GÉRARD BESSON

Le théorème de la sphère différentiable [d'après Brendle-Schoen]

Astérisque, tome 332 (2010), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 1003, p. 161-181

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__332__161_0>

Séminaire BOURBAKI Mars 2009
61e année, 2008-2009, n° 1003, p. 161 à 181

LE THÉORÈME DE LA SPHÈRE DIFFÉRENTIABLE
[d'après Brendle-Schoen]

par **Gérard BESSON**

INTRODUCTION

En 1951, H.E. Rauch ([**40**]) prouve qu'une variété riemannienne complète dont la courbure sectionnelle est positive et varie entre deux bornes dont le rapport est proche de 1 a un revêtement universel homéomorphe à une sphère. Plus précisément, pour $\delta > 0$, nous dirons qu'une variété riemannienne compacte M est *ponctuellement* δ-pincée lorsqu'en chaque point le rapport de la plus petite courbure sectionnelle à la plus grande est supérieur ou égal à δ. Nous dirons qu'elle est δ-pincée si c'est le rapport du minimum global (sur tout M) au maximum global qui vérifie cette inégalité. Enfin, elle est dite strictement δ-pincée (ponctuellement ou non) si cette inégalité est stricte. Cette notion peut s'utiliser aussi bien lorsque la courbure est négative que lorsqu'elle est positive. Dans ce texte, toute les variétés riemanniennes seront de courbure sectionnelle *strictement positive* ; pour des exemples de résultats en courbure négative on pourra consulter les articles [**27**] et [**43**]. Le théorème de Rauch affirme donc qu'une variété riemannienne simplement connexe δ-pincée, pour un δ explicite et proche de 1, est homéomorphe à une sphère. Par ailleurs, un calcul standard (voir [**21**] section 3.D.2, p. 149) montre que les projectifs complexes, de dimension complexe supérieure ou égale à 2, ont une courbure qui varie entre 1 et 4, pour un bon choix de leur normalisation ; c'est aussi le cas pour les autres espaces riemanniens symétriques compacts de rang un. Le théorème de Rauch ne peut donc être vrai pour une variété riemannienne de courbure positive $1/4$-pincée (non strictement). Ce sont les travaux de M. Berger [**1**] et W. Klingenberg [**29**], dans les années 1960, qui conduisent au résultat optimal : une variété riemannienne simplement connexe *strictement* $1/4$-pincée est homéomorphe à une sphère. Le lecteur peut consulter [**4**] (section 12.2.2.1, p. 552) pour une description de la technique ainsi qu'un historique plus précis.

Notons que ces résultats qui ressortissent à la relation courbure-topologie n'excluent pas que la variété soit une sphère exotique. C'est d'ailleurs une question intéressante de savoir si une sphère exotique peut porter une métrique riemannienne de courbure strictement positive. Un article récent ([**39**]), posté sur la Toile, propose un exemple pour lequel la réponse est positive. Le but de ce texte est de décrire le remarquable théorème suivant, dû à S. Brendle et R. Schoen.

THÉORÈME 0.1 (S. Brendle-R. Schoen [**10, 11**]). — *Soit M une variété riemannienne de courbure sectionnelle strictement positive et ponctuellement strictement* $1/4$-*pincée ; alors M admet une métrique de courbure sectionnelle constante. Elle est donc difféomorphe au quotient d'une sphère par un sous-groupe de $O(n)$.*

Une conséquence est donc qu'aucune sphère exotique n'admet de métrique strictement $1/4$-pincée. Le résultat est important mais la méthode l'est tout autant. Elle repose sur l'utilisation du flot de la courbure de Ricci, introduit par R. Hamilton dans [**22**]. L'idée est de construire une déformation de la métrique riemannienne qui converge vers une métrique de courbure constante. Cette situation idéale ne se produit que lorsque la métrique de départ possède de bonnes propriétés. Rappelons que l'article séminal de R. Hamilton a connu des développements exceptionnels qui ont culminé en les travaux de G. Perelman ([**35, 36, 37**], voir aussi [**5**]) prouvant la conjecture de géométrisation. Dans [**22**], R. Hamilton prouve par cette méthode le théorème suivant.

THÉORÈME 0.2 (R. Hamilton [**22**]). — *Soit M une variété riemanienne compacte de dimension* 3 *qui possède une métrique de courbure de Ricci strictement positive ; alors elle possède une métrique de courbure constante.*

Ensuite, la même technique étendue à la dimension 4 permet à R. Hamilton de prouver les résultats contenus dans [**23, 26**].

C'est une remarquable généralisation aux dimensions quelconques qui constitue le cœur du travail que nous tentons de décrire et elle est due à Ch. Böhm et B. Wilking ([**6**]). On dira qu'un opérateur de courbure est 2-positif si la somme de ses deux plus petites valeurs propres est strictement positive. C'est une notion qui est apparue dans l'article [**14**] de H. Chen.

THÉORÈME 0.3 (Ch. Böhm-B. Wilking [**6**]). — *Soit M une variété riemannienne compacte d'opérateur de courbure* 2-*positif; alors M admet une métrique de courbure constante.*

Les méthodes analytiques pour aborder 0.1 ne sont pas nouvelles. Elles sont présentes dans [**31**] où les auteurs utilisent la théorie des applications harmoniques et dans [**23**], [**30**], [**28**] et [**34**] avec le flot de Ricci. Notons que dans [**30**], Ch. Margerin étudie une condition de courbure naturelle et donne un résultat optimal. Il s'agit d'analyse géométrique et un élément essentiel est le principe du maximum pour les systèmes paraboliques qui permet de réduire la question à un problème algébrique et de répondre à l'interrogation : quelles sont les propriétés (inégalités) de la courbure qui sont préservées par le flot de Ricci ?

Dans le texte qui suit, nous nous limiterons aux dimensions supérieures ou égales à 4. Après quelques rappels sur les différentes notions de courbure, nous tenterons de décrire les principales étapes de la preuve. La première consiste à utiliser le principe du maximum mentionné ci-dessus afin de réduire le problème à l'étude d'une équation différentielle ordinaire sur l'espace des endomorphismes de courbure. La seconde consiste à exhiber des inégalités satisfaites par la courbure qui sont invariantes par ce système dynamique. Enfin, des arguments géométriques standards permettent de conclure. Les références générales sont [**21**] pour les bases de la géométrie riemannienne, [**4**] pour un panorama exhaustif de ses réussites et [**15, 16, 17**] pour le flot de Ricci. Ces dernières références sont exhaustives et la méthode de Ch. Böhm et B. Wilking est décrite avec tous les détails dans [**16**], chapite 11. Il ne nous a donc pas semblé utile de les reproduire. Ce texte est à utiliser comme un guide pour la lecture des articles originaux, très informatifs, et de ces ouvrages. Nous conseillons également le récent survol de S. Brendle et R. Schoen [**12**], ainsi que le livre [**9**].

Je tiens à remercier chaleureusement Ch. Böhm, S. Brendle, L. Ni et H. Seshadri pour leurs réponses patientes à mes questions naïves, ainsi que M. Berger, P. Bérard, L. Bessières, J-.P Bourguignon, Z. Djadli, S. Gallot, H. Nguyen et Th. Richard pour des échanges fructueux.

1. RAPPELS DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE

Dans ce qui suit, (M, g) est une variété riemannienne compacte. Nous désignerons indifféremment la métrique riemannienne par g ou $\langle ., . \rangle$. On note ∇ la dérivation covariante. Soient X, Y, Z et T des champs de vecteurs ; on définit le tenseur de courbure de type $(0,4)$ (voir [**21**]) par

$$R(X,Y,Z,T) = \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]} Z, T \rangle .$$

On montre que ce tenseur est antisymétrique par rapport à X et Y, ainsi que par rapport à Z et T et qu'il vérifie $R(X,Y,Z,T) = R(Z,T,X,Y)$. Il définit donc un endomorphisme symétrique de $\Lambda^2(TM)$ sur lui-même que nous noterons également R et qui s'appelle l'opérateur de courbure. Les conventions que nous utilisons ici sont celles de [**21**], le lecteur pourra les comparer à celles de [**16**]. Le tenseur de courbure vérifie également la première identité de Bianchi, qui est l'analogue de l'identité de Jacobi vérifiée par le crochet de Lie d'une algèbre de Lie. Plus précisément, on a

$$R(X,Y,Z,T) + R(Y,Z,X,T) + R(Z,X,Y,T) = 0\,.$$

La courbure sectionnelle d'un 2-plan $P \subset T_m M$ tangent en m à M est

$$K(P) = \langle R(x \wedge y), x \wedge y \rangle\,,$$

où (x, y) est une base orthonormée de P. On note que K est la valeur de R calculée sur les vecteurs décomposés alors que R est défini sur tout $\Lambda^2(TM)$.

Si $\{e_i\}$ est une base orthonormée de $T_m M$, on munit $\Lambda^2(T_m M)$ du produit scalaire tel que $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$ en est une base orthonormée. Nous noterons $R_{ijkl} = \langle R(e_i \wedge e_j), e_k \wedge e_l \rangle$. La courbure de Ricci en m est une forme bilinéaire symétrique sur $T_m M$ que nous verrons également comme un endomorphisme symétrique de $\mathbf{R}^n$ (nous ferons l'abus de langage qui consiste à donner le même nom à ces deux objets). Elle est définie par

$$\mathrm{Ric}_{ij} = \mathrm{Ric}(e_i, e_j) = \langle \mathrm{Ric}(e_i), e_j \rangle = \sum_k R_{ikjk}\,.$$

C'est un tenseur de même nature que la métrique. Enfin, la courbure scalaire est la trace de la courbure de Ricci, c'est-à-dire, pour $m \in M$

$$\mathrm{scal}(m) = \sum_i \mathrm{Ric}_{ii} = \sum_{i,k} R_{ikik} = 2\,\mathrm{trace}\, R\,.$$

Avec ces conventions l'opérateur de courbure de la sphère unité est l'identité, ses courbures sectionnelles sont toutes égales à 1, sa courbure de Ricci est égale à $(n-1)g$ et sa courbure scalaire est constante égale à $n(n-1)$.

1.1. Opérateurs de courbure algébriques

Pour $m \in M$, le choix d'une base orthonormée $\{e_i\}$ de $T_m M$ permet de l'identifier à l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. Le produit scalaire permet aussi d'identifier $\Lambda^2(\mathbf{R}^n)$ avec l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n)$ en associant au vecteur unitaire $e_i \wedge e_j$ l'endomorphisme de rang 2 qui est la rotation d'angle $\pi/2$ dans le plan engendré par e_i et e_j. Via cette identification $\langle A, B \rangle = -1/2\,\mathrm{trace}(AB)$, pour $A, B \in \Lambda^2(\mathbf{R}^n)$. L'espace des endomorphismes symétriques (que nous identifierons aux formes bilinéaires symétriques) de $\Lambda^2(\mathbf{R}^n)$ est noté $\mathcal{S}^2(\mathfrak{so}(n))$. Cet espace encode les trois premières relations satisfaites par le tenseur de courbure. Nous appelons opérateur de courbure algébrique un élément de $\mathcal{S}^2(\mathfrak{so}(n))$ qui vérifie de plus la première identité de Bianchi ; l'espace des opérateurs de courbures algébriques est noté $\mathcal{S}^2_B(\mathfrak{so}(n))$ (voir [**16**], p. 81).

1.2. Opérations algébriques sur $\mathcal{S}^2(\mathfrak{so}(n))$

Soient A et B deux endomorphismes symétriques de $\mathbf{R}^n$; on définit un endomorphisme symétrique de $\mathfrak{so}(n) \simeq \Lambda^2(\mathbf{R}^n)$ par (voir [**16**], p. 74) :

$$(A \wedge B)(v \wedge w) = \frac{1}{2}(A(v) \wedge B(w) + B(v) \wedge A(w)) .$$

On vérifie aisément que $A \wedge B \in \mathcal{S}^2(\mathfrak{so}(n))$ et que la relation $A \wedge B = B \wedge A$ est satisfaite.

Soient maintenant R et S deux éléments de $\mathcal{S}^2(\mathfrak{so}(n))$; on définit $R \sharp S \in \mathcal{S}^2(\mathfrak{so}(n))$ par la relation :

$$\langle (R\sharp S)(h), h\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\langle [R(\omega_\alpha), S(\omega_\beta], h\rangle \,.\, \langle[\omega_\alpha, \omega_\beta], h\rangle ,$$

où $h \in \mathfrak{so}(n)$ et $\{\omega_\alpha\}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{so}(n)$. On vérifie que la définition est indépendante du choix de la base et que $R\sharp S = S \sharp R$ (voir [**6**] et [**16**], p. 72). Enfin nous noterons $R^\sharp = R\sharp R$. Cette opération introduite dans les travaux de R. Hamilton (voir par exemple [**23**]) jouera un rôle fondamental dans la suite.

1.3. Composantes irréductibles sous l'action de $O(n)$

Le groupe $O(n)$ agit par changement de base sur l'espace des opérateurs de courbure algébriques. On peut décomposer l'espace $\mathcal{S}^2_B(\mathfrak{so}(n))$ en composantes irréductibles sous cette action qui sont au nombre de trois. Pour un opérateur de courbure R, notons Ric_0 la partie sans trace de son tenseur de Ricci, c'est-à-dire

$$\langle \mathrm{Ric}(R)(e_i), e_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} R_{ikik} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ric}_0(R) = \mathrm{Ric}(R) - \frac{\mathrm{scal}(R)}{n} I_{\mathbf{R}^n} ,$$

où $\mathrm{scal}(R) = 2\,\mathrm{trace}(R)$. Alors, on a

$$\mathcal{S}^2_B(\mathfrak{so}(n)) = \mathbf{R} I_{\mathcal{S}^2_B} \oplus \langle \mathrm{Ric}_0\rangle \oplus \langle W\rangle .$$

Le premier facteur est constitué des opérateurs de courbure algébriques multiples de l'identité, le second des multiples d'opérateurs du type $A \wedge I_{\mathbf{R}^n}$ où A est un opérateur symétrique de $\mathbf{R}^n$ de trace nulle et le troisième est le noyau de l'application $R \mapsto \mathrm{Ric}(R)$. Ce dernier est l'espace des tenseurs de Weyl, qui constituent la composante de R la plus difficile à comprendre. Rappelons que la composante de Weyl du tenseur de courbure d'une métrique riemannienne est nulle si et seulement si celle-ci est localement conformément plate. Pour un tenseur de courbure R, nous noterons R_I, R_{Ric_0} et R_W ses différentes composantes et nous noterons indifféremment I l'identité de $\mathcal{S}^2_B(\mathfrak{so}(n))$ comme celle de $\mathbf{R}^n$. Nous avons donc (voir [**16**], p. 87, pour les détails),

$$R = \frac{\mathrm{scal}(R)}{n(n-1)} I + \frac{2}{n-2}\,\mathrm{Ric}_0(R) \wedge I + W .$$

1.4. Une nouvelle identité

Ch. Böhm et B. Wilking démontrent dans [**6**] une nouvelle identité satisfaite par tout tenseur de courbure algébrique. Elle est remarquable de simplicité.

PROPOSITION 1.1 ([**6**]). — *Pour tout* $R \in \mathcal{S}^2_B(\mathfrak{so}(n))$, *on a*

$$R + R\sharp I = (n-1)R_I + \frac{n-2}{2}R_{\mathrm{Ric}_0} = \mathrm{Ric}\wedge I\,.$$

Nous en déduirons ci-dessous la décomposition selon les composantes irréductibles de l'expression quadratique en R, qui apparaît dans l'équation d'évolution (le long du flot de Ricci) de l'opérateur de courbure. Il est remarquable que de nouvelles identités puissent être découvertes sur un espace aussi étudié.

1.5. Endomorphismes $0(n)$-invariants de $\mathcal{S}^2_B(\mathfrak{so}(n))$

Soit ℓ une application linéaire auto-adjointe de $\mathcal{S}^2_B(\mathfrak{so}(n))$ dans lui-même, équivariante pour l'action de $O(n)$ sur cet espace. Elle est diagonalisable et ses espaces propres sont $O(n)$ invariants ; elle préserve donc les composantes irréductibles décrites ci-dessus. De plus, elle est un multiple de l'identité en restriction à chacune d'elle (voir [**16**], p. 89). Dans [**6**], les auteurs s'intéressent à de telles applications qui préservent la composante de Weyl. Elles s'écrivent sous la forme générale

$$\ell_{a,b}(R) = R+2(n-1)aR_I+(n-2)bR_{\mathrm{Ric}_0} = (1+2(n-1)a)R_I+(1+(n-2)b)R_{\mathrm{Ric}_0}+R_W\,,$$

où a et b sont des nombres réels.

2. LE FLOT DE RICCI

C'est une équation différentielle ordinaire sur l'espace des métriques inventée par R. Hamilton dans l'article séminal [**22**]. On cherche une famille $g(t)$ de métriques lisses, dépendant de manière C^∞ de t, et solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} &= -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)} \\ g(0) &= g_0. \end{cases}$$

Une version normalisée peut être écrite, pour laquelle le volume de la métrique qui évolue est fixé ; il suffit, en effet, de remplacer la première ligne de l'équation précédente par :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)} + \Big(\frac{2}{n}\frac{1}{\mathrm{vol}(M,g(t))}\int_M \mathrm{scal}(x,t)dv_{g(t)}(x)\Big)g(t).$$

On peut consulter [**5**] ainsi que [**17**] pour une description détaillée des vertus de cette théorie. Les théorèmes classiques permettent de montrer que les solutions existent en temps petit pour toute donnée initiale C^∞.

L'idée est de prouver que sous les hypothèses des théorèmes 0.1 et 0.3 le flot de Ricci normalisé converge vers une métrique de courbure constante.

2.1. Évolution des courbures

Un calcul maintenant classique permet de décrire l'évolution des différents types de courbure. Nous nous limiterons à la courbure scalaire et à l'opérateur de courbure. On a alors

$$\frac{\partial \operatorname{scal}}{\partial t} + \Delta_{g(t)} \operatorname{scal} = 2|\operatorname{Ric}_{g(t)}|^2_{g(t)},$$

où $\Delta_{g(t)}$ désigne le laplacien, agissant sur les fonctions, défini par la métrique $g(t)$. La convention adoptée est celle dite « des géomètres » (en dimension 1, c'est $-d^2/dx^2$). La norme du tenseur de Ricci est prise pour la métrique $g(t)$.

De même on a

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \Delta R = 2(R^2 + R^\sharp).$$

Nous utilisons ici le laplacien brut, c'est-à-dire l'opposé de la trace de la dérivée covariante seconde du tenseur R. La notation R^2 désigne le carré de l'endomorphisme R et $R^\sharp$ désigne l'expression quadratique définie dans la section précédente. L'évolution du tenseur de courbure ne s'écrit aussi simplement que si nous utilisons une astuce due à K. Uhlenbeck que nous décrivons ci-dessous.

2.2. Le principe du maximum

C'est l'outil indispensable pour l'étude des solutions de l'équation de la chaleur. Il faut en donner ici une version vectorielle, c'est-à-dire une version pour les systèmes paraboliques. C'est ce que fait R. Hamilton dans [**22**] et [**23**]. Le lecteur intéressé peut également consulter [**17**] et [**16**].

Considérons une équation aux dérivées partielles du type $\partial s/\partial t + \Delta_t s = F(s)$ et l'équation différentielle ordinaire $ds/dt = F(s)$. Les E.D.P. ci-dessus sont dites de *réaction-diffusion*, le terme de diffusion est donné par le laplacien; si $F = 0$, il s'agit d'une équation de la chaleur qui « étale » les solutions. Le terme non-linéaire $F(s)$ est le terme de réaction qui, en l'absence de laplacien, conduit (souvent) à l'explosion en temps fini des solutions (convergence de certaines normes vers $+\infty$). La question est de savoir qui de la réaction ou de la diffusion l'emportera, dans une situation donnée. Le principe du maximum résulte d'une comparaison entre le comportement des solutions de l'équation aux dérivées partielles et la situation extrême donnée par l'équation différentielle ordinaire.

L'équation satisfaite par la courbure scalaire peut s'écrire $\partial R/\partial t + \Delta R \geq 0$. Le principe du maximum scalaire le plus simple conduit alors au fait que le minimum de la courbure scalaire augmente le long du flot de Ricci.

Nous décrivons maintenant une version vectorielle de ce principe. Soit M munie d'une famille C^∞ de métriques $g(t)$, pour $t \in [0,T]$, et soit $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow M$ un fibré vectoriel muni d'une métrique *fixe* et d'une famille C^∞ de connexions compatibles, ∇_t. Ces données permettent de définir un laplacien agissant sur les sections de $\mathcal{E}$, qui dépend de t et que nous noterons simplement Δ. Considérons une fonction $F : \mathcal{E} \times [0,T] \longrightarrow \mathcal{E}$ de classe C^∞ (pour simplifier) telle que, pour t donné, $F(.,t)$ préserve les fibres. Soit $\mathcal{K}$ un fermé de $\mathcal{E}$ que nous supposons invariant par le transport parallèle de ∇_t, pour tout $t \in [0,T]$, et tel que $\mathcal{K}_m = \mathcal{K} \cap \pi^{-1}(m)$ soit fermé et convexe. L'hypothèse clé est une relation entre $\mathcal{K}$ et l'équation différentielle ordinaire $\frac{du}{dt} = F(u)$, définie dans chaque fibre $\mathcal{E}_m$ de $\mathcal{E}$; nous supposons que toute solution de celle-ci telle que $u(0) \in \mathcal{K}_m$ reste dans $\mathcal{K}_m$ pour tout $t \in [0,T]$.

THÉORÈME 2.1 ([**23**] [**22**] ou [**17**], théorème 4.8). — *Avec les hypothèses ci-dessus, soit $s(t)$ une solution de l'E.D.P.*

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \Delta s = F(s),$$

telle que $s(o) \in \mathcal{K}$; alors, pour tout $t \in [0,T]$, $s(t) \in \mathcal{K}$.

Pour appliquer ceci à l'opérateur de courbure il faut noter que, bien que la métrique du fibré $\Lambda^2(T^*M)$ dépende de t, une astuce, due à K. Uhlenbeck (voir ci-dessous et [**17**], section 6.1), permet de se ramener à une métrique fixe sur un fibré fixe avec toutefois une connexion qui dépend du temps.

L'ensemble $\mathcal{K}$ est à penser comme une version géométrique d'inégalités sur la courbure comme par exemple la positivité de l'opérateur de courbure.

Exemple : Rappelons le cas de la dimension 3, pour lequel ce principe du maximum a joué un rôle important dans les travaux de G. Perelman ; il montre en effet que la courbure scalaire contrôle tout le tenseur de courbure. En chaque point $m \in M$ et $t \in [0,T]$ l'endomorphisme R se diagonalise et possède trois valeurs propres notées $\lambda(m,t) \geq \mu(m,t) \geq \nu(m,t)$. Une particularité de la dimension 3 est que ces nombres sont toujours des courbures sectionnelles. On montre que les deux expressions R^2 et $R^\sharp$ se diagonalisent dans la même base et ont pour valeurs propres respectives $(\lambda^2, \mu^2, \nu^2)$ et $(\mu\nu, \lambda\nu, \lambda\mu)$. L'équation différentielle ordinaire prend donc une forme très simple

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} &= \lambda^2 + \mu\nu \\ \frac{d\mu}{dt} &= \mu^2 + \lambda\nu \\ \frac{d\nu}{dt} &= \nu^2 + \lambda\mu. \end{cases}$$

En général nous aurons donc à considérer l'équation différentielle ordinaire (E.D.O.)

$$\frac{dR}{dt} = R^2 + R^\sharp = Q(R),$$

définie sur $\mathscr{S}^2_B(\mathfrak{so}(n))$ (nous omettrons le facteur 2 qui ne joue aucun rôle).

2.3. Constructions de $\mathscr{K}$

Il est maintenant utile de rappeler l'astuce due à K. Uhlenbeck afin de se ramener à un fibré vectoriel fixe. Considérons une solution $(M, g(t))$ du flot de Ricci, définie sur un intervalle $[0, T)$. On peut construire une isométrie de fibrés vectoriels dépendant du temps

$$\iota(t) : (TM, g(0)) \longrightarrow (TM, g(t))$$

en résolvant l'équation

$$\frac{d\iota}{dt}(t) = \mathrm{Ric}_{g(t)} \circ \iota(t) \quad \text{ et } \iota(0) = id,$$

où Ric est ici vu comme un endomorphisme. Elle permet de tout ramener à un fibré vectoriel métrique fixe. En particulier la connexion de Levi-Civita rappelée dépend du temps. Cette isométrie s'étend à tous les fibrés vectoriels naturels construits à partir de TM comme le fibré des tenseurs de courbure $\mathscr{E}$ dont la fibre type est isométrique à $\mathscr{S}^2_B(\mathfrak{so}(n))$. Alors, en considérant $\iota(t)^*(R_g(t))$, on écrit l'équation d'évolution de l'opérateur de courbure sur ce fibré fixe, ce qui permet d'appliquer le principe du maximum énoncé ci-dessus.

Pour construire des ensembles $\mathscr{K}$ comme ci-dessus dans $\mathscr{E}$, nous pouvons procéder comme suit. Considérons un fermé convexe $F \subset \mathscr{S}^2_B(\mathfrak{so}(n))$. Nous supposerons de plus que F est invariant par l'action de $O(n)$ sur les tenseurs de courbure. Nous pouvons alors transporter F sur chaque fibre $\mathscr{E}_m$ par l'isométrie induite par le choix d'une base orthonormée de T_mM ; l'ensemble image est $\mathscr{K}_m$. L'invariance par $O(n)$ de F garantit que cette construction ne dépend pas du choix de la base. De même le transport parallèle associé à la connexion (dépendant du temps) induit une isométrie entre les fibres de $\mathscr{K}$; l'invariance de F par $O(n)$ assure l'invariance de $\mathscr{K}$ par le transport parallèle par toutes ces connexions. Si de plus F est invariant par l'E.D.O., l'ensemble $\mathscr{K}$ ainsi construit vérifiera l'hypothèse du théorème 2.1. Un tel ensemble correspond à des conditions de courbure préservées par le flot.

3. LA MÉTHODE DE BÖHM ET WILKING

Le problème est donc maintenant ramené à l'étude du terme quadratique $Q(R)$, le second membre de l'équation différentielle ordinaire, qu'il faut interpréter comme la valeur en R d'un champ de vecteurs sur $\mathcal{S}^2_B(\mathfrak{so}(n))$. Une condition de courbure invariante peut être définie par un cône convexe fermé $O(n)$-invariant, par exemple le cône C des opérateurs de courbure 2-positifs ou nuls (la somme de leurs deux plus petites valeurs propres est positive ou nulle). Pour montrer l'invariance de cette condition par l'E.D.O., il faut montrer que si une trajectoire qui part de l'intérieur du cône atteint le bord elle ne peut en sortir; pour cela il suffit de prouver que le champ de vecteurs qui régit cette E.D.O. « repousse » la trajectoire vers l'intérieur ou, dans le pire des cas, la fait évoluer sur le bord du cône. Il faut donc prouver que le champ de vecteurs $Q(R)$ est dans le cône tangent $T_R C$ à C en tout point de ∂C. Soit donc C un tel cône, invariant par l'E.D.O.; on peut en construire d'autres en prenant l'image de C par les applications $\ell_{a,b}$ définies ci-dessus, pour des choix convenables de a et b. Les applications linéaires $\ell_{a,b}$ envoyant bord sur bord et cône tangent sur cône tangent, l'ensemble $\ell_{a,b}(C)$ est invariant par l'E.D.O., c'est-à-dire que C est invariant par $\ell_{a,b}^{-1} \circ Q \circ \ell_{a,b}$ si

$$X_{a,b}(R) = \ell_{a,b}^{-1}((\ell_{a,b}(R))^2 + (\ell_{a,b}(R))^\sharp)$$

est dans le cône tangent $T_R C$ à C en tout point de ∂C. Comme c'est le cas de $Q(R)$ il suffit, par convexité de C, de le montrer pour $D_{a,b}(R) = X_{a,b}(R) - Q(R)$. Les applications $\ell_{a,b}$ préservent la composante de Weyl et on montre qu'en conséquence $D_{a,b}(R)$ ne dépend que de la composante de Ricci de l'opérateur de courbure R. Les formules deviennent alors plus simples et les calculs possibles.

Grâce à cette idée lumineuse, Ch. Böhm et B. Wilking construisent une famille de cônes convexes $C(s)_{s\in[0,1]}$, $O(n)$-invariants, invariants par l'E.D.O. dont l'intersection est constituée des opérateurs de courbure λI, où $\lambda > 0$, c'est-à-dire de l'opérateur de courbure de la sphère à normalisation près. Si la théorie fonctionne, les trajectoires de l'E.D.P. seront « piégées » par cette famille et contraintes de converger vers l'opérateur de courbure de la sphère. L'idée sous-jacente est d'essayer d'obtenir une fonction de Lyapunov associée à l'E.D.O. (en restriction et projection sur la sphère unité de $\mathcal{S}^2_B(\mathfrak{so}(n))$) dont le minimum serait l'opérateur de courbure de la sphère afin de montrer que les trajectoires convergent vers ce point fixe. Une telle fonction n'est pas vraiment nécessaire; en effet, ce sont plutôt ses ensembles de niveau qui jouent le rôle clé. Les cônes ci-dessus que nous décrirons plus loin généralisent cette idée. Ils ne sont pas nécessairement inclus les uns dans les autres mais peuvent être utilisés de la même manière.

Précisons quelques points.

3.1. Propriétés de $Q(R)$ et $D_{a,b}(R)$

Nous listons un certain nombre de propriétés de ces deux quantités. Le lecteur est renvoyé à [**6**] et [**16**] pour les détails.

Pour $R \in \mathscr{S}^2_B(\mathfrak{so}(n))$, on montre que $Q(R) \in \mathscr{S}^2_B(\mathfrak{so}(n))$ (voir [**16**] p. 88). Une observation de G. Huisken montre que l'E.D.O. que nous considérons est le flot de gradient de la fonction

$$P(R) = \frac{1}{3}\,\mathrm{trace}(R^3 + RR^\sharp)\,,$$

qui est malheureusement trop difficile à étudier pour servir de fonction de Lyapunov. Enfin, on peut calculer les composantes dans la décomposition irréductible de $Q(R)$. C'est là que la nouvelle identité est utile.

Le théorème suivant est la clé de l'étude de l'invariance des cônes $\ell_{a,b}(C)$.

THÉORÈME 3.1 (Ch. Böhm-B. Wilking [**6**]). — *Pour a et b des nombres réels,*

$$\begin{aligned} D_{a,b}(R) =& ((n-2)b^2 - 2(a-b))\,\mathrm{Ric}_0 \wedge \mathrm{Ric}_0 + 2a\,\mathrm{Ric}\wedge\mathrm{Ric} + 2b^2\,\mathrm{Ric}_0^2 \wedge I \\ &+ \frac{\mathrm{trace}(\mathrm{Ric}_0^2)}{n+2n(n-1)a}(nb^2(1-2b) - 2(a-b)(1-2b+nb^2))I\,. \end{aligned}$$

Le fait remarquable, prévisible au vu de la construction, est que $D_{a,b}(R)$ est indépendant de la composante de Weyl de R. Par exemple, on peut calculer ses valeurs propres en fonction de celles de Ric. Il suffit en effet de choisir une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$ qui diagonalise Ric, on en déduit une base orthonormée de $\mathfrak{so}(n)$ dans laquelle $D_{a,b}(R)$ se diagonalise. Ses valeurs propres dépendent alors du choix de a et b.

3.2. Construction de la famille de cônes

Rappelons que $n \geq 4$. Nous posons $\bar{b} = \frac{\sqrt{2n(n-2)+4}-2}{n(n-2)}$ et $a_0(b) = b + \frac{(n-2)}{2}b^2$. Ces valeurs sont telles que $D_{a_0(b),b}$ soit strictement positif pour $b \in]0,\bar{b}]$. Les propositions suivantes donnent le point de départ de la construction (voir [**6**] et [**16**], p. 113) :

PROPOSITION 3.2 (R. Hamilton [**25**]). — *Le cône $\mathfrak{C}$ des opérateurs de courbure algébriques 2-positifs ou nuls est préservé par l'E.D.O.*

Notons que ce résultat est valable en dimension 3 également. Dans ce cas, l'hypothèse signifie que la courbure de Ricci est positive ou nulle (voir [**23**]). Soit $\{\omega_i\}$ une base orthonormée de $\mathfrak{so}(n)$ constituée de vecteurs propres de R. Montrer que le cône est préservé revient à prouver que $\langle Q(R)\omega_i, \omega_i\rangle + \langle Q(R)\omega_j, \omega_j\rangle \geq 0$ pour tout couple $i < j$ tel que $\langle R\omega_i, \omega_i\rangle + \langle R\omega_j, \omega_j\rangle = 0$; c'est-à-dire que le champ de vecteurs $Q(R)$ « repousse » la trajectoire vers l'intérieur du cône (au sens large). On utilise ici la description précise de $Q(R)$.

3.2.1. *Première étape.* —

PROPOSITION 3.3. — *Soit $\mathfrak{C}$ le cône des opérateurs de courbure 2-positifs ou nuls pour $n \geq 4$ et $b \in]0, \bar{b}]$; alors on a les propriétés suivantes :*

(i) *$\mathfrak{C}_b = \ell_{a_0(b),b}(\mathfrak{C})$ est préservé par l'E.D.O.*

(ii) *Pour $b > 0$, le champ de vecteurs $Q(R)$ est transverse au bord de $\ell_{a_0(b),b}(\mathfrak{C})$ aux points $R \neq 0$.*

(iii) *$\ell_{a_0(\bar{b}),\bar{b}}(\mathfrak{C} \setminus \{0\})$ est inclus dans le cône des opérateurs de courbure positifs.*

C'est pour prouver cette proposition que l'on utilise la description de $D_{a,b}(R)$ en suivant le schéma mentionné ci-dessus. On montre essentiellement que $D_{a,b}(R)$ est positif ou nul. Ceci nous fournit une première famille de cônes qui relie $\mathfrak{C}$ à un cône inclus dans l'ensemble des opérateurs de courbure strictement positifs.

3.2.2. *Deuxième étape.* — En suivant le même schéma et le même type de preuves, on construit maintenant la famille suivante. Pour $b \in [0, 1/2]$ posons

$$a(b) = \frac{(n-2)b^2 + 2b}{2 + 2(n-2)b^2} \quad \text{et} \quad p(b) = \frac{(n-2)b^2}{1 + (n-2)b^2}.$$

Alors,

$$\mathfrak{C}'_b = \ell_{a(b),b}\Big(\big\{R \in \mathcal{S}^2_B(\mathfrak{so}(n)) |\ R \geq 0, \mathrm{Ric} \geq p(b)\frac{\mathrm{trace(Ric)}}{n}\big\}\Big)$$

est un cône convexe fermé $O(n)$-invariant qui est de plus invariant par l'E.D.O. ([**6**], lemme 3.4). Il relie le cône des opérateurs de courbure positifs ou nuls à $\mathfrak{C}'_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$.

3.2.3. *Troisième étape.* — Enfin, pour b fixé égal à $1/2$ et $s \geq 0$, on pose

$$a(s) = \frac{1+s}{2} \quad \text{et} \quad p(s) = 1 - \frac{4}{n+2+4s}.$$

On définit alors

$$\mathfrak{C}''_s = \ell_{a(s),\frac{1}{2}}\Big(\Big\{R \in \mathcal{S}^2_B(\mathfrak{so}(n)) |\ R \geq 0, \mathrm{Ric} \geq p(s)\frac{\mathrm{trace(Ric)}}{n}\Big\}\Big)$$

qui possède les mêmes propriétés que précédemment. Notons que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{1}{a(s)} \ell_{a(s),\frac{1}{2}}(R) = 2(n-1)R_I,$$

en conséquence la famille $\mathfrak{C}''_s$ converge vers $\mathbf{R}^+ I$ lorsque s tend vers l'infini. Ces deux dernières étapes consistent à inclure dans la construction des ensembles convexes invariants un pincement de la courbure de Ricci. Les inégalités qui définissent ces familles fournissent en effet un contrôle de la courbure de Ricci si l'opérateur de courbure est normalisé pour que sa plus grande valeur propre soit 1, par exemple.

Il suffit alors de concaténer les trois familles suivantes : $\mathfrak{C}_b$, $\mathfrak{C}'_b \cap \mathfrak{C}_{\bar{b}}$ et $\mathfrak{C}''_s \cap \mathfrak{C}_{\bar{b}}$ pour obtenir, après changement de paramètre, une collection de cônes convexes fermés $O(n)$-invariants et invariants par l'E.D.O. qui relie les opérateurs de courbure 2-positifs ou nuls aux multiples de l'identité, que nous noterons $C(s)_{s\in[0,1]}$. Une telle famille est appelée dans [**6**] « pinching family ».

3.3. Ensemble de pincement

Cette construction n'est pas vraiment suffisante pour la conclusion souhaitée, c'est-à-dire que les solutions de l'E.D.P. convergent après renormalisation vers l'opérateur de courbure de la sphère. En effet, il se pourrait que l'opérateur de courbure tende vers l'infini dans ces cônes sans qu'il se rapproche d'un multiple de l'identité. On peut dire que les cônes sont trop ouverts à l'infini. Alors on construit à partir de $C(s)$ un ensemble F que nous appellerons ensemble de pincement. C'est une notion qui a été introduite par R. Hamilton dans [**23**] et Ch. Böhm et B. Wilking en donnent une généralisation.

THÉORÈME 3.4 (Ch. Böhm-B. Wilking [**6**]). — *Pour $\epsilon \in]0,1[$ et $h_0 > 0$, il existe un ensemble convexe fermé $O(n)$-invariant $F \subset \mathcal{S}^2_B(\mathfrak{so}(n))$ tel que*

(i) *F soit préservé par l'E.D.O.,*

(ii) *$C(\epsilon) \cap \{R : \mathrm{trace}(R) \leq h_0\} \subset F \subset C(\epsilon)$,*

(iii) *l'adhérence de $F \setminus C(s)$ soit compacte pour tout $s \in [\epsilon, 1[$.*

Ce théorème se prouve en montrant que l'intersection de tous les ensembles convexes fermés $O(n)$-invariants qui vérifient (i) et (ii) convient. Dans [**6**], on trouve un théorème plus général et qui peut s'appliquer à toute une variété de familles de cônes. Une façon intuitive de comprendre F est de penser à une parabole qui coupe tous les cônes centrés à l'origine ; le cône à l'infini d'un tel objet est réduit à l'axe vertical. Aller à l'infini dans cet ensemble force à se rapprocher de cet axe après normalisation.

On peut transporter cet ensemble sur le fibré des opérateurs de courbure sur M comme nous l'avons indiqué ci-dessus pour construire un ensemble $\mathcal{F}$ défini et invariant par le transport parallèle.

3.4. Conclusion

Pour conclure la preuve de 0.3, on procède comme suit. Soit (M, g_0) une variété riemannienne compacte d'opérateur de courbure 2-positif (strictement) et soit $g(t)$ le flot de Ricci de donnée initiale g_0 défini sur un intervalle maximal $t \in [0, T[$. Par compacité de M, il existe $\epsilon \in]0,1[$ et $h_0 > 0$ tels que l'opérateur de courbure de g_0 soit en tout point $m \in M$ dans $C(\epsilon) \cap \{R : \mathrm{trace}(R) \leq h_0\}$, après identification de T_mM

à $\mathbf{R}^n$. Il existe alors un ensemble de pincement F vérifiant les propriétés ci-dessus. Soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble du fibré des opérateurs de courbure obtenu. Le principe du maximum affirme que le tenseur de courbure de la métrique $g(t)$ est dans $\mathcal{F}$ pour tout $t \geq 0$.

Il est aisé de vérifier que la courbure scalaire d'une métrique d'opérateur de courbure 2-positif est elle-même strictement positive. C'est alors un fait classique [**17**] que le flot de Ricci a une singularité en temps fini, c'est-à-dire que $T < +\infty$ et qu'il existe (m_i, t_i), avec $t_i \to T$ tel que

$$Q_i = |R(m_i, t_i)| = \max_{M\times[0,t_i]} |R(m,t)| \longrightarrow +\infty\,.$$

Ici nous avons noté $R(m,t)$ l'opérateur de courbure de $g(t)$ au point m, la norme est celle des endomorphismes. On construit alors une famille de flot de Ricci sur M, $g_i(t) = Q_i g(t_i + Q_i^{-1}t)$. Cette opération s'appelle une renormalisation parabolique (voir [**5**]) et produit une autre solution de l'équation du flot de Ricci. Un théorème de compacité dû à R. Hamilton ([**24**]) permet de montrer que la suite de flots $(M, g_i(t), m_i)$ converge pour la topologie de la convergence pointée vers un flot de Ricci complet $(M_\infty, g_\infty(t), m_\infty)$. On peut utiliser ici un résultat de G. Perelman (voir [**35**]) qui affirme que le rayon d'injectivité en m_i de la métrique $g_i(0)$ est uniformément minoré. Par construction $|R_\infty(m_\infty, 0)| = 1$, où R_∞ désigne l'opérateur de courbure de l'espace limite. Comme $F\backslash C(s)$ est compact donc borné pour tout $s \in [\epsilon, 1[$ alors, pour tout s supérieur à ϵ, il existe i assez grand tel que $R(m_i, t_i) \in C(s)$. Ceci implique que $Q_i^{-1}R(m_i, t_i) \in C(s)$. Par passage à la limite, on a donc $R_\infty(m_\infty, 0) \in \cap_{s\in[\epsilon,1[}C(s)$, c'est-à-dire $R_\infty(m_\infty, 0) \in \mathbf{R}_+ I$. La courbure sectionnelle de $g_\infty(0)$ est constante positive (ne dépend pas du 2-plan) en m_∞. Par continuité, pour $p \in M_\infty$ proche de p_∞, on a $|R_\infty(p, 0)| > 1/2$ et donc, pour une suite de points $p_i \in M$ qui converge vers p, $|R(p_i, t_i)| \longrightarrow +\infty$. Le même argument s'applique donc en p montrant que la courbure sectionnelle en p de $g_\infty(0)$ est constante positive. De proche en proche, on montre qu'en chaque point de M_∞ la courbure sectionnelle est constante et positive (la constante pouvant dépendre du point) ; on en déduit que M_∞ est compacte et la convergence n'est plus pointée mais globale et donc M_∞ est difféomorphe à M. En dimension supérieure ou égale à 3 la constance en chaque point de la courbure sectionnelle implique la constance globale. On peut raffiner et également montrer que la convergence est exponentielle dans toutes les topologies C^k (voir [**28**], [**30**] et [**34**]). La preuve nécessiterait plus de détails qui sont laissés au lecteur (voir [**6**] et [**16**], p. 130).

4. LES TRAVAUX DE BRENDLE ET SCHOEN

Le schéma de preuve qui précède est suffisamment souple pour s'appliquer à d'autres situations. C'est cette approche qui est utilisée dans [**10, 11**]. La condition de courbure utilisée précédemment, la 2-positivité du tenseur de courbure est remplacée par la notion de courbure isotrope positive. Par commodité, nous utiliserons l'acronyme *PIC* (positive isotropic curvature) pour la désigner. Elle est apparue pour la première fois dans l'article de M. Micallef et J. Moore ([**31**]). Rappelons sa définition.

Soit (M, g) une variété riemannienne dont l'endomorphisme de courbure en m est noté R. La métrique riemanienne peut être étendue à $T_mM \otimes \mathbf{C}$ comme une forme bilinéaire complexe. De même R est étendue en une application linéaire complexe. Pour un 2-plan $P \subset T_mM \otimes \mathbf{C}$, de base $\{z, w\}$, on définit sa courbure sectionnelle complexe

$$K(P) = \frac{\langle R(z \wedge w), \bar{z} \wedge \bar{w}\rangle}{\langle z \wedge w, \bar{z} \wedge \bar{w}\rangle}\,.$$

Un sous-espace $V \subset T_mM \otimes \mathbf{C}$ est dit *totalement isotrope* si tout vecteur $z \in V$ est isotrope, c'est-à-dire si $\langle z, z\rangle = 0$.

DÉFINITION 4.1. — *On dit que M est de courbure isotrope strictement positive si $K(P) > 0$ pour tout 2-plan $P \subset T_mM \otimes \mathbf{C}$ totalement isotrope.*

Cette condition ne peut être non vide que pour $n \geq 4$. C'est une notion qui apparaît lors de l'étude de la stabilité des surfaces minimales dans une variété riemannienne. C'est justement en étudiant la stabilité de sphères de dimension 2 harmoniques et conformes dans M que M. Micallef et J. Moore montrent qu'une variété compacte simplement connexe, de dimension supérieure ou égale à 4 et dont la courbure sectionnelle isotrope est positive (PIC), est homéomorphe à une sphère. Ce résultat permet de donner une preuve différente du théorème de pincement de M. Berger et W. Klingenberg grâce à la remarque suivante :

PROPOSITION 4.2. — *Une variété riemannienne strictement $1/4$-pincée est PIC.*

Pour un 2-plan P totalement isotrope on peut trouver quatre vecteurs orthonormés $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de sorte que $\{e_1 + ie_2, e_3 + ie_4\}$ soit une base de P. Un calcul immédiat donne alors que la condition PIC peut s'écrire

$$R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234} > 0\,.$$

Maintenant si la variété est strictement $1/4$-pincée, par exemple si sa courbure sectionnelle varie dans l'intervalle $]1/4, 1]$, tous les termes R_{ijij}, qui sont des courbures sectionnelles, sont supérieurs à $1/4$. Une inégalité due à M. Berger (voir [**2**], p. 69) montre que $|R_{1234}| < 1/2$, ce qui prouve la proposition ci-dessus.

Remarquons que l'énoncé de M. Micallef et J. Moore impose à la variété d'être simplement connexe. Cette restriction est nécessaire car la métrique canonique sur $S^{n-1} \times S^1$ est PIC, on ne peut même pas espérer prouver que la condition PIC implique que le revêtement universel est compact. La question de décrire le groupe fondamental des variétés PIC est intéressante et on trouve dans [**11**] des références utiles. Dans [**26**], R. Hamilton étudie l'évolution du flot de Ricci dont la donnée initiale est PIC, en dimension 4 et montre que des singularités doivent apparaître. Il introduit alors l'idée de la chirurgie utilisée par la suite dans les travaux de G. Perelman ; comme dans ceux-ci les singularités ont des voisinages qui peuvent ressembler à des ouverts de $S^3 \times S^1$. Bien que la méthode décrite dans [**26**] contienne une erreur, cet article est d'une très grande importance (voir [**13**]). Pour notre propos, il montre que la méthode de Böhm et Wilking ne peut pas fonctionner telle qu'elle est décrite ; il faut tenir compte d'éventuelles singularités et donc envisager une chirurgie métrique comparable à celle qui est utilisée dans les travaux de Perelman. C'est une question largement ouverte.

Dans [**11**], c'est une idée brillante qui permet de contourner ce problème. Soit (M, g_0) une variété riemannienne compacte ; notons $\tilde{R}$ le tenseur de courbure de $M \times \mathbf{R}$ et $\hat{R}$ celui de $M \times \mathbf{R}^2$. S. Brendle et R. Schoen montrent les propriétés suivantes :

1) La condition « R est PIC » est préservée par le flot.
2) La condition « $\tilde{R}$ est PIC » est également préservée par le flot et est plus restrictive que la précédente. En effet, elle implique, par exemple, que la courbure de Ricci de R est strictement positive.
3) L'opérateur de courbure $\hat{R}$ ne peut pas être PIC à cause du facteur plat de dimension 2, comme on peut aisément le vérifier. En revanche, pour $\epsilon > 0$, considérons l'opérateur $R_\epsilon = R - \epsilon I$ et son extension $\hat{R}_\epsilon$ sur $M \times \mathbf{R}^2$. Dire que $\hat{R}_\epsilon$ a une courbure isotrope positive ou nulle (nous dirons faiblement PIC) est une restriction supplémentaire. Cela implique, par exemple, que R est PIC et que sa courbure sectionnelle est strictement positive.

Le schéma de la preuve de Ch. Böhm et B. Wilking peut alors s'appliquer avec ces notions plus restrictives. Plus précisément, on a

THÉORÈME 4.3 (S. Brendle-R. Schoen [**11**], theorem 2). — *Soit (M, g_0) une variété riemannienne compacte telle que, pour ϵ assez petit, $\hat{R}_\epsilon$ soit faiblement PIC. Alors, le flot de Ricci normalisé de donnée initiale g_0 converge vers une métrique de courbure constante (dans la topologie C^∞).*

Le théorème principal 0.1 est alors une conséquence de

PROPOSITION 4.4 ([**11**]). — *Soit (M, g_0) une variété riemannienne compacte de courbure sectionnelle strictement positive et strictement $1/4$-pincée ; alors, pour ϵ assez petit, $\hat{R}_\epsilon$ est faiblement PIC. Ici R est l'opérateur de courbure de (M, g_0).*

Idées de la preuve. — Les preuves suivent maintenant le schéma de Böhm et Wilking. La première étape est la plus difficile et consiste à montrer que la condition faiblement PIC est préservée par le flot. Comme précédemment, en utilisant les notations ci-dessus, cela se ramène à prouver que, si $R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} - 2R_{1234} = 0$, alors

$$Q(R)_{1313} + Q(R)_{1414} + Q(R)_{2323} + Q(R)_{2424} - 2Q(R)_{1234} \geq 0\,.$$

Ce calcul fastidieux est fait avec beaucoup de clarté et plusieurs astuces dans [**11**]. Signalons que ce résultat a été obtenu indépendamment par un jeune mathématicien australien, Huy Nguyen (Australian National University), dans sa thèse ([**33**]).

La seconde étape consiste à construire la famille de cônes convexes qui se contracte sur $\mathbf{R}_+ I$. Le point de départ est

$$\hat{C} = \left\{R : \ \hat{R} \text{ faiblement } PIC\right\}.$$

La construction utilise comme précédemment les applications $\ell_{a,b}$ pour des choix convenables de a et b. Enfin on montre la proposition par des calculs du type de ceux utilisés pour la preuve de 4.2 bien que sensiblement plus sophistiqués. □

Dans un travail récent, S. Brendle développe avec succès le même formalisme pour une métrique riemannienne telle que $(M, g_0) \times \mathbf{R}$ ait un opérateur de courbure PIC (c'est-à-dire pour $\tilde{R}$ avec les notations ci-dessus) (voir [**8**]).

5. QUELQUES EXTENSIONS

Dans les travaux de M. Berger et W. Klingenberg, le pincement non strict est abordé, c'est-à-dire : une variété simplement connexe $1/4$-pincée (de courbure sectionnelle positive) qui n'est pas homéomorphe à une sphère est difféomorphe à un espace symétrique compact de rang un. L'analogue où l'on obtient un difféomorphisme avec la sphère est prouvé par S. Brendle et R. Schoen dans [**10**].

Dans [**3**], M. Berger montre que, pour chaque dimension n, il existe un nombre $\varepsilon(n)$ avec $0 < \varepsilon(n) < \frac{1}{4}$ tel que toute variété complète, simplement connexe M de dimension n qui admet une métrique $\varepsilon(n)$-pincée soit homéomorphe à S^n ou difféomorphe à un espace riemannien symétrique compact de rang un. L'analogue dans l'esprit des travaux ci-dessus est prouvé par P. Petersen et T. Tao dans [**38**].

Pour plus de résultats sur les conséquences géométriques et topologiques de la condition PIC, on peut consulter les références récentes suivantes : [**7**], [**32**], [**18**], [**19**], [**41**], [**20**] (et beaucoup d'autres certainement).

Dans ce contexte, la nouvelle frontière est certainement d'apprendre à pratiquer des chirurgies sur des flots de Ricci de dimension supérieure ou égale à 4.

6. CONCLUSION

La quasi-coïncidence entre les travaux brièvement décrits ci-dessus et ceux de G. Perelman montre de manière claire que le flot de Ricci arrive à pleine maturité. On constate également des progrès sensibles dans la compréhension du tenseur de courbure d'une variété riemannienne ; en effet, il est remarquable de découvrir de nouvelles identités générales comme c'est le cas dans le travail de Böhm et Wilking. On peut espérer que l'approfondissement des recherches dans ces directions produise à l'avenir de nouveaux résultats profonds.

Enfin, il faut insister sur l'omniprésence des travaux de R. Hamilton qui en plus de construire l'édifice a ouvert pratiquement toutes les pistes.

RÉFÉRENCES

[1] M. Berger – Les variétés Riemanniennes (1/4)-pincées, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **14** (1960), p. 161–170.

[2] ———, Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment pincées, *Bull. Soc. Math. France* **88** (1960), p. 57–71.

[3] ———, Sur les variétés riemanniennes pincées juste au-dessous de 1/4, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **33** (1983), p. 135–150.

[4] ———, *A panoramic view of Riemannian geometry*, Springer, 2003.

[5] G. Besson – Preuve de la conjecture de Poincaré en déformant la métrique par la courbure de Ricci (d'après G. Perel′man), Séminaire Bourbaki, vol. 2004/2005, exposé n° 947, *Astérisque* **307** (2006), p. 309–347.

[6] C. Böhm & B. Wilking – Manifolds with positive curvature operators are space forms, *Ann. of Math.* **167** (2008), p. 1079–1097.

[7] S. Brendle – Einstein manifolds with nonnegative isotropic curvature are locally symmetric, prépublication arXiv:0812.0335, 2008.

[8] ———, A general convergence result for the Ricci flow in higher dimensions, *Duke Math. J.* **145** (2008), p. 585–601.

[9] ———, *Ricci flow and the sphere theorem*, Graduate Studies in Math., vol. 111, Amer. Math. Soc., 2010.

[10] S. Brendle & R. M. Schoen – Classification of manifolds with weakly 1/4-pinched curvatures, *Acta Math.* **200** (2008), p. 1–13.

[11] ———, Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms, *J. Amer. Math. Soc.* **22** (2009), p. 287–307.

[12] ———, Sphere theorems in geometry, in *Surveys in differential geometry. Vol. XIII. Geometry, analysis, and algebraic geometry : forty years of the Journal of Differential Geometry*, Surv. Differ. Geom., vol. 13, Int. Press, Somerville, MA, 2009, p. 49–84.

[13] B.-L. Chen & X.-P. Zhu – Ricci flow with surgery on four-manifolds with positive isotropic curvature, *J. Differential Geom.* **74** (2006), p. 177–264.

[14] H. Chen – Pointwise $\frac{1}{4}$-pinched 4-manifolds, *Ann. Global Anal. Geom.* **9** (1991), p. 161–176.

[15] B. Chow *et al.* – *The Ricci flow : techniques and applications. Part I*, Math. Surveys and Monographs, vol. 135, Amer. Math. Soc., 2007.

[16] ———, *The Ricci flow : techniques and applications. Part II*, Math. Surveys and Monographs, vol. 144, Amer. Math. Soc., 2008.

[17] B. Chow & D. Knopf – *The Ricci flow : an introduction*, Math. Surveys and Monographs, vol. 110, Amer. Math. Soc., 2004.

[18] A. M. Fraser – Fundamental groups of manifolds with positive isotropic curvature, *Ann. of Math.* **158** (2003), p. 345–354.

[19] A. M. Fraser & J. Wolfson – The fundamental group of manifolds of positive isotropic curvature and surface groups, *Duke Math. J.* **133** (2006), p. 325–334.

[20] S. Gadgil & H. Seshadri – On the topology of manifolds with positive isotropic curvature, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), p. 1807–1811.

[21] S. Gallot, D. Hulin & J. Lafontaine – *Riemannian geometry*, 3^{e} éd., Universitext, Springer, 2004.

[22] R. S. Hamilton – Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Differential Geom.* **17** (1982), p. 255–306.

[23] ———, Four-manifolds with positive curvature operator, *J. Differential Geom.* **24** (1986), p. 153–179.

[24] ———, A compactness property for solutions of the Ricci flow, *Amer. J. Math.* **117** (1995), p. 545–572.

[25] ———, The formation of singularities in the Ricci flow, in *Surveys in differential geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993)*, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, p. 7–136.

[26] ———, Four-manifolds with positive isotropic curvature, *Comm. Anal. Geom.* **5** (1997), p. 1–92.

[27] L. HERNÁNDEZ – Kähler manifolds and 1/4-pinching, *Duke Math. J.* **62** (1991), p. 601–611.

[28] G. HUISKEN – Ricci deformation of the metric on a Riemannian manifold, *J. Differential Geom.* **21** (1985), p. 47–62.

[29] W. KLINGENBERG – Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung, *Comment. Math. Helv.* **35** (1961), p. 47–54.

[30] C. MARGERIN – A sharp characterization of the smooth 4-sphere in curvature terms, *Comm. Anal. Geom.* **6** (1998), p. 21–65.

[31] M. J. MICALLEF & J. D. MOORE – Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes, *Ann. of Math.* **127** (1988), p. 199–227.

[32] M. J. MICALLEF & M. Y. WANG – Metrics with nonnegative isotropic curvature, *Duke Math. J.* **72** (1993), p. 649–672.

[33] H. NGUYEN – Isotropic curvature and the Ricci flow, prépublication, 2007.

[34] S. NISHIKAWA – Deformation of Riemannian metrics and manifolds with bounded curvature ratios, in *Geometric measure theory and the calculus of variations (Arcata, Calif., 1984)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 44, Amer. Math. Soc., 1986, p. 343–352.

[35] G. PERELMAN – The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, prépublication arXiv:math.DG/0211159, 2002.

[36] ———, Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, prépublication arXiv:math.DG/0307245, 2003.

[37] ———, Ricci flow with surgery on three-manifolds, prépublication arXiv:math.DG/0303109, 2003.

[38] P. PETERSEN & T. TAO – Classification of almost quarter-pinched manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), p. 2437–2440.

[39] P. PETERSEN & F. WILHELM – An exotic sphere with positive sectional curvature, prépublication arXiv:0805.0812, 2008.

[40] H. E. RAUCH – A contribution to differential geometry in the large, *Ann. of Math.* **54** (1951), p. 38–55.

[41] H. SESHADRI – Manifolds with nonnegative isotropic curvature, prépublication arXiv:0707.3894, 2008.

[42] A. BESSE – *Einstein manifolds*, Ergebnisse Math. Grenzg. (3), vol. 10, Springer, 1987.

[43] S.-T. YAU & F. ZHENG – Negatively $\frac{1}{4}$-pinched Riemannian metric on a compact Kähler manifold, *Invent. Math.* **103** (1991), p. 527–535.

Gérard BESSON

Université Joseph Fourier (Grenoble I)
Institut Fourier
B.P. 74
38402 SAINT MARTIN D'HÈRES Cedex
E-mail : `G.Besson@ujf-grenoble.fr`