Astérisque

CHRISTIAN PAULY

La dualité étrange [d'après P. Belkale, A. Marian et D. Oprea]

Astérisque, tome 326 (2009), Séminaire Bourbaki, exp. n^o 994, p. 363-377

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__326__363_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 2008
60^{e} année, 2007–2008, n° 994, p. 363 à 377

LA DUALITÉ ÉTRANGE
[d'après P. Belkale, A. Marian et D. Oprea]

par **Christian PAULY**

Introduction

Le but de ces notes est de donner un bref aperçu d'un résultat important sur les fibrés vectoriels sur une courbe algébrique : la dualité étrange ou la dualité rang-niveau.

En 1994, disposant de la formule de Verlinde qui donne la dimension des espaces de fonctions thêta généralisées d'ordre k sur les espaces de modules de fibrés de rang r (voir sections 1.2 et 1.3), on a conjecturé que les deux espaces associés aux couples (r,k) et (k,r) sont naturellement duaux, la dualité entre ces espaces vectoriels étant induite par le produit tensoriel des fibrés vectoriels. Cette conjecture a été démontrée seulement en 2006, d'abord par P. Belkale pour une courbe générale et ensuite par A. Marian et D. Oprea pour toute courbe.

Une des idées principales, commune aux deux démonstrations, est de construire une base explicite de fonctions thêta généralisées d'ordre r indexée par des fibrés vectoriels particuliers de rang r. P. Belkale obtient ces fibrés particuliers comme sous-fibrés d'un fibré de rang $r+k$ sur la droite projective, et A. Marian et D. Oprea considèrent les sous-fibrés de degré maximal d'un fibré fixé de rang $r+k$ sur une courbe quelconque. La deuxième idée clé est alors de montrer que le nombre de ces fibrés particuliers est égal à la dimension des espaces de fonctions thêta généralisées donnée par la formule de Verlinde — notons que les deux problèmes énumératifs et leur nombre de solutions sont différents. C'est à ce niveau-là qu'interviennent la combinatoire de la formule de Verlinde et le lien entre l'anneau de fusion et la cohomologie quantique de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(r,r+k)$, déjà observé par E. Witten dans [**33**]. Tandis que P. Belkale montre que le nombre de ses fibrés particuliers vérifie les mêmes relations de récurrence que les nombres de Verlinde, A. Marian et D. Oprea utilisent la formule de Vafa et Intiligator donnant les invariants de Gromov-Witten associés à la grassmannienne $\mathrm{Gr}(r,r+k)$.

Dans la dernière section, je décris quelques généralisations de la dualité étrange, notamment aux fibrés vectoriels avec structure parabolique et aux G-fibrés principaux. Dans ce dernier cas, de nombreuses questions restent ouvertes.

Dans ces notes, je ne mentionne que les constructions de dualité étrange sur les courbes. Des constructions analogues existent sur les surfaces projectives, en particulier sur le plan projectif et sur les surfaces abéliennes — voir [**19**].

Il existe des « surveys » récents sur la dualité étrange : les notes de cours de M. Popa [**27**], section 5, et l'article de A. Marian et D. Oprea [**19**].

J'aimerais remercier P. Belkale et R. Oudompheng pour leurs commentaires sur ces notes.

1. ESPACES DE MODULES DE FIBRÉS VECTORIELS SUR UNE COURBE

Dans cette section, on rappelle brièvement les principaux résultats concernant les espaces de modules de fibrés vectoriels sur les courbes et les espaces de fonctions thêta généralisées. Pour plus de détails on renvoie par exemple au livre de J. Le Potier [**16**] et aux notes de M. Popa [**27**] et de C. Sorger [**30**].

1.1. Propriétés des espaces de modules

Soit X une courbe projective lisse complexe de genre $g \geq 1$. Étant donné un fibré vectoriel E sur la courbe X, on peut lui associer deux entiers : son rang $r = \mathrm{rg}(E)$ et son degré $d = \deg(E) := \deg(\Lambda^r E)$. Ce sont des invariants topologiques. Si l'on se donne la courbe X ainsi que r et d, il existe une variété projective, notée $\mathcal{U}_X(r,d)$, qui paramètre les classes de S-équivalence de fibrés vectoriels semi-stables de rang r et de degré d sur la courbe X. Rappelons que $\mathcal{U}_X(r,d)$ est une variété irréductible, de dimension $r^2(g-1)+1$ et que les points fermés de $\mathcal{U}_X(r,d)$ correspondent aux sommes directes de fibrés vectoriels stables.

Si $r = 1$, l'espace de modules $\mathcal{U}_X(1,d)$ coïncide avec la variété de Picard $\mathrm{Pic}^d(X)$ paramétrant les fibrés en droites de degré d. Nous notons $\mathrm{Jac}(X) := \mathrm{Pic}^0(X)$ la jacobienne de la courbe X.

Il existe un morphisme de variétés induit par le déterminant

$$\det : \mathcal{U}_X(r,d) \longrightarrow \mathrm{Pic}^d(X), \qquad E \mapsto \det(E).$$

Nous notons $\mathcal{SU}_X(r,L)$ la fibre $\det^{-1}(L)$ au-dessus du fibré en droites $L \in \mathrm{Pic}^d(X)$ et $\mathcal{SU}_X(r) := \mathcal{SU}_X(r,\mathcal{O})$. Afin de simplifier la notation, nous introduisons aussi $\mathcal{U}_X^*(r) := \mathcal{U}_X(r, r(g-1))$.

À plusieurs reprises dans le texte, on utilisera le résultat élémentaire suivant : le morphisme induit par le produit tensoriel

$$t : \mathcal{SU}_X(r) \times \mathrm{Pic}^{g-1}(X) \longrightarrow \mathcal{U}_X^*(r), \qquad (E, L) \mapsto E \otimes L \tag{1}$$

est un revêtement étale galoisien de groupe de Galois égal au groupe $\mathrm{Jac}(X)[r] \cong (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^{2g}$ des points de r-torsion de la jacobienne.

1.2. Fonctions thêta généralisées

Avant de définir les fonctions thêta généralisées, on rappelle quelques notions sur les fonctions thêta abéliennes. L'ensemble

$$\Theta := \{M \in \mathrm{Pic}^{g-1}(X) \mid h^0(X, M) > 0\} \subset \mathrm{Pic}^{g-1}(X)$$

détermine un diviseur de Cartier effectif — le *diviseur thêta* — dans $\mathrm{Pic}^{g-1}(X)$, qui définit, après translation $T_L : \mathrm{Jac}(X) \to \mathrm{Pic}^{g-1}(X)$ par un fibré en droites L de degré $g-1$, un diviseur $\Theta_L := T_L^*\Theta$ dans la jacobienne donnant une polarisation principale, c'est-à-dire $h^0(\mathrm{Jac}(X), \mathcal{O}(\Theta_L)) = 1$. Les sections globales du fibré $\mathcal{O}(k\Theta_L)$ sont appelées les fonctions thêta d'ordre k.

La construction précédente se généralise sans trop d'obstacles aux espaces de modules $\mathcal{U}_X(r, d)$: on montre que l'ensemble

$$\Theta := \{[E] \in \mathcal{U}_X^*(r) \mid h^0(X, E) > 0\} \subset \mathcal{U}_X^*(r), \tag{2}$$

où $[E]$ désigne la classe de S-équivalence d'un fibré semi-stable E, détermine un diviseur de Cartier effectif — le *diviseur thêta généralisé* — dans $\mathcal{U}_X^*(r)$. Comme en rang 1, on a aussi la relation [**5**]

$$h^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(\Theta)) = 1.$$

En prenant l'image inverse par le morphisme induit par produit tensoriel $T_L : \mathcal{U}_X(r, 0) \to \mathcal{U}_X^*(r)$ avec un fibré en droites L de degré $g-1$ et en restreignant à la sous-variété $\mathcal{SU}_X(r) \subset \mathcal{U}_X(r, 0)$, on obtient un diviseur de Cartier Θ_L dans $\mathcal{SU}_X(r)$ dont le support est

$$\Theta_L = \{[E] \in \mathcal{SU}_X(r) \mid h^0(X, E \otimes L) > 0\}.$$

On sait [**13**] que le fibré en droites associé $\mathcal{L} = \mathcal{O}(\Theta_L)$ est ample, ne dépend pas du choix de L et engendre le groupe de Picard

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{SU}_X(r)) = \mathbb{Z} \cdot \mathcal{L}.$$

Par analogie avec le cas $r = 1$, on appelle les sections globales de $\mathcal{L}^k$ sur $\mathcal{SU}_X(r)$ les *fonctions thêta généralisées* d'ordre k.

1.3. La formule de Verlinde

La formule de Verlinde donne la dimension de l'espace des fonctions thêta généralisées d'ordre k sur $\mathcal{SU}_X(r)$. Remarquons que la formule de Verlinde donne en fait la dimension des espaces de blocs conformes, qu'on peut identifier aux espaces de fonctions thêta généralisées. On renvoie aux notes de A. Beauville [**3**] et de C. Sorger [**30**] pour une discussion détaillée et les démonstrations. Dans notre cas, on utilisera la formule de Verlinde sous la forme suivante (due à D. Zagier) : on pose $N = r + k$.

$$N_k(\mathrm{SL}(r)) := h^0(\mathcal{SU}_X(r), \mathcal{L}^k) = \left(\frac{r}{N}\right)^g \sum_{\substack{S \cup T = \{0,\ldots,N-1\} \\ |S|=k, |T|=r}} \prod_{\substack{s \in S \\ t \in T}} \left| 2 \sin \pi \frac{s-t}{N} \right|^{g-1}. \tag{3}$$

On observe que cette formule présente une symétrie en les variables r et k. Plus précisément on a la relation

$$\frac{N_k(\mathrm{SL}(r))}{r^g} = \frac{N_r(\mathrm{SL}(k))}{k^g}. \tag{4}$$

On déduit la dimension $N_k(\mathrm{GL}(r))$ de $H^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(k\Theta))$ à partir de la formule de Verlinde (3) en utilisant le revêtement étale galoisien (1) : on calcule l'image inverse

$$t^* \mathcal{O}(k\Theta) = \mathcal{L}^k \boxtimes \mathcal{O}(kr\Theta),$$

ce qui permet de déduire

$$N_k(\mathrm{GL}(r)) = \frac{k^g}{r^g} N_k(\mathrm{SL}(r)) = N_r(\mathrm{SL}(k)). \tag{5}$$

2. LA DUALITÉ ÉTRANGE

2.1. La construction de Beauville-Donagi-Tu

Dans cette section, on va énoncer le théorème principal de l'exposé. Ce théorème avait été conjecturé en 1994 par A. Beauville [**3**], ainsi que par R. Donagi et L. Tu [**12**]. Cette conjecture était fondée sur des travaux antérieurs en théorie conforme des champs — voir par exemple [**21**]. La construction de la « dualité étrange » est la suivante : on considère deux entiers r et k et le morphisme entre espaces de modules de fibrés vectoriels semi-stables de rang r et k induit par le produit tensoriel

$$t : \mathcal{SU}_X(k) \times \mathcal{U}_X^*(r) \longrightarrow \mathcal{U}_X^*(kr), \qquad (E, F) \mapsto E \otimes F.$$

Notons que cette flèche est bien un morphisme, car la semi-stabilité des fibrés est préservée par produit tensoriel. On calcule comme précédemment l'image inverse

$$t^* \mathcal{O}(\Theta) = \mathcal{L}^r \boxtimes \mathcal{O}(k\Theta).$$

L'image inverse par t du diviseur thêta généralisé (2) donne un élément $t^*\Theta$ de $H^0(t^*\mathcal{O}(\Theta))$ qui se décompose par la formule de Künneth

$$H^0(\mathcal{SU}_X(k), \mathcal{L}^r) \otimes H^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(k\Theta)).$$

On peut donc considérer le tenseur $t^*\Theta$ comme une application linéaire

$$SD : H^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(k\Theta))^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{SU}_X(k), \mathcal{L}^r) \tag{6}$$

entre deux espaces vectoriels de même dimension (5). Le résultat principal est le

THÉORÈME 2.1 ([**17**] Theorem 2, [**6**], [**8**]). — *L'application linéaire SD est un isomorphisme pour toute courbe X.*

Remarque 2.2. — Le fait que SD est un isomorphisme admet l'interprétation géométrique suivante. Étant donné un fibré semi-stable F avec $[F] \in \mathcal{U}_X^*(r)$, on peut considérer l'ensemble

$$\Theta_F := \{[E] \in \mathcal{SU}_X(k) \mid h^0(X, E \otimes F) > 0\}.$$

Pour F général, Θ_F détermine un diviseur dans le système linéaire $|\mathcal{L}^r|$ et l'application rationnelle

$$\mathcal{U}_X^*(r) \dashrightarrow |\mathcal{L}^r|, \qquad F \mapsto \Theta_F,$$

se factorise à travers l'application linéaire SD projectivisée. On observe alors que SD est un isomorphisme si et seulement si les diviseurs Θ_F, quand F parcourt $\mathcal{U}_X^*(r)$, engendrent linéairement le système $|\mathcal{L}^r|$.

2.2. La dualité de Wirtinger généralisée

Un défaut de l'énoncé prédédent est qu'il met en relation deux groupes structuraux de type différent $SL(k)$ et $GL(r)$. Un énoncé plus symétrique a été formulé et démontré par A. Marian et D. Oprea : on considère le morphisme

$$\pi : \mathcal{U}_X(k,0) \times \mathcal{U}_X(r,0) \longrightarrow \mathcal{U}_X(kr,0) \times \mathrm{Jac}(X), \qquad (E,F) \mapsto (E \otimes F, (\det E)^{-1} \otimes \det F).$$

On fixe deux fibrés en droites L et M de degré $g-1$ sur X et on note K le fibré canonique de X. L'image inverse par π du diviseur thêta généralisé produit

$$\Theta_M \boxtimes \Theta_{L^{-1}K} \subset \mathcal{U}_X(kr,0) \times \mathrm{Jac}(X)$$

peut être considéré (voir [**17**], Lemma 1) comme une application linéaire

$$D : H^0(\mathcal{U}_X(k,0), \mathcal{O}(r\Theta_M + \det{}^*\Theta_L))^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{U}_X(r,0), \mathcal{O}(k\Theta_M + \det{}^*\Theta_{L^{-1}K})). \tag{7}$$

THÉORÈME 2.3 (Dualité de Wirtinger généralisée, [**17**] Theorem 1)

L'application linéaire D est un isomorphisme pour toute courbe X et pour tous fibrés en droites L et M.

Remarque 2.4. — Ce théorème généralise aux fibrés vectoriels un résultat sur les fonctions thêta abéliennes [**20**] appelé *dualité de Wirtinger.* On obtient ce résultat classique en prenant dans le théorème précédent $r = k = 1$ et $L = M = \kappa$ une thêta-caractéristique de X. Nous notons alors $\Theta = \Theta_\kappa$ le diviseur thêta symétrique dans $\mathrm{Jac}(X)$. Le morphisme π est une isogénie et on a la relation $\pi^*(\Theta \boxtimes \Theta) = 2\Theta \boxtimes 2\Theta$. L'isomorphisme D fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & & |2\Theta|^\vee \\ & \nearrow & \downarrow^{D} \\ \mathrm{Jac}(X) & \xrightarrow{i} & |2\Theta|, \end{array}$$

avec $i(x) = T_x^*\Theta + T_{-x}^*\Theta$, où T_x désigne la translation par x dans $\mathrm{Jac}(X)$. Remarquons que la dualité de Wirtinger est démontrée pour toute variété abélienne avec polarisation principale.

La dualité étrange (Théorème 2.1), telle qu'elle avait été conjecturée par Beauville-Donagi-Tu, est alors un corollaire de la dualité de Wirtinger généralisée.

Proposition 2.5 ([**17**] section 4). — *Si D est un isomorphisme, alors SD est aussi un isomorphisme.*

Preuve (esquisse) — Le produit tensoriel avec M induit un isomorphisme entre $H^0(\mathcal{U}_X(r,0), \mathcal{O}(k\Theta_M))$ et $H^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(k\Theta))$. D'autre part les deux applications linéaires D et SD apparaissent dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{SU}_X(k), \mathcal{L}^r)^\vee & \xrightarrow{\rho^\vee} & H^0(\mathcal{U}_X(k,0), \mathcal{O}(r\Theta_M + \det^*\Theta_L))^\vee \\ \downarrow^{SD^\vee} & & \downarrow^{D} \\ H^0(\mathcal{U}_X(r,0), \mathcal{O}(k\Theta_M)) & \hookrightarrow & H^0(\mathcal{U}_X(r,0), \mathcal{O}(k\Theta_M + \det^*\Theta_{L^{-1}K})) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont la duale de la restriction ρ et la multiplication par la section $\det^*\Theta_{L^{-1}K}$ respectivement. Cette dernière flèche est injective. Comme D est un isomorphisme, il suffit donc de montrer que l'application de restriction ρ des sections globales à $\mathcal{SU}_X(k)$ est surjective. Étant donné $s \in H^0(\mathcal{SU}_X(k), \mathcal{L}^r)$, on construit « à la main » une section $\mathrm{Jac}(X)[k]$-invariante sur le revêtement étale galoisien $\mathcal{SU}_X(k) \times \mathrm{Jac}(X) \to \mathcal{U}_X(k,0)$ qui se restreint à s sur $\mathcal{SU}_X(k) \times \{\mathcal{O}_X\}$. □

3. LA DÉMONSTRATION DE A. MARIAN ET D. OPREA

Dans cette section, nous allons expliquer brièvement la démonstration de la dualité de Wirtinger généralisée (Théorème 2.3).

3.1. L'idée principale

L'idée clé, qui avait déjà été utilisée dans l'article antérieur de P. Belkale [**6**] sur une courbe singulière, est de construire de manière explicite deux familles de fibrés vectoriels, dont les diviseurs thêta associés forment des bases duales des deux espaces vectoriels, qui apparaissent dans (7). On notera leur dimension

$$\begin{aligned} q &= h^0(\mathcal{U}_X(k,0), \mathcal{O}(r\Theta_M + \det{}^*\Theta_L)) = h^0(\mathcal{U}_X(r,0), \mathcal{O}(k\Theta_M + \det{}^*\Theta_{L^{-1}K})) \\ &= \left(\frac{N}{r}\right)^g h^0(\mathcal{SU}_X(r), \mathcal{L}^k). \end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en utilisant le revêtement étale (1). Plus précisément, on montre le

THÉORÈME 3.1 ([**17**] Proposition 3). — *Il existe q couples de fibrés vectoriels stables*

$$(A_i, B_i) \in \mathcal{U}_X(k,0) \times \mathcal{U}_X(r,0), \qquad 1 \le i \le q,$$

vérifiant les conditions

1. $h^0(X, A_i \otimes B_j \otimes M) \neq 0$ *si* $i \neq j$, *et* $= 0$ *si* $i = j$,
2. $h^0(X, (\det A_i)^{-1}(\det B_i)L^{-1}K) = 0$.

Ce théorème signifie que les q diviseurs $\Theta_{A_i} \subset \mathcal{U}_X(r,0)$ du système linéaire $|k\Theta_M + \det^*\Theta_{L^{-1}K}|$ dont le support est donné par

$$\Theta_{A_i} = \{[F] \in \mathcal{U}_X(r,0) \mid h^0(X, A_i \otimes F \otimes M) > 0 \text{ ou } h^0((\det A_i)^{-1}(\det F)L^{-1}K) > 0\}$$

contiennent les fibrés stables $B_j \in \mathcal{U}_X(r,0)$ pour $j \neq i$ et ne contiennent pas B_i. Ceci entraîne immédiatement que les q diviseurs Θ_{A_i} forment une famille libre, et donc que D est un isomorphisme.

3.2. Le schéma Quot de Grothendieck, invariants de Gromov-Witten et la formule de Vafa-Intriligator

Dans cette section, nous allons construire les q couples (A_i, B_i) du théorème 3.1. Pour cela nous introduisons le schéma Quot de Grothendieck $\mathrm{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ qui paramètre les suites exactes

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_X^N \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

où E est un sous-faisceau de $\mathcal{O}_X^N$ de rang k et de degré $-d$ et F un faisceau de rang r. Rappelons la notation $N = r + k$. Le schéma $\mathrm{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ est projectif, mais pour d général ce schéma peut avoir plusieurs composantes irréductibles et des singularités — voir par exemple [**27**] section 4 ou [**18**]. Il existe une suite exacte de faisceaux universels sur $\mathrm{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k) \times X$

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}^N_{\mathrm{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k) \times X} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Par ailleurs les points σ de $\mathrm{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ qui correspondent aux faisceaux quotients $F = \mathcal{F}_{|\{\sigma\}\times X}$ localement libres forment un ouvert

$$\mathrm{Mor}_d(X, \mathrm{Gr}(k,N)) \subset \mathrm{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k),$$

qui paramètre les morphismes de degré d de la courbe X dans la grassmannienne $\mathrm{Gr}(k,N)$ des sous-espaces de dimension k dans $\mathbb{C}^N$. Si l'on suppose le degré d assez grand, le schéma $\mathrm{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ est irréductible [**10**] et de dimension égale à

$$\mathrm{din}\ \mathrm{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k) = \chi(\mathrm{Hom}(E,F)) = Nd - rk(g-1).$$

Par conséquent l'ouvert $\mathrm{Mor}_d(X, \mathrm{Gr}(k,N))$ est dense. On suppose aussi que d est divisible par k et on introduit l'entier $s = \frac{Nd}{k} - r(g-1)$, de sorte que $\dim \mathrm{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k) = sk$.

Comme le faisceau $\mathcal{E}$ est localement libre, on peut définir les classes de Chern

$$a_i = c_i(\mathcal{E}^\vee_{|\mathrm{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N,k)\times\{x\}}).$$

On observe que ces classes de Chern ne dépendent pas du choix du point $x \in X$. Le résultat crucial est alors la

PROPOSITION 3.2 ([**17**] Proposition 1). — *On a l'égalité suivante*

$$q = \int_{\mathrm{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N,k)} a_k^s.$$

La preuve passe par une vérification directe de l'égalité numérique, car d'une part q est donnée par la formule de Verlinde (3) et d'autre part les nombres d'intersection de classes de Chern sur le schéma $\mathrm{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ sont en fait des *invariants de Gromov-Witten* associés à la grassmannienne — voir par exemple [**9**]. La formule de Vafa et Intriligator, qui calcule ces invariants de Gromov-Witten, a été démontrée en 1994 par B. Siebert et G. Tian [**29**] — voir aussi [**18**] pour une formulation plus explicite.

Afin de terminer la construction des q couples (A_i, B_i), il faut donner une interprétation énumérative du nombre d'intersection $\int a_k^s$. Ceci résulte directement du travail de A. Bertram sur les invariants de Gromov-Witten : soient $H \subset \mathbb{C}^N$ un hyperplan et $x \in X$; notons $\mathcal{E}_x$ la restriction $\mathcal{E}_{|\mathrm{Quot}\times\{x\}}$. Alors H détermine une section globale φ de $\mathcal{E}_x^\vee$ dont le lieu des zéros $Z \subset \mathrm{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ est une extension de la sous-variété de $\mathrm{Mor}_d(X, \mathrm{Gr}(k,N))$ définie par

$$\{\phi : X \to \mathrm{Gr}(k,N) \mid \phi(x) \in \mathrm{Gr}(k,H) \subset \mathrm{Gr}(k,N)\}.$$

PROPOSITION 3.3 ([**9**]). — *Pour des hyperplans $H_1, \ldots, H_s$ et des points $x_1, \ldots, x_s$* généraux, *on a :*

1. *les lieux des zéros Z_l, pour $1 \leq l \leq s$, sont de codimension k dans* $\mathrm{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ *et*
$$[Z_l] = c_k(\mathscr{E}^\vee_{\mathrm{Quot}\times\{x_l\}}) \cap [\mathrm{Quot}]$$
2. *les Z_l intersectent transversalement dans le lieu des fibrés stables, c'est-à-dire*
$$\mathcal{Z} := Z_1 \cap \cdots \cap Z_s$$
est un schéma réduit de dimension 0 *correspondant à des fibrés stables.*

La preuve utilise essentiellement le théorème de transversalité de Kleiman [**15**].

On déduit de cette proposition que le nombre d'intersection $\int a_k^s$ est égal au cardinal de $\mathcal{Z}$, dont les éléments correspondent à des suites exactes $0 \to E_i \to \mathcal{O}_X^N \to F_i \to 0$ avec E_i et F_i stables. D'autre part si l'on introduit le sous-faisceau $S = \ker(\mathcal{O}_X^N \stackrel{\oplus u_l}{\to} \oplus_l \mathbb{C}_{x_l})$ avec $(\ker u_l)_{x_l} = H_l$, on a par construction que E_i est un sous-fibré de S ; en fait les E_i sont les sous-fibrés de S de rang k et de degré maximal. Notons F_i' le conoyau de l'inclusion $E_i \subset S$. Un argument standard montre alors que l'espace tangent de Zariski au point $(E_i, F_i) \in \mathcal{Z} \subset \mathrm{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ à l'intersection $\mathcal{Z}$ s'identifie à
$$T_{(E_i,F_i)}\mathcal{Z} \cong H^0(X, E_i^* \otimes F_i').$$
Or comme $\mathcal{Z}$ est lisse, on en déduit que $h^0(X, E_i^* \otimes F_i') = 0$. D'autre part, si $i \neq j$, on montre facilement, en utilisant la stabilité des fibrés E_i, que $h^0(X, E_i^* \otimes F_j') \neq 0$. Finalement on tensorise les deux fibrés stables E_i^* et F_i' par des fibrés en droites bien choisis (en fonction de d et M, L) et on obtient les q couples (A_i, B_i) vérifiant les conditions du théorème 3.1.

3.3. Quelques remarques

Remarque 3.4. — La coïncidence entre la dimension q calculée à partir de la formule de Verlinde et les invariants de Gromov-Witten associés à la grassmannienne $\mathrm{Gr}(k, N)$ paraît à première vue très étonnante. L'idée qui sous-tend l'égalité de la proposition 3.2 repose sur un argument de physique théorique (voir l'article de Witten [**33**]) établissant un lien entre le modèle de Wess-Zumino-Witten associé au groupe $GL(k)$ et au niveau r, c'est-à-dire l'espace des fonctions thêta généralisées d'ordre r, et le modèle sigma de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(k, N)$, c'est-à-dire les invariants de Gromov-Witten.

D'autre part, rappelons (voir par exemple [**30**]) que la combinatoire de la formule de Verlinde, dérivée des règles de factorisations de blocs conformes [**32**], est liée à la structure de l'*anneau de fusion* et de ses caractères. Dans le cas du groupe $SL(k)$ et du niveau r, l'anneau de fusion associé peut être mis en relation avec l'anneau de cohomologie quantique de la grassmannienne $\mathrm{Gr}(k, N)$. Pour d'autres groupes structuraux, par exemple $\mathrm{Sp}(k)$ ou $\mathrm{Spin}(k)$, cette relation reste mystérieuse — voir aussi section 5.2.1.

Remarque 3.5. — La dualité de Wirtinger généralisée peut être étendue aux espaces de modules de fibrés de degré quelconque ([**17**] Theorem 3).

4. LA DÉMONSTRATION DE P. BELKALE

La démonstration de la dualité étrange (Théorème 2.1) donnée par P. Belkale se fait en deux étapes : dans son premier article [**6**], antérieur à [**17**], il démontre la dualité pour une courbe générale et complète la preuve en montrant dans [**8**] que le rang de l'application SD ne varie pas avec la courbe X.

4.1. Fibrés vectoriels sur une courbe rationnelle nodale [6]

Tout d'abord P. Belkale observe — voir aussi section 3.1 — qu'il suffit de construire m couples $(E_i, F_i) \in \mathcal{SU}_X(k) \times \mathcal{U}_X^*(r)$ avec $m = h^0(\mathcal{SU}_X(k), \mathcal{L}^r) = h^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(k\Theta))$ vérifiant la condition

$$h^0(X, E_i \otimes F_j) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad i = j.$$

La construction de ces m couples est faite sur une courbe rationnelle X_0 avec g nœuds $n_1, \ldots, n_g$, ou plus précisément sur sa normalisation $\eta : \mathbb{P}^1 \to X_0$: d'abord on montre l'égalité numérique entre le nombre de Verlinde m et le nombre m' de sous-fibrés V de rang r et de degré 0 d'un fibré général T de rang N et de degré $k(g-1)$ sur $\mathbb{P}^1$ vérifiant les deux conditions suivantes pour $1 \leq l \leq g$

$$\gamma_l(V_{p_l}) \subset V_{q_l}, \qquad \text{et} \qquad \ker(\gamma_l) \subset V_{p_l},$$

où les $\gamma_l : T_{p_l} \to T_{q_l}$ sont des applications linéaires de rang $N-1$, et $p_l, q_l \in \mathbb{P}^1$ tels que $\eta(p_i) = \eta(q_i) = n_i$. L'égalité $m = m'$ est obtenue en vérifiant que ces deux nombres satisfont aux mêmes relations de récurrence — voir [**6**], section 8 ; rappelons que les blocs conformes satisfont aux règles de factorisation [**32**] qui donnent une relation entre leurs dimensions en genre g et $g-1$.

Ensuite on observe que les applications quotient $\overline{\gamma}_l : (T/V)_{p_l} \to (T/V)_{q_l}$ sont des isomorphismes, ce qui donne par recollement aux points p_l et q_l les fibrés vectoriels F_i sur X_0. Les fibrés E_i sur X_0 sont obtenus après déformation des applications linéaires γ_l. Finalement on déforme les m couples (E_i, F_i) vers une courbe lisse ; d'où la dualité pour une courbe X générale.

4.2. La connexion projectivement plate [8]

La construction de l'application de dualité étrange SD peut se faire pour une famille de courbes lisses $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} S$: il existe des fibrés vectoriels $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sur S tels que $\mathcal{V}_s \cong H^0(\mathcal{SU}_{\mathcal{X}_s}(k), \mathcal{L}^r)$ et $\mathcal{W}_s \cong H^0(\mathcal{U}^*_{\mathcal{X}_s}(r), \mathcal{O}(k\Theta))$ et un morphisme entre fibrés vectoriels

$$\mathcal{SD} : \mathcal{W}^\vee \longrightarrow \mathcal{V},$$

tel que $\mathcal{SD}_s$ coïncide avec SD (6) sur la courbe $\mathcal{X}_s$. D'autre part, ces fibrés sont munis de deux connexions $\nabla_{\mathcal{V}}$ et $\nabla_{\mathcal{W}}$ (la connexion de Hitchin [14] ou connexion WZW [32]), qui sont projectivement plates. Le résultat principal est le

THÉORÈME 4.1 ([6] Theorem 1.1). — *L'homomorphisme $\mathcal{SD}$ est horizontal.*

Un corollaire est que le rang de $\mathcal{SD}_s$ ne dépend pas de $s \in S$.

Remarque 4.2. — Le théorème précédent peut être démontré dans un contexte plus général — voir section 5.2 et [8] section 5.

5. AUTRES CAS DE DUALITÉ ÉTRANGE

Dans cette section, je présenterai quelques généralisations des théorèmes 2.1 et 2.3.

5.1. Fibrés vectoriels avec structure parabolique

Une structure parabolique sur un fibré vectoriel E de rang r est la donnée d'un nombre fini de points $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ de X, de poids dominants $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_r$ (représentés par leur tableau de Young) et de drapeaux $F_\bullet(E_{p_i})$ dans la fibre E_{p_i} de type λ_i. Rappelons que l'espace des fonctions thêta généralisées paraboliques, c'est-à-dire les sections globales d'un fibré en droites $\mathcal{L}^{par}$ sur l'espace de modules $\mathcal{SU}_X^{par}(r, \underline{p}, \underline{\lambda})$ paramétrant les fibrés paraboliques, peut être identifié [25] à l'espace des blocs conformes [32] associé à la donnée $(X, \underline{p}, \underline{\lambda})$, ce qui permet de donner leur dimension.

Un travail récent de R. Oudompheng [23] établit la dualité étrange pour fibrés paraboliques en suivant la démonstration de A. Marian et D. Oprea. Si l'on note λ^T le tableau de Young conjugué de λ, on observe que, pour $(E, F) \in \mathcal{SU}_X^{par}(r, \underline{p}, \underline{\lambda}) \times \mathcal{U}_X^{par}(k, \underline{p}, \underline{\lambda}^T)$, la condition $h^0(X, \mathrm{Hom}^{par}(E, F)) \neq 0$, où $\mathrm{Hom}^{par}(E, F)$ désigne le faisceau des homomorphismes compatibles avec les structures paraboliques sur E et F, détermine un diviseur dans le produit et par conséquent une application linéaire

$$SD^{par} : H^0(\mathcal{U}_X^{par}(k, \underline{p}, \underline{\lambda}^T), \mathcal{L}^{par})^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{SU}_X^{par}(r, \underline{p}, \underline{\lambda}), \mathcal{L}^{par}),$$

qui est un isomorphisme [23].

Remarquons que la proposition 3.2 a un analogue parabolique, qui identifie le nombre de Verlinde parabolique à un nombre d'intersection dans $\mathrm{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ associé aux variétés de Schubert de type λ_i dans $\mathrm{Gr}(k, N)$.

5.2. G-fibrés principaux

La formule de Verlinde est démontrée en fait pour les espaces de modules de G-fibrés principaux sur une courbe X — voir par exemple [**30**]. On suppose que G est un groupe de Lie complexe, simple et simplement connexe. Afin d'avoir des théorèmes d'uniformisation des G-fibrés principaux et une description commode des fibrés en droites sur les espaces de modules, on travaille sur le *champ* de modules $\mathcal{M}_X(G)$ paramétrant les G-fibrés principaux sur X. On sait que le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_X(G))$ est $\mathbb{Z}$ et on note $\mathcal{L}_G$ son générateur ample. La formule de Verlinde (par exemple [**30**] Théorème 4.2.2) donne alors la dimension

$$N_k(G) := \dim H^0(\mathcal{M}_X(G), \mathcal{L}_G^k).$$

5.2.1. *Groupes classiques.* — Motivés par les relations (4) et (5), W.M. Oxbury et S.M.J. Wilson [**24**] étudient les symétries rang-niveau de la formule de Verlinde pour les groupes classiques. Pour les groupes symplectiques, ils montrent que $N_k(\mathrm{Sp}(2r)) = N_r(\mathrm{Sp}(2k))$. Par ailleurs, en utilisant une construction pfaffienne du diviseur thêta généralisé pour fibrés orthogonaux [**4**], on peut construire une application linéaire

$$SD^{Sp} : H^0(\mathcal{M}_X(\mathrm{Sp}(2r)), \mathcal{L}^k)^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{M}_X(\mathrm{Sp}(2k)), \mathcal{L}^r).$$

Les travaux récents de T. Abe [**2**], [**1**] et P. Belkale [**7**] montrent que SD^{Sp} est un isomorphisme.

Pour les groupes $\mathrm{Spin}(2m)$ et $\mathrm{Spin}(2m+1)$, certaines symétries rang-niveau sont formulées dans [**24**], mais une construction générale d'une dualité SD^{Spin} fait (à ce jour) défaut. Mentionnons une première approche [**26**], qui établit un isomorphisme

$$H^0(\mathcal{M}_X(\mathrm{Spin}(2m+1)), \mathcal{L}^2)^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{M}_X(\mathrm{Pin}(2)), \mathcal{L}^{2m+1})_+,$$

où l'espace de modules $\mathcal{M}_X(\mathrm{Pin}(2))$ peut être identifié à la réunion de toutes les variétés de Prym des revêtements étales doubles de X.

5.2.2. *Groupes exceptionnels.* — Dans le cadre des groupes exceptionnels, il est possible de construire certaines applications de type « dualité étrange » en imitant la construction de l'application SD pour les groupes $\mathrm{SL}(k)$ et $\mathrm{GL}(r)$. On part de l'observation suivante [**31**] : pour le groupe exceptionnel E_8, la formule de Verlinde donne $\dim H^0(\mathcal{M}_X(E_8), \mathcal{L}_{E_8}) = 1$, ce qui entraîne l'existence d'un diviseur thêta $\Theta_{E_8} \subset \mathcal{M}_X(E_8)$ distingué, qu'on peut considérer comme un analogue du diviseur thêta généralisé $\Theta \subset \mathcal{U}_X^*(r)$. D'autre part, le groupe E_8 possède plusieurs couples (A, B) de sous-groupes commutants, par exemple :

$$(\mathrm{SL}(2), E_7), \qquad (\mathrm{SL}(3), E_6), \qquad (G_2, F_4), \qquad (\mathrm{Spin}(8), \mathrm{Spin}(8)).$$

Il existe alors un morphisme entre champs de modules

$$t : \mathcal{M}_X(A) \times \mathcal{M}_X(B) \longrightarrow \mathcal{M}_X(E_8),$$

et, si (A, B) est l'un des quatre couples précédents, le diviseur $t^*(\Theta_{E_8})$ détermine une application linéaire

$$SD : H^0(\mathcal{M}_X(A), \mathcal{L}_A)^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{M}_X(B), \mathcal{L}_B) \tag{8}$$

entre espaces vectoriels de même dimension [**11**]. On conjecture que SD est un isomorphisme.

Remarque 5.1. — Il est intéressant de constater que les quatre cas de sous-groupes (A, B) donnent des *plongements conformes* — voir par exemple [**28**] — entre leurs algèbres de Lie associées $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \subset \mathfrak{e}_8$. D'autre part, en s'appuyant sur l'article [**22**], P. Belkale a montré ([**8**] Proposition 5.8) que pour tout plongement conforme $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ le morphisme induit par ce plongement entre les fibrés vectoriels des fonctions thêta généralisées associées aux groupes de Lie H et G et munies des connexions WZW est horizontal, ce qui prouve en particulier que le rang de l'application SD (8) ne dépend que du genre de la courbe X. On peut donc espérer que tout plongement conforme, dont la classification complète est faite dans [**28**], Tables I et II, donne lieu à des tenseurs intéressants entre espaces de fonctions thêta généralisées.

RÉFÉRENCES

[1] T. Abe – Strange duality for parabolic symplectic bundles on a pointed projective line, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2008), art. ID rnn121.

[2] ———, Degeneration of the strange duality map for symplectic bundles, à paraître dans *J. reine angew. Math.*

[3] A. Beauville – Vector bundles on curves and generalized theta functions : recent results and open problems, in *Current topics in complex algebraic geometry (Berkeley, CA, 1992/93)*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 28, Cambridge Univ. Press, 1995, p. 17–33.

[4] ———, Orthogonal bundles on curves and theta functions, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **56** (2006), p. 1405–1418.

[5] A. Beauville, M. S. Narasimhan & S. Ramanan – Spectral curves and the generalised theta divisor, *J. reine angew. Math.* **398** (1989), p. 169–179.

[6] P. BELKALE – The strange duality conjecture for generic curves, *J. Amer. Math. Soc.* **21** (2008), p. 235–258.

[7] ———, Orthogonal bundles, theta characteristics and the symplectic strange duality, prépublication arXiv:0808.0863.

[8] ———, Strange duality and the Hitchin/WZW connection, prépublication arXiv:0705.0717.

[9] A. BERTRAM – Towards a Schubert calculus for maps from a Riemann surface to a Grassmannian, *Internat. J. Math.* **5** (1994), p. 811–825.

[10] A. BERTRAM, G. DASKALOPOULOS & R. WENTWORTH – Gromov invariants for holomorphic maps from Riemann surfaces to Grassmannians, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), p. 529–571.

[11] A. BOYSAL & C. PAULY – Strange duality for verlinde spaces of exceptional groups at level 1, prépublication, 2008.

[12] R. DONAGI & L. W. TU – Theta functions for $\mathrm{SL}(n)$ versus $\mathrm{GL}(n)$, *Math. Res. Lett.* **1** (1994), p. 345–357.

[13] J.-M. DREZET & M. S. NARASIMHAN – Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques, *Invent. Math.* **97** (1989), p. 53–94.

[14] N. J. HITCHIN – Flat connections and geometric quantization, *Comm. Math. Phys.* **131** (1990), p. 347–380.

[15] S. L. KLEIMAN – The transversality of a general translate, *Compositio Math.* **28** (1974), p. 287–297.

[16] J. LE POTIER – *Lectures on vector bundles*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 54, Cambridge University Press, 1997.

[17] A. MARIAN & D. OPREA – The level-rank duality for non-abelian theta functions, *Invent. Math.* **168** (2007), p. 225–247.

[18] ———, Virtual intersections on the Quot scheme and Vafa-Intriligator formulas, *Duke Math. J.* **136** (2007), p. 81–113.

[19] ———, A tour of theta dualities on moduli spaces of sheaves, prépublication arXiv:0710.2908.

[20] D. MUMFORD – Prym varieties. I, in *Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers)*, Academic Press, 1974, p. 325–350.

[21] S. G. NACULICH & H. J. SCHNITZER – Duality relations between $\mathrm{SU}(N)_k$ and $\mathrm{SU}(k)_N$ WZW models and their braid matrices, *Phys. Lett. B* **244** (1990), p. 235–240.

[22] T. NAKANISHI & A. TSUCHIYA – Level-rank duality of WZW models in conformal field theory, *Comm. Math. Phys.* **144** (1992), p. 351–372.

[23] R. OUDOMPHENG – Rank-level duality for conformal blocks of GL_n and SL_n, prépublication arXiv:0805.1738.

[24] W. M. OXBURY & S. M. J. WILSON – Reciprocity laws in the Verlinde formulae for the classical groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), p. 2689–2710.

[25] C. PAULY – Espaces de modules de fibrés paraboliques et blocs conformes, *Duke Math. J.* **84** (1996), p. 217–235.

[26] C. PAULY & S. RAMANAN – A duality for spin Verlinde spaces and Prym theta functions, *J. London Math. Soc.* **63** (2001), p. 513–532.

[27] M. POPA – Generalized theta linear series on moduli spaces of vector bundles on curves, prépublication arXiv:0712.3192.

[28] A. N. SCHELLEKENS & N. P. WARNER – Conformal subalgebras of Kac-Moody algebras, *Phys. Rev. D* **34** (1986), p. 3092–3096.

[29] B. SIEBERT & G. TIAN – On quantum cohomology rings of Fano manifolds and a formula of Vafa and Intriligator, *Asian J. Math.* **1** (1997), p. 679–695.

[30] C. SORGER – La formule de Verlinde, *Astérisque* **237** (1996), p. 87–114, Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95, exposé n° 794.

[31] ______, On moduli of G-bundles of a curve for exceptional G, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **32** (1999), p. 127–133.

[32] A. TSUCHIYA, K. UENO & Y. YAMADA – Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries, in *Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 19, Academic Press, 1989, p. 459–566.

[33] E. WITTEN – The Verlinde algebra and the cohomology of the Grassmannian, in *Geometry, topology, & physics*, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, p. 357–422.

Christian PAULY

Université de Montpellier II
Département de mathématiques
Case Courrier 051
Place Eugène Bataillon
F-34095 Montpellier Cedex 5
E-mail : pauly@math.univ-montp2.fr