

Astérisque

AST

**Représentations p -adiques de groupes p -adiques III :
méthodes globales et géométriques - Pages préliminaires**

Astérisque, tome 331 (2010), p. I-XI

http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__331__R1_0

© Société mathématique de France, 2010, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

331

ASTÉRIQUE

2010

REPRÉSENTATIONS p -ADIQUES
DE GROUPES p -ADIQUES III :
MÉTHODES GLOBALES ET GÉOMÉTRIQUES

Laurent BERGER, Christophe BREUIL & Pierre COLMEZ, éditeurs

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Laurent Berger

Université de Lyon, UMPA ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France

laurent.berger@umpa.ens-lyon.fr

Christophe Breuil

CNRS & IHÉS, Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France

breuil@ihes.fr

Pierre Colmez

CNRS, Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

colmez@math.jussieu.fr

Classification mathématique par sujet (2000). — 11F**, 11S**.

Mots-clefs. — Correspondance de Langlands locale, (φ, Γ) -modules, anneaux de Fontaine, représentations unitaires.

REPRÉSENTATIONS p -ADIQUES DE GROUPES p -ADIQUES III : MÉTHODES GLOBALES ET GÉOMÉTRIQUES

Laurent BERGER, Christophe BREUIL & Pierre COLMEZ, éditeurs

Résumé. — Dans ce dernier volume sur la correspondance locale p -adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sont rassemblés des articles qui, pour la plupart, n'utilisent pas de façon directe la théorie des (ϕ, Γ) -modules. Les méthodes et résultats sont souvent soit géométriques (théorèmes de comparaison p -adiques, cohomologie de de Rham du demi-plan de Drinfeld), soit globaux (compatibilité local-global avec la cohomologie étale complétée). On y trouve aussi des articles de théorie de Hodge p -adique sur l'invariant \mathcal{L} et des résultats locaux importants sur les extensions entre certaines représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Abstract (p -adic representations of p -adic groups III : Global and geometrical methods)

In this last volume on the local p -adic correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, we have gathered papers which, mostly, do not use directly the (ϕ, Γ) -module theory. The methods and results are often geometric (p -adic comparison theorems, de Rham cohomology of the Drinfeld half-plane), or global (local-global compatibility with étale completed cohomology). There are also papers on p -adic Hodge theory and the \mathcal{L} -invariant and important local results on extensions between certain representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

TABLE DES MATIÈRES

Glenn Stevens — <i>Coleman's \mathcal{L}-invariant and families of modular forms</i>	1
Statement of results	1
1. The Gauss-Manin connection with Frobenius structure	3
2. Coleman's \mathcal{L} -invariant.	4
3. Families of modular forms	6
4. Some Pairings	8
5. Proof of Theorem B	9
References	11
Pierre Colmez — <i>Invariants \mathcal{L} et dérivées de valeurs propres de Frobenius</i>	13
Introduction	13
0.1. Invariants \mathcal{L} de formes modulaires	13
0.2. Familles analytiques de représentations galoisiennes de dimension 2 .	15
1. Cohomologie galoisienne des anneaux de Fontaine	17
1.1. Anneaux de Fontaine	17
1.2. Cohomologie galoisienne	17
1.3. Le module U_1 et son H^1	17
2. E - (φ, N) -modules filtrés	18
2.1. Définitions et rappels	18
1. E - (φ, N) -modules	18
2. Filtrations	18
3. E - (φ, N) -modules filtrés	19
3. La représentation $W_{\mathcal{L},i}$	19
3.1. E - (φ, N) -modules filtrés admissibles de dimension 2	19
3.2. Le E - (φ, N) -module filtré $(D, \text{Fil}_{\mathcal{L},i})$	20
3.3. Le module $\text{Hom}(W_{\mathcal{L},i}, U_1)$	20
4. La représentation $W_{\mathcal{L},1}$ et sa cohomologie galoisienne	21
4.1. Éléments de théorie du corps de classes locale	21
4.2. La représentation $W_{\mathcal{L},1}$	22

5. Cohomologie galoisienne de $W_{\mathcal{L},i}$	23
6. Démonstration du résultat principal	24
Références	26
 Massimo Bertolini, Henri Darmon & Adrian Iovita — <i>Families of automorphic forms on definite quaternion algebras and Teitelbaum's conjecture</i>	
Introduction	29
1. Automorphic forms on quaternion algebras	33
2. Teitelbaum's L -invariant	36
3. Families of automorphic forms on B	39
4. A geometric interpretation of p -adic families of automorphic forms	44
5. Orton's \mathcal{L} -invariant	53
6. Distribution-valued modular symbols	58
References	63
 Christophe Breuil — <i>Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée</i>	
1. Introduction et notations	65
1.1. Introduction	65
Remerciements	71
1.2. Notations	71
2. Cohomologies étales complétées, Banach p -adiques et symboles modulaires	73
2.1. Cohomologies étales complétées	73
2.2. Les Banach $\widehat{\pi}_p(f)$	75
2.3. Cohomologie et symboles modulaires	78
2.4. Banach p -adiques et symboles modulaires	83
3. Espaces de distributions, invariant \mathcal{L} et Banach p -adiques	86
3.1. Rappels sur les espaces $O(k)^b$, $O(k, \mathcal{L})^b$ de [4] et les Banach associés	86
3.2. Une formulation plus concrète de $O(k)^b$ et $B(k)$	88
3.3. Une formulation plus concrète de $O(k, \mathcal{L})^b$ et $B(k, \mathcal{L})$	92
4. Arbre de Bruhat-Tits, symboles modulaires et invariant \mathcal{L}	96
4.1. Quelques rappels classiques	96
4.2. Arbre de Bruhat-Tits et symboles modulaires	98
4.3. Espaces de distributions et symboles modulaires	101
4.4. 1-cocycles et symboles modulaires	102
4.5. Invariant \mathcal{L} et symboles modulaires	104
5. Applications	107
5.1. Applications à la cohomologie étale complétée	107
5.2. Applications aux distributions p -adiques de Mazur, Tate et Teitelbaum	110
Références	114

Christophe Breuil & Ariane Mézard — <i>Représentations semi-stables de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, demi-plan p-adique et réduction modulo p</i>	117
1. Introduction et notations	117
1.1. Introduction	117
1.2. Notations	120
2. Préliminaires	122
2.1. Rappels sur les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ -représentations $B(k)^*$ et $B(k, \mathcal{L})^*$	122
2.2. Rappels sur le modèle formel semi-stable de $\mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p$	123
2.3. Rappels sur les résultats de Teitelbaum	124
3. Définition des faisceaux	127
3.1. Les faisceaux $\omega(k, \mathcal{L})$ et $\bar{\omega}(k, \mathcal{L})$	127
3.2. Les faisceaux $\bar{\omega}(k, \mathcal{L}) _C$ et $\bar{\omega}(k, \mathcal{L}) _P$	133
4. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ -représentation $H^0(\mathcal{X}, \omega(k, \mathcal{L}) \otimes \mathbb{F})$ pour $\mathrm{val}(\mathcal{L}) \geq 0$	134
4.1. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ -représentation $\sigma(n_k, 1)$	135
4.2. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ -représentation $H^0(\mathbb{P}^1, \bar{\omega}(k, \mathcal{L}) _{\mathbb{P}^1})$	136
4.3. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ -représentation $H^1(\mathbb{P}^1, \bar{\omega}(k, \mathcal{L}) _{\mathbb{P}^1})$	139
4.4. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ -représentation $H^0(\mathcal{X}, \bar{\omega}(k, \mathcal{L}))$	142
5. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ -représentation $H^0(\mathcal{X}, \omega(k, \mathcal{L})) \otimes \mathbb{F}$ pour $\mathrm{val}(\mathcal{L}) \geq 0$	147
5.1. Cohomologie de Čech	147
5.2. Modifications de sections	148
5.3. Défauts de recollement	152
5.4. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ -représentation $H^0(\mathcal{X}, \omega(k, \mathcal{L})) \otimes \mathbb{F}$	155
Appendice A. Calculs de sections	159
A.1. Calculs combinatoires	159
A.2. Calculs de sections modulo p	160
A.3. Calculs de sections modulo p^2	168
Appendice B. Calculs de Čech	173
B.1. Calculs de résidus	173
B.2. Calculs de classes de cohomologie	174
Références	177

Robert Coleman & Adrian Iovita — <i>Hidden structures on semistable curves</i>	179
1. Introduction	179
Acknowledgements	183
2. Definitions of the operators	184
2.1. The definition via degeneration	184
2.2. The definition via p -adic integration	186
3. F-Isocrystals	189
3.1. Formal schemes, rigid analytic spaces and weak completions	189
3.1.1. The functor rig	189

3.1.2. Formal models	190
3.1.3. Fibrations and rigid analytic Poincaré lemmas	193
3.1.4. Weakly Complete Algebras	194
3.2. The geometry of the family	198
3.3. Isocrystals	201
3.4. Cohomology of an F -isocrystal	204
3.4.1.	204
3.4.2.	204
3.4.3.	205
3.4.4.	207
3.4.5.	207
3.5. Hypercocycles and Mayer-Vietoris exact sequences	208
3.5.1. 3.5.1 Coverings and Graphs	208
3.5.2. Hypercocycles and Mayer-Vietoris exact sequences attached to a covering	209
3.5.3. Examples of coverings in our setting	210
3.5.4. Changing coverings	211
4. The Monodromy Operators	216
4.1. The global residue	216
4.2. The proof of the equality of the monodromy operators	220
5. Frobenii	222
5.1. Frobenius and K_0 -structures on $H^{i,j}(\mathcal{C}_s, \mathcal{E}_s)$	222
5.2. F-isocrystals	227
5.3. Lifts of Frobenius	231
The description of the Frobenius $\Phi_1^f: \psi^* \mathbb{H}_{B^2} \rightarrow \mathbb{H}_{B^1}$	234
5.4. Integration	235
5.5. The Frobenius Operators	236
6. Logarithmic F-isocrystals	243
6.1. Convergent log F-isocrystals	246
7. Applications	249
7.1. The proof of Theorem 1.1	249
7.2. Gysin sequences	251
References	253

**Christophe Breuil & Matthew Emerton — Représentations p -
adiques ordinaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et compatibilité local-global .** 255

1. Introduction et notations	255
2. Représentations ordinaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$	261
3. La conjecture de compatibilité local-global	270
4. Formes compagnons surconvergentes	279
5. Les résultats principaux	292
Appendice A. Preuve de la proposition 2.1.4	306

Références	313
Vytautas Paškūnas — <i>Extensions for supersingular representations of $GL_2(\mathbb{Q}_p)$</i>	317
1. Introduction	317
Acknowledgements	320
2. Notation	320
3. Irreducible representations of K	321
4. Irreducible representations of G	322
4.1. Supersingular representations	323
5. Extensions	326
6. Exact sequence	328
7. Computing $H^1(I_1/Z_1, \pi)$	331
7.1. $p = 3$	334
7.2.	336
8. Extensions and central characters	338
9. Hecke Algebra	339
10. Main result	343
11. Non-supersingular representations	347
Appendix A. Lower bound on $\dim \text{Ext}_G^1(\pi, \pi)$	349
References	352
Matthew Emerton — <i>Ordinary parts of admissible representations of p-adic reductive groups I. Definition and first properties</i>	355
1. Introduction	355
1.1. Arrangement of the paper	356
1.2. Notation and terminology	356
1.3. Acknowledgments	357
2. Representations of p -adic analytic groups	357
2.1. Augmented G -representations	357
2.2. Smooth G -representations	359
2.3. Some finiteness conditions	363
2.4. ϖ -adically admissible G -representations	366
3. Ordinary parts	370
3.1. The definition of Ord_P	370
3.2. Some elementary properties of Ord_P	376
3.3. Preservation of admissibility	378
3.4. Extension to the case of ϖ -adically complete representations	380
4. Adjunction formulas	383
4.1. Parabolic induction	383
4.2. A simple adjunction formula	388
4.3. Ordinary parts of parabolically induced representations	390
4.4. The main adjunction formula	392

Appendix A. Functional analysis	397
References	401
Matthew Emerton — <i>Ordinary parts of admissible representations of p-adic reductive groups II. Derived functors</i>	403
1. Introduction	403
1.1. Arrangement of the paper	404
1.2. Notation and terminology	404
Acknowledgments	404
2. Injective and acyclic objects	405
2.1. Injective objects	405
2.2. Continuous cohomology as derived functors	408
3. The δ -functor $H^\bullet \text{Ord}_P$	410
3.1. Some properties of Z_M	410
3.2. A review of the functor Ord_P	412
3.3. The definition of $H^\bullet \text{Ord}_P$	414
3.4. The main theorem	416
3.5. Some properties of $H^\bullet(N_0, -)$	421
3.6. An application to Jacquet modules	426
3.7. The relation to derived functors	429
4. The case of $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$	431
4.1. Absolutely irreducible representations	431
4.2. Computations of $H^\bullet \text{Ord}_P(V)$	435
4.3. Extension computations	438
Appendix A.	449
A.1.	450
A.2.	456
References	458
Matthew Emerton & Vytautas Paškūnas — <i>On the effaceability of certain δ-functors</i>	461
1. Introduction	461
2. Injectives	462
3. Main result	464
References	469

*Nous dédions ces trois volumes de
représentations p -adiques de groupes p -adiques
à Jean-Marc Fontaine.*

*Son œuvre a inspiré la plupart
des questions qui y sont abordées.*

Les éditeurs : Laurent Berger, Christophe Breuil et Pierre Colmez.