Astérisque

Raphaël Cerf

Dimères et surfaces aléatoires [d'après les travaux de Kenyon et d'Okounkov]

Astérisque, tome 332 (2010), Séminaire Bourbaki, exp. n° 997, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__332__1_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 2008
61^{e} année, 2008-2009, n^{o} 997, p. 1 à 9

DIMÈRES ET SURFACES ALÉATOIRES
[d'après les travaux de Kenyon et d'Okounkov]

par **Raphaël CERF**

INTRODUCTION

Lorsqu'un système présente un phénomène de transition de phases, il est possible de forcer la coexistence de deux ou plusieurs phases distinctes. Ces phases sont délimitées par des surfaces de séparation. À l'échelle macroscopique, ces surfaces se stabilisent près d'une forme déterministe, mais elles fluctuent dans une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. La compréhension de la nature et la description quantitative de ces fluctuations constituent des problèmes extrêmement ardus. Par exemple, dans le modèle d'Ising en dimension trois, nous sommes encore très loin de posséder les outils nécessaires pour conduire une analyse rigoureuse et précise des fluctuations des interfaces aléatoires entre les deux phases du modèle. Plutôt que d'attaquer directement ce problème dont les difficultés semblent formidables, une approche plus modeste consiste à considérer des modèles effectifs d'interface. Ce sont des modèles de surfaces aléatoires qui sont construits en spécifiant explicitement la loi de la surface, par exemple le modèle SOS ou les modèles d'interface gaussiens. Les modèles de dimères étudiés par Kenyon et Okounkov donnent lieu à des surfaces aléatoires qui appartiennent en quelque sorte à une catégorie intermédiaire entre les interfaces générées par le modèle d'Ising et celles du modèle SOS. Ce sont des interfaces construites au-dessus d'un système probabiliste complexe, qui présente des transitions de phase, et dont l'analyse peut être conduite grâce à l'étude asymptotique de certains déterminants, qui donnent des formules exactes.

Dans cet exposé introductif, nous présentons brièvement le modèle de dimères, ainsi que certaines formules essentielles. Nous définissons les objets importants qui permettent l'analyse du modèle : la matrice de Kasteleyn, la courbe spectrale, l'amibe. Kenyon et Okounkov ont étudié en profondeur le lien entre les modèles de dimères et une certaine catégorie de courbes algébriques appelées les courbes de Harnack.

Nous énonçons ensuite le résultat de Okounkov, Kenyon et Sheffield qui permet de localiser les phases du modèle grâce à l'amibe. Nous terminons en présentant le début de l'étude des formes asymptotiques réalisée par Kenyon et Okounkov. En plus des articles originaux [**5, 6, 7, 8**], le lecteur pourra consulter les notes du cours de Saint-Flour de Kenyon [**4**].

1. CONFIGURATIONS DE DIMÈRES

Nous considérons un graphe planaire G qui est biparti et $\mathbb{Z}^2$ périodique. Biparti signifie qu'il est possible de colorier les sommets du graphe avec deux couleurs, par exemple en blanc et noir, de manière à ce que deux sommets voisins soient toujours de couleurs distinctes. La propriété $\mathbb{Z}^2$ périodique signifie que le graphe et son coloriage en blanc et noir sont préservés par les translations à coordonnées entières. Des exemples standards de tels graphes sont le réseau carré ou le réseau hexagonal. Une configuration de dimères sur le graphe G est un sous-ensemble d'arêtes de G tel que chaque sommet soit incident à exactement une arête de ce sous-ensemble. En théorie des graphes, un recouvrement par des dimères s'appelle aussi un couplage parfait. Nous notons $\mathcal{M}(G)$ l'ensemble des configurations de dimères sur le graphe G.

2. FONCTIONS DE HAUTEURS

À une configuration de dimères sur G est naturellement associé un flot unité qui va des sommets blancs vers les sommets noirs : chaque sommet blanc est une source de débit 1 et chaque sommet noir est un puits de débit 1. Fixons M_0 une configuration périodique de dimères sur G et notons ω_0 le flot associé. Si M est une autre configuration de dimères sur G et si ω est le flot associé, alors la différence des deux flots $\omega - \omega_0$ est un flot de divergence nulle. Fixons une face f_0. Soit γ un chemin dans le graphe dual G^* de G qui va de f_0 à une face f. Le flux total de $\omega - \omega_0$ à travers γ ne dépend pas du choix particulier de γ et est donc une fonction de la face f. Cette fonction s'appelle la fonction de hauteur associée à la configuration de dimères M. La fonction de hauteur dépend du choix de la face f_0 ainsi que de la configuration M_0. Cependant, la différence entre deux fonctions de hauteurs associées à deux configurations de dimères ne dépend plus de M_0 ni de f_0.

3. MESURES DE GIBBS

Une mesure de probabilité sur l'ensemble $\mathcal{M}(G)$ des configurations de dimères est construite de la manière suivante : on attribue à chaque arête e une énergie $\mathcal{E}(e)$. La fonction d'énergie d'une configuration de dimères est égale à la somme des énergies de ses arêtes :

$$\mathcal{E}(M) = \sum_{e \in M} \mathcal{E}(e).$$

Une mesure de Gibbs sur $\mathcal{M}(G)$ associée à l'énergie $\mathcal{E}$ est une mesure de probabilité qui vérifie la condition suivante : étant donné un sous-graphe fini F de G, la probabilité conditionnelle de la configuration M_F des dimères dans F connaissant la configuration des dimères en dehors de F est proportionnelle à $\exp -\mathcal{E}(M_F)$: le facteur de proportionnalité est choisi de manière à ce que la somme des probabilités fasse un et vaut donc

$$Z_F = \sum_{M_F \in \mathcal{M}(F)} \exp -\mathcal{E}(M_F).$$

4. MATRICE DE KASTELEYN

Soit F un graphe planaire fini biparti. Un poids de Kasteleyn pour F est un choix de signe pour chaque arête de F qui a la propriété suivante : une face qui a un nombre d'arêtes égal à 0 modulo 4 a un nombre impair de signes moins et une face qui a un nombre d'arêtes égal à 2 modulo 4 a un nombre pair de signes moins. Une matrice de Kasteleyn pour F est une matrice indexée par $B \times W$, où B (respectivement W) est l'ensemble des sommets noirs (respectivement blancs) de F et telle que $K(b, w) = 0$ s'il n'existe pas d'arête joignant b à w, et sinon

$$K(b, w) = \text{weight}(\langle b, w \rangle) \exp -\mathcal{E}(\langle b, w \rangle),$$

où $\text{weight}(\langle b, w \rangle)$ est le poids de Kasteleyn de l'arête joignant b à w. Kasteleyn [**2**] a prouvé que la fonction de partition Z_F était égale au déterminant d'une telle matrice de Kasteleyn :

$$|\det K| = Z_F.$$

Cette formule est fondamentale, car elle permet d'obtenir le comportement asymptotique de la fonction de partition dans la limite thermodynamique via l'étude du comportement asymptotique d'un déterminant.

5. GRAPHES SUR LE TORE

Nous supposons que le graphe planaire G est $\mathbb{Z}^2$ périodique. Notons alors G_1 le graphe quotient de G par l'action de $\mathbb{Z}^2$; c'est un graphe fini biparti sur le tore. Pour de tels graphes, nous pouvons encore construire une matrice de Kasteleyn comme ci-dessus, et aussi définir une mesure de Gibbs. La fonction de partition de la mesure de Gibbs s'exprime alors comme une somme de quatre déterminants

$$Z = \frac{1}{2}(-Z^{(00)} + Z^{(10)} + Z^{(01)} + Z^{(11)})$$

où $Z^{(\theta\tau)}$ est le déterminant de la matrice de Kasteleyn dans laquelle les signes des arêtes qui croisent un cycle dual horizontal fixé ont été multipliés par $(-1)^\theta$ et les signes des arêtes qui croisent un cycle dual vertical fixé ont été multipliés par $(-1)^\tau$.

6. POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Soit K une matrice de Kasteleyn pour le graphe G_1 et soient z, w deux paramètres. Soit γ_x (respectivement γ_y) un chemin dans le graphe dual de G_1 qui fait un tour horizontal (respectivement vertical) autour du tore. Le poids de chaque arête traversée par γ_x est multiplié par z si le sommet noir de l'arête est à gauche de γ_x et par z^{-1} s'il est à droite. De même, le poids de chaque arête traversée par γ_y est multiplié par w si le sommet noir de l'arête est au-dessus de γ_y et par w^{-1} s'il est en dessous. Le polynôme caractéristique de G est alors défini par

$$P(z, w) = \det K(z, w).$$

Modulo les symétries $z \mapsto -z$ et $w \mapsto -w$, cette définition ne dépend pas du choix des signes utilisés dans la construction de la matrice de Kasteleyn K. Nous avons alors

$$P((-1)^\theta, (-1)^\tau) = Z^{(\theta\tau)}$$

et la fonction de partition s'exprime à l'aide du polynôme caractéristique

$$Z = \frac{1}{2}(-P(1,1) + P(1,-1) + P(-1,1) + P(-1,-1)).$$

En fait, le comportement à grande échelle du modèle de dimères se décrit grâce au polynôme caractéristique.

7. CHAMP MAGNÉTIQUE

Nous introduisons un champ magnétique dans le modèle de la manière suivante. Notons $(B_x, B_y) \in \mathbb{R}^2$ le champ magnétique. Soit γ_x un chemin dans le dual de G_1 qui fait exactement un tour horizontal autour du tore. Ce chemin croise k arêtes de G_1. Pour chacune de ces k arêtes, nous ajoutons à son énergie B_x/k si le sommet de l'arête qui se trouve au-dessus de γ_x est noir et $-B_x/k$ si le sommet de l'arête qui se trouve au-dessus de γ_x est blanc. De même, soit γ_y un chemin dans le dual de G_1 qui fait exactement un tour vertical autour du tore. Ce chemin croise l arêtes de G_1. Pour chacune de ces l arêtes, nous ajoutons à son énergie B_y/l si le sommet de l'arête qui se trouve à gauche de γ_y est noir et $-B_y/l$ si le sommet de l'arête qui se trouve à gauche de γ_y est blanc. Nous obtenons ainsi une nouvelle fonction d'énergie qui dépend du champ magnétique $(B_x, B_y) \in \mathbb{R}^2$. Notons que la variation d'énergie d'une configuration de dimères due au champ magnétique vaut $B_x h_x + B_y h_y$, où (h_x, h_y) est le changement de hauteur de la configuration. En particulier, cette variation ne dépend pas du choix spécifique des chemins γ_x et γ_y.

8. LIMITE THERMODYNAMIQUE DE L'ÉNERGIE LIBRE

Notons maintenant G_n le graphe quotient de G par l'action de $n\mathbb{Z}^2$. Nous allons étudier le comportement asymptotique du modèle de dimères sur G_n lorsque n tend vers l'infini. Les polynômes caractéristiques associés au graphe G_n se calculent récursivement via la formule

$$P_n(z,w) = \prod_{z_0^n=z} \prod_{w_0^n=w} P(z_0, w_0).$$

Le logarithme de cette expression peut se réécrire comme une somme de Riemann sur le tore unité

$$\mathbb{T}^2 = \{ (z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z| = |w| = 1 \}.$$

Ceci, combiné avec un argument de sous-additivité standard, permet de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \ln Z(G_n) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \ln |P(z,w)| \frac{dz}{z}\frac{dw}{w}.$$

La courbe spectrale du modèle de dimères est la courbe dans $\mathbb{C}^2$ d'équation $P(z,w) = 0$.

9. L'AMIBE DU MODÈLE DE DIMÈRES

La fonction de Ronkin du polynôme $P(z,w)$ est la fonction $\mathscr{R}(x,y)$ définie par

$$\mathscr{R}(x,y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \ln |P(e^x z, e^y w)| \frac{dz}{z}\frac{dw}{w}.$$

L'amibe du polynôme $P(z,w)$ est l'image de la courbe complexe d'équation $P(z,w)=0$ par l'application $(z,w)\mapsto(\ln|z|,\ln|w|)$, i.e.

$$\mathbb{A}(P) \;=\; \{\,(\ln|z|,\ln|w|)\in\mathbb{R}^2 : P(z,w)=0\,\}.$$

La fonction de Ronkin de P est convexe dans $\mathbb{R}^2$ et linéaire sur chaque composante du complémentaire de $\mathbb{A}(P)$. L'amibe a des « tentacules » qui sont les régions où $z\to 0,\infty$ ou bien $w\to 0,\infty$. Chaque tentacule est asymptotique à une ligne d'équation

$$\alpha\ln|z|+\beta\ln|w|+\gamma=0.$$

Ces tentacules divisent le complémentaire de l'amibe en un certain nombre de composantes non bornées.

10. COURBES DE HARNACK

Les courbes spectrales qui proviennent d'un modèle de dimères sont des courbes particulières appelées courbes de Harnack. Une courbe de Harnack est une courbe C d'équation $P(z,w)=0$ telle que chaque point de l'amibe $\mathbb{A}(P)$ ait au plus deux antécédents par l'application

$$(z,w)\in C\mapsto(\ln|z|,\ln|w|)\in\mathbb{A}(P).$$

En fait, tous les points de l'amibe $\mathbb{A}(P)$ ont deux antécédents par cette application, sauf un nombre fini d'entre eux qui n'en ont qu'un. La connexion entre les modèles de dimères et les courbes de Harnack est étudiée dans [**6**].

THÉORÈME 10.1 ([**6, 8**]). — *La courbe spectrale d'un modèle de dimères est une courbe de Harnack. Inversement, toute courbe de Harnack peut être réalisée comme la courbe spectrale d'un modèle de dimères avec poids sur un graphe biparti périodique.*

Les courbes de Harnack de genre zéro jouent un rôle spécial : ce sont les courbes spectrales des dimères isoradiaux étudiés dans [**3**]. Ce sont aussi les courbes de Harnack qui minimisent le volume sous la fonction de Ronkin associée à des conditions au bord fixées. Du point de vue probabiliste, cela signifie que les poids des dimères isoradiaux maximisent la fonction de partition à conditions au bord fixées.

11. LE DIAGRAMME DE PHASES

Les mesures de Gibbs ergodiques associées au modèle de dimères peuvent présenter différents types de comportement, décrits par trois phases : la phase gelée, la phase liquide et la phase gazeuse. Cette classification repose sur les fluctuations de la fonction hauteur. Soient f et f' deux faces du graphe G ; considérons la différence de hauteurs $h(f) - h(f')$. Une mesure de Gibbs ergodique est dans la phase gelée si certaines différences de hauteurs sont déterministes. Elle est dans la phase gazeuse ou lisse si les fluctuations de la hauteur ont une variance bornée, i.e. la variance de la différence de hauteurs $h(f) - h(f')$ est bornée indépendamment de f et f'. Enfin, elle est dans la phase liquide ou rugueuse si les fluctuations de la hauteur n'ont pas une variance bornée.

Notons $\widetilde{\mu}_n(B_x, B_y)$ la mesure de Gibbs sur le graphe G_n soumise au champ magnétique $(B_x, B_y) \in \mathbb{R}^2$. Un théorème de Sheffield [**9**] garantit l'existence de la limite

$$\widetilde{\mu}(B_x, B_y) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}_n(B_x, B_y).$$

Le résultat central de Kenyon, Okounkov et Sheffield [**8**] sur les phases de la mesure de Gibbs $\widetilde{\mu}(B_x, B_y)$ est le suivant.

THÉORÈME 11.1. — *La mesure de Gibbs $\widetilde{\mu}(B_x, B_y)$ se trouve respectivement dans les phases gelées, liquides ou gazeuses selon que le champ magnétique (B_x, B_y) se trouve respectivement dans la fermeture d'une composante non bornée du complémentaire de l'amibe $\mathbb{A}(P)$, dans l'intérieur de l'amibe $\mathbb{A}(P)$, ou dans la fermeture d'une composante bornée du complémentaire de l'amibe.*

Dans la phase liquide, les corrélations entre arêtes décroissent polynomialement, dans la phase gazeuse elles décroissent exponentiellement, et dans la phase gelée, certaines corrélations ne décroissent pas du tout.

12. FORME ASYMPTOTIQUE

Considérons les surfaces dans $\mathbb{R}^3$ qui s'obtiennent comme le bord d'une union de cubes unités disposés sur le réseau cubique $\mathbb{Z}^3$. Nous nous restreignons aux surfaces monotones, i.e. les surfaces qui se projettent bijectivement selon la direction $(1,1,1)$ sur un contour polygonal. Soit C une courbe dans $\mathbb{Z}^3$. Les surfaces du type décrit précédemment qui s'appuient sur la courbe C sont en bijection avec les pavages de la région Ω délimitée par la projection selon la direction $(1,1,1)$ de C, pavages qui utilisent trois types de losanges. Ils sont également en bijection avec les recouvrements par des dimères du graphe hexagonal. Soit maintenant C_n une suite de courbes dans $\mathbb{Z}^3$ telles que $n^{-1}C_n$ converge vers une courbe C dans $\mathbb{R}^3$. Choisissons au hasard selon la loi uniforme une surface qui s'appuie sur le contour C_n. Un résultat de loi des grands nombres [**1**] dit que, lorsque n tend vers l'infini, une telle surface aléatoire converge vers une surface déterministe qui s'appuie sur la courbe limite C. Cette forme asymptotique est la solution du problème variationnel

$$\text{minimiser} \quad \int_{\Omega} \sigma(\nabla h(x,y))\, dx\, dy$$

sur l'ensemble des fonctions lipschitziennes h satisfaisant la condition au bord (la restriction du graphe de h à $\partial\Omega$ est C). La fonction σ est appelée la tension de surface. Pour un modèle de dimères avec poids sur un graphe biparti périodique, la tension de surface est la transformée de Legendre de la fonction de Ronkin de la courbe spectrale du modèle. La compréhension de la structure de la forme asymptotique nécessite d'étudier précisément la tension de surface, notamment sa régularité. En particulier, nous voudrions comprendre les mécanismes qui conduisent à la formation de faces sur la forme asymptotique. Les faces apparaissent lorsque la tension de surface n'est pas strictement convexe.

Dans l'article [**7**], Kenyon et Okounkov effectuent un changement de variables dans l'équation d'Euler–Lagrange associée au problème variationnel ci-dessus qui permet de se ramener à l'équation de Burgers complexe. Cette équation peut être résolue à l'aide d'une fonction holomorphe arbitraire en général. Cependant, pour un ensemble de conditions au bord dense, cette fonction holomorphe est algébrique. Ceci permet d'utiliser des outils de géométrie algébrique pour étudier les solutions du problème variationnel et la formation des singularités.

RÉFÉRENCES

[1] H. Cohn, R. Kenyon & J. Propp – A variational principle for domino tilings, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), p. 297–346.

[2] P. W. Kasteleyn – Graph theory and crystal physics, in *Graph Theory and Theoretical Physics*, Academic Press, 1967, p. 43–110.

[3] R. Kenyon – The Laplacian and Dirac operators on critical planar graphs, *Invent. Math.* **150** (2002), p. 409–439.

[4] ———, Lectures on dimers, notes du cours de Saint-Flour, 2007.

[5] R. Kenyon & A. Okounkov – What is … a dimer ?, *Notices Amer. Math. Soc.* **52** (2005), p. 342–343.

[6] ———, Planar dimers and Harnack curves, *Duke Math. J.* **131** (2006), p. 499–524.

[7] ———, Limit shapes and the complex Burgers equation, *Acta Math.* **199** (2007), p. 263–302.

[8] R. KENYON, A. OKOUNKOV & S. SHEFFIELD – Dimers and amoebae, *Ann. of Math.* **163** (2006), p. 1019–1056.

[9] S. SHEFFIELD – Random surfaces, *Astérisque* **304** (2005).

Raphaël CERF

Université Paris XI
Département de Mathématiques
UMR 8628 du CNRS
Bâtiment 425
F-91405 Orsay Cedex
E-mail : rcerf@math.u-psud.fr