Astérisque

PIERRE COLMEZ

(φ,Γ)-modules et représentations du mirabolique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Astérisque, tome 330 (2010), p. 61-153

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__330__61_0>

Astérisque
330, 2010, p. 61–153

(φ,Γ)-MODULES ET REPRÉSENTATIONS DU MIRABOLIQUE DE $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

par

Pierre Colmez

Résumé. — On construit des foncteurs $D \mapsto D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$, de la catégorie des (φ,Γ)-modules étales dans celle des représentations du mirabolique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Dans le cas du (φ,Γ)-module trivial, le module $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ s'interprète naturellement comme l'espace des mesures bornées sur $\mathbf{Q}_p$. En traduisant, en termes de (φ,Γ)-modules, les opérations élémentaires sur les mesures (multiplication par une fonction continue, image directe par un difféomorphisme local), on munit le module $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ d'opérations analytiques. Toutes ces constructions jouent un grand rôle dans l'établissement de la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Enfin, on démontre une loi de réciprocité explicite qui généralise celle de Perrin-Riou et intervient dans l'exploration des liens entre les correspondances de Langlands locales p-adique et classique (pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$).

***Abstract* (((φ,Γ)-modules and representations of the mirabolic of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$).** — This paper is devoted to the construction of functors $D \mapsto D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ and $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ from the category of étale (φ,Γ)-modules to that of representations of the mirabolic subgroup of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. If D is the trivial (φ,Γ)-module, $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ is naturally isomorphic to the space of bounded measures on $\mathbf{Q}_p$. Translating in terms of (φ,Γ)-modules the usual operations on measures (multiplication by a continuous function, pushforward by a local diffeomorphism) endow $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ with analytic operations. All these constructions play an important rôle in the definition of the p-adic local Langlands correspondence for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Finally, we prove an explicit reciprocity law generalizing that of Perrin-Riou, which is used in the comparison between the classical and p-adic local Langlands correspondences (for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$).

Introduction

Notations générales. — On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$, et on note $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ de $\mathbf{Q}_p$. On note $\chi : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique ; il induit un isomorphisme de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathbf{Z}_p^*$. Si $a \in \mathbf{Z}_p^*$,

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11S**.
Mots clefs. — (φ,Γ)-modules, loi de réciprocité.

on note $\sigma_a \in \Gamma$ l'élément défini par $\chi(\sigma_a) = a$. On note $\mathscr{H}$ le noyau de χ et $\mathscr{H}'$ le groupe de Galois absolu de l'extension abélienne maximale de $\mathbf{Q}_p$ (on a $\mathscr{H}' \subset \mathscr{H}$). Enfin, soit $\Gamma^{\mathrm{nr}} = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}/\mathbf{Q}_p)$. Alors $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathscr{H}'$ est l'abélianisé $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, les groupes Γ et Γ^{nr} s'identifient aux sous-groupes de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ fixant $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ et $\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$ respectivement, et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}} = \Gamma \times \Gamma^{\mathrm{nr}}$.

On fixe [1] aussi une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$, et on note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ l'anneau des séries de Laurent $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$, à coefficients dans $\mathscr{O}_L$ et vérifiant $\lim_{k\to-\infty} a_k = 0$. On note $k_{\mathscr{E}} = k_L((T))$ le corps résiduel de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}[\frac{1}{p}]$ son corps des fractions. Enfin, on note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ le sous-anneau $\mathscr{O}_L[[T]]$ de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et $k_{\mathscr{E}}^+ = k_L[[T]]$ l'anneau des entiers de $k_{\mathscr{E}}$, et on pose $\mathscr{E}^+ = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+[\frac{1}{p}]$.

On munit $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, $k_{\mathscr{E}}$, $k_{\mathscr{E}}^+$ et $\mathscr{E}$ d'actions $\mathscr{O}_L$-linéaires continues de Γ et du frobenius φ, respectant les structures d'anneaux, en envoyant T sur $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$ et $\sigma_a(T) = (1+T)^a - 1$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$. Ces actions commutent entre elles.

On rappelle que :

– la *transformée d'Amice* $\mu \mapsto A_\mu = \int_{\mathbf{Z}_p}(1+T)^x\mu$ induit un isomorphisme $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L) \cong \mathscr{E}^+$ où $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L)$ est l'espace des L-mesures sur $\mathbf{Z}_p$ (i.e. le dual de l'espace $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ des fonctions continues sur $\mathbf{Z}_p$).

– l'application $f \mapsto \phi_f$ induit un isomorphisme $\mathscr{E}/\mathscr{E}^+ \cong \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, où $\phi_f(x)$ est, si $x \in \mathbf{Z}_p$, le résidu en 0 de la forme différentielle $(1+T)^x f(T)\frac{dT}{1+T}$,

Cadre général. — On dispose, grâce à Fontaine [**17**], d'une équivalence de catégories entre les (φ, Γ)-modules étales et les représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Dans cet article, on construit un certain nombre de foncteurs associant à un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ ou sur $\mathscr{E}$ des objets de nature diverse. En vue de la correspondance de Langlands locale p-adique, les foncteurs les plus importants sont les foncteurs $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ (pour un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$) et $D \mapsto (D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ (pour un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$) associant à un (φ, Γ)-module étale une représentation du mirabolique $P(\mathbf{Q}_p) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),\ a \in \mathbf{Q}_p^*,\ b \in \mathbf{Q}_p\right\}$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Si V est une L-représentation irréductible de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et si D et Π sont respectivement le (φ, Γ)-module et la représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ qui lui sont associés, alors $(\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$, où $\check{D}$ est le dual de Tate de D, est naturellement isomorphe, en tant que représentation de $P(\mathbf{Q}_p)$, au dual de Π. Les th. 0.4 et 0.6 ci-dessous, dont des cas particuliers peuvent se trouver dans [**3, 4, 12**] permettent respectivement de montrer que Π est irréductible et que la correspondance $V \mapsto \Pi$ est injective.

Les foncteurs $D \mapsto D^\natural$ et $D \mapsto D^\sharp$. — La construction du foncteur $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et son étude passent par l'introduction d'un certain nombre de foncteurs intermédiaires

[1] On se permet parfois de remplacer L par une extension finie ; L est donc variablement fixe...

qui ont leur intérêt propre. La plupart des résultats de ce paragraphe étaient connus de Fontaine [(2)] ([**18**], non rédigé).

Construction de sous-modules d'un (φ,Γ)*-module.* — Un (φ,Γ)-module étale est muni d'un opérateur ψ (dans la théorie des équations différentielles p-adiques, cet opérateur est « le ψ de Dwork »), qui est un inverse à gauche de φ et commute à l'action de Γ. Cet opérateur joue un grand rôle dans l'étude [**20, 21**], via les (φ,Γ)-modules, de la cohomologie galoisienne des représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$; en particulier, le module $D^{\psi=1}$ est, d'après un résultat de Fontaine (non publié mais voir [**7**]), naturellement isomorphe au module d'Iwasawa intervenant dans la construction des fonctions L p-adiques à la Perrin-Riou.

Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, on définit ses sous-$\mathscr{O}_L$-modules suivants :

- $D^+ = \{z\in D,\ (\varphi^n(z))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $D\}$,
- $D^{++} = \{z\in D,\ \varphi^n(z)\to 0,$ quand $n\to+\infty\}$,
- D^{nr} l'intersection des $\varphi^n(D)$, pour $n\in\mathbf{N}$,
- $D^\natural$ le plus petit sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module compact de D stable par ψ et engendrant D,
- $D^\sharp$ le plus grand sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module compact de D stable par ψ, sur lequel ψ est surjectif.

Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$, on définit les L-espaces vectoriels D^+, D^{++} et D^{nr} comme ci-dessus, et pour définir $D^\natural$ et $D^\sharp$, on remplace « sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module compact » par « sous-$\mathscr{E}^+$-module localement compact », ce qui revient à choisir un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau Δ de D stable par φ et Γ et à poser $D^\sharp = L\otimes_{\mathscr{O}_L}\Delta^\sharp$ et $D^\natural = L\otimes_{\mathscr{O}_L}\Delta^\natural$. (On a aussi $D^+ = L\otimes_{\mathscr{O}_L}\Delta^+$, $D^{++} = L\otimes_{\mathscr{O}_L}\Delta^{++}$ et $D^{\mathrm{nr}} = L\otimes_{\mathscr{O}_L}\Delta^{\mathrm{nr}}$.)

Le module trivial. — Si $D=\mathscr{E}$, on a $D^+ = D^\natural = \mathscr{E}^+$, $D^{++} = T\mathscr{E}^+$, $D^{\mathrm{nr}} = L$ et $D^\sharp = T^{-1}\mathscr{E}^+$. Comme $\mathscr{E}^+$ et $\mathscr{E}/\mathscr{E}^+$ s'identifient respectivement aux espaces $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p,L)$ des mesures sur $\mathbf{Z}_p$ et $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p,L)$ des fonctions continues sur $\mathbf{Z}_p$, on voit que D^+ et $D/D^\natural$ sont en dualité dans le cas du module trivial.

Principales propriétés. — L'opérateur φ a tendance à augmenter les dénominateurs en T (sur $k_{\mathscr{E}}$, il les multiplie par p puisque $\varphi(T) = T^p$ modulo p), et son inverse à gauche ψ a tendance à les diminuer, ce qui explique pas mal des propriétés des modules définis ci-dessus.

– On a les inclusions $D^{++}\subset D^+\subset D^\natural\subset D^\sharp$.

– On a $D^+ = D^{\mathrm{nr}}\oplus D^{++}$. Par ailleurs, si V est la représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ associée à D via l'équivalence de catégories de Fontaine, alors

$$D^{\mathrm{nr}} = (W(\overline{\mathbf{F}}_p)\otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}} = (W(\overline{\mathbf{F}}_p)\otimes_{\mathbf{Z}_p} V^{\mathscr{H}'})^{\Gamma^{\mathrm{nr}}}.$$

(2) Je lui dois en particulier l'énoncé du (i) du th. 0.1.

On en déduit que D^{nr} est petit[3] : si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors $\dim_{k_L}(k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} D^{\mathrm{nr}}) \leq \dim_{k_{\mathscr{E}}}(k_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} D)$, et si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{E}$, alors $\dim_L D^{\mathrm{nr}} \leq \dim_{\mathscr{E}} D$.

– Si D est de torsion sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors D^{++}, D^{+}, $D^{\natural}$ et $D^{\sharp}$ sont ouverts dans D. Par contre, si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, sans torsion, ou sur $\mathscr{E}$, alors D^{++} et D^{+} sont, en général, nuls[4], tandis que $D^{\natural}$ et $D^{\sharp}$ sont assez gros pour engendrer D.

– Comme on le voit sur l'exemple $D = \mathscr{E}$, un élément de $D^{\sharp}$ a peu de dénominateurs en T ; c'est dû au fait que ψ diminue les dénominateurs en T. Une des propriétés fondamentales de $D^{\sharp}$ est que l'action de ψ sur $D/D^{\sharp}$ est topologiquement nilpotente ; autrement dit, si D est de torsion, et si $x \in D$, alors $\psi^n(x) \in D^{\sharp}$, pour tout n assez grand. On voit aussi, sur cet exemple, que $D^{\sharp}/D^{\natural}$ est relativement petit, ce qui s'avère extrêmement précieux pour beaucoup de questions, le module le plus intéressant étant $D^{\natural}$, et celui le plus facile à manier étant $D^{\sharp}$ grâce à la propriété ci-dessus.

– Les modules ci-dessus sont tous stables par Γ. Les foncteurs qu'ils définissent n'ont pas de très bonnes propriétés d'exactitude. Le seul résultat non immédiat sur la définition est la surjectivité des applications $D_1^{\sharp} \to D_2^{\sharp}$ et $D_1^{\natural} \to D_2^{\natural}$ si $D_1 \to D_2$ est un morphisme surjectif de (φ,Γ)-modules.

Dualité. — Si D est un (φ,Γ)-module, on note $\check{D}$ son dual de Tate ; c'est un (φ,Γ)-module qui, en tant que $\mathscr{O}_L$-module, est naturellement isomorphe au dual topologique de D. L'opérateur ψ sur $\check{D}$ est alors l'adjoint de φ sur D, ce qui est à la base de la définition [**21**], en termes de (φ,Γ)-modules, de la dualité locale pour la cohomologie galoisienne. Le dual de Tate de $\check{D}$ est naturellement isomorphe à D.

Théorème 0.1. — *Soit D un (φ,Γ)-module de torsion.*

(i) *D^{+} et $\check{D}^{\natural}$ sont exactement orthogonaux ainsi que D^{++} et $\check{D}^{\sharp}$.*

(ii) *$\check{D}^{\sharp}$, $D^{\natural}$ et $\check{D}^{\sharp}/\check{D}^{\natural}$ sont les duaux respectifs de D/D^{++}, D/D^{+} et D^{nr}.*

Ce résultat ne s'étend pas aux (φ,Γ)-modules qui ne sont pas de torsion, mais on a quand même le résultat suivant dont on déduit que $D^{\sharp}/D^{\natural}$ est toujours assez petit (et même en général nul, si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{E}$).

Corollaire 0.2. — (i) *Si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{E}$, alors $\check{D}^{\sharp}/\check{D}^{\natural}$ est le dual de D^{nr}.*

(ii) *Si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors $\check{D}^{\sharp}/\check{D}^{\natural}$ est le dual de $((\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)\otimes D)^{\mathrm{nr}}$.*

---

(3) Si D est irréductible, de dimension ≥ 2 sur $\mathscr{E}$, alors $V^{\mathscr{H}'} = 0$ et D^{nr} est plus que petit : il est nul !

(4) Si D^{+} engendre D, on dit que D *est de hauteur finie* (notion introduite dans [**17**], et étudiée dans [**2, 9, 26**] ; voir en particulier le th. D de [**2**].

Construction de représentations du mirabolique. — Soit P le sous-groupe mirabolique de $\mathbf{GL}_2$. On a donc $P(\mathbf{Q}_p) = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $P(\mathbf{Z}_p) = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Généralités. — Soit M un $\mathscr{O}_L$-module muni d'une action de $P(\mathbf{Z}_p)$ et d'un opérateur surjectif ψ commutant à $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et vérifiant $\psi(\left(\begin{smallmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \psi(z)$, pour tous $z \in M$ et $b \in \mathbf{Z}_p$. Notons $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ l'ensemble des suites [5] $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de M, telles que $\psi(x^{(n+1)}) = x^{(n)}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. On montre alors facilement que les formules suivantes définissent une action de $P(\mathbf{Q}_p)$ sur $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$:

(a) si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, alors $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot (x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} = (y^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, avec $y^{(n)} = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$;

(b) si $k \in \mathbf{Z}$, alors $\left(\begin{smallmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot (x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} = (y^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, avec $y^{(n)} = x^{(n+k)}$, pour tout $n \geq -k$;

(c) si $b \in \mathbf{Q}_p$, alors $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot (x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} = (y^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, avec $y^{(n)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x^{(n)}$, pour tout $n \geq -v_p(b)$.

Si M est un L-espace vectoriel muni d'un $\mathscr{O}_L$-réseau M_0 stable par $P(\mathbf{Z}_p)$ et ψ, on note $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ le sous-L-espace vectoriel $L \otimes_{\mathscr{O}_L} (M_0 \boxtimes \mathbf{Q}_p)$ de $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

Supposons que M est muni d'une action du semi-groupe $P^+ = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p - \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et pas seulement de $P(\mathbf{Z}_p)$, telle que ψ soit un inverse à gauche de $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et que les opérateurs $\mathrm{Res}_{i+p\mathbf{Z}_p} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi \circ \psi \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, pour $i \in \{0, \dots, p-1\}$, qui sont des projecteurs, soient orthogonaux deux à deux et que leur somme soit l'identité. Alors on peut définir, pour tout ouvert compact U de $\mathbf{Q}_p$, un sous-module $M \boxtimes U$ de $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et une application *de restriction à* U qui est un projecteur $\mathrm{Res}_U : M \boxtimes \mathbf{Q}_p \to M \boxtimes U$ vérifiant les propriétés suggérées par la notation (cf. exemple des mesures sur $\mathbf{Q}_p$ ci-dessous). Dans ce cas, M s'identifie à $M \boxtimes \mathbf{Z}_p$ de (via $x \mapsto (\varphi^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$) et, via cette identification, $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ devient l'application $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \mapsto x^{(0)}$.

Si M est un L-espace vectoriel, alors $M \boxtimes U \subset (M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$, pour tout ouvert compact U de $\mathbf{Q}_p$.

Mesures sur $\mathbf{Q}_p$. — Si $M = \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L)$, et si ψ est défini par $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi\, \psi(\mu) = \int_{p\mathbf{Z}_p} \phi(\frac{x}{p})\, \mu$, alors $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est l'espace des mesures sur $\mathbf{Q}_p$ (i.e. le dual de l'espace $\mathscr{C}^0(\mathbf{Q}_p, L)_c$ des fonctions continues à support compact) muni de l'action de $P(\mathbf{Q}_p)$ définie par $\int_{\mathbf{Q}_p} \phi \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mu = \int_{\mathbf{Q}_p} \phi(ax+b)\, \mu$. L'espace $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ est, quant à lui, l'espace $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, L)$ des mesures bornées [6] sur $\mathbf{Q}_p$ qui est le dual de l'espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

---

(5) Notons que la connaissance des $x^{(n)}$, pour $n \gg 0$, permet de reconstruire $x^{(n)}$ pour tout n en itérant ψ.

(6) Une mesure bornée sur $\mathbf{Q}_p$ est la même chose qu'une distribution globalement d'ordre 0 (cf. [**13**, n° II.5]).

Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, alors $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, L) \boxtimes U$ est l'espace des $\mathscr{O}_L$-mesures sur U et l'application Res_U définie plus haut est la restriction d'une mesure à l'ouvert U, c'est-à-dire la multiplication par la fonction caractéristique $\mathbf{1}_U$ de U.

C'est à partir de cet exemple que les formules ci-dessus ont été obtenues.

Les modules $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$ et $D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$. — Si D est un (φ,Γ)-module, ce qui précède s'applique en particulier à $M = D$, $M = D^\natural$ ou $M = D^\sharp$, l'action de $P(\mathbf{Z}_p)$ étant définie par la formule

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z = (1+T)^b \sigma_a(z),$$

l'opérateur ψ et, dans le cas de D, l'opérateur φ, étant ceux fournis par la théorie des (φ,Γ)-modules. On dispose donc des $P(\mathbf{Q}_p)$-modules $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$, $D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$ et $D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$. De plus, D étant muni d'un opérateur φ, on dispose, pour tout ouvert compact U de $\mathbf{Q}_p$, d'un sous-module $D\boxtimes U$ de $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$ et d'un projecteur $\mathrm{Res}_U : D\boxtimes\mathbf{Q}_p \to D\boxtimes U$. Le module D s'identifie au sous-module $D\boxtimes\mathbf{Z}_p$, et le sous-module $D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ de $D\boxtimes\mathbf{Z}_p$ est, via cette identification, égal à $D^{\psi=0}$.

Le foncteur $D\mapsto D\boxtimes\mathbf{Q}_p$ est (trivialement) exact. Le foncteur $D\mapsto D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$ ne l'est pas, mais on a le résultat suivant :

Théorème 0.3. — *Le foncteur $D\mapsto D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$ est exact.*

Comme on dispose d'un isomorphisme $D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p/D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p \cong D^\sharp/D^\natural$, induit par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} : D\boxtimes\mathbf{Q}_p \to D$, et comme $D^\sharp/D^\natural$ est petit, cela permet d'utiliser le théorème ci-dessus pour étudier le foncteur $D\mapsto D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$ qui est le plus pertinent pour les applications à la correspondance de Langlands locale p-adique.

Afin de ne pas multiplier les énoncés, nous ne considérerons que des (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{E}$ dans ce qui suit. Les $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseaux d'un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{E}$ étant tous commensurables, les $P(\mathbf{Q}_p)$-modules $(D\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$, $(D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ et $(D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ ne dépendent pas du choix d'un tel réseau.

Théorème 0.4. — *Si D est un (φ,Γ)-module étale, irréductible sur $\mathscr{E}$, alors le $P(\mathbf{Q}_p)$-module $(D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ est topologiquement irréductible.*

Un quasi-inverse du foncteur $D\mapsto D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$. — Si M est un L-espace vectoriel topologique localement compact muni d'une action continue de $P(\mathbf{Q}_p)$, on dit que $x\in M$ est *nul à l'infini* si $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot x$ tend vers 0 dans M quand $b\to\infty$ dans $\mathbf{Q}_p$. On note[7] M_{pc} l'ensemble des éléments de M nuls à l'infini ; c'est un sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-module de M. Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$, alors $(D\boxtimes\mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$ est un sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-module de $(D\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$.

(7) Le « pc » en indice signifie « presque à support compact » ; mettre un 0 en indice aurait causé des conflits de notations.

Soit $\widetilde{\mathscr{E}}$ le complété du perfectisé de $\mathscr{E}$ et $\widetilde{\mathscr{E}}^+$ celui de $\mathscr{E}^+$. L'action de φ devient bijective sur $\widetilde{\mathscr{E}}$ et $\widetilde{\mathscr{E}}^+$, et l'action de Γ se prolonge de manière unique en une action commutant à celle de φ. On dispose d'un analogue p-adique $x \mapsto [(1+T)^x]$, à valeurs dans $\widetilde{\mathscr{E}}^+$, de $x \mapsto e^{2i\pi x}$. L'anneau $\widetilde{\mathscr{E}}^+$ s'identifie, grâce à la *transformée de Fourier* $\mu \mapsto \int_{\mathbf{Q}_p} [(1+T)^x]\, \mu$, à l'espace $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, L)_{\rm pc}$ des mesures sur $\mathbf{Q}_p$ nulles à l'infini ; $\widetilde{\mathscr{E}}/\widetilde{\mathscr{E}}^+$ s'identifie naturellement au sous-espace de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Q}_p, L)$ des fonctions tendant vers 0 à l'infini.

Si M est comme ci-dessus, alors M et $M_{\rm pc}$ sont naturellement des (φ,Γ)-modules sur $\widetilde{\mathscr{E}}^+$, la multiplication par $[(1+T)^b]$ correspondant à l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, si $b \in \mathbf{Q}_p$, et les actions de φ et σ_a, correspondant à celles de $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$, on note $\widetilde{D}$ le (φ,Γ)-module $\widetilde{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{E}} D$; c'est un (φ,Γ)-module étale sur $\widetilde{\mathscr{E}}$ (l'action de φ est bijective et de pente 0). Le foncteur $D \mapsto \widetilde{D}$ est une équivalence de catégories : le foncteur inverse associe à un (φ,Γ)-module $\widetilde{D}$, étale sur $\widetilde{\mathscr{E}}$, l'unique sous-$\mathscr{E}$-espace vectoriel D de $\widetilde{D}$, stable par φ et Γ, tel que l'application naturelle $\widetilde{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{E}} D \to \widetilde{D}$ soit un isomorphisme.

On note $\widetilde{D}^+$ l'ensemble des $z \in \widetilde{D}$ tels que la suite $(\varphi^n(z))_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée dans $\widetilde{D}$. Alors $\widetilde{D}^+$ est un sous-$\widetilde{\mathscr{E}}^+$-module de D, qui est stable par φ, φ^{-1} et Γ, et on prouve que $\widetilde{D} = \widetilde{\mathscr{E}} \otimes_{\widetilde{\mathscr{E}}^+} \widetilde{D}^+$, ce qui fait que l'on peut retrouver D à partir de $\widetilde{D}^+$. On a alors le résultat suivant :

Proposition 0.5. — *Le (φ,Γ)-module $(D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\rm pc}$ s'identifie naturellement à $\widetilde{D}^+$.*

Comme on peut retrouver le (φ,Γ)-module D à partir de $\widetilde{D}^+$, cela montre qu'on peut aussi le retrouver à partir du $P(\mathbf{Q}_p)$-module topologique $(D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$.

Théorème 0.6. — *Soient D_1, D_2 deux (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{E}$. Si les $P(\mathbf{Q}_p)$-modules topologiques $(D_1^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ et $(D_2^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ sont isomorphes, alors D_1 et D_2 sont isomorphes en tant que (φ,Γ)-modules.*

Remarque 0.7. — (i) La description de $\widetilde{D}^+$ à partir de $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ donnée ci-dessus utilise la topologie de $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$, qui est la topologie faible. Dans le texte principal, on donne une seconde description, plus algébrique, ce qui permet de supposer que l'isomorphisme $D_1^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p \cong D_2^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est seulement continu pour la topologie forte (i.e. un $\mathscr{O}_L$-réseau est envoyé dans un $\mathscr{O}_L$-réseau).

(ii) On déduit de ce qui précède une construction particulièrement directe de la correspondance $\Pi \mapsto V$ définie dans [**15**]. Le dual faible Π^* de Π est un L-espace vectoriel localement compact muni d'une action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et donc, a fortiori, de $P(\mathbf{Q}_p)$. Le module $\widetilde{\mathscr{E}} \otimes_{\widetilde{\mathscr{E}}^+} \Pi^*_{\rm pc}$ est un (φ,Γ)-module étale sur $\widetilde{\mathscr{E}}$; il provient donc par extension des scalaires d'un (φ,Γ)-module étale D sur $\mathscr{E}$. Alors V est le dual de Tate de la représentation correspondant à D par l'équivalence de catégories de Fontaine [8]. Il semble toutefois difficile de prouver, à partir de cette construction, les propriétés requises de la correspondance $\Pi \mapsto V$.

(iii) Les modules $\check{D} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ sont duaux l'un de l'autre (dans le cas $D = \mathscr{E}$, cette dualité redonne la dualité entre $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, L)$ et le sous-espace de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Q}_p, L)$ des fonctions tendant vers 0 à l'infini). Si V est une L-représentation irréductible de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et si D et Π sont les objets qui lui correspondent, cette dualité fournit un isomorphisme $\Pi \cong \widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ de $P(\mathbf{Q}_p)$-modules qui s'avère très utile pour l'étude de Π.

Opérations analytiques sur les (φ,Γ)-modules et lois de réciprocité explicites. — Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$-module [9] ayant les mêmes diviseurs élémentaires que le $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module D.

En traduisant en termes de (φ,Γ)-modules un accouplement classique en théorie d'Iwasawa, on définit un accouplement

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}} : (\check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) \times (D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) \to \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*,$$

qui est $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$-linéaire en la seconde variable et $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$-semi-linéaire en la première. Cet accouplement encode les accouplements entre groupes de cohomologie galoisienne le long de la tour cyclotomique.

Multiplication par une fonction continue. — En traduisant en termes de (φ,Γ)-modules les formules définissant la multiplication d'une mesure par une fonction continue, on obtient, si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$ et $\alpha \in \mathscr{C}^0(U, \mathscr{O}_L)$, une application $\mathscr{O}_L$-linéaire continue $m_\alpha : D \boxtimes U \to D \boxtimes U$. Un exemple intéressant de cette construction est la multiplication m_x par x sur $\mathbf{Z}_p$; on obtient de la sorte une connexion sur D, qui n'est autre que la connexion introduite par Fontaine [**17**] et étudiée par Tsuzuki [**25**].

Image directe par un difféomorphisme local. — En exprimant de même l'image directe d'une mesure par un difféomorphisme local $f : U \to V$, où U et V sont des ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p$, on obtient une application $\mathscr{O}_L$-linéaire continue $f_* : D \boxtimes U \to D \boxtimes V$.

Convolution multiplicative. — En traduisant en termes de (φ,Γ)-modules les formules définissant la convolution de deux mesures sur $\mathbf{Z}_p^*$, on obtient, à partir d'une application $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-bilinéaire $M : D_1 \times D_2 \to D_3$ commutant aux actions de φ et Γ, une

(8) L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}$ de Fontaine fournit une description encore plus directe : $\check{V} = ((L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}) \otimes_{\widetilde{\mathscr{E}}^+} \Pi^*_{\mathrm{pc}})^{\varphi=1}$.

(9) L'anneau $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$ est obtenu à partir de $\mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ par le procédé permettant d'obtenir $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ à partir de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$: on inverse $\gamma - 1$ où $\gamma \in \Gamma$ est d'ordre infini, et on complète pour la topologie p-adique.

application $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$-bilinéaire

$$M_{\mathbf{Z}_p^*} : (D_1 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) \times (D_2 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) \to D_3 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*.$$

Ce qui précède s'applique à l'accouplement canonique $\langle\ ,\ \rangle : \check{D} \times D \to \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \frac{dT}{1+T}$; on note $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{Z}_p^*}$ l'accouplement obtenu par le procédé précédent.

Ces constructions sont utilisées dans [**15**] pour définir un module $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ muni d'une action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ à partir de n'importe quel (φ, Γ)-module étale et n'importe quel caractère continu $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$. Si D est de dimension 2 et si δ est choisi convenablement, alors $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est une extension de la représentation Π de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ que l'on cherche en vue de la correspondance de Langlands, par son dual (tordu par δ). Dans cet article, on n'utilise que $w_* : D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \to D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, où $w : \mathbf{Z}_p^* \to \mathbf{Z}_p^*$ est le difféomorphisme $x \mapsto 1/x$, pour établir la loi de réciprocité explicite suivante (dans laquelle $d : \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \to \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \frac{dT}{1+T}$ est la différentielle).

Théorème 0.8. — *Si $z_1 \in \check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ et $z_2 \in D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, alors*

$$d(\langle z_1, z_2 \rangle_{\mathrm{Iw}}) = -\langle w_* z_1, z_2 \rangle_{\mathbf{Z}_p^*}.$$

Le membre de gauche s'exprime en termes de cohomologie galoisienne ; celui de droite, dans le cas où la représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ attachée à D est cristalline, s'exprime en termes de distributions à valeurs dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\check{V})$. On retrouve ainsi (au moins formellement) la loi de réciprocité explicite de Perrin-Riou [**22**] telle qu'elle est énoncée dans [**8**].

I. (φ, Γ)-modules

Ce chapitre regroupe les résultats de base de la théorie des (φ, Γ)-modules (topologie, dualité). Beaucoup de ses résultats et de ceux du chapitre suivant se trouvent déjà dans les deux articles de Herr [**20, 21**] consacrés aux applications de la théorie des (φ, Γ)-modules à la cohomologie galoisienne des corps locaux.

I.1. $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-modules de type fini

Ce § regroupe des définitions et des résultats purement techniques qui seront utilisés dans le reste de l'article.

1. Réseaux et treillis. — Si A est un anneau local complet pour une valuation discrète, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et si D est un A-module de type fini, on définit la *dimension* $\dim_A D$ de D sur A par la formule

$$\dim_A D = \dim_{A/\mathfrak{m}} D/\mathfrak{m}D.$$

Si D est libre de rang d sur A, alors $\dim_A D = d$, et dans le cas général, le théorème de structure des modules sur les anneaux principaux montre que, si $\dim_A D = d$, alors il existe $k_1,\dots,k_d \in \mathbf{N}\cup\{+\infty\}$ non nuls, et $e_1,\dots,e_d \in D$, tels que $(x_1,\dots,x_d)\mapsto x_1e_1+\cdots+x_de_d$ induise un isomorphisme de $\prod_{i=1}^d(A/\mathfrak{m}^{k_i})$ sur D. Si A est muni d'une topologie (d'anneau) plus faible que celle induite par la valuation discrète, cela permet de munir D d'une topologie faisant de l'isomorphisme précédent un homéomorphisme, $\prod_{i=1}^d(A/\mathfrak{m}^{k_i})$ étant muni de la topologie produit. La topologie ainsi obtenue sur D ne dépend pas du choix de $e_1,\dots,e_d$. En effet, un autre choix se traduit par une bijection A-linéaire de $\prod_{i=1}^d(A/\mathfrak{m}^{k_i})$ dans lui-même, et une telle bijection est continue car A-linéaire, et donc est un homéomorphisme puisque son inverse est aussi continu pour la même raison.

Ce qui précède s'applique en particulier aux $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-modules de type fini. On munit $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ de la *topologie faible* pour laquelle les $T^n\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ + p^k\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, pour $k,n\in\mathbf{N}$, forment une base de voisinages de 0 et pour laquelle $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est complet, ce qui munit tout $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de type fini de la topologie faible (la topologie forte étant juste la topologie p-adique). On note $\mathscr{E}=\mathscr{O}_{\mathscr{E}}[\frac{1}{p}]$ le corps des fractions de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et on munit $\mathscr{E}=\cup_{n\in\mathbf{N}}p^{-n}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ de la topologie de la limite inductive, chacun des $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module $p^{-n}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ étant muni de la topologie faible.

Définition I.1.1. — (i) *Si D est un $k_{\mathscr{E}}$-(resp. un $\mathscr{E}$)-espace vectoriel de dimension finie d, un réseau de D est un sous-$k_{\mathscr{E}}^+$-(resp. $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$)-module de type fini de D contenant une base de D ; comme $k_{\mathscr{E}}^+$ (resp. $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$) est un anneau de valuation discrète (et donc principal), un réseau de D est libre de rang d sur $k_{\mathscr{E}}^+$ (resp. sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$).*

(ii) *Si D est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de type fini, un treillis M de D est un sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module compact de D dont l'image dans $D/\mathfrak{m}_LD$ est un réseau.*

Proposition I.1.2. — *Soit D un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de type fini et de torsion.*

(i) *Un sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module compact de D est un treillis si et seulement si il est ouvert.*

(ii) *Si M est un treillis de D, alors $D=\cup_{k\in\mathbf{Z}}T^{-k}M$ et les T^kM, pour $k\in\mathbf{N}$, forment une base de voisinages de 0 dans D.*

(iii) *Si M et N sont deux treillis, il existe $a\geq b\in\mathbf{Z}$ tels que $T^aM\subset N\subset T^bM$.*

(iv) *Si $M\subset N$ sont des treillis de D, alors N/M est un $\mathscr{O}_L$-module de longueur finie.*

Démonstration. — Soit $d=\dim_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}D$. Comme D est supposé de torsion, il existe $e_1,\dots,e_d\in D$ et $k_1,\dots,k_d\in\mathbf{N}$ tels que $D=(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathfrak{m}_L^{k_1})e_1\oplus\cdots\oplus(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathfrak{m}_L^{k_d})e_d$. On note M_0 le sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module de D engendré par $e_1,\dots,e_d$; c'est un treillis. Par définition de la topologie de D, les T^nM_0, pour $n\in\mathbf{N}$, forment une base de voisinages de 0 dans D, et D est la réunion croissante des ouverts $T^{-m}M_0$, pour $m\in\mathbf{N}$. En particulier, si M est un sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module ouvert de D, alors il existe $b\in\mathbf{N}$ tel que M contiennent T^bM_0. Ceci implique que l'image de M modulo $\mathfrak{m}_L$ contient le réseau engendré par $T^b\overline{e}_1,\dots,T^b\overline{e}_d$, et donc que M est un treillis s'il est compact.

Réciproquement, si M est un treillis, il existe c tel que l'image de M modulo $\mathfrak{m}_L$ contienne $T^c\overline{e}_1,\dots,T^c\overline{e}_d$. Il existe donc $f_1,\dots,f_d\in D$ tels que f_i ait pour image $T^c\overline{e}_i$ modulo $\mathfrak{m}_L$, si $1\le i\le d$. Les f_i, pour $1\le i\le d$, forment alors une famille génératrice de D sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et on peut donc écrire e_j, pour $1\le j\le d$, sous la forme $\sum_{i=1}^d a_{i,j}f_i$, avec $a_{i,j}\in\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, pour $1\le i,j\le d$. Soit $k\in\mathbf{N}$ tel que $\mathfrak{m}_L^kD=0$. Il existe alors $b\in\mathbf{N}$ tel que $T^ba_{i,j}\in\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^++\mathfrak{m}_L^k\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, quels que soient $1\le i,j\le d$. Ceci implique que M contient $T^be_1,\dots,T^be_d$ et donc aussi T^bM_0. On en déduit le (i).

Par ailleurs, si M est un treillis, on peut extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement de M par les $T^{-m}M_0$, ce qui montre qu'il existe $a\in\mathbf{Z}$ tel que M soit inclus dans T^aM_0. Les points (ii)-(iii) se déduisent alors sans difficulté de l'existence de $a,b\in\mathbf{Z}$ tels que $T^aM_0\supset M\supset T^bM_0$, et le (iv) se déduit du (iii) et de ce que $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+/(p^k,T^n)$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, quels que soient $k,n\in\mathbf{N}$.

Remarque I.1.3. — Comme $\varphi(T)=(1+T)^p-1\equiv T^p \bmod p$, on a $\varphi(T)^{p^{k-1}}=T^{p^k}$ sur D si D est tué par p^k. Il en résulte que l'on peut remplacer T par $\varphi(T)$ ou même par $\varphi^n(T)$ dans les (ii) et (iii) de la prop. I.1.2

2. Morphismes de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-modules

Lemme I.1.4. — *Si $D_1\to D_2$ est un morphisme surjectif de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-modules de type fini, et si M_2 est un treillis de D_2, alors il existe un treillis M_1 de D_1 dont l'image dans D_2 est M_2*

Démonstration. — La compacité de M_2 implique que son image dans D_2/p^kD_2 est de type fini sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, quel que soit $k\in\mathbf{N}$. On en déduit l'existence d'une famille J_k, pour $k\in\mathbf{N}$, d'ensembles finis, et d'une famille $e_{k,j}$, pour $k\in\mathbf{N}$ et $j\in J_k$, d'éléments de D_2 tels que M_2 soit l'adhérence dans D_2 du $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module engendré par les $p^ke_{j,k}$. Il suffit alors de prendre pour M_1 l'adhérence dans D_1 du $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module engendré par les $p^k\tilde{e}_{j,k}$, où $\tilde{e}_{j,k}\in D_1$ est un relèvement quelconque de $e_{j,k}$, si $k\in\mathbf{N}$ et $j\in J_k$.

Lemme I.1.5. — *Soit D un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de type fini, et soient $M\supset N$ des treillis de D. Si $f:M\to M$ est $\mathscr{O}_L$-linéaire, surjective, avec $f(N)\subset N$, alors f induit une bijection de M/N sur lui-même.*

Démonstration. — Comme M et N sont des treillis, on a $M/N=\varprojlim M/(N+p^kM)$ et chacun des $M/(N+p^kM)$ est un $\mathscr{O}_L$-module de type fini sur lequel f induit une surjection $\mathscr{O}_L$-linéaire et donc une bijection. Ceci permet de conclure.

Proposition I.1.6. — *Si D et D' sont des $\mathscr{E}$-espaces vectoriels de dimension finie, si M est un treillis d'un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau de D, et si $h:M\to D'$ est un morphisme continu de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-modules, alors h s'étend de manière unique en un morphisme de $\mathscr{E}$-espaces vectoriels de D dans D'.*

Démonstration. — Soit d la dimension de D. Comme M est un treillis de D, il existe $e_1, \dots, e_d \in M$ formant une base de D sur $\mathscr{E}$, tels que M soit inclus dans $N = \mathscr{O}_{\mathscr{E}} e_1 \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathscr{E}} e_d$. L'unicité d'un prolongement de h à D est immédiate car on doit avoir $h(x_1 e_1 + \cdots + x_d e_d) = x_1 h(e_1) + \cdots + x_d h(e_d)$, pour tous $x_1, \dots, x_d \in \mathscr{E}$. Pour montrer l'existence d'un tel prolongement, il suffit de montrer que l'on a bien $h(x) = x_1 h(e_1) + \cdots + x_d h(e_d)$, si $x = x_1 e_1 + \cdots + x_d e_d \in M$ (et donc $(x_1, \dots, x_d)$ varie dans un treillis de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^d$).

Soit N' le sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de D' engendré par $h(M)$. Comme M est compact et h continue, N' est inclus dans un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau de D'. Maintenant, comme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/(p^k \mathscr{O}_{\mathscr{E}} + \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+)$ est de T-torsion, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $T^n x_i = y_i + z_i$ avec $y_i \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ et $z_i \in p^k \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Posons $y = \sum_{i=1}^d y_i e_i$ et $z = \sum_{i=1}^d z_i e_i$. Comme h est $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-linéaire, on a $T^n h(x) = h(T^n x) = h(y) + h(z) = h(z) + \sum_{i=1}^d y_i h(e_i)$. Par ailleurs, comme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/(p^k \mathscr{O}_{\mathscr{E}} + \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+)$ est de T-torsion, il en est de même de $(M \cap p^k N)/p^k M$ et il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $T^m z \in p^k M$, ce qui implique $h(z) = T^{-m} h(T^m z) \in p^k N'$. On a donc

$$h(x) - \sum_{i=1}^d x_i h(e_i) = T^{-n}\Big(h(z) - \sum_{i=1}^d z_i h(e_i)\Big) \in p^k N'.$$

Comme ceci est vrai pour tout $k \in \mathbf{N}$ et comme N' est séparé pour la topologie p-adique, c'est donc que $h(x) - \sum_{i=1}^d x_i h(e_i) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

I.2. (φ, Γ)-modules étales

1. Catégories de (φ, Γ)-modules. — Si A est un anneau topologique muni d'actions continues de φ et Γ commutant entre elles, un (φ, Γ)-*module* D sur A est un A-module de type fini muni d'actions semi-linéaires continues de φ et Γ commutant entre elles.

Ce qui précède s'applique en particulier à $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et $\mathscr{E}$.

– Un (φ, Γ)-*module* D sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est *étale* si $\varphi(D)$ engendre D comme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module ; l'action de φ est alors injective.

– Un (φ, Γ)-*module* sur $\mathscr{E}$ est *étale* s'il possède un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau stable par φ et Γ qui est étale.

Nous aurons besoin des catégories suivantes :

- $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, catégorie des (φ, Γ)-modules étales, de torsion sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$,
- $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(k_{\mathscr{E}})$, catégorie des objets de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ tués par $\mathfrak{m}_L$ (i.e. des (φ, Γ)-*modules étales sur* $k_{\mathscr{E}}$),
- $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, catégorie des (φ, Γ)-modules étales, libres sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$,
- $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, catégorie des (φ, Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}$.

Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, alors $D/p^k D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, et D est la limite projective des $D/p^k D$. Par ailleurs, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, alors D possède un sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau qui est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$. Dans la suite du texte,

- *un* (φ, Γ)*-module étale sur* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ désigne un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ ou de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$,
- *un* (φ, Γ)*-module étale* désigne un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ ou de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$.

Un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ est *irréductible* s'il ne possède pas de sous-$\mathscr{E}$-espace vectoriel strict, stable par φ et Γ. Un objet D de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ est *irréductible* si $L \otimes_{\mathscr{O}_L} D$ est irréductible comme objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$.

2. Le dual de Tate d'un (φ, Γ)*-module.* — Le module $\Omega^1_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}$ des $\mathscr{O}_L$-différentielles continues de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est libre de rang 1 engendré, au choix, par dT ou par $\frac{dT}{1+T}$. On le munit d'une structure de (φ, Γ)-module étale en faisant agir Γ et φ sur $\frac{dT}{1+T}$ par [10]

$$\sigma_a\Big(\frac{dT}{1+T}\Big) = a\frac{dT}{1+T}, \quad \text{si } a \in \mathbf{Z}_p^*, \quad \text{et} \quad \varphi\Big(\frac{dT}{1+T}\Big) = \frac{dT}{1+T}.$$

A partir de maintenant, on note :

- $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}$ le (φ, Γ)-module étale $\Omega^1_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}$,
- $\mathscr{E}\frac{dT}{1+T}$ l'objet $L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Omega^1_{\mathscr{E}}$ de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$
- $\mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}$ le quotient de $\mathscr{E}\frac{dT}{1+T}$ par $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}$; c'est la réunion croissante des $p^{-k}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}$ qui sont des objets de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$.

On définit le *dual de Tate* $\check{D}$ d'un (φ, Γ)-module étale D par :

- $\check{D} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}(D, \mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T})$, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$,
- $\check{D} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}(D, \mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T})$, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$,
- $\check{D} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(D, \mathscr{E}\frac{dT}{1+T})$, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$.

Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, et si $D_k = D/p^kD$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}(D, \mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T})$ est la limite inductive des $\check{D}_k$, et $\check{D}$ est le module de Tate de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}(D, \mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T})$ (l'isomorphisme implicite dans cet énoncé est celui qui envoie $\mu \in \check{D}$ sur $(\mu_k)_{k\in\mathbf{N}}$, où $\mu_k(x)$ est l'image de $p^{-k}\mu(x)$ modulo $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}$).

L'accouplement naturel sur $\check{D} \times D$ est noté $\langle\ ,\ \rangle$. On munit $\check{D}$ d'actions de Γ et φ en imposant que

$$\langle\gamma(x), \gamma(y)\rangle = \gamma(\langle x, y\rangle), \quad \text{si } \gamma \in \Gamma, \quad \text{et} \quad \langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle = \varphi(\langle x, y\rangle).$$

(La condition « D étale » est précisément ce qu'il faut pour garantir l'existence et l'unicité d'un tel φ sur $\check{D}$, si D est un (φ, Γ)-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.) Alors $\check{D}$ est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ (resp. $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, resp. $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$), si D est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ (resp. $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, resp. $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$).

Dans tous les cas, le dual de Tate de $\check{D}$ est naturellement isomorphe, en tant que (φ, Γ)-module, à D.

[10] La formule $\varphi\big(\frac{dT}{1+T}\big) = p\frac{dT}{1+T}$, qui semblerait naturelle, ne fournit pas un (φ, Γ)-module étale.

3. Résidus. — Le corps $\mathscr{E}$ est une extension de degré p de $\varphi(\mathscr{E})$, ce qui permet de définir un inverse à gauche ψ de φ par la formule $\psi(f) = p^{-1}\varphi^{-1}(\mathrm{Tr}_{\mathscr{E}/\varphi(\mathscr{E})} f)$. Alors ψ laisse stable $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.

- ψ commute à Γ,
- $\psi(f\varphi(g)) = g\psi(f)$, pour tous f, g,
- $\psi\big(\sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(f_i)\big) = f_0$,
- $\psi(f)\big((1+T)^p - 1\big) = \frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1} f\big((1+T)\zeta - 1\big)$, si $f \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+[\frac{1}{T}]$.
- $\psi(\frac{1}{T}) = \frac{1}{T}$ (en effet, $\frac{1}{T} = \sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(\frac{1}{T})$).

Si $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k$ est un élément de $\mathscr{E}$, on définit le résidu de la forme différentielle $\omega = f\,dT$ par la formule $\mathrm{rés}_0(\omega) = a_{-1}$. On a $\mathrm{rés}_0(df) = 0$, si $f \in \mathscr{E}$. Comme $\mathrm{rés}_0$ envoie $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\,\frac{dT}{1+T}$ dans $\mathscr{O}_L$, elle induit une application $\mathrm{rés}_0 : \mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\,\frac{dT}{1+T} \to L/\mathscr{O}_L$.

On note ∂ l'opérateur différentiel $(1+T)\frac{d}{dT}$ de telle sorte que $df = \partial f\,\frac{dT}{1+T}$.

Lemme I.2.1. — *On a*

$$\partial\circ\varphi = p\,\varphi\circ\partial,\quad p\,\partial\circ\psi = \psi\circ\partial \quad \text{et} \quad \partial\circ\sigma_a = a\,\sigma_a\circ\partial,\ \textit{si } a\in\mathbf{Z}_p^*.$$

Démonstration. — Dans le cas de φ et σ_a, cela résulte de ce que, si $b \in \mathbf{Z}_p$,

$$\begin{aligned}\partial\big(f((1+T)^b-1)\big) &= \partial((1+T)^b-1)f'((1+T)^b-1)\\ &= b\,(1+T)^b f'((1+T)^b-1) = b\,(\partial f)((1+T)^b-1).\end{aligned}$$

Maintenant, si $f = \sum_{i=0}^{p=1}(1+T)^i\varphi(f_i)$, on a

$$\partial f = \sum_{i=0}^{p-1}\big(i(1+T)^i\varphi(f_i) + p(1+T)^i\varphi(\partial f_i)\big) = \sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(if_i + p\partial f_i),$$

et donc $\psi(\partial f) = p\partial f_0 = p\partial(\psi(f))$. Ceci permet de conclure.

Proposition I.2.2. — *Si $f\in\mathscr{E}$, alors :*

(i) $\mathrm{rés}_0(\sigma_a(f)\,\frac{dT}{1+T}) = a^{-1}\mathrm{rés}_0(f\,\frac{dT}{1+T})$, *pour tout* $a \in \mathbf{Z}_p^*$,

(ii) $\mathrm{rés}_0(\varphi(f)\,\frac{dT}{1+T}) = \mathrm{rés}_0(\psi(f)\,\frac{dT}{1+T}) = \mathrm{rés}_0(f\,\frac{dT}{1+T})$.

Démonstration. — Soit $f \in \mathscr{E}$. S'il existe $g \in \mathscr{E}$ tel que $f = \partial g$, alors $f\frac{dT}{1+T} = dg$ et, d'après le lemme I.2.1, on a $\psi(f)\frac{dT}{1+T} = pd(\psi(g))$ et $\sigma_a(f)\frac{dT}{1+T} = a^{-1}d(\sigma_a(g))$. On a donc, dans ce cas $\mathrm{rés}_0(f\,\frac{dT}{1+T}) = \mathrm{rés}_0(\psi(f)\,\frac{dT}{1+T}) = \mathrm{rés}_0(\sigma_a(f)\,\frac{dT}{1+T}) = 0$. Ceci s'applique en particulier à $f = T^{k-1}(1+T)$, si $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$. Comme l'adhérence (pour la topologie faible) dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ du $\mathscr{O}_L$-module engendré par les $T^{k-1}(1+T)$, pour $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$, admet $\mathscr{O}_L \cdot \frac{1+T}{T}$ comme supplémentaire, on déduit les formules de la proposition pour ψ et σ_a de ce que

$$\psi(\frac{1}{T}) = \frac{1}{T} \quad \text{et} \quad \sigma_a(\frac{1}{T}) = \frac{1}{aT + \binom{a}{2}T^2 + \cdots} = \frac{1}{aT} + \frac{a-1}{2} + \cdots.$$

Enfin, la formule pour φ se déduit de celle pour ψ appliquée à $\varphi(f)$. Ceci permet de conclure.

4. Dual de Tate et dual topologique. — La formule

$$\{x, y\} = \mathrm{rés}_0\big(\langle \sigma_{-1} \cdot x, y \rangle\big)$$

définit un accouplement $\mathscr{O}_L$-bilinéaire sur $\check{D} \times D$ à valeurs dans :

- $L/\mathscr{O}_L$ si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$,
- $\mathscr{O}_L$ si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$,
- L si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$.

Proposition I.2.3. — *Si $x \in \check{D}$ et $y \in D$, alors*

$$\begin{aligned}
&\{\varphi(x), \varphi(y)\} = \{x, y\},\\
&\{(1+T)^b x, (1+T)^b y\} = \{x, y\}, \ \textit{si } b \in \mathbf{Z}_p,\\
&\{\gamma(x), \gamma(y)\} = \{x, y\}, \ \textit{si } \gamma \in \Gamma.
\end{aligned}$$

Démonstration. — On a $\langle \sigma_{-1}(\varphi(x)), \varphi(y)\rangle = \langle \varphi(\sigma_{-1}(x)), \varphi(y)\rangle = \varphi(\langle \sigma_{-1}(x), y\rangle)$. On déduit donc la formule pour φ du (ii) de la prop. I.2.2 et de ce que $\varphi(\frac{dT}{1+T}) = \frac{dT}{1+T}$.

On a $\langle \sigma_{-1}((1+T)^b x), (1+T)^b y\rangle = \langle (1+T)^{-b}\sigma_{-1}(x), (1+T)^b y\rangle = \langle \sigma_{-1} \cdot x, y\rangle$, par $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-bilinéarité de $\langle\ ,\ \rangle$. On en déduit la seconde formule.

Si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, on a $\langle \sigma_{-1}(\sigma_a(x)), \sigma_a(y)\rangle = \langle \sigma_a(\sigma_{-1}(x)), \sigma_a(y)\rangle = \sigma_a(\langle \sigma_{-1}(x), y\rangle)$. On déduit donc la formule pour σ_a du (i) de la prop. I.2.2 et de ce que $\sigma_a(\frac{dT}{1+T}) = a\frac{dT}{1+T}$.

Si M est un $\mathscr{O}_L$-module topologique, on note $M^\vee$ le dual de Pontryagin de M, ensemble des applications $\mathscr{O}_L$-linéaires continues de M dans $L/\mathscr{O}_L$. Si M est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, il en est de même de $M^\vee$, et on a $\lg_{\mathscr{O}_L} M^\vee = \lg_{\mathscr{O}_L} M$.

Si M est un $\mathscr{O}_L$-module topologique, sans élément p-divisible, on note M^* le $\mathscr{O}_L$-dual de M, ensemble des applications $\mathscr{O}_L$-linéaires continues de M dans $\mathscr{O}_L$. Alors M^* est le module de Tate de $M^\vee$ (i.e. la limite projective des $M^\vee[p^n]$ pour les applications $x \mapsto px$).

Si M est un L-espace vectoriel topologique, on note M^* son dual topologique, ensemble des applications L-linéaires continues de M dans L. Si M_0 est un $\mathscr{O}_L$-réseau de M, on a $M^* = L \otimes_{\mathscr{O}_L} M_0^*$.

On munit ces duaux de la topologie faible ($\mu_n \to \mu$ si et seulement si $\mu_n(v) \to \mu(v)$ pour tout $v \in M$).

Lemme I.2.4. — *Si $k \in \mathbf{N}$, l'application qui à $y \in \mathfrak{m}_L^{-k}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ associe la forme linéaire $x \mapsto [y, x] = \mathrm{rés}_0(xy\,\frac{dT}{1+T})$ est un isomorphisme de $\mathfrak{m}_L^{-k}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ sur $(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathfrak{m}_L^k)^\vee$.*

Démonstration. — Soit $D = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathfrak{m}_L^k$. Si $f : D \to L/\mathscr{O}_L$ est $\mathscr{O}_L$-linéaire continue, alors $f(D) \subset \mathfrak{m}_L^{-k}\mathscr{O}_L/\mathscr{O}_L$ et il existe $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $f(T^m) = 0$ si $m \geq m_0$. Ceci implique que la série $(1+T)\big(\sum_{m\in\mathbf{Z}} T^{-m-1}f(T^m)\big)$ converge dans $\mathfrak{m}_L^{-k}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}} = D^\vee$.

La somme y de cette série est alors l'unique élément de $\mathfrak{m}_L^{-k}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ vérifiant $[y, T^m] = f(T^m)$, pour tout $m \in \mathbf{Z}$, et par continuité et linéarité, c'est aussi l'unique élément de $\mathfrak{m}_L^{-k}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ vérifiant $[y, x] = f(x)$, pour tout $x \in D$. Ceci permet de conclure.

Si D est un (φ, Γ)-module, et si $x \in \check{D}$, on note $\iota(x)$ la forme linéaire $y \mapsto \{x, y\}$ sur D.

Proposition I.2.5. — *Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ (resp. $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, resp. $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$), alors ι induit un isomorphisme de $\check{D}$ sur $D^\vee$ (resp. sur D^*, resp. sur D^*).*

Démonstration. — Si D est de torsion, on déduit du lemme I.2.4 et du théorème de structure des modules sur les anneaux principaux, que $x \mapsto \iota'(x) = \iota(\sigma_{-1}(x))$ est un isomorphisme de $\check{D}$ sur $D^\vee$. Il en est donc de même de ι. Le cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ s'en déduit en utilisant le fait que $\check{D}$ et D^* sont respectivement les modules de Tate des limites inductive des $\check{D}_k$ et $D_k^\vee$, où $D_k = D/p^kD$. Enfin, le cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ s'en déduit en tensorisant par L, cela permet de conclure.

Remarque I.2.6. — En utilisant le fait que le dual de Tate de $\check{D}$ est D, cela permet d'échanger les rôles de D et $\check{D}$ dans la prop. I.2.5, et donc d'obtenir des isomorphismes naturels $\iota : D \cong \check{D}^\vee$, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, et $\iota : D \cong \check{D}^*$, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ ou si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$.

5. *Orthogonalité et treillis*

Dans ce numéro, D est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$.

Définition I.2.7. — *Si M est un treillis de D, on note $M^\perp$ le sous-$\mathscr{O}_L$-module de $\check{D}$ constitué des $x \in \check{D}$ tels que $\{x, y\} = 0$ quel que soit $y \in M$.*

Lemme I.2.8. — *Si M est un treillis de D, alors $M^\perp$ est un treillis de $\check{D}$. De plus, $(M^\perp)^\perp = M$.*

Démonstration. — Écrivons D sous la forme $D = \oplus_{i=1}^d (\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathfrak{m}_L^{k_i}) f_i$. Comme M est un treillis de D, il existe $a \geq b \in \mathbf{Z}$ tels que

$$\oplus_{i=1}^d T^a \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ \cdot f_i \subset M \subset \oplus_{i=1}^d T^b \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ \cdot f_i.$$

Soit ϖ une uniformisante de L, et soit $f_i^\vee \in \check{D}$ l'homomorphisme envoyant f_i sur $\varpi^{-k_i}\frac{dT}{1+T}$ et f_j sur 0 si $j \neq i$. On a alors $\check{D} = \oplus_{i=1}^d (\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\varpi^{k_i}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}) f_i^\vee$. Maintenant « $\mathrm{rés}_0(xy\frac{dT}{1+T}) = 0$, quel que soit $y \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+/\varpi^k$ » équivaut à « $x \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+/\varpi^k$ »; on en déduit les inclusions

$$\oplus_{i=1}^d T^{-b} \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ \cdot f_i^\vee \subset M^\perp \subset \oplus_{i=1}^d T^{-a} \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ \cdot f_i^\vee.$$

Finalement, comme $\{x, ay\} = \{\sigma_{-1}(a)x, y\}$, si $a \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, cela implique que $M^\perp$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module, et donc un treillis de D au vu des inclusions ci-dessus.

Enfin, l'égalité $(M^\perp)^\perp = M$ suit de ce que M est fermé dans D et $\{\ ,\ \}$ est une dualité parfaite d'après la prop. I.2.5. Ceci permet de conclure.

Lemme I.2.9. — *Si M est un treillis de D, alors $\iota : \check{D} \to D^\vee$ induit un isomorphisme de $\mathscr{O}_L$-modules de $M^\perp$ sur* $\mathrm{Hom}(D/M, L/\mathscr{O}_L)$.

Démonstration. — Par définition de $M^\perp$, la restriction de ι à $M^\perp$ se factorise en une application injective $\iota_M : M^\perp \to \mathrm{Hom}(D/M, L/\mathscr{O}_L)$. Maintenant, M étant un treillis de D, et D étant de torsion, M est ouvert dans D et D/M est un $\mathscr{O}_L$-module discret. Donc $\mathrm{Hom}(D/M, L/\mathscr{O}_L)$ s'identifie naturellement au sous-ensemble des $x \in D^\vee$ tels que $\{x, y\} = 0$ quel que soit $y \in M$. La surjectivité de ι permet de conclure à celle de ι_M

Lemme I.2.10. — *Si I est fini, et si M_i, pour $i \in I$, sont des treillis de D, il existe un treillis M' de D, contenant les M_i, tel que $D/M_i = D/M' \oplus M'/M_i$ pour tout $i \in I$.*

Démonstration. — Écrivons D sous la forme $D = \oplus_{j=1}^d (\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathfrak{m}_L^{k_j}) f_j$. Il existe alors $b_i \in \mathbf{Z}$ tel que $M_i \subset \oplus_{j=1}^d T^{b_i}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ \cdot f_j$, et on peut prendre $M' = \oplus_{j=1}^d T^b \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ \cdot f_j$, où $b = \inf_{i\in I} b_i$.

Proposition I.2.11. — *Si $M_1 \subset M_2$ sont des treillis de D, alors*

$$\lg_{\mathscr{O}_L}(M_1^\perp/M_2^\perp) = \lg_{\mathscr{O}_L}(M_2/M_1).$$

Démonstration. — Choisissons un treillis M' de D contenant M_1 et M_2, tel que $D/M_1 = D/M' \oplus M'/M_1$ et $D/M_2 = D/M' \oplus M'/M_2$. En utilisant le lemme I.2.9, on voit que l'on est ramené à prouver que

$$\lg_{\mathscr{O}_L}\big(\mathrm{Hom}(M'/M_1, L/\mathscr{O}_L)/\mathrm{Hom}(M'/M_2, L/\mathscr{O}_L)\big) = \lg_{\mathscr{O}_L}(M_2/M_1),$$

ce qui suit de ce que tous les modules en présence sont de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, et donc

$$\begin{aligned}\lg_{\mathscr{O}_L}\big((M'/M_1)^\vee/(M'/M_2)^\vee\big) &= \lg_{\mathscr{O}_L}(M'/M_1) - \lg_{\mathscr{O}_L}(M'/M_2)\\ &= \lg_{\mathscr{O}_L}((M'/M_1)/(M'/M_2)) = \lg_{\mathscr{O}_L}(M_2/M_1).\end{aligned}$$

II. Les foncteurs $D \mapsto D^\sharp$ et $D \mapsto D^\natural$

Ce chapitre est consacré à la définition et l'étude des sous-modules D^+, D^{++}, D^{nr}, $D^\natural$ et $D^\sharp$ d'un (φ, Γ)-module étale D. Sauf mention explicite du contraire, les (φ, Γ)-modules considérés sont étales sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et les résultats valables pour $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ s'étendent à $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ en tensorisant par L.

II.1. L'équivalence de catégories de Fontaine. — Notons :

• $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ la catégorie des $\mathscr{O}_L$-modules de longueur finie, munis d'une action linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$,

• $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ la catégorie des $\mathscr{O}_L$-modules libres de rang fini, munis d'une action linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$,

• $\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ la catégorie des L-espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une action linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Si V est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors V/p^kV est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ pour tout k, et V est la limite projective des V/p^kV. Si V est un objet de $\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors V possède des $\mathscr{O}_L$-réseaux stables par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (par compacité de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$), et si V_0 est un de ces réseaux, on a $V = L \otimes_{\mathscr{O}_L} V_0$.

Dans la suite,

• une *$\mathscr{O}_L$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$* désigne un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ ou de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$,

• une *représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$* désigne un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ ou de $\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Les (φ,Γ)-modules étales ont été introduits par Fontaine [**17**] qui a montré qu'ils sont en équivalence de catégories avec les représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. De manière plus précise, le complété [(11)] $\mathbf{A}$, pour la topologie p-adique, de l'anneau des entiers de l'extension maximale non ramifiée de $\mathscr{E}$ (pour $L = \mathbf{Q}_p$), est muni d'une action de φ étendant celle existant sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et, grâce à la théorie du corps des normes [**19, 27**], d'une action continue (pour la topologie faible) de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ commutant à celle de φ. De plus, $(\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A})^{\varphi=1} = \mathscr{O}_L$ et $(\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A})^{\mathscr{H}} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, l'action résiduelle de $\Gamma = \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathscr{H}$ étant celle précédemment définie.

Théorème II.1.1. — (Fontaine)

(i) *Si D est un (φ,Γ)-module étale, alors $\mathbf{V}(D) = ((\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} D)^{\varphi=1}$, est une $\mathscr{O}_L$ (resp. L)-représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.*

(ii) *Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors $\mathbf{D}(V) = (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$ est un (φ,Γ)-module étale.*

(iii) *Les foncteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{D}$ sont exacts, inverses l'un de l'autre, et induisent des équivalences de catégories :*

$$\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \cong \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}, \quad \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \cong \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \cong \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}).$$

(11) Voir [**10, 11**], par exemple, pour les principales propriétés de cet anneau que Fontaine note $\mathscr{O}_{\widehat{\mathscr{E}^{\mathrm{nr}}}}$.

Remarque II.1.2. — (i) On dit qu'une représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est *abélienne* si elle se factorise par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$. Comme le quotient de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ par $\mathscr{H}$ est Γ^{nr}, canoniquement isomorphe à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_p/\mathbf{F}_p)$, on obtient la la version primitive suivante de l'équivalence de catégories de Fontaine :

le foncteur $V \mapsto (W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}}$ *induit une équivalence de catégories entre représentations abéliennes de* $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ *et* (φ, Γ)*-modules étales sur* $\mathscr{O}_L$ (ou sur L, si V est une L-représentation).

(ii) Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, soit $\mathbf{D}^{\mathrm{nr}}(V) = (W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes V)^{\mathscr{H}}$. On remarquera que, si V est abélienne, alors $\mathbf{D}^{\mathrm{nr}}(V)$ est le module considéré au (i). Par ailleurs, dans le cas général, on a $\mathbf{D}^{\mathrm{nr}}(V) = \mathbf{D}^{\mathrm{nr}}(V^{\mathscr{H}'})$, ce qui permet de se ramener au cas abélien. En effet, il suffit de prouver le résultat pour une représentation de torsion, les autres cas s'en déduisant par limite projective et inversion de p. Soient $V_1 = V^{\mathscr{H}'}$ et $V_2 = V/V_1$. Il suffit de prouver que $(W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes V)^{\mathscr{H}'} = W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes V_1$. Supposons le contraire, et soit $X \subset W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes V_2$ l'ensemble des éléments tués par p dans l'image de $(W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes V)^{\mathscr{H}'}$. Alors X est un $\overline{\mathbf{F}}_p$-espace vectoriel qui est stable par $\mathscr{H}/\mathscr{H}' = \Gamma^{\mathrm{nr}}$, et qui est non nul sous notre hypothèse. Il résulte du th. de Hilbert 90 que X est de la forme $\overline{\mathbf{F}}_p \otimes V_2'$, où V_2' est fixe par Γ^{nr}, et donc inclus dans V_2. Soit alors $v \in V_2'$. Comme $\mathscr{H}'$ agit trivialement sur $W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes V_1$, cela implique que $\sigma(\tilde{v}) - \tilde{v}$ ne dépend pas du choix de relèvement de v dans $W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes V$. Or, par hypothèse, v admet un relèvement fixe par $\mathscr{H}'$, et donc tout relèvement de v est fixe par $\mathscr{H}'$. Comme on peut choisir un tel relèvement dans V, on obtient une contradiction avec la définition de V_1, ce qui permet de conclure.

On rappelle que χ désigne le caractère cyclotomique. On définit le *dual de Tate* $\check{V}$ d'une représentation p-adique V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ par :

- $\check{V} = \mathrm{Hom}(V, (L/\mathscr{O}_L) \otimes \chi)$, si $V \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$,
- $\check{V} = \mathrm{Hom}(V, \mathscr{O}_L \otimes \chi)$, si $V \in \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}_L}\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$,
- $\check{V} = \mathrm{Hom}(V, L \otimes \chi)$, si $V \in \mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Si D est un (φ, Γ)-module étale, et si V est la représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui lui correspond, alors la représentation correspondant à $\check{D}$ est $\check{V}$.

II.2. L'action de φ. — Dans tout ce § (sauf pour le cor. II.2.9), on fixe un (φ, Γ)-module D étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.

1. Les modules D^+, D^{++} et D^{nr}. — On note

- D^+ l'ensemble des $x \in D$ tels que la suite $(\varphi^n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ soit bornée dans D,
- D^{++} l'ensemble des $x \in D$ tels que $\varphi^n(x) \to 0$,
- D^{nr} l'intersection des $\varphi^n(D)$, pour $n \in \mathbf{N}$.

Remarque II.2.1. — Les modules D^{nr}, D^{++} et D^{+} peuvent se décrire via les anneaux de Fontaine. La description de D^{nr} se trouve au (ii) de la rem. II.2.4; nous allons donner une description de D^{+} et D^{++}.

– Le corps résiduel $\mathbf{E}$ de $\mathbf{A}$ est une clôture séparable de $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{F}_p((T))$. On note $\widetilde{\mathbf{E}}$ le complété de sa clôture radicielle et $\widetilde{\mathbf{A}}$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}$. Alors $\widetilde{\mathbf{E}}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}$ sont munis d'actions de φ et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ commutant entre elles, l'action de φ étant bijective.

– Le corps $\widetilde{\mathbf{E}}$ est muni d'une valuation $v_{\mathbf{E}}$, et on note[12] $\widetilde{\mathbf{E}}^{+}$ l'anneau de ses entiers et $\widetilde{\mathbf{E}}^{++}$ l'idéal maximal de $\widetilde{\mathbf{E}}^{+}$. Comme $v_{\mathbf{E}}(\varphi(x)) = p\, v_{\mathbf{E}}(x)$, $\widetilde{\mathbf{E}}^{+}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}^{++}$) est aussi l'ensemble des $x \in \widetilde{\mathbf{E}}$ tels que $(\varphi^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée (resp. $\varphi^n(x) \to 0$).

– On note $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}^{+}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^{++}$ l'idéal $W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++})$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$, ce qui fait de $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^{++}$) l'ensemble des $x \in \widetilde{\mathbf{A}}$ tels que $(\varphi^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée (resp. $\varphi^n(x) \to 0$). Comme $\widetilde{\mathbf{E}}^{+} = \overline{\mathbf{F}}_p \oplus \widetilde{\mathbf{E}}^{++}$, on a de même $\widetilde{\mathbf{A}}^{+} = W(\overline{\mathbf{F}}_p) \oplus \widetilde{\mathbf{A}}^{++}$.

– Enfin, on pose $\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ et $\mathbf{A}^{++} = \mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{++}$, ce qui fait de $\mathbf{A}^{+}$ (resp. $\mathbf{A}^{++}$) l'ensemble des $x \in \mathbf{A}$ tels que $(\varphi^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée (resp. $\varphi^n(x) \to 0$). On a $\mathbf{A}^{+} = W(\overline{\mathbf{F}}_p) \oplus \mathbf{A}^{++}$.

On en déduit que, si $V = \mathbf{V}(D)$, de sorte que $D = (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$, alors

$$D^{+} = (\mathbf{A}^{+} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}} \quad \text{et} \quad D^{++} = (\mathbf{A}^{++} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}.$$

Proposition II.2.2. — (i) *D^{nr} est un $\mathscr{O}_L$-module de dimension $\leq \dim D$, et tout sous-$\mathscr{O}_L$-module de type fini de D, qui est stable par φ, est inclus dans D^{nr}.*

(ii) *$TD^{+} \subset D^{++}$ et $D^{+} = D^{++} \oplus D^{\mathrm{nr}}$.*

(iii) *Si D est de torsion, alors D^{+} et D^{++} sont des treillis de D.*

Démonstration. — Soit $V = \mathbf{V}(D)$ de telle sorte que $D \subset \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$. Si x appartient à $\cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathbf{E})$, il en est de même de tous ses conjugués, et le polynôme minimal de x sur $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{F}_p((T))$ est à coefficients dans $\cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}) = \mathbf{F}_p$. On en déduit que $\cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathbf{E}) = \overline{\mathbf{F}}_p$, que $\cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathbf{A}) = W(\overline{\mathbf{F}}_p)$, et que

$$D^{\mathrm{nr}} = \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(D) \subset \big(\cap_{n\in\mathbf{N}}\, \varphi^n(\mathbf{A})\big) \otimes_{\mathbf{Z}_p} V = W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes_{\mathbf{Z}_p} V.$$

Il en résulte que $D^{\mathrm{nr}} = \mathbf{D}^{\mathrm{nr}}(V)$, et il résulte de la rem. II.1.2 que que D^{nr} est de dimension sur $\mathscr{O}_L$ inférieure ou égale à celle de $V^{\mathscr{H}'}$, et donc en particulier à celle de V qui est égale à celle de D sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Maintenant, si M est un sous-$\mathscr{O}_L$-module de type fini de D stable par φ, alors φ induit une bijection de M sur M, et donc $M \subset \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(D) = D^{\mathrm{nr}}$, ce qui démontre le (i).

---

[12] On a aussi $\widetilde{\mathbf{E}}^{+} = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}},\ x_n \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}/p,\ x_{n+1}^p = x_n,\ \forall n \in \mathbf{N}\}$; Fontaine note cet anneau R et $\mathrm{Fr}\, R$ son corps des fractions $\widetilde{\mathbf{E}}$.

L'inclusion $TD^+ \subset D^{++}$ suit de ce que $\varphi^n(T) \to 0$, et la décomposition $D^+ = D^{\mathrm{nr}} \oplus D^{++}$ est une conséquence de la stabilité par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de la décomposition $\mathbf{A}^+ = W(\overline{\mathbf{F}}_p) \oplus \mathbf{A}^{++}$, et de ce que

$$D^+ = (\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}, \quad D^{++} = (\mathbf{A}^{++} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}} \quad \text{et} \quad D^{\mathrm{nr}} = (W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}.$$

Enfin, il est immédiat que D^+ et D^{++} sont des sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-modules de D. Le fait que ce soient des treillis, si D est de torsion, est une conséquence du (ii) du lemme II.2.3 ci-dessous. Ceci termine la démonstration de la prop. II.2.2.

Lemme II.2.3. — *Soient $e_1, \dots, e_d \in D$, avec $D = (\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathfrak{m}_L^{k_1})e_1 \oplus \cdots \oplus (\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathfrak{m}_L^{k_d})e_d$, et soit k le maximum des k_i, pour $1 \leq i \leq d$.*

(i) *Il existe des entiers relatifs $n_0 \geq n_1$, et des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$, à coefficients dans $T\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+/\mathfrak{m}_L^k$, éléments de $\mathbf{GL}_d(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathfrak{m}_L^k)$, telles que l'on ait*

$$\varphi(T^{n_0}e_i) = \sum_{j=1}^d a_{i,j}T^{n_0}e_j \quad \text{et} \quad T^{n_1}e_i = \sum_{j=1}^d b_{i,j}\varphi(T^{n_1}e_j), \quad \text{si } 1 \leq i \leq d.$$

(ii) *Si N_0 (resp. N_1) est le $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module de D engendré par les $T^{n_0}e_i$ (resp. les $T^{n_1}e_i$), pour $1 \leq i \leq d$, alors*

$$\varphi(N_0) \subset TN_0 \subset D^{++} \subset D^+ \subset N_1 \subset \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ \cdot \varphi(N_1).$$

Démonstration. — $e_1, \dots, e_d$ et $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d)$ sont des familles génératrices de D sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Comme D est tué par $\mathfrak{m}_L^k$, il existe des matrices

$$A' = (a'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d} \quad \text{et} \quad B' = (b'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d},$$

éléments de $\mathbf{GL}_d(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathfrak{m}_L^k)$, telles que l'on ait

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^d a'_{i,j}e_j \quad \text{et} \quad e_i = \sum_{j=1}^d b'_{i,j}\varphi(e_j), \quad \text{si } 1 \leq i \leq d.$$

On a $(\varphi(T)/T)^{p^k} = T^{(p-1)p^k}$ dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+/\mathfrak{m}_L^k$; il existe donc $n \in \mathbf{N}$ tel que $(\varphi(T)/T)^{np^k}A'$ et $(\varphi(T)/T)^{np^k}B'$ soient à coefficients dans $T\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+/\mathfrak{m}_L^k$, et on peut prendre $n_0 = np^k$, $n_1 = -np^k$, $A = (\varphi(T)/T)^{np^k}A'$ et $B = (\varphi(T)/T)^{np^k}B'$.

Maintenant, les inclusions $\varphi(N_0) \subset TN_0$ et $N_1 \subset \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ \cdot \varphi(N_1)$ suivent de la construction de N_0 et N_1. On déduit de la première, par une récurrence immédiate, que l'on a $\varphi^n(N_0) \subset \varphi^n(T)N_0$, et comme $\varphi^n(T) \to 0$, cela montre que $N_0 \subset D^{++}$ (et donc, a fortiori, $TN_0 \subset D^{++}$). Enfin, si $n \in \mathbf{N}$, il existe des $b_{i,j,n} \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ tels que l'on ait $T^{n_1}e_i = \sum_{j=1}^d b_{i,j,n}\varphi^n(T^{n_1}e_j)$, si $1 \leq i \leq d$. Donc, si $x = \sum_{i=1}^d x_iT^{n_1}e_i \in D^+$, et si $\varphi^n(x) = \sum_{j=1}^d x_{i,n}T^{n_1}e_i$, alors $\varphi^n(x_i) = \sum_{j=1}^d b_{i,j,n}x_{j,n}$, et la suite $\varphi^n(x_i)$ est bornée dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathfrak{m}_L^{k_i}$. Ceci implique que $x_i \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+/\mathfrak{m}_L^{k_i}$, et donc que $x \in N_1$. On en déduit l'inclusion $D^+ \subset N_1$ qui termine la démonstration du lemme.

Remarque II.2.4. — (i) Il résulte du (i) de la prop. II.2.2 que D^{nr} est le plus grand sous-$\mathscr{O}_L$-module de type fini de D stable par φ.

(ii) Il résulte de la démonstration de la prop. II.2.2 que $D^{\mathrm{nr}} = \mathbf{D}^{\mathrm{nr}}(V)$, ce qui implique en particulier, d'après la rem. II.1.2, que $D^{\mathrm{nr}} \neq 0$ si et seulement si $V^{\mathscr{H}'} \neq 0$.

(iii) Si D n'est pas de torsion, D^+ et D^{++} sont en général nuls. Il peut quand même arriver que D^+ soit assez gros pour engendrer D, auquel cas on dit que D est *de hauteur finie.*

2. Polynômes en φ

Lemme II.2.5. — *Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathfrak{m}_L$.*

(i) *Si $P = 1 + a_{n-1}X + \cdots + a_0X^n$, alors $D^{P(\varphi)=0} = 0$.*

(ii) *Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$, alors $D^{P(\varphi)=0} = 0$.*

Démonstration. — Dans le premier cas, l'injectivité de $P(\varphi)$ suit de ce que $P(\varphi) = 1$ mod. $\mathfrak{m}_L$ et donc que $P(\varphi)$ est injectif sur $\mathfrak{m}_L^k D/\mathfrak{m}_L^{k+1} D$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$. Dans le second cas, cette injectivité est une conséquence de la congruence $P(\varphi) = \varphi^n$ mod $\mathfrak{m}_L$ et de ce que D est étale, ce qui implique que φ^n est injectif sur $\mathfrak{m}_L^k D/\mathfrak{m}_L^{k+1} D$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$.

Lemme II.2.6. — *Si $P \in \mathscr{O}_L[X]$ a une image non nulle dans $k_L[X]$, alors P peut s'écrire de manière unique sous la forme $P = uP^+P^0P^-$, où $u \in \mathscr{O}_L^*$, et*

$$\begin{aligned} P^+(X) &= X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \cdots + a_0 \quad \textit{avec } a_i \in \mathfrak{m}_L \textit{ si } 0 \le i \le k-1, \\ P^0(X) &= X^\ell + b_{\ell-1}X^{\ell-1} + \cdots + b_0 \quad \textit{avec } b_i \in \mathscr{O}_L, \textit{ si } 0 \le i \le \ell-1, \textit{ et } b_0 \in \mathscr{O}_L^* \\ P^-(X) &= 1 + c_{m-1}X + \cdots + c_0X^m \quad \textit{avec } c_i \in \mathfrak{m}_L \textit{ si } 0 \le i \le m-1. \end{aligned}$$

Démonstration. — C'est parfaitement classique : si P est de degré n et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les racines de P, alors

$$P^+(X) = \prod_{v_p(\alpha_i)>0} (X-\alpha_i), \quad P^0(X) = \prod_{v_p(\alpha_i)=0} (X-\alpha_i), \quad \text{et} \quad P^-(X) = \prod_{v_p(\alpha_i)<0} (1-\alpha_i^{-1}X).$$

Corollaire II.2.7. — *Si $P \in \mathscr{O}_L[X]$ a une image non nulle dans $k_L[X]$, et si P^0 est le polynôme défini ci-dessus, alors $D^{P(\varphi)=0} = D^{P^0(\varphi)=0}$*

Proposition II.2.8. — *Soit $P \in \mathscr{O}_L[X]$ dont l'image dans $k_L[X]$ n'est pas nulle. Alors $D^{P(\varphi)=0}$ est inclus dans D^{nr}.*

Démonstration. — Quitte à remplacer P par P^0 et à diviser par $P^0(0)$, ce qui, d'après le cor. II.2.7, ne change pas $D^{P(\varphi)=0}$, on peut supposer que $P(0) = 1$. Dans ce cas, un élément x de $D^{P(\varphi)=0}$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathscr{O}_L$ des $\varphi^n(x)$, pour $n \ge 1$, et en réitérant le procédé, on peut, pour tout k, écrire x comme une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathscr{O}_L$ des $\varphi^n(x)$, pour $n \ge k$. On en déduit l'appartenance de x à $\cap_{k\in\mathbf{N}}\varphi^k(D) = D^{\mathrm{nr}}$, ce qui permet de conclure.

Corollaire II.2.9. — *Soit $P \in \mathscr{O}_L[X]$ non nul.*

(i) *Si D est un (φ, Γ)-module étale, libre de rang d sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors $D^{P(\varphi)=0}$ est un $\mathscr{O}_L$-module, libre de rang $\leq d$.*

(ii) *Si D est un (φ, Γ)-module étale, de dimension d sur $\mathscr{E}$, alors $D^{P(\varphi)=0}$ est un L-espace vectoriel de dimension $\leq d$.*

Démonstration. — Le (i) suit du (i) de la prop. II.2.2, et le (ii) suit du (i) en prenant un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau stable par φ et Γ.

II.3. L'opérateur ψ

1. Définition. — Soit D un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Comme les $(1 + T)^i$, pour $0 \leq i \leq p-1$, forment une base de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ sur $\varphi(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, on peut écrire tout élément x de D, de manière unique, sous la forme

$$x = \sum_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(x_i),$$

ce qui nous permet de définir un opérateur $\psi : D \to D$ par la formule $\psi(x) = x_0$; c'est un inverse à gauche de φ (i.e. $\psi(\varphi(x)) = x$) qui va jouer un rôle primordial dans la suite.

L'action de Γ n'est pas utilisée dans la définition de ψ et cette définition est donc valable pour tout φ-module étale non nécessairement muni d'une action additionnelle de Γ. Dans le cas d'un (φ, Γ)-module, ψ commute à l'action de Γ : en effet, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, on a

$$\sigma_a\Big(\sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(x_i)\Big) = \sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^{ai}\varphi(\sigma_a(x_i)) = \varphi(\sigma_a(x_0)) + \sum_{i=1}^{p-1}(1+T)^{j_i}\varphi((1+T)^{b_i}\sigma_a(x_i)),$$

où $j_i \in \{1, \dots, p-1\}$ et $b_i \in \mathbf{Z}_p$ sont définis par $ai = j_i + pb_i$; on a donc, comme annoncé, $\psi(\sigma_a(x)) = \sigma_a(x_0) = \sigma_a(\psi(x))$.

Remarque II.3.1. — L'opérateur $\psi : D \to D$ provient, en voyant D comme un sous-module de $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{V}(D)$ de l'opérateur $\psi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ défini comme suit : $\mathbf{A}$ est une extension de degré p de $\varphi(\mathbf{A})$ d'extension résiduelle inséparable, ce qui fait que $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\varphi(\mathbf{A})}$ prend ses valeurs dans $p\varphi(\mathbf{A})$ et que la formule $\psi(x) = p^{-1}\varphi^{-1}(\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\varphi(\mathbf{A})})$ définit un opérateur de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{A}$. Il est apparent sur cette formule que ψ commute à l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et est un inverse à gauche de φ sur $\mathbf{A}$, ce qui permet de retrouver les propriétés de $\psi : D \to D$ mentionnées ci-dessus.

2. ψ comme adjoint de φ. — Ce qui suit est à la base de la définition [**21**] de la dualité locale de Tate en termes de (φ, Γ)-modules.

Lemme II.3.2. — *Soient D, D_1, D_2 des (φ, Γ)-module étales sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.*

(i) *Si $x \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et si $y \in D$, alors $\psi(\varphi(x)y) = x\psi(y)$ et $\psi(x\varphi(y)) = \psi(x)y$.*

(ii) *Si $x \in D_1$ et si $y \in D_2$, alors $\psi(\varphi(x) \otimes y) = x \otimes \psi(y)$.*

(iii) *Si $x \in \check{D}$ et $y \in D$, alors $\psi(\langle \varphi(x), y\rangle) = \langle x, \psi(y)\rangle$.*

Démonstration. — La démonstration étant la même dans les trois cas, nous ne traiterons que le (ii). Si $y = \sum_{i=0}^{p-1} \varphi(y_i)(1+T)^i$, alors $\varphi(x) \otimes y = \sum_{i=0}^{p-1} \varphi(x \otimes y_i)(1+T)^i$ et donc

$$\psi(\varphi(x) \otimes y) = x \otimes y_0 = x \otimes \psi(y).$$

Corollaire II.3.3. — *Si $x \in \check{D}$ et $y \in D$, alors*

$$\{x, \varphi(y)\} = \{\psi(x), y\} \quad \text{et} \quad \{\varphi(x), y\} = \{x, \psi(y)\}.$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du (ii) de la prop. I.2.2 et du (iii) du lemme II.3.2.

3. (φ, Γ)-modules et (ψ, Γ)-modules

Proposition II.3.4. — *Soient D et D' deux (φ, Γ)-modules étales sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.*

(i) *Si $h : D \to D'$ est un morphisme de (φ, Γ)-modules, alors h commute à ψ.*

(ii) *Si $h : D \to D'$ est un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-modules commutant à ψ et Γ, alors h est un morphisme de (φ, Γ)-modules.*

Démonstration. — Le (i) est une conséquence de ce que, si $z = \sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(z_i)$, alors $h(z) = \sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(h(z_i))$, et donc $\psi(h(z)) = h(z_0) = h(\psi(z))$.

Pour démontrer le (ii), remarquons que si $z = \sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(z_i)$, alors on a $z_i = \psi((1+T)^{-i}z)$; en particulier, $z \in \varphi(D)$ si et seulement si $\psi((1+T)^{-i}z) = 0$, pour tout $i \in \{1, \ldots, p-1\}$. Maintenant, si $x \in D$ et si $1 \leq i \leq p-1$, on a

$$\psi((1+T)^{-i}h(\varphi(x))) = \psi(h((1+T)^{-i}\varphi(x))) = h(\psi((1+T)^{-i}\varphi(x))) = 0.$$

On en déduit l'existence de $y \in D'$ tel que $h(\varphi(x)) = \varphi(y)$. On a alors

$$y = \psi(\varphi(y)) = \psi(h(\varphi(x))) = h(\psi(\varphi(x))) = h(x),$$

et donc $h \circ \varphi = \varphi \circ h$, ce qui permet de conclure.

Proposition II.3.5. — *Si $A = k_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ ou $\mathscr{E}$, si D est un (φ, Γ)-module étale sur A, si M est un sous-A-module de D stable par ψ et Γ, et si M engendre D en tant que (φ, Γ)-module, alors $M = D$.*

Démonstration. — Si $i \in \mathbf{N}$, soit $(\varphi^*)^i M$ le sous-A-module de D engendré par $\varphi^i(M)$. Si $k \in \mathbf{N}$, soit $M_k = \sum_{i=0}^{k}(\varphi^*)^i M$. Comme $\psi((\varphi^*)^i M) = (\varphi^*)^{i-1}M$, et comme $\psi(M) \subset M$ par hypothèse, on a $\psi(M_{k+1}) \subset M_k$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$. Par ailleurs, la suite M_k est une suite croissante de sous-A-modules de D ; elle est donc stationnaire, et la limite est stable par φ par construction, et par Γ puisque M l'est et φ commute à Γ. C'est donc le (φ, Γ)-module engendré par M et notre hypothèse selon laquelle

M engendre D en tant que (φ,Γ)-module se traduit par l'existence de $k\in\mathbf{N}$ tel que $M_k=D$. Ceci implique

$$D=\psi^k(D)=\psi^k(M_k)\subset M_0=M,$$

et permet de conclure.

II.4. Le module $D^\sharp$. — Dans ce §, D désigne un (φ,Γ)-module [13] étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Notre but est de prouver que D contient un plus grand treillis $D^\sharp$ sur lequel ψ est surjectif, et d'étudier les propriétés de ce module.

Lemme II.4.1. — *Si D est de torsion sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et si M est un treillis de D, on a :*

(i) *$\psi(M)$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module ;*

(ii) *si $\varphi(M)\subset M$, alors $\psi(M)\supset M$;*

(iii) *si le $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module engendré par $\varphi(M)$ contient M, alors $\psi(M)\subset M$;*

(iv) *si $\psi(M)\subset M$, alors $\psi(T^{-1}M)\subset T^{-1}M$ et, quel que soit $x\in D$, il existe $n(x,M)\in\mathbf{N}$ tel que $\psi^n(x)\in T^{-1}M$ si $n\geq n(x,M)$.*

Démonstration. — Le (i) suit de ce que $a\psi(x)=\psi(\varphi(a)x)$ et de ce que $\varphi(a)\in\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, si $a\in\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$. Le (ii) est une conséquence de l'identité $\psi(\varphi(x))=x$. Pour démontrer le (iii), considérons une famille génératrice $e_1,\dots,e_d$ de M sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$. L'hypothèse selon laquelle le $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module engendré par $\varphi(M)$ contient M signifie que l'on peut écrire tout élément x de M sous la forme $x_1\varphi(e_1)+\cdots+x_d\varphi(e_d)$, avec $x_1,\dots,x_d\in\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$. On a alors $\psi(x)=\psi(x_1)e_1+\cdots+\psi(x_d)e_d$ et comme $\psi(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+)\subset\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, cela montre que $\psi(x)\subset M$, ce qui prouve le (iii). Passons au (iv). Si $y\in M$ et si k est un entier ≥ 1, on a $\psi(\varphi^k(T)^{-1}y)=\varphi^{k-1}(T)^{-1}\psi(y)$, ce qui montre que $\psi(\varphi^k(T)^{-1}M)$ est inclus dans $\varphi^{k-1}(T)^{-1}M$, si $k\geq 1$. Comme de plus $\psi(T^{-1}M)\subset\psi(\varphi(T)^{-1}M)\subset T^{-1}M$ et comme $D=\cup_{k\in\mathbf{N}}\varphi^k(T)^{-1}M$, cela permet de conclure.

Proposition II.4.2. — *Il existe un unique treillis $D^\sharp$ de D vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *pour tous $x\in D$ et $k\in\mathbf{N}$, il existe $n(x,k)\in\mathbf{N}$ tel que $\psi^n(x)\in D^\sharp+p^kD$, si $n\geq n(x,k)$;*

(ii) *ψ induit une surjection de $D^\sharp$ sur lui-même.*

De plus,

(iii) *si N est un treillis de D et $k\in\mathbf{N}$, il existe $n(N,k)$ tel que $\psi^n(N)\subset D^\sharp+p^kD$ si $n\geq n(N,k)$;*

(iv) *si N est un treillis de D stable par ψ tel que ψ induise une surjection de N sur lui-même, alors $N\subset D^\sharp$ et $D^\sharp/N$ est tué par T.*

[13] En fait, comme l'action de Γ n'est utilisée nulle part, ce qui suit est aussi valable pour les φ-modules étales.

Démonstration. — Commençons par établir l'unicité d'un tel module. Si M_1 et M_2 sont deux tels modules, alors $M_1 + M_2$ en est un autre, ce qui permet, quitte à remplacer M_1 par $M_1 + M_2$, de supposer $M_1 \supset M_2$. Mais alors l'application induite par ψ sur M_1/M_2 est $\mathscr{O}_L$-linéaire, surjective d'après la propriété (ii) et topologiquement nilpotente d'après la propriété (i). Comme M_1/M_2 est compact, cela implique que $M_1 = M_2$; d'où l'unicité.

Passons à la démonstration de l'existence de $D^\sharp$. Commençons par supposer que D est de torsion, et choisissons (cf. lemme II.2.3) deux treillis N_0, N_1 de D vérifiant $\varphi(N_0) \subset N_0 \subset N_1 \subset \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ \cdot \varphi(N_1)$. Si $n \in \mathbf{N}$, soit $M_n = \psi^n(N_0)$. C'est un sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module de D d'après le (i) du lemme II.4.1. Par ailleurs, comme $\varphi(N_0) \subset N_0$, le (ii) du lemme II.4.1 montre que la suite M_n est croissante. Une récurrence immédiate utilisant le (iii) du lemme II.4.1 montrant que l'on a $M_n \subset N_1$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$, la suite M_n est stationnaire et sa limite M_∞ est un treillis de D vérifiant $\psi(M_\infty) = M_\infty$.

Soit $M'_n = \psi^n(T^{-1}M_\infty)$. Il résulte du (iv) du lemme II.4.1 que la suite M'_n est une suite décroissante de treillis de D contenant M_∞ ; sa limite M'_∞ est donc un treillis de D contenant M_∞ et vérifie $\psi(M'_\infty) = M'_\infty$ par construction. Comme de plus, le (iv) du lemme II.4.1 dit que, si $x \in D$, il existe $n(x) \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $\psi^n(x) \in T^{-1}M_\infty$ si $n \geq n(x)$, et comme il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $M'_m = M'_\infty$, on a $\psi^{m+n}(x) \in M'_\infty$ quel que soit $n \geq n(x)$. Tout ceci montre que M'_∞ vérifie les propriétés (i) et (ii) requises pour $D^\sharp$.

On a donc établi l'existence et l'unicité de $D^\sharp$; reste à établir les propriétés (iii) et (iv). Pour la (iii), il suffit de remarquer que, si M est un treillis de D, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que M soit inclus dans $\varphi^k(T)^{-1}D^\sharp$, que $\varphi^k(T)^{-1}D^\sharp$ est stable par ψ, et que ψ est nilpotent sur le $\mathscr{O}_L$-module $\varphi^k(T)^{-1}D^\sharp/D^\sharp$ qui est de longueur finie. Pour la (iv), on commence par remarquer que, si $\psi(N) = N$, alors $N + D^\sharp$ vérifie les propriétés (i) et (ii) et donc que $N + D^\sharp = D^\sharp$, ou encore $N \subset D^\sharp$. Finalement, l'unicité de $D^\sharp$ et les arguments permettant de le construire à partir de M_∞ (cf. ci-dessus), montrent que, si N est un treillis de D vérifiant $\psi(N) = N$, alors la suite $\psi^n(T^{-1}N)$ est décroissante et $D^\sharp$ en est la limite, ce qui montre que $D^\sharp \subset T^{-1}N$ et permet de conclure dans le cas où D est de torsion.

Maintenant, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, et si $k \in \mathbf{N}$, on peut appliquer ce qui précède à $D_k = D/p^kD$. L'application naturelle $D_{k+1} \to D_k$ induit alors une application naturelle $D_{k+1}^\sharp \to D_k^\sharp$. Celle-ci est surjective car d'une part l'image de $D_{k+1}^\sharp$ est un treillis de D_k stable par ψ sur lequel ψ est surjectif et donc $D_k^\sharp/\mathrm{Im}(D_{k+1}^\sharp)$ est tué par T et donc de type fini sur $\mathscr{O}_L$, et d'autre part, ψ est surjectif sur $D_k^\sharp/\mathrm{Im}(D_{k+1}^\sharp)$ (car il l'est sur $D_k^\sharp$) et nilpotent (car nilpotent sur $D_{k+1}/D_{k+1}^\sharp$). Soit alors M_k l'ensemble des $x \in D$ dont l'image dans D_k appartient à $D_k^\sharp$, et soit $M = \cap_{k\in\mathbf{N}} M_k$. La discussion précédente montre que M est un treillis de D vérifiant $(M+p^kD)/p^kD = D_k^\sharp$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$, ce qui permet de montrer que M vérifie les propriétés (i)-(iv) demandées, et conclut la démonstration.

Corollaire II.4.3. — *Si $x \in D$, il existe un treillis M de D contenant les $\psi^n(x)$, pour $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — Si $k \in \mathbf{N}$, alors $p^kD+D^\sharp$ contient tous les $\psi^n(x)$, pour $n \geq n(x,k)$, ce qui montre que $M = D^\sharp + \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+\psi^n(y)$ est un treillis de D.

Remarque II.4.4. — (i) Si $k \in \mathbf{N}$, alors $(D/p^kD)^\sharp = D^\sharp/(D^\sharp \cap p^kD)$ comme le montre la fin de la démonstration de la proposition. On fera attention au fait qu'en général l'application naturelle $D^\sharp/p^kD^\sharp \to (D/p^kD)^\sharp$ n'est pas un isomorphisme (i.e. n'est pas injective).

(ii) La construction de $D^\sharp$, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, montre que $D^\sharp$ est la limite projective des $(D/p^kD)^\sharp$.

Exemple II.4.5. — Si $D = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors $D^\sharp = T^{-1}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$.

Démonstration. — Constatons que $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ est un treillis de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ stable par ψ et par φ, ce qui implique que $\psi : \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ \to \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ est surjective. D'après la proposition II.4.2, ceci implique que $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ \subset \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^\sharp \subset T^{-1}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, et comme $\psi(T^{-1}) = T^{-1}$, cela démontre l'égalité $D^\sharp = T^{-1}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$.

Proposition II.4.6. — *Soit $f : D_1 \to D_2$ un morphisme de (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.*

(i) $f(D_1^\sharp) \subset D_2^\sharp$.

(ii) *Si $f : D_1 \to D_2$ est injective, alors $f : D_1^\sharp \to D_2^\sharp$ est injective.*

(iii) *Si $f : D_1 \to D_2$ est surjective, alors $f : D_1^\sharp \to D_2^\sharp$ est surjective.*

Démonstration. — $f(D_1^\sharp)$ est un sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module compact de D_2 sur lequel ψ est surjectif ; on a donc $f(D_1^\sharp) \subset D_2^\sharp$ d'après la propriété (iv) de $D_2^\sharp$ (prop. II.4.2). Ceci démontre le (i). Le (ii) est évident et pour démontrer le (iii) considérons un treillis M de D_1, stable par ψ, et dont l'image par f est $D_2^\sharp$ (pour construire un tel M, il suffit de partir d'un treillis M_0 de D_1 dont l'image par f est $D_2^\sharp$, et de prendre pour M l'adhérence de la somme des $\psi^n(M_0)$, pour $n \in \mathbf{N}$; la propriété (iii) de $D_1^\sharp$ (prop. II.4.2) montre que M est bien un treillis de D_1). Soit $x \in D_2^\sharp$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $x_n \in D_2^\sharp$ tel que $\psi^n(x_n) = x$ et $\tilde{x}_n \in M$ tel que $f(\tilde{x}_n) = x_n$. Soit $u_n = \psi^n(\tilde{x}_n)$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs dans M qui est compact, elle admet une valeur d'adhérence u. Par ailleurs, on a $u_n \in D_1^\sharp + p^kD_1$, si $n \geq n(M,k)$ d'après la propriété (iii) de $D_1^\sharp$; on en déduit l'appartenance de u à $D_1^\sharp + p^kD_1$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, et donc aussi à $D_1^\sharp$. Enfin, on a $f(u_n) = \psi^n(f(\tilde{x}_n)) = x$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, ce qui implique que $f(u)=x$ et montre que $f: D_1^\sharp \to D_2^\sharp$ est surjective. Ceci permet de conclure.

Remarque II.4.7. — Si $D_1 \to D \to D_2$ est une suite exacte de (φ,Γ)-modules, la suite $D_1^\sharp \to D^\sharp \to D_2^\sharp$ n'est, en général, pas exacte.

II.5. Le module $D^\natural$. — Dans tout ce §, D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Notre but est de montrer que :

- D contient un plus petit treillis $D^\natural$ stable par ψ et sur lequel ψ est surjectif,
- $D^\natural$ est inclus dans $D^\sharp$ et $D^\sharp/D^\natural$ est « petit ».

1. La dualité entre $D/P(\psi)D$ et $\check{D}^{P(\varphi)=0}$

Lemme II.5.1. — *L'application naturelle de $D^\sharp/P(\psi)D^\sharp$ sur la limite projective des $(D/p^kD)^\sharp/P(\psi)(D/p^kD)^\sharp$ est un isomorphisme, pour tout $P\in\mathscr{O}_L[X]$.*

Démonstration. — Notons ι cette application naturelle. D'après la remarque II.4.4, on a $(D/p^kD)^\sharp = D^\sharp/(D^\sharp\cap p^kD)$, et donc

$$(D/p^kD)^\sharp/P(\psi)(D/p^kD)^\sharp = D^\sharp/((D^\sharp\cap p^kD)+P(\psi)D^\sharp).$$

Comme $D^\sharp$ est complet, on en déduit la surjectivité de ι. Maintenant, si $x\in D^\sharp$ est dans le noyau de ι, et si ϖ est une uniformisante de L, alors, quel que soit $k\in\mathbf{N}$, on peut écrire x sous la forme $x=\varpi^k y_k + P(\psi)z_k$, avec $y_k\in D$ et $z_k\in D^\sharp$. Comme $D^\sharp$ est compact, on peut extraire de la suite z_k une sous-suite convergeant vers $z\in D^\sharp$, et un passage à la limite montre que l'on a $x=P(\psi)z$. On en déduit l'injectivité de ι, ce qui permet de conclure.

Lemme II.5.2. — *Soient $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathfrak{m}_L$.*

(i) *Si $P=1+a_{n-1}X+\cdots+a_0X^n$, alors $D/P(\psi)D = D^\sharp/P(\psi)D^\sharp = 0$.*

(ii) *Si $P=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_0$, alors $D/P(\psi)D = D^\sharp/P(\psi)D^\sharp = 0$.*

Démonstration. — Soit $(b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ la suite d'éléments de $\mathscr{O}_L$ définie par

$$(1+a_{n-1}X+\cdots a_0X^n)\Big(\sum_{i=0}^{+\infty} b_iX^i\Big)=1 \quad \text{dans } \mathscr{O}_L[[X]].$$

Comme $v_p(a_i)>0$ si $0\le i\le n-1$, cela implique que $v_p(b_i)$ tend vers $+\infty$ quand i tend vers $+\infty$. On en déduit le fait que $\sum_{i=0}^{+\infty} b_i\psi^i$ est un inverse de $P(\psi)$ sur D et $D^\sharp$, ce qui démontre la surjectivité dans le premier cas.

Dans le second, en écrivant $P(\psi)$ sous la forme $P(\psi)=\psi^n(1+a_{n-1}\varphi+\cdots+a_0\varphi^n)$, on voit que $P(\psi)$ est un inverse à gauche de $\Theta=\varphi^n\sum_{i=0}^{+\infty} b_i\varphi^i$ sur D ; on en déduit la surjectivité de $P(\psi)$ sur D.

Supposons maintenant que D est de torsion, et soit M un treillis de D stable par φ (on a donc $M\subset D^\sharp$ d'après le (ii) du lemme II.4.1 et la prop. II.4.2). Comme

M est stable par φ, on en déduit les inclusions $\Theta(M) \subset M$ et $P(\psi)M \supset M$. Soit $N = D^\sharp/P(\psi)D^\sharp$. C'est un quotient de $D^\sharp/M$ et donc un $\mathscr{O}_L$-module compact. De plus, N est tué par $P(\psi)$, ce qui implique, dans les deux cas, que $N \subset \mathfrak{m}_L N$ (dans le premier c'est évident, et dans le second cela suit de ce que ψ est surjectif sur N car il l'est sur $D^\sharp$). On en déduit la nullité de N, ce qui prouve que $P(\psi)$ est surjectif sur $D^\sharp$ dans le cas de torsion. Le cas général s'en déduisant en utilisant le lemme II.5.1, cela permet de conclure.

Corollaire II.5.3. — *Si $P \in \mathscr{O}_L[X]$ a une image non nulle dans $k_L[X]$, et si P^0 est le polynôme défini dans le lemme II.2.6, alors*

$$D/P(\psi)D = D/P^0(\psi)D \quad \text{et} \quad D^\sharp/P(\psi)D^\sharp = D^\sharp/P^0(\psi)D^\sharp.$$

Remarque II.5.4. — La même méthode montre que :

(i) si $P \in 1+X\mathfrak{m}_L[X]$, et si $M \subset D$ est fermé et stable par ψ, alors $P(\psi) : M \to M$ est surjectif ;

(ii) si $P \in \mathscr{O}_L[X]$ est unitaire, alors $P(\psi)D^{++}$ contient D^{++} (l'opérateur Θ défini ci-dessus converge sur D^{++}).

Proposition II.5.5. — *Si $P \in \mathscr{O}_L[X]$ a une image non nulle dans $k_L[X]$, l'inclusion $D^\sharp \subset D$ induit un isomorphisme $D^\sharp/P(\psi)D^\sharp \cong D/P(\psi)D$.*

Démonstration. — Le corollaire II.5.3 montre que les deux $\mathscr{O}_L$-modules considérés ne changent pas si on remplace P par P^0, ce qui permet de se ramener au cas où P est unitaire et $P(0) \in \mathscr{O}_L^*$. On peut alors, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, écrire X sous la forme $X = PQ_n + X^n R_n$, avec $Q_n, R_n \in \mathscr{O}_L[X]$.

Si $x \in D$, on peut écrire x sous la forme $x = z_n + P(\psi)\cdot y_n$, avec $z_n = R_n(\psi)\cdot\psi^n(x)$ et $y_n = Q_n(\psi)\cdot x$. Comme le sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module de D engendré par les $\psi^n(x)$, $n \in \mathbf{N}$, est contenu dans un treillis de D (cf. cor. II.4.3), on peut extraire de (z_n, y_n) une sous-suite convergeant vers $(z, y) \in D^2$, et on a $x = z + P(\psi)\cdot y$. Par ailleurs, si k est fixé, on a $\psi^n(x) \in D^\sharp + p^k D$ et donc $z_n \in D^\sharp + p^k D$ si n est assez grand. On en déduit l'appartenance de z à $D^\sharp + p^k D$, pour tout $k \in \mathbf{N}$, ce qui implique que $z \in D^\sharp$ et termine la démonstration de la surjectivité de $D^\sharp/P(\psi)D^\sharp \to D/P(\psi)D$.

Soit $x \in D^\sharp \cap P(\psi)D$. Soit $y \in D$ tel que $x = P(\psi)\cdot y$. Si $P = X^k + \cdots + a_0$, soit $M = D^\sharp + \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ y + \cdots + \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+\psi^{k-1}(y)$. Par construction, M est un treillis de D, contenant $D^\sharp$, stable par ψ car $P(\psi)y \in D^\sharp$. De plus, ψ est surjectif sur M car, si $z \in D^\sharp$ vérifie $\psi^k(z) = x$, on a

$$y = -a_0^{-1}\psi(a_1 y + a_2\psi(y) + \cdots + \psi^{k-1}(y) - z).$$

Par construction de $D^\sharp$, ceci implique $M = D^\sharp$. On en déduit l'appartenance de y à $D^\sharp$ et l'injectivité de $D^\sharp/P(\psi)D^\sharp \to D/P(\psi)D$, ce qui permet de conclure.

Proposition II.5.6. — *Soit $P \in \mathscr{O}_L[X]$ vérifiant $P(0) \in \mathscr{O}_L^*$.*

(i) *Si $z \in D$ vérifie $P(\psi) \cdot z \in D^\sharp$, alors $z \in D^\sharp$.*

(ii) *$D^{P(\psi)=0} = (D^\sharp)^{P(\psi)=0}$, et donc $D^{P(\psi)=0}$ est compact.*

Démonstration. — Il suffit de prouver que $(D/D^\sharp)^{P(\psi)=0} = 0$, ce qui suit de la nilpotence topologique de ψ sur $D/D^\sharp$ (cf. (i) de la prop. II.4.2).

Lemme II.5.7. — *Si $P \in \mathscr{O}_L[X]$ a une image non nulle dans $k_L[X]$, alors*

$$TD^\sharp \subset P(\psi)D^\sharp \subset D^\sharp.$$

Démonstration. — L'inclusion $P(\psi)D^\sharp \subset D^\sharp$ est immédiate. Pour démontrer l'inclusion $TD^\sharp \subset P(\psi)D^\sharp$, le cor. II.5.3 permet de se ramener au cas où P est unitaire et $P(0) \in \mathscr{O}_L^*$. Soit alors $(b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ la suite d'éléments de $\mathscr{O}_L$ définie par

$$X^{\deg P}P(1/X)\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k\Big) = 1 \quad (\text{dans } \mathscr{O}_L[[X]]).$$

Commençons par supposer que D est de torsion. Soit $x \in D^\sharp$, et soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\varphi(\varphi^n(T)D^\sharp) = \varphi^{n+1}(T)\varphi(D^\sharp)$ soit inclus dans $T\varphi^n(T)D^\sharp$. Comme $\psi : D^\sharp \to D^\sharp$ est surjectif, on peut trouver $y \in D^\sharp$ tel que $x = \psi^n(y)$ et on a $Tx = \psi^n(\varphi^n(T)y)$. La série $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\varphi^{k+\deg P}(\varphi^n(T)y)$ converge alors dans $D^\sharp$ (et même dans $\varphi^n(T)D^\sharp$) et sa somme z vérifie $P(\psi)z = \varphi^n(T)y$. On a donc $Tx = P(\psi)\cdot\psi^n(z)$, ce qui permet de conclure, si D est de torsion.

Dans le cas général, il résulte de ce qui précède que, si $x \in TD^\sharp$, et si $k \in \mathbf{N}$, il existe $y_k \in D^\sharp$ et $z_k \in D$ tels que l'on ait $x = P(\psi)\cdot y_k + \varpi^k z_k$. On peut alors extraire de y_k une sous-suite convergeant vers $y \in D^\sharp$, et un passage à la limite dans D montre que $x = P(\psi)\cdot y$, ce qui permet de conclure.

Lemme II.5.8. — *Si $P \in \mathscr{O}_L[X]$ a une image non nulle dans $k_L[X]$, alors $P(\psi)D$ est fermé.*

Démonstration. — On a $P(\psi)D = P^0(\psi)D$, ce qui permet de se ramener au cas où $P(0) \in \mathscr{O}_L^*$. Si D est de torsion, $P(\psi)D$ est ouvert puisqu'il contient $TD^\sharp$ d'après le lemme II.5.7. Comme $P(\psi)D$ est un sous-groupe de D, son complémentaire est ouvert en tant que réunion de translatés de l'ouvert $P(\psi)D$, et donc $P(\psi)D$ est fermé. Pour conclure dans le cas général, il suffit de prouver que l'application naturelle $P(\psi)D \to \varprojlim P(\psi)(D/p^kD)$ est un isomorphisme, ce qui montre que $P(\psi)D$ est fermé comme limite projective de fermés. L'injectivité est évidente. Maintenant, si $x \in D = \varprojlim D/p^kD$ est dans l'image de $P(\psi)$ modulo p^k, cela implique que l'on peut trouver $y_k \in D$ et $z_k \in p^kD$ tels que $x = P(\psi)y_k + z_k$. Alors, $y_{k+n} - y_k$ modulo p^k varie dans le compact $(D/p^kD)^{P(\psi)=0}$, ce qui permet, par extraction diagonale, d'extraire de la suite y_k une sous-suite convergeant modulo p^k, pour tout k, et donc ayant une limite $y \in D$. Un passage à la limite montre que $x = P(\psi)y$, ce qui prouve que $P(\psi)D \to \varprojlim P(\psi)(D/p^kD)$ est surjective, et permet de conclure.

On rappelle que, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, on dispose (rem. I.2.6) d'un isomorphisme naturel $\iota : D \to \check{D}^\vee$.

Théorème II.5.9. — *Si $P \in \mathscr{O}_L[X]$ a une image non nulle dans $k_L[X]$, alors ι induit des isomorphismes*

$$D^{P(\psi)=0} \cong (\check{D}/P(\varphi)\check{D})^\vee \quad \text{et} \quad D/P(\psi)D \cong (\check{D}^{P(\varphi)=0})^\vee.$$

Démonstration. — Le $\mathscr{O}_L$-module $(\check{D}/P(\varphi)\check{D})^\vee$ s'identifie, via ι^{-1}, au sous-ensemble des éléments x de D tels que l'on ait $\{P(\varphi)y, x\} = 0$ quel que soit $y \in \check{D}$. Comme $\{P(\varphi)y, x\} = \{y, P(\psi)x\}$, cet ensemble est aussi l'ensemble des $x \in D$ tels que, quel que soit $y \in \check{D}$, on ait $\{y, P(\psi)x\} = 0$ c'est-à-dire $D^{P(\psi)=0}$. On en déduit le premier isomorphisme.

$(\check{D}^{P(\varphi)=0})^\vee$ est le quotient de D par l'orthogonal de $\check{D}^{P(\varphi)=0}$. Or $P(\varphi)$ ayant pour adjoint $P(\psi)$, l'orthogonal de $\check{D}^{P(\varphi)=0}$ est l'adhérence de l'image de $P(\psi)$, c'est-à-dire $P(\psi)D$ puisque $P(\psi)D$ est fermé dans D (lemme II.5.8). Ceci permet de conclure.

Remarque II.5.10. — Soit $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$. En écrivant D comme la limite projective des D/p^kD, on montre que l'application naturelle $\iota : \check{D} \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}(D, \mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}})^\vee$ est encore un isomorphisme comme dans le cas de torsion. Comme $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}(D, \mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}) = (\mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} \check{D}$, le th. II.5.9 s'étend, avec une démonstration identique, sous la forme :

Si $P \in \mathscr{O}_L[X]$ a une image non nulle dans $k_L[X]$, alors ι induit des isomorphismes

$$D^{P(\psi)=0} \cong \big(((\mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} \check{D})/P(\varphi)\big)^\vee \quad \text{et} \quad D/P(\psi)D \cong \big(((\mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} \check{D})^{P(\varphi)=0}\big)^\vee.$$

2. Le foncteur $D \mapsto D^\natural$

Proposition II.5.11. — *Si M est un treillis de D stable par ψ et inclus dans $D^\sharp$, alors $D^\sharp/M$ est un $\mathscr{O}_L$-module de dimension $\leq \dim_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} D$, et $\psi : M \to M$ est surjectif.*

Démonstration. — Si D est de torsion, alors $D^\sharp/M$ est un $\mathscr{O}_L$-module de type fini puisque $D^\sharp$ et M sont des treillis de D. Il existe donc $P \in \mathscr{O}_L[X]$, unitaire, tel que $P(\psi)$ soit identiquement nul sur $D^\sharp/M$. Ceci implique que $D^\sharp/M$ est un quotient de $D^\sharp/P(\psi)D^\sharp$, et comme la dimension sur $\mathscr{O}_L$ de $D^\sharp/P(\psi)D^\sharp$ est égale à celle de $\check{D}^{P(\varphi)=0}$ d'après le th. II.5.9, le cor. II.2.8 permet de conclure, en ce qui concerne la dimension, si D est de torsion. Le cas général s'en déduit par passage à la limite en utilisant l'isomorphisme

$$D^\sharp/M = \varprojlim D^\sharp/(M + (p^kD \cap D^\sharp)) = \varprojlim (D/p^kD)^\sharp/(M/(p^kD \cap M)).$$

Maintenant, ψ induit une surjection de $D^\sharp/M$ sur $D^\sharp/\psi(M)$, et comme $\psi(M) \subset M$ par hypothèse, la composée de $D^\sharp/\psi(M) \to D^\sharp/M$ induite par l'identité sur $D^\sharp$ avec

$\psi : D^\sharp/M \to D^\sharp/\psi(M)$ est aussi surjective. Comme $D^\sharp/\psi(M)$ est de type fini sur $\mathscr{O}_L$ d'après ce qui précède, cette surjection est une bijection, et donc $D^\sharp/\psi(M) \to D^\sharp/M$ est injective et $\psi(M) = M$. Ceci termine la démonstration.

Corollaire II.5.12. — *L'ensemble des treillis de D stables par ψ admet un plus petit élément $D^\natural$, et ψ agit surjectivement sur $D^\natural$.*

Démonstration. — Notons $D^\natural$ l'intersection de tous les treillis M stables par ψ et contenus dans $D^\sharp$. Si D est tué par p^k, et si $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante de treillis stables par ψ contenus dans $D^\sharp$, alors $(D^\sharp/M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{O}_L$-modules de dimension $\leq \dim_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} D$ et qui sont tués par p^k ; elle est donc stationnaire et la suite $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est aussi stationnaire. On en déduit que $D^\sharp/D^\natural$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$ et donc que $D^\natural$ est un treillis de D qui est stable par ψ par construction. D'où le résultat, si D est de torsion. Le cas général s'en déduit par limite projective, ce qui permet de conclure.

Remarque II.5.13. — (i) Par construction, si $D \in \Phi\Gamma^{\rm et}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, alors $D^\natural$ est la limite projective des $(D/p^kD)^\natural$.

(ii) Le module $D^\natural$ vérifie la propriété suivante qui est le pendant de la propriété vérifiée par $D^\sharp$ ((i) de la prop. II.4.2) : si M est un treillis de D contenu dans $D^\natural$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $\psi^n(M + p^kD) = D^\natural + p^kD$, si n est assez grand. En effet, si $D_k = D/p^kD$, et M_k désigne l'image de M dans D_k, alors M_k contient $T^mD_k^{++}$, pour m assez grand, ce qui permet de supposer que $M_k = T^mD_k^{++}$, et donc est stable par φ. La suite des $\psi^n(M_k)$ est alors, d'après les (i) et (ii) du lemme II.4.1, une suite croissante de treillis de D_k, qui sont tous contenus dans $D_k^\natural$ puisque M_k l'est et que $D_k^\natural$ est stable par ψ. La suite des $\psi^n(M_k)$ est donc stationnaire et la limite est incluse dans $D_k^\natural$ et stable par ψ. Comme $D_k^\natural$ est le plus petit treillis stable par ψ, on a $\psi^n(M_k) = D_k^\natural$ pour n assez grand, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition II.5.14. — (i) *On a $D^{++} \subset D^+ \subset D^\natural \subset D^\sharp$.*

(ii) *Si $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit à travers $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\rm ab}$ sur $\mathbf{V}(D)$, alors $D^+ = D^\natural$ et D^{++} (resp. $D^\natural$) est strictement inclus dans D^+ (resp. $D^\sharp$) ; dans le cas contraire, l'inclusion de D^+ dans $D^\natural$ est stricte.*

(iii) *$D^\natural$ est stable par φ si et seulement si $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit à travers $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\rm ab}$ sur $\mathbf{V}(D)$; $D^\sharp$ n'est jamais stable par φ.*

Démonstration. — La seule inclusion non triviale est $D^+ \subset D^\natural$. Soit donc $z \in D^+$. Alors $T\varphi(z) \in D^{++}$, et donc $\varphi^n(T\varphi(z)) \in D^\natural + p^kD$ pour n assez grand (dépendant de k). On en déduit que $y = \psi^{n+1}(\varphi^n(T\varphi(z)))$ appartient aussi à $D^\natural + p^kD$, et comme $y = \psi(T\varphi(z)) = \psi(T)z = -z$, on a $z \in D^\natural + p^kD$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $z \in D^\natural$, ce qui démontre le (i).

Si $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit à travers $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\rm ab}$ sur $V = \mathbf{V}(D)$, on peut voir V comme un (φ, Γ)-module sur $\mathscr{O}_L$, l'action de φ étant celle de σ^{-1}, si $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\rm ab}$ est le frobenius arithmétique. Alors $D \cong \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_L} V$ en tant que (φ, Γ)-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. L'énoncé dans ce cas suit de ce que $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{++}$ est strictement inclus dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{+} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\natural}$ qui est strictement inclus dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\sharp}$.

Supposons maintenant que $D^+ = D^\natural$ et montrons que cela implique que $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit à travers $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\rm ab}$ sur $\mathbf{V}(D)$ ou, de manière équivalente, que $D^{\rm nr}$ engendre D. Soit $\overline{D} = D/\mathfrak{m}_L$ et soit M l'image de D^+ dans $\overline{D}$. Alors M est un $k_{\mathscr{E}}^+$-réseau de $\overline{D}$ contenu dans $\overline{D}^+$, et si $\overline{D}$ est de dimension d sur $k_{\mathscr{E}}$, on peut trouver une base $e_1, \dots, e_d$ de M sur $k_{\mathscr{E}}^+$, telle que $e_1, \dots, e_r$ appartiennent à $\overline{D}^{\rm nr}$ et $e_{r+1}, \dots, e_d \in \overline{D}^{++}$. Comme $D^+ = D^{\rm nr} \oplus D^{++}$, cela implique que les e_j, pour $j \leq r$, forment une base de l'image de $D^{\rm nr}$ dans $\overline{D}$; on est donc ramené à prouver que $r = d$. Supposons le contraire; on a alors $\varphi^n(e_j) \in TM$, si n est assez grand et si $j \geq r+1$, tandis que les $\varphi^n(e_j)$, pour $j \leq r$, forment une base de $\overline{D}^{\rm nr} \cap M$ sur k_L pour tout n. Il en résulte que si $j \geq r+1$ et si l'on écrit e_j sous la forme $\sum_{i=1}^d a_{j,n,i} \varphi^n(e_i)$, alors il existe $n \in \mathbf{N}$ et $i \in \{r+1, \dots, d\}$ tels que $a_{j,n,i} \notin k_{\mathscr{E}}^+$. Il existe alors $\lambda \in k_{\mathscr{E}}^+$ tel que $\lambda a_{j,n,i} = \frac{1}{T}$, et comme $\psi(\frac{1}{T}) = \frac{1}{T}$, cela implique que $\psi^n(\lambda e_j)$, qui est égal à $\sum_{i=1}^d \psi^n(\lambda a_{n,j,i}) e_i$, n'appartient pas à M. Ceci étant en contradiction avec la stabilité de $D^\natural$ sous l'action de ψ, cela termine la démonstration du (ii).

Le (iii) étant une conséquence directe du (ii), cela permet de conclure.

Proposition II.5.15. — *Si $P \in \mathscr{O}_L[X]$ n'est pas nul modulo $\mathfrak{m}_L$, alors $P(\psi)$ induit une surjection de $D^\natural$ sur $D^\natural$.*

Démonstration. — Commençons par supposer que D est de torsion. L'image M de $D^\natural$ par $P(\psi)$ est un sous-module compact (puisque $D^\natural$ l'est) de $D^\natural$, sur lequel ψ agit de manière surjective (puisque ψ et $P(\psi)$ commutent et que ψ est surjectif sur $D^\natural$). De plus, M est ouvert dans D puisqu'il contient D^{++} (cela découle, en factorisant P, de la rem. II.5.4). Ceci implique que, si $\lambda \in T\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, alors $\varphi^n(\lambda)M \subset M$ si n est assez grand. Choisissons un tel n. Comme $\psi : M \to M$ est surjectif, on peut écrire x sous la forme $\psi^n(x_n)$, avec $x_n \in M$, et comme $\varphi^n(\lambda)x_n \in M$, on a $\psi^n(\varphi^n(\lambda)x_n) = \lambda x \in M$. On en déduit que M est un treillis, et comme $D^\natural$ est le plus petit treillis de D stable par ψ, cela permet de conclure si D est de torsion. Le cas général s'en déduit en utilisant la compacité de $D^\natural$.

Exemple II.5.16. — Si $D = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors $D^\natural$ contient $TD^\sharp = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, d'après l'ex. II.4.5, et comme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ est stable par ψ, on a $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^\natural = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$. Comme la transformée d'Amice induit un isomorphisme $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L) \cong \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, on a aussi $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^\natural \cong \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L)$.

Proposition II.5.17. — *Soit $f : D_1 \to D_2$ un morphisme de (φ, Γ)-modules étales sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.*

(i) $f(D_1^\natural) \subset D_2^\natural$.

(ii) *Si $f : D_1 \to D_2$ est injective, alors $f : D_1^\natural \to D_2^\natural$ est injective.*
(iii) *Si $f : D_1 \to D_2$ est surjective, alors $f : D_1^\natural \to D_2^\natural$ est surjective.*

Démonstration. — On sait déjà (prop. II.4.6) que $f(D_1^\natural) \subset f(D_1^\sharp)$ est inclus dans $D_2^\sharp$. Soit M l'image inverse de $D_2^\natural$ dans $D_1^\natural$. Comme $D_2^\sharp/D_2^\natural$ est un $\mathscr{O}_L$-module de type fini, et comme $D_1^\natural$ est un treillis de D_1, on en déduit que M est un treillis de D_1. De plus, M est stable par ψ ; il contient donc $D_1^\natural$ et donc $f(D_1^\natural) \subset D_2^\natural$. Ceci démontre le (i). Le (ii) est évident et pour démontrer le (iii), il suffit de remarquer que si f est surjective, alors $f(D_1^\natural)$ est un treillis de D_2 stable par ψ et donc contient $D_2^\natural$.

Remarque II.5.18. — Si $D_1 \to D \to D_2$ est une suite exacte de (φ, Γ)-modules, la suite $D_1^\natural \to D^\natural \to D_2^\natural$ n'est, en général, pas exacte.

3. Dualité

Proposition II.5.19. — *Soit $D \in \Phi\Gamma_{\mathrm{tors}}^{\mathrm{et}}$.*
(i) *Dans la dualité entre $\check{D}$ et D, l'orthogonal de $D^\natural$ est $\check{D}^+$ et celui de $D^\sharp$ est $\check{D}^{++}$.*
(ii) *$D^\sharp$, $D^\natural$ et $D^\sharp/D^\natural$ sont respectivement les duaux de $\check{D}/\check{D}^{++}$, $\check{D}/\check{D}^+$ et $\check{D}^{\mathrm{nr}}$.*

Démonstration. — $(D^\natural)^\perp$ est un treillis de $\check{D}$, et comme $D^\natural$ est stable par ψ, cela implique que $(D^\natural)^\perp$ est stable par φ et donc inclus dans $\check{D}^+$.

Soient $x \in \check{D}^{++}$ et $y \in D^\sharp$. Comme $\psi : D^\sharp \to D^\sharp$ est surjectif, on peut écrire y sous la forme $\psi^n(y_n)$, avec $y_n \in D^\sharp$, et ce pour tout $n \in \mathbf{N}$. Il en résulte que $\{x, y\} = \{x, \psi^n(y_n)\} = \{\varphi^n(x), y_n\}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Or y_n varie dans un compact et $\varphi^n(x) \to 0$, ce qui prouve, en passant à la limite, que $\{x, y\} = 0$. On en déduit les inclusions

$$\check{D}^{++} \subset (D^\sharp)^\perp \subset (D^\natural)^\perp \subset \check{D}^+$$

et les inégalités

$$\lg_{\mathscr{O}_L} D^\sharp/D^\natural = \lg_{\mathscr{O}_L} (D^\natural)^\perp/(D^\sharp)^\perp \leq \lg_{\mathscr{O}_L} \check{D}^+/\check{D}^{++} = \lg_{\mathscr{O}_L} \check{D}^{\mathrm{nr}}.$$

Soit alors $P \in \mathscr{O}_L[X]$, unitaire, tel que $P(\varphi)$ annule $\check{D}^{\mathrm{nr}} = \check{D}^+/\check{D}^{++}$, et donc aussi $(D^\natural)^\perp/(D^\sharp)^\perp$. Par dualité $P(\psi)$ annule $D^\sharp/D^\natural$, et comme $P(\psi)$ est surjectif sur $D^\natural$ (cf. prop. II.5.15), on a $D^\natural = P(\psi)D^\sharp$. On en déduit (prop. II.5.5 et th. II.5.9) que $D^\sharp/D^\natural = D^\sharp/P(\psi)D^\sharp$ est le dual de $\check{D}^{P(\varphi)=0}$ qui contient $\check{D}^{\mathrm{nr}}$ par construction. On a donc $\lg_{\mathscr{O}_L} D^\sharp/D^\natural \geq \lg_{\mathscr{O}_L} \check{D}^{\mathrm{nr}}$, ce qui prouve que les inégalités ci-dessus sont en fait des égalités. Il en est donc de même des inclusions $\check{D}^{++} \subset (D^\sharp)^\perp$ et $(D^\natural)^\perp \subset \check{D}^+$. Ceci démontre le (i) et, le (ii) étant une conséquence immédiate du (i), cela permet de conclure.

Corollaire II.5.20. — (i) *Si D est un (φ, Γ)-module sur $\mathscr{E}$, alors $\check{D}^\sharp/\check{D}^\natural$ est le dual de D^{nr}.*
(ii) *Si D est un (φ, Γ)-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors $\check{D}^\sharp/\check{D}^\natural$ est égal à $\big(((\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) \otimes D)^{\mathrm{nr}}\big)^\vee$.*

Démonstration. — Le (i) se déduit du (ii) par tensorisation par L, et le (ii) se déduit du (ii) de la prop. II.5.19, en utilisant les isomorphismes $D^\sharp = \varprojlim D_k^\sharp$ et $D^\natural = \varprojlim D_k^\natural$, où $D_k = D/p^k D$.

Corollaire II.5.21. — *(i) Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ est irréductible de rang ≥ 2, alors $D^\sharp/D^\natural$ est un $\mathscr{O}_L$-module de torsion et de type fini.*

(ii) Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ est irréductible de dimension ≥ 2, alors $D^\sharp = D^\natural$.

Démonstration. — Soit, comme d'habitude, V la représentation $\mathbf{V}(D)$. Sous les hypothèses du (i), on a $V^{\mathscr{H}'} = 0$. On en déduit, en utilisant le (ii) de la rem. II.2.4, que $((\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) \otimes D)^{\mathrm{nr}}$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, ce qui permet de déduire le (i) du (ii) du cor. II.5.20. Le (ii) s'en déduisant par tensorisation par L, cela permet de conclure.

4. L'application $\mathrm{rés}_0 : D \to D^\sharp/D^\natural$

Soit D un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Si $z \in D$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $D^\sharp$ telle que $\psi^n(z) - x_n \to 0$ ((i) de la prop. II.4.2). Or ψ est inversible (car surjective) sur $D^\sharp/D^\natural$ qui est un $\mathscr{O}_L$-module de type fini, et donc

$$\psi^{-n}(x_n) - \psi^{-n-1}(x_{n+1}) = \psi^{-n}(x_n - \psi^n(z)) - \psi^{-n-1}(x_{n+1} - \psi^{n+1}(z))$$

tend vers 0 dans $D^\sharp/D^\natural$, ce qui implique que $(\psi^{-n}(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite dans $D^\sharp/D^\natural$. On note $\mathrm{rés}_0(z)$ cette limite.

Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, on définit $\mathrm{rés}_0 : D \to D^\sharp/D^\natural$ en choisissant un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau D_0 de D, stable par φ et Γ, et en étendant par L-linéarité l'application $\mathrm{rés}_0 : D_0 \to D_0^\sharp/D_0^\natural$ définie ci-dessus.

Par exemple, si $D = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, on a $D^\sharp/D^\natural = \mathscr{O}_L \cdot \frac{1}{T}$ et $\mathrm{rés}_0(f) = \frac{1}{T}\mathrm{rés}_0(f\,\frac{dT}{1+T})$, où $\mathrm{rés}_0(f\,\frac{dT}{1+T})$ est l'élément de $\mathscr{O}_L$ apparaissant dans la prop. I.2.2.

Proposition II.5.22. — *Soit D un (φ,Γ)-module étale.*

(i) Si $z \in D$, alors :

- $\mathrm{rés}_0(\sigma_a(z)) = \sigma_a(\mathrm{rés}_0(z))$, *pour tout* $a \in \mathbf{Z}_p^*$,
- $\mathrm{rés}_0(\varphi(z)) = \psi^{-1}(\mathrm{rés}_0(z))$ *et* $\mathrm{rés}_0(\psi(z)) = \psi(\mathrm{rés}_0(z))$,
- $\mathrm{rés}_0(\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} z) = \mathrm{rés}_0(z)$, *pour*[14] *tout* $n \in \mathbf{N}$.

(ii) $\mathrm{rés}_0(z) = 0$ *si et seulement si il existe $x \in D^\natural$ tel que* $\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}(z-x)$ *tende p-adiquement vers 0 quand $n \to +\infty$.*

Démonstration. — Le (i) est immédiat sur la définition de $\mathrm{rés}_0$ (la dernière propriété suit de la seconde et de ce que $\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} = \varphi^n \circ \psi^n$). Maintenant, comme $\mathrm{rés}_0(x) = 0$ si $x \in D^\natural$, on déduit du (i) que $\mathrm{rés}_0(z) = 0$ s'il existe $x \in D^\natural$ tel que $\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}(z-x)$ tende p-adiquement vers 0.

(14) L'application $\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}$ est égale à $\varphi^n \circ \psi^n$; elle est généralisée au n° 2 du § III.1.

Pour démontrer la réciproque, on peut se contenter du cas où D est étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, le cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ s'en déduisant en tensorisant par L. Soit $c \in \mathbf{N} - \{0\}$ tel que p^c tue le sous-$\mathscr{O}_L$-module de torsion $(D^\sharp/D^\natural)_{\mathrm{tors}}$ de $D^\sharp/D^\natural$. D'après le (i) de la prop. II.4.2, il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que $\psi^{n_1}(z) \in D^\sharp + p^{2c}D$, et l'hypothèse $\mathrm{rés}_0(z) = 0$ implique que l'on a alors $\psi^{n_1}(z) \in D^\natural + p^{2c}D$. Comme $\psi : D^\natural \to D^\natural$ est surjectif, on en déduit l'existence de $x_1 \in D^\natural$ tel que $\psi^{n_1}(z - x_1) \in p^{2c}D$. Comme $\mathrm{rés}_0(\psi^{n_1}(z - x_1)) = 0$, et comme p^c tue $(D^\sharp/D^\natural)_{\mathrm{tors}}$, cela implique que $\mathrm{rés}_0(p^{-c}\psi^{n_1}(z - x_1)) = 0$ puisque

$$\mathrm{rés}_0(p^{-c}\psi^{n_1}(z - x_1)) = p^c\mathrm{rés}_0(p^{-2c}\psi^{n_1}(z - x_1)).$$

En réitérant le raisonnement précédent, cela nous fournit $n_2 \in \mathbf{N}$ et $x_2 \in D^\natural$ tels que $\psi^{n_2}(p^{-c}\psi^{n_1}(z - x_1) - \psi^{n_1}(x_2)) \in p^{2c}D$ et donc $\psi^{n_1+n_2}(z - x_1 - p^c x_2) \in p^{3c}D$. Une récurrence immédiate nous fournit donc des entiers n_j et des éléments x_j de $D^\natural$ tels que

$$\psi^{n_1+\cdots+n_k}(z - x_1 - \cdots - p^{(k-1)c}x_k) \in p^{(k+1)}D, \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{N}.$$

Soit alors $x = \sum_{j=1}^{+\infty} p^{(j-1)c}x_j$; c'est un élément de $D^\natural$ qui vérifie $\psi^n(z - x) \in p^{kc}D$ (et donc $\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}(z - c) \in p^{kc}D$) pour tout $n \geq n_1 + \cdots + n_k$. On en déduit le résultat.

II.6. Une autre construction de $D^\natural$ et $D^\sharp$. — Dans ce §, on définit par dualité, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, les modules $D^\natural$ et $D^\sharp$, en s'inspirant de la prop. II.5.19, et on montre comment retrouver leurs principales propriétés.

On dit qu'un sous-ensemble M de D est *φ-saturé* s'il est stable par φ et si $\varphi(x) \in M$ implique $x \in M$. Il est immédiat, sur la définition, que D^+ et D^{++} sont φ-saturés.

Proposition II.6.1. — *Soient $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ et M un treillis de D.*
(i) *Si M est stable par φ, alors $M \subset D^+$.*
(ii) *Si M est φ-saturé, alors $M \supset D^{++}$.*

Démonstration. — Si M est stable par φ et $x \in M$, on a $\varphi^n(x) \in M$ pour tout M, et donc la suite $(\varphi^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. On en déduit le (i).

D^{++} est, comme tout treillis, de type fini sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$; on peut donc en choisir une famille génératrice finie $(e_i)_{i\in I}$. Maintenant, M étant ouvert, il résulte de la définition de D^{++} que $\varphi^n(e_i) \in M$, pour n assez grand ; on en déduit l'existence de n tel que $\varphi^n(D^{++}) \subset M$, et M étant supposé saturé, cela implique que $D^{++} \subset M$. Ceci permet de conclure.

Lemme II.6.2. — *Soient $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ et M un treillis de D.*

(i) *Les conditions « M est stable par φ » et « $M^\perp$ est stable par ψ » sont équivalentes ; les conditions « $M^\perp$ est stable par φ » et « M est stable par ψ » sont équivalentes.*

(ii) *Les conditions « M est φ-saturé » et « ψ induit une surjection de $M^\perp$ sur lui-même » sont équivalentes; les conditions « $M^\perp$ est φ-saturé » et « ψ induit une surjection de M sur lui-même » sont équivalentes.*

Démonstration. — Le (i) est une conséquence formelle de ce que ψ est l'adjoint de φ.

Le (ii) suit de ce que les conditions $x \in \psi(M^\perp)^\perp$ et $\varphi(x) \in (M^\perp)^\perp = M$ sont équivalentes.

Si $D \in \Phi\Gamma^{\rm et}_{\rm tors}$, on définit $D^\natural$ et $D^\sharp$ comme les orthogonaux respectifs de $\check{D}^+$ et $\check{D}^{++}$.

Proposition II.6.3. — (i) *$D^\natural$ et $D^\sharp$ sont stables par ψ qui agit surjectivement.*

(ii) *$D^\natural$ est le plus petit treillis de D stable par ψ.*

(iii) *$D^\sharp$ est le plus grand treillis de D sur lequel ψ agit surjectivement.*

Démonstration. — Le (i) est une conséquence directe du lemme II.6.2 puisque $\check{D}^+$ et $\check{D}^{++}$ sont φ-saturés.

Maintenant, si M est stable par ψ, alors $M^\perp$ est stable par φ et donc est inclus dans $\check{D}^+$ d'après la prop. II.6.1; son orthogonal, qui n'est autre que M, contient donc $D^\natural$, ce qui démontre le (ii).

Enfin, si $\psi : M \to M$ est surjectif, alors $M^\perp$ est φ-saturé d'après le lemme II.6.2 et donc contient $\check{D}^{++}$ d'après la prop. II.6.1; son orthogonal, qui n'est autre que M, est donc contenu dans $D^\sharp$, ce qui démontre le (ii).

Proposition II.6.4. — *Si M est un treillis, alors $\psi^n(M) \subset D^\sharp$ et $\psi^n(M) \supset D^\natural$, pour tout n assez grand.*

Démonstration. — On a $\varphi^n(\check{D}^{++}) \subset M^\perp$ et donc $\psi^n(M) \subset (\check{D}^{++})^\perp = D^\sharp$, pour tout n assez grand, d'où la première inclusion. Pour démontrer la seconde, on peut, quitte à diminuer M, supposer que $M = \varphi^n(T)D^+$. On a alors $\varphi(M) \subset M$, et donc $\psi(M) \supset M$, ce qui fait que la suite des $\psi^k(M)$ est une suite croissante de treillis de D inclus dans $D^\natural$ (puisque M l'est et que $D^\natural$ est stable par ψ). La suite est donc stationnaire et la limite est un treillis de D stable par ψ, et qui, de ce fait, contient $D^\natural$ (prop. II.6.3). On en déduit l'inclusion $\psi^n(M) \supset D^\natural$, pour tout n assez grand, ce qui permet de conclure.

Proposition II.6.5. — *Si $f : D \to D_2$ est un morphisme surjectif d'éléments de $\Phi\Gamma^{\rm et}_{\rm tors}$, alors f induit des surjections de $D^\natural$ sur $D_2^\natural$ et de $D^\sharp$ sur $D_2^\sharp$.*

Démonstration. — Soit $D_1 = \operatorname{Ker} f$, et soit M l'image de $\check{D}^+$ dans $\check{D}_1$; c'est un treillis de $\check{D}_1$ car $\check{D}^+$ étant un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module de type fini, il en est de même de son image par la surjection naturelle $\check{D} \to \check{D}_1$. Dans le diagramme commutatif suivant, les deux lignes horizontales sont exactes par définition de $D^\natural$ et dualité de Pontryagin, la colonne du milieu l'est par hypothèse et celle de droite par dualité de Pontryagin.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & D_1 \arrow[r] \arrow[d] & M^\vee \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & D^\natural \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & (\check{D}^+)^\vee \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D_2^\natural \arrow[r] & D_2 \arrow[r] \arrow[d] & (\check{D}_2^+)^\vee \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Comme $D_1 \to M^\vee$ est surjective par dualité de Pontryagin, il résulte du lemme du serpent que $D^\natural \to D_2^\natural$ l'est aussi. Le raisonnement étant identique pour $D^\sharp \to D_2^\sharp$, cela permet de conclure.

Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, on définit $D^\natural$ et $D^\sharp$ comme les limites projectives respectives des $(D/p^kD)^\natural$ et $(D/p^kD)^\sharp$.

Remarque II.6.6. — (i) Il résulte de la prop. II.6.5 que la réduction modulo p^k induit des surjections de $D^\natural$ sur $(D/p^kD)^\natural$ et de $D^\sharp$ sur $(D/p^kD)^\sharp$, pour tout $k \in \mathbf{N}$.

(ii) Il résulte de la prop. II.6.4 que, si M est un treillis de D, et si $k \in \mathbf{N}$, alors $\psi^n(M) \subset D^\sharp + p^kD$ et $\psi^n(M) + p^kD \supset D^\natural$, pour tout n assez grand.

II.7. Surconvergence de $D^\sharp$. — Si $r > 0$ et si $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, on définit $v^{[0,r]}(f)$ par la formule

$$v^{[0,r]}(f) = \min\big(\inf_{k\in\mathbf{Z}} v_p(a_k), \inf_{k\in\mathbf{Z}} (v_p(a_k) + rk)\big),$$

et on note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]} = \{f,\ v^{[0,r]}(f) > -\infty \text{ et } \lim_{k\to+\infty} v_p(a_k) + rk = +\infty\}$. Alors $v^{[0,r]}$ est une valuation sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$ pour laquelle il est complet. On note $Z^{(0,r]}$ l'anneau des entiers de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$ pour cette valuation ; on a alors $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]} = Z^{(0,r]}[\frac{1}{T}]$, et $Z^{(0,r]}$ est un treillis de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.

Par ailleurs, on dispose [**11**] d'un sous-anneau $\mathbf{A}^{(0,r]}$ de $\mathbf{A}$, stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et l'on a [15]

$$\varphi(\mathbf{A}^{(0,r]}) \subset \mathbf{A}^{(0,r/p]} \quad \text{et} \quad (\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}^{(0,r]})^{\mathscr{H}} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,\frac{p-1}{p}r]}, \text{ si } r < 1.$$

Ceci permet, si V est une $\mathscr{O}_L$-représentation libre de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de définir un sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$-module $\mathbf{D}^{(0,\frac{pr}{p-1}]}(V)$ de $\mathbf{D}(V)$, en posant

$$\mathbf{D}^{(0,\frac{pr}{p-1}]}(V) = (\mathbf{A}^{(0,\frac{pr}{p-1}]} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}.$$

De même, si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, cela permet de définir un sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$-module $D^{(0,r]}$ de D, en posant $D^{(0,r]} = \mathbf{D}^{(0,\frac{pr}{p-1}]}(\mathbf{V}(D))$.

Le résultat principal [**5, 6**] concernant ces objets est que, si D est de rang d, alors $D^{(0,r]}$ est libre de rang $\leq d$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$, et que si, $r > 0$ est assez petit, $D^{(0,r]}$ est libre de rang d et, dans ce cas,

$$(\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}} D^{(0,r]} = (\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} D.$$

Proposition II.7.1. — *Si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ est de rang d, et si $r > 0$ est assez petit, il existe une base $f_1, \dots, f_d$ de $D^{(0,r]}$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$ telle que le sous-module M engendré par $f_1, \dots, f_d$ sur $Z^{(0,r]}$ vérifie la condition $\psi(M) \subset M$.*

Démonstration. — Soit $r > 0$ assez petit pour que $D^{(0,r]}$ soit de rang d. Soit $e_1, \dots, e_d$ une base de $D^{(0,r]}$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$. Alors $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d)$ sont des éléments de $D^{(0,r/p]}$, linéairement indépendants sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et le sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r/p]}$-module M_0 qu'ils engendrent est stable par Γ. Comme un idéal non nul de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r/p]}$, stable par Γ, est engendré par un élément divisant $\varphi^n(T)^c$, si n et c sont assez grands, on en déduit l'existence de $c \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}$ tels que $\varphi^n(T)^{-c}M_0$ contienne $D^{(0,r/p]}$. En particulier, il existe $a_{i,j} \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r/p]}$, pour $1 \leq i,j \leq d$, tels que l'on ait $e_i = \sum_{j=1}^{d} a_{i,j}\varphi^n(T)^{-c}\varphi(e_j)$, si $1 \leq i \leq d$. Soit $b \in \mathbf{N}$ tel que $v^{[0,r/p]}(a_{i,j}) + (b+c)r \geq 1$ quels que soient $1 \leq i,j \leq d$, et soient

$$\alpha = \varphi^{n-1}(T)^c \varphi^{n-2}(T)^c \cdots T^{c+b},$$

et $f_i = \alpha^{-1}e_i$, si $i \in \{1, \dots, d\}$. On a alors

$$f_i = \sum_{j=1}^{d} b_{i,j}\,\varphi(f_j), \quad \text{avec } b_{i,j} = (T^{-1}\varphi(T))^{c+b}a_{i,j},$$

$$\begin{aligned} v^{[0,r/p]}(b_{i,j}) &= (c+b)v^{[0,r/p]}(T^{-1}\varphi(T)) + v^{[0,r/p]}(a_{i,j}) \\ &= (c+b)r + v^{[0,r/p]}(a_{i,j}) \geq 1. \end{aligned}$$

[15] Ce regrettable décalage vient de ce que $v_{\mathbf{E}}(T) = \frac{p}{p-1}$.

Montrons que les f_i, $1 \leq i \leq d$ que nous venons de construire conviennent. Soit M le sous-$Z^{(0,r]}$-module qu'ils engendrent. Si $x \in M$, on peut écrire x sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i f_i = \sum_{j=1}^{d} y_j \varphi(f_j), \quad \text{avec } y_j = \sum_{i=1}^{d} b_{i,j} x_i.$$

On a alors $v^{[0,r]}(x_i) \geq 0$, et donc $y_j \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r/p]}$ vérifie $v^{[0,r/p]}(y_j) \geq 1$. Or d'après [**14**, prop.1.13], ceci implique que $\psi(y_j) \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$ vérifie $v^{[0,r]}(\psi(y_j)) \geq 0$, et comme $\psi(x) = \sum_{j=1}^{d} \psi(y_j) f_j$, on en déduit l'inclusion $\psi(M) \subset M$ qui permet de conclure.

Corollaire II.7.2. — *Il existe un sous-$Z^{(0,r]}$-module M de $D^{(0,r]}$, libre de rang d, contenant $D^\sharp$.*

Démonstration. — Soient $f_1, \dots, f_d \in D^{(0,r]}$ fournis par la proposition II.7.1, et soit M' le sous-$Z^{(0,r]}$-module de $D^{(0,r]}$ engendré par $f_1, \dots, f_d$. Alors M' est un treillis de D contenu dans $D^{(0,r]}$, tel que $\psi(M') \subset M'$. Comme $D^\sharp$ est un treillis de D, il existe $n(M',k)$ tel que $D^\sharp \subset \varphi^{n(M',k)}(T)^{-1}M' + p^k D$, si $k \in \mathbf{N}$. En appliquant $\psi^{n(M',k)}$ à cette inclusion, on en déduit, quel que soit $k \in \mathbf{N}$, l'inclusion $D^\sharp \subset T^{-1}M' + p^k D$, ce qui montre que l'on peut prendre $M = T^{-1}M'$.

III. Les foncteurs $D \mapsto D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$

Ce chapitre est consacré à l'étude des $P(\mathbf{Q}_p)$-modules $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$, $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ que l'on peut construire à partir d'un (φ, Γ)-module étale D. Il se termine par une étude détaillée de l'action de Γ sur $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$.

III.1. Construction de représentations du mirabolique

1. $(P(\mathbf{Z}_p), \psi)$-modules et représentations de $P(\mathbf{Q}_p)$. — On note $P = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ le sous-groupe mirabolique de $\mathbf{GL}_2$. Si A est un anneau, on note $P(A) \subset \mathbf{GL}_2(A)$ le groupe des éléments de P à coefficients dans A. On a donc, en particulier, $P(\mathbf{Q}_p) = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $P(\mathbf{Z}_p) = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Un $(P(\mathbf{Z}_p), \psi)$-*module* M est un $\mathscr{O}_L$-module topologique muni d'une action continue de $P(\mathbf{Z}_p)$ et d'un opérateur $\mathscr{O}_L$-linéaire continu ψ, surjectif, commutant à l'action de $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et tel que $\psi(\left(\begin{smallmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \psi(z)$, si $b \in \mathbf{Z}_p$ et $z \in M$.

Les exemples auxquels nous aurons affaire sont les suivants.

– L'espace $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, A)$ des mesures sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans A, où $A = k_L, \mathscr{O}_L, L, \dots$, est naturellement un $(P(\mathbf{Z}_p), \psi)$-module, l'action de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in P(\mathbf{Z}_p)$ sur $\mu \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, A)$ étant donnée par $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(ax+b)\, \mu$, et $\psi = \left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}$ étant défini par $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi\, \psi(\mu) = \int_{p\mathbf{Z}_p} \phi(p^{-1}x)\, \mu$.

– Un (φ,Γ)-module D est aussi naturellement un $(P(\mathbf{Z}_p),\psi)$-module, l'action de ψ étant l'action précédemment définie, et celle de $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \in P(\mathbf{Z}_p)$ étant donnée par $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z = (1+T)^b\sigma_a(z)$. Les sous-modules $D^\sharp$ et $D^\natural$, étant stables par ψ et $P(\mathbf{Z}_p)$, sont aussi des exemples de $(P(\mathbf{Z}_p),\psi)$-modules.

Si M est un $(P(\mathbf{Z}_p),\psi)$-module, on définit $M\boxtimes\mathbf{Q}_p$ comme l'ensemble des suites [16] $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de M, telles que $\psi(x^{(n+1)}) = x^{(n)}$, pour tout $n\in\mathbf{N}$.

Proposition III.1.1. — *Sur $M\boxtimes\mathbf{Q}_p$, il existe une unique action de $P(\mathbf{Q}_p)$ telle que :*
(a) *si $a\in\mathbf{Z}_p^*$, alors $\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot(x^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} = (\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$;*
(b) *si $k\in\mathbf{Z}$, alors $\left(\begin{smallmatrix} p^k & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot(x^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} = (x^{(n+k)})_{n\in\mathbf{Z}}$;*
(c) *si $b\in\mathbf{Q}_p$, alors $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot(x^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} = (y^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$, avec $y^{(n)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^nb\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x^{(n)}$ si $p^nb\in\mathbf{Z}_p$, et $y^{(n)} = \psi^{-v_p(b)-n}\big(y^{(-v_p(b))}\big)$, si $n\le -v_p(b)$.*

Démonstration. — Remarquons qu'un élément $x=(x^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ de $M\boxtimes\mathbf{Q}_p$ est uniquement déterminé, si on connaît $x^{(n)}$ pour tout n assez grand, puisqu'il suffit d'itérer ψ pour récupérer les $x^{(n)}$ manquants. Soit $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\in P(\mathbf{Q}_p)$, et soit $r=v_p(a)$. Comme $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} p^{-r}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} p^r & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, et comme $p^{-r}a\in\mathbf{Z}_p^*$, une action de groupe de $P(\mathbf{Q}_p)$ sur $M\boxtimes\mathbf{Q}_p$ vérifiant les propriétés (a), (b) et (c) de la proposition doit être donnée par la formule

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot(x^{(n)})_{n\gg0} = \Big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^nb\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} p^{-r}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x^{(n+r)}\Big)_{n\gg0} = \Big(\left(\begin{smallmatrix} p^{-r}a & p^nb\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x^{(n+r)}\Big)_{n\gg0}.$$

Une telle action, si elle existe, est donc unique. Soient alors $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} a' & b'\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ deux éléments de $P(\mathbf{Q}_p)$, soient $r=v_p(a)$ et $r'=v_p(a')$, et soit $y^{(n)} = \left(\begin{smallmatrix} p^{-r}a & p^nb\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x^{(n+r)}$, si $n\gg0$. On a

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix} a' & b'\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\Big(\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot(x^{(n)})_{n\gg0}\Big) &= \Big(\left(\begin{smallmatrix} p^{-r'}a' & p^nb'\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot y^{(n+r')}\Big)_{n\gg0}\\ &=\Big(\left(\begin{smallmatrix} p^{-r'}a' & p^nb'\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} p^{-r}a & p^{n+r'}b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x^{(n+r'+r)}\Big)_{n\gg0}\\ &=\Big(\left(\begin{smallmatrix} p^{-(r+r')}aa' & p^n(b'+a'b)\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x^{(n+r'+r)}\Big)_{n\gg0} = \left(\begin{smallmatrix} aa' & b'+a'b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot(x^{(n)})_{n\gg0}\end{aligned}$$

et comme $\left(\begin{smallmatrix} a' & b'\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} aa' & b'+a'b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, cela montre que l'on a bien défini une action de groupe.

Remarque III.1.2. — On dispose d'une action naturelle de $P(\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p,\mathscr{O}_L)$ (définie par $\int_{\mathbf{Q}_p}\phi(x)\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu = \int_{\mathbf{Q}_p}\phi\big(ax+b\big)\,\mu\big)$ et d'un isomorphisme de $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p,\mathscr{O}_L)$ sur $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p,\mathscr{O}_L)\boxtimes\mathbf{Q}_p$ envoyant μ sur $\big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\big(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mu\big)\big)_{n\in\mathbf{N}}$. L'action de $P(\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p,\mathscr{O}_L)\boxtimes\mathbf{Q}_p$, se déduisant de celle sur $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p,\mathscr{O}_L)$ via cet isomorphisme, est celle

(16) Notons que, si on pose $w^{(n)} = \psi^{-n}(w^{(0)})$, si $n\le -1$, on obtient une bijection de $M\boxtimes\mathbf{Q}_p$ sur l'ensemble des suites sur $\mathbf{Z}$ vérifiant les propriétés ci-dessus. Nous utiliserons donc indifféremment la notation $(w^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ ou $(w^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ pour désigner un élément de $M\boxtimes\mathbf{Q}_p$.

de la proposition (cf. [**13**, n° II.5]). C'est d'ailleurs comme ça que les formules de la proposition ont été obtenues.

2. $(P(\mathbf{Z}_p),\varphi,\psi)$-modules et restriction à un ouvert compact. — Un $(P(\mathbf{Z}_p),\varphi,\psi)$-module est un $(P(\mathbf{Z}_p),\psi)$-module muni en plus d'un opérateur injectif φ vérifiant les conditions suivantes :

- $\varphi\circ\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1&pb\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi$, si $b\in\mathbf{Z}_p$, et $\varphi\circ\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi$, si $a\in\mathbf{Z}_p^*$;
- $\psi\circ\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi=0$, si $b\in\mathbf{Z}_p^*$ et $\psi\circ\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi=\left(\begin{smallmatrix}1&p^{-1}b\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, si $b\in p\mathbf{Z}_p$;
- $\sum_{i=0}^{p-1}\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi\circ\psi\circ\left(\begin{smallmatrix}1&-i\\0&1\end{smallmatrix}\right)=\mathrm{id}$.

Notons que les conditions $\varphi\circ\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1&pb\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi$ et $\varphi\circ\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi$ sont équivalentes à ce que l'action de $P(\mathbf{Z}_p)$ se prolonge en une action du semi-groupe $P^+=\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p-\{0\}&\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, l'action de $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ étant définie par $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot z=\varphi(z)$.

La condition $\psi\circ\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi=\left(\begin{smallmatrix}1&p^{-1}b\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, si $b\in p\mathbf{Z}_p$, implique en particulier que ψ est un inverse à gauche de φ ; on en déduit que $\left(\begin{smallmatrix}1&i\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi\circ\psi\circ\left(\begin{smallmatrix}1&-i\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ est un projecteur, si $i\in\{0,\dots,p-1\}$. La condition $\psi\circ\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi=0$, si $b\in\mathbf{Z}_p^*$, assure quant à elle que ces projecteurs sont orthogonaux deux à deux (la composée de deux d'entre eux est nulle si $i\neq j$).

Parmi les $(P(\mathbf{Z}_p),\psi)$-modules que nous avons rencontrés ci-dessus, certains sont munis naturellement d'une structure de $(P(\mathbf{Z}_p),\varphi,\psi)$-module. C'est le cas de $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p,A)$, en définissant $\varphi(\mu)$ par $\int_{\mathbf{Z}_p}\phi\,\varphi(\mu)=\int_{\mathbf{Z}_p}\phi(px)\,\mu$. C'est aussi le cas de D, si D est un (φ,Γ)-module étale (en prenant pour φ le φ de la structure de (φ,Γ)-module) ; ce n'est jamais le cas de $D^\sharp$ et ce n'est le cas de $D^\natural$ que dans des conditions très spéciales (prop. II.5.14).

Si M est un $(P(\mathbf{Z}_p),\varphi,\psi)$-module, si $a\in\mathbf{Z}_p$ et $k\in\mathbf{N}$, soit
$$\beta_{k,a}=\left(\begin{smallmatrix}1&a\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi^k\circ\psi^k\circ\left(\begin{smallmatrix}1&-a\\0&1\end{smallmatrix}\right).$$
Alors $\beta_{k,a}:M\to M$ est $\mathscr{O}_L$-linéaire, et on a le résultat suivant.

Lemme III.1.3. — (i) *$\beta_{k,a}\circ\beta_{k,b}=0$, si $a-b\notin p^k\mathbf{Z}_p$, et $\beta_{k,a}\circ\beta_{k,b}=\beta_{k,a}=\beta_{k,b}$, si $a-b\in p^k\mathbf{Z}_p$.*

(ii) *$\sum_{i=0}^{p-1}\beta_{k+1,a+ip^k}=\beta_{k,a}$.*

Démonstration. — Par définition, on a
$$\beta_{k,a}\circ\beta_{k,b}=\left(\begin{smallmatrix}1&a\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi^k\circ\psi^k\circ\left(\begin{smallmatrix}1&b-a\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi^k\circ\psi^k\circ\left(\begin{smallmatrix}1&-b\\0&1\end{smallmatrix}\right).$$
Or la seconde des propriétés de φ permet de montrer, par une récurrence immédiate sur k, que $\psi^k\circ\left(\begin{smallmatrix}1&b-a\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi^k=0$, si $b-a\notin p^k\mathbf{Z}_p$, et $\psi^k\circ\left(\begin{smallmatrix}1&b-a\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi^k=\left(\begin{smallmatrix}1&p^{-k}(b-a)\\0&1\end{smallmatrix}\right)$,

si $b - a \in p^k\mathbf{Z}_p$. On en déduit que $\beta_{k,a} \circ \beta_{k,b} = 0$, si $a - b \notin p^k\mathbf{Z}_p$, et que dans le cas où $a - b \in p^k\mathbf{Z}_p$, alors

$$\beta_{k,a} \circ \beta_{k,b} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^k \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^{-k}(b-a) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \psi^k \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Or on a $\varphi^k \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^{-k}(b-a) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b-a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^k$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^{-k}(b-a) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \psi^k = \psi^k \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & b-a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. En utilisant la première de ces formules, on obtient

$$\beta_{k,a} \circ \beta_{k,b} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & b-a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^k \circ \psi^k \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^k \circ \psi^k \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \beta_{k,b},$$

et en utilisant la seconde, on obtient

$$\beta_{k,a} \circ \beta_{k,b} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^k \circ \psi^k \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & b-a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^k \circ \psi^k \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \beta_{k,a}.$$

On en déduit le (i).

Passons au (ii). On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{p-1} \beta_{k+1,a+ip^k} &= \sum_{i=0}^{p-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & a+ip^k \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^{k+1} \circ \psi^{k+1} \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -a-ip^k \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^k \Big(\sum_{i=0}^{p-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi \circ \psi \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \Big) \circ \psi^k \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^k \circ \psi^k \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \beta_{k,a}.
\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure.

Le lemme précédent montre, en particulier, que $\beta_{k,a}$ ne dépend que de la classe de a modulo p^k, ce qui permet de noter cette application sous la forme $\mathrm{Res}_{a+p^k\mathbf{Z}_p}$. Le reste du lemme peut alors se reformuler de manière plus parlante :

Corollaire III.1.4. — (i) *Si $a, b \in \mathbf{Z}_p$, alors*

$$\mathrm{Res}_{a+p^k\mathbf{Z}_p} \circ \mathrm{Res}_{b+p^k\mathbf{Z}_p} = \begin{cases} \mathrm{Res}_{a+p^k\mathbf{Z}_p} = \mathrm{Res}_{b+p^k\mathbf{Z}_p} & \text{si } a + p^k\mathbf{Z}_p = b + p^k\mathbf{Z}_p, \\ 0 & \text{si } (a + p^k\mathbf{Z}_p) \cap (b + p^k\mathbf{Z}_p) = \varnothing. \end{cases}$$

(ii) *Si $a \in \mathbf{Z}_p$, alors* $\sum_{i=0}^{p-1} \mathrm{Res}_{a+ip^k+p^{k+1}\mathbf{Z}_p} = \mathrm{Res}_{a+p^k\mathbf{Z}_p}$.

Remarque III.1.5. — (i) On a $\psi = \varphi^{-1} \circ \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \circ \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}$.

(ii) Si $M = \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$, alors $\mathrm{Res}_{a+p^k\mathbf{Z}_p}$ est l'application de restriction à $a + p^k\mathbf{Z}_p$ (i.e. la multiplication par $\mathbf{1}_{a+p^k\mathbf{Z}_p}$) ; c'est ce qui justifie sa notation.

La propriété (ii) du corollaire montre que, si U est un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$, et si $k \in \mathbf{N}$ est assez grand pour que U soit une réunion de translatés de $p^k\mathbf{Z}_p$, alors l'application $\mathscr{O}_L$-linéaire $\sum_{a \in U \bmod p^k} \mathrm{Res}_{a+p^k\mathbf{Z}_p}$ ne dépend pas du choix de k (ni de celui du système de représentants de U modulo $p^k\mathbf{Z}_p$ par existence de $\mathrm{Res}_{a+p^k\mathbf{Z}_p}$). On note $\mathrm{Res}_U : M \to M$ cette application. On a en particulier $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} = \mathrm{id}$. On pose $\mathrm{Res}_\varnothing = 0$.

Lemme III.1.6. — *Soient U et V des ouverts compacts de $\mathbf{Z}_p$.*

(i) $\mathrm{Res}_U + \mathrm{Res}_V = \mathrm{Res}_{U\cap V} + \mathrm{Res}_{U\cup V}$.

(ii) $\mathrm{Res}_U \circ \mathrm{Res}_V = \mathrm{Res}_V \circ \mathrm{Res}_U = \mathrm{Res}_{U\cap V}$.

Démonstration. — On choisit $k \in \mathbf{N}$ assez grand pour que U et V soient des réunions de translatés de $p^k\mathbf{Z}_p$. Le (i) est alors immédiat sur la définition, et le (ii) suit du (i) du cor. III.1.4.

Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$, on définit le sous-$\mathscr{O}_L$-module $M \boxtimes U$ de M comme l'image de Res_U. On a donc en particulier $M \boxtimes \mathbf{Z}_p = M$, $M \boxtimes \varnothing = 0$ et $M \boxtimes \mathbf{Z}_p^* = M^{\psi=0}$ (en effet, $x \in M \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ si et seulement si $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} x = 0$, et comme $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} = \varphi \circ \psi$ et φ est supposé injectif, cela équivaut à $\psi(x) = 0$).

Lemme III.1.7. — (i) Res_U *est un projecteur de M sur $M \boxtimes U$.*

(ii) *Si les U_j, pour $j \in J$ forment une partition* (automatiquement finie) *de U par des ouverts compacts, et si $x \in M \boxtimes U$, alors $\sum_{j\in J} \mathrm{Res}_{U_j}(x) = x$, et donc $M \boxtimes U = \oplus_{j\in J} M \boxtimes U_j$.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du lemme III.1.6.

On dispose d'une action naturelle de $P(\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathbf{Q}_p$ (définie par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x = ax + b$). Le semi-groupe P^+ laisse stable $\mathbf{Z}_p$, et l'image de $i + p^k\mathbf{Z}_p$ par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est $ai + b + p^{k+r}\mathbf{Z}_p$, si $r = v_p(a)$.

Lemme III.1.8. — *Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$, alors $g \circ \mathrm{Res}_U = \mathrm{Res}_{gU} \circ g$, pour tout $g \in P^+$.*

Démonstration. — Par linéarité, il suffit de le vérifier pour U de la forme $i + p^k\mathbf{Z}_p$. Si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et $r = v_p(a)$, on a

$$g \circ \mathrm{Res}_{i+p^k\mathbf{Z}_p} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^k \circ \psi^k \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & ai+b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^k \circ \psi^k \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Or $\left(\begin{smallmatrix} p^r & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \varphi^r$, et $p^{-r}a \in \mathbf{Z}_p^*$, ce qui fait que $\left(\begin{smallmatrix} p^{-r}a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ commute à φ et ψ, et donc

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^k \circ \psi^k = \left(\begin{smallmatrix} p^{-r}a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^{k+r} \circ \psi^k = \varphi^{k+r} \circ \psi^k \circ \left(\begin{smallmatrix} p^{-r}a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \varphi^{k+r} \circ \psi^{k+r} \circ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Comme $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -(ai+b) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) g$, on obtient finalement

$$g \circ \mathrm{Res}_{i+p^k\mathbf{Z}_p} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & ai+b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^{k+r} \circ \psi^{k+r} \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -(ai+b) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ g = \mathrm{Res}_{ai+b+p^{k+r}\mathbf{Z}_p} \circ g = \mathrm{Res}_{g(i+p^k\mathbf{Z}_p)} \circ g.$$

Ceci permet de conclure.

3. Les applications Res_U *sur* $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ *et les modules* $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ *et* $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$

Remarquons que l'on dispose d'une identification naturelle de M à un sous-module de $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ en envoyant $x \in M$ sur $\iota(x) = (\varphi^n(x))_{n\in\mathbf{N}} \in M \boxtimes \mathbf{Q}_p$; on note $M \boxtimes \mathbf{Z}_p$ l'image de M par ι de telle sorte que ι soit un isomorphisme de M sur $M \boxtimes \mathbf{Z}_p$. Alors ι commute à l'action de P^+ comme le montre un calcul immédiat et on dispose d'un projecteur $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} : M \boxtimes \mathbf{Q}_p \to M \boxtimes \mathbf{Z}_p$ envoyant $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ sur $\iota(x^{(0)})$.

Plus généralement, si U est un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$, on note $M \boxtimes U$ le sous-espace de $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ image du sous-module $M \boxtimes U$ de M par ι, et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} : M \boxtimes \mathbf{Q}_p \to M \boxtimes U$ le projecteur $\iota \circ \mathrm{Res}_U \circ \iota^{-1} \circ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$, où l'opérateur $\mathrm{Res}_U : M \to M \boxtimes U$ intervenant dans la formule est le projecteur défini plus haut.

Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, on choisit $k \in \mathbf{N}$ tel que $p^k U \subset \mathbf{Z}_p$, et on définit $M \boxtimes U \subset M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $\mathrm{Res}_U : M \boxtimes \mathbf{Q}_p \to M \boxtimes U$, en posant

$$M \boxtimes U = \left(\begin{smallmatrix} p^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(M \boxtimes p^k U) \quad \text{et} \quad \mathrm{Res}_U = \left(\begin{smallmatrix} p^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \mathrm{Res}_{p^k U} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Que ceci ne dépende pas du choix de k est une conséquence du lemme III.1.8.

Proposition III.1.9. — (i) *Si U et V sont des ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p$, alors*

$$\mathrm{Res}_U + \mathrm{Res}_V = \mathrm{Res}_{U\cup V} + \mathrm{Res}_{U\cap V} \quad \text{et} \quad \mathrm{Res}_U \circ \mathrm{Res}_V = \mathrm{Res}_V \circ \mathrm{Res}_U = \mathrm{Res}_{U\cap V}.$$

(ii) *Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, alors* Res_U *est un projecteur de $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ sur $M \boxtimes U$, et si les U_j, pour $j \in J$, forment une partition de U par des ouverts compacts, alors $M \boxtimes U = \oplus_{j\in J} M \boxtimes U_j$.*

(iii) *Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, et si $g \in P(\mathbf{Q}_p)$, alors $g \circ \mathrm{Res}_U = \mathrm{Res}_{gU} \circ g$.*

Démonstration. — Pour démontrer le (i), on choisit k assez grand pour que $p^k U$ et $p^k V$ soient inclus dans $\mathbf{Z}_p$, et on utilise le lemme III.1.6. Pour démontrer le (ii), on choisit k assez grand pour que $p^k U \subset \mathbf{Z}_p$, et on utilise le lemme III.1.7. Pour démontrer le (iii), on choisit k assez grand pour que $p^k U \subset \mathbf{Z}_p$, et r assez grand pour que $h = \left(\begin{smallmatrix} p^r a & p^{r+k} b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in P^+$, si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Alors

$$g \circ \mathrm{Res}_U = g \circ \left(\begin{smallmatrix} p^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \mathrm{Res}_{p^k U} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} p^{-k-r} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ h \circ \mathrm{Res}_{p^k U} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

On peut alors utiliser le lemme III.1.8 pour écrire $h \circ \mathrm{Res}_{p^k U}$ sous la forme $\mathrm{Res}_{h(p^k U)} \circ h$, et comme $h\left(\begin{smallmatrix} p^{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} p^{k+r} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) g$ et $h(p^k U) = p^r a(p^k U) + p^{r+k} b = p^{r+k}(gU)$, on obtient

$$g \circ \mathrm{Res}_U = \left(\begin{smallmatrix} p^{-k-r} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \mathrm{Res}_{p^{r+k}(gU)} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^{k+r} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ g = \mathrm{Res}_{gU} \circ g.$$

Ceci permet de conclure.

Remarque III.1.10. — L'opérateur $\psi : M \to M$ est relié à l'action de $\left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$: on a

$$\psi \circ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} = \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \circ \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),$$

comme le montrent le (i) de la rem. III.1.5 et le (iii) de la prop. III.1.9.

On dit que $x \in M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est *à support dans* U, si $x \in M \boxtimes U$. On note

$$(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c = \cup_{k \in \mathbf{N}} (M \boxtimes p^{-k}\mathbf{Z}_p)$$

l'ensemble des éléments de $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ *à support compact* dans $\mathbf{Q}_p$. Comme $M \boxtimes (p^{-k}\mathbf{Z}_p)$ est l'ensemble des $(x^{(n)})_{n \in \mathbf{Z}} \in M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ vérifiant $x^{(n)} = \varphi^{n-k}(x^{(k)})$ si $n \geq k$, on voit que $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ est aussi l'ensemble des $(x^{(n)})_{n \in \mathbf{Z}} \in M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ vérifiant $x^{(n+1)} = \varphi(x^{(n)})$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ assez grand.

Remarque III.1.11. — (i) Si $M = \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, A)$, et si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, alors $M \boxtimes U$ est le module $\mathscr{D}_0(U, A)$ des mesures à support dans U, et l'application $\mathrm{Res}_U : M \boxtimes \mathbf{Q}_p \to M \boxtimes U$ n'est autre que l'application de restriction à U (i.e. la multiplication par la fonction caractéristique de U) de $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, A)$ dans $\mathscr{D}_0(U, A)$. On en déduit que $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ est l'ensemble des mesures à support compact dans $\mathbf{Q}_p$.

(ii) Comme $g \in P(\mathbf{Q}_p)$ envoie $M \boxtimes U$ dans $M \boxtimes gU$, d'après le (iii) de la prop. III.1.9, le sous-module $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ de $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est stable par $P(\mathbf{Q}_p)$.

Si M est un $(P(\mathbf{Z}_p), \psi)$-module, on munit $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ de la topologie induite par la topologie produit sur $M^{\mathbf{N}}$. On note $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$ l'ensemble des éléments z de $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ *nuls à l'infini*, c'est-à-dire tels que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z \to 0$ dans $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ quand $b \to \infty$ dans $\mathbf{Q}_p$; c'est un sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-module de $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

Remarque III.1.12. — (i) Si M est un $(P(\mathbf{Z}_p), \varphi, \psi)$-module, alors $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ est inclus dans $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$. En effet, si $-b + p^{-n}\mathbf{Z}_p$ n'intersecte pas le support de z, on a $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z) = 0$, ce qui se traduit, en notant $y_b = (y_b^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ l'élément $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z$ de $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$, par la nullité de $y_b^{(n)}$, pour tout $n < k$, si $v_p(b) \leq -k$, et si z est à support dans $p^{-k}\mathbf{Z}_p$. En revenant à la définition de la topologie produit, cela se traduit par l'existence, pour tout voisinage V de 0 dans $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$, de $k \in \mathbf{N}$ tel que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z \in V$, si $v_p(b) \leq -k$; autrement dit, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z \to 0$ quand $b \to \infty$.

(ii) Si M est un $(P(\mathbf{Z}_p), \varphi, \psi)$-module, $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ et donc, a fortiori, $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$ est dense dans $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$. En effet, z est la limite, dans $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$, des $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} z$, par définition de la topologie produit.

III.2. Les $P(\mathbf{Q}_p)$-modules $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$, $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$

1. Définition. — Si D est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors D et ses sous-modules $D^\sharp$ et $D^\natural$ sont naturellement des $(P(\mathbf{Z}_p), \psi)$-modules, l'action de ψ étant celle définie au § II.3, et $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in P(\mathbf{Z}_p)$ agissant par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z = (1+T)^b \sigma_a(z)$. On peut donc considérer le $P(\mathbf{Q}_p)$-module $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et ses sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-modules $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Les formules de la prop. III.1.1 peuvent se traduire en termes de (φ, Γ)-modules : si

$z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} \in D \boxtimes \mathbf{Q}_p$, alors

$\left(\left(\begin{smallmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\right)^{(n)} = z^{(n+k)}$ si $k \in \mathbf{Z}$, en particulier, $\left(\left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\right)^{(0)} = z^{(-1)} = \psi(z^{(0)})$;

$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\right)^{(n)} = \sigma_a(z^{(n)})$ si $a \in \mathbf{Z}_p^*$;

$\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\right)^{(n)} = (1+T)^{bp^n} z^{(n)}$ si $b \in \mathbf{Q}_p$ et $n \geq -v_p(b)$.

Les modules $D^\sharp$ et $D^\natural$ étant compacts, il en est de même de $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ qui, rappelons-le, sont munis de la topologie induite par la topologie produit.

Si D est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$, on définit des sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-modules $(D\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$, $(D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ et $(D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ de $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$, $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ respectivement, par

$$(D\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b = L\otimes(D_0\boxtimes\mathbf{Q}_p),\ (D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b = L\otimes(D_0^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p) \text{ et } (D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b = L\otimes(D_0^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p),$$

où D_0 est n'importe quel réseau de D stable par φ et Γ. On munit ces espaces de la topologie de la limite inductive, ce qui fait de $(D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ et $(D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ des L-espaces vectoriels complets pour une topologie localement convexe et localement compacte.

Exemple III.2.1. — L'isomorphisme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^\natural \cong \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L)$ de l'exemple II.5.16 nous fournit un isomorphisme de $\mathscr{O}_L$-modules compacts $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p \cong \mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)$, où $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)$ est muni de la topologie de la convergence faible.

En tensorisant par L, on en déduit un isomorphisme de L-espaces vectoriels topologiques $(\mathscr{E}^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b \cong \mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p)$, où $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p)$ est muni de la topologie de la convergence faible. (Rappelons [**13**] que $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p)$ désigne l'ensemble des distributions sur $\mathbf{Q}_p$ qui sont *globalement d'ordre* 0, et que l'on a $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p) = L\otimes_{\mathscr{O}_L}\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)$; c'est le dual des fonctions continues sur $\mathbf{Q}_p$ tendant vers 0 à l'infini). L'espace $\mathscr{E}^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est, quant à lui, l'espace des mesures sur $\mathbf{Q}_p$ (i.e. le dual des fonctions continues à support compact).

Remarque III.2.2. — (i) D est aussi muni d'une structure de $(P(\mathbf{Z}_p), \varphi, \psi)$-module ; on dispose donc, pour tout ouvert compact U de $\mathbf{Q}_p$, d'un sous-$\mathscr{O}_L$-module $D \boxtimes U$ de $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et d'un projecteur $\mathrm{Res}_U : D \boxtimes \mathbf{Q}_p \to D \boxtimes U$, et d'un sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-module $(D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ de $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

(ii) Du point de vue de la correspondance de Langlands locale p-adique, le module le plus important est $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$, mais le foncteur $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ jouit de propriétés moins agréables que le foncteur $D \mapsto D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ (cf. th. III.3.5). Comme $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p / D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est petit (cor. III.3.2), on peut utiliser les bonnes propriétés du foncteur $D \mapsto D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ pour étudier le module $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

(iii) On déduit de la propriété (iii) de $D^\sharp$ que si $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est bornée (pour la topologie faible), alors $z^{(n)} \in D^\sharp$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Il en résulte que $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ peut aussi être décrit comme l'ensemble des suites $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ de $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$, bornées dans D pour la topologie faible.

(iv) Le module $D^{\psi=1}$ s'identifie naturellement à un sous-$\mathscr{O}_L$-module de $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Rappelons que ce module joue un rôle très important en théorie d'Iwasawa [**7**].

2. Dualité. — Si $x \in (\check{D} \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ et $y \in (D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que
$$x_n = \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x \in \check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p = \check{D} \quad \text{et} \quad y_n = \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot y \in D \boxtimes \mathbf{Z}_p = D.$$
Comme $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ et $y_{n+1} = \varphi(y_n)$, il résulte de la prop. I.2.3 que la quantité $\{x_n, y_n\}$ ne dépend pas du choix de n vérifiant cette propriété. Ceci nous fournit un accouplement sur $(\check{D} \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c \times (D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ à valeurs dans $L/\mathscr{O}_L$ (resp. $\mathscr{O}_L$, resp. L), si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ (resp. $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, resp. $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$). On note $\{\ ,\ \}_{\mathbf{Q}_p}$ cet accouplement. Sa restriction à $\check{D} \times D = (\check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p) \times (D \boxtimes \mathbf{Z}_p)$ est l'accouplement $\{\ ,\ \}$ défini précédemment.

Proposition III.2.3. — (i) *Si U, V sont des ouverts compacts disjoints de $\mathbf{Q}_p$, et si $x \in \check{D} \boxtimes U$ et $y \in D \boxtimes V$, alors $\{x, y\}_{\mathbf{Q}_p} = 0$.*

(ii) *Si $g \in P(\mathbf{Q}_p)$, alors $\{g \cdot x, g \cdot y\}_{\mathbf{Q}_p} = \{x, y\}_{\mathbf{Q}_p}$.*

Démonstration. — Quitte à remplacer x et y par $\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x$ et $\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot y$, ce qui, par construction, ne change pas la valeur de $\{x, y\}_{\mathbf{Q}_p}$, on peut supposer que U et V sont inclus dans $\mathbf{Z}_p$. On peut de plus partitionner U et V de manière à se ramener au cas $U = a + p^n\mathbf{Z}_p$, $V = b + p^n\mathbf{Z}_p$, et $a - b \notin p^n\mathbf{Z}_p$. Alors
$$\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) x \in D \boxtimes (-a + p^n\mathbf{Z}_p) \quad \text{et} \quad z = \langle \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) x, y \rangle \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \frac{dT}{1+T} \boxtimes ((b-a) + p^n\mathbf{Z}_p).$$
Comme $b - a \notin p^n\mathbf{Z}_p$, on a $\varphi^n(\psi^n(z)) = \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}(z) = 0$, et donc $\psi^n(z) = 0$. Par définition, on a $\{x, y\} = \mathrm{rés}_0(z)$, et comme $\mathrm{rés}_0(z) = \mathrm{rés}_0(\psi^n(z))$ d'après le (ii) de la prop. I.2.2, on obtient $\{x, y\} = 0$, ce qui démontre le (i).

Pour démontrer le (ii), il suffit de prouver que $\{g \cdot x, g \cdot y\}_{\mathbf{Q}_p} = \{x, y\}_{\mathbf{Q}_p}$, pour g de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, avec $b \in \mathbf{Q}_p$, $\left(\begin{smallmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, avec $k \in \mathbf{Z}$, ou $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, avec $a \in \mathbf{Z}_p^*$. Si $n \in \mathbf{N}$, soient $x_n = \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x$ et $y_n = \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot y$, de telle sorte que $\{x, y\}_{\mathbf{Q}_p} = \{x_n, y_n\}$, pour tout n assez grand.

– Si $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, on a $\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On en déduit que
$$\{g \cdot x, g \cdot y\}_{\mathbf{Q}_p} = \{(1+T)^{p^n b} x_n, (1+T)^{p^n b} y_n\},$$
si n est assez grand. Cette dernière quantité est égale à $\{x_n, y_n\}$ d'après la prop. I.2.3 ; on a donc bien $\{g \cdot x, g \cdot y\}_{\mathbf{Q}_p} = \{x, y\}_{\mathbf{Q}_p}$.

– Si $g = \left(\begin{smallmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, alors $\{g \cdot x, g \cdot y\}_{\mathbf{Q}_p} = \{x_{n+k}, y_{n+k}\}$, si n est assez grand, et donc $\{g \cdot x, g \cdot y\}_{\mathbf{Q}_p} = \{x, y\}_{\mathbf{Q}_p}$.

– si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, on a $\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) g = g \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et donc $\{g \cdot x, g \cdot y\}_{\mathbf{Q}_p} = \{\sigma_a(x_n), \sigma_a(y_n)\}$, si n est assez grand. Cette dernière quantité est égale à $\{x_n, y_n\}$ d'après la prop. I.2.3 ; on a donc bien $\{g \cdot x, g \cdot y\}_{\mathbf{Q}_p} = \{x, y\}_{\mathbf{Q}_p}$.

Ceci permet de conclure.

III.3. Le foncteur $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$

1. Lien entre $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$

Proposition III.3.1. — *Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, l'application* $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ *induit un isomorphisme de $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p / D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ sur $D^\sharp / D^\natural$.*

Démonstration. — ψ induit une surjection de $D^\sharp/D^\natural$ sur lui-même et donc, d'après le lemme I.1.5, une bijection puisque $D^\sharp$ et $D^\natural$ sont des treillis de D. Il s'ensuit que l'application $(x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \mapsto x^{(0)}$ induit un isomorphisme de $(D^\sharp/D^\natural) \boxtimes \mathbf{Q}_p$ sur $D^\sharp/D^\natural$. Maintenant, la surjectivité de $\psi - 1$ sur $D^\natural$ (cf. prop. II.5.15) permet de montrer que l'application naturelle $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p \to (D^\sharp/D^\natural) \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est surjective, et donc que $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p / D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p = (D^\sharp/D^\natural) \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Le résultat s'en déduit.

Corollaire III.3.2. — *$D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p / D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est de dimension $\leq \dim_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} D$ sur $\mathscr{O}_L$.*

Démonstration. — Cela résulte de la prop. III.3.1, du cor. II.5.20 et du (i) de la prop. II.2.2.

Corollaire III.3.3. — (i) *Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ est de rang ≥ 2, irréductible, alors $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p / D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est un $\mathscr{O}_L$-module de torsion.*

(ii) *Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ est de dimension ≥ 2, irréductible, $(D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b = (D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$.*

Démonstration. — C'est une conséquence directe du cor. II.5.21.

Remarque III.3.4. — L'isomorphisme $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p / D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p \cong D^\sharp/D^\natural$ munit $D^\sharp/D^\natural$ d'une action de $P(\mathbf{Q}_p)$. Comme $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \circ \left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \psi \circ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$, cette action est donnée par la formule

$$\left(\begin{smallmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z = \psi^{-k}(\sigma_a(z)), \quad \text{si } k \in \mathbf{Z},\ a \in \mathbf{Z}_p^* \text{ et } b \in \mathbf{Q}_p.$$

(Cette formule a un sens car ψ est bijectif sur $D^\sharp/D^\natural$ puisqu'il est surjectif sur $D^\sharp$ et que $D^\sharp/D^\natural$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$; par ailleurs une action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur un $\mathscr{O}_L$-module de type fini est automatique triviale; on retouve donc l'inclusion $TD^\sharp \subset D^\natural$ (cf. (iv) de la prop.II.4.2).)

2. Exactitude du foncteur $D \mapsto D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$

Théorème III.3.5. — *Si $0 \to D_1 \to D \to D_2 \to 0$ est une suite exacte de (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, la suite $0 \to D_1^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p \to D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p \to D_2^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p \to 0$ de $P(\mathbf{Q}_p)$-modules est exacte.*

Démonstration. — L'exactitude à gauche est une évidence; celle au milieu suit de ce qu'un élément du noyau appartient à $D_1 \boxtimes \mathbf{Q}_p$, et est bornée et donc appartient à $D_1^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ ((iii) de la rem. III.2.2). Il ne reste donc que l'exactitude à droite à vérifier. D'après le lemme I.1.4, il existe un treillis M_0 de D ayant pour image $D_2^\sharp$ dans D_2. Soit M l'adhérence dans D de la somme des treillis $\psi^n(M_0)$, pour $n \in \mathbf{N}$. Il résulte de la propriété (iii) de $D^\sharp$ (prop. II.4.2) que M est un treillis de D ; de plus, M est stable par ψ et a pour image $D_2^\sharp$ dans D_2 par construction.

Soit alors $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in D_2^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$. On peut choisir, pour tout $n \in \mathbf{N}$, un relèvement $u^{(n)}$ de $x^{(n)}$ appartenant à M. Si $k \in \mathbf{N}$, soit $y_k = (y_k^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ la suite d'éléments de M définie par $y_k^{(n)} = u^{(n)}$, si $n \geq k$, et $y_k^{(n)} = \psi^{n-k}(u^{(k)})$, si $n \leq k$. Comme M est compact, il en est de même de $M^{\mathbf{N}}$ et la suite y_k admet une valeur d'adhérence $y = (y^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in M^{\mathbf{N}}$ qui est une suite bornée puisqu'à valeurs dans un treillis. De plus, comme $\psi(y_k^{(n+1)}) = y_k^{(n)}$, si $k \geq n+1$, un passage à la limite montre que $\psi(y^{(n+1)}) = y^{(n)}$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Autrement dit, $y \in D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Finalement, l'image de y_k dans $D_2^{\mathbf{N}}$ est x pour tout k ; il en est donc de même de celle de y. Ceci permet de conclure.

3. Les sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-modules de $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$. — Soit D un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.

Lemme III.3.6. — *Soit $M \subset D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ un sous-$\mathscr{O}_L$-module fermé, stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, et, si $k \in \mathbf{Z}$, soit $M^{(k)}$ l'ensemble des $x \in D$ tels qu'il existe $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} \in M$, avec $z^{(k)} = x$. Alors*

(i) *$M^{(k)} = M^{(0)}$ quel que soit $k \in \mathbf{Z}$;*

(ii) *$M^{(0)}$ est un sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module de $D^\sharp$ stable par ψ, qui agit surjectivement, et par Γ.*

(iii) *$M = M^{(0)} \boxtimes \mathbf{Q}_p$.*

Démonstration. — Les (i) et (ii) sont immédiats, ainsi que l'inclusion $M \subset M^{(0)} \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Reste l'inclusion $M^{(0)} \boxtimes \mathbf{Q}_p \subset M$ à vérifier. Soit $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} \in M^{(0)} \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Si $k \in \mathbf{N}$, il existe $u_k = (u_k^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} \in M$ tel que $u_k^{(k)} = z^{(k)}$ car $M^{(k)} = M^{(0)}$. Par définition de la topologie sur $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$, la suite u_k tend vers z dans $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ quand k tend vers $+\infty$, et M étant supposé fermé, cela implique $z \in M$, ce qui permet de conclure.

Remarque III.3.7. — Si M est un sous-$\mathscr{O}_L$-module compact de $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, alors $M^{(0)} = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} M$ est un sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module compact de D sur lequel ψ agit surjectivement ; on a donc $M^{(0)} \subset D^\sharp$ et $M \subset D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

Théorème III.3.8. — *Soit D un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Si M est un sous-$\mathscr{O}_L$-module fermé de $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, alors il existe un sous-(φ,Γ)-module D_1 de D tel que*

$$D_1^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p \subset M \subset D_1^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p.$$

Démonstration. — Soit $M^{(0)}$ l'ensemble des $x \in D$ tels qu'il existe $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ appartenant à $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$, avec $z^{(0)} = x$. D'après le lemme III.3.6, on a $M = M^{(0)} \boxtimes \mathbf{Q}_p$, et quitte à remplacer D par le sous-(φ,Γ)-module de D engendré par $M^{(0)}$, on peut supposer que $M^{(0)}$ engendre D en tant que (φ,Γ)-module. Soient $\overline{D} = D/\mathfrak{m}_L D$,

$\overline{M} = M/\mathfrak{m}_L M$ et $\overline{M}^{(0)} = M^{(0)}/\mathfrak{m}_L M^{(0)}$. Par construction, $\overline{M} = \overline{M}^{(0)} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $\overline{M}^{(0)}$ engendre $\overline{D}$ en tant que (φ, Γ)-module sur $k_{\mathscr{E}}$.

Maintenant, l'hypothèse selon laquelle M est stable sous l'action de $P(\mathbf{Q}_p)$ se traduit par la stabilité de $\overline{M}$ sous cette action et par le fait que $\overline{M}^{(0)}$ est un sous-$k_{\mathscr{E}}^+$-module de $\overline{D}$ stable par Γ sur lequel ψ agit de manière surjective (lemme III.3.6). Comme $\psi(T^{-pk}x) = T^{-k}\psi(x)$, on en déduit le fait que le sous-$k_{\mathscr{E}}$-espace vectoriel de $\overline{D}$ engendré par $\overline{M}^{(0)}$ est stable par ψ et Γ et donc, d'après la prop. II.3.5, est égal au sous-(φ, Γ)-module de $\overline{D}$ qu'il engendre, c'est-à-dire à $\overline{D}$; en d'autres termes, $\overline{M}^{(0)}$ est un réseau de $\overline{D}$. Par ailleurs, comme M est stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, cela implique que $M^{(0)}$ est un sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module de D inclus dans $D^\sharp$; comme de plus $M^{(0)}$ est compact puisque c'est l'image du compact M par l'application $z \mapsto z^{(0)}$ et que son image dans $\overline{D}$ est un réseau, cela implique que $M^{(0)}$ est un treillis de D. Maintenant, $M^{(0)}$ est stable par ψ et comme $D^\natural$ est le plus petit treillis de D ayant cette propriété, on en déduit l'inclusion $D^\natural \subset M^{(0)}$, ce qui permet de conclure.

Corollaire III.3.9. — *Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(k_{\mathscr{E}})$ est irréductible, alors $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est un $P(\mathbf{Q}_p)$-module topologiquement irréductible.*

Corollaire III.3.10. — *Soit $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$. Si M est un sous-L-espace vectoriel fermé de $(D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, alors il existe un sous-(φ, Γ)-module D_1 de D tel que*

$$(D_1^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b \subset M \subset (D_1^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b.$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le th. III.3.8 à $M_0 = M \cap (D_0^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)$, où D_0 est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau de D stable par φ et Γ.

Corollaire III.3.11. — *Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ est irréductible, alors $(D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ est un $P(\mathbf{Q}_p)$-module topologiquement irréductible.*

Corollaire III.3.12. — *Les $P(\mathbf{Q}_p)$-modules $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, k_L)$ et $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, L)$ sont topologiquement irréductibles.*

Démonstration. — C'est, modulo les isomorphismes de l'ex. III.2.1, un cas particulier des cor. III.3.9 et III.3.11.

Proposition III.3.13. — *Soit $P \in \mathscr{O}_L[X]$ non nul modulo $\mathfrak{m}_L$.*

(i) *Si D est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors $P\big(\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}\big) : D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p \to D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est surjectif.*

(ii) *Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, alors $P\big(\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}\big) : (D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b \to (D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ est surjectif.*

Démonstration. — Remarquons que $P\big(\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}\big) \cdot (x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} = (P(\psi) \cdot x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$. D'après la prop. II.5.15, $P(\psi) : D^\natural \to D^\natural$ est surjectif. Il existe donc $y^{(k)} \in D^\natural$ tel que

$P(\psi)\cdot y^{(k)} = x^{(k)}$, et comme $\psi : D^\natural \to D^\natural$ est surjective, il existe $y_k = (y_k^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ appartenant à $D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$, tel que $y_k^{(k)} = y^{(k)}$; on a alors $P(\psi)y_k^{(n)} = x^{(n)}$, pour tout $n\leq k$. La compacité de $D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$ permet de prendre une valeur d'adhérence $y = (y^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ de la suite $(y_k)_{k\in\mathbf{N}}$; un passage à la limite montre que $P(\psi)y^{(n)} = x^{(n)}$, pour tout $n\in\mathbf{N}$, et donc que x est dans l'image de $P\big(\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^{-1}\big)$. Ceci démontre le (i) et, le (ii) étant une conséquence immédiate du (i), cela permet de conclure.

Proposition III.3.14. — *Si $z\in D\boxtimes\mathbf{Q}_p$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $z\in D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$ *;*

(ii) *il existe $P\in\mathscr{O}_L[X]$, non nul modulo $\mathfrak{m}_L$, tel que $P\big(\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\big)\cdot z\in D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$.*

Démonstration. — Il n'y a que l'implication (ii)$\Rightarrow$(i) à prouver. On peut factoriser P sous la forme $P = P^+P^0P^-$ habituelle, et les inverses formels de $P^+\big(\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\big)$ et $P^-\big(\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\big)$ convergeant sur $D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$ et $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$ pour la topologie p-adique, cela permet de se ramener au cas où $P = P^0$ et donc de supposer que P est unitaire et $P(0)\in\mathscr{O}_L^*$. Soit d le degré de P, et soit $Q(X) = X^dP(X^{-1})$. On a alors $Q(\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^{-1})\cdot z\in D^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p$, ce qui se traduit, si $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ par l'appartenance de $Q(\psi)\cdot z^{(n)}$ à $D^\sharp$ pour tout $n\in\mathbf{N}$. La prop. II.5.6 permet alors d'en déduire l'appartenance de $z^{(n)}$ à $D^\sharp$, ce qui permet de conclure.

III.4. Le Γ-module $D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$. — Les résultats de ce § se trouvent déjà, à peu de choses près, dans [**20**]. On en trouvera des raffinements dans [**7, 15**].

1. Action de Γ sur D. — Si $n\geq 1$, on note $\Gamma_n\subset\Gamma$ l'image inverse de $1+p^n\mathbf{Z}_p$ par le caractère cyclotomique, et on pose $\Gamma_0 = \Gamma$. Si $\gamma\in\Gamma$, on note $n(\gamma)$ le plus grand entier n tel que $\gamma\in\Gamma_n$. On a aussi $n(\gamma) = v_p(\chi(\gamma)-1)$.

Lemme III.4.1. — *Soit $\gamma\in\Gamma$ vérifiant $n(\gamma)\geq 1$.*

(i) *$(\gamma-1)T$ est divisible par $\varphi^{n(\gamma)}(T)$ dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$.*

(ii) *Si $m\in\mathbf{Z}$, alors $(\gamma-1)T^m\in\varphi^{n(\gamma)}(T)T^{m-1}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$.*

(iii) *Si $m\in\mathbf{Z}$, alors $(\gamma-1)\cdot(T^m\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+)\subset\varphi^{n(\gamma)}(T)T^{m-1}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$.*

Démonstration. — Si $n(\gamma)\geq 1$, on peut écrire $\chi(\gamma)$ sous la forme $1+p^{n(\gamma)}u$, avec $u\in\mathbf{Z}_p^*$. On a alors

$$(\gamma-1)\cdot T = (1+T)^{1+p^{n(\gamma)}u}-1-T = (1+T)\,\varphi^{n(\gamma)}((1+T)^u-1),$$

et comme $(1+T)^u-1\in T\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, cela permet de démontrer le (i).

Le (ii) suit de la formule $(\gamma-1)T^m = \gamma(T)^m - T^m$, qui nous donne

$$(\gamma-1)T^m = \begin{cases} T^{m-1}(\gamma(T)-T)\sum_{i=0}^{m-1}(\frac{\gamma(T)}{T})^i & \text{si } m\in\mathbf{N},\\ -T^{m-1}(\gamma(T)-T)\sum_{i=0}^{-m-1}(\frac{\gamma(T)}{T})^{i-m} & \text{si } -m\in\mathbf{N}.\end{cases}$$

Enfin, le (iii) est une conséquence directe du (ii).

Soient $D \in \Phi\Gamma^{\rm et}_{\rm tors}$, tué par p^ℓ, et M un treillis de D. Comme $\varphi(T) \equiv T^p$ modulo p, on a $\varphi(T)^{p^{\ell-1}} = T^{p^\ell}$ sur D.

Lemme III.4.2. — *Il existe $s_1 = s_1(M)$ et $s_2 = s_2(M)$ appartenant à $\mathbf{N}$ tels que, quel que soit $m \in \mathbf{Z}$, on ait*

$$\psi(T^m M) \subset T^{[\frac{m}{p}]-s_1}M \quad \text{et} \quad \varphi(T^m M) \subset T^{pm-s_2}M.$$

Démonstration. — En écrivant $m \in \mathbf{Z}$ sous la forme $p^\ell a + r$, avec $0 \le r \le p^\ell - 1$, on obtient

$$\psi(T^m M) = \psi(\varphi(T)^{p^{\ell-1}a}T^r M) = T^{p^{\ell-1}a}\psi(T^r M) \subset T^{p^{\ell-1}a}\psi(M).$$

Maintenant, on a $p^{\ell-1}a \ge [\frac{m}{p}] - p^{\ell-1}$, et M étant un treillis de D, il existe s_1' tel que $\psi(M) \subset T^{-s_1'}M$. On en déduit l'existence de s_1 (que l'on peut prendre égal à $s_1' + p^{\ell-1}$).

En écrivant $m \in \mathbf{Z}$ sous la forme $p^{\ell-1}a + r$, avec $0 \le r \le p^{\ell-1} - 1$, on obtient

$$\varphi(T^m M) = \varphi(T)^{p^{\ell-1}a}\varphi(T^r M) = T^{p^\ell a}\varphi(T^r M) \subset T^{p^\ell a}\varphi(M).$$

Comme $p^\ell a \ge pm - p^\ell$, et comme il existe s_2' tel que $\varphi(M) \subset T^{-s_2'}M$, on en déduit l'existence de s_2 (que l'on peut prendre égal à $s_2' + p^\ell$), ce qui permet de conclure.

Lemme III.4.3. — *Il existe $k(M) \in \mathbf{N}$ et $n(M) \ge k(M)$ tels que, si $\gamma \in \Gamma$ vérifie $n(\gamma) \ge n(M)$, et si $m \in \mathbf{Z}$, alors*

$$(\gamma - 1)\cdot(T^m M) \subset \varphi^{n(\gamma)-k(M)}(T)T^m M.$$

Démonstration. — Comme D est de longueur finie, il existe $\ell \in \mathbf{N}$ tel que D soit tué par p^ℓ. Soient $s_1, s_2 \in \mathbf{N}$ comme au lemme III.4.2, et soient $s = \sup(s_1, s_2)$ et $\alpha \in \mathbf{N}$ vérifiant :

$(*)$ $\qquad p\alpha - (p+1)s \ge \alpha$ (i.e. $\alpha \ge \frac{(p+1)s}{p-1}$).

Maintenant, comme D est de longueur finie, un treillis de D est de longueur finie sur $\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}$, et il existe $e_1, \dots, e_r$ tels que $M = \sum_{j=1}^r \mathscr{O}^+_{\mathscr{E}} \cdot e_j$. Comme l'action de Γ est continue, il existe n_0 tel que $(\gamma-1)\cdot e_j \in T^{\alpha+1}M$, si $n(\gamma) \ge n_0$ et $1 \le j \le r$, et quitte à augmenter n_0, on peut imposer :

$(**)$ $\qquad T^{-\alpha-(p+1)(s+1)}\varphi^{n_0}(T) \in T\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}$ modulo p^ℓ.

Nous allons montrer, par récurrence sur $n(\gamma)$, que l'on a

$$(\gamma - 1)\cdot(T^m M) \subset T^{\alpha+1+m}\varphi^{n(\gamma)-n_0}(T)M\,,$$

si $m \in \mathbf{Z}$ et si $n(\gamma) \ge n_0$, ce qui prouve que l'on peut prendre $k(M) = n_0$ et $n(M) = n_0$.

– Si $n(\gamma)=n_0$, et si $x=\sum_{j=1}^r x_je_j$, avec $x_1,\dots,x_r\in T^m\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, alors
$$(\gamma-1)\cdot x=\sum_{j=1}^r\big((\gamma-1)\cdot x_j\big)e_j+\sum_{j=1}^r\gamma(x_j)((\gamma-1)\cdot e_j).$$
D'après le lemme III.4.1, la première somme appartient à $\varphi^{n_0}(T)T^{m-1}M$, qui est inclus dans $T^{\alpha+1+m}M$ grâce à la condition $(**)$, et la seconde appartient à $T^{\alpha+1+m}M$ par définition de n_0. On en déduit l'inclusion $(\gamma-1)\cdot T^mM\subset T^{\alpha+1+m}M$ que l'on voulait démontrer.

– Supposons maintenant $n(\gamma)=n+1$, avec $n\geq n_0$, l'hypothèse de récurrence étant vérifiée pour n. Si $x=\sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(x_i)\in T^mM$, alors d'après le lemme III.4.2, on a (en utilisant la minoration $p[\frac{m}{p}]\geq m-p+1$) :
$$x_i=\psi((1+T)^{-i}x)\in T^{[\frac{m}{p}]-s}M\quad\text{et}\quad\varphi(x_i)\in T^{m-ps-s-p+1}M.$$
Maintenant, on a
$$(\gamma-1)\cdot x=\sum_{i=1}^{p-1}\big((\gamma-1)\cdot(1+T)^i\big)\varphi(x_i)+\sum_{i=0}^{p-1}\gamma((1+T)^i)\,\varphi((\gamma-1)x_i).$$
La première somme appartient à $\varphi^{n+1}(T)T^{m-ps-s-p}M$ d'après ce qui précède et le lemme III.4.1. Comme
$$T^{-ps-s-p}\varphi^{n+1}(T)=T^{\alpha+1}\varphi^{n+1-n_0}(T)T^{-\alpha-(p+1)(s+1)}\varphi^{n+1-n_0}(T^{-1}\varphi^{n_0}(T)),$$
cette première somme appartient aussi à $\varphi^{n+1-n_0}(T)T^{\alpha+1}M$, grâce à la condition $(**)$, selon laquelle $T^{-1}\varphi^{n_0}(T)\in T^{\alpha+(p+1)(s+1)}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ modulo p^ℓ.

Par ailleurs, l'hypothèse de récurrence, l'inégalité $p[\frac{m}{p}]\geq m-p+1$ et le lemme III.4.2 impliquent que
$$\begin{aligned}&(\gamma-1)\cdot x_i\in T^{[\frac{m}{p}]-s+\alpha+1}\varphi^{n-n_0}(T)M,\\&\varphi((\gamma-1)\cdot x_i)\in\varphi^{n+1-n_0}(T)T^{m-(p+1)s+p\alpha+1}M\subset T^m\varphi^{n+1-n_0}(T)T^{\alpha+1}M,\end{aligned}$$
puisque $-(p+1)s+p\alpha\geq\alpha$ grâce à la condition $(*)$. On en déduit l'appartenance de la seconde somme à $\varphi^{n+1-n_0}(T)T^{m+\alpha+1}M$, et donc aussi celle de $(\gamma-1)x$, ce qui montre que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $n+1$, et permet de conclure.

2. L'action de Γ sur $D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$

On rappelle qu'il existe $n_0(M)\in\mathbf{N}$ tel que $\psi^n(M)\subset D^\sharp$, pour tout $n\geq n_0(M)$. Soit $n_1(M)=\sup(n_0(M),n(D^\sharp),k(D^\sharp)+1)$. Fixons aussi $c,c'\in\mathbf{N}$ tels que l'on ait $D^\sharp\subset T^{-c}D^+$ et $D^+\subset T^{-c'}M$.

Proposition III.4.4. — *Soit $i\in\mathbf{Z}_p^*$. Si $a\in\mathbf{Z}_p$, alors $\sigma_{1+p^na}-1$ est inversible sur $D\boxtimes(i+p^n\mathbf{Z}_p)$ d'inverse continu. Plus précisément, si $n\geq n_1(M)$, si $x\in D\boxtimes(i+p^n\mathbf{Z}_p)$, et si $(\sigma_{1+p^na}-1)x\in T^{mp^{n+\ell}}M$, alors $x\in\frac{1}{T^{c'}\varphi^n(T)^c\varphi^{n+v_p(a)}(T)}T^{mp^{n+\ell}}M$.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas $i = 1$, le cas général s'en déduisant en conjuguant par σ_i. Soit donc $z \in D \boxtimes (1 + p^n\mathbf{Z}_p)$. On peut écrire z sous la forme $z = (1+T)\varphi^n(y)$, où $y = \psi^n((1+T)^{-1}z)$. On a alors $(\sigma_{1+p^na}-1)z = (1+T)\varphi^n(G_a(y))$, où

$$G_a(y) = ((1+T)^a - 1)y + (1+T)^a(\sigma_{1+p^na} - 1)y.$$

Or $y \mapsto h_a(y) = \frac{(1+T)^a(\sigma_{1+p^na}-1)y}{((1+T)^a-1)}$ envoie $T^mD^\sharp$ dans $\frac{\varphi^{n+v_p(a)-k(D^\sharp)}(T)}{\varphi^{v_p(a)}(T)}T^mD^\sharp$, d'après le lemme III.4.3. Comme $n \geq n_1(M) > k(D^\sharp)$, l'application h_a est donc strictement contractante. On en déduit que G_a est inversible sur D, d'inverse G_a^{-1}, avec

$$G_a^{-1}(y) = \frac{y}{(1+T)^a - 1} - h_a\Big(\frac{y}{(1+T)^a - 1}\Big) + h_a \circ h_a\Big(\frac{y}{(1+T)^a - 1}\Big) + \dots$$

Ceci implique que $\sigma_{1+p^na} - 1$ est inversible sur $D \boxtimes (1 + p^n\mathbf{Z}_p)$ et, de plus, que si $(\sigma_{1+p^na} - 1)x = (1+T)\varphi^n(y)$ appartient à $T^{mp^{n+\ell}}M$ (et donc $y \in T^{mp^\ell}D^\sharp$), alors $x = (1+T)\varphi^n(G_a^{-1}(y))$ appartient à

$$\varphi^n\Big(\frac{T^{mp^\ell}}{\varphi^{v_p(a)}(T)}D^\sharp\Big) \subset \varphi^n\Big(\frac{T^{mp^\ell}}{T^c\varphi^{v_p(a)}(T)}D^+\Big) \subset \frac{1}{T^{c'}\varphi^n(T)^c\varphi^{n+v_p(a)}(T)}T^{mp^{n+\ell}}M.$$

Ceci permet de conclure.

Remarque III.4.5. — (i) Il ressort de la démonstration que, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, si $n > n(D^\sharp)$, si $y \in T^mD^\sharp$, et si

$$(\sigma_{1+ap^n} - 1)^{-1}\big((1+T)^i\varphi^n(y)\big) = (1+T)^i\varphi^n(z),$$

alors $z - \frac{y}{(1+T)^{ai}-1} \in \varphi^{n-k(D^\sharp)}(T)T^{m-2}D^\sharp$.

(ii) Comme $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* = \oplus_{i\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} D \boxtimes (i + p^n\mathbf{Z}_p)$, il résulte de la proposition que $\gamma - 1$ est inversible sur $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, d'inverse continu pour la topologie faible, si $\gamma \in \Gamma$ est d'ordre infini.

Si $n \geq 1$ (ou $n \geq 2$, si $p = 2$), le groupe Γ_n est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$. Le choix d'un générateur topologique γ de Γ_n fournit un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ sur l'algèbre de groupe complétée Λ_{Γ_n} de Γ_n, en envoyant T sur $\gamma - 1$. L'anneau $\Lambda_{\Gamma_n}[(\gamma-1)^{-1}]$ ne dépend pas du choix de γ ; on note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma_n)$ son séparé complété pour la topologie p-adique ; l'isomorphisme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ \cong \Lambda_{\Gamma_n}$ ci-dessus se prolonge en un isomorphisme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \cong \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma_n)$ d'anneaux. Si $n \geq m$, l'application $\lambda \otimes f \mapsto \lambda f$ induit un isomorphisme de $\Lambda_{\Gamma_m} \otimes_{\Lambda_{\Gamma_n}} \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma_n)$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma_m)$; il en résulte que l'anneau $\Lambda \otimes_{\Lambda_{\Gamma_n}} \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma_n)$, où $\Lambda = \Lambda_\Gamma$ est l'algèbre d'Iwasawa, ne dépend pas du choix de n ; on le note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$. On note $\mathscr{E}(\Gamma)$ l'anneau $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)[\frac{1}{p}]$ et $k_{\mathscr{E}}(\Gamma)$ l'anneau $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)/\mathfrak{m}_L$.

Théorème III.4.6. — (i) *Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, alors $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$-module ayant les mêmes diviseurs élémentaires que le $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module D.*

(ii) *Si* $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ *est de rang* d *sur* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, *alors* $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$*-module libre de rang* d.

(iii) *Si* $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ *est de dimension* d *sur* $\mathscr{E}$, *alors* $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ *est un* $\mathscr{E}(\Gamma)$*-module libre de rang* d.

Démonstration. — Comme l'application $\gamma\otimes x \mapsto \gamma(x)$ se prolonge en un isomorphisme de $\Lambda\otimes_{\Lambda_{\Gamma_n}}(D\boxtimes(1+p^n\mathbf{Z}_p))$ sur $D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$, on est ramené à démontrer l'énoncé du théorème en remplaçant Γ par Γ_n et $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ par $D \boxtimes (1+p^n\mathbf{Z}_p)$, pour n assez grand.

Commençons par considérer le cas où $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(k_{\mathscr{E}})$; soit d sa dimension, et soit $e_1, \dots, e_d$ une base de $D^\sharp$ sur $k_{\mathscr{E}}^+$. Enfin, soit $\tau = \sigma_{1+p^n} - 1$. On dispose d'un isomorphisme $y \mapsto \alpha(y) = (1+T)\varphi^n(y)$ de D sur $D \boxtimes (1+p^n\mathbf{Z}_p)$, et l'application de D dans D que l'on déduit de τ via cet isomorphisme est l'application G_1 de la démonstration de la prop. III.4.4. Il résulte de la formule $G_1(y) = Ty + (1+T)\tau(y)$ et du (i) de la rem. III.4.5, que G_1 induit un isomorphisme de $T^mD^\sharp$ sur $T^{m+1}D^\sharp$, pour tout $m \in \mathbf{Z}$. De plus, $G_1^k : T^mD^\sharp/T^{m+1}D^\sharp \to T^{m+k}D^\sharp/T^{m+k+1}D^\sharp$ est l'isomorphisme induit par la multiplication par T^k. On en déduit que, si $\lambda = \sum_{k\geq k_0} a_k\tau^k \in k_{\mathscr{E}}(\Gamma_n)$, et si $x \in D$, alors $\lambda\cdot x = \sum_{k\geq k_0} a_kG_1^k(x)$ converge dans D, et que l'application $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \mapsto \lambda_1\cdot e_1 + \cdots + \lambda_d\cdot e_d$ est un isomorphisme de $k_{\mathscr{E}}(\Gamma)^d$ sur D (l'injectivité est immédiate ; la surjectivité suit de ce que l'image de $\tau^k k_{\mathscr{E}}^+(\Gamma)^d$ est dense dans $T^kD^\sharp$ et est fermée par compacité de $k_{\mathscr{E}}^+(\Gamma)$). Par transport de structures, on en déduit que $\alpha(e_1), \dots, \alpha(e_d)$ forment une base de $D \boxtimes (1+p^n\mathbf{Z}_p)$ sur $k_{\mathscr{E}}(\Gamma_n)$, ce qui démontre le résultat pour $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(k_{\mathscr{E}})$.

Le (i) s'en déduit alors en utilisant l'exactitude de $D \mapsto D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, le (ii) se déduit du (i) par limite projective, et le (iii) du (ii) en inversant p. Ceci permet de conclure.

Proposition III.4.7. — *Soit* D *un* (φ,Γ)*-module étale sur* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, *et soient* $P \in \mathscr{O}_L[X]$ *d'image non nulle dans* $k_L[X]$ *et* $\gamma \in \Gamma$ *d'ordre infini. Alors* $P(\gamma)$ *est inversible sur* $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, *d'inverse continu pour la topologie faible.*

Démonstration. — Il suffit de le démontrer pour un module D de torsion, tué par p^ℓ. Comme il existe $a, b, r \in \mathbf{N}$ tels que P divise $X^a(X^b-1)^r$ dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+/p^\ell$ (il suffit d'écrire P comme un produit de facteurs de degré 1 sur une extension convenable de L, et de remarquer que $X-\alpha$ divise $X^i-\alpha^i$ et $1-\alpha X$ divise $1-\alpha^iX^i$, et que α^i peut être rendu égal à 0 ou 1 modulo p^ℓ, en choisissant convenablement $i \geq 1$), il suffit de prouver que γ^b-1 a un inverse continu sur $D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$, ce qui suit du (ii) de la rem III.4.5.

Proposition III.4.8. — *Si* M *est un sous-*$\mathscr{O}_L$*-module de type fini de* D *stable par* Γ, *alors* $M \subset D^{\mathrm{nr}}$.

Démonstration. — Soit $\gamma \in \Gamma$, d'ordre infini. Comme M est de type fini sur $\mathscr{O}_L$, il existe $P \in \mathscr{O}_L[X]$, unitaire, tel que $P(\gamma)\cdot M = 0$. Maintenant, on peut écrire tout élément x de D, de manière unique, sous la forme $x = \varphi^n(y_n) + \varphi^{n-1}(x_{n-1}) + \cdots + x_0$, avec $y_n \in D$ et $x_0, \cdots, x_{n-1} \in D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$. Si $x \in M$, on a alors $P(\gamma) \cdot x_i = 0$, pour tout $i \leq n-1$ Or $P(\gamma)$ est inversible sur $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, d'après la prop. III.4.7, et donc $x_i = 0$, si $i \leq n-1$. Autrement dit, $P(\gamma) \cdot x = 0$ implique $x \in \cap_{n \in \mathbf{N}} \varphi^n(D) = D^{\mathrm{nr}}$. Ceci permet de conclure.

IV. Un quasi-inverse du foncteur $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$

Le but de ce chapitre est de démontrer (cf. th. IV.4.5) que la connaissance du $P(\mathbf{Q}_p)$-module $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ permet de retrouver le (φ, Γ)-module D. Ceci implique le résultat suivant dont des cas particuliers peuvent se trouver dans [**3, 4, 12**].

Théorème IV.0.1. — (i) *Si D_1 et D_2 sont deux (φ, Γ)-modules étales sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, tels que les $P(\mathbf{Q}_p)$-modules $D_1^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D_2^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ sont isomorphes, alors $D_1 \cong D_2$.*

(ii) *Si D_1 et D_2 sont deux (φ, Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}$, tels que les $P(\mathbf{Q}_p)$-modules $(D_1^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ et $(D_2^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ sont isomorphes, alors $D_1 \cong D_2$.*

IV.1. Le foncteur $D \mapsto \widetilde{D}$

1. Une variante de l'équivalence de catégories de Fontaine. — Soit $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ l'ensemble des $f \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$. Le corps résiduel $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ n'est autre que $\mathbf{F}_p((T))$, et on note $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$ le complété de sa clôture radicielle ; celui-ci est naturellement muni d'actions continues de Γ et φ, commutant entre elles et coïncidant avec celles précédemment définies sur $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p} \subset k_{\mathscr{E}}$. De plus, on a $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p} = \widetilde{\mathbf{E}}^{\mathscr{H}}$.

On note $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p} = W(\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p})$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$; comme $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$ est parfait tout élément de $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k [x_k]$, où les x_k sont des éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$ et $[x]$ désigne le représentant de Teichmüller de x dans $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$, si $x \in \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$. Les actions de Γ et φ sur $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$ s'étendent de manière unique à $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$, l'action de φ devenant bijective, et $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ (muni des actions de φ et Γ) s'identifie naturellement au sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$ engendré topologiquement par $[1+T]-1$ (que l'on identifie à $T \in \mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$) et son inverse. Comme $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p} = \widetilde{\mathbf{E}}^{\mathscr{H}}$, on a $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p} = \widetilde{\mathbf{A}}^{\mathscr{H}}$.

Rappelons (cf. [**8**, p. 526]) que l'on dispose d'un[17] analogue p-adique $x \mapsto [(1+T)^x]$ de $x \mapsto e^{2i\pi x}$: si $p^n x \in \mathbf{Z}_p$, alors

$$[(1+T)^x] = \varphi^{-n}((1+T)^{p^n x}) = \varphi^{-n}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{p^n x}{k} T^k\Big).$$

(17) On a en fait trois tels analogues : en sus de $x \mapsto [(1+T)^x]$, on peut considérer $x \mapsto e^{tx}$, où $t = \log(1+T)$ est le $2i\pi$ p-adique de Fontaine, et $x \mapsto \varepsilon(x) = e^{-tx}[(1+T)^x]$, à valeurs dans $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$.

Comme on a identifié $[1+T]-1$ à T, on a $[(1+T)^x] = (1+T)^x$, si $x \in \mathbf{Z}_p$. On fera attention au fait que ce n'est pas le cas si $x \notin \mathbf{Z}_p$: la série définissant $(1+T)^x$ ne converge pas dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p}$, et si on complète $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p}[\frac{1}{p}]$ pour obtenir un anneau dans lequel cette série converge, on tombe sur la fonction $x \mapsto e^{tx}$ de la note de bas de page.

On note $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$ l'anneau $\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$ auquel on étend par $\mathscr{O}_L$-linéarité les actions de φ et Γ. On a alors $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}} = (\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}})^{\mathscr{H}}$, l'action résiduelle de Γ étant celle définie ci-dessus. De plus, $(\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}})^{\varphi=1} = \mathscr{O}_L$.

Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, soit $\widetilde{D} = \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} D$. C'est un (φ,Γ)-module sur $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$. Comme φ est bijectif sur $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$ et D est étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, l'action de φ est bijective sur $\widetilde{D}$. Un (φ,Γ)-module sur $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$ ayant cette propriété est dit *étale*. Comme d'habitude, un (φ,Γ)-module sur $\widetilde{\mathscr{E}}$ est étale s'il possède un $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$-réseau stable par φ et Γ qui est étale. On définit des catégories $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}(\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}})$, $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}})$ et $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\widetilde{\mathscr{E}})$ de la manière habituelle.

Remarque IV.1.1. — (i) Le module $\widetilde{D}$ peut se décrire[18] aussi via les anneaux de Fontaine : si $V = \mathbf{V}(D)$ de telle sorte que $D = (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$, alors

$$\widetilde{D} = \widetilde{\mathbf{D}}(V), \quad \text{avec } \widetilde{\mathbf{D}}(V) = (\widetilde{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}.$$

En effet, on a

$$(\widetilde{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}} = (\widetilde{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{A}} (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V))^{\mathscr{H}} = \widetilde{\mathbf{A}}^{\mathscr{H}} \otimes_{\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}} D = (\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}^{\mathscr{H}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} D = \widetilde{D}.$$

(ii) Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$, alors $\widetilde{\mathbf{V}}(D) = ((\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}) \otimes D)^{\varphi=1}$ est une représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et $\widetilde{\mathbf{E}}$ étant algébriquement clos, l'application naturelle $\widetilde{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{V}}(D) \to \widetilde{\mathbf{A}} \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}^{\mathscr{H}}} D$ est un isomorphisme ; on en déduit que les foncteurs $D \mapsto \widetilde{\mathbf{V}}(D)$ et $V \mapsto \widetilde{\mathbf{D}}(V)$ sont inverses l'un de l'autre.

(iii) Il résulte de la discussion précédente et de l'équivalence de catégories de Fontaine que $D = \mathbf{D}(\widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{D}))$, et donc que $D \mapsto \widetilde{D}$ induit des équivalences de catégories :

$$\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}} \cong \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}(\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}), \quad \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}) \cong \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}) \quad \text{et} \quad \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}) \cong \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\widetilde{\mathscr{E}}).$$

(iv) Il n'est pas nécessaire de passer par les anneaux de Fontaine pour décrire le foncteur inverse de $D \mapsto \widetilde{D}$. En fait D est tout simplement l'unique sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module M de $\widetilde{D}$ stable par φ et Γ, tel que l'application naturelle $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} M \to \widetilde{D}$ soit un isomorphisme. En effet, la dernière condition implique que M a les mêmes diviseurs élémentaires que D (sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ ou sur $\mathscr{E}$ si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$) ; en particulier, il est de type fini. Or il résulte de [**6**, prop. III.4.3], qu'un sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module (resp. $\mathscr{E}$-module) de type fini de $\widetilde{D}$, qui est stable par Γ, est inclus dans $\varphi^{-n}(D)$ pour n assez grand. Maintenant, M est étale et donc est engendré par $\varphi^n(M)$ pour tout n. On en déduit que $M \subset D$, et M et D ayant les mêmes diviseurs élémentaires, que $M = D$.

(18) C'est ce que Fontaine [**16**] appelle le Γ-module de Dieudonné de pente 0 de V.

2. $\widetilde{D}$ vu comme sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-module de $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$. — L'action de φ sur $\widetilde{D}$ étant bijective, cela permet de munir $\widetilde{D}$ d'une action de $P(\mathbf{Q}_p)$ en posant :

$$\left(\begin{smallmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z = [(1+T)^b]\varphi^k(\sigma_a(z)), \quad \text{si } a\in\mathbf{Z}_p^*,\ b\in\mathbf{Q}_p \text{ et } k\in\mathbf{Z}.$$

Comme $\widetilde{D}$ est aussi égal à $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}\otimes_{\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}} D$, il résulte de [**11**, prop. 8.5] que l'on a le résultat suivant :

Lemme IV.1.2. — *Si $I\subset\mathbf{Q}_p$ est un système de représentants de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$, tout élément z de $\widetilde{D}$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme*

$$z=\sum_{i\in I}[(1+T)^i]\,z_i, \quad \text{où } z_i\in D \text{ tend vers } 0 \text{ quand } i\to\infty \text{ dans } \mathbf{Q}_p.$$

Fixons un système $I\subset\mathbf{Q}_p$ de représentants de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$, ce qui permet de décomposer tout élément de $\widetilde{D}$ sous la forme ci-dessus. Si $n\in\mathbf{N}$, on note I_n l'intersection de I et $p^{-n}\mathbf{Z}_p$, et donc I est la réunion croissante des I_n.

Lemme IV.1.3. — *Si $z=\sum_{i\in I}[(1+T)^i]z_i\in\widetilde{D}$, alors $(\sum_{i\in I_n}[(1+T)^{p^n i}]\varphi^n(z_i))_{n\in\mathbf{N}}$ est un élément de $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$, et l'application de $\widetilde{D}$ dans $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$ ainsi définie ne dépend pas du choix de I et est $P(\mathbf{Q}_p)$-équivariante.*

Démonstration. — Si J est un autre système de représentants, et si $i\in I$, il existe $j(i)\in J$, unique, tel que $i-j(i)\in\mathbf{Z}_p$; de plus $j(i)\in J_n$ si $i\in I_n$, et $i\mapsto j(i)$ est une bijection de I_n sur J_n, pour tout $n\in\mathbf{N}$. On note $j\mapsto i(j)$ la bijection réciproque. Soit $z=\sum_{j\in J}[(1+T)^j]z'_j$ l'écriture de z utilisant le système de représentants J. Comme

$$\sum_{i\in I}[(1+T)^i]z_i=\sum_{i\in I}[(1+T)^{j(i)}]((1+T)^{i-j(i)}z_i),$$

l'unicité de l'écriture montre que $z'_j=(1+T)^{i(j)-j}z_{i(j)}$, et donc que $[(1+T)^i]z_i$ ne dépend que de z et de la classe de i modulo $\mathbf{Z}_p$, pas du choix de I. On en déduit que $\sum_{i\in I_n}[(1+T)^{p^n i}]\varphi^n(z_i)$ ne dépend pas du choix de I.

Maintenant, on a

$$\psi([(1+T)^{p^{n+1}i}]\varphi^{n+1}(z_i))=\begin{cases}[(1+T)^{p^n i}]\varphi^n(z), & \text{si } p^{n+1}i\in p\mathbf{Z}_p \text{ (i.e. si } i\in I_n),\\ 0, & \text{si } p^{n+1}i\in\mathbf{Z}_p^* \text{ (i.e., si } i\in I_{n+1}-I_n).\end{cases}$$

On en déduit l'appartenance de $(\sum_{i\in I_n}[(1+T)^{p^n i}]\varphi^n(z_i))_{n\in\mathbf{N}}$ à $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$. L'injectivité de l'application ainsi définie suit de ce qu'un élément z du noyau doit vérifier $z_i=0$, pour tout i, d'après l'unicité de l'écriture, et donc est nul. Enfin, pour démontrer la $P(\mathbf{Q}_p)$-équivariance, il suffit de revenir aux formules, et de remarquer que :

- $\{ai,\ i\in I_n\}$ est un système de représentants de $p^{-n}\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z}_p$, si $a\in\mathbf{Z}_p^*$ (équivariance de $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$),

• $\{b+i,\ i\in I_n\}$ est un système de représentants de $p^{-n}\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z}_p$, si $b\in\mathbf{Q}_p$ et si n est assez grand (équivariance de $\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$),

• $\{pi,\ i\in I_{n+1}-I_1\}\cup\{0\}$ est un système de représentants de $p^{-n}\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z}_p$ (équivariance de $\left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$).

Le lemme IV.1.3 permet d'identifier $\widetilde{D}$ à un sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-module de $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$, ce que nous ferons sans plus de commentaires. On remarquera que, si on écrit $z\in\widetilde{D}$ sous la forme $z=\sum_{i\in I}[(1+T)^i]z_i$, alors :

• $\mathrm{Res}_{i+\mathbf{Z}_p}z=[(1+T)^i]z_i$, si $i\in I$, et $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}z=\sum_{i\in I_n}[(1+T)^i]z_i$, si $n\in\mathbf{N}$,

• z est la limite des $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}z$ dans $\widetilde{D}$.

Proposition IV.1.4. — *Si $z\in D\boxtimes\mathbf{Q}_p$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $z\in\widetilde{D}$;

(ii) $\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z\to 0$ *dans* $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$ *quand* $b\to\infty$ *dans* $\mathbf{Q}_p$;

(iii) $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z)\to 0$ *dans* D *quand* $b\to\infty$ *dans* $\mathbf{Q}_p$.

Démonstration. — L'implication (ii)$\Rightarrow$(iii) suit de la continuité de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$. Maintenant, si (iii) est vérifiée, alors $\mathrm{Res}_{i+\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z)$, qui est égal à $[(1+T)]^i\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix}1 & b-i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z)$, tend vers 0 quand $b\to\infty$, pour tout $i\in I$. En sommant sur $i\in I_n$, on en déduit que $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z)\to 0$ et, ceci étant vrai pour tout n, que $\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z\to 0$ dans $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$. Ceci démontre que les propriétés (ii) et (iii) sont équivalentes.

Maintenant, si $z=\sum_{i\in I}[(1+T)^i]z_i\in\widetilde{D}$, et si $b\in\mathbf{Q}_p$, on a

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z)=[(1+T)^{i(-b)+b}]z_{i(-b)},$$

où $i(x)$ est l'unique élément de I vérifiant $x-i(x)\in\mathbf{Z}_p$. Comme $z_i\to 0$ quand $i\to\infty$, et comme $i(-b)\to\infty$ quand $b\to\infty$, on en déduit que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z)\to 0$ dans D, ce qui prouve l'implication (i)$\Rightarrow$(iii). Enfin, si $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z)\to 0$ dans D quand $b\to\infty$, alors z est la somme, dans $\widetilde{D}$, de la série $\sum_{i\in I}[(1+T)^i]\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix}1 & -i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z)$, ce qui démontre l'implication (iii)$\Rightarrow$(i), et permet de conclure.

Corollaire IV.1.5. — *$\widetilde{D}$ est le sous-module $(D\boxtimes\mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$ de $D\boxtimes\mathbf{Q}_p$.*

Démonstration. — C'est une simple traduction de l'équivalence entre les (i) et (ii) de la proposition.

IV.2. Le foncteur $D\mapsto\widetilde{D}^+$

Soient $\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\mathbf{Q}_p}$ l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$, $\widetilde{\mathbf{E}}^{++}_{\mathbf{Q}_p}$ son idéal maximal,

$$\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p}=W(\widetilde{\mathbf{E}}^+_{\mathbf{Q}_p}),\ \widetilde{\mathbf{A}}^{++}_{\mathbf{Q}_p}=W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}_{\mathbf{Q}_p})\quad\text{et}\quad\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}=\mathscr{O}_L\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p},\ \widetilde{\mathscr{O}}^{++}_{\mathscr{E}}=\mathscr{O}_L\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}^{++}_{\mathbf{Q}_p}.$$

Alors $\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}$ est un sous-anneau de $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$ stable par φ, φ^{-1} et Γ ; c'est aussi l'ensemble des $x\in\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$ tels que $(\varphi^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$. De même, $\widetilde{\mathscr{O}}^{++}_{\mathscr{E}}$ est un idéal de $\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}$ (le quotient est $\mathscr{O}_L$), stable par φ, φ^{-1} et Γ ; c'est aussi l'ensemble des $x\in\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$

tels que $\varphi^n(x) \to 0$, quand $n \to +\infty$. Comme $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p} = \widetilde{\mathbf{E}}^{\mathscr{H}}$, on a aussi $\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p} = (\widetilde{\mathbf{A}}^+)^{\mathscr{H}}$ et $\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}} = (\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}^+)^{\mathscr{H}}$.

Un $\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}$-module M est *presque de type fini*, s'il existe $d \in \mathbf{N}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, des éléments $e_1, \dots, e_d$ de M, tels que l'on ait $[T^{p^{-n}}]M \subset \widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}} e_1 + \cdots + \widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}} e_d$.

Un (φ, Γ)-module sur $\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}$ est un $\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}$-module presque de type fini muni d'actions semi-linéaires continues de φ et Γ commutant entre elles. Un tel module est *étale* si φ est bijectif. Il est *de pente* 0^+ s'il est étale et si φ est topologiquement nilpotent. On définit les catégories $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}(\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}})$, $\Phi\Gamma^{0^+}_{\mathrm{tors}}(\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}})$, $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}})$, $\Phi\Gamma^{0^+}(\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}})$ et $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\widetilde{\mathscr{E}}^+)$, $\Phi\Gamma^{0^+}(\widetilde{\mathscr{E}}^+)$ de la manière évidente.

Si Δ est un (φ, Γ)-module sur $\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}$, on définit une $\mathscr{O}_L$-représentation $\widetilde{\mathbf{V}}(\Delta)$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ en posant $\widetilde{\mathbf{V}}(\Delta) = ((\mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}) \otimes_{\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}} \Delta)^{\varphi=1}$.

1. Les sous-modules $\widetilde{D}^+$ et $\widetilde{D}^{++}$ de $\widetilde{D}$. — On note $\widetilde{D}^+$ (resp. $\widetilde{D}^{++}$) l'ensemble des $z \in \widetilde{D}$ tels que la suite $(\varphi^n(z))_{n \in \mathbf{N}}$ soit bornée (resp. tende vers 0) dans $\widetilde{D}$.

Remarque IV.2.1. — (i) Les modules $\widetilde{D}^{++}$ et $\widetilde{D}^+$ peuvent se décrire aussi via les anneaux de Fontaine. En effet, comme on l'a déjà remarqué (cf. rem II.2.1), on peut caractériser $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^{++} = W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++})$) comme l'ensemble des $x \in \widetilde{\mathbf{A}}$ tels que la suite $(\varphi^n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée (resp. tend vers 0). De plus, on dispose de la décomposition $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = \widetilde{\mathbf{A}}^{++} \oplus W(\overline{\mathbf{F}}_p)$. On en déduit que, si $V = \mathbf{V}(D)$ de telle sorte que $D = (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$, alors

$$\widetilde{D}^+ = (\widetilde{\mathbf{A}}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}, \quad \widetilde{D}^{++} = (\widetilde{\mathbf{A}}^{++} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}} \quad \text{et} \quad \widetilde{D}^+ = D^{\mathrm{nr}} \oplus \widetilde{D}^{++}.$$

En particulier, le $\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}$-module $\widetilde{D}^+/\widetilde{D}^{++}$ est de type fini, tué par $\widetilde{\mathscr{O}}^{++}_{\mathscr{E}}$.

(ii) Il résulte de la description ci-dessus que les sous-$\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}$-modules $\widetilde{D}^+$ et $\widetilde{D}^{++}$ de $\widetilde{D}$ sont stables par φ, φ^{-1} et Γ, et donc sont des sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-modules de $\widetilde{D}$.

(iii) On peut retrouver V, et donc aussi D, à partir de $\widetilde{D}^+$. En effet, il résulte de [**8**, prop. IV.2.4 (ii)], que $\widetilde{\mathbf{A}}^{++} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V = \widetilde{\mathbf{A}}^{++} \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p}} \widetilde{D}^{++}$, si V est de torsion[(19)]. On en déduit d'une part, que $\widetilde{D}^{++}$ est presque de type fini sur $\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}$, et donc est un (φ, Γ)-module sur $\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}$, et d'autre part, que $\widetilde{\mathbf{A}} \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p}} \widetilde{D}^+ = \widetilde{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V$, et donc que $V = \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{D}^+)$ et $\widetilde{D} = \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}} \otimes_{\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}} \widetilde{D}^{++}$. Comme $\widetilde{D}^+/\widetilde{D}^{++}$ est tué par $\widetilde{\mathscr{O}}^{++}_{\mathscr{E}}$, on déduit que ce qui précède que $\widetilde{D}^+$ est presque de type fini sur $\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}$, et que $V = \widetilde{\mathbf{V}}(\widetilde{D}^+)$ et $\widetilde{D} = \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}} \otimes_{\widetilde{\mathscr{O}}^+_{\mathscr{E}}} \widetilde{D}^+$. Ces formules restent valables pour un élément de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ ou de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ par limite projective et tensorisation par L.

(19) La proposition en question est énoncée sans cette hypothèse, ce qui est une erreur, le module $\widetilde{\mathbf{A}}^{++} \otimes_{\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p}} \widetilde{D}^{++}$ n'ayant aucune raison d'être complet pour la topologie p-adique ; il faut prendre un produit tensoriel complété dans le cas non torsion.

(iv) Il résulte de [**8**, prop. IV.2.4 (i)] que le foncteur $D \mapsto \widetilde{D}^{++}$ est exact comme composé des deux foncteurs exacts $D \mapsto V$ et $V \mapsto (\widetilde{\mathbf{A}}^{++} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$. On en déduit que $\widetilde{D} \mapsto \widetilde{D}^{++}$ induit des équivalences de catégories

$$\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}(\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}) \cong \Phi\Gamma^{0^+}_{\mathrm{tors}}(\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+), \quad \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}) \cong \Phi\Gamma^{0^+}(\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+) \quad \text{et} \quad \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\widetilde{\mathscr{E}}) \cong \Phi\Gamma^{0^+}(\widetilde{\mathscr{E}}^+),$$

le foncteur inverse étant juste le foncteur $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}} \otimes_{\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+} \cdot$.

(v) Par contre, le foncteur $D \mapsto \widetilde{D}^+$ n'est pas exact puisque $D \mapsto D^{\mathrm{nr}}$ ne l'est pas.

(vi) Le sous-anneau $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \cdot \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$ de $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$ est dense dans $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$ (appliquer le lemme IV.1.2 à $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$). On en déduit que $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+} \widetilde{D}^+$ est dense dans $\widetilde{D}$.

2. L'inclusion de $\widetilde{D}^+$ dans $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$

Lemme IV.2.2. — (i) *Si $x \in \widetilde{D}^+$, alors* $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} x \in D^\natural$.

(ii) $\widetilde{D} \cap (D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p) = \widetilde{D}^+$.

(iii) $\widetilde{D}^+$ *est dense dans* $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

Démonstration. — Si $x \in \widetilde{D}^+$, alors $x_n = \mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} x \in \widetilde{D}^+ + p^k\widetilde{D}$, si n est assez grand. On en déduit que l'image y_n modulo p^k de $\varphi^n(x_n)$ appartient à $(D/p^kD)^+$, et donc que l'image modulo p^k de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} x$, qui n'est autre que $\psi^n(y_n)$, appartient à $(D/p^kD)^\natural$ puisque $(D/p^kD)^+ \subset (D/p^kD)^\natural$ et que $(D/p^kD)^\natural$ est stable par ψ. Ceci étant vrai pour tout k, cela démontre le (i).

Maintenant, on a $\widetilde{D}^+ \subset \widetilde{D} \cap (D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)$ d'après le (i) et la stabilité de $\widetilde{D}^+$ par $\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'inclusion inverse suit de ce que $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est compact et stable par $\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui prouve que la suite des $\varphi^n(z) = \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z$, pour $n \in \mathbf{N}$, est bornée si $z \in \widetilde{D} \cap (D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)$. Ceci démontre le (ii).

Enfin, l'adhérence de $\widetilde{D}^+$ dans $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est un sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-module fermé de $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Par ailleurs, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+} \widetilde{D}^+$ est dense dans $\widetilde{D}$ qui est dense dans $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Le th. III.3.8 montre que cette adhérence contient $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$, ce qui permet de conclure.

Comme la topologie de $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est induite par celle de $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$, on déduit du (ii) du lemme IV.2.2 et du cor. IV.1.5 le résultat suivant.

Proposition IV.2.3. — $\widetilde{D}^+$ *est le sous-module* $(D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$ *de* $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

3. Caractérisation algébrique du sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-module $\widetilde{D}^+$ de $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$

Proposition IV.2.4. — *Si $x \in D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $x \in \widetilde{D}^+$;

(ii) *quel que soit $n \in \mathbf{N}$, l'image modulo $\left(p^n, \begin{pmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1\right)$ du $\mathscr{O}_L\left[\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$-module engendré par x est un $\mathscr{O}_L$-module de longueur finie.*

(iii) $\varphi^{-(i+1)}(x^{(i+1)}) - \varphi^{-i}(x^{(i)})$ *tend vers* 0*, pour la topologie faible, dans* $\widetilde{D}$.

Démonstration. — Le cas général se déduit du cas d'un module de torsion par passage à la limite projective, ce qui permet de supposer que D est de torsion, tué par p^ℓ. Dans toute la suite de la démonstration, on note V la représentation $\mathbf{V}(D)$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et on choisit $v_1,\dots,v_d \in V$ tels que $(x_1,\dots,x_d)\mapsto \sum_{i=1}^d x_iv_i$ soit un isomorphisme de $\prod_{i=1}^d(\mathbf{Z}_p/p^{k_i}\mathbf{Z}_p)$ sur V (comme V est tuée par p^ℓ, on a $k_i\leq \ell$, pour tout i).

Soit alors $x\in \widetilde{D}^+ = (\widetilde{\mathbf{A}}^+\otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}}$, et soit $n\geq \ell$. Si $i\in\mathbf{N}$, notons simplement $R_i : \widetilde{D}\to D\boxtimes p^{-i}\mathbf{Z}_p$ l'application $\mathrm{Res}_{p^{-i}\mathbf{Z}_p}$. Comme $R_i(x)\to x$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}\otimes D = \widetilde{\mathbf{A}}\otimes V$ et comme D est de torsion, il existe i tel que $R_i(x)-x\in\varphi^n(T)(\widetilde{\mathbf{A}}^+\otimes V)$. En particulier, $R_i(x)\in\widetilde{D}^+$, et donc $\varphi^i(R_i(x))\in\widetilde{D}^+\cap D = D^+$. De plus, l'appartenance de $R_i(x)-x$ à $\varphi^n(T)(\widetilde{\mathbf{A}}^+\otimes V)$ implique que, modulo $\varphi^n(T)\widetilde{D}^+$, le $\mathscr{O}_L[\Gamma]$-module M engendré par x est l'image du $\mathscr{O}_L[\Gamma]$-module M' engendré par $R_i(x)$. Or $y\mapsto\varphi^i(y)$ induit une injection de M' dans D^+ puisque D^+ est stable par Γ et $\varphi^i(R_i(x))\in D^+$. On en déduit que $y\mapsto\varphi^i(y)$ induit une injection de l'image de M modulo $\varphi^n(T)\widetilde{D}^+$ dans $D^+/\varphi^{n+1}(T)D^+$ qui est un $\mathscr{O}_L$-module de longueur finie comme quotient de deux treillis de D. Ceci permet, en traduisant en termes de $P(\mathbf{Q}_p)$-modules ce qui précède, de démontrer que (i)$\Rightarrow$(ii).

Passons à la démonstration de l'implication (ii)$\Rightarrow$(iii). Rappelons que :

• un élément x de $\widetilde{\mathbf{A}}/p^\ell$ s'écrit de manière unique sous la forme $x=\sum_{i<\ell}p^i[x_i]$, avec $x_i\in\widetilde{\mathbf{E}}$,

• la topologie faible sur $\widetilde{\mathbf{A}}/p^\ell$ est la topologie définie par la valuation $w_{\ell-1}$, avec $w_{\ell-1}(x)=\inf_{i\leq\ell-1}v_{\mathbf{E}}(x_i)$,

• $w_{\ell-1}(\varphi(x)) = pw_{\ell-1}(x)$,

• $x\in\widetilde{\mathbf{A}}^+/p^\ell$ si et seulement si $w_{\ell-1}(x)\geq 0$.

Soit $y_i=\varphi^{-(i+1)}(x^{(i+1)})-\varphi^{-i}(x^{(i)})$, si $i\in\mathbf{N}$. Notre problème est de montrer que y_i tend vers 0. Comme D est tué par p^ℓ, la topologie faible sur $\widetilde{D}$, qui est celle induite par la topologie faible sur $\widetilde{\mathbf{A}}\otimes_{\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}}D=\widetilde{\mathbf{A}}\otimes_{\mathbf{Z}_p}V$, est la topologie définie par la valuation $w_{\ell-1}$, avec $w_{\ell-1}\big(\sum_{i=1}^d x_iv_i\big)=\inf_{1\leq i\leq d}w_{\ell-1}(x_i)$. On déduit de l'hypothèse (ii) l'existence, pour tout $n\in\mathbf{N}$, d'un polynôme $P_n\in\mathscr{O}_L[X]$, non nul modulo $\mathfrak{m}_L$, et de $u_n=(u_n^{(i)})\in D^\natural\boxtimes\mathbf{Q}_p$ tels que, quel que soit $i\in\mathbf{N}$, on ait :

$$P_n(\gamma)\cdot x^{(i)}=\varphi^{n+i}(T)u_n^{(i)}.$$

On a alors

$$P_n(\gamma)\cdot\varphi^{i+1}(y_i)=\varphi^{n+i+1}(T)\big(u^{(i+1)}-\varphi(u^{(i)})\big).$$

Or $\varphi^{i+1}(y_i)=x^{(i+1)}-\varphi\psi(x^{(i+1)})$ et $u^{(i+1)}-\varphi(u^{(i)})=u^{(i+1)}-\varphi\psi(u^{(i+1)})$ sont tous deux éléments de $D^{\psi=0}$, et donc il existe d'après la prop. III.4.7, une constante $C_n\in\mathbf{R}$ telle que $w_{\ell-1}(\varphi^{i+1}(y_i))\geq w_{\ell-1}(\varphi^{n+i+1}(T)(u^{(i+1)}-\varphi(u^{(i)})))+C_n$. De plus, la suite $(u^{(i+1)}-\varphi(u^{(i)}))_{i\in\mathbf{N}}$ est bornée, et il existe C' tel que $w_{\ell-1}(u^{(i+1)}-\varphi(u^{(i)}))\geq C'$, pour tout $i\in\mathbf{N}$. Par ailleurs, D étant tué par p^ℓ, on a $w_{\ell-1}(\varphi^i(T)x)\geq\frac{p^{i-\ell+1}}{p-1}+w_{\ell-1}(x)$.

On en déduit les minorations

$$w_{\ell-1}(\varphi^{i+1}(y_i)) \geq \frac{p^{n+i+2-\ell}}{p-1} + C_n + C' \quad \text{et} \quad w_{\ell-1}(y_i) \geq \frac{p^{n+1-\ell}}{p-1} + \frac{C_n + C'}{p^{i+1}},$$

et l'existence, pour tout n, de i_n tel que $w_{\ell-1}(y_i) \geq p^{n-\ell}$ si $i \geq i_n$. Ceci permet de démontrer l'implication (ii)$\Rightarrow$(iii).

Finalement, démontrons l'implication (iii)$\Rightarrow$(i). L'hypothèse (iii) équivaut à la convergence de la suite $\varphi^{-i}(x^{(i)})$ dans $\widetilde{D}$; notons y la limite. Comme $\psi(x^{(i+1)}) = x^{(i)}$, quel que soit i, on a $R_i(\varphi^{-i-m}(x^{(i+m)})) = \varphi^{-i}(x^{(i)})$, quel que soit $m \in \mathbf{N}$. On en déduit que $R_i(y) = \varphi^{-i}(x^{(i)})$, et donc que $x^{(i)} = R_0(\varphi^i(y))$, quel que soit $i \in \mathbf{N}$. Pour conclure, il suffit donc de vérifier que $y \in \widetilde{\mathbf{A}}^+ \otimes V$, car cela implique $y \in \widetilde{D}^+$ et $x = \iota(y)$. On peut écrire y sous la forme $y = \sum_{j=1}^d y_j v_j$, avec $y_j \in \widetilde{\mathbf{A}}/p^{k_j}\widetilde{\mathbf{A}}$, et $x^{(i)}$ sous la forme $x^{(i)} = \sum_{j=1}^d x_{i,j} v_j$, avec $x_{i,j} \in \widetilde{\mathbf{A}}/p^{k_j}\widetilde{\mathbf{A}}$, si $1 \leq j \leq d$, et on a $y_j = \lim_{i\to+\infty} \varphi^{-i}(x_{i,j})$. Par ailleurs, la suite $(x^{(i)})_{i\in\mathbf{N}}$ est bornée puisqu'élément de $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Cela se traduit par le fait que, quel que soit j, la suite $w_{\ell-1}(x_{i,j})$ est minorée. Comme $w_{\ell-1}(y_j) = \lim_{i\to+\infty} p^{-i} w_{\ell-1}(x_{i,j})$, cela implique que $w_{\ell-1}(y_j) \geq 0$, quel que soit j. On en déduit l'appartenance de y à $\widetilde{\mathbf{A}}^+ \otimes V$, ce qui permet de conclure.

IV.3. Extension du dictionnaire d'analyse fonctionnelle à $\mathbf{Q}_p$

1. Mesures nulles à l'infini. — L'ensemble $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)$ des mesures sur $\mathbf{Q}_p$ à valeurs dans $\mathscr{O}_L$ n'est pas un anneau car on ne peut pas faire la convolution de deux mesures sans prendre de précautions concernant leurs supports. Ceci nous amène à définir le sous-ensemble $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_{\rm pc}$ des *mesures nulles à l'infini*, c'est-à-dire les mesures μ telles que $\mathrm{Dir}_b * \mu \to 0$ (pour la topologie faible sur $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)$) quand $b \to \infty$, où Dir_b désigne la *masse de Dirac* en b. Il est facile de vérifier que $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_{\rm pc}$ est un anneau pour la convolution, et que $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_{\rm pc}$ est dense dans $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)$.

Proposition IV.3.1. — *La transformée de Fourier $\mu \mapsto \int_{\mathbf{Q}_p}[(1+T)^x]\mu$ induit un isomorphisme d'anneaux de $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_{\rm pc}$ sur $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$.*

Démonstration. — Soit $I = \mathbf{Z}[\frac{1}{p}] \cap [0,1[$ le système standard de représentants de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$. Alors $\mu = \sum_{i\in I} \mathrm{Dir}_i * \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\mathrm{Dir}_{-i} * \mu)$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{Q}_p} [(1+T)^x]\mu &= \sum_{i\in I} \int_{\mathbf{Z}_p} [(1+T)^{x+i}]\, \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\mathrm{Dir}_{-i} * \mu) \\ &= \sum_{i\in I} \Big(\int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x\, \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\mathrm{Dir}_{-i} * \mu)\Big)\, [(1+T)^i].\end{aligned}$$

Modulo le fait que la transformée d'Amice $\lambda \mapsto \int_{\mathbf{Z}_p}(1+T)^x\,\lambda$ induit un isomorphisme d'anneaux de $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L)$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, le résultat suit donc du lemme IV.1.2.

Corollaire IV.3.2. — *Si* $\mu \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mu \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_{\mathrm{pc}}$;

(ii) *quel que soit* $n \in \mathbf{N}$, *le sous-*$\mathscr{O}_L[(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})]$*-module de* $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)/(p^n, (\begin{smallmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) - 1)$ *engendré par* μ *est de longueur finie sur* $\mathscr{O}_L$.

Démonstration. — C'est, modulo les isomorphismes $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p \cong \mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)$ de l'ex. III.2.1 et $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_{\mathrm{pc}} \cong \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$, une réécriture de l'équivalence des (i) et (ii) de la prop. IV.2.4.

2. Dualité. — On étend rés$_0$ à $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}} \frac{dT}{1+T}$ en posant $\mathrm{rés}_0(z \frac{dT}{1+T}) = \mathrm{rés}_0\big((\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z) \frac{dT}{1+T}\big)$.

Proposition IV.3.3. — *L'application* $\mathrm{rés}_0 : \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}} \frac{dT}{1+T} \to \mathscr{O}_L$ *vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $\mathrm{rés}_0(\varphi(z) \frac{dT}{1+T}) = \mathrm{rés}_0(z \frac{dT}{1+T})$ *et* $\mathrm{rés}_0(\sigma_a(z) \frac{dT}{1+T})) = a^{-1}\mathrm{rés}_0(z \frac{dT}{1+T})$, *si* $a \in \mathbf{Z}_p^*$

(ii) rés$_0$ *est identiquement nul sur* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \frac{dT}{1+T} \boxtimes U$, *si* $U \subset \mathbf{Q}_p^*$.

Démonstration. — La formule pour l'action de Γ suit, via la prop. I.2.2, de ce que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ commute à l'action de Γ. Celle pour φ vient de ce que l'on a $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\varphi^{-1}(z)) = \psi(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z))$, ce qui permet d'utiliser la prop. I.2.2 pour montrer que $\mathrm{rés}_0(\varphi^{-1}(z) \frac{dT}{1+T}) = \mathrm{rés}_0(z \frac{dT}{1+T})$.

Maintenant, si $z \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \frac{dT}{1+T} \boxtimes U$, et si $n \in \mathbf{N}$, alors $\varphi^{-n}(z) \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \frac{dT}{1+T} \boxtimes p^{-n}U$. Or l'hypothèse $U \subset \mathbf{Q}_p^*$ implique que $\mathbf{Z}_p \cap p^{-n}U = \varnothing$, et donc $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\varphi^{-n}(z)) = 0$, si n est assez grand. On a alors $\mathrm{rés}_0(z) = \mathrm{rés}_0(\varphi^{-n}(z)) = \mathrm{rés}_0(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\varphi^{-n}(z))) = 0$. Ceci permet de conclure.

Proposition IV.3.4. — *Si* $z \in \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$ *et* $x \in \mathbf{Q}_p$, *soit* $\phi_z(x) = \mathrm{rés}_0\big([(1+T)^x] z \frac{dT}{1+T}\big)$. *L'application* $z \mapsto \phi_z$ *ainsi définie induit un isomorphisme de* $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}/\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$ *sur l'espace* $\mathscr{C}^0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0$ *des fonctions continues sur* $\mathbf{Q}_p$ *tendant vers* 0 *à l'infini.*

Démonstration. — Fixons un système I de représentants de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{Q}_p$. Cela permet, d'après le lemme IV.1.2, d'écrire tout élément z de $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$ sous la forme $z = \sum_{i \in I} [(1+T)^i]\, z_i$, où $(z_i)_{i \in I}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ tendant vers 0 à l'infini pour la topologie faible. On a alors $\phi_z(x) = \phi_{z_i}(x+i)$, si $x + i \in \mathbf{Z}_p$. Comme z_i tend vers 0, il existe, pour tout $k \in \mathbf{N}$, un entier $n(k) \in \mathbf{N}$ tel que $z_i \in \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+ + p^k \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$, si $v_p(i) \leq -n(k)$, ce qui se traduit par le fait que $\phi_z(x) \in p^k \mathscr{O}_L$, si $v_p(i) \leq -n(k)$ et si $x + i \in \mathbf{Z}_p$. On en déduit l'appartenance de ϕ_z à $\mathscr{C}^0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0$.

Réciproquement, soit $\phi \in \mathscr{C}^0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0$. Si ϕ_i est la restriction de $x \mapsto \phi(x+i)$ à $\mathbf{Z}_p$, soit $k(i)$ le plus grand entier k tel que ϕ_i soit à valeurs dans $p^k \mathscr{O}_L$, et soit $z_i \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ tel que $\phi_{z_i} = p^{-k(i)} \phi_i$. L'appartenance de ϕ à $\mathscr{C}^0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0$ se traduit par le fait que $k(i)$ tend vers $+\infty$ à l'infini. La série $\sum_{i \in I} p^{k(i)} [(1+T)^i] z_i$ converge donc dans $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$ et la somme z de cette série vérifie $\phi_z = \phi$ par construction. Ceci permet de conclure.

IV.4. Le foncteur $M \mapsto M_{\mathrm{apc}}$

1. $\mathscr{O}_L[P(\mathbf{Q}_p)]$-modules compacts et $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_{\mathrm{pc}}$-modules.— Soit M un $\mathscr{O}_L$-module compact (pour une topologie moins fine que la topologie p-adique) muni d'une action continue de $P(\mathbf{Q}_p)$. Nous allons montrer que l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ se prolonge par linéarité et continuité en une action de $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_{\mathrm{pc}} \cong \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$.

Lemme IV.4.1. — *Si U est un ouvert de M contenant 0, alors pour tout n assez grand, on a $\left(p^n, \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)M \subset U$.*

Démonstration. — Supposons le contraire. Il existe alors des suites x_n, y_n d'éléments de U tels que $z_n = p^n x_n + \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)y_n$ n'appartienne pas à U, quel que soit $n \in \mathbf{N}$ (remarquer que la suite des $\left(p^n, \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)M \subset U$ est décroissante). Par compacité de M et $M - U$, on peut extraire de (x_n, y_n, z_n) une sous-suite convergente, et si z est la limite de la sous-suite des z_n, la continuité de l'action de $P(\mathbf{Q}_p)$ montre que $z = 0$, ce qui est en contradiction avec l'appartenance de z à $M - U$.

Proposition IV.4.2. — (i) *Si $\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)^k \cdot x$ converge dans M, pour tout $x \in M$, et l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ ainsi définie fait de M un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module.*

(ii) *Si $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i [(1+T)^i] \in \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$, où $\lambda_i \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ tend vers 0 quand*[20] *$i \to \infty$, et si $x \in M$, alors la série $\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x$ converge dans M, et l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ ainsi définie fait de M un $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$-module.*

Démonstration. — Si $n \in \mathbf{N}$, alors $T^k \in (p^n, \varphi^n(T))$, si k est assez grand. Le lemme précédent permet donc de prouver la convergence de la série du (i) et, pour tout sous-module ouvert U de M, fournit l'existence de $n \in \mathbf{N}$ tel que $\lambda \cdot [(1+T)^i]x \in U$, pour tout $i \in I$, si $\lambda \in (p^n, \varphi^n(T))\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$. On en déduit la convergence de la série dans le (ii). Le reste de la proposition ne posant pas de problème, cela permet de conclure.

2. $\mathscr{O}_L[P(\mathbf{Q}_p)]$-modules admissibles. — Si $n \in \mathbf{N}$, soit $M^{[n]} = M/\left(p^n, \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)M$. Notons que l'action de $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ passe au quotient sur $M^{[n]}$. Si $x \in M$, on note $M^{[n]}(x)$ le sous-$\mathscr{O}_L\left[\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right]$-module de $M^{[n]}$ engendré par x, et on note[21] M_{apc} l'ensemble des $x \in M$ tels que, $M^{[n]}(x)$ soit de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$. L'équivalence entre les (i) et (ii) de la prop. IV.2.4 montre que si $M = D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$, alors $M_{\mathrm{apc}} = M_{\mathrm{pc}}$; il en est de même, d'après le cor. IV.3.2, si $M = \mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)$.

Proposition IV.4.3. — *Le module M_{apc} est stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, et est muni naturellement d'une structure de (φ, Γ)-module sur $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$, où φ agit par $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_a \in \Gamma$ par $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et $[(1+T)^b]$, pour $b \in \mathbf{Q}_p$, par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.*

---

(20) Suivant le filtre des complémentaires des parties finies ou, ce qui revient au même, dans $\mathbf{Q}_p$.

(21) « apc » signifie « algébriquement presque à support compact ».

Démonstration. — La stabilité par $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ suit de ce que $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est invariant par conjugaison par $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p^*$, et l'idéal $\big(p^n, \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\big)$ est envoyé sur l'idéal $\big(p^n, \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^{n+v_p(a)} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\big)$, et donc contient l'idéal $\big(p^{n-|v_p(a)|}, \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^{n-|v_p(a)|} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\big)$.

Maintenant, soient $x \in M_{\mathrm{apc}}$, $b \in \mathbf{Q}_p$ et $y = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)x$. On a $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)y = \left(\begin{smallmatrix} 1 & ab \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)x$, ce qui montre que $M^{[n]}(y)$ est inclus dans la somme des $\left(\begin{smallmatrix} 1 & ab \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)M^{[n]}(x)$, pour $a \in \mathbf{Z}_p^*$, et comme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & ab \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)M^{[n]}(x)$ ne dépend que de la classe de ab modulo $p^n\mathbf{Z}_p$, cette somme est en fait finie, ce qui prouve que $y \in M_{\mathrm{apc}}$, et que M_{apc} est stable par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et donc aussi par $P(\mathbf{Q}_p)$.

Il résulte de la prop. IV.2.4 que si $\lambda \in \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'image modulo $(p^n, \varphi^n(T))\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$ de λ est une combinaison linéaire finie de $[(1+T)^b]$, avec $b \in \mathbf{Z}[\frac{1}{p}]$. On en déduit que si $x \in M_{\mathrm{apc}}$, et si $n \in \mathbf{N}$, alors l'image de λx dans $M^{[n]}$ est dans un sous-$\mathscr{O}_L$-module engendré par un nombre fini de translatés de x par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et donc engendre un $\mathscr{O}_L$-module de longueur finie sous l'action de $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, puisque M_{apc} est stable par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Ceci étant vrai pour tout n, on en déduit l'appartenance de λx à M_{apc}, et donc la stabilité de M_{apc} par multiplication par un élément de $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$. Ceci permet de conclure.

On dit que M est *admissible* si M_{apc} est presque de type fini sur $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$.

Proposition IV.4.4. — *$M \mapsto M_{\mathrm{apc}}$ est un foncteur de la catégorie des $\mathscr{O}_L$-modules compacts munis d'une action admissible de $P(\mathbf{Q}_p)$ dans celle des (φ, Γ)-modules étales sur $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$.*

Démonstration. — La seule chose qui ne suit pas de la définition d'admissible est que M_{apc} est étale, mais la bijectivité de φ sur M_{apc} suit de ce que φ correspond à $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et donc admet $\left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ comme inverse.

On peut énoncer l'équivalence entre les (i) et les (ii) de la prop. IV.2.4 sous la forme : si D est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors $\widetilde{D}^+ = (D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{apc}}$. Comme $\widetilde{D}^+$ est presque de type fini sur $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+$, on en déduit, en utilisant le (iii) de la rem. IV.2.1, le résultat suivant.

Théorème IV.4.5. — *Si D est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est un $P(\mathbf{Q}_p)$-module admissible et $D = \mathbf{D}(\widetilde{\mathbf{V}}((D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{apc}}))$.*

Le th. IV.0.1 se déduit directement du th. IV.4.5 dans le cas de (φ, Γ)-modules sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Si D_1 et D_2 sont deux (φ, Γ)-modules sur $\mathscr{E}$ tels que les $P(\mathbf{Q}_p)$-modules $(D_1^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ et $(D_2^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ sont isomorphes, on peut appliquer le th. IV.4.5 à des réseaux Δ_1 et Δ_2 de D_1 et D_2, pour en déduire que Δ_1 et Δ_2 sont isogènes et donc que D_1 et D_2 sont isomorphes.

IV.5. Le $P(\mathbf{Q}_p)$-module $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ et son dual

1. Considérations topologiques. — Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, on note D_k le (φ,Γ)-module D/p^kD, et donc D est la limite projective des D_k.

Lemme IV.5.1. — *Il existe $c \in \mathbf{N}$ tel que p^c tue le conoyau de $D^{\mathrm{nr}} \to D_k^{\mathrm{nr}}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — Soit $V = \mathbf{V}(D)$, et, si $k \in \mathbf{N}$, soit $V_k = V/p^kV$. Il résulte du (ii) de la rem. II.2.4 que :

$$D^{\mathrm{nr}} = (W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes_{\mathbf{Z}_p} V^{\mathscr{H}'})^{\Gamma^{\mathrm{nr}}} \quad \text{et} \quad D_k^{\mathrm{nr}} = (W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes_{\mathbf{Z}_p} V_k^{\mathscr{H}'})^{\Gamma^{\mathrm{nr}}}.$$

Comme le foncteur $U \mapsto (W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes_{\mathbf{Z}_p} U)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}}$ est une équivalence de catégories, le conoyau de $D^{\mathrm{nr}} \to D_k^{\mathrm{nr}}$ est tué par la même puissance de p que celui de $V^{\mathscr{H}'} \to V_k^{\mathscr{H}'}$. Notons X le quotient de $((\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) \otimes V)^{\mathscr{H}'}$ par sa partie divisible. Le conoyau de $V^{\mathscr{H}'} \to V_k^{\mathscr{H}'}$ est alors isomorphe au sous-groupe de p^k-torsion de X, et comme X est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, il existe $c \in \mathbf{N}$ tel que p^c annule X, et donc aussi le conoyau de $D^{\mathrm{nr}} \to D_k^{\mathrm{nr}}$ pour tout k. Ceci permet de conclure.

Lemme IV.5.2. — *Si p^c tue le conoyau de $D^{\mathrm{nr}} \to D_k^{\mathrm{nr}}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, alors il tue aussi celui de $\widetilde{D}^+ \to \widetilde{D}_k^+$, pour tout $k \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — Cela résulte de ce que $D \mapsto \widetilde{D}^{++}$ est un foncteur exact et de ce que $\widetilde{D}^+ = D^{\mathrm{nr}} \oplus \widetilde{D}^{++}$ et $\widetilde{D}_k^+ = D_k^{\mathrm{nr}} \oplus \widetilde{D}_k^{++}$.

Lemme IV.5.3. — *L'application naturelle de $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ dans $\varprojlim \widetilde{D}_k/\widetilde{D}_k^+$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — L'injectivité est immédiate ; prouvons la surjectivité. Soit $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \varprojlim \widetilde{D}_k/\widetilde{D}_k^+$ et, si $k \in \mathbf{N}$, soit $\tilde{x}_k \in \widetilde{D}$ un relèvement de x_k. Alors $\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-1}$ est dans l'image inverse de $\widetilde{D}_{k-1}^+$, et donc peut s'écrire sous la forme $u_k + p^{k-1-c}v_k$, où $u_k \in \widetilde{D}^+$, $v_k \in \widetilde{D}$, et $c \in \mathbf{N}$ est choisi de sorte que p^c annule le conoyau de $\widetilde{D}^+ \to \widetilde{D}_k^+$, pour tout $k \in \mathbf{N}$ (l'existence d'un tel c résulte des lemmes IV.5.1 et IV.5.2). Soit $y_k = \tilde{x}_k - u_1 - \cdots - u_k$. Alors y_k a pour image x_k dans $\widetilde{D}_k/\widetilde{D}_k^+$, et on a $y_k - y_{k-1} = p^{k-1-c}v_k$, ce qui montre que la suite y_k a une limite y dans $\widetilde{D}$. Cette limite ayant, par construction, pour image $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$, cela permet de conclure.

Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, alors $\widetilde{D}^+$ est un ouvert de $\widetilde{D}$, et donc $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ est un module discret. Il résulte du lemme IV.5.3 que, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, alors $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ est séparé et complet pour la topologie p-adique. Par ailleurs, ce module est sans p-torsion ; c'est donc naturellement la boule unité d'un L-banach. Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, alors $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ est un

L-banach (si D_0 est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau de D stable par φ et Γ, c'est le L-banach dont $\widetilde{D}_0/\widetilde{D}_0^+$ est la boule unité).

2. Dualité

Proposition IV.5.4. — (i) *Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, alors $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est le dual (de Pontryagin) de $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$.*

(ii) *Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, alors $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est le $\mathscr{O}_L$-dual de $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$.*

(iii) *Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, alors $(\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ est le dual topologique de $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$.*

Démonstration. — Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ et si $z \in \widetilde{D}$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $z - \mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} z \in \widetilde{D}^+$. Autrement dit, il existe n tel que l'image de z modulo $\widetilde{D}^+$ soit dans l'image de $D \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p = \varphi^{-n}(D)$. On en déduit que $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ est la réunion croissante des $\varphi^{-n}(D)/\varphi^{-n}(D^+)$ ou, ce qui revient au même, la limite inductive des D/D^+ relativement aux applications de transitions toutes égales à φ. Son dual est donc, d'après le (ii) de la prop. II.5.19, la limite projective des $\check{D}^\natural$ relativement aux applications ψ, c'est-à-dire $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Ceci démontre le (i) ; le (ii) et le (iii) s'en déduisant de la manière habituelle, cela permet de conclure.

Remarque IV.5.5. — (i) Si $D = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, on retrouve, en utilisant les prop. IV.3.1 et IV.3.4, la dualité entre $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)$ et $\mathscr{C}^0(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0$.

(ii) Il résulte de la démonstration que l'accouplement décrivant la dualité entre $\check{D} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $\widetilde{D} = (D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$ est la limite de

$$\{\varphi^n(\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} x), \varphi^n(\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} y)\} = \{\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} x, \mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} y\}_{\mathbf{Q}_p}.$$

L'accouplement $\{\ ,\ \}_{\mathbf{Q}_p}$ étant $P(\mathbf{Q}_p)$-équivariant (prop. III.2.3), il en est de même de son prolongement.

(iii) L'accouplement $\{\ ,\ \}_{\mathbf{Q}_p}$ admet aussi un prolongement $P(\mathbf{Q}_p)$-équivariant (par continuité) à $(\check{D} \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}} \times (D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$. En effet, on dispose (cf. prop. IV.3.3) d'une application $\mathrm{rés}_0 : \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}} \frac{dT}{1+T} \to \mathscr{O}_L$ qui commute aux actions de φ et Γ. Celle-ci induit une application $\mathrm{rés}_0 : \widetilde{\mathscr{E}}/\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}} \frac{dT}{1+T} \to L/\mathscr{O}_L$ avec les mêmes propriétés. En composant avec l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle$ sur $(\check{D} \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}} \times (D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$, obtenu en étendant l'accouplement tautologique $\check{D} \times D$ par $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$-linéarité, ceci permet de définir un accouplement

$$\{\ ,\ \}_{\mathbf{Q}_p} \text{ sur } (\check{D} \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}} \times (D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}, \quad \text{avec } \{x, y\}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{rés}_0\big(\big\langle \big(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) x, y \big\rangle\big).$$

La restriction de cet accouplement à $(\check{D} \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c \times (D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ est l'accouplement $\{\ ,\ \}_{\mathbf{Q}_p}$.

Corollaire IV.5.6. — (i) *Si D est un (φ, Γ)-module irréductible sur $k_{\mathscr{E}}$, alors $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ est un $P(\mathbf{Q}_p)$-module irréductible.*

(ii) *Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, alors $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ est un $\mathscr{O}_L[P(\mathbf{Q}_p)]$-module de longueur finie.*

(iii) *Si D est un (φ, Γ)-module irréductible sur $\mathscr{E}$, alors $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ est un $P(\mathbf{Q}_p)$-module topologiquement irréductible.*

Démonstration. — Les (i) et (iii) résultent, par dualité, de la prop. IV.5.4 et des cor. III.3.9 et III.3.11. Le (ii) résulte du (i) par dévissage en utilisant l'exactitude des foncteurs $D \mapsto \widetilde{D}$ et $D \mapsto \widetilde{D}^{++}$ et la finitude du $\mathscr{O}_L$-module $\widetilde{D}^+/\widetilde{D}^{++}$.

3. L'application $\text{rés}_0 : D \boxtimes \mathbf{Q}_p \to D^\sharp/D^\natural$. — On a défini, au n° 4 du § II.5 une application $\text{rés}_0 : D \to D^\sharp/D^\natural$. De même, on définit $\text{rés}_0(z)$, pour $z \in D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ (resp. $z \in (D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$, si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{E})$), en posant $\text{rés}_0(z) = \text{rés}_0(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z))$.

Proposition IV.5.7. — *Soit D un (φ, Γ)-module étale.*

(i) *Si $z \in D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ (resp. $z \in (D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$), alors :*
- $\text{rés}_0(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \text{rés}_0(z)$, *pour tout $a \in \mathbf{Q}_p^*$,*
- $\text{rés}_0(\text{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} z) = \text{rés}_0(z)$, *pour tout $n \in \mathbf{Z}$.*

(ii) $\text{rés}_0(z) = 0$ *si et seulement si il existe $x \in \widetilde{D}^+$ tel que* $\text{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}(z - x)$ *tende p-adiquement vers 0 quand $n \to +\infty$.*

Démonstration. — Le (i) est une conséquence immédiate du (i) de la prop. II.5.22. Maintenant, comme $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} x \in D^\natural$, si $x \in \widetilde{D}^+$ (lemme IV.2.2 (i)), on déduit du (i) que $\text{rés}_0(z) = 0$ s'il existe $x \in \widetilde{D}^+$ tel que $\text{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}(z - x)$ tende p-adiquement vers 0.

Pour démontrer la réciproque, on peut se contenter du cas où D est étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, le cas $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathscr{E})$ s'en déduisant en tensorisant par L. Soit $c \in \mathbf{N} - \{0\}$ tel que p^c tue le sous-$\mathscr{O}_L$-module de torsion $(D^\sharp/D^\natural)_{\text{tors}}$ de $D^\sharp/D^\natural$. D'après le (i) de la prop. II.4.2, il existe $m_1 \in \mathbf{N}$ tels que $\psi^{m_1}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z) \in D^\sharp + p^{2c}D$, et l'hypothèse $\text{rés}_0(z) = 0$ implique que l'on a alors $\psi^{n_1}(z) \in D^\natural + p^{2c}D$.

Par ailleurs $\psi^n((D/p^cD)^{++}) = (D/p^cD)^\natural$, si $n \gg 0$ (rem. II.5.13). Il existe donc $n_1 \geq m_1$ et $x_1 \in (D/p^cD)^{++}$, tel que $\psi^{n_1}(x_1) = \psi^{n_1}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z)$ modulo p^c. Maintenant, le foncteur $D \mapsto \widetilde{D}^{++}$ étant exact ((iv) de la rem. IV.2.1), on peut relever x_1 en $\tilde{x}_1$ dans $\widetilde{D}^{++}$, et par construction, on a $\psi^{n_1}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - \tilde{x}_1)) \in p^{2c}D$. Comme $\text{rés}_0(\psi^{n_1}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - \tilde{x}_1))) = 0$, et comme p^c tue $(D^\sharp/D^\natural)_{\text{tors}}$, cela implique que $\text{rés}_0(p^{-c}\psi^{n_1}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - \tilde{x}_1))) = 0$ puisque $\text{rés}_0(p^{-c}\psi^{n_1}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - \tilde{x}_1))) = p^c\text{rés}_0(p^{-2c}\psi^{n_1}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - \tilde{x}_1)))$. En réitérant le raisonnement précédent, cela fournit $n_2 \in \mathbf{N}$ et $\tilde{x}_2 \in \widetilde{D}^+$ tels que $\psi^{n_2}(p^{-c}\psi^{n_1}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - \tilde{x}_1)) - \psi^{n_1}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}\tilde{x}_2)) \in p^{2c}D$ et donc $\psi^{n_1+n_2}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - \tilde{x}_1 - p^c\tilde{x}_2)) \in p^{3c}D$. Une récurrence immédiate nous fournit donc des entiers n_j et des éléments $\tilde{x}_j$ de $\widetilde{D}^+$ tels que

$$\psi^{n_1+\cdots+n_k}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - \tilde{x}_1 - \cdots - p^{(k-1)c}\tilde{x}_k)) \in p^{(k+1)c}D, \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{N}.$$

Soit $x = \sum_{j=1}^{+\infty} p^{(j-1)c}\tilde{x}_j$; c'est un élément de $\widetilde{D}^+$ vérifiant $\psi^n(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - x)) \in p^{kc}D$ (et donc $\text{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}(z - c) \in p^{kc}D$), pour tout $n \geq n_1 + \cdots + n_k$. On en déduit le résultat.

V. Opérations analytiques sur les (φ, Γ)-modules

Le but de ce chapitre est de définir, en s'inspirant des formules pour l'image directe d'une mesure par un difféomorphisme local ou pour la multiplication d'une mesure par une fonction continue, des opérations analytiques sur n'importe quel (φ, Γ)-module étale. Le cas des mesures correspond au (φ, Γ)-module trivial $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et même, plus précisément, à son sous-(φ, Γ)-module $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\natural} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{+}$ (l'identité de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\natural}$ et $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{+}$ rend la convergence des formules bien meilleure dans le cas du module trivial que dans le cas général où l'existence des limites est un peu miraculeuse).

Dans tout ce chapitre, les (φ, Γ)-modules considérés sont étales sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Les résultats s'étendent aux objets de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ par linéarité.

V.1. Image directe par un difféomorphisme local

1. Le théorème d'inversion locale

Si U et V sont deux ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p$, on dit que $f : U \to V$ est un *difféomorphisme* si f est bijectif, de classe $\mathscr{C}^1$ (sous-entendu uniformément), et si son inverse est de classe $\mathscr{C}^1$ (la prop. V.1.1 ci-dessous montre que cette dernière condition est en fait automatique).

On dit que $f : U \to V$ est un *difféomorphisme local* si f est de classe $\mathscr{C}^1$, et si f' ne s'annule pas sur U.

Un difféomorphisme $f : a+p^k\mathbf{Z}_p \to b+p^\ell\mathbf{Z}_p$ est dit *régulier* si $v_p(f'(x))$ est constant sur $a + p^k\mathbf{Z}_p$ et s'il transforme un système de représentants de $a + p^k\mathbf{Z}_p$ modulo $p^n\mathbf{Z}_p$ en un système de représentants de $b + p^\ell\mathbf{Z}_p$ modulo $p^{n+\ell-k}\mathbf{Z}_p$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Proposition V.1.1. — *Soient U, V des ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p$ et $f : U \to V$ de classe $\mathscr{C}^1$. Si $a \in U$ est tel que $f'(a) \neq 0$, alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que f induise un difféomorphisme régulier de $a + p^k\mathbf{Z}_p$ sur $f(a) + f'(a)p^k\mathbf{Z}_p$.*

Démonstration. — L'énoncé est invariant par composition à droite et à gauche par des applications affines, ce qui permet de se ramener au cas $a = f(a) = 0$ et $f'(a) = 1$, et l'énoncé étant local, on peut supposer $U \subset \mathbf{Z}_p$.

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, on peut écrire $f(x + y) - f(x) - f'(x)y$ sous la forme $y\varepsilon(x, y)$, avec $v_p(\varepsilon(x, y)) \geq a(v_p(y))$ et $a : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. En particulier, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $p^k\mathbf{Z}_p \subset U$ et

$$v_p(\varepsilon(x_1, x_2 - x_1)) \geq 1, \text{ si } v_p(x_2 - x_1) \geq k, \quad \text{et} \quad v_p(f'(x) - 1) \geq 1, \text{ si } v_p(x) \geq k.$$

Soit alors $F(z, x) = x - f(x) + z$. On a

$$F(z, x_1) - F(z, x_2) = (x_2 - x_1)(\varepsilon(x_1, x_2 - x_1) + (f'(x_1) - 1)),$$

et comme $v_p(\varepsilon(x_1,x_2-x_1)+(f'(x_1)-1)) \geq 1$, si $x_1,x_2 \in p^k\mathbf{Z}_p$, la fonction $x \mapsto F(z,x)$ est contractante sur $p^k\mathbf{Z}_p$, pour tout $z \in p^k\mathbf{Z}_p$. Elle admet donc un unique point fixe, noté $g(z)$, et ce point fixe est l'unique solution de l'équation $f(x) = z$ dans $p^k\mathbf{Z}_p$.

Enfin, on a $v_p(f'(x)) = 0$, si $x \in p^k\mathbf{Z}_p$, et comme $v_p(\varepsilon(x,y)) \geq 1$, si $x,y \in p^k\mathbf{Z}_p$, on en déduit que $v_p(f(x+y) - f(x)) = v_p(y)$, et que $v_p(f(x_1) - f(x_2)) = v_p(x_1 - x_2)$, si $x_1, x_2 \in p^k\mathbf{Z}_p$. Ceci permet de montrer :

– que f transforme un système de représentants modulo p^n en un système de représentants modulo p^n,

– que $v_p(g(z_1) - g(z_2)) = v_p(f(g(z_1)) - f(g(z_2))) = v_p(z_1 - z_2)$, et donc que g est continue,

– que g est surjective puisque son image est compacte, et dense d'après le premier point, et donc que $g \circ f = \mathrm{id}$,

– que $g^{[1]}(x,y) = \frac{g(y)-g(x)}{y-x}$ est bornée sur $p^k\mathbf{Z}_p \times p^k\mathbf{Z}_p$ privé de la diagonale.

Pour conclure, il suffit donc de prouver que g est de classe $\mathscr{C}^1$ ou, autrement dit, que $g^{[1]}$ s'étend par continuité à $p^k\mathbf{Z}_p \times p^k\mathbf{Z}_p$, ce qui suit de ce que

$$g^{[1]}(x,y) = \frac{g(y)-g(x)}{y-x} = \frac{g(y)-g(x)}{f(g(y)) - f(g(x))} = \frac{1}{f^{[1]}(g(y),g(x))},$$

et de ce que $f^{[1]}$ est à valeurs dans $\mathbf{Z}_p^*$ puisque $v_p(f(x_1) - f(x_2)) = v_p(x_1 - x_2)$, et est continue.

2. Le cas d'un difféomorphisme local de $\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{Z}_p$

Si $n \in \mathbf{N}$, la notation I_n désigne un système de représentants de $\mathbf{Z}_p$ modulo $p^n\mathbf{Z}_p$.

Soit $f : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p$ un difféomorphisme local. Si μ est une mesure sur $\mathbf{Z}_p$, son image directe par f est la mesure $f_*\mu$ sur $\mathbf{Z}_p$ définie par $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi\, f_*\mu = \int_{\mathbf{Z}_p} (\phi \circ f)\, \mu$. Sa transformée d'Amice est donc

$$A_{f_*\mu} = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^{f(x)}\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n} \int_{i+p^n\mathbf{Z}_p} (1+T)^{f(x)}\mu.$$

Par ailleurs, $f(x) = f(i) + f'(i)(x-i) + (x-i)\varepsilon(i,x-i)$, où $\varepsilon(x,y) \to 0$, quand $y \to 0$, uniformément pour $x \in \mathbf{Z}_p$. On en déduit que $A_{f_*\mu}$ est aussi la limite de

$$\sum_{i\in I_n} \int_{i+p^n\mathbf{Z}_p} (1+T)^{f(i)+f'(i)(x-i)}\mu = \sum_{i\in I_n} \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \left(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i)-if'(i) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}\mu.$$

Comme $\left(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i)-if'(i) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p} = \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, on obtient finalement :

$$A_{f_*\mu} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n} \left(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) A_\mu\right).$$

Cette dernière formule a un sens pour n'importe quel (φ,Γ)-module étale et suggère l'énoncé du lemme V.1.2 ci-dessous.

Soit D un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.

Si $D \in \Phi\Gamma^{\rm et}_{\rm tors}$, on dit qu'une suite de familles $a_{x,n}$, pour $x \in X_n$, d'éléments de D, *tend uniformément vers* 0, s'il existe une suite décroissante $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de treillis de D vérifiant $\cap_{n\in\mathbf{N}} M_n = 0$, telle que $a_{x,n} \in M_n$ pour tout $x \in X_n$. Si tel est le cas, on a $M_n \subset D^+$ pour n assez grand, ce qui permet d'imposer à M_n d'être stable par φ, si n est assez grand.

Si $D \in \Phi\Gamma^{\rm et}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, on dit qu'une suite de familles $a_{x,n}$, pour $x \in X_n$, d'éléments de D, tend uniformément vers 0, si elle tend uniformément vers 0 modulo p^k, pour tout $k \in \mathbf{N}$.

L'un des intérêt de cette notion est qu'une série dont les termes sont dans une telle famille est convergente (avec des quantificateurs laissés au lecteur).

Lemme V.1.2. — *Soit $f : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p$ un difféomorphisme régulier.*

(i) *Si $z \in D$, la suite de terme général*

$$u_n = \sum_{i\in I_n} \left(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\right)$$

converge dans D vers une limite f_*z qui ne dépend pas du choix des I_n, et l'application $f_* : D \to D$ ainsi définie est $\mathscr{O}_L$-linéaire continue.

(ii) *De plus,* $\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(f_*z - u_n)$ *tend vers* 0, *quand $n \to +\infty$, uniformément pour $i \in I_n$.*

Démonstration. — Le cas général se déduit du cas de torsion par limite projective ; on peut donc supposer D de torsion. L'indépendance de la limite par rapport au choix des I_n suit de son existence (si on a deux choix, on en fabrique un troisième en panachant et l'existence des limites montre que les trois limites sont égales).

Si $i \in \mathbf{Z}_p$, soit $r_{n,i}(z) = \psi^n\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\right)$. On a alors

$$\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\right) = \varphi^n(r_{n,i}(z)) \quad \text{et} \quad u_n = \sum_{i\in I_n} \left(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \varphi^n(r_{n,i}(z)).$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{p^{n-1}\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\right) &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{Res}_{i+p^{n-1}\mathbf{Z}_p}(z) = \sum_{j\in I_n\cap i+p^{n-1}\mathbf{Z}_p} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{Res}_{j+p^n\mathbf{Z}_p}(z) \\ &= \sum_{j\in I_n\cap i+p^{n-1}\mathbf{Z}_p} \left(\begin{smallmatrix} 1 & j-i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -j \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\right) = \sum_{j\in I_n\cap i+p^{n-1}\mathbf{Z}_p} \left(\begin{smallmatrix} 1 & j-i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \varphi^n(r_{n,j}(z)) \end{aligned}$$

Ceci permet, en notant i_j l'élément de I_{n-1} dans la classe de j modulo p^{n-1} d'écrire $u_n - u_{n-1}$ sous la forme

$$u_n - u_{n-1} = \sum_{j\in I_n} \Big(\big(\begin{smallmatrix} f'(j) & f(j) \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big) - \big(\begin{smallmatrix} f'(i_j) & f(i_j) \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix} 1 & j-i_j \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\Big)\cdot \varphi^n(r_{n,j}(z))$$
$$= \sum_{j\in I_n} \big(\begin{smallmatrix} 1 & f(j) \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\varphi^n\big((g_j - h_{n,j})\cdot r_{n,j}(z)\big),$$

avec $g_j = \big(\begin{smallmatrix} f'(j) & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)$ et $h_{n,j} = \big(\begin{smallmatrix} f'(i_j) & p^{-n}(f(i_j)+f'(i_j)(j-i_j)-f(j)) \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)$ (et $g_j - h_{n,j}$ désigne la différence dans $\mathscr{O}_L[G]$ et pas dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_p)$...). Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ et comme $v_p(j-i_j)\geq n-1$, il existe $a:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ tendant vers $+\infty$ en $+\infty$, telle que l'on ait

$$v_p(f'(j)-f'(i_j))\geq a(n) \quad \text{et} \quad v_p\big(p^{-n}(f(i_j)+f'(i_j)(j-i_j)-f(j))\big)\geq a(n),$$

quel que soit $j\in I_n$. On a alors $g_j^{-1}h_{n,j}\in \big(\begin{smallmatrix} 1+p^{a(n)}\mathbf{Z}_p & p^{a(n)}\mathbf{Z}_p \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)$ car $v_p(f'(x))=0$ pour tout $x\in\mathbf{Z}_p$, étant donné que f est supposé régulier.

Par ailleurs, les fonctions $r_{n,j}$ sont $\mathscr{O}_L$-linéaires continues, la continuité étant uniforme en $n\in\mathbf{N}$ et $j\in\mathbf{Z}_p$ car si M est un treillis de D, il existe un treillis M' de D contenant tous les $\psi^n\big(\big(\begin{smallmatrix} 1 & -j \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)z\big)$, pour $j\in\mathbf{Z}_p$ et $n\in\mathbf{N}$ (en effet, on a $\big(\begin{smallmatrix} 1 & -j \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)z\in M$ pour tout $j\in\mathbf{Z}_p$ et donc on peut appliquer le (iii) de la prop. II.4.2). On en déduit, en utilisant la continuité de l'action de $\big(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)$ sur D, l'existence de n_0 et d'une suite décroissante de treillis $(M_n)_{n\geq n_0}$ de D, stables par φ, dont l'intersection est nulle, et telle que $(g_j-h_{n,j})\cdot r_{n,j}(z) = g_j(1-g_j^{-1}h_{n,j})\cdot r_{r,j}(z)\in M_n$, pour tout $j\in\mathbf{Z}_p$, et tout $z\in M$. On a alors $u_n-u_{n-1}\in M_n$, et donc u_n-u_{n-1} tend vers 0 uniformément sur M, ce qui prouve que la série converge vers une application $\mathscr{O}_L$-linéaire continue. On en déduit le (i).

Le (ii) se démontre de même en remarquant que, si $z\in M$, alors

$$\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(u_{n+k}-u_{n+k-1}) = \sum_{j\in I_{n+k},\ f(j)\in i+p^n\mathbf{Z}_p} \big(\begin{smallmatrix} 1 & f(j) \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\varphi^{n+k}\big((g_j-h_{n+k,j})\cdot r_{n+k,j}(z)\big)$$

appartient à M_{n+k}, ce qui implique que $\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(f_*z-u_n)\in M_{n+k}$, pour tout $i\in\mathbf{Z}_p$, et permet de conclure, vu les conditions satisfaites par les M_n.

3. Le cas général

Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, et si n est assez grand, la notation $I_n(U)$ désigne un système de représentants de U modulo $p^n\mathbf{Z}_p$.

Proposition V.1.3. — *Soient U,V deux ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p$ et $f:U\to V$, un difféomorphisme local.*

(i) *$z\in D\boxtimes U$, la suite de terme général*

$$u_n = \sum_{i\in I_n(U)} \big(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\big(\big(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)z\big)$$

converge dans $(D\boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ *vers une limite* f_*z *appartenant à* $D\boxtimes V$ *et ne dépendant pas du choix des* $I_n(U)$.

(ii) *L'application* $f_* : D\boxtimes U \to D\boxtimes V$ *ainsi définie est* $\mathscr{O}_L$*-linéaire continue.*

(iii) $\mathrm{Res}_{j+p^n\mathbf{Z}_p}(f_*z - u_n) \to 0$, *quand* $n\to+\infty$, *uniformément pour* $j\in V$.

Démonstration. — f étant de classe $\mathscr{C}^1$ et f' ne s'annulant pas, U étant compact, il existe $k\in\mathbf{N}$ tel que, pour tout $a\in U$, f soit un difféomorphisme de $a+p^k\mathbf{Z}_p$ sur $f(a)+f'(a)p^k\mathbf{Z}_p$. En écrivant U comme une réunion disjointe (finie) de $a+p^k\mathbf{Z}_p$, pour $a\in A\subset U$, on obtient $D\boxtimes U = \oplus_{a\in A} D\boxtimes (a+p^k\mathbf{Z}_p)$, et on est donc ramené à prouver le résultat dans le cas où $U = a+p^k\mathbf{Z}_p$, $V = f(a)+f'(a)p^k\mathbf{Z}_p$ et f est régulier. Nous aurons besoin du résultat suivant qui résulte d'un calcul immédiat.

Lemme V.1.4. — *Si* $h\in P(\mathbf{Q}_p)$ *et si* $f : U\to\mathbf{Q}_p$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$, *alors pour tout* $x\in U$, *on a*

$$\begin{pmatrix} (h\circ f)'(x) & h\circ f(x)\\ 0 & 1\end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} f'(x) & f(x)\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad\text{et}\quad \begin{pmatrix} (f\circ h)'(x) & f\circ h(x)\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(h(x)) & f(h(x))\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ell(h),$$

où $\ell(h)$ *est la partie linéaire* $\left(\begin{smallmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ *de* $h = \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

Soit alors $h_1 = \left(\begin{smallmatrix} p^kf'(a) & f(a)\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, $h_2 = \left(\begin{smallmatrix} p^k & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $g = h_1^{-1}\circ f\circ h_2$ de telle sorte que $g : \mathbf{Z}_p\to\mathbf{Z}_p$ vérifie les conditions du lemme V.1.2.

Soit $I_n = \{p^{-k}(j-a),\ j\in I_{n+k}(U)\} = h_2^{-1}(I_{n+k}(U))$; c'est un système de représentants de $\mathbf{Z}_p$ modulo p^n puisque f est régulier. En utilisant le lemme V.1.4, on peut écrire u_n sous la forme

$$u_n = \sum_{i\in I_n} h_1\begin{pmatrix} g'(i) & g(i)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^{-k} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mathrm{Res}_{p^{n+k}\mathbf{Z}_p}\left(\begin{pmatrix} 1 & -(a+p^ki)\\ 0 & 1\end{pmatrix}z\right).$$

Or on a

$$\begin{pmatrix} p^{-k} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\circ\mathrm{Res}_{p^{n+k}\mathbf{Z}_p} = \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\circ\begin{pmatrix} p^{-k} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad\text{et}\quad \begin{pmatrix} p^{-k} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -(a+p^ki)\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i\\ 0 & 1\end{pmatrix}h_2^{-1}.$$

On obtient donc

$$u_n = h_1\Big(\sum_{i\in I_n}\begin{pmatrix} g'(i) & g(i)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\Big(\begin{pmatrix} 1 & -i\\ 0 & 1\end{pmatrix}h_2^{-1}(z)\Big)\Big).$$

Comme $h_2^{-1}(z)\in D\boxtimes\mathbf{Z}_p = D$, le terme dans la parenthèse tend vers $g_*(h_2^{-1}(z))$ d'après le lemme V.1.2. On en déduit l'existence de f_* et la formule $f_* = h_1\circ g_*\circ h_2^{-1}$ qui permet de démontrer la proposition.

Remarque V.1.5. — (i) Si $h\in P(\mathbf{Q}_p)$ est identifié au difféomorphisme de $\mathbf{Q}_p$ qu'il induit, alors $h_* = h$.

(ii) Si $f : U\to V$ est un difféomorphisme local, et si $h\in P(\mathbf{Q}_p)$, il ressort de la démonstration ci-dessus (ou d'un calcul direct) que

$$(f\circ h)_* = f_*\circ h = f_*\circ h_* \quad\text{et}\quad (h\circ f)_* = h\circ f_* = h_*\circ f_*.$$

4. L'image directe d'une composée

Proposition V.1.6. — *Si U, V, W sont des ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p$, et si $f : U \to V$ et $g : V \to W$ sont des difféomorphismes locaux, alors*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Démonstration. — Comme d'habitude, il suffit de traiter le cas où

$$U = a + p^k\mathbf{Z}_p, \quad V = f(a) + f'(a)p^k\mathbf{Z}_p, \quad W = g \circ f(a) + (g \circ f)'(a)p^k\mathbf{Z}_p,$$

et f, g sont des difféomorphismes réguliers. Posons

$$h_1 = \left(\begin{smallmatrix} p^k & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad h_2 = \left(\begin{smallmatrix} p^k f'(a) & f(a) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad h_3 = \left(\begin{smallmatrix} p^k (g\circ f)'(a) & g\circ f(a) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),$$
$$f_1 = h_2^{-1} \circ f \circ h_1, \quad g_1 = h_3^{-1} \circ g \circ h_2,$$

de telle sorte que f_1 et g_1 sont des difféomorphismes réguliers de $\mathbf{Z}_p$ sur $\mathbf{Z}_p$. On a $f = h_2 \circ f_1 \circ h_1^{-1}$ et donc $f_* = h_2 \circ (f_1)_* \circ h_1^{-1}$ (cf. rem. V.1.5). De même $g = h_3 \circ g_1 \circ h_2^{-1}$ et donc $g_* = h_3 \circ (g_1)_* \circ h_2^{-1}$. On en déduit que $g_* \circ f_* = h_3 \circ (g_1)_* \circ (f_1)_* \circ h_1^{-1}$ et $(g \circ f)_* = h_3 \circ (g_1 \circ f_1)_* \circ h_1^{-1}$. On est donc ramené à prouver que $(g_1 \circ f_1)_* = (g_1)_* \circ (f_1)_*$; autrement dit, il suffit de prouver le résultat dans le cas $U = V = W = \mathbf{Z}_p$ et f, g sont des difféomorphismes réguliers de $\mathbf{Z}_p$ sur $\mathbf{Z}_p$. On a alors

$$\begin{aligned} g_*(f_*(z)) &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i \in I_n} \left(\begin{smallmatrix} g'(i) & g(i) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_*(z)\right) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{j \in f^{-1}(I_n)} \left(\begin{smallmatrix} g'(f(j)) & g(f(j)) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -f(j) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_*(z)\right) \end{aligned}$$

Or, d'après le (ii) du lemme V.1.2,

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -f(j) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) f_*(z)\right) &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & -f(j) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{Res}_{f(j)+p^n\mathbf{Z}_p}(f_*(z)) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} 1 & -f(j) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} f'(j) & f(j) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -j \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\right) + \varepsilon_{n,j}(z), \end{aligned}$$

où $\varepsilon_{n,j}(z)$ tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$, uniformément pour $j \in \mathbf{Z}_p$. Comme

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & -f(j) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} f'(j) & f(j) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} f'(j) & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{smallmatrix} g'(f(j)) & g(f(j)) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} f'(j) & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} (g\circ f)'(j) & g\circ f(j) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),$$

on obtient aussi

$$g_*(f_*(z)) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j \in f^{-1}(I_n)} \left(\begin{smallmatrix} (g\circ f)'(j) & g\circ f(j) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -j \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z\right) = (g \circ f)_*(z),$$

ce qui permet de conclure.

V.2. Multiplication par une fonction continue

1. Généralités. — Soit $\alpha : \mathbf{Z}_p \to \mathscr{O}_L$ une fonction continue. Si μ est une mesure sur $\mathbf{Z}_p$, on peut multiplier μ par α : la mesure $m_\alpha(\mu)$ que l'on obtient est définie par $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi\, m_\alpha(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p} \alpha\phi\, \mu$. Sa transformée d'Amice est donc

$$A_{m_\alpha(\mu)} = \int_{\mathbf{Z}_p} \alpha(x)(1+T)^x\,\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n} \int_{i+p^n\mathbf{Z}_p} \alpha(x)(1+T)^x\,\mu.$$

Comme α est continue, $\alpha(x)-\alpha(i)$ tend vers 0 sur $i+p^n\mathbf{Z}_p$, uniformément pour $i \in \mathbf{Z}_p$. On a donc aussi

$$A_{m_\alpha(\mu)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n} \int_{i+p^n\mathbf{Z}_p} \alpha(i)(1+T)^x\,\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n} \alpha(i)\,\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p} A_\mu.$$

Cela suggère le résultat suivant :

Proposition V.2.1. — *Soient U un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$ et $\alpha \in \mathscr{C}^0(U,\mathscr{O}_L)$. Alors, si $z \in D\boxtimes U$, la suite de terme général*

$$u_n = \sum_{i\in I_n(U)} \alpha(i)\,\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(z)$$

tend vers une limite $m_\alpha(z) \in D\boxtimes U$ qui ne dépend pas du choix des $I_n(U)$, et l'application $m_\alpha : D\boxtimes U \to D\boxtimes U$ ainsi définie est $\mathscr{O}_L$-linéaire continue.

Démonstration. — Si D est de torsion, il existe $\ell \in \mathbf{N}$ tel que D soit tué par p^ℓ. Comme U est compact, α est uniformément continue et il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $a+p^{n_0}\mathbf{Z}_p \subset U$, pour tout $a\in U$, et $\alpha \bmod p^\ell$ soit constante modulo p^{n_0}. La suite u_n est alors constante pour $n \geq n_0$, ce qui permet de conclure dans le cas où D est de torsion. Le cas général s'en déduit par limite projective.

Remarque V.2.2. — L'action de Γ n'a pas été utilisée dans la construction de m_α (en effet, la définition de $\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}$ n'utilise que la structure de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module et les actions de φ et ψ). La même formule permet donc, si $\mathbf{A}$ est l'anneau de Fontaine, de définir une application $m_\alpha : \mathbf{A}\boxtimes U \to \mathbf{A}\boxtimes U$, et on retrouve notre application $m_\alpha : D\boxtimes U \to D\boxtimes U$ ci-dessus en étendant l'application m_α à $(\mathbf{A}\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{V}(D))\boxtimes U$, qui contient $D\boxtimes U$, par $m_\alpha(a\otimes v) = m_\alpha(a)\otimes v$, si $a\in\mathbf{A}$ et $v\in\mathbf{V}(D)$.

Proposition V.2.3. — *Si $\alpha,\beta \in \mathscr{C}^0(U,\mathscr{O}_L)$, alors*

$$m_\alpha\circ m_\beta = m_\beta\circ m_\alpha = m_{\alpha\beta}.$$

Démonstration. — Si D est de torsion, tué par p^ℓ, soit n_0 tel que α et $\beta \bmod p^\ell$ soient constantes modulo p^{n_0}, et $a+p^{n_0}\mathbf{Z}_p \subset U$, pour tout $a\in U$. On a alors

$\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(m_\alpha(z)) = \alpha(i)\,\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(z)$ pour tout $n \geq n_0$ et tout $i \in U$. On en déduit que

$$m_\beta(m_\alpha(z)) = \sum_{i\in I_{n_0}(U)} \beta(i)\,\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(m_\alpha(z)) = \sum_{i\in I_{n_0}(U)} \beta(i)\alpha(i)\,\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(z) = m_{\alpha\beta}(z).$$

Ceci permet de conclure dans le cas où D est de torsion. Le cas général s'en déduit par limite projective.

Proposition V.2.4. — *Soient U, V des ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p$. Si $f : U \to V$ est un difféomorphisme local, et si $\alpha \in \mathscr{C}(V, \mathscr{O}_L)$, alors*

$$f_* \circ m_{\alpha\circ f} = m_\alpha \circ f_*.$$

Démonstration. — Comme dans la démonstration de la prop. V.1.3, on peut se ramener, quitte à subdiviser U, au cas où f est un difféomorphisme régulier de U sur V ; en particulier, $v_p(f'(x)) = r$ est constant sur U et $f(I_n(U))$ est un système de représentants de V modulo p^{n+r}, pour tout n assez grand.

Maintenant, si D est de torsion, on a $m_{\alpha\circ f}(z) = \sum_{i\in I_n(U)} \alpha(f(i))\,\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(z)$, pour tout n assez grand, et donc

$$\begin{aligned} f_* \circ m_{\alpha\circ f}(z) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n(U)} \left(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) m_{\alpha\circ f}(z)\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n(U)} \left(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\alpha(f(i))\,\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) z\right)\end{aligned}$$

Par ailleurs, il résulte du (iii) de la prop. V.1.3 et de ce que f est un difféomorphisme régulier, que $\left(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) z\right) - \mathrm{Res}_{f(i)+p^{n+r}\mathbf{Z}_p}(f_* z)$ tend vers 0 uniformément pour $i \in U$, quand n tend vers $+\infty$. On a donc aussi

$$f_* \circ m_{\alpha\circ f}(z) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j\in f(I_n(U))} \alpha(j)\,\mathrm{Res}_{j+p^{n+r}\mathbf{Z}_p}(f_* z) = m_\alpha \circ f_*(z).$$

Ceci permet de conclure dans le cas d'un module de torsion ; le cas général s'en déduit par limite projective.

Comme $\mathrm{Res}_{U'} = m_{\mathbf{1}_{U'}}$, on déduit des prop. V.2.3 et V.2.4 les résultats suivants.

Proposition V.2.5. — *Soient $U' \subset U$ et V des ouverts compact de $\mathbf{Q}_p$.*

(i) *Si $f : U \to V$ est un difféomorphisme local, alors $\mathrm{Res}_{f(U')} \circ f_* = f_* \circ \mathrm{Res}_{U'}$.*

(ii) *Si $\alpha \in \mathscr{C}^0(U, \mathscr{O}_L)$, alors $m_\alpha \circ \mathrm{Res}_{U'} = \mathrm{Res}_{U'} \circ m_\alpha$.*

2. Multiplication par x et dérivation. — On note simplement x la fonction identité sur $\mathbf{Z}_p$; on dispose donc d'une application $m_x : D \to D$, pour tout φ-module étale D sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ (cf. rem. V.2.2).

Proposition V.2.6. — *Soient D_1, D_2, D_3 des φ-modules étales sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et soit une application $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-bilinéaire $M : D_1 \times D_2 \to D_3$, commutant à φ. Alors, si $z_1 \in D_1$ et $z_2 \in D_2$, on a*

$$m_x(M(z_1, z_2)) = M(m_x(z_1), z_2) + M(z_1, m_x(z_2)).$$

Démonstration. — Soit I_n un système de représentants de $\mathbf{Z}_p$ modulo p^n. Si $i \in I_n$, et si $a = 1, 2$, on note $z_{a,i}$ l'élément $\psi^n((1+T)^{-i} z_a)$ de D_a, de telle sorte que l'on ait $\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p} z_a = (1+T)^i \varphi^n(z_{a,i})$. On en déduit, en utilisant la bilinéarité de M et le fait que M commute à φ que

$$M(z_1, z_2) = \sum_{i,j \in I_n} (1+T)^{i+j} \varphi^n(M(z_{1,i}, z_{2,j}))$$

$$\mathrm{Res}_{c+p^n\mathbf{Z}_p} M(z_1, z_2) = \sum_{i,j \in I_n,\ i+j \equiv c \bmod p^n} M(\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p} z_1, \mathrm{Res}_{j+p^n\mathbf{Z}_p} z_2).$$

En revenant à la définition de m_x, on voit que $m_x(M(z_1, z_2))$ est, modulo p^n, égal à

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j \in I_n} (i+j) M(\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p} z_1, \mathrm{Res}_{j+p^n\mathbf{Z}_p} z_2) \\ &= M\Big(\sum_{i \in I_n} i \,\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p} z_1, \sum_{j \in I_n} \mathrm{Res}_{j+p^n\mathbf{Z}_p} z_2\Big) + M\Big(\sum_{i \in I_n} \mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p} z_1, \sum_{j \in I_n} j \,\mathrm{Res}_{j+p^n\mathbf{Z}_p} z_2\Big) \\ &= M(m_x(z_1), z_2) + M(z_1, m_x(z_2)). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout n, cela permet de conclure.

Remarque V.2.7. — (i) La proposition s'applique à $D_1 = D_2 = D_3 = \mathbf{A}$ et à $M(z_1 z_2) = z_1 z_2$. La proposition montre alors que m_x est une dérivation sur $\mathbf{A}$. Par ailleurs, on a $m_x((1+T)^i) = i(1+T)^i$, et donc m_x coïncide avec la dérivation $\partial = (1+T)\frac{d}{dT}$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Comme ∂ a une unique extension en une dérivation continue de $\mathbf{A}$, on a $m_x = \partial$ sur $\mathbf{A}$ tout entier.

(ii) La proposition s'applique aussi à $D_1 = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, $D_2 = D_3 = D$, où D est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et $M(\lambda, z) = \lambda z$. La proposition montre alors que m_x est une connexion sur D. Comme D est inclus dans $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{V}(D)$, et comme $m_x(a \otimes v) = m_x(a) \otimes v$, cette connexion est induite par la dérivation ∂ sur $\mathbf{A}$. C'est la connexion considérée par Fontaine [**17**, § A2, n° 2.2].

(iii) La connexion $\partial : D \to D$ a été étudiée par Tsuzuki [**25**] qui a montré qu'elle ne respecte la surconvergence que si l'inertie de $\mathscr{H}$ agit à travers un quotient fini sur $\mathbf{V}(D)$. On en déduit que les constructions de ce chapitre ne respectent pas toujours la surconvergence.

Pour conclure ce n°, établissons la formule suivante pour ∂.

Proposition V.2.8. — $\partial = \lim_{u\to 1} \frac{\sigma_u - 1}{(1+T)^{u-1}-1}$.

Démonstration. — Il suffit de vérifier l'énoncé modulo p^ℓ, pour tout ℓ, ce qui permet de supposer que D est tué par p^ℓ. Il existe alors $c \in \mathbf{N}$ tel que $T^c D^\sharp \subset D^+$.

Si $z \in D$, posons $r_{n,i}(z) = \psi^n((1+T)^{-i}z)$, si $n \in \mathbf{N}$ et $i \in \mathbf{Z}_p$ de telle sorte que $\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p} z = (1+T)^i\varphi^n(r_{n,i}(z))$. Il résulte du (iii) de la prop. II.4.2 qu'il existe $n(z) \in \mathbf{N}$ tel que $r_{n,i}(z) \in D^\sharp$, pour tout $i \in \mathbf{Z}_p^*$, si $n \geq n(z)$.

Si $a \in \mathbf{Z}_p^*$ et $n \in \mathbf{N}$, notons $\tau_{n,a}$ l'opérateur $\frac{\sigma_{1+ap^n}-1}{(1+T)^{ap^n}-1}$. On a alors

$$\tau_{n,a}(z) = \sum_{i\in \mathbf{Z}_p \bmod p^n} (1+T)^i\varphi^n\Big(\frac{(1+T)^{ai}-1}{(1+T)^a-1} r_{n,i}(z) + \frac{(1+T)^{ai}}{(1+T)^a-1}(\sigma_{1+ap^n}-1)\cdot r_{n,i}(z)\Big).$$

Il résulte du lemme III.4.3 que $(\sigma_{1+ap^n}-1)\cdot r_{n,i}(z) \in \varphi^{n-k(D^\sharp)}(T)D^\sharp$, pour tout $i \in \mathbf{Z}_p$, si $n \geq n(z)$. Par ailleurs, $\frac{T}{(1+T)^a-1}$ est une unité de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ et $\varphi^{n-k(D^\sharp)}(T)$ est divisible par T^{c+2} dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+/p^\ell$, si n est assez grand, et donc $\frac{(1+T)^{ai}}{(1+T)^a-1}(\sigma_{1+ap^n}-1)\cdot r_{n,i}(z) \in TD^+$, pour tout $i \in \mathbf{Z}_p$, si n est assez grand. Il existe donc $n'(z) \in \mathbf{N}$ tel que, si $n \geq n'(z)$, alors

$$\tau_{n,a}(z) - \sum_{i\in \mathbf{Z}_p \bmod p^n} (1+T)^i\varphi^n\Big(\frac{(1+T)^{ai}-1}{(1+T)^a-1} r_{n,i}(z)\Big) \in \varphi^n(T)D^+.$$

Maintenant, si $x \in \mathbf{Z}_p$, on peut écrire $\frac{(1+T)^{ax}-1}{(1+T)^a-1} = \sigma_a(T^{-1}((1+T)^x-1))$ sous la forme $\sum_{k=0}^c \alpha_k(x)T^k + s(x)$, où $\alpha_k : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p$ est un polynôme en x de degré $k+1$ (on a $\alpha_0(x) = x$) et $s(x) \in T^{c+1}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$. Il en résulte que, si $n \geq n'(z)$, alors

$$\tau_{n,a}(z) - \sum_{i\in \mathbf{Z}_p \bmod p^n} (1+T)^i\varphi^n\Big(\Big(\sum_{k=0}^c \alpha_k(i)T^k\Big) r_{n,i}(z)\Big) \in \varphi^n(T)D^+.$$

En utilisant la formule $\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p} z = (1+T)^i\varphi^n(r_{n,i}(z))$, on peut réécrire la grosse somme sous la forme

$$\sum_{k=0}^c \varphi^n(T)^k \sum_{i\in \mathbf{Z}_p \bmod p^n} \alpha_k(i)\,\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p} z,$$

et comme $\sum_{i\in \mathbf{Z}_p \bmod p^n} \alpha_k(i)\,\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p} z = m_{\alpha_k}(z)$ pour n assez grand (cf. démonstration de la prop. V.2.1), on en déduit que $\tau_{n,a}(z)$ a pour limite $m_{\alpha_0}(z)$ quand n tend vers $+\infty$ (uniformément pour $a \in \mathbf{Z}_p^*$), tous les autres termes tendant vers 0. On conclut en remarquant que $\alpha_0(x) = x$ et en utilisant la relation $m_x = \partial$ du (ii) de la rem. V.2.7.

Remarque V.2.9. — (i) Il est facile de montrer que ∂ est une connexion à partir de la formule de la prop. V.2.8.

(ii) On remarquera que cette formule ne fait intervenir que l'action infinitésimale de Γ, alors que la formule $\partial = m_x$ du (ii) de la rem. V.2.7 ne fait absolument pas intervenir l'action de Γ.

(iii) La formule de la prop. V.2.8 est à rapprocher de la formule $\nabla = \lim_{u\to 1} \frac{\sigma_u - 1}{u-1}$ définissant [**1**] une connexion sur un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{R}$. On remarquera que ces formules sont consistantes avec l'identité $\nabla = t\partial$ sur $\mathscr{R}$, où $t = \log(1+T) = \lim_{u\to 1} \frac{(1+T)^{u-1}-1}{u-1}$. Par contre, ∂ est invariante par torsion par un caractère, ce qui n'est pas le cas de ∇.

V.3. Dualité

Proposition V.3.1. — (i) *Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, si $\alpha \in \mathscr{C}^0(U, \mathscr{O}_L^*)$, et si $x \in \check{D} \boxtimes U$ et $y \in D \boxtimes U$, alors $\{m_\alpha(x), m_{\alpha^{-1}}(y)\}_{\mathbf{Q}_p} = \{x, y\}_{\mathbf{Q}_p}$.*

(ii) *Si $f : U \to V$ est un difféomorphisme entre deux ouverts compacts de $\mathbf{Q}_p$, et si $x \in \check{D} \boxtimes U$ et $y \in D \boxtimes U$, alors $\{f_* x, f_* y\}_{\mathbf{Q}_p} = \{x, y\}_{\mathbf{Q}_p}$.*

Démonstration. — Par définition, on a

$$m_\alpha(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n(U)} \alpha(i)\,\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(x) \quad\text{et}\quad m_{\alpha^{-1}}(y) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n(U)} \alpha(i)^{-1}\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(y).$$

Ceci permet, en utilisant le (i) de la prop. III.2.3, de montrer que

$$\begin{aligned}\{m_\alpha(x), m_{\alpha^{-1}}(y)\}_{\mathbf{Q}_p} &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n(U)} \{\alpha(i)\,\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(x), \alpha(i)^{-1}\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(y)\}_{\mathbf{Q}_p}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n(U)} \{\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(x), \mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(y)\}_{\mathbf{Q}_p},\end{aligned}$$

et le (i) de la prop. III.2.3 montre que toutes les sommes dans la dernière limite sont égales à $\{x, y\}_{\mathbf{Q}_p}$. Ceci démontre le (i).

Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$ assez grand pour que $x \in \check{D} \boxtimes U$ et $y \in D \boxtimes U$, et si z est x ou y, alors

$$f_* x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n(U)} \left(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)x\right).$$

Maintenant, $\left(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)x\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)y\right)$ appartiennent respectivement à $\check{D} \boxtimes (f(i) + f'(i)p^n\mathbf{Z}_p)$ et $D \boxtimes (f(i) + f'(i)p^n\mathbf{Z}_p)$. Or f étant un difféomorphisme, les $f(i) + f'(i)p^n\mathbf{Z}_p$, pour $i \in I_n(U)$, sont disjoints, si n est assez grand. On en déduit, en utilisant le (i) puis deux fois le (ii) de la prop. III.2.3, que $\{f_*x, f_*y\}_{\mathbf{Q}_p}$ est la limite de

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in I_n(U)} \{\left(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)x\right), \left(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)y\right)\}_{\mathbf{Q}_p}\\
&= \sum_{i\in I_n(U)} \{\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)x\right), \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)y\right)\}_{\mathbf{Q}_p}\\
&= \sum_{i\in I_n(U)} \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(x), \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(y)\}_{\mathbf{Q}_p}\\
&= \sum_{i\in I_n(U)} \{\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(x), \mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(y)\}_{\mathbf{Q}_p} = \{x,y\}_{\mathbf{Q}_p}
\end{aligned}$$

Ceci démontre le (ii) et termine la démonstration de la proposition.

V.4. Convolution multiplicative

Soient μ_1, μ_2 deux $\mathscr{O}_L$-mesures sur $\mathbf{Z}_p^*$, et soient $A_1, A_2 \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$ leurs transformées d'Amice respectives. La convolée multiplicative $\mu_1 \star \mu_2$ de μ_1 et μ_2 est la mesure sur $\mathbf{Z}_p^*$ définie par $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \phi\ \mu_1 \star \mu_2 = \int_{\mathbf{Z}_p^*\times\mathbf{Z}_p^*} \phi(xy)\,\mu_1(x)\mu_2(y)$. Sa transformée d'Amice $A_{\mu_1\star\mu_2}$ est donc

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*\times\mathbf{Z}_p^*} (1+T)^{xy}\,\mu_1(x)\mu_2(y) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i,j\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \int_{(j+p^n\mathbf{Z}_p)\times(i+p^n\mathbf{Z}_p)} (1+T)^{xy}\,\mu_1(x)\mu_2(y).$$

Maintenant, $xy = ij + i(x-j) + j(y-i) + (x-j)(y-i)$, et comme $(x-j)(y-i)$ est petit sur $(j+p^n\mathbf{Z}_p)\times(i+p^n\mathbf{Z}_p)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
A_{\mu_1\star\mu_2} &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i,j\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} (1+T)^{ij} \int_{(j+p^n\mathbf{Z}_p)\times(i+p^n\mathbf{Z}_p)} (1+T)^{i(x-j)+j(y-i)}\,\mu_1(x)\mu_2(y)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i,j\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} (1+T)^{ij}\sigma_i((1+T)^{-j}\mathrm{Res}_{j+p^n\mathbf{Z}_p}A_1)\sigma_j((1+T)^{-i}\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}A_2)
\end{aligned}$$

et comme $(1+T)^{-k}\mathrm{Res}_{k+p^n\mathbf{Z}_p}A_\ell = \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}((1+T)^{-k}A_\ell) = \varphi^n\psi^n((1+T)^{-k}A_\ell)$, si $\ell = 1,2$ et $k\in\mathbf{Z}_p^*$, on obtient, en utilisant la commutation de φ^n et Γ,

$$A_{\mu_1\star\mu_2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i,j\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} (1+T)^{ij}\varphi^n\big(\big(\sigma_i\cdot\psi^n((1+T)^{-j}A_1)\big)\,\big(\sigma_j\cdot\psi^n((1+T)^{-i}A_2)\big)\big).$$

Cette dernière formule suggère le résultat suivant.

Proposition V.4.1. — *Soient D_1, D_2, D_3 des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et soit $M : D_1\times D_2 \to D_3$ une application $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-bilinéaire commutant*[22] *à l'action de φ et Γ.*

---

[22] I.e. $\varphi(M(z_1,z_2)) = M(\varphi(z_1),\varphi(z_2))$ et $\sigma_a(M(z_1,z_2)) = M(\sigma_a(z_1),\sigma_a(z_2))$, pour tous $z_1\in D_1$, $z_2\in D_2$ et $a\in\mathbf{Z}_p^*$.

(i) *Si* $z_1 \in D_1 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ *et* $z_2 \in D_2 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, *la suite de terme général*

$$u_n = \sum_{i,j\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} (1+T)^{ij}\varphi^n\big(M\big(\sigma_i\cdot\psi^n((1+T)^{-j}z_1),\ \sigma_j\cdot\psi^n((1+T)^{-i}z_2)\big)\big)$$

converge dans D_3 *vers un élément* $M_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1,z_2)\in D_3\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ *qui ne dépend pas du choix des systèmes de représentants de* $\mathbf{Z}_p^*$ *modulo* p^n.

(ii) *L'application* $M_{\mathbf{Z}_p^*} : (D_1\boxtimes\mathbf{Z}_p^*)\times(D_2\boxtimes\mathbf{Z}_p^*) \to D_3\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ *ainsi définie est* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$*-bilinéaire.*

(iii) *Si* $D_1 = D_2$, *et si* M *est symétrique ou antisymétrique, il en est de même de* $M_{\mathbf{Z}_p^*}$.

Démonstration. — Il suffit de montrer le résultat modulo p^ℓ pour tout ℓ, ce qui permet de supposer que D_1, D_2 et D_3 sont tués par p^ℓ. Pour démontrer la convergence de la suite u_n, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme V.4.2. — *Il existe* $n_0\in\mathbf{N}$ *et* $a:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, *tendant vers* $+\infty$ *en* $+\infty$, *tels que :*

- *Si* $n\geq n_0$, *alors* $\psi^n((1+T)^{-j}z_1)\in D_1^\sharp$ *et* $\psi^n((1+T)^{-i}z_2)\in D_2^\sharp$, *pour tous* $i,j\in\mathbf{Z}_p^*$;
- *Si* $b-b'\in p^n\mathbf{Z}_p$, *alors* $(\sigma_b-\sigma_{b'})D_i^\sharp\subset\varphi^{a(n)}(T)D_i^\sharp$, *pour* $i=1,2$.

Démonstration. — L'existence d'un n_0 vérifiant le premier point suit de la définition de $D^\sharp$ ((i) de la prop. II.4.2), et de ce que les $(1+T)^{-j}z_1$ et $(1+T)^{-i}z_2$ varient dans des treillis de D_1 et D_2 respectivement, quand i et j parcourent $\mathbf{Z}_p^*$.

Le second point résulte de la continuité de l'action de Γ et de ce que les $\varphi^m(T)D_i^\sharp$ forment une base de voisinages de 0 dans D_i (car D_i est de torsion).

Revenons à la démonstration de la prop. V.4.1, et posons

$$x_j^{(n)} = \psi^n((1+T)^{-j}z_1) \quad\text{et}\quad y_i^{(n)} = \psi^n((1+T)^{-i}z_2).$$

En utilisant les identités

$$x_j^{(n)} = \sum_{a\in\mathbf{Z}_p \bmod p}(1+T)^a\varphi(x_{j+ap^n}^{(n+1)}) \quad\text{et}\quad y_i^{(n)} = \sum_{b\in\mathbf{Z}_p \bmod p}(1+T)^b\varphi(y_{i+bp^n}^{(n+1)}),$$

on peut écrire $(1+T)^{ij}\varphi^n\big(M\big(\sigma_i\cdot\psi^n((1+T)^{-j}z_1),\ \sigma_j\cdot\psi^n((1+T)^{-i}z_2)\big)\big)$ sous la forme

$$\sum_{a,b\in\mathbf{Z}_p \bmod p}(1+T)^{(i+p^nb)(j+p^na)-p^{2n}ab}\varphi^{n+1}\big(M\big(\sigma_i\cdot x_{j+ap^n}^{(n+1)},\ \sigma_j\cdot y_{i+bp^n}^{(n+1)}\big)\big).$$

On en déduit que

$$u_{n+1}-u_n = \sum_{i,j\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n}\ \sum_{a,b\in\mathbf{Z}_p \bmod p}(1+T)^{(i+p^nb)(j+p^na)}\varphi^{n+1}(v_{i,j,a,b}^{(n)}),$$

où $v_{i,j,a,b}^{(n)}$ est égal à

$$\begin{aligned}
& M\big(\sigma_{i+p^n b}\cdot x_{j+ap^n}^{(n+1)},\sigma_{j+p^n a}\cdot y_{i+bp^n}^{(n+1)}\big)-(1+T)^{-p^{n-1}ab}M\big(\sigma_i\cdot x_{j+ap^n}^{(n+1)},\sigma_j\cdot y_{i+bp^n}^{(n+1)}\big)\\
&= M\big((\sigma_{i+p^n b}-\sigma_i)\cdot x_{j+ap^n}^{(n+1)},\sigma_{j+p^n a}\cdot y_{i+bp^n}^{(n+1)}\big)+M\big(\sigma_i\cdot x_{j+ap^n}^{(n+1)},(\sigma_{j+p^n a}-\sigma_j)\cdot y_{i+bp^n}^{(n+1)}\big)\\
&\qquad +\big(1-(1+T)^{-p^{n-1}ab}\big)M\big(\sigma_i\cdot x_{j+ap^n}^{(n+1)},\sigma_j\cdot y_{i+bp^n}^{(n+1)}\big)
\end{aligned}$$

On déduit donc du lemme V.4.2 que

$$v_{i,j,a,b}^{(n)}\in\varphi^{a'(n)}(T)M(D_1^\sharp,D_2^\sharp),\quad \text{avec } a'(n)=\inf(a(n),n-1).$$

Maintenant, $M(D_1^\sharp,D_2^\sharp)$ est contenu dans un treillis de D_3 puisque $D_1^\sharp$ et $D_2^\sharp$ sont compacts et M continue, et comme $\varphi^{a'(n)}(T)\to 0$ dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, cela permet de montrer que $v_{i,j,a,b}^{(n)}$ tend vers 0 quand $n\to+\infty$, uniformément pour $i,j,a,b\in\mathbf{Z}_p^*$. On en déduit la convergence de la suite u_n ; comme d'habitude, cette convergence implique que la limite est indépendante des choix effectués.

Le (iii) est alors évident. Par ailleurs, si $a\in\mathbf{Z}_p^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sigma_a\cdot u_n &= \sum_{i,j\in\mathbf{Z}_p^*\bmod p^n}(1+T)^{aij}\varphi^n\big(M\big(\sigma_{ai}\cdot\psi^n((1+T)^{-j}z_1),\,\sigma_{aj}\cdot\psi^n((1+T)^{-i}\cdot z_2)\big)\big)\\
&= \sum_{i,j\in\mathbf{Z}_p^*\bmod p^n}(1+T)^{aij}\varphi^n\big(M\big(\sigma_{ai}\cdot\psi^n((1+T)^{-j}z_1),\,\sigma_{j}\cdot\psi^n((1+T)^{-ai}\sigma_a\cdot z_2)\big)\big).
\end{aligned}$$

On en déduit, par passage à la limite, via le changement $(i,j)\mapsto(ai,j)$ de système de représentants, que $\sigma_a\cdot M_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1,z_2)=M_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1,\sigma_a\cdot z_2)$. Le même argument fournit l'identité $\sigma_a\cdot M_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1,z_2)=M_{\mathbf{Z}_p^*}(\sigma_a\cdot z_1,z_2)$, ce qui démontre le (ii), et permet de conclure.

Remarque V.4.3. — Il résulte de la convergence uniforme vers 0 des $v_{i,j,a,b}^{(n)}$ que

$$\psi^n((1+T)^{-c}M_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1,z_2))-\sum_{\substack{i,j\in\mathbf{Z}_p^*\bmod p^n\\ ij=c\bmod p^n}}M\big(\sigma_i\cdot\psi^n((1+T)^{-j}z_1),\sigma_j\cdot\psi^n((1+T)^{-i}z_2)\big)$$

tend vers 0 quand $n\to+\infty$, uniformément pour $c\in\mathbf{Z}_p^*$. Ceci nous sera utile pour la démonstration de la loi de réciprocité explicite (en particulier pour celle du lemme VI.2.5).

V.5. Torsion par un caractère. — Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et si $\delta:\mathbf{Q}_p^*\to\mathscr{O}_L^*$ est un caractère continu, on définit un (φ,Γ)-module $D\otimes\delta$, isomorphe à D en tant que $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module (on note $x\mapsto x\otimes\delta$ l'isomorphisme de D sur $D\otimes\delta$), en tordant les actions de φ et Γ par δ, c'est-à-dire en posant :

$$\sigma_a(x\otimes\delta)=(\delta(a)\,\sigma_a(x))\otimes\delta\quad\text{et}\quad\varphi(x\otimes\delta)=(\delta(p)\,\varphi(x))\otimes\delta.$$

Lemme V.5.1. — (i) *Si* $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in P(\mathbf{Q}_p)$*, alors* $g\cdot(z\otimes\delta) = (\delta(a)g\cdot z)\otimes\delta$*, pour tout* $z \in D \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

(ii) *Si* U *est un ouvert compact de* $\mathbf{Q}_p$*, alors* $\mathrm{Res}_U(z\otimes\delta) = (\mathrm{Res}_U z)\otimes\delta$*, pour tout* $z\in D\boxtimes\mathbf{Q}_p$.

(iii) *Si* $z \in D\boxtimes U$ *et si* $\alpha \in \mathscr{C}^0(U, \mathscr{O}_L)$*, alors* $m_\alpha(z\otimes\delta) = m_\alpha(z)\otimes\delta$.

(iv) *Si* U *est un ouvert compact de* $\mathbf{Q}_p$*, si* $f : U \to \mathbf{Q}_p$ *est un difféomorphisme local, et si* $z \in D\boxtimes U$*, alors* $f_*(z\otimes\delta) = \big(f_*\circ m_{\delta\circ f'}(z)\big)\otimes\delta$.

Démonstration. — Le (i) est immédiat. Compte-tenu du (i) et de l'additivité de Res_U, il suffit de vérifier le (ii) pour $U = a + p^n\mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Z}_p$, auquel cas le résultat suit de la formule $\mathrm{Res}_{a+p^n\mathbf{Z}_p} = (1+T)^a\circ\varphi^n\circ\psi^n\circ(1+T)^{-a}$, et du fait que $z\mapsto z\otimes\delta$ commute aux multiplications par $(1+T)^a$ et $(1+T)^{-a}$, et commute à φ^n et ψ^n à multiplication près par des facteurs $\delta(p)^n$ et $\delta(p)^{-n}$ qui ont le bon goût de se compenser.

Le (iii) et le (iv) se démontrent par le même genre de techniques ; nous ne traiterons que le (iv) qui est le plus délicat. En revenant à la définition, et en utilisant les (i) et (ii), on obtient :

$$\begin{aligned} f_*(z\otimes\delta) &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i\in I_n(U)} \left(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\Big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot(z\otimes\delta)\Big) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{i\in I_n(U)} \delta(f'(i))\left(\begin{smallmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\Big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot z\Big)\Big)\otimes\delta \\ &= \big(f_*\circ m_{\delta\circ f'}(z)\big)\otimes\delta. \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure.

Corollaire V.5.2. — *Si* $w : \mathbf{Z}_p^* \to \mathbf{Z}_p^*$ *est le difféomorphisme* $x\mapsto x^{-1}$*, alors*

$$w_*(z\otimes\delta) = (\delta(-1)\ m_{\delta^2}\circ w_*(z))\otimes\delta.$$

Démonstration. — Cela suit du (iv) du lemme V.5.1 et de la prop. V.2.4.

Si $M : D_1\times D_2 \to D_3$ est une application $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-bilinéaire, commutant aux actions de φ et Γ comme dans la prop. V.4.1, alors M induit une application bilinéaire

$$M : (D_1\otimes\delta_1)\times(D_2\otimes\delta_2)\to D_3\otimes\delta_1\delta_2,\quad \text{avec } M(x\otimes\delta_1, y\otimes\delta_2) = M(x,y)\otimes\delta_1\delta_2,$$

qui commute aussi aux actions de φ et Γ.

Lemme V.5.3. — *Si* $x \in D_1\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ *et si* $y\in D_2\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$*, alors*

$$M_{\mathbf{Z}_p^*}\big(m_{\delta_1}(x)\otimes\delta_1, m_{\delta_2}(y)\otimes\delta_2\big) = m_{\delta_1\delta_2}\big(M_{\mathbf{Z}_p^*}(x,y)\big)\otimes\delta_1\delta_2.$$

Démonstration. — On peut, comme d'habitude, supposer que D_1, D_2 et D_3 sont tués par p^ℓ. Choisissons n assez grand pour que δ_1 et δ_2 soient constants modulo p^ℓ sur $i + p^n\mathbf{Z}_p$, pour tout $i \in \mathbf{Z}_p^*$. On a alors, si $k = 1, 2$, si $z \in D_k$, et si $a, b \in \mathbf{Z}_p^*$,

$$\begin{aligned}\psi^n\big((1+T)^{-b}m_{\delta_k}(z)\big) &= \varphi^{-n}\big(\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}(1+T)^{-b}m_{\delta_k}(z)\big)\\ &= \varphi^{-n}\big(\mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}\delta_k(b)(1+T)^{-b}z\big) = \delta_k(b)\psi^n\big((1+T)^{-b}z\big).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sigma_a\cdot\psi^n\big((1+T)^{-b}m_{\delta_k}(z)\otimes\delta_k\big) &= \delta_k(a)\big(\sigma_a\cdot\psi^n\big((1+T)^{-b}m_{\delta_k}(z)\big)\big)\otimes\delta_k\\ &=\delta_k(a)\big(\sigma_a\big(\delta_k(b)\psi^n\big((1+T)^{-b}z\big)\big)\big)\otimes\delta_k = \delta_k(ab)\big(\sigma_a\cdot\psi^n\big((1+T)^{-b}z\big)\big)\otimes\delta_k\end{aligned}$$

En injectant cette formule pour évaluer

$$\sigma_i\cdot\psi^n\big((1+T)^{-j}m_{\delta_1}(x)\otimes\delta_1\big) \quad \text{et} \quad \sigma_j\cdot\psi^n\big((1+T)^{-i}m_{\delta_2}(y)\otimes\delta_2\big)$$

dans l'expression définissant $M_{\mathbf{Z}_p^*}\big(m_{\delta_1}(x)\otimes\delta_1, m_{\delta_2}(y)\otimes\delta_2\big)$, on voit sortir un terme $\delta_1\delta_2(ij)$ qui permet de conclure.

VI. (φ,Γ)-modules et lois de réciprocité

Dans ce chapitre, on définit, purement en termes de (φ,Γ)-modules, un accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}}$. Cet accouplement est obtenu en traduisant, en termes de (φ,Γ)-modules, un accouplement classique en théorie d'Iwasawa. On prouve ensuite, pour cet accouplement, une loi de réciprocité explicite qui généralise la loi de réciprocité explicite de Perrin-Riou [**22**] telle qu'elle est énoncée dans [**8**].

VI.1. L'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}}$. — Soit D un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ ou bien de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$, et soient $\mathscr{C} = (1-\varphi)D^{\psi=1}$ et $\check{\mathscr{C}} = (1-\varphi)\check{D}^{\psi=1}$.

Lemme VI.1.1. — *$\check{\mathscr{C}} \subset \check{D}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ et $\mathscr{C} \subset D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ sont les orthogonaux l'un de l'autre pour $\{\ ,\ \}$.*

Démonstration. — Plus généralement, soient $\alpha, \beta \in \mathscr{O}_L^*$, et soient

$$\check{\mathscr{C}}^\alpha = (1-\alpha\varphi)\check{D}^{\psi=\alpha} \quad \text{et} \quad \mathscr{C}^\beta = (1-\beta\varphi)D^{\psi=\beta}.$$

Si $x \in \check{D}^{\psi=\alpha}$, alors $\psi((1-\alpha\varphi)x) = \psi(x) - \alpha x = 0$, et donc $\check{\mathscr{C}}^\alpha \subset \check{D}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$. Pour la même raison, $\mathscr{C}^\beta \subset D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$.

Par ailleurs, si $x \in \check{D}^{\psi=\alpha}$ et si $y \in D^{\psi=\beta}$, alors

$$\begin{aligned}\{(1-\alpha\varphi)x, (1-\beta\varphi)y\} &= \{x,y\} - \beta\{x,\varphi(y)\} - \alpha\{\varphi(x),y\} + \alpha\beta\{\varphi(x),\varphi(y)\}\\ &=\{x,y\} - \beta\{\psi(x),y\} - \alpha\{x,\psi(y)\} + \alpha\beta\{x,y\} = (1-\alpha\beta)\{x,y\}\end{aligned}$$

On en déduit que si $\alpha\beta = 1$, alors $\mathscr{C}^\beta$ est inclus dans l'orthogonal de $\check{\mathscr{C}}^\alpha$.

Réciproquement, si $y \in D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est orthogonal à $\check{\mathscr{C}}^\alpha$, et si $\alpha\beta = 1$, alors $\{x, y\} = 0$ pour tout $x \in \check{D}^{\psi=\alpha}$ (en effet, $x = \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} x + \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} x$, et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} x \in \check{\mathscr{C}}^\alpha$ tandis que $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} x \in \check{D} \boxtimes p\mathbf{Z}_p$ est orthogonal à $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$).

– Si D est de torsion, l'orthogonal de $\check{D}^{\psi=\alpha}$ est l'adhérence de $(1-\beta\varphi)D$. Or $(1-\beta\varphi)D$ est ouvert car il contient D^{++} étant donné que $1 + \beta\varphi + \beta^2\varphi^2 + \cdots$ est un inverse de $1 - \beta\varphi$ sur D^{++} ; il est donc aussi fermé puisque c'est un sous-groupe. Il existe donc $\tilde{y} \in D$ tel que $y = (1-\beta\varphi)\tilde{y}$, et comme $\psi(y) = 0$, on a $\psi(\tilde{y}) = \beta\tilde{y}$, et donc $y \in \mathscr{C}^\beta$.

– Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $y_k \in (D/p^k D)^{\psi=\beta}$ tel que $y = (1-\beta\varphi)y_k$ modulo p^k. Choisissons un relèvement $\tilde{y}_k$ de y_k dans D. Comme la limite projective des $(D/p^k D)^{\psi=\beta}$ est compacte, on peut extraire de $(\tilde{y}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une sous-suite convergente et la limite $\tilde{y}$ de cette suite vérifie $\psi(\tilde{y}) = \beta\tilde{y}$ et $y = (1-\beta\varphi)\tilde{y}$; on a donc $y \in \mathscr{C}^\beta$.

Ceci permet de conclure.

On rappelle que l'on note Λ l'algèbre de groupe complétée $\mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ de Γ. On note γ_n un générateur de Γ_n, et on définit un caractère additif $\tau_n : \Gamma_n \to \mathbf{Z}_p$ par $\tau_n(\sigma_a) = p^{-n} \log a$.

Proposition VI.1.2. — (i) *Si $x \in \check{\mathscr{C}}$ si $y \in \mathscr{C}$, et si $n \in \mathbf{N}$, alors, modulo $(\gamma_n - 1)\Lambda$,*

$$v_n = \sum_{i \in \mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \Big\{ \frac{\tau_n(\gamma_n)\,\sigma_i}{\gamma_n - 1} \cdot x, y \Big\}\, \sigma_i$$

ne dépend ni du choix de γ_n ni de celui du système de représentants de $\mathbf{Z}_p^*$ modulo p^n.

(ii) *On a $v_{n+1} = v_n \bmod \gamma_n - 1$, et donc $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définit un élément $\langle x, y\rangle_{\mathrm{Iw}}$ de Λ (resp. $(L/\mathscr{O}_L) \otimes \Lambda$, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$).*

(iii) *Si $\sigma \in \Gamma$, alors $\langle \sigma \cdot x, y\rangle_{\mathrm{Iw}} = \sigma^{-1} \cdot \langle x, y\rangle_{\mathrm{Iw}}$ et $\langle x, \sigma \cdot y\rangle_{\mathrm{Iw}} = \sigma \cdot \langle x, y\rangle_{\mathrm{Iw}}$, pour tous $x \in \check{\mathscr{C}}$ et $y \in \mathscr{C}$.*

(iv) *L'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}}$ identifie $\check{\mathscr{C}}$ à $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathscr{C}, \Lambda)$ (à $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathscr{C}, (L/\mathscr{O}_L) \otimes \Lambda)$, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$).*

Démonstration. — Si $i \equiv j \bmod p^n$, alors $\frac{\sigma_i - \sigma_j}{\gamma_n - 1} \in \Lambda$, et donc $\frac{\sigma_i \cdot x}{\gamma_n - 1} - \frac{\sigma_j \cdot x}{\gamma_n - 1} \in \check{\mathscr{C}}$. Comme $\check{\mathscr{C}}$ est orthogonal à $\mathscr{C}$, cela implique que $\big\{\frac{\tau_n(\gamma_n)\,\sigma_i}{\gamma_n - 1} \cdot x, y\big\} = \big\{\frac{\tau_n(\gamma_n)\,\sigma_j}{\gamma_n - 1} \cdot x, y\big\}$, et donc que v_n ne dépend pas du choix du système de représentants de $\mathbf{Z}_p^*$ modulo p^n. Il ne dépend pas non plus du choix de γ_n car $\frac{\tau_n(\gamma)}{\gamma - 1} - \frac{\tau_n(\gamma')}{\gamma' - 1} \in \mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ si γ et γ' sont des générateurs de Γ_n (il existe $a \in \mathbf{Z}_p^*$ tel que $\gamma' = \gamma^a$, et on a $\tau_n(\gamma') = a\tau_n(\gamma)$; on est donc ramené à vérifier que $\frac{1}{T} - \frac{a}{(1+T)^a - 1} \in \mathscr{O}_L[[T]]$, ce qui ne pose pas de problème). Ceci démontre le (i).

Pour démontrer le (ii), on peut choisir $\gamma_{n+1} = \gamma_n^p$, de manière à assurer l'égalité $\tau_{n+1}(\gamma_{n+1}) = \tau_n(\gamma_n)$. Alors, modulo $\gamma_n - 1$, on a

$$v_{n+1} - v_n = \tau_n(\gamma_n) \sum_{i \in \mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \Big(\big(\sum_{j=0}^{p-1} \{ \frac{\gamma_n^j \sigma_i}{\gamma_n^p - 1} \cdot x, y\}\big) - \{ \frac{\sigma_i}{\gamma_n - 1} \cdot x, y\} \Big) \sigma_i = 0,$$

car $\sum_{j=0}^{p-1} \frac{\gamma_n^j}{\gamma_n^p - 1} = \frac{1}{\gamma_n - 1}$.

(iii) Si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, l'identité $\langle \sigma_a \cdot x, y\rangle_{\mathrm{Iw}} = \sigma_a^{-1} \cdot \langle x, y\rangle_{\mathrm{Iw}}$, qui est équivalente à l'identité $\sigma_a \cdot \langle \sigma_a \cdot x, y\rangle_{\mathrm{Iw}} = \langle x, y\rangle_{\mathrm{Iw}}$, se démontre en faisant le changement de variable $i \mapsto ai$. La seconde formule s'en déduit en utilisant la relation $\{x, \sigma \cdot y\} = \{\sigma^{-1} \cdot x, y\}$.

(iv) La démonstration est la même dans les cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ et $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$; nous ne traiterons donc que le cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$. Si $x \in \check{\mathscr{C}}$, notons $\mu_x \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathscr{C}, \Lambda)$, l'élément défini par $\mu_x(y) = \langle x, y\rangle_{\mathrm{Iw}}$. L'application $x \mapsto \mu_x$ est injective car un élément du noyau est tel que $\{\frac{1}{\gamma_n - 1} \cdot x, y\} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $y \in \mathscr{C}$. D'après le lemme VI.1.1, on peut donc écrire x sous la forme $x = (\gamma_n - 1) \cdot x_n$, avec $x_n \in \check{\mathscr{C}}$, pour tout n. Or $\check{\mathscr{C}}$ étant compact, la suite des x_n admet une valeur d'adhérence y, et x est valeur d'adhérence de la suite des $(\gamma_n - 1) \cdot y$, et donc est nul.

Le problème est donc de prouver la surjectivité de $x \mapsto \mu_x$. Soit donc $\mu \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathscr{C}, \Lambda)$, et, si $n \in \mathbf{N}$, soit $\mu_n \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathscr{C}, \Lambda/(\gamma_n - 1))$, l'image de μ. On peut écrire $\mu_n(y)$ sous la forme $\sum_{i \in \mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \mu_{n,i}(y)\, \sigma_i$, et comme $\mu_n(\sigma_a \cdot y) = \sigma_a \cdot \mu_n(y)$, on en déduit que $\mu_{n,i}(y) = \mu_{n,1}(\sigma_i^{-1} y)$ pour tout $i \in \mathbf{Z}_p^*$. En particulier, on a $\mu_{n,1}(\gamma_n \cdot y) = \mu_{n,1}(y)$, pour tout $y \in \mathscr{C}$. Maintenant, comme $\check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est le dual de $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, qui contient $\mathscr{C}$, il existe $x_n \in \check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ (bien déterminé, d'après le lemme VI.1.1, à addition près d'un élément de $\check{\mathscr{C}}$), tel que $\mu_{n,1}(y) = \{x_n, y\}$, pour tout $y \in \mathscr{C}$. De plus, comme $\mu_{n,1}((\gamma_n - 1) \cdot y) = 0$, pour tout y, on a $(\gamma_n^{-1} - 1)x_n \in \check{\mathscr{C}}$ (et donc $(\gamma_n - 1)x_n \in \check{\mathscr{C}}$), d'après le lemme VI.1.1. Par ailleurs, il résulte du (ii) que $\sum_{a=0}^{p-1}\{\gamma_n^a \cdot x_{n+1}, y\} = \{x_n, y\}$, pour tout $y \in \mathscr{C}$. On en déduit que, si $\gamma_{n+1} = \gamma_n^p$, alors $(\gamma_{n+1} - 1) \cdot x_{n+1}$ a même image que $(\gamma_n - 1) \cdot x_n$ dans $\check{\mathscr{C}}/(\gamma_n - 1)$. La suite $\tau_n(\gamma_n)^{-1}(\gamma_n - 1) \cdot x_n$ tend donc vers une limite $x \in \check{\mathscr{C}}$, et on a $\mu = \mu_x$. Ceci permet de conclure.

Corollaire VI.1.3. — (i) *Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ est de rang d, alors $\mathscr{C}$ et $\check{\mathscr{C}}$ sont des Λ-modules libres de rang d.*

(ii) $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma) \otimes_\Lambda \mathscr{C}$ *et* $\check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p^* = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma) \otimes_\Lambda \check{\mathscr{C}}$.

Démonstration. — D'après [**24**, lemme 6], le Λ-module $\mathscr{C}$ est libre puisqu'il s'identifie à $\mathrm{Hom}_\Lambda(\check{\mathscr{C}}, \Lambda)$. Par ailleurs, si $\overline{D} = D/\mathfrak{m}_L D$, on a une suite exacte $0 \to D^{\psi=1}/\mathfrak{m}_L D^{\psi=1} \to \overline{D}^{\psi=1} \to D/(\psi - 1)D$. De plus, $\mathscr{C}(\overline{D})$ contient l'ouvert $\oplus_{i=1}^{p-1}(1+T)^i\varphi(D^{++})$ de $\overline{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ (en effet, si $z \in \oplus_{i=1}^{p-1}(1+T)^i\varphi(D^{++})$, alors $z + \varphi(z) + \varphi^2(z) + \cdots$ est un élément de $\overline{D}^{\psi=1}$ dont l'image par $1 - \varphi$ est z). Comme

$D/(\psi-1)D$ est de dimension $\leq\ d$ sur $\mathscr{O}_L$ puisque c'est le dual de $((\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)\otimes\check{D}^{\rm nr})^{\varphi=1}$ (rem. II.5.10 et prop. II.2.2), on en déduit que l'image de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}(\overline{D})$ est ouverte et donc que $\mathscr{C}$ est un Λ-treillis de $D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$. Or $D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$-module libre de rang d d'après le (ii) du th. III.4.6, et donc $\mathscr{C}$ est de rang d. Le cas de $\check{\mathscr{C}}$ s'en déduit en échangeant les rôles de D et $\check{D}$.

Si $\eta:\Gamma\to\mathscr{O}_L^*$ est un caractère continu, on peut considérer le (φ,Γ)-module $D\otimes\eta$ dont le dual de Tate est $\check{D}\otimes\eta^{-1}$. Comme l'action de φ ne change pas par torsion par η, l'application $x\mapsto x\otimes\eta$ induit un isomorphisme de $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}(D\otimes\eta)$ et l'application $x\mapsto x\otimes\eta^{-1}$ induit un isomorphisme de $\check{\mathscr{C}}$ sur $\mathscr{C}(\check{D}\otimes\eta^{-1})$. On peut donc, si $x\in\check{\mathscr{C}}$ et $y\in\mathscr{C}$, considérer $\langle x\otimes\eta^{-1},y\otimes\eta\rangle_{\rm Iw}\in\Lambda$.

Proposition VI.1.4. — *On a* $\langle x\otimes\eta^{-1},y\otimes\eta\rangle_{\rm Iw}=\eta^{-1}\langle x,y\rangle_{\rm Iw}$.

Démonstration. — Par définition, $\frac{\sigma}{\gamma_n-1}(x\otimes\eta^{-1})=\big(\frac{\eta^{-1}(\sigma)\sigma}{\eta^{-1}(\gamma_n)\gamma_n-1}x\big)\otimes\eta^{-1}$. Modulo p^k, on a $\eta^{-1}(\gamma_n)=1$, si n est assez grand, et comme $\{u\otimes\eta^{-1},v\otimes\eta\}=\{u,v\}$, on voit que $\langle x\otimes\eta^{-1},y\otimes\eta\rangle_{\rm Iw}$ est, modulo p^k, la limite de $\sum_{i\in\mathbf{Z}_p^*\bmod p^n}\eta^{-1}(\sigma_i)\big\{\frac{\tau_n(\gamma_n)\,\sigma_i}{\gamma_n-1}x,y\big\}\sigma_i$ qui est égal à $\eta^{-1}v_n$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit la relation voulue modulo p^k, et comme ceci est vrai pour tout k, cela permet de conclure.

On peut considérer Λ comme les mesures sur Γ à valeurs dans $\mathscr{O}_L$. Si $\lambda\in\Lambda$, l'image de λ dans $\Lambda/(\gamma_n-1)\Lambda=\mathscr{O}_L[\Gamma/\Gamma_n]$ est alors $\sum_{i\in\mathbf{Z}_p^*\bmod p^n}\big(\int_{\sigma_i\Gamma_n}\lambda\big)\sigma_i$.

Corollaire VI.1.5. — *Si* $n\in\mathbf{N}$, *alors*

$$\int_{\Gamma_n}\eta^{-1}\langle x,y\rangle_{\rm Iw}=\big\{x,\frac{-\tau_n(\gamma_n)}{\eta(\gamma_n)\gamma_n-1}\cdot y\big\}.$$

Démonstration. — D'après la prop. VI.1.4, on a

$$\int_{\Gamma_n}\eta^{-1}\langle x,y\rangle_{\rm Iw}=\big\{\frac{\tau_n(\gamma_n)}{\gamma_n-1}\cdot(x\otimes\eta^{-1}),y\otimes\eta\big\}=\big\{\frac{\tau_n(\gamma_n)}{\eta^{-1}(\gamma_n)\gamma_n-1}\cdot x,y\big\}.$$

On en déduit le résultat en changeant γ_n en γ_n^{-1}, et en faisant passer $\frac{\tau_n(\gamma_n)}{\eta(\gamma_n)\gamma_n^{-1}-1}$ de l'autre côté.

VI.2. Une loi de réciprocité générale. — On note

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{Z}_p^*}:(\check{D}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*)\times(D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*)\to\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$$

l'accouplement $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$-bilinéaire obtenu par convolution multiplicative (prop. V.4.1) à partir de l'accouplement tautologique $\langle\ ,\ \rangle:\check{D}\times D\to\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}$.

L'application $\mu\mapsto\int_\Gamma(1+T)^{\chi(\gamma)}\,\mu$ induit un isomorphisme de $\mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\natural}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$, et donc permet de voir $\langle x,y\rangle_{\rm Iw}$ comme un élément de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$, si $x\in\check{\mathscr{C}}$ et si $y\in\mathscr{C}$.

On a alors
$$\langle x,y\rangle_{\mathrm{Iw}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in\mathbf{Z}_p^*\bmod p^n} \big\{\frac{\tau_n(\gamma_n)\,\sigma_i}{\gamma_n-1}\cdot x,y\big\}\,(1+T)^i.$$
Par ailleurs, si $\partial=(1+T)\frac{d}{dT}$ est l'opérateur différentiel habituel, $f\mapsto df=\partial f\,\frac{dT}{1+T}$ induit un isomorphisme Γ-équivariant de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\frac{dT}{1+T}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$. On a alors le résultat suivant.

Théorème VI.2.1. — *Si $x\in\check{\mathscr{C}}$, si $y\in\mathscr{C}$, et si $w:\mathbf{Z}_p^*\to\mathbf{Z}_p^*$ est l'application $x\mapsto x^{-1}$, alors*
$$d(\langle x,y\rangle_{\mathrm{Iw}}) = -\langle w_*x,y\rangle_{\mathbf{Z}_p^*}.$$

Remarque VI.2.2. — Comme $D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*=\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)\otimes_\Lambda\mathscr{C}$ et $\check{D}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*=\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)\otimes_\Lambda\check{\mathscr{C}}$, le (iii) de la prop. VI.1.2 permet d'étendre $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}}$, par « bilinéarité », en un accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}}:(\check{D}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*)\times(D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*)\to\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$, antilinéaire en la première variable et linéaire en la seconde. De même, $\mu\mapsto\int_\Gamma(1+T)^{\chi(\gamma)}\mu$ est Λ-linéaire et s'étend en un isomorphisme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$-linéaire de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\Gamma)$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$. On peut donc étendre le th. VI.2.1 sous la forme :
$$\text{Si } x\in\check{D}\boxtimes\mathbf{Z}_p^* \text{ et si } y\in D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*, \text{ alors } d(\langle x,y\rangle_{\mathrm{Iw}})=-\langle w_*x,y\rangle_{\mathbf{Z}_p^*}.$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier le résultat modulo p^ℓ pour tout ℓ, ce qui permet de supposer que D et $\check{D}$ sont tués par p^ℓ. Par ailleurs, les deux membres vérifiant les mêmes conditions de linéarité et antilinéarité par rapport à Λ, on peut se contenter de vérifier la formule pour x et y dans des treillis suffisamment petits, et on peut supposer que :
- $x\in\check{D}^\natural$ et $y\in D^\natural$,
- $\langle x,y\rangle_{\mathbf{Z}_p^*}\in\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+/p^\ell$.

Nous aurons besoin d'un certain nombre de résultats préliminaires.

Lemme VI.2.3. — *Si $x\in\check{\mathscr{C}}$ et $y\in\mathscr{C}$, on a*
$$\partial\cdot\langle x,y\rangle_{\mathrm{Iw}} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{j\in\mathbf{Z}_p^*\bmod p^n}\mathrm{rés}_0\Big(\frac{j}{(1+T)^{-j}-1}\sum_{i\in\mathbf{Z}_p^*\bmod p^n}u_{n,j,i}(x,y)\,\frac{dT}{1+T}\Big)(1+T)^j,$$
où $u_{n,j,i}(x,y)\,\frac{dT}{1+T}=\langle\sigma_{-i^{-1}j}\cdot\psi^n((1+T)^{-i}x),\sigma_{i^{-1}}\cdot\psi^n((1+T)^{-ij}y)\rangle$.

Démonstration. — Notons α_n l'opérateur $\tau_n(1+p^n)^{-1}(\sigma_{1+p^n}-1)$. Comme $\tau_n(1+p^n)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ (il est égal à $\frac{\log(1+p^n)}{p^n}$), on a $\alpha_n=\sigma_{1+p^n}-1$ si n est assez grand, puisque D est tué par p^ℓ. En revenant à la définition de $\langle x,y\rangle_{\mathrm{Iw}}$, on obtient la formule suivante :
$$\partial\cdot\langle x,y\rangle_{\mathrm{Iw}} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i\in\mathbf{Z}_p^*\bmod p^n}\big\{\alpha_n^{-1}\cdot(\sigma_i\cdot x),y\big\}\,i(1+T)^i$$

Or, en utilisant la formule $\{z,z'\} = \sum_{j\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \{\mathrm{Res}_{j+p^n\mathbf{Z}_p} z, \mathrm{Res}_{j+p^n\mathbf{Z}_p} z'\}$, pour tous $z\in \check{D}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ et $z'\in D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$, on peut réécrire la somme ci-dessus sous la forme

$$\sum_{i,j\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \{\alpha_n^{-1}\cdot((1+T)^j\varphi^n\psi^n((1+T)^{-j}\sigma_i\cdot x)), (1+T)^j\varphi^n\psi^n((1+T)^{-j}y)\}\, i(1+T)^i.$$

Maintenant, en utilisant la formule $(1+T)^{-j}\sigma_i\cdot x = \sigma_i\cdot((1+T)^{-i^{-1}j}x)$, puis en faisant le changement de variables $(i,j)\mapsto(j,ji)$ (et donc $i^{-1}j\mapsto i$), on peut réécrire la somme ci-dessus sous la forme

$$\sum_{i,j\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \{\alpha_n^{-1}\cdot((1+T)^{ij}\varphi^n\cdot\sigma_j\cdot\psi^n((1+T)^{-i}x)), (1+T)^{ij}\varphi^n\psi^n((1+T)^{-ij}y)\}\, j(1+T)^j.$$

Par ailleurs, si $a\in\mathbf{Z}_p^*$ et si $z\in\check{D}^\sharp$, alors, d'après la rem. III.4.5,

$$(1+T)^{-a}\alpha_n^{-1}\cdot((1+T)^a\varphi^n(z)) = \frac{\varphi^n(z)}{\varphi^n((1+T)^a-1)} \mod \frac{\varphi^{2n-k(\check{D}^\sharp)}(T)}{\varphi^n(T)^2}\varphi^n(\check{D}^\sharp).$$

Comme $\{\frac{\varphi^{n-k(\check{D}^\sharp)}(T)}{T^2}\check{D}^\sharp, D^\sharp\} = 0$ si n est assez grand, et comme

$$\{(1+T)^a\varphi^n(z), (1+T)^a\varphi^n(z')\} = \{z,z'\},$$

quels que soient $a\in\mathbf{Z}_p$, $n\in\mathbf{N}$, $z\in\check{D}$ et $z'\in D$, on peut réécrire la somme ci-dessus, pour n assez grand, sous la forme

$$\sum_{i,j\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \{\frac{1}{(1+T)^{ij}-1}\sigma_j\cdot\psi^n((1+T)^{-i}x), \psi^n((1+T)^{-ij}y)\}\, j(1+T)^j.$$

Finalement, en utilisant le fait que $\{\sigma_{i^{-1}}\cdot z, \sigma_{i^{-1}}\cdot z'\} = \{z,z'\}$, et en faisant rentrer le j à l'intérieur, on arrive à la somme suivante :

$$\sum_{i,j\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \{\frac{j}{(1+T)^j-1}\sigma_{i^{-1}j}\cdot\psi^n((1+T)^{-i}x), \sigma_{i^{-1}}\psi^n((1+T)^{-ij}y)\}\, (1+T)^j.$$

On conclut en utilisant la formule $\{z,z'\} = \mathrm{rés}_0(\langle\sigma_{-1}\cdot z, z'\rangle)$ et la $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-bilinéarité de $\langle\ ,\ \rangle$, pour faire sortir le facteur $\frac{j}{(1+T)^{-j}-1}$.

Lemme VI.2.4. — *Si $x\in\check{D}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ et $y\in D\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$, alors $\langle w_*x, y\rangle_{\mathbf{Z}_p^*}$ est la limite de la suite de terme général $\sum_{i,j\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n}(1+T)^j\varphi^n\big(u_{n,j,i}(x,y)\big)\,\frac{dT}{1+T}$.*

Démonstration. — $\psi^n((1+T)^{-j}w_*(x)) - \sigma_{-j^2}\cdot\psi^n((1+T)^{-j^{-1}}x)$ tend vers 0, uniformément pour $j\in\mathbf{Z}_p^*$, quand n tend vers $+\infty$ (cf. (ii) du lemme V.1.2). On en déduit que $\langle w_*x, y\rangle_{\mathbf{Z}_p^*}$ est la limite de la suite de terme général

$$\sum_{i,j\in\mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} (1+T)^{ij}\varphi^n\big(\langle\sigma_{-ij^2}\cdot\psi^n((1+T)^{-j^{-1}}x), \sigma_j\cdot\psi^n((1+T)^{-i}y)\rangle\big)\,\frac{dT}{1+T}.$$

On conclut en faisant le changement de variable $(i,j)\mapsto(ij,i^{-1})$.

Lemme VI.2.5. — *Soit* $u_{n,j}(x,y) = \sum_{i\in \mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} u_{n,j,i}(x,y)$. *Alors, si* n *est assez grand, on a* $u_{n,j}(x,y) \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+/p^\ell$, *pour tout* $j \in \mathbf{Z}_p$.

Démonstration. — Il résulte de la rem. V.4.3 que $\psi^n((1+T)^{-j}\langle x,y\rangle_{\mathbf{Z}_p^*}) - u_{n,j}(x,y)$ tend vers 0, uniformément pour $j \in \mathbf{Z}_p^*$, quand n tend vers $+\infty$. Comme on a supposé que $\langle x,y\rangle_{\mathbf{Z}_p^*} \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+/p^\ell$, on a $\psi^n((1+T)^{-j}\langle x,y\rangle_{\mathbf{Z}_p^*}) \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+/p^\ell$, pour tous n et j, ce qui permet de conclure.

Revenons à la démonstration du th. VI.2.1. Posons $u_{n,j}(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,j,k}T^k$. On a alors $\mathrm{rés}_0(\frac{j}{(1+T)^{-j}-1}u_{n,j}(x,y)\frac{dT}{1+T}) = -a_{n,j,0}$. Il résulte donc des lemmes VI.2.4 et VI.2.3, que l'on a

$$\langle w_* x, y\rangle_{\mathbf{Z}_p^*} + d\langle x,y\rangle_{\mathrm{Iw}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j\in \mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} (1+T)^j \varphi^n\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,j,k}T^k\Big)\frac{dT}{1+T},$$

et comme la n-ième somme a toutes ses composantes dans $\varphi^n(T)\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+/p^\ell$, la limite est nulle, ce qu'il fallait démontrer.

Références

[1] L. Berger – Représentations p-adiques et équations différentielles, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 219–284.

[2] ———, Construction de (ϕ,Γ)-modules : représentations p-adiques et B-paires, *Algebra Number Theory* **2** (2008), p. 91–120.

[3] ———, Représentations modulaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2, ce volume.

[4] L. Berger & C. Breuil – Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, ce volume.

[5] L. Berger & P. Colmez – Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique, *Astérisque* **319** (2008), p. 303–337.

[6] F. Cherbonnier & P. Colmez – Représentations p-adiques surconvergentes, *Invent. Math.* **133** (1998), p. 581–611.

[7] ———, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), p. 241–268.

[8] P. Colmez – Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, *Ann. of Math.* **148** (1998), p. 485–571.

[9] ———, Représentations cristallines et représentations de hauteur finie, *J. reine angew. Math.* **514** (1999), p. 119–143.

[10] ———, Les conjectures de monodromie p-adiques, *Astérisque* **290** (2003), p. 53–101, Séminaire Bourbaki, vol. 2001/2002, exposé n° 897.

[11] ———, Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, *Astérisque* **319** (2008), p. 117–186.

[12] ———, Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, prépublication `http://people.math.jussieu.fr/~colmez/sst.pdf`.

[13] ———, Fonctions d'une variable p-adique, ce volume.

[14] ———, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, ce volume.

[15] ———, (φ, Γ)-modules et représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, ce volume.

[16] J.-M. Fontaine – Représentations p-adiques, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983)*, PWN, 1984, p. 475–486.

[17] ———, Représentations p-adiques des corps locaux. I, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 249–309.

[18] ———, exposé à Villetaneuse, 2002.

[19] J.-M. Fontaine & J.-P. Wintenberger – Le « corps des normes » de certaines extensions algébriques de corps locaux, *C. R. Acad. Sci. Paris* **288** (1979), p. 367–370.

[20] L. Herr – Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques, *Bull. Soc. Math. France* **126** (1998), p. 563–600.

[21] ———, Une approche nouvelle de la dualité locale de Tate, *Math. Ann.* **320** (2001), p. 307–337.

[22] B. Perrin-Riou – Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, *Invent. Math.* **115** (1994), p. 81–161.

[23] ———, Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques, *Astérisque* **229** (1995).

[24] J-P. Serre – Classes des corps cyclotomiques (d'après K. Iwasawa), Séminaire Bourbaki, vol. 1958/59, exp. n° 174.

[25] N. Tsuzuki – Finite local monodromy of overconvergent unit-root F-isocrystals on a curve, *Amer. J. Math.* **120** (1998), p. 1165–1190.

[26] N. Wach – Représentations cristallines de torsion, *Compositio Math.* **108** (1997), p. 185–240.

[27] J.-P. Wintenberger – Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **16** (1983), p. 59–89.

P. Colmez, CNRS, Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : colmez@math.jussieu.fr