Sylvain Maillot

# Variétés hyperboliques de petit volume [d'après D. Gabai, R. Meyerhoff, P. Milley, ...]

*Astérisque*, tome 332 (2010), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 1011, p. 405-417

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__332__405_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 2009
61e année, 2008-2009, n° 1011, p. 405 à 417

# VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES DE PETIT VOLUME
## [d'après D. Gabai, R. Meyerhoff, P. Milley, ...]

par **Sylvain MAILLOT**

## INTRODUCTION

Soit $M$ une variété lisse. Une *métrique hyperbolique* sur $M$ est une métrique riemannienne $g_{\text{hyp}}$ complète de courbure sectionnelle constante égale à $-1$. Dans cet exposé, nous nous intéresserons principalement au cas où le volume de $g_{\text{hyp}}$ est fini. Si la dimension de $M$ est au moins 3, le théorème de rigidité de Mostow-Prasad implique qu'une variété donnée $M$ ne peut admettre qu'une seule métrique hyperbolique de volume fini à isométrie près. Si c'est le cas, nous dirons que $M$ est une *variété hyperbolique*. Les invariants métriques de $g_{\text{hyp}}$, en particulier le volume, ne dépendent donc que de $M$.

En dimension 2, le théorème de rigidité de Mostow ne s'applique pas, mais le volume est tout de même un invariant topologique. En effet, si $M$ est une surface, disons fermée et orientable, la formule de Gauss-Bonnet donne $\mathrm{Vol}(g_{\text{hyp}}) = 2\pi|\chi(M)|$ où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler de $M$. Par conséquent, l'ensemble des volumes des surfaces hyperboliques est discret, et le volume croît avec la complexité topologique. En particulier, la surface de plus petit volume est celle de genre 2, qui est aussi la plus simple.

En dimension 3, la question est plus complexe. Il n'est pas évident *a priori* qu'il existe une variété hyperbolique de plus petit volume, ni même que l'infimum de l'ensemble des volumes soit non nul. Dans la section 1, on rappellera des résultats classiques de Kazhdan-Margulis, Thurston et Jørgensen qui impliquent que c'est le cas. On notera ici $v_0$ le plus petit élément de l'ensemble $\mathcal{V}$ des volumes des variétés hyperboliques orientables de dimension 3.

Se pose alors la question naturelle de déterminer la (ou les) variété(s) réalisant ce minimum. Un candidat a été proposé indépendamment par J. Weeks, d'une part, et A. Fomenko et S. Matveev [**36**], d'autre part. À l'aide du programme SnapPea,

J. Weeks et C. Hodgson [29] ont effectué un « recensement » des variétés hyperboliques et calculé des valeurs approchées de leurs volumes, donnant ainsi du poids à la conjecture selon laquelle la variété de Weeks-Fomenko-Matveev est l'unique variété de volume minimal, ce volume étant approximativement $0,9427$.

La première minoration publiée de $v_0$ est due à R. Meyerhoff [38]. Elle est de $0,00064$, qui comme on le voit est très loin du compte. Cette minoration a été ensuite améliorée dans une série de travaux dont certains seront traités plus en détail dans la section 2 [2, 4, 20, 22, 23, 35, 37, 44, 45].

Dans une autre direction, une série de travaux de M. Culler, P. Shalen et leurs collaborateurs (voir par exemple les articles [3, 13] et leurs références) ont montré qu'il existe une corrélation entre volume et complexité topologique.

Dans ce texte, on se limite par souci de simplicité aux variétés orientables de dimension 3. On peut bien entendu poser la même question en dimension supérieure, pour les variétés non-orientables, ou pour les orbifolds (voir par exemple les articles [1, 14, 24, 27, 28, 31, 32] et leurs références). Il ne sera ici que très peu question de ces généralisations. Nous n'entrerons pas non plus dans les détails de la preuve du théorème de Gabai-Meyerhoff-Milley ; le lecteur intéressé est renvoyé aux articles originaux, ainsi qu'au texte d'exposition [18].

## 1. STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES VOLUMES

### 1.1. Le lemme de Margulis

Soit $(M, g_{\mathrm{hyp}})$ une variété hyperbolique de dimension $n$. Un résultat élémentaire de géométrie riemannienne affirme que le revêtement universel $\tilde{M}$ de $M$ muni de la métrique induite $g_{\tilde{\mathrm{hyp}}}$ est isométrique à l'espace hyperbolique réel de dimension $n$, que nous notons $\mathbf{H}^n$. Une fois fixée une identification de $\tilde{M}$ avec $\mathbf{H}^n$, on peut considérer le groupe fondamental $\pi_1 M$ comme un sous-groupe du groupe $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$ des isométries de $\mathbf{H}^n$. Si $M$ est orientable, ce que l'on supposera toujours dans la suite, alors $\pi_1 M$ est inclus dans le sous-groupe $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$ de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$ formé des éléments qui préservent l'orientation. De plus, ce sous-groupe est sans torsion et discret pour la topologie usuelle. Nous appellerons *groupe kleinéen* un sous-groupe de $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$ ayant ces deux propriétés.

Pour $n = 3$, on peut identifier $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^3)$ avec $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Si l'on voit $\mathbf{H}^3$ comme la boule unité ouverte de $\mathbf{R}^3$ avec la métrique de Poincaré, alors l'action de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^3)$ sur $\mathbf{H}^3$ se prolonge en une action sur la boule unité fermée $\overline{\mathbf{H}^3}$. Il est possible d'identifier la sphère $\overline{\mathbf{H}^3} - \mathbf{H}^3$ (la « sphère à l'infini ») avec $\mathbf{CP}^1$ de sorte que l'action induite de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{CP}^1$ soit l'action standard.

On classifie les éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ en trois types de la façon suivante. Soit $\gamma$ un élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ différent de $\pm\mathrm{I}$. Si $\gamma$ est diagonalisable, on dit qu'il est *semi-simple.* Il est alors conjugué à $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ pour un certain $\lambda \in \mathbf{C}^*$. Si $|\lambda| = 1$, on dit que $\gamma$ est *elliptique.* Sinon, on dit que $\gamma$ est *hyperbolique.*

Une isométrie semi-simple $\gamma$ fixe exactement deux points de la sphère à l'infini $\mathbf{CP}^1$. L'unique géodésique de $\mathbf{H}^3$ reliant ces deux points est appelé l'*axe* de $\gamma$. Si l'on écrit la valeur propre $\lambda$ comme $e^{(l+i\theta)/2}$ avec $l, \theta \in \mathbf{R}$, alors on peut interpréter géométriquement $\gamma$ comme une sorte de vissage, dont $l$ serait la longueur algébrique de translation et $\theta$ l'angle de rotation. Le cas elliptique correspond donc à une rotation pure.

Si $\gamma$ n'est pas diagonalisable, alors $\gamma$ est conjugué à $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et on dit que $\gamma$ est *parabolique.* Dans ce cas $\gamma$ fixe exactement un point de $\mathbf{CP}^1$.

Si $x \in \mathbf{CP}^1$, on appelle *horoboule* centrée en $x$ une partie de $\mathbf{H}^3$ de la forme $B - \{x\}$, où $B$ est une boule fermée de $\overline{\mathbf{H}^3}$ tangente à $\mathbf{CP}^1$ en $x$. Ces ensembles sont stabilisés par les isométries paraboliques ayant $x$ comme point fixe.

Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ un groupe kleinéen. Il est facile de voir que $\Gamma$ ne peut pas contenir d'élément elliptique. On dit que $\Gamma$ est *élémentaire* s'il existe un point $x \in \mathbf{CP}^1$ qui est fixé par tous les éléments de $\Gamma$. Il existe trois types de sous-groupes élémentaires :

1. hyperbolique : un groupe infini cyclique constitué d'éléments hyperboliques de même axe ;
2. parabolique de rang 1 : un groupe infini cyclique constitué d'éléments paraboliques ayant même point fixe à l'infini ;
3. parabolique de rang 2 : un groupe abélien libre de rang 2 constitué d'éléments paraboliques ayant même point fixe à l'infini.

Nous nous intéressons à la partie de $M$ formée des points où le rayon d'injectivité est petit. Comme nous sommes en courbure négative, ce sont exactement les points $y$ par lesquels il passe un petit lacet non-homotope à zéro. Un tel lacet correspond à un élément du groupe fondamental de $M$ dont l'action sur $\mathbf{H}^3$ a la propriété de ne pas beaucoup bouger un certain relevé de $y$.

Si $\Gamma$ est un groupe kleinéen, $x$ un point de $\mathbf{H}^3$ et $\varepsilon$ un nombre réel strictement positif, on note $\Gamma_{x,\varepsilon}$ le sous-groupe de $\Gamma$ engendré par les éléments $\gamma$ tels que la distance (pour la métrique hyperbolique) entre $x$ et $\gamma(x)$ est inférieure ou égale à $\varepsilon$.

THÉORÈME 1.1 (Lemme de Margulis [**30**]). — *Il existe une constante universelle $\mu_3 > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon \in ]0, \mu_3]$, pour tout groupe kleinéen $\Gamma$ et tout $x \in \mathbf{H}^3$, le groupe $\Gamma_{x,\varepsilon}$ soit élémentaire.*

Dans la suite on fixe une telle constante $\mu_3$ (appelée « constante de Margulis »).

DÉFINITION 1.2. — *Soient $M$ une variété hyperbolique de dimension* 3 *et* $\varepsilon > 0$. *La* partie $\varepsilon$-mince *de $M$ est l'ensemble des points $x \in M$ tel qu'il existe un élément $\gamma \in \pi_1 M - \pm \mathrm{I}$ et un relevé $\tilde{x} \in \mathbf{H}^3$ de $x$ satisfaisant $d(\tilde{x}, \gamma\tilde{x}) \leq \varepsilon$. La* partie $\varepsilon$-épaisse *est le complémentaire de la partie $\varepsilon$-mince.*

Le lemme de Margulis nous permet d'obtenir une description précise de la partie $\varepsilon$-mince d'une variété hyperbolique pour $\varepsilon$ inférieur ou égal à la constante de Margulis.

Soient $R > 0, \Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ un groupe élémentaire hyperbolique et $L$ l'axe commun des éléments de $\Gamma$. Rappelons que le *$R$-voisinage* de $L$ est l'ensemble des points de $\mathbf{H}^3$ dont la distance à $L$ est inférieure ou égale à $R$. Le quotient de cet ensemble par $\Gamma$ est appelé *tube de Margulis.* On dit que $R$ est le *rayon* de ce tube, et la géodésique fermée $L/\Gamma \subset M$ en est l'*âme*. Topologiquement, un tube de Margulis est un *tore solide*, c'est-à-dire qu'il est homéomorphe à $S^1 \times D^2$.

Si $B$ est une horoboule centrée en un point $x \in \mathbf{CP}^1$ et $\Gamma$ un groupe élémentaire parabolique dont le point fixe est $x$, alors on appelle *voisinage de cusp* le quotient de $B$ par $\Gamma$. Cet ensemble est homéomorphe à $[0, +\infty[ \times S^1 \times \mathbf{R}$ ou $[0, +\infty[ \times S^1 \times S^1$ selon si le rang de $\Gamma$ est 1 ou 2.

Le lemme de Margulis a la conséquence suivante :

COROLLAIRE 1.3. — *Soient $M$ une variété hyperbolique de dimension* 3 *et* $\varepsilon \in ]0, \mu_3]$. *Alors chaque composante connexe de la partie $\varepsilon$-mince de $M$ est un tube de Margulis ou un voisinage de cusp.*

Cet énoncé est valable même si la métrique hyperbolique a un volume infini. Dans le cas où le volume est fini, on obtient des résultats plus précis. Premièrement, il n'y a pas de voisinage de cusp de rang 1, car ceux-ci ont un volume infini. Deuxièmement, il y a au plus un nombre fini de tubes de Margulis et de cusps de rang 2.

En particulier, si $M$ est compacte, la partie mince est entièrement constituée de tubes de Margulis. Si $M$ est non-compacte, chaque bout de $M$ admet un voisinage homéomorphe à $T^2 \times [0, +\infty[$. Il existe donc une variété à bord $\bar{M}$ de dimension 3 compacte, dont les composantes de bord sont des tores, et telle que $M$ soit homéomorphe à l'intérieur de $\bar{M}$. Les bouts de $M$ sont appelés des *cusps*.

Du point de vue de la question qui nous intéresse, à savoir le problème du volume minimal, le lemme de Margulis implique que l'infimum des volumes des variétés hyperboliques de dimension 3 est strictement positif. En effet, il résulte du corollaire 1.3 que la partie $\mu_3$-épaisse de $M$ est non-vide, ce qui permet de minorer le volume de $M$ par celui d'une boule de rayon $\mu_3$ dans $\mathbf{H}^3$.

### 1.2. Remplissage de Dehn

*À partir de maintenant, les variétés hyperboliques considérées sont toujours de dimension 3, orientables et de volume fini, et nous omettrons ces précisions.*

On trouvera des discussions plus complètes et détaillées des résultats de cette sous-section dans l'exposé [**25**] et la monographie [**6**], cette dernière traitant également de la généralisation de cette théorie aux orbifolds.

Nous commençons cette sous-section par une définition purement topologique. Soit $X$ une variété à bord compacte de dimension 3 telle que chaque composante connexe de $\partial X$ soit un tore. On appelle *remplissage de Dehn* sur $X$ l'opération qui consiste à choisir un certain nombre de composantes de $\partial X$, recoller un tore solide à $X$ le long de chacune de ces composantes, et retirer les autres.

Rappelons qu'on nomme *méridien* de $S^1 \times D^2$ la courbe $S^1 \times \partial D^2$. Si $\partial X$ est connexe, le type topologique de la variété obtenue par remplissage de Dehn ne dépend que de la classe d'homologie de la courbe de $\partial X$ le long de laquelle est recollé le méridien. Une fois choisie une base $(m, l)$ de $H_1(\partial X)$, les remplissages de Dehn sur $X$ sont donc paramétrés par les couples d'entiers premiers entre eux (à l'exception du « faux » remplissage qui consiste à simplement retirer $\partial X$.)

Dans le cas général où le nombre de composantes de $\partial X$ est arbitraire, on choisit pour chaque composante $T_i$ de $\partial X$ une base $(m_i, l_i)$ de $H_1(T_i)$. Les remplissages de Dehn sont paramétrés par les $p$-uples $(x_1, \dots, x_p) \in (\mathbf{Z}^2 \cup \{\infty\})^p$ où chaque $x_i$ est soit un couple d'entiers premiers entre eux, soit $\infty$, ce dernier cas correspondant au fait de retirer $T_i$.

Soit $M$ une variété hyperbolique. On a vu à la sous-section précédente que $M$ admet une compactification $\bar{M}$. Par abus de langage, on appelle encore remplissage de Dehn sur $M$ un remplissage de Dehn sur sa compactification $\bar{M}$. Ainsi, le remplissage $(\infty, \dots, \infty)$ correspond à la variété $M$ elle-même. On dit qu'un remplissage de Dehn est hyperbolique si la variété obtenue est hyperbolique.

Le théorème suivant, dû à W. Thurston, fournit une foule d'exemples de variétés hyperboliques.

THÉORÈME 1.4 (Remplissage de Dehn hyperbolique). — *Soit $M$ une variété hyperbolique ayant $p$ cusps. Alors il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $(\infty, \dots, \infty)$ dans $(\mathbf{Z}^2 \cup \{\infty\})^p$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{U}$, le remplissage de Dehn associé à $x$ soit hyperbolique.*

Du point de vue des volumes, il faut noter deux faits : premièrement, si $N$ est un remplissage de Dehn hyperbolique sur $M$, alors $\operatorname{Vol} N < \operatorname{Vol} M$ ; deuxièmement, si $N_k$ est une suite de remplissages de Dehn sur $M$ dont les paramètres tendent vers $(\infty, \dots, \infty)$, alors $\operatorname{Vol} N_k$ converge vers $\operatorname{Vol} M$ quand $k \to \infty$ [(1)]. Cette dernière

[(1)] Il existe des résultats plus précis concernant cette convergence, voir par exemple [**41**].

propriété résulte du fait que la suite de variétés $N_k$ « converge géométriquement » vers $M$.

Pour pouvoir utiliser le théorème 1.4, il faut bien entendu disposer d'exemples de variétés hyperboliques à cusps. La source la plus utile de tels exemples est le théorème d'hyperbolisation de Thurston.

Les exemples les plus connus sont le *complémentaire du nœud de huit* et le *complémentaire de l'entrelacs de Whitehead.* Le premier est $S^3 - k$, où $k$ est une certaine courbe fermée simple dans $S^3$ appelée « nœud de huit », et le deuxième $S^3 - L$ où $L$ est la réunion disjointe de deux courbes fermées simples formant « l'entrelacs de Whitehead ».

Nous pouvons à présent définir la variété $W$ de Weeks-Fomenko-Matveev : c'est la variété obtenue par remplissage $((5,1),(5,2))$ sur le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead. Notons au passage que la variété obtenue par remplissage de Dehn $((5,1),\infty)$ sur le complémentaire de l'entrelacs de Whitehead est hyperbolique et a le même volume que le complémentaire du nœud de huit (soit environ $2,02988$.) Pour cette raison, on appelle cette variété la *sœur du complémentaire du nœud de huit.*

## 1.3. Théorème de Thurston-Jørgensen

Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des volumes des variétés hyperboliques (orientables de dimension 3.) C'est un sous-ensemble de la droite réelle, qu'on munit de l'ordre induit.

Il n'est pas difficile de construire pour chaque entier naturel $p$ une variété hyperbolique ayant exactement $p$ cusps. En calculant leurs volumes, on vérifie qu'on obtient ainsi un ensemble discret infini plongé dans $\mathcal{V}$. D'autre part, il résulte des considérations de la section précédente que le $p$-ième de ces points est un point d'accumulation de rang $p$, l'accumulation se faisant par la gauche.

Réciproquement, on peut montrer que tous les points d'accumulation de $\mathcal{V}$ sont obtenus de cette manière. On obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 1.5. — *$\mathcal{V}$ est un ensemble bien ordonné de type $\omega^\omega$. De plus, chaque élément de $\mathcal{V}$ est réalisé par un nombre fini de variétés.*

Il existe donc un plus petit élément de $\mathcal{V}$, noté $v_0$. La (ou les) variété(s) correspondante(s) est (sont) compacte(s). Il y a un plus petit point d'accumulation, noté $v_\omega$, qui est aussi le plus petit volume d'une variété hyperbolique non-compacte, et aussi le plus petit volume d'une variété hyperbolique ayant exactement un cusp. C. Cao et R. Meyerhoff [**10**] ont démontré que $v_\omega$ est réalisé par le complémentaire du nœud de huit et sa sœur.

Le théorème principal qui fait l'objet de cet exposé peut donc s'énoncer ainsi :

THÉORÈME 1.6 (Gabai-Meyerhoff-Milley [**17**]). — *La variété $W$ est l'unique variété hyperbolique dont le volume est $v_0$.*

*Remarque 1.7.* — Pour des résultats concernant la structure des volumes des variétés modelées sur d'autres espaces symétriques, et notamment les aspects arithmétiques de cette question, voir par exemple l'exposé [**47**].

## 2. COMMENT MINORER LES VOLUMES HYPERBOLIQUES ?

### 2.1. Rayons des tubes de Margulis

Comme on l'a déjà remarqué, le lemme de Margulis implique que toute variété hyperbolique contient une boule métrique de $\mathbf{H}^3$ plongée de rayon une constante universelle $\mu_3$. La première idée pour minorer $v_0$ est donc de déterminer une constante de Margulis explicite.

On obtient des résultats un peu meilleurs en minorant le rayon des tubes de Margulis, l'idée générale étant que plus l'âme du tube est courte, plus son rayon est grand. Ainsi, si $M$ est une variété hyperbolique compacte, soit son rayon d'injectivité est assez grand, auquel cas on peut minorer son volume par celui d'une boule de $\mathbf{H}^3$ de rayon assez grand, soit elle possède une géodésique courte, qui est l'âme d'un tube de Margulis dont le rayon est relativement grand, et on minore le volume de $M$ par celui de ce tube.

À titre d'exemple, R. Meyerhoff [**38**] en 1987 obtient une constante de Margulis explicite de $0,104$ et prouve que $v_0 \geq 0,00064$, ce qui est bien sûr encore très loin du résultat optimal. La preuve repose sur l'*inégalité de Jørgensen* : si $A, B$ sont deux matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ qui engendrent un sous-groupe discret non-élémentaire, alors

$$|\operatorname{tr}([A,B]) - 2| \geq 1 - |(\operatorname{tr} A)^2 - 4|.$$

Le lien provient du fait que la *distance de déplacement* d'une isométrie $\gamma$ de $\mathbf{H}^3$, c'est-à-dire l'infimum des $d(x, \gamma x)$ pour tous les $x \in \mathbf{H}^3$, peut être obtenue à partir de la trace de la matrice correspondante.

Pour des travaux similaires, basés également sur l'inégalité de Jørgensen, voir [**8, 21, 48**]. Une autre méthode, qui s'applique également en dimension supérieure et pour des groupes discrets d'isométries d'autres espaces symétriques, consiste à minorer la distance de déplacement en fonction de la plus petite valeur propre du laplacien du groupe. Le lecteur intéressé par cette technique, ainsi que par les liens avec la constante isopérimétrique de Cheeger, pourra consulter [**9, 42**].

Remarquons que cette philosophie vaut aussi pour les variétés non-compactes, en remplaçant « tube de Margulis » par « cusp ». En fait, elle est même plus « facile » à mettre en œuvre dans ce cas-là, car il est plus aisé d'obtenir de bonnes minorations des volumes de voisinages de cusps. C'est pourquoi historiquement le volume $v_\omega$ a été déterminé beaucoup plus tôt que $v_0$.

Dans la suite, il sera pratique d'utiliser la définition suivante : si $\gamma$ est une géodésique fermée dans une variété hyperbolique $M$ et qu'il existe un tube de Margulis $T \subset M$ dont l'âme est $\gamma$, alors on appelle *rayon* (en anglais « tuberadius ») de $\gamma$ le rayon maximal d'un tel $T$.

Les méthodes « directes » de minoration du rayon des tubes de Margulis ont été poussées à un haut degré de sophistication et de complexité technique. L'avancée la plus importante est peut-être [**20**] : on y prouve en particulier que si $M$ est une variété hyperbolique compacte, alors la géodésique la plus courte de $M$ a un rayon d'au moins $\log 3/2$, sauf si $M$ appartient à l'une de sept familles bien identifiées. Ces familles peuvent ensuite être étudiées par ordinateur. En particulier, un sous-produit de leur travail est le suivant :

THÉORÈME 2.1 (Gabai-Meyerhoff-N. Thurston [**20**]). — *Soit $M$ une variété hyperbolique de volume $v_0$. Alors le rayon de la géodésique la plus courte dans $M$ est supérieur ou égal à* $\log 3/2$.

Ce résultat, combiné avec des travaux de Gehring et Martin [**23**], donne la minoration $v_0 \geq 0,16668$, qui est bien meilleure que les résultats précédemment connus. Le résultat de Gehring et Martin a été ensuite amélioré par Przeworski [**44**], pour donner $v_0 \geq 0,276796$.

## 2.2. Le « drilling » ou forage

Soit $N$ une variété hyperbolique compacte. Soit $\gamma$ une géodésique fermée de $N$. Notons $N_\gamma := N - \gamma$. On dit que cette variété est obtenue à partir de $N$ par *forage* (en anglais « drilling ».) Il résulte du théorème d'hyperbolisation de W. Thurston que $N_\gamma$ est hyperbolique (cf. [**34**].)

I. Agol [**2**] a découvert une inégalité permettant de majorer le volume de $N_\gamma$ en fonction de celui de $N$ et du rayon $R$ de $\gamma$ :

$$\mathrm{Vol}(N_\gamma) \leq (\coth R)^{5/2} (\coth 2R)^{1/2} \, \mathrm{Vol}(N). \tag{1}$$

La preuve de cette inégalité repose sur le résultat suivant, qui est une extension du théorème du volume minimal de G. Besson, G. Courtois et S. Gallot :

THÉORÈME 2.2 (Boland-Connell-Souto [**7**]). — *Soit $M$ une variété hyperbolique. Alors la métrique hyperbolique réalise le plus petit volume parmi toutes les métriques riemanniennes complètes dont la courbure sectionnelle est bornée et majorée par $-1$, et la courbure de Ricci minorée par $-2$.*

L'idée de la preuve de l'inégalité (1) est la suivante : soit $T$ un tube de Margulis d'âme $\gamma$ et de rayon $R$ . On construit une métrique riemannienne (de courbure variable) sur $N_\gamma$ qui coïncide avec la métrique hyperbolique sur $N-T$ et dont on majore le volume tout en contrôlant la courbure sectionnelle et la courbure de Ricci. On voudrait appliquer le théorème ci-dessus à cette métrique. Il y a un point technique à surmonter : la métrique construite n'est que de classe $\mathscr{C}^1$. Ce problème est résolu par approximation.

L'inégalité (1), combinée avec le théorème 2.1 et la minoration de $v_\omega$ de Cao et Meyerhoff, donne $v_0 \geq 0,32$. Ce résultat est légèrement amélioré par Przeworski [**46**], qui obtient $v_0 \geq 0,33$.

Une amélioration plus substantielle de l'inégalité (1) a été obtenue par I. Agol, N. Dunfield, P. Storm et W. Thurston [**4**] :

$$\mathrm{Vol}(N_\gamma) \leq (\coth 2R)^3 \left(\mathrm{Vol}(N) + \frac{\pi}{2} l \tanh R \tanh 2R\right). \tag{2}$$

La méthode de preuve de l'inégalité (2) est similaire à celle de l'inégalité (1), et repose sur le théorème du volume minimal de Perelman, qui est une vaste généralisation du théorème de Besson-Courtois-Gallot :

THÉORÈME 2.3 (G. Perelman [**43**], voir aussi [**5, 11, 12, 33, 40**])
*Soit $M$ une variété hyperbolique compacte. Alors la métrique hyperbolique réalise le plus petit volume parmi les métriques riemanniennes sur $M$ dont la courbure scalaire est supérieure ou égale à $-6$.*

Pour démontrer l'inégalité (2), on construit sur $N_\gamma$ une métrique $\mathscr{C}^0$ qui coïncide avec la métrique hyperbolique sur $N - C$ et dont on minore la courbure scalaire. On ne peut pas appliquer directement le théorème de Perelman pour deux raisons : la métrique n'est que $\mathscr{C}^0$, et la variété n'est pas compacte. La première difficulté est résolue par un procédé de lissage inspiré par les travaux de Bray et Miao sur la conjecture de Penrose (cf. l'exposé [**26**]) et repose sur un théorème de M. Simon permettant d'affirmer l'existence en temps petit du flot de Ricci pour une condition initiale $\mathscr{C}^0$. La deuxième l'est grâce à un argument d'approximation géométrique par remplissage de Dehn.

En combinant le théorème 2.1 avec l'inégalité (2), on obtient la minoration $v_0 \geq 0,67$.

### 2.3. Structures Mom

Les résultats de [**4**], [**20**] et [**46**] mis ensemble impliquent l'énoncé suivant :

THÉORÈME 2.4. — *Si $N$ est une variété hyperbolique de volume inférieur ou égal à* $\mathrm{Vol}\, W$, *alors $N$ est obtenue par remplissage de Dehn sur une variété à un cusp de volume au plus* $2,848$.

Dans [**19**] et [**17**], D. Gabai, R. Meyerhoff et P. Milley ont obtenu une liste complète des dix variétés à un cusp de volume au plus $2,848$. P. Milley [**39**] a analysé pour chacune de ces variétés l'espace des remplissages de Dehn et identifié $W$ comme la variété de plus petit volume parmi elles. Cette analyse se base sur un théorème de D. Futer, E. Kalfagianni et J. Purcell [**15**] qui donne une minoration du volume dès que les coefficients du remplissage de Dehn sont assez grands, de sorte qu'il n'y a qu'un nombre fini de coefficients à regarder, ce qui se fait par ordinateur.

La liste des dix variétés à un cusp de volume au plus $2,848$ s'obtient de la façon suivante : Gabai, Meyerhoff et Milley ont introduit une notion technique appelée structure $\mathrm{Mom}-n$. Sans rentrer dans les détails, si $n$ est un entier naturel et $M$ une variété hyperbolique, on dit que $M$ est $\mathrm{Mom}-n$ s'il existe une décomposition en anses de $\bar{M}$ comprenant un voisinage collier d'une composante de $\partial\bar{M}$ à laquelle on attache $n$ 1-anses et $n$ 2-anses de sorte que certaines conditions combinatoires soient satisfaites.

La stratégie de [**17, 19**] consiste à procéder en deux temps : d'abord on classifie les variétés $\mathrm{Mom}-2$ et $\mathrm{Mom}-3$. Cela donne une liste de 21 variétés hyperboliques. On montre ensuite que toute variété hyperbolique à un cusp de volume au plus $2,848$ est obtenue par remplissage de Dehn sur l'une de ces 21 variétés. Le travail est terminé dans [**39**] par une analyse rigoureuse des espaces de remplissages de Dehn des variétés en question.

**Remerciements**

Je voudrais remercier E. Breuillard, O. Debarre, D. Gabai, R. Kellerhals, R. Meyerhoff, P. Milley et B. Rémy pour leurs commentaires et suggestions.

## RÉFÉRENCES

[1] C. C. ADAMS – The noncompact hyperbolic 3-manifold of minimal volume, *Proc. Amer. Math. Soc.* **100** (1987), p. 601–606.

[2] I. AGOL – Volume change under drilling, *Geom. Topol.* **6** (2002), p. 905–916 (électronique).

[3] I. AGOL, M. CULLER & P. B. SHALEN – Dehn surgery, homology and hyperbolic volume, *Algebr. Geom. Topol.* **6** (2006), p. 2297–2312.

[4] I. AGOL, P. A. STORM & W. P. THURSTON – Lower bounds on volumes of hyperbolic Haken 3-manifolds, avec un appendice de N. Dunfield, *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), p. 1053–1077 (électronique).

[5] L. BESSIÈRES, G. BESSON, M. BOILEAU, S. MAILLOT & J. PORTI – Geometrisation of 3-manifolds, à paraître dans *Tracts of the E.M.S.*

[6] M. Boileau, S. Maillot & J. Porti – *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures*, Panoramas et Synthèses, vol. 15, Soc. Math. France, 2003.

[7] J. Boland, C. Connell & J. Souto – Volume rigidity for finite volume manifolds, *Amer. J. Math.* **127** (2005), p. 535–550.

[8] R. Brooks & J. P. Matelski – Collars in Kleinian groups, *Duke Math. J.* **49** (1982), p. 163–182.

[9] P. Buser – On Cheeger's inequality $\lambda_1 \geq h^2/4$, in *Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979)*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, Amer. Math. Soc., 1980, p. 29–77.

[10] C. Cao & R. Meyerhoff – The orientable cusped hyperbolic 3-manifolds of minimum volume, *Invent. Math.* **146** (2001), p. 451–478.

[11] H.-D. Cao & X.-P. Zhu – A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures—application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow, *Asian J. Math.* **10** (2006), p. 165–492.

[12] ______, Erratum to [**11**], *Asian J. Math.* **10** (2006), p. 663–664.

[13] M. Culler, S. Hersonsky & P. B. Shalen – The first Betti number of the smallest closed hyperbolic 3-manifold, *Topology* **37** (1998), p. 805–849.

[14] B. Everitt, J. Ratcliffe & S. Tschantz – The smallest hyperbolic 6-manifolds, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* **11** (2005), p. 40–46.

[15] D. Futer, E. Kalfagianni & J. S. Purcell – Dehn filling, volume, and the Jones polynomial, *J. Differential Geom.* **78** (2008), p. 429–464.

[16] D. Gabai, R. Meyerhoff & P. Milley – Volumes of tubes in hyperbolic 3-manifolds, *J. Differential Geom.* **57** (2001), p. 23–46.

[17] ______, Minimum volume cusped hyperbolic three-manifolds, *J. Amer. Math. Soc.* **22** (2009), p. 1157–1215.

[18] ______, Mom technology and hyperbolic 3-manifolds, à paraître aux *Proceedings of the fourth Ahlfors-Bers Colloquium.*

[19] ______, Mom technology and volumes of hyperbolic 3-manifolds, prépublication arXiv:math.GT/0606072.

[20] D. Gabai, R. Meyerhoff & N. Thurston – Homotopy hyperbolic 3-manifolds are hyperbolic, *Ann. of Math.* **157** (2003), p. 335–431.

[21] D. Gallo – A 3-dimensional hyperbolic collar lemma, in *Kleinian groups and related topics (Oaxtepec, 1981)*, Lecture Notes in Math., vol. 971, Springer, 1983, p. 31–35.

[22] F. W. Gehring & G. J. Martin – Inequalities for Möbius transformations and discrete groups, *J. reine angew. Math.* **418** (1991), p. 31–76.

[23] ______, Precisely invariant collars and the volume of hyperbolic 3-folds, *J. Differential Geom.* **49** (1998), p. 411–435.

[24] ———, The volume of hyperbolic 3-folds with $p$-torsion, $p \geq 6$, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **50** (1999), p. 1–12.

[25] M. GROMOV – Hyperbolic manifolds (according to Thurston and Jørgensen), Séminaire Bourbaki, vol. 1979/80, exposé n° 546, *Lecture Notes in Math.* **842** (1981), p. 40–53.

[26] M. HERZLICH – L'inégalité de Penrose (d'après H. Bray, G. Huisken et T. Ilmanen, ...), Séminaire Bourbaki, vol. 2000/01, exposé n° 883, *Astérisque* **282** (2002), p. 85–111.

[27] T. HILD – The cusped hyperbolic orbifolds of minimal volume in dimensions less than ten, *J. Algebra* **313** (2007), p. 208–222.

[28] T. HILD & R. KELLERHALS – The FCC lattice and the cusped hyperbolic 4-orbifold of minimal volume, *J. Lond. Math. Soc.* **75** (2007), p. 677–689.

[29] C. D. HODGSON & J. R. WEEKS – Symmetries, isometries and length spectra of closed hyperbolic three-manifolds, *Experiment. Math.* **3** (1994), p. 261–274.

[30] D. A. KAŽDAN & G. A. MARGULIS – A proof of Selberg's hypothesis, *Mat. Sbornik* **75** (1998), p. 163–168.

[31] R. KELLERHALS – Volumes of cusped hyperbolic manifolds, *Topology* **37** (1998), p. 719–734.

[32] R. KELLERHALS & T. ZEHRT – The Gauss-Bonnet formula for hyperbolic manifolds of finite volume, *Geom. Dedicata* **84** (2001), p. 49–62.

[33] B. KLEINER & J. LOTT – Notes on Perelman's papers, *Geom. Topol.* **12** (2008), p. 2587–2855.

[34] S. KOJIMA – Deformations of hyperbolic 3-cone-manifolds, *J. Differential Geom.* **49** (1998), p. 469–516.

[35] T. H. MARSHALL & G. J. MARTIN – Volumes of hyperbolic 3-manifolds. Notes on a paper of D. Gabai, R. Meyerhoff, and P. Milley ([**16**]), *Conform. Geom. Dyn.* **7** (2003), p. 34–48 (électronique).

[36] S. V. MATVEEV & A. T. FOMENKO – Isoenergetic surfaces of Hamiltonian systems, the enumeration of three-dimensional manifolds in order of growth of their complexity, and the calculation of the volumes of closed hyperbolic manifolds, *Russian Math. Surveys* **43** (1988), p. 3–24.

[37] R. MEYERHOFF – Sphere-packing and volume in hyperbolic 3-space, *Comment. Math. Helv.* **61** (1986), p. 271–278.

[38] ———, A lower bound for the volume of hyperbolic 3-manifolds, *Canad. J. Math.* **39** (1987), p. 1038–1056.

[39] P. MILLEY – Minimum volume hyperbolic 3-manifolds, *J. Topol.* **2** (2009), p. 181–192.

[40] J. Morgan & G. Tian – *Ricci flow and the Poincaré conjecture*, Clay Mathematics Monographs, vol. 3, Amer. Math. Soc., 2007.

[41] W. D. Neumann & D. Zagier – Volumes of hyperbolic three-manifolds, *Topology* **24** (1985), p. 307–332.

[42] A. Nevo – The spectral theory of amenable actions and invariants of discrete groups, *Geom. Dedicata* **100** (2003), p. 187–218.

[43] G. Perelman – Ricci flow with surgery on three-manifolds, prépublication arXiv:math.DG/0303109.

[44] A. Przeworski – Tubes in hyperbolic 3-manifolds, *Topology Appl.* **128** (2003), p. 103–122.

[45] ———, Density of tube packings in hyperbolic space, *Pacific J. Math.* **214** (2004), p. 127–144.

[46] ———, A universal upper bound on density of tube packings in hyperbolic space, *J. Differential Geom.* **72** (2006), p. 113–127.

[47] B. Rémy – Covolume des groupes $S$-arithmétiques et faux plans projectifs (d'après Mumford, Prasad, Klingler, Yeung, Prasad–Yeung), Séminaire Bourbaki, vol. 2007/08, exposé n° 984, *Astérisque* **326** (2009), p. 83–130.

[48] P. L. Waterman – An inscribed ball for Kleinian groups, *Bull. London Math. Soc.* **16** (1984), p. 525–530.

Sylvain MAILLOT

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7 rue René Descartes
F–67084 Strasbourg Cedex

et, à partir d'octobre 2009 :
Université de Montpellier II
Département de Mathématiques
Case 051
Place Eugène Bataillon
F–34095 Montpellier Cedex 5
*E-mail* : smaillot@math.univ-montp2.fr