Astérisque

PIERRE COLMEZ

Invariants $\mathcal{L}$ et dérivées de valeurs propres de Frobenius

Astérisque, tome 331 (2010), p. 13-28

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__331__13_0>

Astérisque
331, 2010, p. 13–28

INVARIANTS $\mathscr{L}$ ET DÉRIVÉES DE VALEURS PROPRES DE FROBENIUS

par

Pierre Colmez

Résumé. — Nous donnons une formule pour l'invariant-$\mathscr{L}$ de Fontaine-Mazur d'une représentation semi-stable de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ en termes de dérivées de valeurs propres de Frobenius. Combinée avec des résultats de Stevens et de Kisin, cette formule fournit une nouvelle démonstration de l'égalité des invariants-$\mathscr{L}$ de Fontaine-Mazur et Coleman attachés aux formes modulaires.

Abstract **($\mathscr{L}$-invariants and Frobenius eigenvalues derivatives).** — We give a formula for Fontaine-Mazur's $\mathscr{L}$-invariant attached to a 2-dimensional semi-stable representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ in terms of derivatives of eigenvalues of Frobenius. Combined with results of Stevens and Kisin, this gives a new proof of the equality between Fontaine-Mazur's and Coleman's $\mathscr{L}$-invariants attached to modular forms.

Introduction

0.1. Invariants $\mathscr{L}$ de formes modulaires. — Si f est une forme primitive de poids k_0 pair et niveau N divisible par p, vecteur propre pour [(1)] T_p pour la valeur propre $p^{k_0/2-1}$, la fonction L p-adique de f a un zéro supplémentaire en $s = k_0/2$. Mazur, Tate et Teitelbaum [**20**] ont conjecturé [(2)] l'existence d'un invariant $\mathscr{L}(f)$ ne dépendant de f que « localement en p », tel que l'on ait [(3)]

$$L'_p(f, k_0/2) = \mathscr{L}(f) \cdot L(f, k_0/2).$$

Si $k_0 = 2$ et si les coefficients de Fourier de f sont rationnels, il correspond à f une courbe elliptique E, définie sur $\mathbf{Q}$, ayant mauvaise réduction multiplicative déployée

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11S**, 11F**.
Mots clefs. — Représentation semi-stable, famille de représentations.

(1) Il s'agit de l'opérateur T_p de niveau N divisible par p, c'est-à-dire l'opérateur U_p d'Atkin-Lehner.
(2) Le lecteur pourra consulter [**9**] pour une introduction plus détaillée.
(3) Pour que la formule ci-dessous ait un sens, il faut considérer L_p comme à valeurs dans le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel engendré par les périodes de f.

en p. D'après le théorème d'uniformisation de Tate, il existe alors $q \in \mathbf{Q}_p^*$ de valuation non nulle, tel que E soit isomorphe, en tant que variété rigide, à $\mathbf{G}_m/q^{\mathbf{Z}}$, et on a $\mathscr{L}(f) = \frac{\log q}{v_p(q)}$. Dans le cas général, deux définitions de l'invariant $\mathscr{L}(f)$ ont été proposées : l'une par Coleman [**3**] et l'autre par Fontaine et Mazur [**19**]. L'invariant $\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f)$ de Coleman est défini via la théorie de l'intégration p-adique de Coleman et l'invariant $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$ de Fontaine-Mazur est défini via le (φ, N)-module filtré de la restriction à un groupe de décomposition en p de la représentation galoisienne V_f associée à f. On dispose des résultats suivants :

Théorème 0.1 **(Stevens).** — $L_p'(f, k_0/2) = \mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f) \cdot L(f, k_0/2)$.

Théorème 0.2 **(Kato-Kurihara-Tsuji).** — $L_p'(f, k_0/2) = \mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f) \cdot L(f, k_0/2)$.

Théorème 0.3 **(Coleman-Iovita).** — $\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f) = \mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$.

Le théorème de Coleman-Iovita est bien évidemment une conséquence des théorèmes de Stevens et de Kato-Kurihara-Tsuji, mais leur démonstration [**5**], qui se fait en déformant une courbe modulaire sur une famille de $\mathbf{P}^1$, est bien plus directe que celle obtenue en utilisant ces deux théorèmes.

La démonstration de Kato-Kurihara-Tsuji (non rédigée, mais voir [**8, 22**]) repose sur la construction, par Kato [**17**], d'un système d'Euler pour la représentation V_f dont l'image par l'exponentielle de Perrin-Riou [**21**] redonne la fonction $L_p(f, s)$ (la démonstration de ce dernier fait repose sur la loi de réciprocité explicite de Kato [**16**] dont la démonstration est très délicate).

La démonstration de Stevens en poids quelconque est une généralisation de celle qu'il avait obtenue avec Greenberg [**15**] en poids 2 ; elle repose sur les familles de formes modulaires p-adiques et leurs fonctions L. Coleman a construit [**4**], en interpolant (4) des formes modulaires classiques, une famille analytique de formes modulaires p-adiques f_x, pour $x \in \mathscr{X}$, où $\mathscr{X}$ est une boule de $\mathbf{C}_p$ contenant k_0, avec $f_{k_0} = f$. Cette famille est propre pour tous les opérateurs de Hecke et les valeurs propres dépendent analytiquement de $x \in \mathscr{X}$; c'est en particulier le cas de la valeur propre a_p de T_p. Le lien entre $\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f)$ et a_p est le suivant (cf. [**26**]).

Théorème 0.4 **(Stevens).** — $\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f) = -2a_p(k_0)^{-1} \cdot a_p'(k_0)$.

Dans cet article, nous démontrons (cf. th. 0.5 et cor. 0.7) une formule analogue pour l'invariant $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$ en utilisant la famille de représentations galoisiennes attachée à la famille des f_x.

(4) Si $k \in \mathbf{N}$ est un élément de $\mathscr{X}$ tel que $v_p(a_p(k)) < k - 1$, alors f_k est une forme modulaire classique de poids k et conducteur N.

0.2. Familles analytiques de représentations galoisiennes de dimension 2

Soit S une algèbre de Tate, i.e. un quotient d'une algèbre $\mathbf{Q}_p\{X_1,\dots,X_n\}$ de séries convergeant sur la boule unité fermée. L'espace analytique $\mathscr{X}$ associé à S est l'ensemble des morphismes continus de S dans $\mathbf{C}_p$, la topologie sur $\mathscr{X}$ étant celle de la convergence faible. Si $x\in\mathscr{X}$, on note E_x l'adhérence dans $\mathbf{C}_p$ du sous-corps engendré par l'image de S par x. Si E est un sous-corps de $\mathbf{C}_p$, on définit $\mathscr{X}(E)$ comme l'ensemble des $x\in\mathscr{X}$ vérifiant $E_x\subset E$. On voit un élément s de S comme une fonction analytique sur $\mathscr{X}$, en posant $s(x)=x(s)$.

Soit V une S-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (i.e. un S-module libre de rang 2 muni d'une action S-linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$). Choisissons une base v_1,v_2 de V sur S et notons $A_\sigma\in\mathbf{GL}_2(S)$ la matrice de $\sigma\in\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dans cette base. Si $x\in\mathscr{X}$, on note V_x la E_x-représentation de dimension 2, pour laquelle la matrice de $\sigma\in\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est $A_\sigma(x)$. La fonction $x\mapsto A_\sigma(x)$ étant analytique, la famille de représentations V_x, pour $x\in\mathscr{X}$, définie par V, est « analytique » et V est une *famille analytique de représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension* 2.

Soit $\psi_1:\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}\to\mathbf{Q}_p$ le caractère (additif) non ramifié de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ normalisé par $\psi_1(\sigma)=1$ si σ induit le frobenius $x\mapsto x^p$ sur $\overline{\mathbf{F}}_p$. Soit $\psi_2:\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}\to\mathbf{Q}_p$ le logarithme du caractère cyclotomique. Comme ψ_1,ψ_2 forment une base de $\mathrm{Hom}(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p},\mathbf{Q}_p)$, il existe $\delta,\kappa\in S$ tels que, quel que soit $\sigma\in\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on ait

$$\log(\det A_\sigma)=\delta\cdot\psi_1(\sigma)+\kappa\cdot\psi_2(\sigma).$$

Notre résultat principal est l'énoncé peu appétissant suivant :

Théorème 0.5. — *Supposons que V a un poids de Hodge-Tate*(5) *nul, et qu'il existe $\alpha\in S$ tel que $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}\widehat{\otimes}V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p},\varphi=\alpha}$ soit localement libre de rang 1 sur $\mathscr{X}$.*

Alors, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, si $x_0\in\mathscr{X}(E)$ est tel que V_{x_0} soit semi-stable d'invariant de Fontaine-Mazur égal à $\mathscr{L}\in E$ et poids de Hodge-Tate 0 et $\kappa(x_0)\leqslant -1$, la forme différentielle

$$\frac{d\alpha}{\alpha}-\frac12\mathscr{L}\cdot d\kappa+\frac12 d\delta$$

s'annule en x_0.

Remarque 0.6. — (i) Le terme $d\delta$ pouvant s'éliminer en tordant par un caractère non ramifié, le théorème ci-dessus montre que l'invariant $\mathscr{L}$ de Fontaine-Mazur s'exprime

(5) Il s'agit des poids de Hodge-Tate κ_1,κ_2 fournis par la théorie de Sen [**24, 25**] ; ils vivent *a priori* dans une extension quadratique (car on est en dimension 2) de S et, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, si $x\in\mathscr{X}(E)$ est tel que V_x est de Hodge-Tate (considérée comme $\mathbf{Q}_p$-représentation de dimension $2\cdot[E{:}\mathbf{Q}_p]$), alors $\kappa_1(x)$ et $\kappa_2(x)$ sont des entiers et les poids de Hodge-Tate de V_x sont $\kappa_1(x)$ et $\kappa_2(x)$ avec multiplicité $[E{:}\mathbf{Q}_p]$. L'hypothèse selon laquelle l'un des poids de Hodge-Tate est nul implique que l'autre est égal à κ.

simplement en termes de la dérivée logarithmique de la valeur propre de frobenius par rapport au poids de Hodge-Tate, ce qui semble, *a priori*, assez surprenant. En fait, c'est un reflet de la géométrie de l'espace des représentations *triangulines* [**11**]. (Une E-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est trianguline s'il existe un caractère continu $\delta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to E^*$ et $\alpha \in E^*$ tels que $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \varphi = \alpha} \neq 0$.)

(ii) La démonstration repose sur un calcul de cohomologie galoisienne dans les anneaux de Fontaine. Le principe consiste à bouger la filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathrm{End}(V_{x_0}))$ pour se ramener à $\kappa(x_0) = -1$. Dans ce cas, la représentation V_{x_0} est une extension de $\mathbf{Q}_p(-1)$ par $\mathbf{Q}_p$ dont la classe dans $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q}_p(1))$ est contrôlée par l'invariant $\mathscr{L}$; on peut alors faire tous les calculs explicitement en utilisant un peu de théorie locale du corps de classes. Cette technique consistant à bouger la filtration pour se ramener à des représentations plus simples a été introduite par Fontaine [**14**] et utilisée avec profit dans [**13**] pour démontrer la conjecture « faiblement admissible implique admissible ».

(iii) La formule « galoisienne » du théorème ci-dessus a un avatar « automorphe » (cf. [**11**]) faisant intervenir l'invariant $\mathscr{L}$ de Breuil [**2**] défini en termes de représentations unitaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. On passe d'une formule à l'autre via la correspondance de Langlands locale p-adique pour la série principale unitaire [**12**] pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, mais le calcul est nettement plus facile du côté automorphe. Ce calcul a joué un rôle non négligeable dans la conception de [**10**] dont [**11**] et [**12**] sont issus.

Revenons à la famille analytique de formes modulaires construite par Coleman. On peut interpoler (cf. [**6**]) les représentations galoisiennes p-adiques associées aux formes classiques f_k, pour $k \in \mathbf{Z} \cap \mathscr{X}$ vérifiant $v_p(a_p(k)) < k - 1$, pour construire une S-représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$, où S est l'algèbre de Tate des fonctions analytiques sur $\mathscr{X}$. En particulier, on a $V_{k_0} = V_f$.

Les poids de Hodge-Tate de V_x sont 0 et $1 - x$ et la représentation $\det V_x$ se factorise à travers une extension finie de $\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})$. Par ailleurs, Saito [**23**] a montré que, si f_x est une forme classique, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_x)^{\varphi = a_p(x)} \neq 0$, et Kisin [**18**] a montré que la représentation V vérifiait les conditions du théorème avec $\alpha = a_p$. On peut donc appliquer le théorème, avec $x_0 = k_0$, $\alpha = a_p$, $\kappa(x) = 1 - x$, $\delta(x) = 0$ et $\mathscr{L} = \mathscr{L}(V_{k_0}) = \mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$ pour en déduire le résultat suivant :

Corollaire 0.7. — $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f) = -2a_p(k_0)^{-1} \cdot a_p'(k_0)$.

Finalement, en comparant le corollaire ci-dessus avec le résultat de Stevens, on obtient une nouvelle démonstration du théorème de Coleman-Iovita.

Corollaire 0.8. — $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f) = \mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f)$.

1. Cohomologie galoisienne des anneaux de Fontaine

Dans tout le reste de l'article, E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et on s'intéresse aux E-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, c'est-à-dire aux E-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action E-linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

1.1. Anneaux de Fontaine. — Soient $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ les anneaux de Fontaine et soient

$$\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E} = E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}, \quad \mathbf{B}_{\mathrm{st},E} = E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} = E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}.$$

On étend l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ en une action E-linéaire sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$. De même, on étend l'action de φ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ en une action E-linéaire sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ et l'action de N sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ en une action E-linéaire sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$. Finalement, on définit la filtration $(\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E})_{i\in\mathbf{Z}}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$ en tensorisant par E la filtration $(\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR}})_{i\in\mathbf{Z}}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. On a alors $\mathbf{B}^{N=0}_{\mathrm{st},E} = \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ et l'inclusion de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$ induit la *suite exacte fondamentale*

$$0 \to E \to \mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris},E} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^0_{\mathrm{dR},E} \to 0.$$

Soit t le $2i\pi$ p-adique de Fontaine. C'est un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ sur lequel $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit par multiplication par le caractère cyclotomique, et on a $\varphi(t) = pt$, $Nt = 0$ et $t^j\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E} = \mathbf{B}^{i+j}_{\mathrm{dR},E}$ si $i, j \in \mathbf{Z}$.

1.2. Cohomologie galoisienne. — Si M est un $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$-module et si $i \in \mathbf{N}$, on note $H^i(M)$ le i-ième groupe de cohomologie continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à valeurs dans M. Si $j \in \mathbf{Z}$, on note $M(j)$ le module M tordu par la puissance j-ième du caractère cyclotomique.

Proposition 1.1. — (i) *On a $H^0(\mathbf{C}_p) = H^1(\mathbf{C}_p) = \mathbf{Q}_p$ et $H^i(\mathbf{C}_p(j)) = 0$ si $j \neq 0$ ou si $i \geqslant 2$.*

(ii) *Si $a \leqslant b \in \mathbf{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors $H^0(\mathbf{B}^a_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^b_{\mathrm{dR},E}) = H^1(\mathbf{B}^a_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^b_{\mathrm{dR},E}) = 0$ si $a > 0$ ou si $b \leqslant 0$* (avec la convention $\mathbf{B}^{-\infty}_{\mathrm{dR},E} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$ et $\mathbf{B}^{+\infty}_{\mathrm{dR},E} = 0$).

Démonstration. — Le (i) est dû à Tate [**27**] et le (ii) s'en déduit par dévissage et passage à la limite en utilisant l'isomorphisme $\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^{i+1}_{\mathrm{dR},E} \cong E \otimes \mathbf{C}_p(i) \cong \mathbf{C}_p(i)^{[E:\mathbf{Q}_p]}$.

1.3. Le module U_1 et son H^1. — Si $i \in \mathbf{N}$, soit $U_i = \mathbf{B}^{N^{i+1}=0,\varphi=p^{i-1}}_{\mathrm{st},E}$. Alors N induit, quel que soit $i \in \mathbf{N}$, la suite exacte

$$0 \to \mathbf{B}^{\varphi=p^i}_{\mathrm{cris},E} \to U_{i+1} \xrightarrow{N} U_i \to 0.$$

Proposition 1.2. — *L'application naturelle*

$$H^1(E) \to \ker\big(H^1(U_1) \xrightarrow{N} H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})\big)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — La suite exacte $0 \to E(-1) \to U_0 \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{-1} \to 0$ et l'annulation de $H^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{-1})$ et $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{-1})$ permettent de montrer que l'application naturelle de $H^1(E(-1))$ dans $H^1(U_0)$ est un isomorphisme. Comme par ailleurs les extensions non triviales de E par $E(-1)$ ne sont pas semi-stables [**1**], cela implique que l'application naturelle de $H^1(U_0)$ dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$ est injective. D'où l'égalité

$$\ker\big(H^1(U_1) \xrightarrow{N} H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})\big) = \ker\big(H^1(U_1) \xrightarrow{N} H^1(U_0)\big).$$

Maintenant, comme N induit la suite exacte $0 \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1} \to U_1 \to U_0 \to 0$ et comme $H^0(U_0) = U_0 \cap E = 0$, on obtient $\ker(H^1(U_1) \xrightarrow{N} H^1(U_0)) = H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1})$. Finalement, la suite exacte $0 \to E \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{0} \to 0$ et l'annulation de $H^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{0})$ et $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{0})$ montrent que l'application naturelle de $H^1(E)$ dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1})$ est un isomorphisme, ce qui permet de conclure.

2. E-(φ, N)-modules filtrés

2.1. Définitions et rappels

1. E-(φ, N)-modules. — Un *E-(φ, N)-module* D est un E-espace vectoriel muni d'actions E-linéaires de φ et N avec la relation de commutation $N\varphi = p\varphi N$.

Si D est E-(φ, N)-module de dimension finie sur E, on définit l'invariant $t_N(D)$ par la formule $t_N(D) = v_p(\det\varphi)$, et on note $\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D)$ le $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1}$-module

$$\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D)^{\varphi=1, N=0}.$$

Si D_1 et D_2 sont deux E-(φ, N)-modules, on fait de $D_1 \otimes_E D_2$ un E-(φ, N)-module en faisant agir φ et N sur $D_1 \otimes_E D_2$ par $\varphi \otimes \varphi$ et $N \otimes 1 + 1 \otimes N$ respectivement.

2. Filtrations. — Une *filtration* $\mathrm{Fil} = (\mathrm{Fil}^j D)_{j\in\mathbf{Z}}$ sur un E-espace vectoriel D est une collection de sous-E-espaces vectoriels $\mathrm{Fil}^j D$, pour $j \in \mathbf{Z}$, avec $\mathrm{Fil}^{j+1} D \subset \mathrm{Fil}^j D$ quel que soit $j \in \mathbf{Z}$, $\cap_{j\in\mathbf{Z}} \mathrm{Fil}^j D = 0$ et $\cup_{j\in\mathbf{Z}} \mathrm{Fil}^j D = D$. Les entiers j pour lesquels $\mathrm{Fil}^j D/\mathrm{Fil}^{j+1} D \neq 0$ s'appellent les *degrés de la filtration*.

Si D_1 et D_2 sont deux E-espaces vectoriels munis de filtrations Fil_1 et Fil_2, et si D_1 ou D_2 est de dimension finie, alors $\mathrm{Fil}^j(D_1 \otimes_E D_2) = \sum_{j_1+j_2=j} \mathrm{Fil}_1^{j_1} D_1 \otimes_E \mathrm{Fil}_2^{j_2}$ est une filtration sur $D_1 \otimes_E D_2$.

Si $\mathrm{Fil} = (\mathrm{Fil}^j D)_{j\in\mathbf{Z}}$ est une filtration sur un E-espace vectoriel D de dimension finie, on définit l'invariant $t_H(D, \mathrm{Fil})$ par la formule

$$t_H(D, \mathrm{Fil}) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} j \dim_E(\mathrm{Fil}^j D/\mathrm{Fil}^{j+1} D)$$

et on note $\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil})$ le $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{+}$-module

$$\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D)/\mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D).$$

3. E-(φ, N)-modules filtrés. — Un *E-(φ, N)-module filtré* (D, Fil) est un E-(φ, N)-module D muni d'une filtration. Un tel module est dit *admissible*, s'il est de dimension finie, si φ est inversible, si $t_H(D, \mathrm{Fil}) = t_N(D)$ et si $t_H(D', \mathrm{Fil}) \leqslant t_N(D')$ pour tout sous-E-(φ, N)-module D' de D muni de la filtration induite. Si (D, Fil) est un E-(φ, N)-module filtré admissible, on note $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil})$ le noyau de la flèche naturelle de $\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D)$ dans $\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil})$ induite par l'inclusion de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$.

$\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ est naturellement muni d'une structure de E-(φ, N)-module filtré, la filtration étant induite par celle de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$. Si V est une E-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, le E-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ hérite de la structure de E-(φ, N)-module filtré de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$. On a de plus $\dim_E \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \leqslant \dim_E V$ et on dit que V est *semi-stable* si $\dim_E \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = \dim_E V$.

On dispose du résultat suivant [**7, 13**] :

Théorème 2.1. — (i) *Si V est une E-représentation semi-stable de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est un E-(φ, N)-module filtré admissible et l'application naturelle de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E V$ est un isomorphisme commutant aux actions de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, φ, N et respectant les filtrations, et on a $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)) = V$.*

(ii) *Si (D, Fil) est un E-(φ, N)-module filtré admissible, alors $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil})$ est une représentation semi-stable de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, la suite*

$$0 \to \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil}) \to \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D) \to \mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}) \to 0$$

est exacte, l'application naturelle de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil})$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E D$ est un isomorphisme commutant aux actions de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, φ, N et respectant les filtrations, les poids de Hodge-Tate de $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil})$ sont les opposés des degrés de Fil, *et on a $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil})) = (D, \mathrm{Fil})$.*

(iii) *De plus, les équivalences de catégories $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}$ définies ci-dessus commutent aux produits tensoriels.*

3. La représentation $W_{\mathscr{L},i}$

3.1. E-(φ, N)-modules filtrés admissibles de dimension 2. — Soit $\alpha \in E$ vérifiant $2v_p(\alpha) \in \mathbf{N}$, et soit $i = 2v_p(\alpha) + 1$. Soit D_α le E-(φ, N)-module défini par

$$D_\alpha = E \cdot e_1 \oplus E \cdot e_2, \quad \varphi(e_1) = p\alpha e_1, \ \varphi(e_2) = \alpha e_2, \quad N e_1 = e_2, \ N e_2 = 0.$$

Si $\mathscr{L} \in E$, on note $\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}}$ la filtration sur D_α définie par

$$\mathrm{Fil}^j_{\mathscr{L}} D_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i, \\ E \cdot (e_1 + \mathscr{L} e_2) & \text{si } 0 < j \leqslant i, \\ D_\alpha & \text{si } j \leqslant 0. \end{cases}$$

Le E-(φ, N) module filtré $(D_\alpha, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$ est admissible et la représentation $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D_\alpha, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$ est une E-représentation semi-stable non cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de poids de Hodge-Tate 0 et $-i$. Réciproquement, toute E-représentation V semi-stable non cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de poids de Hodge-Tate 0 et $-i$, est isomorphe à $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D_\alpha, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$ pour un unique couple $(\alpha, \mathscr{L})$ avec $2v_p(\alpha) + 1 = i$; l'invariant $\mathscr{L}$ est *l'invariant de Fontaine-Mazur* de V.

3.2. Le E-(φ, N)-module filtré $(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$. — Soit $D = E \cdot f_1 \oplus E \cdot f_2 \oplus E \cdot f_3$ le (φ, N)-module défini par :

$$\varphi(f_1) = pf_1,\ \varphi(f_2) = f_2,\ \varphi(f_3) = p^{-1}f_3, \quad Nf_1 = 2f_2,\ Nf_2 = f_3,\ Nf_3 = 0.$$

Si $\mathscr{L} \in E$, soient

$$g_{\mathscr{L},1} = f_1 + 2\mathscr{L}f_2 + \mathscr{L}^2 f_3, \quad g_{\mathscr{L},2} = f_2 + \mathscr{L}f_3, \quad g_{\mathscr{L},3} = f_3,$$

et, si $i \in \mathbf{N} - \{0\}$, soit $\mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}$ la filtration sur D donnée par

$$\mathrm{Fil}^j_{\mathscr{L},i} D = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i, \\ E \cdot g_{\mathscr{L},1} & \text{si } 0 < j \leqslant i, \\ E \cdot g_{\mathscr{L},1} \oplus E \cdot g_{\mathscr{L},2} & \text{si } -i < j \leqslant 0, \\ D & \text{si } j \leqslant -i. \end{cases}$$

Le (φ, N)-module filtré $(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$ est admissible et on note $W_{\mathscr{L},i}$ la représentation $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$.

Un petit calcul montre que, si $2v_p(\alpha) + 1 = i$, alors $(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$ est le carré symétrique de $(D_\alpha, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$ tordu par $\det(D_\alpha, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})^{-1}$, et donc est le (φ, N)-module filtré des endomorphismes de trace nulle de $(D_\alpha, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$. On obtient donc le résultat suivant :

Proposition 3.1. — *Si V est une représentation semi-stable non cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de poids de Hodge-Tate 0 et $-i$, avec $i > 0$, alors* $\mathrm{End}^0(V) \cong W_{\mathscr{L},i}$.

Remarque 3.2. — Le E-(φ, N)-module filtré $(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$ est autodual, et il est facile de voir que tout E-(φ, N)-module filtré autodual, de dimension 3, avec $N \neq 0$, est isomorphe à $(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$ pour un unique couple $(i, \mathscr{L})$ de $(\mathbf{N} - \{0\}) \times E$.

3.3. Le module $\mathrm{Hom}(W_{\mathscr{L},i}, U_1)$

Proposition 3.3. — *On a $\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris},E} \otimes W_{\mathscr{L},i} = \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D)$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — C'est un résultat général sur les E-(φ, N)-modules filtrés admissible : si (D, Fil) est un tel module, l'application naturelle de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil})$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D$ est un isomorphisme commutant à φ et N (th. 2.1 (ii)) et donc

$$\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris},E} \otimes \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil}) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil}))^{\varphi=1, N=0} = (\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D)^{\varphi=1, N=0} = \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D).$$

Si $j = 1, 2, 3$, on note $\pi_j : \mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D \to \mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ l'application définie par

$$x = \pi_1(x)f_1 + \pi_2(x)f_2 + \pi_3(x)f_3.$$

Lemme 3.4. — *Si $x \in \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D) \subset \mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D$, alors*

$$\pi_3(x) \in U_2, \quad \pi_2(x) = -N\pi_3(x) \in U_1 \quad \text{et} \quad \pi_1(x) = \frac{1}{2}N^2\pi_3(x) \in U_0.$$

Démonstration. — C'est une simple traduction des conditions $\varphi(x) = x$ et $Nx = 0$.

Proposition 3.5. — *Si $i \in \mathbf{N}$, et si $j = 1, 2, 3$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, U_{3-j})$ est de dimension 1 sur E, et la restriction de π_j à $W_{\mathscr{L},i}$ en est une base.*

Démonstration. — $\oplus_{j=1}^3 \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, U_{3-j}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, \mathbf{B}_{\mathrm{st}}) = \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(W_{\mathscr{L},i}^*)$ est injective, et donc $\sum_{j=1}^3 \dim_E \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, U_{3-j}) \leqslant \dim_E W_{\mathscr{L},i}^* = 3$. Pour conclure, il suffit donc de prouver qu'aucun des π_i n'est identiquement nul sur $W_{\mathscr{L},i}$, ce qui suit du fait que l'application naturelle $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E W_{\mathscr{L},i} \to \mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E D$ est un isomorphisme d'après le (ii) du th. 2.1.

4. La représentation $W_{\mathscr{L},1}$ et sa cohomologie galoisienne

4.1. Éléments de théorie du corps de classes locale. — Si $\alpha \in \mathbf{Q}_p^*$, on note (α) la classe de α dans $H^1(\mathbf{Q}_p(1))$ fournie par la théorie de Kummer.

Si t est le $2i\pi$ p-adique de Fontaine, soit $v \in \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=p}$ tel que $\frac{v}{t} \in \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1}$ ait pour image $\frac{1}{t}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^0$. Alors v est bien déterminé à addition près d'un élément de la forme at, avec $a \in E$. Si $\alpha \in \mathbf{Q}_p^*$ est de valuation nulle (i.e. si $\alpha \in \mathbf{Z}_p^*$), alors $(\alpha) \in H^1(\mathbf{Q}_p(1))$ est la classe du cocycle $\sigma \mapsto (\sigma - 1)(\log \alpha \cdot v)$.

Soit u le $\log p$ p-adique de Fontaine. C'est un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ vérifiant

(i) $u \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^1$,

(ii) $\varphi(u) = pu$ et $Nu = -1$,

(iii) $\sigma(u) - u \in \mathbf{Q}_p t$ et la classe de $\sigma \mapsto \sigma(u) - u$ dans $H^1(\mathbf{Q}_p(1))$ est égale à (p).

Le E-espace vectoriel $H^1(E(1)) = E \otimes H^1(\mathbf{Q}_p(1))$ admet comme base les images des cocycles $\sigma \mapsto \sigma(u) - u$ et $\sigma \mapsto \sigma(v) - v$; on utilise cette base pour mettre $H^1(E(1))$ en bijection avec E^2 en envoyant le cocycle $\sigma \mapsto (\sigma - 1) \cdot (b_1 u + b_2 v)$ sur (b_1, b_2).

Le E-espace vectoriel $H^1(E)$ est aussi de dimension 2 ; il admet comme base les caractères ψ_1, ψ_2 de l'introduction. L'accouplement $H^1(\mathbf{Q}_p) \times H^1(\mathbf{Q}_p(1)) \to \mathbf{Q}_p$, défini via le cup-produit $H^1(\mathbf{Q}_p) \times H^1(\mathbf{Q}_p(1)) \to H^2(\mathbf{Q}_p(1))$, en utilisant l'isomorphisme $H^2(\mathbf{Q}_p(1)) \cong \mathbf{Q}_p$ de la théorie du corps de classes locale, induit par E-linéarité un accouplement $\langle\ ,\ \rangle : H^1(E) \times E^2 \to E$. Comme $\psi_1 \cup (\alpha) = -v_p(\alpha)$ et $\psi_2 \cup (\alpha) = \log_p \alpha$, si $\alpha \in \mathbf{Q}_p^*$, l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle$ est donné par la formule

$$\langle a_1\psi_1 + a_2\psi_2, (b_1, b_2)\rangle = -a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

4.2. La représentation $W_{\mathscr{L},1}$

Lemme 4.1. — *$W_{\mathscr{L},1}$ est le E-espace vectoriel engendré par v_1, v_2 et v_3, avec*

$$v_1 = tf_3, \quad v_2 = (u - \mathscr{L}v)f_3 - f_2 \quad \text{et} \quad v_3 = \frac{(u-\mathscr{L}v)^2}{2t}f_3 - \frac{u-\mathscr{L}v}{t}f_2 + \frac{1}{2t}f_1.$$

Démonstration. — L'inclusion $E\cdot v_1 \oplus E\cdot v_2 \oplus E\cdot v_3 \subset W_{\mathscr{L},1}$ se démontre en utilisant le fait que $\frac{u}{t} \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^0$ et $\frac{v-1}{t} \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^0$; on en déduit l'égalité pour des raisons de dimension.

Corollaire 4.2. — (i) *$W_{\mathscr{L},1}$ admet une filtration croissante par des sous-représentations $0 = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_3 = W_{\mathscr{L},1}$, avec $W_i = \oplus_{j\leqslant i} E\cdot v_j$.*

(ii) *$W_1 \cong E(1)$.*

(iii) *la représentation W_2 est une extension de E par $E(1)$ dont la classe dans $H^1(E(1)) \cong E^2$ est $(1,\mathscr{L})$.*

(iv) *Le quotient W' de $W_{\mathscr{L},1}$ par W_1 est isomorphe à $W_2(-1)$.*

Proposition 4.3. — *Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle sur $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à valeurs dans $W_{\mathscr{L},1}$ dont l'image dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$ par l'application $N\circ\pi_2$ est nulle. Alors il existe $c \in W_{\mathscr{L},1}$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in E$, uniques, tels que $\pi_2(c_\sigma) = \gamma_1\psi_1(\sigma) + \gamma_2\psi_2(\sigma) + (\sigma-1)\cdot\pi_2(c)$, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et on a $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$.*

Démonstration. — L'application $\pi_2 : W_{\mathscr{L},1} \to U_1$ envoie v_1 sur 0, v_2 sur -1 et v_3 sur $\frac{u-\mathscr{L}v}{t}$; elle se factorise donc à travers W' et l'image de $H^1(W_{\mathscr{L},1})$ dans $H^1(U_1)$ est donc incluse dans celle de $H^1(W')$. Maintenant, l'application $N : U_1 \to U_0$, composée avec π_2, induit la suite exacte $0 \to E \to W' \to E(-1) \to 0$ et, en passant à la cohomologie galoisienne, la suite exacte $0 \to H^1(E) \to H^1(W') \to H^1(E(-1)) \to 0$. Comme les extensions de E par $E(-1)$ ne sont pas de de Rham et donc, a fortiori, pas cristallines, l'application de $H^1(E(-1))$ dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E})$ induite par l'appartenance de t^{-1} à $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$, est injective. On en déduit que l'inclusion de E dans W' induit un isomorphisme de $H^1(E)$ sur $\ker(H^1(W') \xrightarrow{N} H^1(U_0))$. Ceci nous permet de montrer l'existence de c, γ_1 et γ_2 ainsi que l'unicité de γ_1 et γ_2.

Par ailleurs, la suite exacte $0 \to E(1) \to W_{\mathscr{L},1} \to W' \to 0$ induit, en passant à la cohomologie galoisienne, des applications de connexion $H^i(W') \to H^{i+1}(E(1))$. La restriction de ces applications de connexion au sous-groupe $H^i(E)$ de $H^i(W')$ est donnée par le cup-produit avec la classe δ de l'extension de E par $E(1)$ induite par $W_2 \subset W_{\mathscr{L},1}$. Comme l'image de $H^1(W_{\mathscr{L},1})$ dans $H^1(W')$ est le noyau de l'application de connexion $H^1(W') \to H^2(E(1))$, on voit que $a\psi_1 + b\psi_2 \in H^1(E) \subset H^1(W')$ est dans l'image de $H^1(W_{\mathscr{L},1})$ si et seulement si $(a\psi_1 + b\psi_2) \cup \delta = 0$. Finalement, en utilisant le fait que l'image de δ dans $H^1(E(1)) \cong E^2$ est $(1,\mathscr{L})$, et la formule ci-dessus pour le cup-produit, on en déduit le résultat.

5. Cohomologie galoisienne de $W_{\mathscr{L},i}$

Proposition 5.1. — *L'image de $H^1(W_{\mathscr{L},i})$ dans $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D))$ ne dépend pas de i.*

Démonstration. — On utilise la suite exacte (th. 2.1 (ii))

$$0 \to W_{\mathscr{L},i} \to \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D) \to \mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}) \to 0$$

pour se ramener à montrer que le noyau de l'application de $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D))$ dans $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}))$ ne dépend pas de i. Pour comparer ce noyau pour i quelconque et $i = 1$, introduisons le $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR},E}$-module $M = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D)/(\mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},i} \cap \mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},1})$. Comme

$$\mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},i}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D) = \mathbf{B}^{-i}_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{1,\mathscr{L}} \oplus \mathbf{B}^0_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{2,\mathscr{L}} \oplus \mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{3,\mathscr{L}},$$

on a

$$\mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},i}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D) \cap \mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},1}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D) = \mathbf{B}^{-1}_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{1,\mathscr{L}} \oplus \mathbf{B}^0_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{2,\mathscr{L}} \oplus \mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{3,\mathscr{L}};$$

on en déduit les suites exactes

$$0 \to (\mathbf{B}^1_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}) \cdot g_{3,\mathscr{L}} \to M \to \mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},1}) \to 0,$$
$$0 \to (\mathbf{B}^{-i}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^{-1}_{\mathrm{dR},E}) \cdot g_{1,\mathscr{L}} \to M \to \mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}) \to 0.$$

Par ailleurs, comme

$$H^0(\mathbf{B}^1_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}) = H^0(\mathbf{B}^{-i}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^{-1}_{\mathrm{dR},E}) = H^1(\mathbf{B}^1_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}) = H^1(\mathbf{B}^{-i}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^{-1}_{\mathrm{dR},E}) = 0,$$

les applications naturelles de $H^1(M)$ dans $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},1}))$ et $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}))$ sont des isomorphismes et donc les noyaux des applications de $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D))$ dans $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},1}))$ et $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}))$ coïncident tous les deux avec le noyau de l'application de $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D))$ dans $H^1(M)$. Ceci permet de conclure.

Proposition 5.2. — *Soit $w \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, U_1)$. Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle sur $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, à valeurs dans $W_{\mathscr{L},1}$, dont l'image dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$ par l'application $N \circ w$ est nulle. Alors il existe $c \in U_1$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in E$, uniques, tels que $w(c_\sigma) = \gamma_1\psi_1(\sigma) + \gamma_2\psi_2(\sigma) + \sigma(c) - c$, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et on a $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$.*

Démonstration. — L'existence de c, γ_1, γ_2 et l'unicité de γ_1, γ_2 sont des conséquences de la prop. 1.2. De plus, comme $\mathrm{Hom}_G(W_{\mathscr{L},i}, U_1)$ est un-E-espace vectoriel de dimension 1 engendré par π_2 d'après la prop. 3.5, on peut supposer que $w = \pi_2$, ce que nous ferons. La prop. 5.1 montre que l'image par π_2 de $H^1(W_{\mathscr{L},i})$ dans $H^1(U_1)$ ne dépend pas de i, ce qui permet d'utiliser la proposition 4.3 pour montrer que $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$, et conclure.

6. Démonstration du résultat principal

Passons à la démonstration du théorème 0.5. Comme il s'agit d'un énoncé portant sur les dérivées à l'ordre 1, il suffit de traiter le cas $S = E[z]/z^2$. On se retrouve dans la situation suivante :

(i) V est une $(E[z]/z^2)$-représentation de dimension 2 ;

(ii) la E-représentation $V_0 = V/zV$ est semi-stable, de poids de Hodge-Tate 0 et $-i$, avec $i > 0$, et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_0) \cong D_{\alpha_0,\mathscr{L}}$, avec $2v_p(\alpha_0) + 1 = i$;

(iii) il existe $a \in E$ tel que le $(E[z]/z^2)$-module $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E} \otimes_E V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \varphi=\alpha_0(1+az)}$ soit libre de rang 1.

Choisissons une base v_1, v_2 de V sur $E[z]/z^2$ et écrivons la matrice B_σ de $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dans cette base sous la forme $B_\sigma = (I + z(\delta_\sigma I + U_\sigma))A_\sigma$, avec $A_\sigma \in \mathbf{GL}_2(E)$, $\delta_\sigma \in E$ et $U_\sigma \in \mathbf{M}_2(E)$ de trace nulle. Si $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ désignent les images de v_1 et v_2 modulo z, alors A_σ est la matrice de σ dans la base $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ de V_0. Par ailleurs, on a

$$\log(\det B_\sigma) = \log(\det A_\sigma) + 2z\delta_\sigma$$

et donc $\sigma \mapsto \log(\det A_\sigma)$ et $\sigma \mapsto \delta_\sigma$ sont des caractères additifs de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et il existe [6] d_1, d_2 et $\delta_1, \delta_2 \in E$ tels que $\log(\det A_\sigma) = d_1\psi_1(\sigma) + d_2\psi_2(\sigma)$ et $\delta_\sigma = \delta_1\psi_1(\sigma) + \delta_2\psi_2(\sigma)$, quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Dans les notations du théorème 0.5, on a $\delta = d_1 + 2\delta_1 z$, $\kappa = d_2 + 2\delta_2 z$ et $\alpha = \alpha_0(1 + az)$, et on est ramené à démontrer la formule suivante :

Proposition 6.1. — $a = \mathscr{L}\delta_2 - \delta_1$.

Soit $\overline{e}_1 = x_1\overline{v}_1 + x_2\overline{v}_2$ engendrant $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_0)^{\varphi=p\alpha_0}$, et soit $\overline{e}_2 = N\overline{e}_1 = y_1\overline{v}_1 + y_2\overline{v}_2$. Ceci fait de $\overline{e}_2$ un générateur de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_0)^{\varphi=\alpha_0}$, et $\overline{e}_1 + \mathscr{L}\overline{e}_2 \in \mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E} \otimes_E V_0$ par définition de l'invariant $\mathscr{L}$. Comme $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ forment une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_0)$, la matrice $M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ est inversible dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$ et vérifie $M^{-1}A_\sigma\sigma(M) = I$ quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Soient $e_1 = x_1v_1 + x_2v_2$ et $e_2 = Ne_1 = y_1v_1 + y_2v_2$. Comme M est inversible, e_1, e_2 forment une base de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E V$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E S$. La matrice de σ dans cette base est alors

$$M^{-1}B_\sigma\sigma(M) = I + z(\delta_\sigma I + M^{-1}U_\sigma M).$$

Par ailleurs, un calcul brutal montre que, si l'on pose

$$U_\sigma = \begin{pmatrix} u_{1,\sigma} & u_{3,\sigma} \\ u_{2,\sigma} & -u_{1,\sigma} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c_\sigma = \frac{2u_{1,\sigma}x_1x_2 - u_{2,\sigma}x_1^2 + u_{3,\sigma}x_2^2}{2(x_1y_2 - x_2y_1)},$$

[6] On a d'ailleurs $d_2 = -i$.

alors

$$M^{-1}U_\sigma M = \begin{pmatrix} Nc_\sigma & N^2c_\sigma \\ -2c_\sigma & -Nc_\sigma \end{pmatrix}.$$

Comme $z^2 = 0$, le fait que $\sigma \mapsto M^{-1}B_\sigma\sigma(M)$ soit un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbf{GL}_2(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E S)$ implique que $\sigma \mapsto M^{-1}U_\sigma M$ est un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$, et que $\sigma \mapsto c_\sigma$ est un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$; la formule ci-dessus montre que ce 1-cocycle est en fait à valeurs dans U_2 et donc que le 1-cocycle $\sigma \mapsto Nc_\sigma - \delta_\sigma$ est à valeurs dans U_1.

Lemme 6.2. — *L'application naturelle $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0)$ est surjective et $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est égal à $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=\alpha_0(1+az)}$.*

Démonstration. — La multiplication par z induit la suite exacte suivante de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$-modules

$$0 \to V_0 \to V \to V_0 \to 0.$$

En tensorisant par $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ et en prenant les invariants sous $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on en déduit la suite exacte

$$0 \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0).$$

Or $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0)$ est de dimension 1 sur E, alors que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ contient $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=\alpha_0(1+az)}$ qui est, par hypothèse, de dimension 2 sur E ; cela permet de conclure.

Lemme 6.3. — *Les cocycles $\sigma \mapsto N^2c_\sigma$ et $\sigma \mapsto -\delta_\sigma + Nc_\sigma$ se trivialisent dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$.*

Démonstration. — D'après le lemme 6.2, il existe g dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ ayant pour image $\overline{e}_2$ dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0)$, et il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ tels que

$$g = e_2 + z(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2).$$

Comme

$$\sigma(e_1) = e_1 + z\big((\delta_\sigma + Nc_\sigma)\cdot e_1 - 2c_\sigma \cdot e_2\big) \quad \text{et} \quad \sigma(e_2) = e_2 + z\big(N^2c_\sigma \cdot e_1 + (\delta_\sigma - Nc_\sigma)\cdot e_2\big),$$

et comme $z^2 = 0$, on obtient, quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$,

$$\begin{aligned} 0 = \sigma(g) - g &= \sigma(e_2) - e_2 + z\big(\sigma(\lambda_1)\sigma(e_1) - \lambda_1 e_1 + \sigma(\lambda_2)\sigma(e_2) - \lambda_2 e_2\big) \\ &= z\Big(N^2c_\sigma \cdot e_1 + (\delta_\sigma - Nc_\sigma)\cdot e_2 + (\sigma(\lambda_1) - \lambda_1)\cdot e_1 + (\sigma(\lambda_2) - \lambda_2)\cdot e_2\Big), \end{aligned}$$

et donc $N^2c_\sigma = \sigma(-\lambda_1) - (-\lambda_1)$ et $Nc_\sigma - \delta_\sigma = \sigma(\lambda_2) - \lambda_2$. Ceci permet de conclure.

Corollaire 6.4. — *Il existe $\lambda \in U_1$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in E$ tels que, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on ait*

$$Nc_\sigma = \gamma_1\psi_1(\sigma) + \gamma_2\psi_2(\sigma) + \sigma(\lambda) - \lambda.$$

Démonstration. — Cela suit de la proposition 1.2.

La proposition 6.1 est alors une conséquence immédiate de la proposition suivante, ce qui permet de terminer la démonstration du théorème 0.5.

Proposition 6.5. — *On a les relations suivantes :*
(i) $\gamma_2 = \delta_2$;
(ii) $a = \gamma_1 - \delta_1$;
(iii) $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$.

Démonstration. — (i) On a

$$\sigma(\lambda_2) - \lambda_2 = Nc_\sigma - \delta_\sigma = (\gamma_1 - \delta_1)\psi_1(\sigma) + (\gamma_2 - \delta_2)\psi_2(\sigma) + \sigma(\lambda) - \lambda.$$

Soit $\omega \in W(\overline{\mathbf{F}}_p)$ vérifiant $\varphi(\omega) - \omega = 1$. Comme φ engendre topologiquement le groupe de Galois de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, et comme ψ_1 est normalisé par $\psi(\varphi) = 1$, on a $\sigma(\omega) - \omega = \psi_1(\sigma)$ et

$$(\gamma_2 - \delta_2)\psi_2(\sigma) = (\sigma - 1) \cdot (\lambda_2 - \lambda - (\gamma_1 - \delta_1)\omega),$$

quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Comme l'extension de $\mathbf{Q}_p$ par $\mathbf{Q}_p$ définie par ψ_2 n'est pas de Hodge-Tate, et donc pas semi-stable, on a $\gamma_2 - \delta_2 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda + (\gamma_1 - \delta_1)\omega + \mu$, avec $\mu \in E$.

(ii) Comme $g \in \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, et comme $Ne_1 = e_2$ et $Ne_2 = 0$, on a

$$0 = Ng = z(N\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_1 \cdot e_2 + N\lambda_2 \cdot e_2).$$

Ceci implique en particulier $\lambda_1 = -N\lambda_2 = -N\lambda \in U_0$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} &\varphi(\lambda_1) = p^{-1}\lambda_1, \quad \varphi(\lambda_2) = \lambda_2 + (\gamma_1 - \delta_1), \\ \varphi(g) =&\varphi(e_2 + z(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)) = \alpha_0\big(e_2 + z(\lambda_1 e_1 + (\lambda_2 + (\gamma_1 - \delta_1))e_2\big) \\ =&\alpha_0(1 + (\gamma_1 - \delta_1)z)g, \end{aligned}$$

et donc $a = \gamma_1 - \delta_1$, d'après le lemme 6.2.

(iii) Si $\overline{v}_1^*, \overline{v}_2^*$ est la base de V_0^* duale de $\overline{v}_1, \overline{v}_2$, l'application E-linéaire de V_0^* dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$, qui envoie $\overline{v}_1^*$ sur x_1 et $\overline{v}_2^*$ sur x_2 commute à l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. La formule explicite (cf. ci-avant) pour c_σ montre donc que le cocycle $\sigma \mapsto Nc_\sigma$ est l'image dans U_1 d'un cocycle à valeurs dans $(\mathrm{Sym}^2 V_0^*) \otimes (\det V_0^*)^{-1} \cong W_{\mathscr{L},i}$. Par ailleurs, le cocycle $\sigma \mapsto N^2 c_\sigma$ se trivialisant dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ d'après le lemme 6.3, la proposition 5.2 permet de montrer que $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$, ce qui permet de conclure.

Références

[1] S. Bloch & K. Kato – L-functions and Tamagawa numbers of motives, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser, 1990, p. 333–400.

[2] C. Breuil – Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée, ce volume.

[3] R. F. COLEMAN – A p-adic Shimura isomorphism and p-adic periods of modular forms, in *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., 1994, p. 21–51.

[4] ———, p-adic Banach spaces and families of modular forms, *Invent. Math.* **127** (1997), p. 417–479.

[5] R. F. COLEMAN & A. IOVITA – Hidden structures on semi-stable curves, ce volume.

[6] R. F. COLEMAN & B. MAZUR – The eigencurve, in *Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 254, Cambridge Univ. Press, 1998, p. 1–113.

[7] P. COLMEZ – Espaces de Banach de dimension finie, *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), p. 331–439.

[8] ———, La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique, *Astérisque* **294** (2004), p. 251–319.

[9] ———, Zéros supplémentaires de fonctions L p-adiques de formes modulaires, in *Algebra and number theory*, Hindustan Book Agency, 2005, p. 193–210.

[10] ———, Série principale unitaire pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations triangulines de dimension 2, prépublication `http://people.math.jussieu.fr/~colmez/triangulines.pdf`, 2007.

[11] ———, Représentations triangulines de dimension 2, *Astérisque* **319** (2008), p. 213–258.

[12] ———, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Astérisque* **330** (2010), p. 213–262.

[13] P. COLMEZ & J.-M. FONTAINE – Construction des représentations p-adiques semi-stables, *Invent. Math.* **140** (2000), p. 1–43.

[14] J.-M. FONTAINE – Exposé à Orsay, 1998.

[15] R. GREENBERG & G. STEVENS – p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms, *Invent. Math.* **111** (1993), p. 407–447.

[16] K. KATO – Generalized explicit reciprocity laws, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Pusan)* **1** (1999), p. 57–126.

[17] ———, p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, *Astérisque* **295** (2004), p. 117–290.

[18] M. KISIN – Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, *Invent. Math.* **153** (2003), p. 373–454.

[19] B. MAZUR – On monodromy invariants occurring in global arithmetic, and Fontaine's theory, in *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., 1994, p. 1–20.

[20] B. MAZUR, J. T. TATE & J. TEITELBAUM – On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent. Math.* **84** (1986), p. 1–48.

[21] B. PERRIN-RIOU – Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, *Invent. Math.* **115** (1994), p. 81–161.

[22] ———, Quelques remarques sur la théorie d'Iwasawa des courbes elliptiques, in *Number theory for the millennium, III (Urbana, IL, 2000)*, A K Peters, 2002, p. 119–147.

[23] T. SAITO – Modular forms and p-adic Hodge theory, *Invent. Math.* **129** (1997), p. 607–620.

[24] S. SEN – Continuous cohomology and p-adic Galois representations, *Invent. Math.* **62** (1980/81), p. 89–116.

[25] ———, An infinite-dimensional Hodge-Tate theory, *Bull. Soc. Math. France* **121** (1993), p. 13–34.

[26] G. STEVENS – Coleman's $\mathscr{L}$-invariant and families of modular forms, ce volume.

[27] J. T. TATE – p-divisible groups, in *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, Springer, 1967, p. 158–183.

P. COLMEZ, CNRS, Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : colmez@math.jussieu.fr