BRUNO POIZAT

Amalgames de Hrushovski

Astérisque, tome 326 (2009), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 995, p. 379-385
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__326__379_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 2008
60^e année, 2007–2008, n° 995, p. 379 à 385

AMALGAMES DE HRUSHOVSKI

par **Bruno POIZAT**

En juillet 1988, Ehud Hrushovski annonçait lors d'un congrès de logique tenu à Durham qu'il avait obtenu, grâce à une construction par amalgamation, un nouvel objet de dimension un dont la géométrie n'était ni celle d'un ensemble sans structure (dimension combinatoire = cardinalité), ni celle d'un espace vectoriel (dimension combinatoire = dimension linéaire), ni celle d'un corps (dimension combinatoire = degré de transcendance) ; cela répondait négativement à une conjecture de Boris Zil'ber (voir [**3**]).

Les constructions de ce type ont produit depuis de nombreux exemples et contre-exemples en théorie des modèles, dont les plus sophistiqués sont souvent dus à Hrushovski lui-même. Un catalogue de celles qui ont été publiées au vingtième siècle est donné par [**7**] ; pour un grand nombre de celles qui sont parues ensuite, on consultera [**1**] et sa bibliographie.

Comme dans ma jeunesse j'étais un auditeur fidèle de Dieudonné, et que je ne voudrais pas que son fantôme vienne me hanter, j'éviterai d'introduire de la logique dans son séminaire favori (si vous ne partagez pas cette crainte, vous pouvez consulter [**6**]). Je me contenterai de présenter ici deux objets, à forte saveur géométrique, dont l'intérêt et la construction par amalgame de Hrushovski devraient, selon moi, être facilement compris par les mathématiciens significatifs. Ce sont : 1. la « courbe » limite des courbes génériques ; 2. la fausse exponentielle de Zil'ber.

1. LA LIMITE DES COURBES GÉNÉRIQUES

On fixe une caractéristique.

Soient K un corps algébriquement clos, de degré de transcendance infini dénombrable, et $N = (d+1)(d+2)/2$ de ses éléments a_{ij}, $0 \leq i+j \leq d$, algébriquement indépendants.

La courbe plane C_d définie par l'équation $\Sigma\, a_{ij} \cdot x^i \cdot y^j = 0$ est dite courbe générique de degré d.

Toutes ces courbes génériques C_d se correspondent par automorphisme de K (elles ne sont pas géométriquement isomorphes si $d > 2$).

On se demande vers quoi tend C_d lorsque le degré d tend vers l'infini.

Comme C_d n'est définie qu'à isomorphie près, il ne peut s'agir d'une limite ponctuelle.

Il s'agit d'une limite logique (aïe !), c'est-à-dire de l'existence d'une partie C de $K \times K$ telle que chaque propriété possédée par (K, C) le soit par (K, C_d) pour d assez grand.

La question n'a de sens que si on limite sévèrement, mais cependant significativement, la notion de « propriété » : en effet, la notion de limite dans une topologie discrète n'a pas plus d'intérêt que celle de limite dans une topologie triviale. Nous nous contenterons des propriétés exprimables dans la logique finitiste du premier ordre, que nous éviterons de définir, quitte à rendre l'exposé parfois acrobatique.

Par compacité de cette logique, la suite (K, C_d) est convergente ssi chaque propriété y est satisfaite pour d assez grand, ou bien sa négation l'est.

Cette remarque n'est pas très utile, car il est plus facile, au moins pour un étudiant de première année de licence, de montrer que la suite $1/n$ tend vers 0, que de montrer que la suite $1/n$ est de Cauchy.

Dans le cas présent, un raisonnement direct sur la suite des ensembles P_d des propriétés des courbes C_d semble inabordable, tandis qu'il est plus facile de montrer la convergence d'une suite si on a une idée de ce qu'est sa limite.

Une stratégie raisonnable est donc la suivante :

- construire une candidate C à être cette limite, grâce à un amalgame de Hrushovski (pourquoi cette candidate plutôt qu'une autre ? C'est là qu'est intervenu le génie de Hrushovski !) ;
- dresser la liste des propriétés de (K, C), ce qui revient à choisir entre chaque propriété et sa négation ;
- vérifier que chaque propriété de (K, C) est satisfaite par (K, C_d), pour d assez grand.

Comme la partie logique de ce programme nous entraînerait trop loin, nous nous contenterons tout d'abord de vérifier en deux lemmes très faciles une propriété possédée par la courbe-limite : *Si n points distincts $(x_1, y_1), \cdots (x_n, y_n)$ sont sur la courbe C, le degré de transcendance de leurs $2n$ coordonnées $x_1, y_1, \cdots x_n, y_n$ vaut au moins n.*

LEMME 1.1. — *Si $d \geq n-1$, les coefficients des courbes planes de degré $\leq d$ qui passent par n points distincts du plan forment un espace vectoriel de dimension $N-n$.*

Démonstration. — Les équations linéaires exprimant que la courbe passe par chacun des points sont linéairement indépendantes ; en effet la courbe de degré $\leq d$ d'équation $\Pi_{i<n,a_i\neq a_n}(x-a_i) \times \Pi_{j<n,a_j=a_n}(y-b_j) = 0$ passe par $(a_1, b_1), \ldots (a_{n-1}, b_{n-1})$, et pas par le dernier point (a_n, b_n). $\square$

COROLLAIRE 1.2. — *Si $d \geq n-1$, et si une courbe générique de degré d passe par n points $(a_1, b_1), \ldots (a_n, b_n)$ du plan distincts, le degré de transcendance de leurs coordonnées vaut au moins n.*

Démonstration. — Les coefficients de la courbe ont un degré de transcendance N sur $\varnothing$; leur degré de transcendance sur $\{a_1, b_1, \ldots a_n, b_n\}$ est au plus $N-n$; il faut donc que le degré de transcendance de $\{a_1, b_1, \ldots a_n, b_n\}$ soit au moins n. $\square$

Et ensuite de donner quelques détails sur la construction de la limite.

Construction de la limite

Nous amalgamons des structures (k, c), où k est un corps algébriquement clos de degré de transcendance finie, et c une partie finie de $k \times k$; la prédimension de (k, c) est :

$$\delta(k, c) = \text{d}^\circ\text{trans}(k) - \text{nombre de points de } c$$

et, pour être en harmonie avec la propriété ci-dessus, nous demandons que tout sous-corps de k soit de prédimension positive ou nulle ; nous notons U_0 la classe formée des structures (k, c) ayant cette propriété de positivité.

On dit que (k, c) est plongé dans (k', c') si k est un sous-corps de k' et si les points de c sont les points de c' à coordonnées dans k ; amalgamer deux plongements dessinés en gras dans la figure ci-dessous, c'est trouver deux plongements dessinés en maigre de manière à ce que le diagramme commute :

$$\begin{tikzcd}
& (K,C) & \\
(k',c') \arrow[ur] & & (k'',c'') \arrow[ul] \\
& (k,c) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Mais on ne peut pas amalgamer tous les plongements dans la classe U_0 (en restant dans cette classe !).

En effet, prenons pour exemple (k, c) un corps k de base de transcendance $\{a\}$, avec $c = \varnothing$; $\delta(k, c) = 1$.

Formons (k', c') en ajoutant x transcendant sur k tel que $(x, x + a)$ et $(x + a, x)$ soient sur la courbe c' ; $\delta(k', c') = 0$. De même formons (k'', c'') en mettant $(y, a.y)$ et $(a.y, y)$ sur la courbe c'' ; $\delta(k'', c'') = 0$.

(k', c') et (k'', c'') sont bien dans U_0, mais on ne peut les mettre ensemble sans rendre la prédimension négative !

Si (k, c) est une restriction de (k', c') ($\in U_0$), sa dimension dans (k', c') est : $d_{(k',c')}(k, c) = \operatorname{Min} \delta(\kappa, \gamma)$ où $(k, c) \subseteq (\kappa, \gamma) \subseteq (k', c')$. Un plongement est *autosuffisant* s'il conserve la dimension ($d_{(k',c')}(k, c) = \delta(k, c)$).

On voit facilement que les plongements autosuffisants, eux, sont amalgamables, c'est-à-dire que, si les flèches grasses sont autosuffisantes, on peut trouver (K, C) dans U_0 avec deux flèches maigres autosuffisantes qui font commuter le diagramme : prendre k' et k'' linéairement disjoints au-dessus de k, et $C = c' \cup c''$.

On fait alors une suite d'amalgames systématiques $(k_0, c_0) \subset (k_1, c_1) \ldots (k_n, c_n) \subset \ldots$, sans jamais oublier personne : si (k', c') est une extension autosuffisante d'une restriction idem (k, c) de (k_n, c_n), il faudra penser un jour à amalgamer (k_{n+m}, c_{n+m}) et une copie de (k', c') au-dessus de (k, c).

La réunion des (k_n, c_n) est un corps K de degré de transcendance dénombrable, avec une partie infinie C de $K \times K$, qui est *homogène* et *universel* pour U_0.

Homogène : tout isomorphisme entre deux restrictions autosuffisantes (k, c) et (k', c') de (K, C), de degré de transcendance fini, s'étend en un automorphisme de (K, C).

Universel : tout élément de U_0 de degré de transcendance fini, ou même dénombrable, se plonge de manière autosuffisante dans (K, C).

Comment voit-on que c'est bien la limite ?

Avec un peu d'expérience en logique, on arrive à axiomatiser les propriétés de (K, C) en approximant sa construction : il faut dire que toute variété algébrique $V(\underline{x}, \underline{y}, \underline{a})$ de $K^{2 \cdot n}$ contient un n-uplet $(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$ de points distincts sur la courbe C, sauf si cela fait obstacle à la positivité de la prédimension. Ensuite on triture un peu les axiomes, grâce au Théorème des Mariages, pour leur donner une forme plus agréable facilitant la suite.

Pour voir que chaque axiome de la liste est satisfait par T_d pour les grandes valeurs de d, on utilise une astuce reposant sur le Hauptidealsatz, permettant de calculer les dimensions des intersections de variétés projectives (remarquons que les coefficients des courbes interviennent à une constante près). Tout ça est fait dans [2].

Transition entre 1 et 2 : la limite des polynômes génériques

Pascal Koiran (voir [5]) a étendu le résultat aux polynômes génériques $P_d(x) = a_d \cdot x^d + a_{d-1} \cdot x^{d-1} + \cdots + a_1 \cdot x$, et construit par amalgame leur fonction limite $P(x)$.

Cette limite satisfait à la condition schanuelienne suivante : si $b_1, \dots b_n$ sont distincts et $\neq 0$, le degré de transcendance de $\{b_1, \dots b_n, P(b_1), \dots P(b_n)\}$ vaut au moins n.

C'est ainsi que, si le corps de base est algébriquement clos, aucun énoncé du premier ordre ne permet de distinguer les polynômes de degré pair des polynômes de degré impair, contrairement à ce qu'il se passe pour un corps réel-clos (où $P(x)$ est de degré pair ssi $P(x) \cdot P(-x)$ est positif pour les grandes valeurs de x).

Mais il y a mieux : en caractéristique nulle, cette limite a une interprétation analytique, comme somme d'une série de Liouville, dont les coefficients sont des inverses d'entiers croissant rapidement ; [4], en s'inspirant de travaux de Wilkie, a vérifié que ces fonctions satisfont les axiomes-limites des polynômes génériques ; c'est une réponse partielle à la nouvelle vision analytique de Zil'ber, exprimée dans [9] !

Plus modestement, cela montre que, sur un corps algébriquement clos, le coefficient a_1 d'un polynôme $P(x)$ de degré non précisé ne peut être défini par une formule du premier ordre ; il en est de même de son polynôme dérivé, car $a_1 = P'(0)$. Cela contraste avec les corps réel-clos, où la définition des limites en $\delta - \varepsilon$ permet de dériver les polynômes sans les exprimer comme somme de monômes, c'est-à-dire sans connaître leur degré.

2. C'EST QUOI, L'EXPONENTIELLE COMPLEXE ?

C'est une fonction $e(x)$ de C dans C telle que :

- e est une surjection de C dans C^* ;
- $e(x + y) = e(x) \cdot e(y)$;
- $e(x) = 1$ ssi x est dans $2i\pi \cdot Z$;
- Conjecture de Schanuel : si $x_1, \dots, x_n$ sont Q-linéairement indépendants, d°trans$(\{x_1, \dots, x_n, e(x_1), \dots, e(x_n)\}) \geq n$; cette conjecture implique tous les résultats de transcendance classiques connus ou conjecturés, par exemple : e et π sont algébriquement indépendants, d°trans$(1, 2i\pi; e, 1) = 2$.

La Conjecture de Schanuel étant un peu incertaine, on va construire, avec [**10**], un objet (C, f) satisfaisant toutes ces conditions.

Pour cela, on amalgame hrushovskiennement des structures (k, φ) où k est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, φ une fonction de k dans k^* telle que $\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, $\varphi(x) = 1$ ssi x est dans $2i\pi \cdot Z$, où $2i\pi$ est un certain nombre transcendant.

Pour prédimension, on prend $\delta(x_1, \ldots x_n) = \text{d}^\circ\text{trans}[x_1, \ldots x_n, \varphi(x_1), \ldots \varphi(x_n)] - \dim Q\text{lin}(x_1, \ldots x_n)$; sa positivité signifie que Schanuel est satisfait.

En soignant un peu l'amalgame d'extensions autosuffisantes, on peut obtenir un corps K continupotent, avec des propriétés d'homogénéité et d'universalité de (K, f) qui le rendent unique à isomorphie près.

Question de Zil'ber : est-ce que (C, e) et (K, f) satisfont les mêmes énoncés, ou même sont isomorphes ? Soit encore : est-ce que cette fausse exponentielle n'est pas la vraie ?

Elle repose sur la philosophie que les mathématiques ont cessé d'être créatives peu après 1900, leur activité postérieure se bornant à vérifier que toute construction naturelle ne peut que donner un objet déjà connu.

RÉFÉRENCES

[1] A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro & F. O. Wagner – Die böse Farbe, *J. Inst. Math. Jussieu* **8** (2009), p. 415–443.

[2] O. Chapuis, E. Hrushovski, P. Koiran & B. Poizat – La limite des théories de courbes génériques, *J. Symbolic Logic* **67** (2002), p. 24–34.

[3] J. B. Goode – Hrushovski's geometries, in *Proceedings of the 7th Easter Conference on Model Theory (Wendisch-Rietz, 1989)*, Seminarberichte, vol. 104, Humboldt Univ. Berlin, 1989, p. 106–117.

[4] P. Koiran – The theory of Liouville functions, *J. Symbolic Logic* **68** (2003), p. 353–365.

[5] ———, The limit theory of generic polynomials, in *Logic Colloquium '01*, Lect. Notes Log., vol. 20, Assoc. Symbol. Logic, 2005, p. 242–254.

[6] B. Poizat – Cours de théorie des modèles, Nūr al-Mantiq wal-Ma'rifah, Aléas, 1985.

[7] ———, Amalgames de Hrushovski : une tentative de classification, in *Tits buildings and the model theory of groups (Würzburg, 2000)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 291, Cambridge Univ. Press, 2002, p. 195–214.

[8] ———, *Manuel de soureth. Initiation à l'araméen d'aujourd'hui, parlé et écrit*, Geuthner, 2008.

[9] B. ZILBER – Analytic and pseudo-analytic structures, in *Logic Colloquium 2000*, Lect. Notes Log., vol. 19, Assoc. Symbol. Logic, 2005, p. 392–408.

[10] ———, Pseudo-exponentiation on algebraically closed fields of characteristic zero, *Ann. Pure Appl. Logic* **132** (2005), p. 67–95.

Bruno POIZAT

Institut Camille Jordan
Université Claude Bernard
43 boulevard du 11 novembre 1918
F-69622 Villeurbanne Cedex
E-mail : `poizat@math.univ-lyon1.fr`