Astérisque

FRANK BARTHE

Un théorème de la limite centrale pour les ensembles convexes [d'après Klartag et Fleury-Guédon-Paouris]

Astérisque, tome 332 (2010), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 1007, p. 287-304

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__332__287_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 2009
61^{e} année, 2008-2009, n^{o} 1007, p. 287 à 304

UN THÉORÈME DE LA LIMITE CENTRALE POUR LES ENSEMBLES CONVEXES [d'après Klartag et Fleury-Guédon-Paouris]

par **Franck BARTHE**

INTRODUCTION

À l'interface de la théorie locale des espaces de Banach et de la théorie de Brunn-Minkowski-Lusternik, la géométrie asymptotique des convexes étudie les propriétés métriques ou volumiques des corps convexes (i.e. les sous-ensembles convexes, compacts de $\mathbb{R}^n$ dont l'intérieur n'est pas vide) en grande dimension n en cherchant les bonnes dépendances dimensionnelles. Le résultat fondateur de ce domaine est certainement le théorème de Dvoretzky, revisité par Milman [**32, 33**] qui assure que, pour tout corps convexe $K \subset \mathbb{R}^n$, symétrique par rapport à l'origine, il existe un sous-espace vectoriel F de dimension au moins $c(\varepsilon)\log n$ tel que l'intersection $K \cap F$ soit euclidienne à ε près, au sens suivant : il existe un ellipsoïde $\mathcal{E} \subset F$ tel que

$$(1-\varepsilon)\mathcal{E} \subset K \cap F \subset (1+\varepsilon)\mathcal{E}.$$

Par dualité il existe aussi des projections de K de dimension au moins $c(\varepsilon)\log n$ qui sont presque euclidiennes. Ce résultat structurel est un exemple des phénomènes de grande dimension, qui vont souvent à l'encontre de notre intuition spatiale.

Formulé il y a plus de dix ans, le problème de la limite centrale pour les corps convexes demande essentiellement si la mesure uniforme sur un corps convexe de grande dimension possède une marginale presque gaussienne. Il s'agit donc d'établir un analogue du théorème de Dvoretzky où l'on considère les projections des mesures sur des sous-espaces plutôt que les projections des ensembles. Il est à noter que le problème de la limite centrale est non-trivial pour des projections de rang 1, ce qui est bien différent du contexte ensembliste. Après de multiples contributions qui ont apporté des réponses partielles, la conjecture a été résolue indépendamment par Klartag et Fleury-Guédon-Paouris en 2006. Par la suite, Klartag a grandement amélioré la précision des estimations quantitatives.

Le cadre de cet exposé est l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne induite par le produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et la norme associée $|x| = \langle x, x\rangle^{1/2}$. On note $B_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq 1\}$ la boule unité et S^{n-1} la sphère unité, que l'on munit de la probabilité uniforme σ_{n-1}. Nous utiliserons aussi les probabilités invariantes μ_n sur le groupe spécial orthogonal $SO(n)$ et $\sigma_{n,k}$ sur la grassmannienne $G_{n,k}$ formée des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$. La projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel E sera notée P_E. Dans tout l'exposé, $c, C, c', C', \ldots$ sont des constantes numériques qui peuvent changer d'une ligne à l'autre, mais que nous notons de la même manière pour ne pas alourdir les notations.

1. LE PROBLÈME DE LA LIMITE CENTRALE

1.1. Deux exemples significatifs

Si un vecteur aléatoire $\Theta^{(N)} = (\Theta_1^{(N)}, \ldots, \Theta_N^{(N)})$ est uniformément distribué sur la sphère de rayon $\sqrt{N}$, il est bien connu depuis Maxwell que $\Theta_1^{(N)}$ converge en loi vers une variable gaussienne standard G (de loi $\exp(-t^2/2)\,dt/\sqrt{2\pi}$, $t \in \mathbb{R}$). Par ailleurs le principe d'Archimède nous assure que $(\Theta_1^{(N)}, \ldots, \Theta_{N-2}^{(N)})$ est uniformément distribué sur $\sqrt{N}B_2^{N-2}$. On en déduit aisément que si X est un vecteur uniforme sur $\sqrt{n+2}\,B_2^n$, alors $\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathbb{E}(X_iX_j) = \delta_{i,j}$, et que si n est grand la loi de X_1 est presque gaussienne. L'invariance par rotation permet de dire pour tout $\theta \in S^{n-1}$ que la loi de $\langle X, \theta\rangle$ est presque gaussienne.

Considérons maintenant $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ uniformément distribué sur le cube $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]^n$. Comme les variables X_i sont indépendantes et vérifient $\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$ le théorème de la limite centrale nous assure de la convergence en loi

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} G.$$

Il est cependant naturel de considérer d'autres directions que $(1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n}) \in S^{n-1}$. En notant $F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle T, le théorème de Berry-Esseen nous donne que, pour tout $\theta \in S^{n-1}$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$|F_{\langle X^{(n)},\theta\rangle}(t) - F_G(t)| \leq 6\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\big(|\theta_i X_i|^3\big)}{\Big(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\big(|\theta_i X_i|^2\big)\Big)^3} \leq 20 \max_{1\leq i\leq n} |\theta_i|.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que cette dernière quantité est petite en moyenne

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq n} |\theta_i|\, d\sigma_{n-1}(\theta) \approx \sqrt{\frac{\log n}{n}}.$$

En utilisant la concentration de la mesure sphérique (voir plus loin pour un énoncé précis), on en déduit aisément l'existence de constantes numériques c, C telles que

$$\sigma_{n-1}\left(\left\{\theta \in S^{n-1};\ \max_{1\leq i\leq n} |\theta_i| \leq C\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right\}\right) \geq 1 - \frac{1}{n^c}.$$

Donc pour la plupart des directions $\theta \in S^{n-1}$, la marginale de la mesure uniforme sur le cube dans la direction de θ est presque gaussienne et les estimées s'améliorent avec la dimension.

1.2. Formulation précise

Le problème de la limite centrale demande si le phénomène observé sur ces deux exemples est universel. Ceci revient à postuler une variante inédite du théorème de la limite centrale où une hypothèse géométrique de convexité remplace la notion d'indépendance. Afin de formuler plus explicitement le problème, il convient de préciser la normalisation.

DÉFINITION 1.1. — *On dira qu'un corps convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ est (en position) isotrope si $\mathrm{vol}_n(K) = 1$, $\int_K x\,dx = 0$ et s'il existe un nombre $L_K > 0$ tel que pour tout $\theta \in S^{n-1}$*

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = L_K^2.$$

Pour tout corps convexe, il existe une transformation affine qui permet de le mettre en position isotrope.

CONJECTURE 1.2. — *Existe-t-il des suites (ε_n) et (η_n) décroissantes et de limite nulle telles que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout corps convexe isotrope $K \subset \mathbb{R}^n$, on ait*

$$\sigma_{n-1}\left(\left\{\theta \in S^{n-1};\ d\Big(\langle \frac{X}{L_K}, \theta\rangle, G\Big) \geq \varepsilon_n\right\}\right) \leq \eta_n,$$

où X est un vecteur aléatoire uniforme sur K, G est une variable gaussienne standard et d est une distance sur les lois des variables (norme uniforme entre fonctions de répartition par exemple) ?

Cette question, posée dans les articles d'Antilla-Ball-Perissinaki [**2**] (paru en 2003 mais disponible dès 1998) et Brehm-Voigt [**12**], a suscité beaucoup d'intérêt (voir notamment [**4, 6, 10, 11, 25, 28, 30, 36, 37, 41, 44**]). Elle a été résolue par Klartag [**21**] et Fleury-Guédon-Paouris [**16**] (indépendamment, Klartag légèrement plus tôt) avec des suites $\varepsilon_n \leq (\log n)^{-\kappa}$. Par la suite, Klartag [**22**] a obtenu une forte amélioration avec $\varepsilon_n \leq n^{-\kappa}$, pour un $\kappa < 1$. Par ailleurs ses travaux montrent l'existence de beaucoup de marginales presque gaussiennes de dimension de l'ordre de n^κ et se placent dans le cadre fonctionnel naturel des mesures de probabilités log-concaves.

DÉFINITION 1.3. — *Une mesure de probabilité borélienne μ sur $\mathbb{R}^n$ est log-concave si elle admet une densité $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ vérifiant pour tous $\lambda \in [0,1]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}.$$

On dira qu'un vecteur aléatoire Y est centré réduit si son espérance est nulle et sa matrice de covariance est égale à l'identité ($\mathbb{E}Y = 0$, $\mathrm{Cov}(Y) = \mathrm{Id}$). Il est clair que dans la formulation du problème central limite, le vecteur aléatoire $Y = X/L_K$ est log-concave et centré réduit.

1.3. Réduction à l'hypothèse de concentration

Il est apparu dès le début que le problème se réduit à la question suivante, d'apparence bien plus simple : existe-t-il une suite (ε_n) de limite nulle telle que pour tout vecteur aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ centré réduit et uniforme sur un convexe (ou plus généralement log-concave)

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{|Y|}{\sqrt{n}} - 1\right| \geq \varepsilon_n\right) \leq \varepsilon_n? \tag{1}$$

Notons que les hypothèses de normalisation assurent que $\sqrt{n} = \big(\mathbb{E}(Y^2)\big)^{1/2}$. Dans le cas d'un vecteur uniforme sur un convexe, il s'agit de montrer que la plus grande partie du volume du convexe est contenue dans une couronne dont l'épaisseur est négligeable devant le rayon.

L'énoncé qui justifie cette nouvelle formulation du problème se trouve dans [**2**] pour le cas des mesures uniformes sur les convexes (voir aussi [**4**] pour l'extension au cadre log-concave et des raffinements) :

PROPOSITION 1.4. — *Soit (ε_n) une suite qui vérifie l'hypothèse* (1)*. Alors, pour tous $n \geq 1$, $\delta > 0$ et tout vecteur aléatoire $Y \in \mathbb{R}^n$ centré réduit et log-concave, on a*

$$\sigma_{n-1}\left(\left\{\theta \in S^{n-1};\ \sup_{t\in\mathbb{R}}\Big|\mathbb{P}\big(\langle Y,\theta\rangle \leq t\big) - \mathbb{P}\big(G \leq t\big)\Big| \geq \frac{c}{\sqrt{n}} + \varepsilon_n + \delta\right\}\right) \leq 2e^{-cn\delta^2}.$$

Nous allons expliquer les idées qui permettent de démontrer cette proposition. Elles remontent à Sudakov [**43**], qui a remarqué que lorsque Y est centré réduit, mais pas forcément log-concave, la plupart des variables $(\langle Y,\theta\rangle)_{\theta\in S^{n-1}}$ ont à peu près la même loi. Le point essentiel dans son argument est l'utilisation du phénomène de concentration de la mesure sphérique, qui est une conséquence de l'inégalité isopérimétrique de Lévy (voir par exemple [**35, 39**]). Nous en rappelons l'énoncé.

THÉORÈME 1.5. — *Soit $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ une fonction L-lipschitzienne pour la distance induite par $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $u > 0$,*

$$\sigma_{n-1}\left(\left\{\theta \in S^{n-1};\ \left|f(\theta) - \int f\, d\sigma_{n-1}\right| \geq u\right\}\right) \leq 2e^{-\frac{nu^2}{2L^2}}.$$

L'hypothèse de log-concavité sur Y n'est pas essentielle, mais elle nous simplifie la tâche puisqu'elle assure que les fonctions $\theta \mapsto \mathbb{P}(\langle Y,\theta\rangle \leq t)$ sont C-lipschitziennes pour une constante universelle C et ce, bien que $\theta \mapsto \mathbf{1}_{\langle Y,\theta\rangle\leq t}$ ne le soit pas. L'inégalité de concentration garantit que, pour t fixé et pour la plupart des valeurs de θ, la fonction $F_\theta(t) = \mathbb{P}(\langle Y,\theta\rangle \leq t)$ est proche de

$$F(t) := \int_{S^{n-1}} F_\theta(t)\, d\sigma_{n-1}(\theta).$$

Pour obtenir un résultat uniforme en t on utilise un argument classique de réseau, qui tire parti de la forte décroissance dans l'inégalité de déviation. En effet, par une borne d'union, on obtient que pour tout entier k et tous réels $t_1,\dots,t_k$,

$$\begin{aligned}&\sigma_{n-1}\left(\left\{\theta\in S^{n-1};\ \sup_{i\leq k}|F_\theta(t_i)-F(t_i)|\geq u\right\}\right)\\ &\leq \sum_{i=1}^k \sigma_{n-1}\Big(\big\{\theta\in S^{n-1};\ |F_\theta(t_i)-F(t_i)|\geq u\big\}\Big)\leq 2ke^{-\frac{nu^2}{2C^2}}.\end{aligned}$$

Pour $u>0$ donné, on peut choisir k le plus petit possible et $t_1,\dots,t_k$ de telle manière que la condition $\sup_{t\in\mathbb{R}}|F_\theta(t)-F(t)|\geq 2u$ implique $\sup_{1\leq i\leq k}|F_\theta(t_i)-F(t_i)|\geq u$ (on utilise ici le fait que $t\mapsto F_\theta(t)-F(t)$ est lipschitzienne et tend vers 0 à l'infini avec une vitesse explicite). Ceci donne une inégalité de déviation qui montre que, pour la plupart des directions, la fonction de répartition de $\langle Y,\theta\rangle$ est proche de F.

Il reste à identifier la loi dont la fonction de répartition est F. En utilisant le théorème de Fubini et l'invariance par rotation, il vient

$$\begin{aligned}F(\theta) &= \int_{S^{n-1}} \mathbb{E}\mathbf{1}_{\langle Y,\theta\rangle\leq t}\, d\sigma_{n-1}\\ &= \mathbb{E}\sigma_{n-1}(\{\theta;\ \langle\theta,Y\rangle\leq t\}) = \mathbb{E}\sigma_{n-1}(\{\theta;\ \theta_1|Y|\leq t\}).\end{aligned}$$

Soit $\Theta^{(n)}$ un vecteur de loi uniforme sur S^{n-1} et indépendant de Y. Le calcul précédent montre que F est la fonction de répartition de

$$\Theta_1^{(n)}|Y| = \sqrt{n}\Theta_1^{(n)}\times\frac{|Y|}{\sqrt{n}}.$$

Par le principe de Maxwell, $\sqrt{n}\Theta_1^{(n)}$ converge en loi vers une gaussienne standard lorsque n tend vers l'infini. Il est alors clair que, pour que la loi « presque » commune des marginales devienne gaussienne quand la dimension augmente, il suffit que $|Y|/\sqrt{n}$ soit très proche d'une constante.

1.4. Vers l'estimation de la concentration de la norme

Dans cette section, nous présentons un bref historique des résultats connus sur la distribution de $|X|$ quand X est uniforme sur un convexe et centré réduit. Nous essayons de mettre en avant ceux qui ont joué un rôle dans la démonstration de la concentration dans une fine couronne.

Le résultat fondamental est certainement l'inégalité de Prékopa-Leindler (voir e.g. [**39**]) :

THÉORÈME 1.6. — *Soit $\lambda \in (0,1)$ et soient f, g, h des fonctions mesurables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}.$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}.$$

Il en découle des propriétés qui nous seront utiles par la suite : si μ et ν sont des mesures log-concaves sur $\mathbb{R}^n$ alors $\mu * \nu$ l'est aussi. De plus si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ la marginale de μ dans la direction de E, notée $P_E\mu$ et définie pour tout ensemble borélien de E par $P_E\mu(B) = \mu(P_E^{-1}(B))$, est encore log-concave. Enfin μ vérifie une inégalité de Brunn-Minkowski : si $\lambda \in [0,1]$ et $A, B \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}. \tag{2}$$

Si $D \subset \mathbb{R}^n$ est un convexe symétrique par rapport à l'origine, on vérifie facilement pour $t \geq 1$ l'inclusion

$$\frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus tD) + \frac{t-1}{t+1} D \subset \mathbb{R}^n \setminus D.$$

En appliquant l'inégalité (2) on obtient le résultat suivant, dû à Borell [**9**], qui met en avant la décroissance sous-exponentielle des mesures log-concaves :

LEMME 1.7. — *Soit μ une mesure de probabilité log-concave sur $\mathbb{R}^n$ et soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un convexe symétrique par rapport à l'origine. Si $\mu(D) > 1/2$, alors pour tout $t \geq 1$*

$$\mu\big(\mathbb{R}^n \setminus tD\big) \leq \mu(D) \left(\frac{1-\mu(D)}{\mu(D)}\right)^{\frac{t+1}{2}}.$$

On en déduit aisément une inégalité de grande déviation pour $|X|$. En effet par l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(|X| > \sqrt{3n}) \leq \frac{\mathbb{E}\big(|X|^2\big)}{3n} = \frac{1}{3}.$$

Puisque la loi de X est log-concave, le lemme de Borell pour $D = \sqrt{3n}B_2^n$ donne pour $t \geq 1$

$$\mathbb{P}(|X| > t\sqrt{3n}) \leq \mathbb{P}(|X| \leq \sqrt{3n}) \left(\frac{\mathbb{P}(|X| > \sqrt{3n})}{\mathbb{P}(|X| \leq \sqrt{3n})} \right)^{\frac{t+1}{2}} \leq 2^{-t/2}.$$

On retiendra que pour $t \geq \sqrt{3}$ on a $\mathbb{P}(|X|/\sqrt{n} \geq t) \leq \exp(-ct)$. Un raisonnement similaire montre que, pour tout $\theta \in S^{n-1}$ et tout $t \geq \sqrt{3}$,

$$\mathbb{P}(|\langle X, \theta \rangle| \geq t) \leq e^{-ct}.$$

Ce dernier résultat est optimal aux constantes près. On peut le voir lorsque X est uniforme sur un multiple de $B_1^n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \sum_i |x_i| \leq 1\}$ et $\theta = (1, 0, \ldots, 0)$; dans ce cas la mesure marginale est presque exponentielle. Cependant X ne peut pas être aussi étalé dans toutes les directions. Dans cet esprit Alesker [**1**] a montré qu'en fait

$$\mathbb{P}\left(\frac{|X|}{\sqrt{n}} \geq t \right) \leq e^{-ct^2}, \qquad t \geq t_0.$$

Une concentration plus forte avait été observée dans le cas concret où X est uniforme sur un multiple de B_1^n et centré réduit [**40**] :

$$\mathbb{P}\left(\frac{|X|}{\sqrt{n}} \geq t \right) \leq e^{-ct\sqrt{n}}, \qquad t \geq t_0 \tag{3}$$

et la borne est optimale aux constantes près. Ce résultat a été démontré pour X uniforme sur un convexe inconditionnel (c'est-à-dire stable par les changements de signe des coordonnées) par Bobkov et Nazarov [**7, 8**] grâce à un principe de comparaison avec B_1^n. Il est à noter que cette inégalité est toujours plus forte que la précédente en $\exp(-t^2)$ car, pour X centré réduit et uniforme sur un convexe de $\mathbb{R}^n$, on a $|X| \leq cn$ presque sûrement (voir [**34**]). Ainsi seules les déviations $t \leq \sqrt{n}$ sont significatives.

Une avancée remarquable a été accomplie par Paouris [**38**] en 2006. Il a réussi à établir l'inégalité (3) pour X uniforme sur un convexe supposé seulement symétrique par rapport à l'origine. Cette percée a permis de débloquer plusieurs problèmes importants en géométrie asymptotique. L'argument de Paouris combine de manière novatrice et sophistiquée des outils pourtant bien connus. Nous en donnons maintenant un bref aperçu.

Les inégalités de concentration exponentielles peuvent s'obtenir en analysant la transformée de Laplace ou la croissance des moments. Paouris adopte ce dernier point de vue. L'inégalité de concentration gaussienne d'Alesker se traduit comme suit sur les moments :

$$\forall p \geq 2, \quad (\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} \leq c\sqrt{p} \left(\mathbb{E}|X|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'amélioration que démontre Paouris revient à l'inégalité inverse-Hölder suivante

$$\forall p \in [2, c\sqrt{n}], \quad (\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} \leq c \left(\mathbb{E}|X|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il est commode ici de revenir aux notations classiques de convexité : écrivons $X = X_K/L_K$ où K est un corps convexe isotrope, L_K sa constante d'isotropie et X_K un vecteur uniformément distribué sur K. Par ailleurs nous aurons besoin des notions suivantes.

DÉFINITION 1.8. — *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe. On définit*

– *sa fonction d'appui $h_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$h_K(x) = \sup_{y \in K} \langle x, y \rangle,$$

– *sa demi-épaisseur moyenne $W(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(\theta)\, d\sigma_{n-1}(\theta)$*

– *et pour $p \geq 1$ le corps p-centroïde $Z_p(K)$ associé à K par la formule*

$$h_{Z_p(K)}(x) = \left(\int_K |\langle x, y \rangle|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Notons que les corps $Z_p(K)$ ont été introduits par Lutwak et Zhang [**27**] dans le cadre de la théorie de Brunn-Minkowski L_p. Paouris observe que, pour $p \leq \sqrt{n}$,

$$(\mathbb{E}|X_K|^p)^{\frac{1}{p}} \approx \sqrt{\frac{n}{p}} W(Z_p(K)).$$

L'idée essentielle est ensuite d'interpréter cette épaisseur moyenne comme le rayon des projections de $Z_p(K)$ sur des sous-espaces aléatoires. En effet, une application précise du théorème de Dvoretzky montre que si $k \leq c\sqrt{n}$, pour la plupart des sous-espaces vectoriels $E \subset \mathbb{R}^n$ de dimension k (au sens de la probabilité uniforme sur la grassmannienne), on a

$$\frac{1}{2} W(Z_p(K))\, P_E(B_2^n) \subset P_E(Z_p(K)) \subset 2W(Z_p(K))\, P_E(B_2^n).$$

Notons que $P_E(B_2^n) = B_2^n \cap E$ est la boule unité de E ; par ailleurs le fait que le résultat soit vrai jusqu'en dimension $c\sqrt{n}$ utilise déjà des informations sur $Z_p(K)$ (en effet dans le cas général on ne peut aller au-delà de $\log n$). Il reste à majorer le volume de $P_E(Z_p(K))$. Pour ce faire, Paouris note que cet ensemble est de la forme $Z_p(B_K)$ où B_K est un autre corps convexe associé à K, introduit par Ball. Cette structure supplémentaire et le fait que $Z_p(B_K)$ soit presque une boule euclidienne permettent à Paouris d'en estimer le volume et d'obtenir la majoration voulue de $\mathbb{E}|X_K|^p$.

Le théorème de Paouris donne une estimation optimale des grandes déviations de la norme sur un convexe isotrope. Il ne dit rien sur les petites déviations autour de la moyenne. Cependant, les techniques de preuves et surtout l'idée de passer par des sous-espaces aléatoires dans lesquels la situation est plus « ronde » ont inspiré les auteurs qui ont résolu le problème de la limite centrale pour les convexes.

2. ESQUISSE DE PREUVE

Nous commençons par évoquer la solution proposée par Fleury, Guédon et Paouris [16]. Elle consiste en une version presque isométrique (à ε près pour ε petit) de l'approche « isomorphe » de Paouris (à une grande constante C près). Elle contient en particulier un résultat quantitatif de stabilité du corps p-centroïde qui assure que si K a le même volume qu'une boule D et si $Z_p(K)$ et $Z_p(D)$ sont très proches, alors Z et D sont eux-mêmes très proches.

THÉORÈME 2.1 ([16]). — *Soit X un vecteur centré réduit, uniforme sur un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ qui est symétrique par rapport à 0. Alors pour une constante universelle c, on a*

$$\forall p \in [2, (\log n)^{1/3}], \quad (\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(1 + \frac{cp}{(\log n)^{1/3}}\right) (\mathbb{E}|X|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour illustrer ce résultat, nous donnons un argument simple (mais grossier) qui permet d'en déduire la propriété de concentration dans une fine couronne. Il passe par l'estimation de la variance de $|X|^2$, dont nous reparlerons plus loin. Notons que l'estimation triviale de la variance de $|X|^2$ donne,

$$\mathrm{var}(|X|^2) \leq n \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(|X_i|^2) \leq n \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^4) \leq cn \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^2)^2 = cn^2$$

en utilisant le fait que la norme L_4 de X_i est comparable à la norme L_2, ce qui est une conséquence du caractère sous-exponentiel des coordonnées.

Le théorème précédent donne, pour $p = 4$ et n grand,

$$\mathrm{var}(|X|^2) = \mathbb{E}(|X|^4) - (\mathbb{E}|X|^2)^2 \leq \frac{c}{(\log n)^{1/3}} (\mathbb{E}|X|^2)^2 = \frac{cn^2}{(\log n)^{1/3}}.$$

Cette faible amélioration suffit pour conclure. En effet puisque $||a| - 1| \leq ||a| - 1|(|a| + 1)$, l'inégalité de Markov donne pour $t > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{|X|}{\sqrt{n}} - 1\right| \geq t\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{|X|^2}{n} - 1\right| \geq t\right) \leq \frac{1}{t^2} \mathrm{var}\left(\frac{|X|^2}{n}\right) \leq \frac{c}{t^2 (\log n)^{1/3}}.$$

On obtient ainsi (1) avec $\varepsilon_n = c(\log n)^{-1/9}$.

Nous allons donner un peu plus de détails sur l'argument du second article de Klartag, qui nous paraît plus direct et qui a l'avantage de donner de meilleures estimations dans un cadre plus général (notons cependant que la méthode de Paouris a le mérite de donner des estimations optimales pour les grandes déviations).

THÉORÈME 2.2 ([**22**]). — *Il existe $c > 0$ et $\alpha \in (0,1)$ tels que, pour tout $n \geq 1$ et tout vecteur aléatoire Y centré, réduit et log-concave à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on ait*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{|Y|}{\sqrt{n}} - 1\right| \geq \frac{1}{n^\alpha}\right) \leq ce^{-n^\alpha}.$$

De plus, pour tout entier $k \leq cn^\alpha$,

$$\sigma_{n,k}\left(\left\{E \in G_{n,k};\ d_{TV}\Big(P_E(Y), P_E(G)\Big) \geq \frac{1}{n^\alpha}\right\}\right) \leq e^{-cn^{0.99}},$$

où G est un vecteur gaussien centré réduit sur $\mathbb{R}^n$. Ici d_{TV} désigne la distance en variation totale.

Ce théorème constitue donc un analogue pour les mesures du théorème de Dvoretzky. Il est à noter que l'on obtient des marginales presque gaussiennes de dimension puissance n^α, alors que dans le cas général le théorème de Dvoretzky ne donne que des projections presque euclidiennes de dimension $\log n$. La preuve de Klartag est dans le même esprit que la preuve de Milman pour le théorème de Dvoretzky : on montre qu'un sous-espace aléatoire a la propriété recherchée avec une grande probabilité en combinant des arguments de concentration de la mesure et d'approximation par un réseau. Les détails techniques (contrôle des normes Lipschitz, approximations, réglage des constantes) sont souvent très délicats et demandent de manier avec dextérité les nombreux résultats connus sur les mesures log-concaves (inégalités inverses Hölder, estimation des quantiles, comparaison de la densité maximale et de la densité au centre de gravité, ...). Voici les grandes étapes.

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ est la densité de la loi de Y et si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, la densité de la loi de $P_E(Y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur E est donnée par

$$\pi_E(f)(x) = \int_{x+E^\perp} f(z)\, dz.$$

C'est encore une fonction log-concave. Pour $U \in SO(n)$ une isométrie directe et $x \in E$, on considère

$$M_{f,x,E}(U) = \log \pi_E(f \circ U)(x) = \log \pi_{U(E)}(f)(Ux).$$

Klartag commence par régulariser la densité f par convolution avec une gaussienne. Cette petite perturbation ne modifiera pas la nature des résultats.

LEMME 2.3 ([**22**]). — *Soient E_0 un sous-espace de dimension k de $\mathbb{R}^n$ et $x \in E_0$. Soit $\beta > 0$. Si G est un vecteur gaussien centré réduit à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et indépendant de Y, on note g la densité de $Y + k^{-\beta/2}G$. Alors l'application*

$$(x, U) \mapsto M_{g,E,x}(U)$$

restreinte à $\{x \in E_0;\ |x| \leq 10\sqrt{k}\} \times SO(n)$ est $Ck^{2\beta+2}$-lipschitzienne par rapport à U et $Ck^{\beta+1/2}$-lipschitzienne en la variable x.

Ici $SO(n)$ est considéré comme une sous-variété riemannienne de $\mathbb{R}^{n^2}$. La distance géodésique est alors comparable à la distance de Hilbert-Schmidt. Il est alors possible d'appliquer l'inégalité de concentration des fonctions lipschitziennes sur $SO(n)$ pour la probabilité bi-invariante μ_n dont l'énoncé est analogue à celui que nous avons donné pour la sphère. Notons que l'invariance par rotation assure que

$$\int_{SO(n)} M_{g,E_0,x_0}(U)\, d\mu_n(U)$$

ne dépend que de $|x_0|$. On note cette quantité $M(|x_0|)$. On obtient ainsi

$$\mu_n\left(\left\{U \in SO(n);\ \left|M_{g,E_0,x_0}(U) - M(|x_0|)\right| > \delta\right\}\right) \leq Ce^{-\frac{c\delta^2 b}{k^{4\beta+4}}}.$$

On considère alors un ε-réseau $\mathcal{N}$ de $10\sqrt{k}B_2^n \cap E_0$ de cardinal au plus $(C'\sqrt{k}/\varepsilon)^k$, ce qui signifie que pour tout $y \in 10\sqrt{k}B_2^n \cap E_0$ il existe $z \in \mathcal{N}$ tel que $|y - z| \leq \varepsilon$. Nous renvoyons par exemple à [**39**] pour l'existence d'un tel réseau. Par une borne d'union

$$\mu_n\left(\left\{U \in SO(n);\ \exists x \in \mathcal{N}, \left|M_{g,E_0,x}(U) - M(|x|)\right| > \delta\right\}\right) \leq (C'\sqrt{k}/\varepsilon)^k Ce^{-\frac{c\delta^2 b}{k^{4\beta+4}}}.$$

Comme $x \mapsto M_{g,E_0,x}(U)$ est aussi lipschitzienne, on en déduit que

$$\mu_n\left(\left\{U \in SO(n);\ \forall x \in 10\sqrt{k}B_2^n \cap E_0, \left|M_{g,E_0,x}(U) - M(|x|)\right| \leq \delta + 2\varepsilon C k^{\beta+1/2}\right\}\right)$$

vaut au moins $1 - (C'\sqrt{k}/\varepsilon)^k Ce^{-\frac{c\delta^2 b}{k^{4\beta+4}}}$. Pour un bon choix des paramètres, qui nécessite $k \leq n^\alpha$, l'événement ci-dessus est de grande mesure. On en déduit donc que les marginales de g dans la direction $E = U(E_0)$ sont presque radiales (jusqu'à un rayon de $10\sqrt{k}$) pour un choix typique de U, donc pour un choix typique de E dans $G_{n,k}$. Rappelons qu'elles sont log-concaves, de par les conséquences de l'inégalité de Prékopa-Leindler.

Ensuite Klartag étudie plus précisément la concentration de la norme pour les mesures presque radiales. Par intégration polaire, le cas des mesures exactement radiales se ramène à une question en dimension 1, que Klartag traite par des méthodes élémentaires mais fines :

LEMME 2.4 ([**22**]). — *Soient $d \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction log-concave continue, C^2 sur $(0, +\infty)$ et intégrable. Alors, pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$,*

$$\int_{(1-\varepsilon)t_d(f)}^{(1+\varepsilon)t_d(f)} t^{d-1} f(t)\, dt \geq \left(1 - Ce^{-c\varepsilon^2 d}\right) \int_0^\infty t^{d-1} f(t)\, dt,$$

où $t_d(f)$ est le point où $t \mapsto t^{d-1}f(t)$ atteint son maximum.

Etant donnée une marginale presque radiale (obtenue pour la plupart des sous-espaces k-dimensionnels comme ci-dessus), il est possible de montrer qu'à l'instar des mesures exactement radiales, elle est concentrée sur une fine couronne. Ainsi, cette mesure est très proche de la mesure uniforme sur une sphère de rayon de l'ordre de $\sqrt{k}$ en dimension k. Une version quantitative de l'observation de Maxwell, due à Diaconis et Friedman [**13**], montre alors que ses marginales de dimension $\sqrt{k}$ sont presque gaussiennes. Ceci termine la preuve du fait que la plupart des marginales de la mesure initiale sont presque gaussiennes.

On peut remarquer que l'inégalité de concentration dans une fine couronne n'est intervenue que pour les marginales k-dimensionnelles typiques et non pour la mesure elle-même. Comme cette propriété est intéressante en soi, nous présentons de manière informelle l'argument de [**21**] qui permet de l'obtenir pour la mesure initiale sur $\mathbb{R}^n$. Il est basé sur le lemme maintenant classique de Johnson-Lindenstrauss [**18**], qui peut être déduit de la concentration de la mesure sphérique :

LEMME 2.5. — *Soient $1 \leq \ell \leq n$ et $x \in \mathbb{R}^n$ non nul; alors pour tout $\varepsilon \in [0,1]$*

$$\sigma_{n,\ell}\left(\left\{E \in G_{n,\ell};\ \left|\frac{\sqrt{n}\,|P_E(x)|}{\sqrt{\ell}\,|x|} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq Ce^{-c\varepsilon^2\ell}.$$

Si l'on considère un sous-espace vectoriel aléatoire F de loi uniforme sur $G_{n,\ell}$ et indépendant de Y, on obtient

$$\mathbb{P}\left((1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\ell}{n}}|Y| \leq |P_F(Y)| \leq (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{\ell}{n}}|Y|\right) \geq 1 - Ce^{-c\varepsilon^2\ell}. \tag{4}$$

Supposons que la plupart des marginales sont concentrées dans une fine couronne, ou plus précisément qu'il existe $\mathscr{E} \subset G_{n,\ell}$ avec $\sigma_{n,\ell}(\mathscr{E}) \geq 1-\eta$ tel que, pour tout $E \in \mathscr{E}$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{|P_E(Y)|}{\sqrt{\ell}} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq Ce^{-c\varepsilon^2\ell}.$$

En termes du sous-espace aléatoire, on obtient donc

$$\mathbb{P}\left((1-\varepsilon)\sqrt{\ell} \leq |P_F(Y)| \leq (1+\varepsilon)\sqrt{\ell}\right) \geq 1 - \eta - Ce^{-c\varepsilon^2\ell}. \tag{5}$$

L'intersection des événements qui apparaissent dans (4) et (5) est encore de probabilité très proche de 1 pour η assez petit. Mais dans cette intersection on a à la fois

$$|Y| \approx \sqrt{\frac{n}{\ell}}\,|P_F(Y)| \quad \text{et} \quad |P_F(Y)| \approx \sqrt{\ell}.$$

Il s'ensuit que $|Y| \approx \sqrt{n}$ avec grande probabilité.

3. QUESTIONS CONNEXES

Commençons par évoquer le problème des directions sous-gaussiennes (aussi appelées directions ψ_2), posé par V. Milman. Il demande s'il existe une constante universelle c telle que, pour toute dimension et pour tout vecteur aléatoire X centré réduit et uniforme sur un corps convexe de $\mathbb{R}^n$, il existe au moins une direction $\theta \in S^{n-1}$ telle que, pour tout $t \geq 1$,

$$\mathbb{P}(\langle X, \theta\rangle \geq t) \leq e^{-ct^2}.$$

Cette question est encore ouverte en général, même si elle a beaucoup progressé avec les travaux de Paouris et Klartag. Nous renvoyons aux articles [**23**] et [**17**] pour les meilleurs résultats disponibles et plus de références bibliographiques.

Passons maintenant à des questions qui prolongent directement l'étude de la concentration dans une fine couronne. Nous avons vu que, pour Y vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ centré réduit et log-concave, toute amélioration de l'estimation triviale $\mathrm{var}(|Y|^2) \leq cn^2$ permettait de résoudre le problème des marginales presque gaussiennes. Dans le cas où les coordonnées de Y sont indépendantes

$$\mathrm{var}(|Y|^2) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(Y_i^2) \approx cn.$$

Il est naturel de se demander si l'on a toujours $\mathrm{var}(|Y|^2) \leq cn$ pour une constante universelle c (le théorème de Klartag donne en général majoration par une puissance de n un peu inférieure à 2). Cette conjecture a été confirmée par Antilla-Ball-Perissinaki [**2**] lorsque Y est uniforme sur un multiple de $B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \sum_i |x_i|^p \leq 1\}$, grâce à une propriété de sous-indépendance des coordonnées qui assure que, pour $i \neq j$, $\mathrm{cov}(Y_i^2, Y_j^2) \leq 0$ et donne la même majoration que dans le cas indépendant. Wojtaszczyk [**44**] a étendu la sous-indépendance, et donc la borne précise de la variance, aux boules d'Orlicz généralisées

$$\Big\{x \in \mathbb{R}^n;\ \sum_{i=1}^{n} f_i(|x_i|) \leq 1\Big\},$$

où les fonctions $f_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sont convexes et croissantes. La propriété de sous-indépendance peut être fausse pour certains corps convexes inconditionnels. Cependant Klartag [**24**] a récemment établi la borne $\mathrm{var}(|X|^2) \leq cn$ lorsque X est uniforme sur un tel convexe et centré réduit. Sa preuve, plus classique, repose sur des méthodes L_2 à la Hörmander. Il obtient une inégalité du type $\mathrm{var}(f(X)) \leq \mathcal{E}(f, X)$ pour toute fonction inconditionnelle suffisamment régulière, où $\mathcal{E}(f, X)$ est un terme d'énergie inhabituel. La borne de variance en cn permet, par une amélioration du raisonnement que nous avons présenté plus haut, de montrer que la plupart des marginales de dimension 1 sont à distance $1/\sqrt{n}$ d'une gaussienne. Pour les convexes inconditionnels, l'existence de symétries permet de trouver des directions presque gaussiennes explicites :

THÉORÈME 3.1 ([**24**]). — *Soient X un vecteur aléatoire centré réduit, uniformément distribué sur un convexe inconditionnel de $\mathbb{R}^n$ et G une variable gaussienne centrée* *réduite. Alors*

$$\sup_{\alpha<\beta}\left|\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}}\in[\alpha,\beta]\right)-\mathbb{P}\left(G\in[\alpha,\beta]\right)\right|\leq\frac{C}{\sqrt{n}}.$$

En utilisant la méthode de Stein, Meckes et Meckes [**28, 29**] ont étudié des convexes possédant d'autres types de symétrie.

La conjecture de Kannan-Lovász-Simonovits [**19**] postule l'existence d'une constante universelle C telle que, pour tout $n \geq 1$ et tout vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, centré réduit et uniforme sur un convexe (ou plus généralement log-concave), l'inégalité de Poincaré suivante est vérifiée : pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{var}(f(X)) \leq C\,\mathbb{E}\Big(|\nabla f(X)|^2\Big).$$

Ceci revient à dire que les fonctions linéaires sont extrémales, à constante près, dans cette inégalité. Il s'agit d'une conjecture très forte, qui admet des formulations équivalentes en termes d'isopérimétrie (voir [**31**] pour des progrès récents et une présentation des travaux antérieurs). Appliquée à $f(x) = |x|^2$, elle prédit la borne $\operatorname{var}(|X|^2) \leq 4Cn$. Elle a été vérifiée pour des vecteurs uniformes sur des multiples B_p^n [**26, 42**] et des simplexes réguliers [**3**], ainsi que pour les mesure log-concaves invariantes par rotation [**4**]. L'inégalité de Poincaré (6) a été démontrée avec des constantes C dépendant de la dimension en n^κ pour un $\kappa < 1$ (en combinant les meilleures estimations pour le théorème de la limite centrale pour les convexes et une inégalité isopérimétrique de Bobkov qui assure que l'on peut prendre $C = \operatorname{var}(|X|^2)^{1/2}$ [**5**]). Klartag [**24**] a obtenu une borne en $(\log n)^2$ pour les mesures uniformes sur un convexe inconditionnel.

Comme l'a remarqué Fleury [**14**], la conjecture KLS prédit des inégalités de concentration pour $|X|$ qui unifieraient les inégalités de grandes déviations de Paouris et améliorerait les inégalités de petites déviations de Klartag : pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{|X|}{\sqrt{n}}-1\right|\geq t\right)\leq 2e^{-ct\sqrt{n}}.$$

Fleury a réussi à démontrer cette inégalité pour X uniforme sur une boule d'Orlicz généralisée. Il reste cependant beaucoup à faire dans cette direction.

Pour finir, nous mentionnons la conjecture de l'hyperplan qui demande si les constantes d'isotropie des corps convexes sont uniformément bornées

$$\sup_{n\geq 1}\ \sup_{K\subset\mathbb{R}^n \text{ convexe}} L_K < +\infty\,?$$

Voir [**20**] pour la meilleure borne sur L_K dépendant de la dimension n et pour plus de références. Ce problème récurrent en géométrie asymptotique équivaut à demander

s'il existe une constante universelle $c > 0$ telle que pour tout convexe isotrope $K \subset \mathbb{R}^n$ et tout $\theta \in S^{n-1}$
$$\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \theta^{\perp}) \geq c.$$
Ceci revient donc à une minoration de la valeur en 0 des marginales de dimension 1 de la mesure uniforme sur un convexe. L'engouement pour le problème central limite pour les convexes s'explique en partie par le fait qu'il s'agit d'une question liée (sur l'aspect gaussien des marginales) mais indépendante de la conjecture de l'hyperplan, puisque L_K n'y apparaît que comme un facteur de normalisation qu'il n'est pas besoin de borner. Notons pour finir que Ball a montré (sans le publier) que la conjecture KLS entraîne la conjecture de l'hyperplan, ce qui a conduit certains spécialistes à penser que cette conjecture est trop forte pour être vraie...

Remarque de dernière minute : le résultat suivant a été annoncé par Fleury [**15**]. Pour tout vecteur aléatoire centré réduit et log-concave Y à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et pour tout $t \in [0, n^{\kappa}]$, on a
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{|Y|}{\sqrt{n}} - 1\right| \geq \frac{t}{n^{\kappa}}\right) \leq Ce^{-ct},$$
où $\kappa = 1/8$. Ceci améliore la valeur de l'exposant κ obtenue par Klartag (légèrement inférieure à $0,1$). Rappelons que la conjecture KLS prévoit que l'énoncé est valable pour $\kappa = 1/2$.

RÉFÉRENCES

[1] S. Alesker – ψ_2-estimate for the Euclidean norm on a convex body in isotropic position, in *Geometric aspects of functional analysis (Israel, 1992–1994)*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 77, Birkhäuser, 1995, p. 1–4.

[2] M. Anttila, K. Ball & I. Perissinaki – The central limit problem for convex bodies, *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), p. 4723–4735.

[3] F. Barthe & P. Wolff – Remarks on non-interacting conservative spin systems : the case of gamma distributions, *Stochastic Process. Appl.* **119** (2009), p. 2711–2723.

[4] S. G. Bobkov – On concentration of distributions of random weighted sums, *Ann. Probab.* **31** (2003), p. 195–215.

[5] ______, On isoperimetric constants for log-concave probability distributions, in *Geometric aspects of functional analysis*, Lecture Notes in Math., vol. 1910, Springer, 2007, p. 81–88.

[6] S. G. Bobkov & A. Koldobsky – On the central limit property of convex bodies, in *Geometric aspects of functional analysis*, Lecture Notes in Math., vol. 1807, Springer, 2003, p. 44–52.

[7] S. G. Bobkov & F. L. Nazarov – Large deviations of typical linear functionals on a convex body with unconditional basis, in *Stochastic inequalities and applications*, Progr. Probab., vol. 56, Birkhäuser, 2003, p. 3–13.

[8] ———, On convex bodies and log-concave probability measures with unconditional basis, in *Geometric aspects of functional analysis*, Lecture Notes in Math., vol. 1807, Springer, 2003, p. 53–69.

[9] C. Borell – Convex measures on locally convex spaces, *Ark. Mat.* **12** (1974), p. 239–252.

[10] U. Brehm, P. Hinow, H. Vogt & J. Voigt – Moment inequalities and central limit properties of isotropic convex bodies, *Math. Z.* **240** (2002), p. 37–51.

[11] U. Brehm, H. Vogt & J. Voigt – Permanence of moment estimates for p-products of convex bodies, *Studia Math.* **150** (2002), p. 243–260.

[12] U. Brehm & J. Voigt – Asymptotics of cross sections for convex bodies, *Beiträge Algebra Geom.* **41** (2000), p. 437–454.

[13] P. Diaconis & D. Freedman – A dozen de Finetti-style results in search of a theory, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **23** (1987), p. 397–423.

[14] B. Fleury – Between Paouris concentration inequality and variance conjecture, à paraître dans *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist*, 2009.

[15] ———, Concentration in a thin Euclidean shell for log-concave measures, prépublication, 2009.

[16] B. Fleury, O. Guédon & G. Paouris – A stability result for mean width of L_p-centroid bodies, *Adv. Math.* **214** (2007), p. 865–877.

[17] A. Giannopoulos, A. Pajor & G. Paouris – A note on subgaussian estimates for linear functionals on convex bodies, *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), p. 2599–2606.

[18] W. B. Johnson & J. Lindenstrauss – Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space, in *Conference in modern analysis and probability (New Haven, Conn., 1982)*, Contemp. Math., vol. 26, Amer. Math. Soc., 1984, p. 189–206.

[19] R. Kannan, L. Lovász & M. Simonovits – Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma, *Discrete Comput. Geom.* **13** (1995), p. 541–559.

[20] B. Klartag – On convex perturbations with a bounded isotropic constant, *Geom. Funct. Anal.* **16** (2006), p. 1274–1290.

[21] ______, A central limit theorem for convex sets, *Invent. Math.* **168** (2007), p. 91–131.

[22] ______, Power-law estimates for the central limit theorem for convex sets, *J. Funct. Anal.* **245** (2007), p. 284–310.

[23] ______, Uniform almost sub-Gaussian estimates for linear functionals on convex sets, *Algebra i Analiz* **19** (2007), p. 109–148.

[24] ______, A Berry-Esseen type inequality for convex bodies with an unconditional basis, *Probab. Theory Related Fields* **45** (2009), p. 1–33.

[25] A. Koldobsky & M. Lifshits – Average volume of sections of star bodies, in *Geometric aspects of functional analysis*, Lecture Notes in Math., vol. 1745, Springer, 2000, p. 119–146.

[26] R. Latała & J. O. Wojtaszczyk – On the infimum convolution inequality, *Studia Math.* **189** (2008), p. 147–187.

[27] E. Lutwak & G. Zhang – Blaschke-Santaló inequalities, *J. Differential Geom.* **47** (1997), p. 1–16.

[28] E. S. Meckes & M. W. Meckes – The central limit problem for random vectors with symmetries, *J. Theoret. Probab.* **20** (2007), p. 697–720.

[29] M. W. Meckes – Gaussian marginals of convex bodies with symmetries, *Beiträge Algebra Geom.* **50** (2009), p. 101–118.

[30] E. Milman – On Gaussian marginals of uniformly convex bodies, *J. Theoret. Probab.* **22** (2009), p. 256–278.

[31] ______, On the role of convexity in isoperimetry, spectral gap and concentration, *Invent. Math.* **177** (2009), p. 1–43.

[32] V. D. Milman – A new proof of A. Dvoretzky's theorem on cross-sections of convex bodies, *Funkcional. Anal. i Priložen.* **5** (1971), p. 28–37.

[33] ______, Dvoretzky's theorem—thirty years later, *Geom. Funct. Anal.* **2** (1992), p. 455–479.

[34] V. D. Milman & A. Pajor – Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space, in *Geometric aspects of functional analysis (1987–88)*, Lecture Notes in Math., vol. 1376, Springer, 1989, p. 64–104.

[35] V. D. Milman & G. Schechtman – *Asymptotic theory of finite-dimensional normed spaces*, Lecture Notes in Math., vol. 1200, Springer, 1986.

[36] A. Naor & D. Romik – Projecting the surface measure of the sphere of ℓ_p^n, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **39** (2003), p. 241–261.

[37] G. Paouris – Concentration of mass and central limit properties of isotropic convex bodies, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), p. 565–575.

[38] ———, Concentration of mass on convex bodies, *Geom. Funct. Anal.* **16** (2006), p. 1021–1049.

[39] G. Pisier – *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 94, Cambridge Univ. Press, 1989.

[40] G. Schechtman & J. Zinn – On the volume of the intersection of two L_p^n balls, *Proc. Amer. Math. Soc.* **110** (1990), p. 217–224.

[41] S. Sodin – Tail-sensitive Gaussian asymptotics for marginals of concentrated measures in high dimension, in *Geometric aspects of functional analysis*, Lecture Notes in Math., vol. 1910, Springer, 2007, p. 271–295.

[42] ———, An isoperimetric inequality on the l_p balls, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Stat.* **44** (2008), p. 362–373.

[43] V. N. Sudakov – Typical distributions of linear functionals in finite-dimensional spaces of high dimension, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **243** (1978), p. 1402–1405.

[44] J. O. Wojtaszczyk – The square negative correlation property for generalized Orlicz balls, in *Geometric aspects of functional analysis*, Lecture Notes in Math., vol. 1910, Springer, 2007, p. 305–313.

Franck BARTHE

Équipe de Statistique et Probabilités
Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT)
CNRS UMR 5219
Université Paul-Sabatier
F–31062 Toulouse cedex 9
E-mail : barthe@math.univ-toulouse.fr