Astérisque

TAMÁS SZAMUELY

Corps de classes des schémas arithmétiques

Astérisque, tome 332 (2010), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 1006, p. 257-286

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__332__257_0>

Séminaire BOURBAKI Mars 2009
61^e année, 2008-2009, n^o 1006, p. 257 à 286

CORPS DE CLASSES DES SCHÉMAS ARITHMÉTIQUES

par **Tamás SZAMUELY**

INTRODUCTION

La théorie des corps de classes représente l'acmé de l'étude classique des corps de nombres. Son objet est la description des extensions abéliennes d'un corps global K au moyen d'invariants arithmétiques attachés à K. C'est le point culminant d'une longue série de travaux partant des recherches de Gauss sur les lois de réciprocité, et le fruit des efforts de mathématiciens aussi éminents que Weber, Hilbert, Takagi, Artin, Hasse ou Chevalley, pour ne nommer que quelques-uns. C'est aussi le point de départ de nombre de sujets centraux en arithmétique moderne, tels que le programme de Langlands, la théorie d'Iwasawa, ou les principes locaux-globaux sur les points rationnels. Et c'est également un outil fondamental dans l'étude de cet objet plein de mystère qui est le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}$.

Les premiers pas vers une généralisation en dimension supérieure ont été faits par Lang [**28**], [**27**], pour les variétés sur les corps finis. C'est sauf erreur la dernière fois où le sujet a été évoqué dans ce séminaire [**45**]. Pourtant, des développements très significatifs ont émergé vers la fin des années 1970, grâce aux travaux de Parshin [**33**] dans le cas local et Bloch [**3**] dans le cas global. Leur idée était d'utiliser des K-groupes de Milnor dans la construction des invariants arithmétiques attachés à des schémas de dimension supérieure, le cas classique étant celui du groupe $K_1 = \mathbf{G}_m$. Ce programme a été mené à bien dans une série de travaux ([**17**], [**21**], [**20**], [**22**], [**36**]) de K. Kato et S. Saito, qui donnent une description des revêtements étales abéliens d'un schéma régulier connexe de type fini sur $\mathbf{Z}$. Un point faible de cette théorie est que les invariants construits via la K-théorie sont très compliqués (sauf dans le cas propre), ce qui les rend peu propices aux applications. Mais l'utilisation de la K-théorie a également un avantage : elle fournit un lien avec la théorie des régulateurs sur les

K-groupes et les groupes de cycles des schémas arithmétiques, objets d'un faisceau de conjectures « motiviques » justement célèbres.

Récemment, une nouvelle approche plus élémentaire a été trouvée par le regretté G. Wiesend. Elle permet de retrouver la plupart des résultats principaux de Kato et Saito sous une forme simplifiée, notamment le cas de caractéristique 0, ainsi que le cas où X est propre sur $\mathbf{Z}$. En particulier, elle donne une nouvelle démonstration de la finitude du groupe de Chow $CH_0(X)$ des zéro-cycles d'un schéma régulier propre et plat sur $\mathbf{Z}$, et de la finitude de la partie de degré zéro $CH_0(X)^0 \subset CH_0(X)$ pour une variété projective et lisse sur un corps fini ; dans ce dernier cas le résultat de Wiesend est même un peu plus général, et ne requiert que l'hypothèse de propreté au lieu de la projectivité. Sa méthode n'utilise pas la K-théorie et est purement globale, évitant les localisations élaborées utilisées précédemment. Par contre, le lien avec les conjectures motiviques n'apparaît pas explicitement. Nous avons donc décidé de discuter en annexe ce qui est peut-être le plus joli exemple de l'approche cohomologique : la théorie non ramifiée pour les variétés sur les corps finis.

Les arguments de Wiesend, publiés dans les notes [**51**], [**52**] et [**53**], contenaient des lacunes et des imprécisions. Ils ont été mis au propre dans les publications [**25**] et [**26**] de Kerz et Schmidt, qui ont également trouvé des améliorations. L'article de Kerz [**24**] y apporte des compléments et des arguments alternatifs. Nous avons suivi ces sources lors de la rédaction de la majeure partie de cet exposé.

Bien entendu, beaucoup reste encore à faire dans le domaine. Un des problèmes ouverts majeurs est la description fine des revêtements abéliens ramifiés via une théorie généralisée de conducteurs ; des premiers pas sont faits dans [**19**]. Une autre tâche, non sans lien avec la précédente, est le développement d'une théorie analytique satisfaisante qui jouerait le rôle de la thèse de Tate en dimension supérieure.

Mais il existe également des aspects déjà bien étudiés dont nous ne pouvons rendre compte dans le cadre du présent exposé. Mentionnons-en deux. Le premier est la théorie des corps de classes pour les corps locaux supérieurs. Ce sont les corps qui apparaissent quand on complète successivement les anneaux locaux de schémas arithmétiques réguliers le long d'une chaîne maximale de sous-schémas fermés. Cette théorie, qui a joué un rôle clef dans l'approche de Kato et Saito à la théorie globale, a été développée par Kato dans la série d'articles [**17**], et aussi d'une autre façon par Fesenko et ses collaborateurs. Nous renvoyons le lecteur intéressé au livre [**6**] et aux références citées dedans. Un deuxième sujet fascinant est l'ensemble de conjectures proposées par Kato dans son article fondamental [**18**]. Elles donnent une généralisation en dimension supérieure de la suite exacte d'Albert–Brauer–Hasse–Noether décrivant le groupe de Brauer d'un corps global, elle-même l'un des résultats centraux de la théorie des corps de classes classique. Une grande partie de ces conjectures a été démontrée au cours de la dernière quinzaine d'années par Jannsen, Saito et leurs collaborateurs.

Ces résultats très importants n'ont été rédigés que partiellement à ce jour (voir [**14**], [**15**]), et mériteront certainement un exposé à part entière.

Le rédacteur tient à exprimer sa gratitude à Jean-Louis Colliot-Thélène et à Alexander Schmidt pour des corrections apportées *in extremis*.

1. RAPPELS SUR LA THÉORIE CLASSIQUE

Soit K un corps global, i.e. une extension finie de $\mathbf{Q}$ ou de $\mathbf{F}(t)$ pour un corps fini $\mathbf{F}$. Pour une place v de K notons K_v le complété de K par rapport à v et, pour v fini, notons $\mathcal{O}_v \subset K_v$ son anneau des entiers. Suivant Chevalley, l'anneau $\mathbf{A}_K$ des adèles de K est défini comme le sous-anneau du produit direct de tous les K_v constitué des suites (a_v) avec $a_v \in \mathcal{O}_v$ pour tout v sauf pour un nombre fini de places finies. Le groupe $\mathbf{I}_K \subset \mathbf{A}_K$ des unités de $\mathbf{A}_K$ est appelé le groupe des idèles de K. Il est muni de la topologie dans laquelle une base de sous-groupes ouverts de 1 est donné par les sous-groupes

$$\prod_{v\in S} W_v \times \prod_{v\notin S} \mathcal{O}_v^\times,$$

où S est un ensemble fini de places contenant les places infinies, et W_v est un sous-groupe ouvert de $K_v^\times$. Pour toute place v le morphisme

$$i_v : K_v^\times \to \mathbf{I}_K, \qquad a_v \mapsto (1,\dots,1,a_v,1,\dots,1)$$

est un plongement topologique. On considère également l'application diagonale

$$i : K^\times \to \mathbf{I}_K, \qquad a \mapsto (a,a,\dots,a),$$

dont on note C_K le conoyau, muni de la topologie quotient. C'est *le groupe des classes d'idèles* de K.

Pour v fini on dispose de *l'application de réciprocité locale*

$$\rho_v : K_v^\times \to \mathrm{Gal}\,(\overline{K}_v|K_v)^{\mathrm{ab}},$$

où $\overline{K}_v$ est une clôture séparable de K_v et G^{ab} désigne l'abélianisé du groupe G. Elle est définie par exemple dans [**44**], chap. XIII, §4. On définit ρ_v aux places infinies comme suit : si $K_v = \mathbf{C}$, on pose $\rho_v = 0$; si $K_v = \mathbf{R}$, on envoie $\mathbf{R}_+^\times$ sur 0, et -1 sur la conjugaison complexe engendrant $\mathrm{Gal}\,(\mathbf{C}|\mathbf{R})$.

Avec ces notations on peut résumer les énoncés principaux de la théorie globale dans la formulation de Chevalley comme suit.

THÉORÈME 1.1. — *Soit K un corps global, et soit $\overline{K}$ une clôture séparable de K.*

(1) *Il existe un unique homomorphisme* $\widetilde{\rho} : \mathbf{I}_K \to \mathrm{Gal}\,(\overline{K}|K)^{\mathrm{ab}}$ *faisant commuter les diagrammes*

$$\begin{tikzcd} K_v^\times \arrow[r, "\rho_v"] \arrow[d, "i_v"'] & \mathrm{Gal}\,(\overline{K}_v|K_v)^{\mathrm{ab}} \arrow[d] \\ \mathbf{I}_K \arrow[r, "\widetilde{\rho}"] & \mathrm{Gal}\,(\overline{K}|K)^{\mathrm{ab}} \end{tikzcd}$$

pour toute place v. *Ici le morphisme vertical de droite est induit par l'envoi de* $\mathrm{Gal}\,(\overline{K}_v|K_v)$ *sur un sous-groupe de décomposition de* v *dans* $\mathrm{Gal}\,(\overline{K}|K)$.

(2) (Loi de réciprocité globale) *On a*

$$(\widetilde{\rho} \circ i)(K^\times) = 0,$$

d'où un morphisme induit $\rho : C_K \to \mathrm{Gal}\,(\overline{K}|K)^{\mathrm{ab}}$, *appelé application de réciprocité globale.*

(3) *Si* $\mathrm{car}(K) = 0$, *le morphisme* ρ *est surjectif, et son noyau est la composante connexe de l'identité du groupe abélien topologique* C_K. *C'est aussi le sous-groupe divisible maximal de* C_K.

Si $\mathrm{car}(K) > 0$, *le groupe* $\mathrm{Gal}\,(\overline{K}|K)^{\mathrm{ab}}$ *admet comme quotient canonique le groupe* $\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbf{F}}|\mathbf{F}) \cong \widehat{\mathbf{Z}}$, *engendré topologiquement par l'automorphisme de Frobenius* F. *Le morphisme* ρ *est injectif, et son image dans* $\mathrm{Gal}\,(\overline{K}|K)^{\mathrm{ab}}$ *est le sous-groupe des éléments qui s'envoient sur une puissance de* F *dans* $\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbf{F}}|\mathbf{F})$.

(4) (Isomorphisme de réciprocité global) *Pour tout quotient fini de la forme* $\mathrm{Gal}\,(L|K)$ *de* $\mathrm{Gal}\,(\overline{K}|K)^{\mathrm{ab}}$ *l'application de réciprocité* ρ *induit un isomorphisme*

$$C_K/N_{L|K}C_L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}\,(L|K).$$

Ici l'application norme $N_{L|K} : C_L \to C_K$ *est induite par les applications norme usuelles* $N_{L_w|K_v} : L_w^\times \to K_v^\times$, *où* w *est une place de l'extension finie* L *de* K *au-dessus de* v.

(5) (Théorème d'existence) *L'application de réciprocité* ρ *induit une bijection entre les sous-groupes ouverts d'indice fini* $U \subset C_K$ *et les sous-groupes ouverts de* $\rho(C_K) \subset \mathrm{Gal}\,(\overline{K}|K)^{\mathrm{ab}}$. *En outre, tout* U *comme ci-dessus est de la forme* $N_{L|K}(C_L)$ *pour une extension finie abélienne* $L|K$ *convenable. Si* $\mathrm{car}(K) = 0$, *tout sous-groupe ouvert de* C_K *est d'indice fini.*

Pour les démonstrations, voir par exemple [**1**], chapitres 7 et 8.

Une théorie plus fine est obtenue en considérant des *modules*. Par définition, un module est une série d'entiers $\mathfrak{m} = (n_v)$, avec v parcourant les places de K. Les n_v doivent être nuls sauf pour un nombre fini de places finies ou réelles, et égaux à 0 ou à 1 pour une place réelle. L'ordre usuel de $\mathbf{Z}$ induit un ordre partiel naturel sur l'ensemble des modules.

Étant donné un module $\mathfrak{m} = (n_v)$, on lui associe le sous-groupe

$$\mathbf{I}_K^{\mathfrak{m}} := \prod_v U_v^{(n_v)} \subset \mathbf{I}_K,$$

où $U_v^{(n_v)}$ est le groupe des unités principales $\{x \in K_v : v(x-1) \geq n_v\}$ dans K_v pour v finie, et le groupe multiplicatif $K_v^\times$ pour v infinie, sauf pour $K_v = \mathbf{R}$ et $n_v = 1$, auquel cas c'est le groupe multiplicatif de $\mathbf{R}_+$.

L'image de $\mathbf{I}_K^{\mathfrak{m}}$ dans C_K est noté $C_K^{\mathfrak{m}}$; c'est un sous-groupe ouvert. Par le théorème d'existence ci-dessus, il lui correspond une extension finie abélienne $K^{\mathfrak{m}}|K$, appelée le *corps de classes de rayon (Strahlklassenkörper)* associé au module $\mathfrak{m}$. Également par le théorème d'existence (et la définition de la topologie de C_K) toute extension finie abélienne $L|K$ est contenue dans un $K^{\mathfrak{m}}$. La borne inférieure $\mathfrak{f}$ des $\mathfrak{m}$ tels que $K^{\mathfrak{m}} \supset L$ est le *conducteur (Führer)* de l'extension $L|K$. Il jouit de la propriété fondamentale suivante (démontrée dans [**1**], Chapter 8 et [**42**], chapitre VI, §6, par exemple) :

COMPLÉMENT 1.2. — *Une place finie v est ramifiée dans $L|K$ si et seulement si $f_v > 0$ dans $\mathfrak{f} = (f_v)$.*

Pour $\mathfrak{m} = (0, 0, \ldots, 0)$ on a $C_K/C_K^{\mathfrak{m}} = Cl_K$, le groupe de classes de K. Si $\mathrm{car}(K) = 0$, il est fini, et l'extension abélienne correspondante de K est *le corps de classes de Hilbert,* traditionnellement noté H. Si $\mathrm{car}(K) > 0$, le groupe Cl_K n'est plus fini, mais il existe un morphisme degré $Cl_K \to \mathbf{Z}$ dont le noyau Cl_K^0 est fini.

Le théorème et son complément impliquent alors :

COROLLAIRE 1.3 (Corps de classes non ramifié)

- *Si* $\mathrm{car}(K) = 0$, *le corps de classes de Hilbert H est l'extension abélienne non ramifiée maximale de K dans laquelle les places réelles de K sont totalement décomposées. L'application de réciprocité induit un isomorphisme de groupes finis*

$$Cl_K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}\,(H|K).$$

- *Si* $\mathrm{car}(K) > 0$, *l'application de réciprocité induit un isomorphisme de groupes finis*

$$Cl_K^0 \xrightarrow{\sim} \ker(\mathrm{Gal}\,(H|K) \to \mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbf{F}}|\mathbf{F})),$$

où H est l'extension abélienne non ramifiée maximale de K.

Soit maintenant S un ensemble fini de places de K contenant les places infinies, et soit M_S l'ensemble des modules $\mathfrak{m} = (n_v)$ avec $n_v = 0$ si $v \notin S$. Les groupes $\mathrm{Gal}\,(K^{\mathfrak{m}}|K)$ pour $\mathfrak{m} \in M_S$ forment un système projectif dont la limite est le groupe

$\mathrm{Gal}\,(K_S^{\mathrm{ab}}|K)$, où K_S^{ab} est l'extension abélienne maximale de K non ramifiée en dehors de S. En prenant la limite projective des quotients correspondants de C_K, on obtient :

COROLLAIRE 1.4. — *L'application de réciprocité induit un morphisme de groupes topologiques*

$$\rho_S : \mathrm{coker}\,(K^\times \to \bigoplus_{v \notin S} \mathbf{Z} \oplus \bigoplus_{v \in S} K_v^\times) \to \mathrm{Gal}\,(K_S^{\mathrm{ab}}|K).$$

Il jouit de propriétés analogues à celles décrites dans les énoncés (3)–(5) du théorème 1.1.

En langage géométrique, le corollaire décrit les revêtements finis étales abéliens des ouverts de Spec $\mathcal{O}_K$, où $\mathcal{O}_K$ est l'anneau des entiers de K. Ce sont les deux corollaires ci-dessus que l'on se propose de généraliser dans les sections suivantes.

Enfin, rappelons que la théorie des corps de classes fournit des renseignements non seulement sur la ramification des idéaux premiers dans les extensions abéliennes, mais aussi sur la décomposition des idéaux. Citons ici le résultat qui est peut-être le plus célèbre, et qui sera également généralisé dans la suite :

THÉORÈME 1.5 (Hauptidealsatz). — *Soit K un corps de nombres, et soit $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers. Tout idéal premier de $\mathcal{O}_K$ engendre un idéal principal dans l'anneau des entiers $\mathcal{O}_H$ du corps de classes de Hilbert de K.*

Pour la démonstration, voir par exemple [**31**], chapitre VI, théorème 7.5 ou [**44**], chapitre VII, §8.

2. L'APPLICATION DE RÉCIPROCITÉ DE WIESEND

Soit désormais X un schéma régulier connexe, séparé et de type fini sur $\mathbf{Z}$. Par *courbe sur X* on entend un sous-schéma fermé intègre $C \subset X$ de dimension de Krull un. Notons $\widetilde{C}$ le normalisé de C et $k(C)$ son corps de fonctions ; c'est un corps global classique. Soient Ω_C l'ensemble des places de $k(C)$, et $\Omega_C^\infty \subset \Omega_C$ le sous-ensemble des places ne provenant pas d'un point fermé de C ; elle contient les places infinies si $k(C)$ est de caractéristique 0, mais aussi des places finies quand C n'est pas propre. Pour $v \in \Omega_C$ on note $k(C)_v$ le complété de $k(C)$ en v.

DÉFINITION 2.1. — Le groupe d'idèles *(selon Wiesend) de X est la somme directe*

$$I_X := Z_0(X) \oplus \bigoplus_{C \subset X} \bigoplus_{v \in \Omega_C^\infty} k(C)_v^\times.$$

Ici $Z_0(X)$ est le groupe des zéro-cycles de X (i.e. le groupe abélien libre engendré par les points fermés de X), et la deuxième somme est indexée par les courbes sur X au sens précédent.

Pour toute courbe C sur X il existe un morphisme naturel

$$i_C : k(C)^\times \to I_X$$

défini comme suit : sur la composante $Z_0(X)$ c'est le composé $k(C)^\times \stackrel{\text{div}}{\to} Z_0(\widetilde{C}) \to Z_0(X)$, où la première flèche est la flèche diviseur et la deuxième la poussette des zéro-cycles ; sur une composante indexée par $v \in \Omega_C^\infty$, c'est l'inclusion $k(C)^\times \to k(C)_v^\times$; sur les autres composantes, c'est 0.

DÉFINITION 2.2. — *Le quotient*

$$C_X := \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{C\subset X} k(C)^\times \xrightarrow{\sum i_C} I_X\right)$$

est le groupe des classes d'idèles de X.

Notons que le groupe de Chow $CH_0(X)$ des zéro-cycles apparaît naturellement comme quotient de C_X : il suffit de projeter I_X sur sa composante $Z_0(X)$, et prendre l'image dans C_X. En dimension 1, on retrouve le groupe du corollaire 1.4.

Munissons $Z_0(X)$ de la topologie discrète, et les groupes $k(C)_v$ de la topologie v-adique. On peut alors équiper I_X de la topologie somme directe, et C_X de la topologie quotient. Cette topologie n'est ni séparée, ni localement compacte en général (*cf.* [**25**], Example 7.1).

LEMME 2.3. — *L'image de $Z_0(X)$ dans C_X est un sous-groupe dense pour la topologie de C_X.*

Démonstration. — Pour X de dimension 1, ceci résulte du lemme d'approximation classique ([**44**], chap. I, §3). Le cas général s'y ramène aussitôt. □

Nous allons maintenant définir un morphisme $\rho_X : C_X \to \pi_1^{\text{ab}}(X)$, où $\pi_1^{\text{ab}}(X)$ est l'abélianisé du groupe fondamental du schéma régulier X. Ce groupe classifie les revêtements finis étales galoisiens de X de groupe de Galois abélien. Pour $X = \operatorname{Spec}(F)$ c'est l'abélianisé du groupe de Galois absolu du corps F. Si l'on prend pour X le spectre de l'anneau des S-entiers de K, où S est un ensemble fini de places contenant les places infinies, c'est le groupe noté $\operatorname{Gal}(K_S^{\text{ab}}|K)$ dans le corollaire 1.4.

L'association $X \to \pi_1^{\text{ab}}(X)$ étant un foncteur covariant en X, il suffit de définir des morphismes $i_x : \mathbf{Z} \to \operatorname{Gal}(\overline{\kappa(x)}|\kappa(x))^{\text{ab}}$ pour chaque point fermé $x \in X_0$, et des morphismes $i_C^v : k(C)_v^\times \to \operatorname{Gal}(\overline{k(C)_v}|k(C)_v)^{\text{ab}}$ pour toute courbe C sur X. Le premier envoie $1 \in \mathbf{Z}$ sur le générateur canonique du groupe $\operatorname{Gal}(\overline{\kappa(x)}|\kappa(x))^{\text{ab}} \cong \widehat{\mathbf{Z}}$, à savoir le morphisme de Frobenius ; le second n'est autre que l'application de réciprocité locale classique ρ_v mentionnée dans la section précédente. En composant la somme directe de ces morphismes avec la somme des morphismes $\pi_1^{\mathrm{ab}}(\operatorname{Spec}\kappa(x)) \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ et $\pi_1^{\mathrm{ab}}(\operatorname{Spec} k(C)_v) \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ donnés par fonctorialité, on obtient un morphisme

$$\widetilde{\rho}_X : I_X \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(X).$$

LEMME 2.4. — *Pour toute courbe C sur X le morphisme composé*

$$k(C)^\times \xrightarrow{i_C} I_X \xrightarrow{\widetilde{\rho}_X} \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$$

est trivial.

Démonstration. — Ceci n'est autre que la loi de réciprocité globale classique (théorème 1.1 (2)). □

Vu le lemme, le morphisme $\widetilde{\rho}_X$ induit un morphisme

$$\rho_X : C_X \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(X),$$

appelé *application de réciprocité.*

Remarque 2.5. — On voit donc que dans l'approche de Wiesend il n'y a pas de nouvelle loi de réciprocité qui apparaît. Ce n'était pas ainsi dans la construction plus ancienne de Kato et Saito [**22**] : pour définir leur application de réciprocité, ils avaient besoin à la fois de la loi de réciprocité classique et d'une loi de réciprocité « supérieure », pour les anneaux locaux de dimension 2 de X.

L'application de réciprocité admet une fonctorialité covariante pour des morphismes *quelconques* qui sera très utile dans la suite. Pour l'expliquer, considérons un morphisme $\phi : Y \to X$ de schémas réguliers connexes de type fini sur $\mathbf{Z}$, et définissons une poussette $\widetilde{\phi}_* : I_Y \to I_X$ comme suit. Sur la composante $Z_0(Y)$ c'est la poussette $Z_0(Y) \to Z_0(X)$ des zéro-cycles. Définissons maintenant ϕ_* sur la composante $k(C)_v$, avec C une courbe sur Y et $v \in \Omega_C^\infty$. Si $D := \overline{\phi(C)} \subset X$ est une courbe sur X, alors ou bien $v|_{k(D)} \in \Omega_D^\infty$, auquel cas on prend la norme $k(C)_v^\times \to k(D)_v^\times$, ou bien $v|_{k(D)}$ provient d'un point fermé $x \in D$, et on prend le morphisme $k(C)_v^\times \to \mathbf{Z}.x \subset Z_0(X)$ induit par v. Enfin si C est contractée par ϕ en un point fermé $x \in X$ (ceci n'est possible que si Y et X sont de caractéristique $p > 0$), on envoie $k(C)_v^\times$ dans la composante $\mathbf{Z}.x \subset Z_0(X)$ par la valuation v (qui est forcément discrète).

LEMME 2.6. — *La poussette $\widetilde{\phi}_*$ induit un morphisme $\phi_* : C_Y \to C_X$ faisant commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} C_Y & \xrightarrow{\rho_Y} & \pi_1^{\mathrm{ab}}(Y) \\ {\scriptstyle \phi_*}\downarrow & & \downarrow \\ C_X & \xrightarrow{\rho_X} & \pi_1^{\mathrm{ab}}(X), \end{array}$$

où le morphisme vertical de droite est donné par la fonctorialité de π_1^{ab}.

Démonstration. — Que $\widetilde{\phi}_*$ induise un morphisme $C_Y \to C_X$ résulte du cas classique de dimension 1. Que ce morphisme soit compatible avec la poussette $\pi_1^{\mathrm{ab}}(Y) \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ est immédiat sur la composante $CH_0(X)$, et résulte de la fonctorialité covariante de l'application de réciprocité locale ([**44**], chapitre XIII, proposition 10 (a)) sur les composantes locales. □

3. LES THÉORÈMES PRINCIPAUX

Énonçons maintenant les résultats principaux concernant l'application de réciprocité.

THÉORÈME 3.1

(a) *Supposons X plat sur* $\mathbf{Z}$. *Alors le morphisme* ρ_X *est surjectif, et son noyau est la composante connexe de l'identité dans* C_X.

(b) *Supposons que X est lisse et géométriquement connexe sur un corps fini* $\mathbf{F}$, *et qu'il admet un morphisme propre surjectif vers une courbe lisse Z, à fibre générique lisse et géométriquement intègre. Alors l'image de* ρ_X *est le sous-groupe de* $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ *formé des éléments qui s'envoient sur une puissance de Frobenius dans le quotient* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}|\mathbf{F})$, *et son noyau est la composante connexe de l'identité dans* C_X.

Remarques 3.2

1. Dans le cas (b) la fibration ne sert que dans la démonstration du théorème pour la p-partie de $\mathrm{Im}(\rho_X)$ pour $p = \mathrm{car}(\mathbf{F})$; on espère pouvoir s'en débarrasser un jour. Mais si l'on ne s'intéresse qu'à la description des revêtements abéliens de X dont le degré est premier à p ou, plus généralement, aux revêtements modérément ramifiés, on n'a pas besoin de la condition de fibration. Voir ([**25**], Theorem 8.3) pour cette variante.
2. Kerz a démontré dans ([**24**], §5) que la composante connexe de l'identité dans C_X est égale au sous-groupe divisible maximal dans le cas où X est propre et plat sur un ouvert du spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres.

Les démonstrations seront expliquées dans les paragraphes suivants. Déduisons maintenant des conséquences plus ou moins immédiates. Commençons par le cas propre, démontré avant par d'autres méthodes par Bloch, Kato et Saito.

Corollaire 3.3 (Corps de classes non ramifié)

(1) *Supposons X propre et plat sur $\mathbf{Z}$, et notons $\widetilde{\pi}_1^{\mathrm{ab}}(X)$ le quotient de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ classifiant les revêtements finis étales abéliens de X pour lesquels tout point réel de X est complètement décomposé. Alors le morphisme composé $C_X \xrightarrow{\rho_X} \pi_1^{\mathrm{ab}}(X) \to \widetilde{\pi}_1^{\mathrm{ab}}(X)$ se factorise à travers un isomorphisme de groupes finis*

$$CH_0(X) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\pi}_1^{\mathrm{ab}}(X).$$

(2) *Supposons X projectif et lisse sur un corps fini $\mathbf{F}$. Notons $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)^0$ le noyau du morphisme naturel $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X) \to \mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbf{F}}|\mathbf{F})$, et $CH^0(X)^0 \subset CH^0(X)$ le noyau du morphisme degré. L'application de réciprocité ρ_X se factorise à travers le quotient $CH_0(X)$ de C_X et induit un isomorphisme de groupes finis*

$$CH_0(X)^0 \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)^0.$$

Notons qu'à ce jour le seul argument connu pour démontrer la finitude de $CH_0(X)$ (resp. de $CH_0(X)^0$) sous les hypothèses ci-dessus est en utilisant les isomorphismes du corollaire et la finitude de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ (resp. $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)^0$), ce dernier fait résultant d'un théorème célèbre de Katz et Lang (théorème 4.3 ci-dessous).

Démonstration. — Comme X est supposé propre, dans le cas (a) le groupe C_X est extension de $CH_0(X)$ par un sous-groupe topologique A_X provenant de places archimédiennes. Le sous-groupe A_X contient la composante connexe de l'identité (puisque $CH_0(X)$ est discret) et s'envoie sur 0 dans $\widetilde{\pi}_1^{\mathrm{ab}}(X)$. Ceci étant remarqué, il suffit d'appliquer le théorème.

Dans le cas (b) on a $C_X = CH_0(X)$ sous l'hypothèse de projectivité. En faisant des éclatements convenables, on obtient un morphisme propre birationnel $Y \to X$, avec Y projective et lisse satisfaisant à l'hypothèse (b) du théorème 3.1 (utiliser des projections, par exemple). Puisque les groupes $CH_0(X)^0$ et $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)^0$ sont des invariants birationnels pour des variétés propres et lisses, on se ramène au cas $Y = X$. L'assertion résulte alors du cas (b) du théorème, ainsi que du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} CH_0(X) & \xrightarrow{\rho_X} & \pi_1^{\mathrm{ab}}(X) \\ {\scriptstyle \deg}\downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbf{F}}|\mathbf{F}) \end{array}$$

où le morphisme du bas est l'inclusion naturelle $\mathbf{Z} \subset \widehat{\mathbf{Z}}$. □

Remarques 3.4

(1) Ces énoncés ont été démontrés pour la première fois par Bloch [**3**] en dimension 2 pour le cas (a), et par Kato et Saito [**21**], [**36**] en général (avec l'aide de Colliot-Thélène dans le cas (b)). Voir aussi le chapitre 5 du rapport de Raskind [**35**] pour des démonstrations utilisant des techniques proches des preuves originales. Toutes ces preuves utilisaient la K-théorie algébrique. Cette approche, bien que plus chère, est toujours la plus éclairante dans le cas géométrique selon l'avis personnel du rédacteur, et sera discutée en annexe.

(2) Une variante « modérée » a été étudiée par Schmidt et Spiess [**41**] dans le cas géométrique et par Schmidt [**38**] dans le cas arithmétique. Ici X n'est plus supposé propre, et l'on remplace $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ par son quotient classifiant les revêtements abéliens modérément ramifiés à l'infini (voir [**26**], [**37**] pour cette notion). L'objet correspondant à $CH_0(X)$ est un groupe $H_0^{\mathrm{sing}}(X, \mathbf{Z})$ défini par Schmidt [**39**]. Sur un corps il coïncide avec le groupe $h_0(X)$ de Suslin (*cf.* [**46**]). Comme expliqué dans [**40**], ces résultats peuvent également être retrouvés par la méthode initiée par Wiesend.

(3) Comme noté dans ([**25**], Theorem 9.2), le cas (b) du corollaire vaut plus généralement pour X propre et lisse sur un corps fini. En effet, par un petit argument expliqué aux p. 2576–2577 de [**25**] on peut généraliser le lemme 4.4 ci-dessous, et ne demander l'existence de la fibration $X \to Z$ dans le cas (b) qu'après avoir fait une altération à la de Jong [**16**]. Le théorème de de Jong permet alors de supposer X projective et lisse admettant une fibration $X \to Z$ avec les propriétés requises, et c'est le seul endroit dans la démonstration du théorème 3.1 (b) où l'hypothèse de fibration sert.

La démonstration de ([**25**], Theorem 9.2) est un peu différente, et utilise la variante modérée de la théorie mentionnée ci-dessus.

(4) Il est amusant de noter que l'on a déduit la finitude de $CH_0(X)$ de la finitude de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$, tandis qu'en théorie des corps de classes classique on procède en sens inverse : on déduit la finitude du degré du corps de classes de Hilbert de la finitude du groupe des classes.

(5) Comme expliqué dans ([**22**], §6) ou ([**25**], §9), des arguments de dévissage faciles permettent de déduire des résultats ci-dessus qu'en toute généralité le groupe de Chow $CH_0(S)$ des zéro-cycles d'un schéma S connexe et séparé de type fini sur $\mathbf{Z}$ est fini, sauf si S_{red} est propre sur un corps fini, auquel cas $CH_0(S) \cong \mathbf{Z} \oplus F$, avec F fini.

Terminons cette section par une conséquence frappante de la théorie non ramifiée. Plaçons-nous dans la situation du cas (a) du corollaire 3.3, i.e. supposons X propre et plat sur $\mathbf{Z}$. Par la théorie du groupe fondamental il existe alors à isomorphisme près un seul revêtement fini étale galoisien $X' \to X$ dont le groupe de Galois est le groupe fini abélien $\widetilde{\pi}_1^{ab}(X)$. Il mérite le nom de *revêtement de Hilbert.*

COROLLAIRE 3.5 (Hauptidealsatz généralisé). — *Avec les notations ci-dessus, le morphisme $CH_0(X) \to CH_0(X')$ induit par la tirette des zéro-cycles est trivial.*

Démonstration. — L'argument est le même que celui d'Artin dans le cas classique. Soit $X'' \to X'$ le revêtement de Hilbert de X'. Son groupe de Galois $\pi_1^{ab}(X')$ s'identifie naturellement à un sous-groupe du groupe de Galois G du revêtement composé $X'' \to X$. De plus, le quotient $G/\pi_1^{ab}(X') \cong \widetilde{\pi}_1^{ab}(X)$ est le quotient abélien maximal de G, donc le groupe abélien $\pi_1^{ab}(X')$ est en fait le sous-groupe de commutateurs G' de G. Le transfert $\mathrm{Ver} : G/G' \to G'/G''$ s'identifie donc à un morphisme $\widetilde{\pi}_1^{ab}(X) \to \widetilde{\pi}_1^{ab}(X')$. On vérifie comme dans [**44**], chapitre VI, §8, que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} CH_0(X) & \xrightarrow{\rho_X} & \widetilde{\pi}_1^{ab}(X) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ver}} \\ CH_0(X') & \xrightarrow{\rho_{X'}} & \widetilde{\pi}_1^{ab}(X') \end{array}$$

commute. Mais d'après Furtwängler le transfert $\mathrm{Ver} : G/G' \to G'/G''$ est trivial pour tout groupe fini G (voir par exemple [**31**], chapitre VI, théorème 7.6). Puisque ρ_X et $\rho_{X'}$ sont des isomorphismes, le corollaire est démontré. □

4. L'IMAGE DE L'APPLICATION DE RÉCIPROCITÉ

Le premier résultat concernant l'image de ρ_X remonte à Lang [**27**].

PROPOSITION 4.1. — *L'image de ρ_X est dense pour la topologie profinie de $\pi_1^{ab}(X)$.*

Suivant Lang, la proposition se démontre en utilisant la fonction zêta de X. Rappelons que c'est la fonction complexe définie par le produit eulérien

$$\zeta_X(s) = \prod_{P \in X_0} \frac{1}{(1 - \mathbf{N}P)^{-s}},$$

où X_0 est l'ensemble des points fermés de X, et $\mathbf{N}P$ le cardinal du corps résiduel de P. On sait (*cf.* [**43**]) que le produit converge pour $\mathrm{Re}\,(s) > \dim\,(X)$, et s'étend méromorphiquement au demi-plan $\mathrm{Re}\,(s) > \dim\,(X) - 1/2$, avec un pôle simple en $s = \dim\,(X)$.

Démonstration. — Nous allons montrer que déjà le sous-groupe $H \subset \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ engendré par les éléments de Frobenius associés aux points fermés de X est dense dans $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$. Supposons le contraire, et notons $\overline{H}$ l'adhérence de H. Par hypothèse on trouve un sous-groupe ouvert $U \subset \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ contenant le sous-groupe fermé $\overline{H}$ qui n'est pas $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ tout entier. Il correspond à un revêtement fini étale abélien $Y \to X$, de degré $d > 1$. Pour un point fermé x de X, la fibre Y_x en x doit être le spectre d'un produit fini de copies de $\kappa(x)$, car par construction de Y le Frobenius de x agit trivialement sur la fibre géométrique $Y_{\bar{x}}$. Par conséquent, il y a exactement d points fermés de Y au-dessus de x, et ceci pour tout x. Mais alors par définition $\zeta_Y = \zeta_X^d$, ce qui est impossible, car les deux fonctions zêta ont des pôles simples en $s = \dim(X) = \dim(Y)$. □

Nous traitons maintenant les énoncés du théorème 3.1 concernant l'image de ρ_X.

PROPOSITION 4.2. —

(a) *Supposons X plat sur $\mathbf{Z}$. Alors le morphisme ρ_X est surjectif.*

(b) *Supposons que X est lisse sur un corps fini $\mathbf{F}$, et qu'il admet un morphisme propre surjectif vers une courbe lisse, à fibre générique lisse et géométriquement intègre. Alors l'image de ρ_X est le sous-groupe de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ formé des éléments qui s'envoient sur une puissance de Frobenius dans le quotient* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}|\mathbf{F})$.

Nous avons besoin de deux résultats auxiliaires. Le premier est le théorème de finitude de Katz et Lang déjà mentionné, qui est un outil fondamental dans la théorie. Rappelons-le :

THÉORÈME 4.3 (Katz–Lang). — *Soit S un schéma normal intègre dont le corps de fonctions est de type fini sur le corps premier, de caractéristique $p \geq 0$. Soit $Y \to S$ un morphisme lisse surjectif, à fibre générique géométriquement intègre. Alors le noyau* $\ker(Y/S)$ *du morphisme induit $\pi_1^{\mathrm{ab}}(Y) \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(S)$ est le produit d'un groupe fini et d'un pro-p-groupe. Si de plus $Y \to S$ est propre et toutes les fibres sont géométriquement intègres, alors* $\ker(Y/S)$ *est fini en toute caractéristique.*

La démonstration utilise la théorie des fibrations élémentaires (lemme 7.1 ci-dessous) pour se réduire au cas des courbes, ainsi que la théorie de la spécialisation du groupe fondamental et la finitude du groupe des points de la jacobienne d'une courbe sur un corps fini. Pour les détails, voir l'article original [**23**], ainsi que [**35**], §5 ou [**49**], §5.8 (pour le cas propre, où l'on peut éviter l'argument de fibration en faisant appel à l'application d'Albanese).

Utilisant le théorème, on peut maintenant démontrer :

Lemme 4.4. — *Sous les hypothèses* (a) *ou* (b) *de la proposition il existe un morphisme $C \to X$ de schémas de type fini sur* $\mathbf{Z}$ *tel que C est régulier connexe de dimension 1 et l'image du morphisme induit $\pi_1^{\mathrm{ab}}(C) \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ est ouverte. Dans le cas* (a) *on peut de plus prendre C plat sur* $\mathbf{Z}$.

Démonstration. — Pour démontrer le lemme on peut remplacer X par un ouvert étale $\phi : X' \to X$ convenable. En effet, dans le cas où ϕ est même fini étale, on peut le supposer galoisien de groupe G, et on conclut par la suite exacte de groupes profinis

$$\pi_1^{\mathrm{ab}}(X') \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(X) \to G^{\mathrm{ab}} \to 0.$$

Dans le cas où ϕ est une immersion ouverte, le morphisme $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X') \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ est surjectif car la restriction de tout revêtement connexe de X reste connexe. Le cas général résulte de ces deux cas particuliers puisque ϕ est fini sur un ouvert dense $U \subset X$ (en effet, d'après le « main theorem » de Zariski on trouve une factorisation $\phi = \mu \circ \lambda$ avec $\lambda : X' \hookrightarrow \overline{X}$ une immersion ouverte et $\mu : \overline{X} \to X$ fini, et on peut prendre $U = X \setminus \mu(\overline{X} \setminus X')$).

Ceci étant dit, les hypothèses (a) ou (b) impliquent que l'on peut trouver un morphisme $X \to Z$ lisse et surjectif, à fibres géométriquement connexes, de schémas séparés de type fini sur $\mathbf{Z}$, avec Z régulier de dimension 1 ; dans le cas (a) on peut en outre supposer Z plat sur $\mathbf{Z}$, et dans le cas (b) X propre sur Z. D'après le théorème de Katz–Lang, le noyau $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X/Z)$ du morphisme $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X) \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(Z)$ est fini. Mais le morphisme $X \to Z$ étant lisse, il admet une section s après passage à un ouvert étale $Z' \to Z$. En remplaçant Z par Z' et X par $X \times_Z Z'$, la courbe $s(Z) \subset X$ convient, puisque l'image de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(s(Z)) \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ est compacte, donc fermée, et d'indice fini par ce qui précède. □

Démonstration de la proposition 4.2. – Prenons C comme dans le lemme. Dans le cas (a) on sait par le théorème 1.1 (3) que ρ_C est surjectif. Le lemme 2.6 appliqué à $Y = C$ implique donc que $\operatorname{Im}(\rho_X)$ contient un sous-groupe ouvert de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$. Il est alors lui-même ouvert, donc fermé dans $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$. Comme par ailleurs il est dense par la proposition 4.1, il est égal à $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$. La démonstration du cas (b) est similaire, en considérant l'intersection de $\operatorname{Im}(\rho_X)$ avec $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)^0 = \ker(\pi_1^{\mathrm{ab}}(X) \to \operatorname{Gal}(\overline{\mathbf{F}}|\mathbf{F}))$.

5. L'ISOMORPHISME DE RÉCIPROCITÉ

Gardant les hypothèses précédentes sur X, nous allons maintenant démontrer l'analogue du théorème 1.1 (4) en dimension supérieure.

THÉORÈME 5.1. — *Soit $\phi : Y \to X$ un revêtement fini étale galoisien, de groupe G. L'application de réciprocité ρ_X induit un isomorphisme*

$$C_X/\phi_* C_Y \xrightarrow{\sim} G^{\mathrm{ab}}.$$

Comme on va le voir, ce résultat se ramène sans grande difficulté au cas de dimension 1. En caractéristique positive on va utiliser un argument de type Bertini. En caractéristique 0 le lemme clef est le suivant.

LEMME 5.2 (lemme d'approximation de Bloch–Raskind–Kerz)

Supposons de plus que X est quasi-projectif et lisse sur Spec $\mathcal{O}_k$, *avec $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers d'un corps de nombres k. Étant donné un ensemble fini $x_1, \ldots, x_n$ de points fermés de X, il existe une courbe C sur X contenant les x_i comme points réguliers.*

Cette formulation du lemme se trouve dans ([**35**], Lemma 6.21), sous l'hypothèse supplémentaire que les x_i ont des images distinctes dans Spec $\mathcal{O}_k$; elle repose sur un énoncé un peu plus faible démontré dans [**3**]. La démonstration exploite le théorème d'irréductibilité de Hilbert. Kerz ([**24**], Proposition 2.2) a donné une nouvelle preuve du lemme, sans hypothèse supplémentaire sur les x_i. Il utilise les théorèmes de Bertini sur les corps finis trouvés récemment par Gabber [**7**] et Poonen [**34**].

Comme observé par Wiesend dans [**51**], le lemme peut être renforcé comme suit.

COMPLÉMENT 5.3. — *Dans la situation du lemme, considérons de plus un revêtement étale galoisien connexe $\phi : Y \to X$. Alors on peut choisir C de sorte que le produit fibré $Y \times_X C$ soit connexe.*

La preuve ci-après est celle de [**25**].

Démonstration. — Soient $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ les classes de conjugaison de G. D'après le théorème de Tchébotarev généralisé ([**43**], Theorem 7) on peut trouver pour chaque i un point fermé x_i' de X pour lequel Γ_i contient des générateurs des groupes de décomposition (cycliques) H_{ij} des points de la fibre $Y_{x_i'}$. Appliquant le lemme à l'ensemble fini $S = \{x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots x_m'\}$, on trouve une courbe C sur X dont le lieu régulier C^{reg} contient S. Si D est une composante de $Y \times_X C^{\mathrm{reg}}$, le groupe de Galois H du revêtement étale galoisien $D \to C^{\mathrm{reg}}$ est un sous-groupe de G ; il contient au moins un H_{ij} pour tout i, car D contient un point de Y au-dessus de chaque x_i'. Mais alors G est la réunion des conjugués de H, ce qui n'est possible que si $H = G$ par un lemme classique (*cf.* par exemple [**50**], §112, Hilfssatz). Ceci montre que $D = Y \times_X C^{\mathrm{reg}}$, et alors l'adhérence $Y \times_X C$ est également connexe. □

Démonstration du théorème 5.1. – Remarquons que pour $\dim X = 1$ l'énoncé n'est autre que le th. 1.1 (4) ; on va y ramener le cas général.

Le groupe G^{ab} est le quotient de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ par l'image de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(Y)$, donc la fonctorialité covariante de ρ_X induit bien un morphisme $\rho_{XY} : C_X/\phi_* C_Y \to G^{\mathrm{ab}}$. L'image de ρ_{XY} est dense dans le groupe fini discret G^{ab} par la proposition 4.1, donc ρ_{XY} est surjectif.

Remarquons maintenant que l'application composée $Z_0(X) \to C_X \to C_X/\phi_* C_Y$ est surjective. En effet, la norme est une application ouverte pour les extensions finies galoisiennes de corps locaux (ceci résulte des calculs du chap. V de [**44**]), donc $\phi_* : C_Y \to C_X$ est également une application ouverte, et l'assertion résulte du lemme 2.3. On peut donc relever tout élément $\alpha \in \ker(\rho_{XY})$ en un zéro-cycle $z_\alpha \in Z_0(X)$, et choisir une courbe C passant par le support de z satisfaisant aux propriétés dans 5.2 et 5.3 (en caractéristique positive on remplace l'application de 5.2 par un argument de Bertini–Gabber–Poonen). Notant $\widetilde{C}$ le normalisé de C, le revêtement $\phi_{\widetilde{C}} : Y \times_X \widetilde{C} \to \widetilde{C}$ est galoisien de groupe G par construction. L'élément α provient donc d'un élément $\widetilde{\alpha}$ de $C_{\widetilde{C}}$ qui s'annule dans G^{ab} par fonctorialité de C_X pour $\widetilde{C} \to X$. Par le cas de dimension 1 on a $\widetilde{\alpha} = 0$ modulo $\phi_{\widetilde{C}*} C_{Y \times_X \widetilde{C}}$, et a fortiori $\alpha = 0$ dans $C_X/\phi_* C_Y$. □

6. LE THÉORÈME D'EXISTENCE

Du théorème 3.1 seuls les énoncés concernant le noyau de ρ_X restent à démontrer. Or des considérations générales sur les groupes topologiques détaillées dans la section 6 de [**25**] montrent que dans le groupe C_X la composante connexe de l'identité est l'intersection des sous-groupes ouverts. Ainsi les énoncés requis résultent de la première assertion du théorème suivant.

THÉORÈME 6.1 (Théorème d'existence). — *Supposons que X satisfait aux hypothèses* (a) *ou* (b) *du théorème 3.1. Alors l'application de réciprocité ρ_X induit une bijection entre les sous-groupes ouverts d'indice fini $U \subset C_X$ et les sous-groupes ouverts de $\rho_X(C_X) \subset \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$. En outre, tout U comme ci-dessus est de la forme $\phi_*(C_{X^1})$ pour un revêtement fini étale abélien $\phi : X^1 \to X$ convenable. Dans le cas (a) tout sous-groupe ouvert de C_X est d'indice fini.*

La démonstration de ce théorème comprend la majeure partie des innovations de Wiesend, mais elle utilise également des idées remontant aux articles de Bloch [**3**] et Katz–Lang [**23**]. *On se place dans la situation du cas* (a), *i.e. on suppose X plat sur* $\mathbf{Z}$. Pour les modifications à faire dans le cas (b), voir la remarque 7.5 ci-dessous.

Le cœur technique de la démonstration du théorème 6.1 est la proposition ci-dessous, dont la démonstration est reportée à la section suivante.

PROPOSITION 6.2. — *Soit $U \subset C_X$ un sous-groupe ouvert d'indice fini. Il existe un morphisme étale $\psi : Z \to X$ avec Z connexe et $\psi_*^{-1}(U) = C_Z$.*

Pour démontrer le théorème 6.1, nous avons encore besoin du lemme non trivial suivant.

LEMME 6.3. — *Soient R un anneau local normal intègre excellent, $S' \subset S = \mathrm{Spec}\,(R)$ un ouvert dense, et $T' \to S'$ un revêtement étale galoisien de degré premier. Considérons le normalisé T de S dans le corps de fonctions de T'. Si le morphisme $T \to S$ n'est pas étale en codimension 1, il existe un point p de dimension 1 de S', d'adhérence C sur S, tel que le revêtement $T \times_S \widetilde{C} \to \widetilde{C}$ du normalisé $\widetilde{C}$ soit ramifié.*

Le lemme est démontré par une analyse détaillée de la ramification dans [**26**], Lemma 2.4. Certaines idées de la preuve proviennent de [**53**].

COROLLAIRE 6.4. — *Soient S un schéma régulier connexe excellent, $S' \subset S$ un ouvert dense, et $T' \to S'$ un revêtement étale connexe. Notons T le normalisé de S dans le corps de fonctions de T'. Le morphisme $T \to S$ est étale si et seulement si pour tout point p de dimension 1 de S' le morphisme $T' \times_S \widetilde{C} \to S' \times_S \widetilde{C}$ s'étend en un revêtement étale du normalisé $\widetilde{C}$ de l'adhérence de p sur S.*

Démonstration. — La nécessité est évidente. Pour la suffisance on peut supposer $T \to S$ galoisien de groupe G en passant à la clôture galoisienne. Si $T \to S$ n'est pas étale, le théorème de pureté de Zariski–Nagata permet de trouver un point $t \in T$ de codimension 1 dont le sous-groupe d'inertie $I_t \subset G$ est non trivial. Prenons un sous-groupe $H_t \subset I_t$ de degré premier, et un point s du quotient T/H_t en dessous de t. Appliquant le lemme à l'anneau local R de T/H_t en s, on trouve un point p de dimension 1 de l'image réciproque de S' dans $\mathrm{Spec}\,(R)$ tel que T induit un revêtement ramifié du normalisé de l'adhérence de p. L'image de p dans S contredit l'hypothèse. □

Démonstration du théorème 6.1 (dans le cas où X est plat sur $\mathbf{Z}$). – Traitons d'abord le cas où il existe un morphisme $\psi : Z \to X$ comme dans la proposition 6.2 qui est en plus *fini*. En remplaçant Z par sa clôture galoisienne on peut le supposer galoisien de groupe G. Par hypothèse on a $\psi_*(C_Z) \subset U$, et par le théorème 5.1 on dispose d'un isomorphisme $\rho_{XZ} : C_X/\psi_*(C_Z) \xrightarrow{\sim} G^{\mathrm{ab}}$. Ceci montre que $\rho_X^{-1}(\rho_X(U)) = U$, il ne reste donc qu'à se rappeler que $\rho_X(U)$ est ouvert dans $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ (puisqu'il contient l'ouvert $\rho_Z(C_Z) = \pi_1^{\mathrm{ab}}(Z)$).

En général, la proposition 6.2 nous donne un $\psi : Z \to X$ non nécessairement fini. Toutefois, comme on l'a vu lors de la démonstration du lemme 4.4, on trouve un ouvert dense $X' \subset X$ au-dessus duquel ψ est fini. Par le paragraphe précédent l'image réciproque U' de U dans $C_{X'}$ correspond à un sous-groupe ouvert $\rho_{X'}(U') \subset \pi_1^{\mathrm{ab}}(X')$, d'où un revêtement étale abélien $Y' \to X'$. Il suffit alors de montrer que le normalisé Y de X dans le corps de fonctions de Y' est étale sur X ; en effet, on vérifie alors par restriction aux courbes sur X que le sous-groupe ouvert correspondant à Y ne peut être autre que $\rho_X(U)$, et l'on conclut comme ci-dessus. Maintenant pour que $Y \to X$ soit étale, il suffit de montrer d'après le corollaire précédent que pour toute courbe C sur X rencontrant X' le revêtement étale $Y' \times_X \widetilde{C} \to Y' \times_X \widetilde{C}$ s'étend en un revêtement étale du normalisé $\widetilde{C}$ de C. Mais une telle extension est possible par le théorème d'existence classique sur $\widetilde{C}$ (théorème 1.1 (5)) : elle est définie par le sous-groupe ouvert $\rho_{\widetilde{C}}(U_{\widetilde{C}}) \subset \pi_1^{\mathrm{ab}}(\widetilde{C})$, où $U_{\widetilde{C}}$ est l'image réciproque de $U \subset C_X$ par la poussette $C_{\widetilde{C}} \to C_X$.

Enfin, que U soit d'indice fini dans C_X résulte de la surjectivité de ρ_X et du fait que $\rho_X(U)$ est ouvert, donc d'indice fini dans $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$. Soit A le quotient, et soit $\phi : X^1 \to X$ le revêtement fini étale abélien correspondant à la projection $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X) \twoheadrightarrow A$. D'après le théorème 5.1 le noyau du morphisme composé $C_X \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(X) \to A$ contient $\phi_*(C_{X^1})$, et les quotients modulo ces deux sous-groupes d'indice fini sont isomorphes à A. Ceci donne bien $U = \phi_*(C_{X^1})$. □

7. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 6.2

Dans cette section nous démontrons la proposition 6.2. Par la nature même de l'énoncé, on est autorisé à remplacer X par des ouverts étales tout au long de la preuve. On va procéder par récurrence sur la dimension, le cas de dimension 1 résultant de la théorie classique (on peut prendre pour ψ le revêtement étale abélien de X associé à U). Pour traiter le cas général on se sert de la théorie des fibrations élémentaires de M. Artin, que l'on peut résumer comme suit.

LEMME 7.1. — *Après avoir remplacé X par un ouvert étale, il existe des morphismes de schémas réguliers $\iota : X \hookrightarrow \mathcal{X}$ et $\pi : \mathcal{X} \to W$ satisfaisant aux propriétés suivantes :*

- *ι est une immersion ouverte dont l'image est dense dans chaque fibre de π ;*
- *π est projectif et lisse, à fibres géométriquement intègres de dimension 1 ;*
- *π induit un morphisme fini étale surjectif $\mathcal{X} \setminus \iota(X) \twoheadrightarrow W$;*
- *il existe une section $\sigma : W \to X$ de $\pi \circ \iota$.*

Démonstration. — Pour l'existence de ι et de π satisfaisant aux trois premières propriétés, voir [**2**], exp. XI, §3. Comme $\pi \circ \iota$ est lisse, quitte à remplacer W par un ouvert étale $W' \to W$ et $\mathcal{X}$ par $X \times_W W'$ on trouve également une section σ de $\pi \circ \iota$. □

Par l'hypothèse de récurrence on peut supposer que la proposition vaut pour W. Ainsi, en le remplaçant par un ouvert étale *on peut supposer dans toute la suite que* $\sigma_*^{-1}(U) = C_W$.

Soit maintenant w un point fermé de W, et soit X_w la fibre de $\pi \circ \iota$ en w. D'après le théorème d'existence classique (théorème 1.1 (5)), l'image inverse $U_w \subset C_{X_w}$ de U par la poussette associée au morphisme $X_w \to X$ correspond à un sous-groupe ouvert $V_w \subset \pi_1^{\mathrm{ab}}(X_w)$. Soit $\bar{w}$ un point géométrique au-dessus de w. La courbe $X_{\bar{w}}$ est connexe, donc on dispose d'une suite exacte « d'homotopie »

$$1 \to \pi_1(X_{\bar{w}}, \bar{x}) \to \pi_1(X_w, \bar{x}) \to \mathrm{Gal}\,(\overline{\kappa(w)}|\kappa(w)) \to 1$$

pour un point géométrique $\bar{x}$ convenable. La section σ induit un point $\kappa(w)$-rationnel de X_w, d'où un scindage de la suite exacte. Passant aux abélianisés, on obtient alors une suite exacte scindée

$$0 \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(X_{\bar{w}})_{\mathrm{Gal}\,(\overline{\kappa(w)}|\kappa(w))} \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(X_w) \to \mathrm{Gal}\,(\overline{\kappa(w)}|\kappa(w)) \to 0$$

où $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X_{\bar{w}})_{\mathrm{Gal}\,(\overline{\kappa(w)}|\kappa(w))}$ est le groupe des coinvariants de $\mathrm{Gal}\,(\overline{\kappa(w)}|\kappa(w))$, i.e. le quotient maximal de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X_{\bar{w}})$ avec action triviale de $\mathrm{Gal}\,(\overline{\kappa(w)}|\kappa(w))$ (voir la section 5.8 de [**49**] pour plus de détails).

Remarque 7.2. — Notre hypothèse $\sigma_*^{-1}(U) = C_W$ implique que le revêtement $Y_w \to X_w$ associé à V_w est géométriquement intègre. En effet, pour toute courbe $C \subset \sigma(W)$ contenant $\sigma(w)$ dans son lieu régulier (une telle C existe d'après le lemme 5.2) le revêtement étale du normalisé $\widetilde{C}$ correspondant à l'image inverse de U dans $C_{\widetilde{C}}$ est trivial. En particulier, la fibre en $\sigma(w)$ est complètement décomposée. Alors il en est de même pour la fibre en $\sigma(w)$ de $Y_w \to X_w$ (en effet, dans les deux cas le sous-groupe de décomposition d'un point au-dessus de $\sigma(w)$ est un groupe cyclique dont l'ordre est égal à l'ordre de l'image de $\sigma(w)$ dans C_X/U, par la théorie des corps de classes classique – donc la trivialité de l'un implique la trivialité de l'autre). Ceci n'est possible que si Y_w est géométriquement intègre, puisque $\sigma(w)$ est un point $\kappa(w)$-rationnel de X_w.

Par la remarque qu'on vient de faire, le sous-groupe V_w se surjecte sur $\mathrm{Gal}\,(\overline{\kappa(w)}|\kappa(w))$, d'où un isomorphisme

$$\pi_1^{\mathrm{ab}}(X_w)/V_w \cong \pi_1^{\mathrm{ab}}(X_{\bar{w}})_{\mathrm{Gal}\,(\overline{\kappa(w)}|\kappa(w))}/(V_w \cap \pi_1^{\mathrm{ab}}(X_{\bar{w}})_{\mathrm{Gal}\,(\overline{\kappa(w)}|\kappa(w))}).$$

Notons n_w l'exposant de ces groupes abéliens finis. Cet exposant est majoré par l'ordre de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X_{\bar{w}})_{\mathrm{Gal}\,(\overline{\kappa(w)}|\kappa(w))}$ qui est un groupe fini d'après Katz–Lang. On veut maintenant majorer les n_w *indépendamment de* w. Pour des raisons techniques on arrive à le faire sous l'hypothèse supplémentaire qu'ils sont tous des puissances d'un nombre premier ℓ.

LEMME 7.3. — *Supposons que les n_w soient des puissances d'un nombre premier ℓ fixé. Alors quitte à remplacer W (et a fortiori X) par un ouvert étale, ils admettent une borne supérieure finie.*

Démonstration. — Pour un point géométrique $\bar{x}$ de W écrivons $\Pi^{\ell}_{\bar{x}}$ pour la pro-ℓ-composante de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X_{\bar{x}})$. Quitte à remplacer W par un ouvert de Zariski, on peut supposer ℓ inversible sur W. Il résulte du théorème de changement de base lisse en cohomologie étale ([**30**], Chapter VI, §4) que les $\Pi^{\ell}_{\bar{x}}$ sont les fibres géométriques d'un système local ℓ-adique, à savoir le dual du système local $\mathbf{R}^1(\pi \circ \iota)_* \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell$. Pour η le point générique et w un point fermé de W, on peut identifier $\mathrm{Gal}\,(\overline{\kappa(w)}|\kappa(w))$ à un groupe de décomposition D_w dans $\Gamma := \mathrm{Gal}\,(\overline{\kappa(\eta)}|\kappa(\eta))$. L'isomorphisme de spécialisation $\Pi^{\ell}_{\bar{\eta}} \cong \Pi^{\ell}_{\bar{w}}$ donné par le théorème de changement de base lisse est compatible avec l'action de D_w, d'où une surjection $(\Pi^{\ell}_{\bar{w}})_{D_w} \twoheadrightarrow (\Pi^{\ell}_{\bar{\eta}})_{\Gamma}$. Puisque ces deux groupes sont finis par Katz–Lang, on trouve un sous-groupe ouvert $H \subset \Gamma$ contenant D_w tel que $(\Pi^{\ell}_{\bar{w}})_{D_w}$ soit envoyé isomorphiquement sur le groupe des coinvariants de H sur $\Pi^{\ell}_{\bar{\eta}}$. Soit W_H le normalisé de W dans $\overline{\kappa(\eta)}^H$; puisque $H \supset D_w$, il induit un revêtement étale d'un ouvert de W. Remplaçant W par l'ouvert étale ainsi obtenu et w par une image réciproque, on peut supposer que la surjection $(\Pi^{\ell}_{\bar{w}})_{D_w} \to (\Pi^{\ell}_{\bar{\eta}})_{\Gamma}$ est un isomorphisme. Tout point fermé w' ayant un groupe de décomposition $D_{w'} \subset \Gamma$ contenant D_w a la même propriété.

L'ordre ℓ^N de $(\Pi^{\ell}_{\bar{\eta}})_{\Gamma}$ fournit donc une majoration des exposants $n_{w'}$ pour tout w' comme ci-dessus. Suivant une astuce remarquable de Wiesend [**51**], on en déduit une majoration en tous les points fermés de W comme suit. Soit $W' \to W$ un revêtement fini étale trivialisant le système local des groupes abéliens finis $\Pi^{\ell}_{\bar{x}}/\ell^N \Pi^{\ell}_{\bar{x}}$, et soit ℓ^d son degré. On va montrer que la borne ℓ^{N+d} convient.

Supposons le contraire : il existe un point fermé w' avec $n_{w'} > \ell^{N+d}$. Rappelons que $n_{w'}$ est l'exposant du groupe abélien $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X_{w'})/V_{w'}$. Le théorème de densité de Tchébotarev implique alors qu'il existe un point fermé $x' \in X_{w'}$ dont le groupe de décomposition dans $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X_{w'})/V_{w'}$ est d'ordre $> \ell^{N+d}$. Par le lemme 5.2 on peut trouver une courbe C sur X, de normalisé $\widetilde{C}$, contenant x' et $x := \sigma(w)$ comme points réguliers. L'image réciproque de U dans $C_{\widetilde{C}}$ correspond à un revêtement étale abélien $\widetilde{D} \to \widetilde{C}$; notons G son groupe de Galois. L'exposant de G est $> \ell^{N+d}$, puisqu'il contient le groupe de décomposition de x' (qui a le même ordre dans G que dans $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X_{w'})/V_{w'}$, à savoir l'ordre de x' dans C_X/U). Ainsi l'indice du sous-groupe $G_N \subset G$ des éléments d'ordre au plus ℓ^N est $> \ell^d$, donc par Tchébotarev la densité de Dirichlet des points fermés $x \in \widetilde{C}$ dont le groupe de décomposition est contenu dans G_N est $< 1/\ell^d$.

Or, en comparant cette fois avec $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X_w)/V_w$, on voit que le groupe de décomposition dans G de x est contenu dans G_N. Par les considérations ci-dessus, la même chose vaut pour les points fermés de C contenus dans des fibres au-dessus de $w' \in W$ avec $D_{w'} \supset D_w$. Minorons la densité de ces points. D'après le complément 5.3 on peut supposer que le revêtement $C' := W' \times_W \widetilde{C} \cong (W' \times_W X) \times_X \widetilde{C}$ de $\widetilde{C}$ est intègre. Le groupe de Galois du revêtement $W' \to W$, et a fortiori de $C' \to \widetilde{C}$ est un quotient de Γ, donc on peut y considérer les images des $D_{w'}$. Puisque le degré commun de $W' \to W$ et $C' \to \widetilde{C}$ est ℓ^d, Tchébotarev nous dit encore que la densité des points fermés qui nous intéressent est au moins $1/\ell^d$. Contradiction. □

La réduction suivante montre que pour démontrer la proposition 6.2 on peut effectivement se placer dans la situation du lemme ci-dessus.

LEMME 7.4. — *Il suffit de démontrer la proposition 6.2 dans le cas où C_X/U est de torsion ℓ-primaire pour un nombre premier ℓ.*

Démonstration. — Le groupe C_X/U est en tout cas un groupe de torsion, puisqu'il est quotient de la somme des C_{X_w}/U_w qui le sont (utiliser le lemme 2.3). Pour ℓ fixé soit $U_\ell \supset U$ le sous-groupe ouvert de C_X pour lequel C_X/U_ℓ est la composante ℓ-primaire de C_X/U. Si la proposition vaut pour U_ℓ, on trouve un morphisme étale $\psi_\ell : Z_\ell \to X$ trivialisant U_ℓ, de degré générique une puissance de ℓ. Il se restreint à un revêtement étale d'un ouvert de X, trivial sur la trace de $\sigma(W)$. Ainsi, la fibre du revêtement au point générique η de W est géométriquement intègre ; elle correspond donc à un quotient de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X_{\bar\eta})_{\mathrm{Gal}\,(\overline{\kappa(\eta)}|\kappa(\eta))}$. Or ce dernier groupe est fini par le théorème de Katz–Lang (théorème 4.3). A fortiori, quand ℓ est premier à son ordre, le revêtement est un isomorphisme, et il en est de même pour le morphisme ψ_ℓ. On conclut alors en prenant pour ψ le produit fibré des ψ_ℓ. □

Fin de la démonstration de la proposition 6.2.– Par le lemme 7.4 on peut supposer que C_X/U est de torsion ℓ-primaire pour un nombre premier ℓ.

Soient maintenant η le point générique de W, et $\bar\eta$ un point géométrique au-dessus de η. La fibre $X_{\bar\eta}$ est une courbe lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0, donc son groupe fondamental est topologiquement de type fini. *A fortiori*, pour tout $n > 0$ l'intersection des sous-groupes ouverts $V \subset \pi_1^{\mathrm{ab}}(X_{\bar\eta})^{(\ell)}$ tels que l'exposant de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X_{\bar\eta})^{(\ell)}/V$ soit au plus ℓ^n est un sous-groupe ouvert, correspondant à un revêtement étale $Z_{\bar\eta} \to X_{\bar\eta}$. Quitte à remplacer $k(W)$ par une extension finie et W, X par des ouverts étales, on peut supposer que $Z_{\bar\eta}$ provient par changement de base d'un revêtement étale $Z_\eta \to X_\eta$. Quitte à remplacer encore X par un ouvert de Zariski et W par l'image de cet ouvert, on peut étendre Z_η en un revêtement étale $Z \to X$; pour un point fermé $w \in W$ il induit un revêtement $Z_w \to X_w$. Si $\bar w$ est un point géométrique au-dessus de w, l'isomorphisme de spécialisation $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X_{\bar\eta})^{(\ell)} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\mathrm{ab}}(X_{\bar w})^{(\ell)}$ montre que le sous-groupe ouvert de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X_{\bar w})^{(\ell)}$ correspondant à $Z_{\bar w}$ est encore contenu dans l'intersection des sous-groupes ouverts tels que le quotient soit d'indice au plus ℓ^n.

Prenons maintenant pour ℓ^n la borne donnée par le lemme 7.3, et considérons pour chaque point fermé w de W le revêtement étale abélien $Y_w \to X_w$ correspondant au sous-groupe ouvert $V_w \subset \pi_1^{\mathrm{ab}}(X_w)$ défini ci-dessus. Nous allons montrer que, quitte à remplacer X et à fortiori Z par des ouverts étales, les revêtements étales

$$Y_w \times_X Z = Y_w \times_{X_w} (Z \times_X X_w) \to Z \times_X X_w$$

sont triviaux pour tout w, ce qui impliquera l'égalité $\psi_*^{-1}(U) = C_Z$. En effet, chaque composante D d'un $Z \times_X X_w$ est une courbe lisse sur Z, et le revêtement étale $Y_w \times_{X_w} D \to D$ correspond à l'image réciproque U_D de $U \subset C_X$ dans C_D par la poussette associée au morphisme composé $D \to Z \to X$. La trivialité du revêtement veut dire que $U_D = C_D$. On peut alors conclure par le lemme 2.3, puisque la réunion des courbes D comme ci-dessus couvre Z, donc induit une surjection $\bigoplus_D Z_0(D) \twoheadrightarrow Z_0(Z)$.

Pour démontrer la trivialité requise, notons d'abord que le choix de n implique que le revêtement étale $Y_w \times_X Z \to Z \times_X X_w$ induit un revêtement trivial de $Z \times_X X_{\bar{w}}$ pour tout point géométrique $\bar{w}$ au-dessus de w. Considérons le normalisé $\widetilde{W}$ de W dans le corps de fonctions de Z. Le composé $Z \to X \to W$ se factorise à travers un morphisme $Z \to \widetilde{W}$ à fibres lisses et géométriquement connexes. Remplaçons X par Z, W par $\widetilde{W}$ et U par $\psi_*^{-1}(U)$. Pour tout point fermé $w \in W$ le revêtement $Y_w \to X_w$ associé à U_w induit un revêtement trivial de $X_{\bar{w}}$ pour tout point géométrique $\bar{w}$ au-dessus de w. Quitte à remplacer W par un ouvert étale convenable on peut supposer que le morphisme lisse $X \to W$ admet une section σ, et que $\sigma_*^{-1}(U) = C_W$ (ce dernier fait par l'hypothèse de récurrence). Par le même raisonnement que dans la remarque 7.2, chaque revêtement $Y_w \to X_w$ est alors trivial au-dessus du point rationnel $\sigma(w)$, ce qui n'est possible que si le revêtement lui-même est trivial. □

Remarque 7.5. — Dans le cas (b) du théorème 3.1 les arguments ci-dessus doivent être modifiés. L'observation principale est que les revêtements $Y_w \to X_w$ sont tous *modérément ramifiés* aux points à l'infini de la compactification lisse $\mathcal{X}_w$ de X_w. En fait, par la théorie des corps de classes classique pour la courbe X_w on obtient même une extension en un revêtement étale de $\mathcal{X}_w$ en prenant le revêtement associé à l'image de U_w par la surjection $C_{X_w} \twoheadrightarrow CH_0(\mathcal{X}_w)$.

Ainsi, dans la démonstration de la proposition 6.2 on peut travailler avec le groupe fondamental modéré $\pi_1^{\mathrm{mod}}(X_{\bar{x}})$ de $X_{\bar{x}}$; la surjectivité du morphisme de spécialisation $\pi_1^{\mathrm{mod,ab}}(X_{\bar{\eta}}) \to \pi_1^{\mathrm{mod,ab}}(X_{\bar{w}})$ vaut alors également pour la p-partie (voir [**32**] pour une excellente exposition). Cette surjectivité suffit pour faire marcher l'argument.

Par contre, dans la démonstration du lemme 7.3 on n'obtient plus de système local pour $\ell = p$. Toutefois, comme expliqué dans ([**25**], §5), les pro-p-composantes $\Pi_{\bar{x}}^p$ des groupes $\pi_1^{\mathrm{ab,mod}}(X_{\bar{x}})$ (qui sont les mêmes que celles des $\pi_1^{\mathrm{ab}}(\mathcal{X}_{\bar{x}})$) sont les fibres d'un faisceau constructible, donc localement constant sur un ouvert de Zariski $W' \subset W$. Alternativement, on peut appliquer un résultat de Kato et Saito ([**21**], Proposition 6) :

ils démontrent en utilisant la théorie des groupes p-divisibles qu'il existe un ouvert de Zariski de W au-dessus duquel on a des isomorphismes $(\Pi^p_{\bar{w}})_{D_w} \cong (\Pi^p_{\bar{\eta}})_\Gamma$. Après restriction à cet ouvert la preuve se conclut de la même façon.

Enfin, dans la démonstration du théorème 6.1 on a utilisé la surjectivité de ρ_X, ce qui ne vaut plus dans le cas géométrique ; il faut alors modifier les arguments en travaillant avec la partie de degré 0 des groupes en question.

8. ANNEXE : L'APPROCHE COHOMOLOGIQUE POUR UNE VARIÉTÉ PROJECTIVE ET LISSE SUR UN CORPS FINI

Cette section annexe est consacrée à une version « remastérisée » d'une démonstration plus ancienne du corollaire 3.3, dans le cas où X est projectif, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbf{F}$ de caractéristique p. Rappelons l'énoncé :

THÉORÈME. — *Sous les hypothèses ci-dessus, l'application de réciprocité induit un isomorphisme de groupes finis*

$$CH_0(X)^0 \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)^0.$$

Notons qu'ici l'application de réciprocité ρ_X n'est autre que celle de Lang [**28**] : on envoie un point fermé sur l'élément de Frobenius associé. La surjectivité résulte, comme précédemment, de l'énoncé de densité de Lang (Proposition 2.3) et de la finitude du groupe $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)^0$ (théorème 4.3).

Nous démontrons maintenant l'injectivité par un argument de Colliot-Thélène–Sansuc–Soulé [**5**] (complété par Gros [**11**] pour la partie p-primaire) que nous présentons dans l'habit neuf de la cohomologie motivique.

Soit d la dimension de X. Pour un nombre premier ℓ et des entiers $n > 0, i \geq 0$, considérons les objets de la catégorie dérivée des faisceaux étales sur X donnés par

$$\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(i) := \begin{cases} \mu_{\ell^n}^{\otimes i} & \ell \neq p\,; \\ \nu_n(i)[-i] & \ell = p\,, \end{cases}$$

où $\nu_n(i)$ est le sous-faisceau du faisceau de Hodge–Witt $W_n\Omega^i_X$ d'Illusie [**13**] engendré étale localement par des différentielles logarithmiques $(dx_1/x_1) \wedge \cdots \wedge (dx_i/x_i)$. Le décalage par $-i$ veut dire, comme d'habitude, qu'il est placé en degré i.

LEMME 8.1. — *Il existe des isomorphismes canoniques*

$$\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)/\ell^n \cong H^{2d}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(d))$$

pour tout ℓ^n.

Démonstration. — Le groupe abélien dual de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)/\ell^n$ est le groupe fini $H^1_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$. Ce dernier est dual de $H^{2d}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(d))$ par une combinaison des dualités de Tate et de Poincaré pour $\ell \neq p$, et par une dualité de Milne en cohomologie plate pour $\ell = p$ (cf. [**35**], théorèmes 1.12 et 1.13). □

Rappelons maintenant que l'on dispose pour tout $i \geq 0$ d'applications cycle

$$c^i_{\ell^n} : CH^i(X) \to H^{2i}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(i)),$$

le cas $\ell = p$ ayant été défini par Gros [**10**].

LEMME 8.2. — *En composant $c^d_{\ell^n}$ avec l'isomorphisme du lemme précédent on obtient l'application de réciprocité modulo ℓ^n.*

Démonstration. — Appliquant la fonctorialité covariante des deux morphismes aux inclusions $\operatorname{Spec} \kappa(x) \to X$ des points fermés de X, on se réduit au cas de dimension 0, où l'assertion est évidente. □

Observons que le groupe $CH_0(X)^0$ est de torsion ; cela se vérifie en considérant la surjection $\bigoplus_C CH_0(\widetilde{C})^0 \twoheadrightarrow CH_0(X)^0$, où C parcourt les courbes sur X. Notons $CH_0(X)^0\{\ell\}$ la composante ℓ-primaire. Par le lemme ci-dessus, l'énoncé d'injectivité du théorème est équivalent à l'injectivité des applications cycle

$$c^i_\ell : CH_0(X)^0\{\ell\} \to H^{2d}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_\ell(d))$$

pour tout ℓ, obtenues à partir des $c^i_{\ell^n}$ par passage à la limite projective. Pour démontrer cette injectivité, on va utiliser la théorie des complexes motiviques.

Étant donnés une variété lisse V sur un corps parfait et un entier $i \geq 0$, on définit le complexe motivique $\mathbf{Z}(i)$ sur le site zariskien V_{Zar} de V par $\mathbf{Z}(i) := z^i(-,*)[-2i]$, où $z^i(U,*)$ est le complexe définissant les groupes de Chow supérieurs $CH^i(U,*)$ de Bloch [**4**] ; Suslin et Voevodsky ont donné dans [**47**] une autre construction donnant lieu aux mêmes groupes de cohomologie. Le complexe $\mathbf{Z}(i)$ est acyclique en degrés $> i$, et ses termes sont des faisceaux abéliens sans torsion. On va utiliser deux de ses propriétés. Le premier est l'isomorphisme

$$\mathbf{H}^{2i}_{\mathrm{Zar}}(V, \mathbf{Z}(i)) \cong CH^i(V) \tag{1}$$

valable pour tout $i \geq 0$. Le deuxième est le quasi-isomorphisme de complexes de faisceaux étales

$$\pi^*\mathbf{Z}(i) \otimes \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(i)$$

où $\pi : V_{\text{ét}} \to V_{\mathrm{Zar}}$ est le morphisme de changement de site. Ici on emploie la même convention que ci-dessus ; en particulier, pour $\ell = \mathrm{car}(F)$ on a $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(i) = \nu_n(i)[-i]$. Cet isomorphisme a été démontré par Suslin–Voevodsky [**47**] en caractéristique 0, et par Geisser–Levine [**8**], [**9**] en général. Joint à l'acyclicité de $\mathbf{Z}(i)$ en degrés $> i$, il fournit un morphisme

$$s_{i,\ell^n} : \mathbf{Z}(i) \otimes \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z} \to \tau_{\leq i}\mathbf{R}\pi_*\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(i)$$

dans la catégorie dérivée des faisceaux sur V_{Zar}, où $\tau_{\leq i}$ est la troncation sophistiquée. C'est un isomorphisme pour $\ell = \mathrm{car}(F)$ d'après ([**8**], Theorem 8.5). Pour $\ell \neq \mathrm{car(F)}$ un célèbre théorème de Suslin–Voevodsky [**46**], étendu en caractéristique quelconque par Geisser–Levine [**9**], montre que s_{i,ℓ^n} est un isomorphisme si et seulement si la célèbre conjecture de Bloch–Kato–Milnor sur la K-théorie de Milnor vaut en degré i à coefficients $\mu_{\ell^n}^{\otimes i}$. La conjecture est maintenant un théorème grâce aux efforts de Rost, Voevodsky, Weibel et leurs collaborateurs. Dans l'argument ci-dessous seul le cas $i = 2$, démontré par Merkurjev–Suslin [**29**], sera utilisé.

Le triangle distingué

$$\mathbf{Z}(i) \xrightarrow{\ell^n} \mathbf{Z}(i) \to \mathbf{Z}(i) \otimes \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}(i)[1]$$

et l'isomorphisme (1) induisent une surjection

$$\mathbf{H}^{2i-1}_{\mathrm{Zar}}(V, \mathbf{Z}(i) \otimes \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}) \twoheadrightarrow {}_{\ell^n}CH^i(V),$$

où ${}_{\ell^n}CH^i(V)$ est le sous-groupe de ℓ^n-torsion de $CH^i(V)$. Elle s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}^{2i-1}_{\mathrm{Zar}}(V, \mathbf{Z}(i) \otimes \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}) & \longrightarrow & {}_{\ell^n}CH^i(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{2i-1}_{\text{ét}}(V, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(i)) & \longrightarrow & H^{2i}_{\text{ét}}(V, \mathbf{Z}/\ell^m\mathbf{Z}(i)) \end{array}$$

où le morphisme vertical de gauche est le morphisme

$$\mathbf{H}^{2i-1}_{\mathrm{Zar}}(V, \mathbf{Z}(i) \otimes \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}) \to \mathbf{H}^{2i-1}_{\mathrm{Zar}}(V, \tau_{\leq i}\mathbf{R}\pi_*\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(i))$$

induit par $s^i_{\ell^n}$ suivi du morphisme naturel

$$\mathbf{H}^{2i-1}_{\mathrm{Zar}}(V, \tau_{\leq i}\mathbf{R}\pi_*\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(i)) \to \mathbf{H}^{2i-1}_{\mathrm{Zar}}(V, \mathbf{R}\pi_*\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(i)) \cong H^{2i-1}_{\text{ét}}(V, \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(i)).$$

Le morphisme de droite dans le diagramme est l'application cycle, et celui du bas est le morphisme de Bockstein provenant de la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(i) \to \mathbf{Z}/\ell^{n+m}\mathbf{Z}(i) \to \mathbf{Z}/\ell^m\mathbf{Z}(i) \to 0 \tag{2}$$

sur $V_{\text{ét}}$ ([**5**], proposition 1 et [**11**], (1.1.4)). La commutativité du diagramme résulte de la compatibilité des morphismes $s^i_{\ell^n}$ avec les suites exactes de type (2) ; pour la vérification détaillée d'une compatibilité similaire, voir le §3 de [**48**].

Plaçons-nous maintenant au-dessus du corps fini $\mathbf{F}$, et substituons la variété propre et lisse X du début à la place de V. Prenant $i = d = \dim X$, par passage à la limite inductive suivant n et à la limite projective suivant m dans le diagramme ci-dessus, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}^{2d-1}_{\mathrm{Zar}}(X, \mathbf{Z}(d) \otimes \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell) & \longrightarrow & CH^d(X)\{\ell\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{2d-1}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)) & \longrightarrow & H^{2d}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}_\ell(d)). \end{array}$$

Ici on obtient les groupes de cohomologie étale habituels pour $\ell \neq p$ (ceci utilise la finitude des groupes à coefficients finis) ; pour $\ell = p$ on les *définit* comme les limites des groupes à coefficients finis.

Remarquons que le morphisme horizontal du bas est injectif. En effet, pour $\ell \neq p$ son noyau est couvert par $H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$; or ce groupe est trivial, ce qu'on voit par un argument standard utilisant la suite spectrale de Hochschild–Serre et le théorème de Deligne sur les poids de Frobenius (cf. par exemple [**5**], théorème 2 pour les détails). Pour $\ell = p$ l'injectivité se démontre de manière analogue, utilisant les résultats de Katz–Messing sur les poids de Frobenius sur la cohomologie cristalline (cf. [**11**], lemme 2.1.16).

On voit donc que pour démontrer l'injectivité du morphisme vertical de droite dans le diagramme ci-dessus, il suffit de démontrer l'injectivité de celui de gauche. Or la considération de la suite spectrale d'hypercohomologie et la nullité des groupes $H^i_{\text{ét}}(U, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}_\ell(d)$ pour $U \subset X$ affine et $i > d+1$ montrent que pour $\ell \neq p$ le noyau du morphisme $\mathbf{H}^{2d-1}_{\mathrm{Zar}}(X, \tau_{\leq d}\mathbf{R}\pi_*\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)) \to H^{2d-1}_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))$ est couvert par le groupe $\mathbf{H}^{d-3}_{\mathrm{Zar}}(X, \mathbf{R}^{d+1}\pi_*\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))$. Ce groupe s'annule trivialement pour $d \leq 2$, et on a la bijectivité des morphismes $c^d_{\ell^n}$ grâce à Merkurjev–Suslin pour $d = 2$. Ceci montre l'injectivité du morphisme de gauche pour $d \leq 2$ et $\ell \neq p$; pour $\ell = p$ son injectivité résulte de la construction ([**11**], (2.1.4)). Le théorème est donc démontré pour $d \leq 2$.

Pour $d > 2$ la nullité du groupe $\mathbf{H}^{d-3}_{\mathrm{Zar}}(X, \mathbf{R}^{d+1}\pi_*\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))$ résulterait d'une des conjectures de Kato [**18**] mentionnées dans l'introduction, sous la seule hypothèse que X est propre et lisse sur un corps fini. Cette conjecture n'est que partiellement démontrée à ce jour. Mais on peut démontrer le cas général du théorème par une astuce de Colliot-Thélène qui permet de le réduire au cas de dimension 2 ; c'est ici que l'hypothèse de projectivité sert. Supposons en effet le résultat connu en dimension $d-1$. Étant donné un zéro-cycle α dans le noyau du morphisme $\rho_X : CH_0(X)^0 \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)^0$, le théorème de Bertini–Gabber–Poonen permet de trouver une section d'hypersurface lisse $Y \subset X$ contenant le support de α. La fonctorialité du groupe de Chow et celle du groupe fondamental fournissent un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} CH_0(Y)^0 & \xrightarrow{\rho_Y} & \pi_1^{\mathrm{ab}}(Y)^0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ CH_0(X)^0 & \xrightarrow{\rho_X} & \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)^0 \end{array}$$

où le morphisme vertical de droite est un isomorphisme par le théorème de Lefschetz (applicable puisque $d \geq 3$). Ainsi, $\alpha = 0$ dans $CH_0(Y)^0$ par l'hypothèse de récurrence, ce qui conclut la démonstration.

RÉFÉRENCES

[1] E. Artin & J. Tate – *Class field theory*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968.

[2] M. Artin, A. Grothendieck & J.-L. Verdier (éds.) – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3 (SGA 4)*, Lecture Notes in Math., vol. 305, Springer, 1973.

[3] S. Bloch – Algebraic K-theory and classfield theory for arithmetic surfaces, *Ann. of Math.* **114** (1981), p. 229–265.

[4] ———, Algebraic cycles and higher K-theory, *Adv. in Math.* **61** (1986), p. 267–304.

[5] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc & C. Soulé – Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, *Duke Math. J.* **50** (1983), p. 763–801.

[6] I. Fesenko & M. Kurihara (éds.) – *Invitation to higher local fields*, Geometry & Topology Monographs, vol. 3, Geometry & Topology Publications, Coventry, 2000.

[7] O. Gabber – On space filling curves and Albanese varieties, *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001), p. 1192–1200.

[8] T. Geisser & M. Levine – The K-theory of fields in characteristic p, *Invent. Math.* **139** (2000), p. 459–493.

[9] ———, The Bloch-Kato conjecture and a theorem of Suslin-Voevodsky, *J. reine angew. Math.* **530** (2001), p. 55–103.

[10] M. Gros – Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie de Hodge-Witt logarithmique, *Mém. Soc. Math. France* **21** (1985).

[11] ———, Sur la partie p-primaire du groupe de Chow de codimension deux, *Comm. Algebra* **13** (1985), p. 2407–2420.

[12] A. Grothendieck (éd.) – *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Lecture Notes in Math., vol. 224, Springer, 1971. Nouvelle édition annotée : Documents Mathématiques, vol. 3, Soc. Math. France, 2003.

[13] L. Illusie – Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **12** (1979), p. 501–661.

[14] U. Jannsen – Hasse principles for higher-dimensional fields, prépublication, 2005.

[15] U. Jannsen & S. Saito – Kato homology of arithmetic schemes and higher class field theory over local fields, *Doc. Math.* (2003), p. 479–538.

[16] A. J. de Jong – Smoothness, semi-stability and alterations, *Publ. Math. I.H.É.S.* **83** (1996), p. 51–93.

[17] K. Kato – A generalization of local class field theory by using K-groups. I, II, III, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **26** (1979), p. 303–376, **27** (1980), p. 603–683, **29** (1982), p. 31–43.

[18] ———, A Hasse principle for two-dimensional global fields, *J. reine angew. Math.* **366** (1986), p. 142–183.

[19] ———, Class field theory, $\mathscr{D}$-modules, and ramification on higher-dimensional schemes. I, *Amer. J. Math.* **116** (1994), p. 757–784.

[20] K. Kato & S. Saito – Two-dimensional class field theory, in *Galois groups and their representations (Nagoya, 1981)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 2, North-Holland, 1983, p. 103–152.

[21] ———, Unramified class field theory of arithmetical surfaces, *Ann. of Math.* **118** (1983), p. 241–275.

[22] ———, Global class field theory of arithmetic schemes, in *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983)*, Contemp. Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., 1986, p. 255–331.

[23] N. M. Katz & S. Lang – Finiteness theorems in geometric classfield theory, *Enseign. Math.* **27** (1981), p. 285–319.

[24] M. Kerz – Higher class field theory and the connected component, prépublication arXiv:0711.4485.

[25] M. Kerz & A. Schmidt – Covering data and higher dimensional global class field theory, *J. Number Theory* **129** (2009), p. 2569–2599.

[26] ———, On different notions of tameness in arithmetic geometry, *Math. Ann.* **346** (2010), p. 641–668.

[27] S. Lang – Sur les séries L d'une variété algébrique, *Bull. Soc. Math. France* **84** (1956), p. 385–407.

[28] ———, Unramified class field theory over function fields in several variables, *Ann. of Math.* **64** (1956), p. 285–325.

[29] A. MERKURJEV & A. SUSLIN – K-cohomologie des variétés de Severi-Brauer et l'homomorphisme de résidu normique (en russe), *Izv. Akad. Nauk SSSR* **46** (1982) ; traduction anglaise : *Math. USSR Izvestiya* **21** (1983), p. 307–340.

[30] J. S. MILNE – *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton Univ. Press, 1980.

[31] J. NEUKIRCH – *Algebraic number theory*, Grund. Math. Wiss., vol. 322, Springer, 1999.

[32] F. ORGOGOZO & I. VIDAL – Le théorème de spécialisation du groupe fondamental, in *Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique (Luminy, 1998)*, Progr. Math., vol. 187, Birkhäuser, 2000, p. 169–184.

[33] A. N. PARSHIN – Revêtements abéliens de schémas arithmétiques (en russe), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **243** (1978), p. 855–858 ; traduction anglaise : *Math. Dokl.* **19** (1978), p. 1438–1442.

[34] B. POONEN – Bertini theorems over finite fields, *Ann. of Math.* **160** (2004), p. 1099–1127.

[35] W. RASKIND – Abelian class field theory of arithmetic schemes, in *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., 1995, p. 85–187.

[36] S. SAITO – Unramified class field theory of arithmetical schemes, *Ann. of Math.* **121** (1985), p. 251–281.

[37] A. SCHMIDT – Tame coverings of arithmetic schemes, *Math. Ann.* **322** (2002), p. 1–18.

[38] ———, Tame class field theory for arithmetic schemes, *Invent. Math.* **160** (2005), p. 527–565.

[39] ———, Singular homology of arithmetic schemes, *Algebra Number Theory* **1** (2007), p. 183–222.

[40] ———, Some consequences of Wiesend's higher dimensional class field theory, *Math. Z.* **256** (2007), p. 731–736.

[41] A. SCHMIDT & M. SPIESS – Singular homology and class field theory of varieties over finite fields, *J. reine angew. Math.* **527** (2000), p. 13–36.

[42] J-P. SERRE – *Groupes algébriques et corps de classes*, Publications de l'institut de mathématique de l'université de Nancago, VII. Hermann, Paris, 1959.

[43] ———, Zeta and L functions, in *Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963)*, Harper & Row, 1965, p. 82–92.

[44] ———, *Corps locaux*, 2[e] éd., Hermann, 1968.

[45] ———, Théorie du corps de classes pour les revêtements non ramifiés de variétés algébriques (d'après S. Lang), Séminaire Bourbaki, vol. 1955/56, exposé n° 133, Collection hors série, vol. 3, Soc. Math. France, 1995, p. 347–355.

[46] A. Suslin & V. Voevodsky – Singular homology of abstract algebraic varieties, *Invent. Math.* **123** (1996), p. 61–94.

[47] ———, Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients, in *The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998)*, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 548, Kluwer Acad. Publ., 2000, p. 117–189.

[48] T. Szamuely – Sur la théorie des corps de classes pour les variétés sur les corps p-adiques, *J. reine angew. Math.* **525** (2000), p. 183–212.

[49] ———, *Galois groups and fundamental groups*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 117, Cambridge Univ. Press, 2009.

[50] B. L. van der Waerden – *Algebra II*, 5[e] éd., Springer, 1967.

[51] G. Wiesend – A construction of covers of arithmetic schemes, *J. Number Theory* **121** (2006), p. 118–131.

[52] ———, Class field theory for arithmetic schemes, *Math. Z.* **256** (2007), p. 717–729.

[53] ———, Tamely ramified covers of varieties and arithmetic schemes, *Forum Math.* **20** (2008), p. 515–522.

Tamás SZAMUELY

Alfréd Rényi Institute of Mathematics
Hungarian Academy of Sciences
Reáltanoda utca 13–15.
H-1053 BUDAPEST – Hongrie
E-mail : szamuely@renyi.hu