Astérisque

PIERRE COLMEZ

Introduction

Astérisque, tome 330 (2010), p. XIX-XXIII

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__330__R19_0>

INTRODUCTION

Ce volume est consacré aux applications de la théorie des (φ,Γ)-modules à celle des représentations p-adiques de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ en vue de l'établissement d'une correspondance de Langlands locale p-adique entre ces représentations et les représentations de dimension 2 du groupe de Galois absolu $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$. Il s'est écoulé un temps non négligeable [(1)] entre l'obtention des premiers résultats et la parution de ce volume, et cette petite introduction vise à expliquer ce qui est advenu des articles initiaux et les étapes de la construction de la correspondance de Langlands locale p-adique via la théorie des (φ,Γ)-modules. Nous renvoyons aux articles pour des introductions plus détaillées et à [**9**] pour une présentation des travaux antérieurs à l'introduction des (φ,Γ)-modules.

Fonctions L p-adiques et représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. — Fontaine ayant prouvé [**19**] que les représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sont en équivalence de catégories avec les (φ,Γ)-modules étales, il était assez naturel de penser qu'on devrait pouvoir lire la représentation $\mathbf{\Pi}(V)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, attachée à une représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ par une hypothétique correspondance de Langlands locale p-adique, sur le (φ,Γ)-module $\mathbf{D}(V)$ lui correspondant par l'équivalence de catégories de Fontaine. Ce fantasme a pris corps à la réception d'un article [**10**] où Breuil prouvait, par voie globale, que certaines des représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ qu'il avait définies [**8**] en vue d'une correspondance pour les représentations semi-stables de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, avaient les propriétés qu'il conjecturait et, en particulier, n'étaient pas réduites à 0. Le résultat de Breuil suppose que la représentation semi-stable V que l'on considère est la restriction à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ d'une représentation attachée à une forme modulaire f, primitive de niveau Np, avec $(N,p)=1$. Dans ce cas, on sait [**24**] attacher à f une fonction L p-adique (en utilisant les symboles modulaires), ce qui nous fournit une distribution μ_f sur $\mathbf{Q}_p$, vecteur propre pour l'action de $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ agissant par $\int_{\mathbf{Q}_p}\phi\ \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mu_f=\int_{\mathbf{Q}_p}\phi(px)\,\mu_f$, et Breuil a démontré que μ_f était naturellement un élément du dual topologique $\mathbf{\Pi}(V)^*$

(1) Ce délai, dont je m'excuse, est largement imputable au gigantisme imprévu de l'article [7] de ce volume.

de $\mathbf{\Pi}(V)$. Or on dispose d'une autre construction de μ_f en partant du système d'Euler de Kato [**22**] et en utilisant la machine de Perrin-Riou [**13, 25, 26**] que l'on peut voir comme un facteur local en p de la fonction L p-adique. En traduisant [**14**] cette machine de Perrin-Riou dans le langage des (φ, Γ)-modules grâce à un résultat de Fontaine [**12**] selon lequel le module $H^1_{\mathrm{Iw}}(V)$ dans lequel vit le système d'Euler de Kato est naturellement isomorphe au sous-module $\mathbf{D}(V)^{\psi=1}$ (où ψ est un inverse à gauche de φ) du (φ, Γ)-module $\mathbf{D}(V)$ correspondant à V, on arrive à la conclusion que $\mathbf{D}(V)^{\psi=1}$ fournit des éléments non nuls de $\mathbf{\Pi}(V)^*$ fixes par $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, ce qui est un énoncé purement local susceptible d'être démontré localement et généralisé. Les résultats de ce volume sont le fruit de cette observation, et ont été obtenus en deux temps : l'étude de la série principale (2004 et début 2005) et la correspondance générale (2005-2008).

La série principale. — L'étude du (φ, Γ)-module associé à une représentation semi-stable non cristalline V a permis [**17**] de démontrer (janvier-mars 2004) les propriétés conjecturales de la représentation $\mathbf{\Pi}(V)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ que Breuil [**8**] lui avait attachée. Ce faisant, on obtient un isomorphisme $\mathbf{\Pi}(V)^* \cong (\check{\mathbf{D}}(V)^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ de représentations du sous-groupe mirabolique $P(\mathbf{Q}_p)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, où $(\check{\mathbf{D}}(V)^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ est un module construit à partir du (φ, Γ)-module $\mathbf{D}(V)$ attaché à V en utilisant l'opérateur ψ mentionné ci-dessus.

Ces résultats ont été généralisés sur le champ par Berger et Breuil [**3, 5**] au cas où V est cristalline qui a pour particularité de voir apparaître des isomorphismes entre représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, ce qui joue un grand rôle dans les démonstrations.

Une traduction des résultats de Berger et Breuil en termes de caractères de $\mathbf{Q}_p^*$ au lieu de valeurs propres de frobenius a conduit (juillet 2004-mars 2005) à une extension de ces résultats [**16**] au cas où $\mathbf{\Pi}(V)$ est de la série principale ; la principale innovation par rapport aux cas précédents a résidé en la définition du concept de représentation trianguline de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ pour décrire les représentations galoisiennes associées aux représentations de la série principale via la correspondance de Langlands locale p-adique.

Berger et Breuil [**4**] (dans un cas partiel) et Berger (dans le cas général, cf. [**6**] du présent volume) ont démontré que la correspondance ainsi définie pour la série principale était compatible avec la correspondance modulo p définie par Breuil [**6, 7**].

Les foncteurs $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ et $V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$. — L'isomorphisme entre $\mathbf{\Pi}(V)^*$ et $(\check{\mathbf{D}}(V)^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ dans les cas ci-dessus, amène naturellement à se demander s'il est possible de reconstruire le (φ, Γ)-module $\mathbf{D}(V)$ à partir du $P(\mathbf{Q}_p)$-module topologique $(\check{\mathbf{D}}(V)^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$. La réponse est « oui » et fournit un foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$ associant un (φ, Γ)-module étale (et donc aussi une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$) à n'importe quelle représentation p-adique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (pas seulement celle de la série principale).

Kisin a remarqué, peu de temps après la conférence de Montréal de septembre 2005 où l'existence de ce foncteur avait été annoncée, qu'il suffirait de vérifier une injectivité au niveau des Ext^1 pour en déduire, par prolongement analytique, en utilisant les résultats pour la série principale, une correspondance $V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$ associant une représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ à n'importe quelle représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Ce résultat d'injectivité a été rapidement démontré, ce qui a conduit à l'article [**15**].

L'utilisation du prolongement analytique pour la définition de la correspondance rend l'étude de ses propriétés fines quasi impossible, ce qui a forcé une construction directe (reposant sur des formules pas très élégantes) de la correspondance $V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$. En utilisant une grande partie [**1, 2, 11, 13, 19, 23**] du programme de Fontaine de classification des représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et les travaux de fondement de Schneider et Teitelbaum [**27, 28**], on peut alors étudier les vecteurs localement algébriques de $\mathbf{\Pi}(V)$. Cela permet de prouver que la correspondance de Langlands locale p-adique encode la correspondance classique [**20, 21**], confirmant l'un des espoirs à l'origine des travaux de Breuil sur le programme de Langlands p-adique.

Contenu du volume. — Donnons maintenant une brève description des articles du volume.

[1] M.-F. Vignéras, *ℓ-adic Banach representations of reductive p-adic groups when $\ell \neq p$.*

Version développée d'une lettre à Breuil banachisant la correspondance ℓ-adique classique.

[2] P. Colmez, *Fonctions d'une variable p-adique.*

Résumé compact, avec démonstrations, de l'analyse fonctionnelle p-adique utilisée dans la correspondance locale p-adique pour la série principale [4] et [5].

[3] P. Colmez, *(φ,Γ)-modules et représentations du mirabolique de* $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Consacré à l'étude du $P(\mathbf{Q}_p)$-module $(D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ qui joue un rôle fondamental dans les articles [4], [5] (où il est noté $(\varprojlim_{\psi} D)_b$), [6] et [7].

[4] L. Berger et C. Breuil, *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de* $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Établit la correspondance pour les représentations devenant cristallines sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$.

[5] P. Colmez, *La série principale unitaire de* $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Consacré au reste de la série principale.

[6] L. Berger, *Représentations modulaires de* $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *et représentations galoisiennes de dimension 2.*

Établit une compatibilité avec une correspondance modulo p pour la série principale.

[7] P. Colmez, *Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ,Γ)-modules.*

Construit la représentation $\mathbf{\Pi}(V)$ attachée à une représentation V de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ allant dans l'autre sens, et étudie vecteurs localement analytiques et localement algébriques de $\mathbf{\Pi}(V)$.

[8] M. Kisin, *Deformations of $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ and $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ representations.*

Explique comment construire la correspondance $V \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ à partir du foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$.

[9] G. Böckle, *Deformation rings for some mod 3 Galois representations of the absolute Galois group of $\mathbf{Q}_3$.*

Calcule certains espaces de déformations galoisiens, ce qui permet de supprimer quelques hypothèses de [7] et [8].

Les articles initiaux [**3, 5, 15, 16, 17**] ont été découpés en morceaux et ont vu leurs résultats renforcés par ceux du présent volume. Ceux de [**3, 5**] sont inclus dans l'article [4] du volume et ceux de [**15**] dans l'article [7]. L'article [5] du volume regroupe des bouts de [**17**] et [**16**] ; le reste de ces articles a donné naissance aux articles [2] et [3] de ce volume, ainsi qu'à [**18**].

Références

[1] L. Berger – Représentations p-adiques et équations différentielles, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 219–284.

[2] ———, Équations différentielles p-adiques et (ϕ, N)-modules filtrés, *Astérisque* **319** (2008), p. 13–38.

[3] L. Berger & C. Breuil – Représentations cristallines irréductibles de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, prépublication arXiv:math.NT/0410053.

[4] ———, Sur la réduction des représentations cristallines de dimension 2 en poids moyen, prépublication arXiv:math.NT/0504388.

[5] ———, Towards a p-adic Langlands programme, prépublication arXiv:math.NT/0408404.

[6] C. Breuil – Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. I, *Compositio Math.* **138** (2003), p. 165–188.

[7] ———, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. II, *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), p. 23–58.

[8] ———, Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), p. 559–610.

[9] ———, Introduction générale, *Astérisque* **319** (2008), p. 1–12.

[10] ———, Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée, *Astérisque* **331** (2010), p. 65–115.

[11] F. Cherbonnier & P. Colmez – Représentations p-adiques surconvergentes, *Invent. Math.* **133** (1998), p. 581–611.

[12] ———, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), p. 241–268.

[13] P. Colmez – Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, *Ann. of Math.* **148** (1998), p. 485–571.

[14] ———, La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique, Séminaire Bourbaki, vol. 2002/03, exposé n° 919, *Astérisque* **294** (2004), p. 251–319.

[15] ———, Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, prépublication (version provisoire et partielle) `http://people.math.jussieu.fr/~colmez/unicite.pdf`.

[16] ———, Série principale unitaire pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations trianguline de dimension 2, prépublication `http://people.math.jussieu.fr/~colmez/triangulines.pdf`.

[17] ———, Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, prépublication `http://people.math.jussieu.fr/~colmez/sst.pdf`.

[18] ———, Représentations triangulines de dimension 2, *Astérisque* **319** (2008), p. 213–258.

[19] J.-M. Fontaine – Représentations p-adiques des corps locaux. I, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 249–309.

[20] M. Harris & R. Taylor – *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Math. Studies, vol. 151, Princeton Univ. Press, 2001.

[21] G. Henniart – Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $\mathrm{GL}(n)$ sur un corps p-adique, *Invent. Math.* **139** (2000), p. 439–455.

[22] K. Kato – p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, *Astérisque* **295** (2004), p. 117–290.

[23] K. S. Kedlaya – A p-adic local monodromy theorem, *Ann. of Math.* **160** (2004), p. 93–184.

[24] B. Mazur, J. Tate & J. Teitelbaum – On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent. Math.* **84** (1986), p. 1–48.

[25] B. Perrin-Riou – Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, *Invent. Math.* **115** (1994), p. 81–161.

[26] ———, Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques, *Astérisque* **229** (1995).

[27] P. Schneider & J. Teitelbaum – $U(\mathfrak{g})$-finite locally analytic representations, *Represent. Theory* **5** (2001), p. 111–128.

[28] ———, Algebras of p-adic distributions and admissible representations, *Invent. Math.* **153** (2003), p. 145–196.

P. Colmez, C.N.R.S., Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France • École Polytechnique, C.M.L.S., 91128 Palaiseau Cedex, France
E-mail : `colmez@math.jussieu.fr`