont proches d'une même loi gaussienne et les estimations s'améliorent lorsque la dimension n tend vers l'infini. Le point crucial de la preuve consiste à montrer que la norme euclidienne de X ne dévie de sa valeur moyenne qu'avec une probabilité très faible. Ce résultat, démontré indépendamment par Klartag et Fleury-Guédon-Paouris, répond à une conjecture importante en géométrie asymptotique.

E. BREUILLARD — *Équidistribution des orbites toriques sur les espaces homogènes (d'après M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, Ph. Michel, A. Venkatesh)*

Depuis les travaux de Dani, Margulis et Ratner sur les flots unipotents dans l'espace des réseaux ($X = G/\Gamma$, $G = SL(n,\mathbb{R})$, $\Gamma = SL(n,\mathbb{Z})$) de nombreux auteurs ont commencé à s'intéresser aux flots diagonaux. Dans cet exposé, je présenterai les résultats récents de M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, Ph. Michel et A. Venkatesh concernant les propriétés ergodiques et notamment l'équidistribution des « orbites toriques » compactes. Leur méthode (pour $n = 3$) combine des techniques d'analyse harmonique et de théorie analytique des nombres (sous-convexité) avec des techniques issues des systèmes dynamiques (classification des mesures ergodiques invariantes par le tore diagonal en présence d'entropie).

A. FIGALLI — *Regularity of optimal transport maps (after Ma–Trudinger–Wang and Loeper)*

The issue of regularity of optimal transport maps in the case "cost = squared distance" on $\mathbb{R}^n$ was solved by Caffarelli in the 1990s. However, a major open problem in the theory was the question of regularity for more general cost functions, or for the case "cost = squared distance" on a Riemannian manifold. A breakthrough to this problem has been achieved by Ma-Trudinger-Wang (2005) and Loeper (2007), who found a necessary and sufficient condition on the cost function in order to ensure the regularity of the optimal map. This condition, now called MTW condition, involves a combination of derivatives of the cost, up to the fourth order. In the special case "cost = squared distance" on a Riemannian manifold, the MTW condition corresponds to ask for the non-negativity of a new curvature tensor on the manifold (the so-called MTW tensor), and it implies strong geometric consequences on the geometry of the manifold and on the structure of its cut-locus.

E. FRENKEL — *Gauge theory and Langlands duality*

The Langlands Program was launched in the late 60s with the goal of relating Galois representations and automorphic forms. In recent years, a geometric version has been developed which leads to a mysterious duality between certain categories of sheaves on moduli spaces of (flat) bundles on algebraic curves. Three years ago, in a groundbreaking advance, Kapustin and Witten have linked the geometric Langlands correspondence to the S-duality of 4D supersymmetric gauge theories. This and subsequent works have already led to striking new insights into the geometric Langlands Program, which in particular involve the Homological Mirror Symmetry of the Hitchin moduli spaces of Higgs bundles on algebraic curves associated to two Langlands dual Lie groups.

S. MAILLOT — *Variétés hyperboliques de petit volume (d'après D. Gabai, R. Meyerhoff, P. Milley, ...)*

On sait depuis les années 1970 grâce aux travaux de W. Thurston et T. Jørgensen que les volumes des variétés hyperboliques orientables de dimension 3 forment un ensemble bien ordonné de type ω^ω. Cet ensemble admet donc en particulier un minimum. On conjecturait depuis longtemps qu'une certaine variété W, découverte indépendamment par J. Weeks d'une part, et A. Fomenko et S. Matveev d'autre part, réalise ce minimum. Cette conjecture a été prouvée récemment par D. Gabai, R. Meyerhoff et P. Milley.