PETER HAÏSSINSKY

Géométrie quasiconforme, analyse au bord des espaces métriques hyperboliques et rigidités [d'après Mostow, Pansu, Bourdon, Pajot, Bonk, Kleiner...]

Astérisque, tome 326 (2009), Séminaire Bourbaki, exp. n^o 993, p. 321-362

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__326__321_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 2008
60e année, 2007–2008, n° 993, p. 321 à 362

GÉOMÉTRIE QUASICONFORME, ANALYSE AU BORD DES ESPACES MÉTRIQUES HYPERBOLIQUES ET RIGIDITÉS
[d'après Mostow, Pansu, Bourdon, Pajot, Bonk, Kleiner...]

par **Peter HAÏSSINSKY**

Dans son *Mémoire sur les groupes kleinéens*, H. Poincaré montre qu'une homographie de la sphère de Riemann se prolonge en une transformation conforme de l'espace et définit une isométrie de l'espace hyperbolique. Il établit ainsi un lien entre la géométrie conforme et la géométrie hyperbolique en soulignant que cette interprétation lui est indispensable pour construire des groupes kleinéens.

Un des buts de cet exposé est de montrer comment cette relation très profonde se manifeste dans le contexte plus général des groupes hyperboliques au sens de M. Gromov [**34**]. On appliquera ce point de vue pour mettre en évidence des phénomènes de rigidité en courbure strictement négative et en donner des preuves synthétiques.

1. INTRODUCTION

Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est *propre* si les boules fermées (de rayon fini) sont compactes. Une courbe *géodésique* dans X est une application $\gamma : I \to X$ définie sur un intervalle I telle que, pour tous $s, t \in I$, $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t-s|$. Si deux points quelconques de X sont joints par un segment géodésique, alors X est un *espace géodésique.*

Définition 1.1 (Action géométrique). — *Un groupe G* opère géométriquement *sur un espace métrique propre X si*

(1) *chaque élément opère par isométrie ;*

(2) *l'action est proprement discontinue, c'est-à-dire que, pour tous compacts K et L de X, le nombre d'éléments $g \in G$ du groupe tels que $g(K) \cap L \neq \emptyset$ est fini;*

(3) *l'action est cocompacte.*

Par exemple, si G est de type fini et S est une famille finie et symétrique de générateurs de G, on peut considérer le graphe de Cayley $\mathcal{G}$ associé à S : les sommets sont les éléments du groupe, et une paire $(g, g') \in G \times G$ définit une arête si $g^{-1}g' \in S$.

En munissant $\mathscr{G}$ de la métrique de longueur qui rend chaque arête isométrique au segment $[0,1]$, on obtient la *métrique des mots associée à* S. Elle fait de $\mathscr{G}$ un espace géodésique et propre, et l'action de G sur lui-même par translations à gauche induit une action géométrique sur $\mathscr{G}$.

Le lemme de Švarc-Milnor montre que la relation d'équivalence naturelle des groupes qui opèrent géométriquement est donnée par la notion de quasi-isométrie, introduite sous cette forme par G. Margulis [**52**].

Définition 1.2 (Quasi-isométrie, quasigéodésique). — *Soient X, Y des espaces métriques, et $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$ deux constantes. Une application $f : X \to Y$ est un* plongement (λ, c)-quasi-isométrique *si, pour tous $x, x' \in X$, on a*

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x,x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x,x') + c. \tag{1}$$

On dit que f est une (λ, c)-quasi-isométrie *s'il existe $g : Y \to X$ qui vérifie aussi* (1) *et telle que, pour tout $x \in X$, $d_X(g(f(x)), x) \leq c$.*

Une quasigéodésique est l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par un plongement quasi-isométrique.

Lemme 1.3 (Švarc-Milnor). — *Soient X un espace géodésique et propre, et G un groupe qui opère géométriquement sur X. Alors G est de type fini et X est quasi-isométrique à n'importe quel graphe de Cayley localement fini de G.*

On dira par extension qu'un espace est quasi-isométrique à un groupe s'il est quasi-isométrique à l'un de ses graphes de Cayley localement fini.

Un *triangle* de X est la donnée de trois points et de trois segments géodésiques qui les relient.

Définition 1.4 (Espace et groupe hyperboliques). — *Un espace géodésique propre (X, d) est* hyperbolique *s'il existe une constante δ telle que n'importe quel côté d'un triangle est contenu dans le δ-voisinage des deux autres. Un groupe est* hyperbolique *s'il opère géométriquement sur un espace hyperbolique, propre et géodésique.*

L'hyperbolicité d'un espace s'exprime notamment par le *lemme de poursuite* de M. Morse qui affirme que toute quasigéodésique d'un espace hyperbolique est à distance finie d'une géodésique. Cela implique que la propriété d'hyperbolicité est invariante par quasi-isométries dans la catégorie des espaces métriques géodésiques.

Une classe importante d'espaces hyperboliques est celle des espaces CAT(-1) : leurs triangles sont plus fins que ceux du plan hyperbolique de Poincaré $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$. Elle comprend notamment les variétés de Hadamard de courbure sectionnelle majorée par -1.

Un *rayon* est une géodésique définie sur $\mathbb{R}_+$. Deux rayons d'un espace hyperbolique X sont équivalents s'ils sont à distance de Hausdorff finie. Suivant P. Eberlein et B. O'Neill [**30**], on définit le *bord visuel* (compact) ∂X d'un espace hyperbolique comme l'ensemble des classes de rayons hyperboliques. Il est naturellement muni d'une structure grossièrement conforme qui est préservée par les isométries de X. Les propriétés du bord d'un espace hyperbolique sont établies en utilisant la dynamique à l'infini de ses isométries. Dans le cas des espaces symétriques non compacts de rang 1 et des immeubles fuchsiens, la géométrie de leur bord s'avère être très particulière. Elle est en partie responsable de la rigidité de ces espaces, et plus précisément à l'origine des solutions aux problèmes suivants.

(1) Détermination des variétés compactes localement symétriques de rang 1 par leur groupe fondamental (G.D. Mostow).
(2) Rigidité des espaces symétriques de rang 1 quaternioniens et du plan de Cayley (P. Pansu) ; de même pour les immeubles fuchsiens (M. Bourdon et H. Pajot, et X. Xie).
(3) Caractérisation des réseaux cocompacts de $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *via* leurs bords (J. Cannon *et al.* et M. Bonk et B. Kleiner).

Ces notes contiennent tous les ingrédients pour établir la rigidité des réseaux cocompacts des espaces symétriques hyperboliques et des immeubles fuchsiens :

THÉORÈME 1.5. — *Un groupe quasi-isométrique à un espace symétrique hyperbolique de dimension topologique au moins* 3 *ou à un immeuble fuchsien agit géométriquement sur l'espace symétrique ou l'immeuble fuchsien en question.*

AVERTISSEMENT.— La thématique que nous abordons ici est en pleine expansion, et des choix sont obligatoirement faits. Ils le sont en fonction du goût de l'auteur, en espérant toutefois qu'ils reflètent bien l'état d'esprit du sujet. En particulier, les énoncés ne seront pas toujours les plus généraux. Signalons aussi que les arguments présentés ici sont empruntés à beaucoup d'auteurs. Étant simplifiés à l'extrême et souvent plus récents que les arguments originaux, ils peuvent sembler ne pas rendre hommage au travail présenté ici tels qu'ils le devraient.

Nous renvoyons à [**1, 28, 32, 34**] au sujet des groupes hyperboliques. On peut consulter [**45**] pour les propriétés de leur bord, et [**3, 15, 47**] pour les liens entre géométrie hyperbolique, géométrie quasiconforme et dynamique conforme.

CONVENTIONS.— Tous les espaces hyperboliques seront supposés géodésiques et propres non bornés, avec un bord connexe non trivial. Si X est hyperbolique, $\mathrm{Isom}(X)$ désignera le groupe d'isométries de X muni de la topologie compacte-ouverte, ce qui le rend localement compact. Un réseau cocompact est dans ce contexte un sous-groupe discret cocompact. Si $p \geq 2$ et X est hyperbolique, on désigne par $\partial^p X$ l'ensemble des p-uplets non ordonnés du bord de X deux à deux distincts.

Si a, b sont des fonctions à valeurs positives, on écrit $a \lesssim b$ ou $b \gtrsim a$ s'il existe une constante universelle $u > 0$ telle que $a \leq ub$. On écrit $a \asymp b$ si $a \lesssim b$ et $b \lesssim a$.

REMERCIEMENTS.— Je tiens tout particulièrement à remercier M. Bourdon, H. Pajot et P. Pansu pour m'avoir expliqué avec beaucoup de patience et de gentillesse leurs travaux. Je les remercie aussi, ainsi que C. Pittet, pour leur lecture attentive de versions préliminaires de ce texte.

2. NOTIONS DE GÉOMÉTRIE QUASICONFORME

On présente quelques notions de géométrie quasiconforme qui seront motivées par la théorie géométrique des fonctions de l'espace euclidien.

2.1. Du conforme au quasiconforme

Les homéomorphismes quasiconformes sont obtenus en assouplissant certaines propriétés des transformations conformes. On obtient ainsi plusieurs variantes. On s'appuie essentiellement sur [**42**, **71**].

2.1.1. *Quasisymétrie.* — Une transformation conforme du plan complexe (qui préserve l'orientation) est une transformation affine $z \mapsto az + b$, avec $a \neq 0$. Sa propriété principale est de préserver les rapports de distances. P. Tukia et J. Vaïsälä assouplissent cette condition comme suit [**68**].

DÉFINITION 2.1 (Homéomorphisme quasisymétrique). — *Soit $f : (X, d) \to (X', d')$ un homéomorphisme entre espaces métriques. Étant donné un homéomorphisme $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, on dit que f est* η-quasisymétrique *si, pour tous x, y, z tels que $d(x, y) \leq td(x, z)$, on a $d'(fx, fy) \leq \eta(t)d'(fx, fz)$. On dira tout simplement que f est quasisymétrique s'il existe η telle que la relation ci-dessus soit vraie. La fonction η est une* fonction de distorsion *de f.*

Si f est un homéomorphisme η-quasisymétrique alors f^{-1} est η'-quasisymétrique avec $\eta'(t) = 1/\eta^{-1}(1/t)$. Si f est L-bilipschitz alors f est quasisymétrique avec $\eta(t) = L^2 t$.

Cette condition est forte car elle implique de la distorsion bornée, comme le théorème de Koebe pour les applications univalentes [**42**, Prop. 10.8] :

LEMME 2.2. — *Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme η-quasisymétrique. Si $A \subset B$ avec* diam $B < \infty$, *alors* diam $f(B) < \infty$ *et*

$$\frac{1}{2\eta\left(\frac{\operatorname{diam} B}{\operatorname{diam} A}\right)} \leq \frac{\operatorname{diam} f(A)}{\operatorname{diam} f(B)} \leq \eta\left(2\frac{\operatorname{diam} A}{\operatorname{diam} B}\right).$$

On en déduit facilement un théorème de compacité.

THÉORÈME 2.3. — *Soient (X, x_0), (Y, y_0), des espaces métriques propres marqués, η un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}_+$, et $\mathcal{F}$ la famille d'applications η-quasiymétriques $f : X \to Y$ telles que $f(x_0) = y_0$ et telles qu'il existe un point $x_0' \neq x_0$ et une constante $M < \infty$ tels que, pour tout $f \in \mathcal{F}$, on ait $(1/M) \leq |f(x_0) - f(x_0')| \leq M$. Alors $\mathcal{F}$ est une famille compacte.*

2.1.2. *Birapports.* — Une transformation conforme de la sphère de Riemann (qui préserve l'orientation) est une homographie. Sa propriété principale est de préserver les birapports. Si X est un espace métrique, et a, b, c, d sont quatre points distincts, on pose

$$[a : b : c : d] = \frac{|a-b|}{|a-c|} \cdot \frac{|c-d|}{|b-d|}.$$

J. Vaïsälä introduit la classe suivante [**72**].

DÉFINITION 2.4 (Transformation quasimöbius). — *Une application $f : X \to X'$ est η-*quasimöbius *s'il existe un homéomorphisme $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $a, b, c, d \in X$ deux à deux distincts, on ait*

$$[f(a) : f(b) : f(c) : f(d)] \leq \eta\left([a : b : c : d]\right).$$

M. Bonk et B. Kleiner proposent l'interprétation suivante du birapport : si x_1, x_2, x_3, x_4 sont quatre points distincts de X, on définit

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle = \frac{\min\{|x_1 - x_2|, |x_3 - x_4|\}}{\min\{|x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|\}}.$$

Alors

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \leq \eta_0([x_1 : x_2 : x_3 : x_4]) \quad \text{et} \quad [x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \leq \eta_1(\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle)$$

où $\eta_0(t) = t + \sqrt{t^2 + t}$ et $\eta_1(t) = t(2+t)$.

Il vient

THÉORÈME 2.5 (J. Väisälä,[**72**]). — (i) *Une application quasisymétrique est quasimöbius quantitativement.*

(ii) *Une application quasimöbius est localement quasisymétrique quantitativement.*

(iii) *Soit $f : X \to Y$ une application quasimöbius. Si X et Y sont non bornés, alors f est quasisymétrique, et ce, quantitativement, si et seulement si $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini. Si X et Y sont bornés et si, pour trois points*

$z_1, z_2, z_3 \in X$, on a $|z_i - z_j| \geq \operatorname{diam} X/\lambda$ et $|f(z_i) - f(z_j)| \geq \operatorname{diam} Y/\lambda$ pour un $\lambda > 0$, alors f est η-quasisymétrique, où η ne dépend que de λ et du contrôle de la distorsion des birapports.

Le point (iii) et le théorème 2.3 nous fournissent directement un théorème de compacité.

2.2. Modules de courbes

Un principe de L. Ahlfors et A. Beurling exprime que tout invariant conforme est une fonction du module d'une famille de courbes bien choisies. Nous en verrons plusieurs illustrations.

Une courbe γ dans (X, d) est une application continue d'un intervalle compact I de $\mathbb{R}$ dans X. On peut, comme dans les espaces euclidiens, définir la longueur de γ par

$$\ell(\gamma) = \sup \sum_{0 \leq j < n} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1}))$$

où le supremum est pris sur toutes les subdivisions $(t_j)_{0 \leq j \leq n}$ de I telles que $[t_0, t_n] = I$. Si cette longueur $\ell(\gamma)$ est finie, on dira que la courbe est *rectifiable.* Dans ce cas, on peut paramétrer γ par la longueur d'arc $\gamma_s : [0, \ell(\gamma)] \to X$ et pour toute fonction borélienne $\rho : X \to [0, \infty]$, on définit

$$\int_\gamma \rho ds = \int_0^{\ell(\gamma)} \rho \circ \gamma_s(t) dt.$$

DÉFINITION 2.6 (Module de familles de courbes). — *Soient (X, μ) un espace métrique mesuré, Γ une famille de courbes de X et $p > 1$ un réel. On définit le* p-module *de Γ par*

$$\operatorname{mod}_p \Gamma = \inf \int_X \rho^p d\mu$$

où l'infimum est pris sur toutes les métriques *(dites admissibles) $\rho : X \to [0, \infty]$ telles que, pour toute courbe rectifiable $\gamma \in \Gamma$, $\int_\gamma \rho ds \geq 1$.*

Donnons quelques propriétés élémentaires du module.

(1) $\operatorname{mod}_p(\varnothing) = 0$;

(2) si $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, $\operatorname{mod}_p \Gamma_1 \leq \operatorname{mod}_p \Gamma_2$;

(3) $\operatorname{mod}_p \bigcup_{i=1}^\infty \Gamma_i \leq \sum_{i=1}^\infty \operatorname{mod}_p \Gamma_i$;

(4) si Γ_1 et Γ_2 sont deux familles de courbes telles que toute courbe γ_1 dans Γ_1 possède une sous-courbe $\gamma_2 \in \Gamma_2$, alors $\operatorname{mod}_p \Gamma_1 \leq \operatorname{mod}_p \Gamma_2$.

Les modules mod_p définissent donc une famille de mesures extérieures sur les familles de courbes. D'après ci-dessus, le module d'une famille de courbes ne dépend que de ses courbes rectifiables, et si $\Gamma_0 \subset \Gamma$ est de module nul, alors $\mathrm{mod}_p\Gamma = \mathrm{mod}_p\Gamma \setminus \Gamma_0$.

Il suffit en général de se restreindre aux familles de courbes suivantes.

DÉFINITION 2.7 (Condensateurs et capacités). — *Si X est un espace topologique, un* condensateur *est défini par une paire de continua disjoints $\{E, F\}$. On note $\Gamma(E, F)$ la famille des courbes qui joignent E et F. On définit la p-*capacité *du condensateur par*

$$\mathrm{cap}_p(E, F) = \mathrm{mod}_p(E, F) = \mathrm{mod}_p\Gamma(E, F)\,.$$

Dans un espace de dimension Q, le module mod_Q tient un rôle particulier car c'est un invariant conforme :

PROPOSITION 2.8. — *Soit $f : M \to M'$ un difféomorphisme conforme entre deux variétés riemanniennes de dimension $Q > 1$. Si Γ est une famille de courbes sur M et $f(\Gamma)$ désigne la famille $\{f(\gamma), \gamma \in \Gamma\}$, alors*

$$\mathrm{mod}_Q\Gamma = \mathrm{mod}_Q f(\Gamma)\,.$$

Démonstration. — Si ρ' est une métrique admissible pour $f(\Gamma)$, on définit

$$\rho = \rho' \circ f \cdot \|Df\|\,.$$

On obtient par changement de variables et du fait que le jacobien d'une transformation conforme est la puissance Q-ième de la norme de sa dérivée :

$$\mathrm{mod}_Q\Gamma \leq \int_M \rho^Q = \int_{M'} (\rho')^Q$$

donc $\mathrm{mod}_Q\Gamma \leq \mathrm{mod}_Q f(\Gamma)$ et on conclut par symétrie. □

DÉFINITION 2.9 (Homéomorphisme quasiconforme). — *On dit qu'un homéomorphisme $f : X \to X'$ entre espaces de dimension Q est* quasiconforme *s'il existe une constante K telle que, pour toute famille de courbes Γ de X,*

$$\frac{1}{K}\mathrm{mod}_Q\Gamma \leq \mathrm{mod}_Q f(\Gamma) \leq K\mathrm{mod}_Q\Gamma\,.$$

La proposition suivante illustre bien la manière d'utiliser les modules : les capacités imposent des contraintes géométriques sur les condensateurs ; les homéomorphismes quasiconformes permettent alors de confronter différentes configurations.

PROPOSITION 2.10. — *Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ un homéomorphisme quasiconforme. Alors il existe une constante $H < \infty$ telle que, si $|x - y| \leq |x - z|$, alors*

$$|f(x) - f(y)| \leq H|f(x) - f(z)|\,.$$

Démonstration. — On se ramène au cas où aucun des trois points x, y, z n'est à l'infini, ce qui nous permet de travailler avec la métrique euclidienne. Supposons qu'il existe $H \geq 10$ telle que $|f(x) - f(y)| = H|f(x) - f(z)|$. On choisit pour E' le segment $[f(x), f(z)]$ et pour F' une demi-droite issue de $f(y)$ qui va à l'infini de sorte que $\operatorname{dist}(E', F') = |f(z) - f(y)|$. On note Γ' la famille des courbes qui joignent E' à F' dont on évalue le n-module en considérant $\rho(w) = 1/|x - w|$. Pour chaque courbe, on a

$$\int \rho \geq \log H$$

et on a aussi

$$\int \rho^n \leq C \cdot \log H$$

donc

$$\mathrm{mod}_n \Gamma' \leq C \log H^{1-n} .$$

Par ailleurs, $\Gamma = f^{-1}(\Gamma')$ est la famille des courbes qui joignent $E = f^{-1}(E')$ à $F = f^{-1}(F')$. On remarque que $\operatorname{dist}(E, F) \leq 2 \operatorname{diam} E$; un résultat de C. Loewner implique l'existence d'une constante m telle que $\mathrm{mod}_n \Gamma \geq m > 0$ [**51**]. On obtient ainsi

$$m \leq \mathrm{mod}_n \Gamma \leq K \mathrm{mod}_n \Gamma' \leq KC \log H^{1-n},$$

ce qui permet de conclure. □

2.3. Propriétés analytiques

Dans la sphère $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, les homéomorphismes quasimöbius, quasisymétriques et quasiconformes représentent la même classe.

On a de plus les propriétés suivantes :

THÉORÈME 2.11. — *Un homéomorphisme quasiconforme de la sphère $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, est*

(1) *absolument continu, c'est-à-dire qu'il préserve les ensembles de mesure nulle,*

(2) *absolument continu sur presque toute courbe, c'est-à-dire que le n-module des courbes dont l'image n'est pas absolument continue est nul,*

(3) *différentiable presque partout.*

Ces propriétés ont d'abord été établies en dimension 2 après une longue succession d'étapes. L. Ahlfors, L. Bers, F. Gehring, A. Mori, A. Pfluger et K. Strebel y ont contribué. En dimension 3, on les attribue à F. Gehring et J. Väisälä. Elles sont ensuite généralisées par G.D. Mostow en toute dimension. La différentiation des homéomorphismes quasiconformes découle d'un théorème de Stepanov en toute dimension (un argument de F. Gehring et O. Lehto permet de s'en passer en dimension 2).

2.4. Espaces de Loewner

J. Heinonen et P. Koskela ont développé une théorie des homéomorphismes quasi conformes dans certains espaces métriques mesurés, qualifiés de Loewner, dans lesquels le type de raisonnement de la proposition 2.10 s'applique [**43**]. On définit ici une classe un peu plus restrictive d'espaces de Loewner (en imposant la condition (2)). Si (E, F) est un condensateur, sa *distance relative* $\Delta(E, F)$ se définit par la formule

$$\Delta(E, F) = \frac{\operatorname{dist}(E, F)}{\min\{\operatorname{diam} E, \operatorname{diam} F\}},$$

quantité quasi-invariante par les homéomorphismes quasimöbius.

DÉFINITION 2.12 (Espace loewnesque). — *Un espace métrique mesuré (X, d, μ) est un espace* loewnesque *s'il existe une dimension $Q > 1$ telle que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :*

(1) CONDITION DE LOEWNER. *Il existe une fonction décroissante $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour chaque condensateur (E, F),*

$$\operatorname{mod}_Q(E, F) \geq \psi(\Delta(E, F)).$$

(2) AHLFORS-RÉGULARITÉ. *(X, d, μ) est Q-*Ahlfors-régulier*, c'est-à-dire que, pour toute boule $B(R)$ de rayon $R \in \,]0, \operatorname{diam} X]$, on a $\mu(B(R)) \asymp R^Q$.*

Le point (2) permet d'obtenir des bornes supérieures sur les Q-modules comme dans la preuve de la proposition 2.10. Le point (1) impose des bornes inférieures.

C. Loewner a démontré que la capacité d'un condensateur non dégénéré de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, est toujours non nulle [**51**]. Cette propriété implique ensuite la condition qualifiée de Loewner ci-dessus. À l'origine de cette condition dans un contexte non-riemannien, H.-M. Reimann a aussi établi cette propriété dans les groupes de Heisenberg [**60**].

Notons qu'un espace loewnesque a de bonnes propriétés de connexité. Par exemple on a la propriété suivante, cruciale pour construire le condensateur (E', F') dans la proposition 2.10.

DÉFINITION 2.13 (Connexité locale linéaire). — *Un espace métrique X est* linéairement localement connexe *s'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in X$, tout $r > 0$, on ait :*

(1) *tout couple de points dans $B(x, r)$ appartient à un continuum contenu dans $B(x, Cr)$;*

(2) *tout couple de points dans $X \setminus \overline{B(x, r)}$ appartient à un continuum contenu dans $X \setminus \overline{B(x, (1/C)r)}$.*

Remarque 2.14. — En général, on montre qu'un espace Q-régulier est loewnesque en montrant qu'il vérifie une inégalité de type « Poincaré ». Ce lien entre les minorations des capacités et des inégalités de Poincaré a été mis en évidence par J. Heinonen [**41**]. N'en faisant pas un usage explicite dans ces notes, on peut consulter [**42, 43**] et les références qui s'y trouvent.

Les inégalités de Poincaré servent aussi de point de départ à J. Cheeger pour élaborer un calcul différentiel dans des espaces métriques [**24**]. Cette théorie semble avoir des applications prometteuses aux groupes hyperboliques [**47**].

Les espaces de Loewner sont suffisamment réguliers pour obtenir les propriétés suivantes.

THÉORÈME 2.15. — *Soient X un espace Q-loewnesque compact, $f : X \to Y$ un homéomorphisme sur un espace Q-régulier linéairement localement connexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *f est quasisymétrique,*

(2) *f est quasimöbius,*

(3) *f est quasiconforme pour le Q-module.*

Si l'une de ces propriétés est satisfaite, alors f est absolument continu et absolument continu sur Q-presque toute courbe de X, et Y est loewnesque.

Ce théorème synthétise plusieurs résultats, voir [**43, 44, 69, 70**]. G.D. Mostow est le premier à avoir étudié ces propriétés de continuité absolue dans un cadre non riemannien, c'est-à-dire au bord des espaces symétriques non compact de rang 1 [**56**]. L'état actuel des propriétés des homéomorphismes quasisymétriques se trouvent dans [**2**].

3. GÉOMÉTRIES HYPERBOLIQUE/QUASICONFORME

Un espace hyperbolique a la propriété de visibilité, c'est-à-dire que deux rayons non équivalents peuvent être approchés par une même géodésique en temps positif et négatif. Étant donné un point-base $w \in X$, une *métrique visuelle* vue de w et de paramètre $\varepsilon > 0$ est une distance d_ε sur ∂X telle que $d_\varepsilon(a,b)$ est comparable à $e^{-\varepsilon[a|b]_w}$, où $[a|b]_w = \inf d(w,]a,b[)$ et l'infimum est pris sur toutes les géodésiques joignant a et b. Il existe toujours des métriques visuelles pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

3.1. Structure quasiconforme au bord d'un espace hyperbolique

THÉORÈME 3.1. — *Une (λ, c)-quasi-isométrie $\Phi : X \to Y$ entre espaces hyperboliques se prolonge continûment en un homéomorphisme $\phi : \partial X \to \partial Y$ et, si d_X et d_Y sont des métriques visuelles de paramètre $\varepsilon_X, \varepsilon_Y$, alors il existe $C = C(\lambda, c, \varepsilon_X/\varepsilon_Y) > 0$ et $\alpha = \alpha(\lambda, c, \varepsilon_X/\varepsilon_Y) \geq 1$ telle que ϕ est η-quasimöbius, avec $\eta(t) = C \cdot \max\{t^\alpha, t^{1/\alpha}\}$.*

Si Φ est une isométrie et si $\varepsilon_X = \varepsilon_Y$, alors on peut choisir $\alpha = 1$.

Dans un arbre, on a $[a|b]_w = (1/2)(|w-a| + |w-b| - |a-b|)$ et la formule $e^{-[a|b]_w}$ définit une distance sur son bord. Si a, b, c, d sont quatre points au bord, leur configuration est essentiellement l'une des deux suivantes :

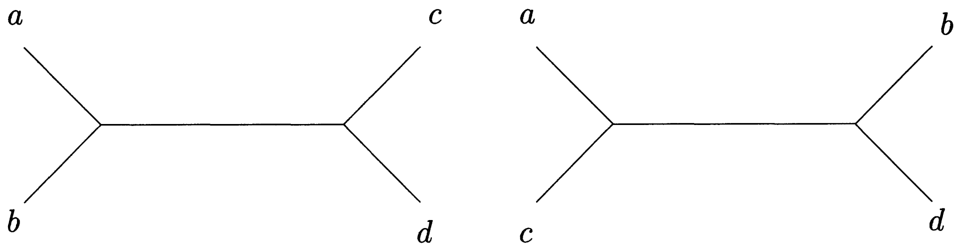

FIGURE 1. Configurations de quatre points dans un arbre

Dans un arbre donc, le logarithme du birapport $[a : b : c : d]$ correspond à la distance entre les segments géodésiques $[a, b]$ et $[c, d]$ au signe près. Dans un espace δ-hyperbolique général X, on peut approcher leur configuration par un arbre. Autrement dit, le birapport entre quatre points est une mesure de la distance entre deux segments géodésiques.

Démonstration. — Comme Φ est une quasi-isométrie, elle transforme les rayons géodésiques asymptotes en quasi-rayons asymptotes de Y. Le lemme de poursuite de Morse montre que ces quasirayons sont à distance bornée de véritables rayons asymptotes. L'application Φ définit ainsi une application entre les bords.

Soient $a, b, c, d \in \partial X$. Comme Φ est une quasi-isométrie et que le birapport mesure essentiellement la distance entre les segments géodésiques, il est quasi-invariant. $\square$

Par conséquent, les métriques visuelles de deux espaces hyperboliques géodésiques propres quasi-isométriques sont quasimöbius, donc quasisymétriquement équivalentes puisque les bords sont compacts.

En particulier, d'après le lemme de Švarc-Milnor, si G opère géométriquement sur deux espaces métriques hyperboliques géodésiques et propres X et Y, alors il existe une quasi-isométrie qui se prolonge en transformation quasisymétrique entre les bords. Les bords appartiennent à la même classe quasiconforme, au sens qu'il existe un homéomorphisme quasisymétrique entre les deux.

Nous avons une réciproque. À un triplet $\{a,b,c\} \in \partial^3 X$, on associe un triangle idéal de sommets $\{a,b,c\}$. L'hyperbolicité de X nous permet de considérer un centre du triangle, c'est-à-dire un point x dont la distance aux trois côtés est minimale. Cela définit une application $p_X : \partial^3 X \to X$.

Disons qu'un espace hyperbolique X est *quasi-enveloppé* s'il existe une constante D telle que tout point de X est à distance au plus D de $p_X(\partial^3 X)$. Cette condition est équivalente à X d'être quasi-étoilé (il existe $w \in X$ tel que tout x est à distance au plus D' d'un rayon géodésique issu de w). Elle est vérifiée dès que X admet une action géométrique.

On a alors

THÉORÈME 3.2 (F. Paulin). — *Soient X, Y des espaces hyperboliques D-enveloppés. Toute transformation quasimöbius $\varphi : \partial X \to \partial Y$ se prolonge en une quasi-isométrie $\Phi : X \to Y$.*

Pour des énoncés plus précis, on peut consulter [**8**].

Démonstration. — On suit l'argument de F. Paulin [**59**] qui utilise la construction de J. Cheeger : tout point x de X est approximativement l'image d'un triplet $\{a,b,c\}$ de $\partial^3 X$. On associe à x le point $\Phi(x) = p_Y(\{\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c))\})$. On vérifie que Φ est une quasi-isométrie en utilisant que les birapports sont contrôlés. □

3.2. Jauge conforme

Le paragraphe précédent nous conduit naturellement à introduire la jauge conforme d'un espace métrique et d'un groupe hyperbolique.

DÉFINITION 3.3 (Jauge conforme). — *Si (Z,d) est un espace métrique, la* jauge conforme *$\mathscr{C}(Z,d)$ est l'ensemble des métriques δ sur Z telles que $Id : (Z,d) \to (Z,\delta)$ est quasisymétrique. Si X est un espace hyperbolique, ou si G est un groupe hyperbolique, leurs jauges conformes $\mathscr{C}(X)$ et $\mathscr{C}(G)$ sont les jauges de leurs bords munis d'une métrique visuelle.*

On constate que la jauge d'un espace ou d'un groupe hyperbolique est un invariant de quasi-isométrie. On cherche à déterminer deux types de propriétés relatives à une jauge.

(1) Les propriétés qui ne dépendent pas de la métrique choisie dans la jauge, comme les propriétés purement topologiques, de complétude, la connexité locale linéaire, le groupe des transformations quasimöbius, etc.

(2) Les propriétés qui sont satisfaites pour au moins une métrique de la jauge, comme le fait d'être Ahlfors-régulier, loewnesque, d'avoir un groupe dénombrable de transformations conformes, etc.

3.2.1. *Dimension conforme.* — P. Pansu tire de la jauge conforme une caractéristique numérique : la dimension conforme $\dim \mathscr{C}(Z)$, qui est définie comme l'infimum des dimensions de Hausdorff $\dim_H(Z,d)$ de (Z,d) lorsque d parcourt la jauge de Z. Cette quantité est toujours minorée par la dimension topologique de l'espace. En pratique, les jauges contiennent des métriques Ahlfors-régulières, et on s'intéresse alors plutôt à la dimension conforme Ahlfors-régulière $\dim_{AR} \mathscr{C}(Z)$, c'est-à-dire à l'infimum des dimensions de Hausdorff parmi les distances Ahlfors-régulières de la jauge de Z.

Ces deux quantités sont en général difficiles à évaluer. Elles sont cependant calculées par P. Pansu pour les bords des espaces homogènes de courbure strictement négative [**57**].

Par ailleurs, J. Tyson montre que $\dim \mathscr{C}(Z) = \dim_{AR}\mathscr{C}(Z) = \dim_H Z$ si Z est loewnesque [**69**]. En fait, si Z est Q-régulier, $Q > 1$, et admet une famille de courbes de Q-module positif, alors Z atteint aussi sa dimension conforme (Ahlfors-régulière), *cf.* Corollaire 3.6. Certainement plus surprenant, S. Keith et T. Laakso montrent que cette condition est presque nécessaire au sens suivant [**46**].

THÉORÈME 3.4 (S. Keith et T. Laakso). — *Si Z est Q-régulier, $Q > 1$, et si $\dim_{AR}\mathscr{C}(Z) = \dim_H Z$, alors il existe un espace tangent de Z qui admet une famille de courbes de Q-module positif.*

Pour une définition de l'espace tangent d'un espace métrique, voir § 3.4.

3.2.2. *Modules discrets.* — On introduit une notion de modules robuste par homéomorphismes qui permet d'estimer la dimension conforme Ahlfors-régulière. Elle part d'une idée de P. Pansu et est plus directement inspirée des travaux de J. Cannon et de M. Bonk et B. Kleiner. D'autres variantes de modules discrets ont aussi été définies par J. Heinonen et P. Koskela, J. Tyson, et S. Keith et T. Laakso.

Soient X un espace topologique et $\mathscr{S}$ un recouvrement fini de X. On note $\mathscr{M}_Q(\mathscr{S})$ l'ensemble des applications $\rho : \mathscr{S} \to \mathbb{R}_+$ tel que $0 < \sum \rho(s)^Q < \infty$ que l'on appelle *métriques admissibles.*

Soit $K \subset X$; on note $\mathscr{S}(K)$ l'ensemble des $s \in \mathscr{S}$ qui intersectent K. La *ρ-longueur* de K est par définition

$$\ell_\rho(K) = \sum_{\mathscr{S}(K)} \rho(s)$$

et son Q-volume

$$V_{Q,\rho}(K) = \sum_{\mathscr{S}(K)} \rho(s)^Q \,.$$

Si Γ est une famille de courbes dans X et $\rho \in \mathcal{M}_Q(\mathcal{S})$, on définit

$$L_\rho(\Gamma, \mathcal{S}) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \ell_\rho(\gamma),$$

et son Q-module combinatoire par

$$\mathrm{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S}) = \inf_{\rho \in \mathcal{M}_Q(\mathcal{S})} \frac{V_{Q,\rho}(X)}{L_\rho(\Gamma, \mathcal{S})^Q} = \inf_{\rho \in \mathcal{M}_Q(\mathcal{S})} \mathrm{mod}_Q(\Gamma, \rho, \mathcal{S}).$$

Plaçons-nous maintenant dans un contexte géométrique. Soit (X, μ) un espace Q-régulier. Un *K-quasi-empilement* est un recouvrement $\mathcal{S}$ tel que, pour chaque $s \in \mathcal{S}$,

– il existe deux boules concentriques $B(s) \subset s \subset KB(s)$;

– chaque boule interne $B(s)$ intersecte au plus K autres boules internes.

Notons que l'image d'un quasi-empilement par un homéomorphisme quasisymétrique reste un quasi-empilement.

Une *approximation* d'un espace métrique X est une suite $(\mathcal{S}_n)_n$ de K-quasi-empilements dont la maille tend vers 0.

Proposition 3.5 ([**37**]). — *Pour $L > 0$, on note Γ_L les courbes de X de diamètre au moins L. Pour n assez grand, on a*

$$\mathrm{mod}_Q(\Gamma_L, \mathcal{S}_n) \asymp \mathrm{mod}_Q \Gamma_L$$

si $\mathrm{mod}_Q \Gamma_L > 0$ *et sinon,* $\lim \mathrm{mod}_Q(\Gamma_L, \mathcal{S}_n) = 0$. *De même, pour tout condensateur (E, F) et pour n assez grand, on a*

$$\mathrm{mod}_Q(E, F, \mathcal{S}_n) \asymp \mathrm{mod}_Q(E, F)$$

si $\mathrm{mod}_Q(E, F) > 0$ *et sinon,* $\lim \mathrm{mod}_Q(E, F, \mathcal{S}_n) = 0$.

On obtient ainsi une estimée de la dimension conforme Ahlfors-régulière.

Corollaire 3.6. — *Soit X un espace métrique compact Ahlfors-régulier muni d'une approximation $(\mathcal{S}_n)_n$. Si $Q > \dim_{AR} X$, alors*

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S}_n) = 0$$

pour toute famille de courbes de diamètre uniformément minoré.

Ceci nous permet d'établir un critère utilisé par P. Pansu et M. Bourdon, basé sur la méthode longueur-aire [**57**].

Proposition 3.7 (P. Pansu). — *Soit X un espace compact Q régulier ($Q > 1$) muni d'une approximation $(\mathcal{S}_n)$. On suppose qu'il existe une famille de courbes Γ de diamètre minoré et une mesure de probabilité μ sur Γ telle que $\mu(\Gamma(s)) \lesssim (\mathrm{diam}\, s)^{Q-1}$ pour tout s, où $\Gamma(s)$ désigne les courbes de Γ qui traversent s. Alors $\dim_{AR} X = Q$.*

Démonstration. — On se fixe n et $\rho \in \mathcal{M}_Q(\mathcal{S}_n)$. On a, en intégrant par rapport à Γ,

$$\begin{aligned} L(\Gamma, \mathcal{S}_n) &\leq \sum_{\mathcal{S}_n} \rho(s)\mu(\Gamma(s)) \\ &\lesssim \sum_{\mathcal{S}_n} \rho(s)(\operatorname{diam} s)^{Q-1} \\ &\lesssim \left(\sum_{\mathcal{S}_n} \rho(s)^Q\right)^{1/Q} \cdot \left(\sum_{\mathcal{S}_n} (\operatorname{diam} s)^Q\right)^{1-1/Q} . \end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{S}_n$ est un quasi-empilement, on a $\sum_{\mathcal{S}_n} (\operatorname{diam} s)^Q \lesssim 1$, donc $\operatorname{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S}_n) \gtrsim 1$, et le corollaire 3.6 permet de conclure. □

3.3. Structure hyperbolique des points de vue d'un espace compact

On reproduit une construction de G. Elek revue par M. Bourdon et H. Pajot dans [**16**]. Soit Z un espace métrique compact connexe de diamètre D. On suppose pour simplifier que Z est *doublant*, c'est-à-dire qu'il existe un nombre N tel que chaque boule puisse être recouverte par au plus N boules de rayon moitié (un espace Ahlfors-régulier est doublant).

Notons $A_k = [1, N^2]^k$ et $p_k : A_{k+1} \to A_k$ l'application qui oublie la dernière coordonnée.

On construit une suite $(\mathcal{B}_k)_{k\geq 0}$ de recouvrements par des boules de rayon $D/2^k$ de Z par récurrence. Le premier recouvrement est donné par une boule B_0 de rayon D. Si $(B_\alpha)_{\alpha\in A_k}$ est le recouvrement $\mathcal{B}_k$ de la génération k, on recouvre chacune des boules B_α de $\mathcal{B}_k$ par N^2 boules $B(x_\beta, D/2^{k+2})$, $\beta \in A_{k+1}$, avec $p_{k+1}(\beta) = \alpha$. On définit $\mathcal{B}_{k+1} = \{B(x_\beta, D/2^{k+1})\}_{\beta\in A_{k+1}}$.

Si $B \in \mathcal{B}_k$, on écrit $|B| = k$. On définit alors un graphe $X = (S, A)$, où les sommets sont les boules de $\cup_k \mathcal{B}_k$. On met une arête (B_i, B_j) si $||B_i| - |B_j|| \leq 1$ et si $B_i \cap B_j \neq \varnothing$. On munit X de la métrique qui rend chaque arête isométrique au segment $[0, 1]$.

On a

PROPOSITION 3.8. — *L'espace X est hyperbolique, et il existe une métrique visuelle d_X basée en B_0 sur ∂X, équivalente à $2^{-[x|y]}$, qui rend ∂X bilipschitz équivalent à Z.*

Cette proposition repose sur le lemme suivant.

LEMME 3.9. — *Si A et B sont deux sommets, alors*

$$\operatorname{diam}(A \cup B) \asymp 2^{-[A|B]}.$$

3.4. Topologie de Hausdorff-Gromov, espace tangent

On reprend les hypothèses et les notations du paragraphe précédent. Les rayons géodésiques de X permettent de coder les points de Z avantageusement. Pour cela, on définit

$$A = \varprojlim (A_k, p_k) = \left\{ (\alpha_k) \in \prod_{k\geq 0} A_k,\ p_k(\alpha_{k+1}) = \alpha_k \right\} .$$

Cet espace est compact, et on peut définir une ultra-métrique d_A comme suit

$$d_A((\alpha_k),(\beta_k)) = 2^{-\max\{j,\ \alpha_j=\beta_j\}} .$$

On définit une application $\pi_Z : A \to Z$ où on identifie chaque suite par un rayon géodésique $(B_{\alpha_k})_{\alpha_k\in A_k}$ tel que $(\alpha_k) \in A$. On vérifie que $\pi_Z : A \to Z$ est surjective et $2D$-lipschitz.

L'intérêt de ce codage est qu'il présente tous les espaces métriques compacts de diamètre fixé N-doublants à l'aide du même espace A.

Si X et Y sont deux espaces métriques, on note

$$d_{HG}(X,Y) = \inf d_H(f(X), g(Y))$$

où l'infimum est pris sur tous les plongements isométriques $f : X \to Z$ et $g : Y \to Z$ dans un espace métrique Z que l'on fait aussi varier. Cela définit une distance, et l'espace des compacts N-doublants non vides muni de cette distance est compact. En effet, chaque espace métrique Z peut être plongé isométriquement dans l'espace des fonctions 1-lipschitz de Z dans $\mathbb{R}$ *via* l'application $z_0 \mapsto (z \mapsto (|z - z_0|))$. Du coup, on a un plongement isométrique ι_Z de Z dans l'espace compact $\mathrm{Lip}_{2D}(A)$ (théorème d'Arzéla-Ascoli). La convergence des espaces se ramène ainsi à la convergence des fonctions.

De même, si $(X_n)_n$ est une suite d'espaces compacts codés par un espace A, $(Y_n)_n$ par B, et si $f_n : X_n \to Y_n$ est une suite de fonctions, la convergence de (f_n) se ramène à celle de $\iota_{Y_n} \circ f_n \circ \pi_{X_n} : A \to \mathrm{Lip}_{2D}(B)$, où D est un majorant des diamètres de (Y_n).

On dit qu'une suite d'espaces pointés $(X_n, x_n)_n$ tend vers (X, x) si on a convergence des boules fermées $B_{X_n}(x_n, R)$ vers $B_X(x, R)$ pour tout $R > 0$.

M. Gromov montre [**33**]

THÉORÈME 3.10. — *Soit (X_n, x_n) une suite d'espaces métriques propres N-doublants. Il existe une sous-suite (n_k) et un espace (X, x) tels que (X_{n_k}, x_{n_k}) tende vers (X, x).*

Cela permet de définir la notion *d'espace tangent* pour un espace métrique propre et doublant Z : il s'agit de n'importe quelle limite de $(Z, z_n, R_n d_Z)$ où (z_n) est une suite de Z et R_n est une suite positive qui tend vers $+\infty$.

4. DYNAMIQUE À L'INFINI DES GROUPES HYPERBOLIQUES

On considère un espace hyperbolique X muni d'une action géométrique d'un groupe G. La dynamique topologique de G à l'infini est décrite par la notion de groupe de convergence uniforme, introduite par F. Gehring et G. Martin sur $\mathbb{S}^n$, puis généralisée et systématiquement étudiée par B. Bowditch [**18**] et P. Tukia [**67**].

DÉFINITION 4.1 (Groupe de convergence). — *Un groupe G est un* groupe de convergence *si G agit par homéomorphismes sur un compact (métrique) Z et que cette action est proprement discontinue sur les triples distincts $\Theta(Z)$. On dit que l'action est uniforme si l'action est cocompacte sur $\Theta(Z)$.*

L'action proprement discontinue est fortement liée à la notion d'écroulement :

DÉFINITION 4.2 (Écroulement). — *Soient Z, Z' des espaces métriques compacts. Soit Φ un ensemble d'homéomorphismes de Z dans Z'. Étant donnés $x \in X$ et $y \in Y$, un sous-ensemble $\Phi' \subset \Phi$ est un* écroulement de base (x, y) *si pour tout compact $K \subset X \setminus \{x\}$, et tout compact $L \subset Y \setminus \{y\}$, l'ensemble*

$$\{\phi \in \Phi',\ \phi(K) \cap L \neq \varnothing\}$$

est fini. Cela implique notamment l'existence d'une suite d'homéomorphismes de Φ' qui converge uniformément sur les compacts de $Z \setminus \{x\}$ vers y.

Si G est un groupe de convergence, alors toute suite d'éléments distincts de G contient un écroulement.

THÉORÈME 4.3 (P. Tukia, B. Bowditch). — *Un groupe G opérant géométriquement sur un espace hyperbolique géodésique propre X est un groupe de convergence uniforme sur ∂X et $X \cup \partial X$.*

La démonstration repose de manière essentielle sur l'observation fondamentale suivante.

Supposons que G agisse par homéomorphismes sur deux espaces localement compacts X et Y et que $f : X \to Y$ soit une application continue surjective propre et G-équivariante.

- *G agit proprement discontinûment sur X si et seulement si G agit proprement discontinûment sur Y.*

– *L'action de G est cocompacte sur X si et seulement si l'action de G est cocompacte sur Y.*

En fait, B. Bowditch montre aussi la réciproque [**17**] :

THÉORÈME 4.4. — *Si G est un groupe de convergence uniforme opérant sur un espace métrique compact parfait Z, alors G est hyperbolique et son bord est homéomorphe à Z.*

La démonstration consiste en plusieurs étapes. D'abord, il s'agit de construire une notion de birapport sur X quasi-invariant par l'action du groupe G. Ce birapport permet alors de définir une « quasimétrique » q sur $\Theta(X)$ au sens que l'inégalité triangulaire n'est vérifiée qu'à l'ajout d'une constante additive près. Dans la troisième étape, on montre que les ensembles finis de $(\Theta(X), q)$ sont bien approchés par les arbres, ce qui permet d'avoir une hyperbolicité grossière sur $\Theta(X)$. Enfin, puisque G est un groupe de convergence uniforme sur X, on montre que cette hyperbolicité grossière se traduit par l'hyperbolicité du groupe.

En conclusion, la donnée d'un groupe hyperbolique est équivalente à celle d'un groupe de convergence uniforme. De plus, en considérant des métriques dans la jauge conforme d'une métrique visuelle, ce groupe de convergence est aussi un groupe uniformément quasimöbius (*cf.* théorème 3.1). Le théorème 4.4 implique notamment que la structure quasiconforme est incluse dans la notion purement topologique de groupe de convergence uniforme.

Ces remarques sont le point de départ des travaux de M. Bonk et B. Kleiner et suggèrent une approche inspirée de la dynamique conforme : la définition de groupe de convergence uniforme implique qu'il existe une constante $m > 0$ telle que, quel que soit $\{x, y, z\} \in \partial^3 X = \Theta(\partial X)$, il existe $g \in G$ telle que $\min\{d_\varepsilon(gx, gy), d_\varepsilon(gx, gz), d_\varepsilon(gz, gy)\} \geq m$. Comme G est un groupe uniformément quasimöbius, on est dans la situation « expansion et distorsion bornée » qui a été tant exploitée par D. Sullivan dans le cadre des groupes kleinéens et des fractions rationnelles.

Remarque 4.5. — La propriété de convergence est aussi utilisée par J. Lelong-Ferrand dans sa résolution de la conjecture de Lichnerowicz : une transformation conforme d'une variété riemannienne compacte est quasimöbius. Si le groupe conforme n'est pas compact, alors il contient un écroulement et la variété doit être 1-quasiconformément équivalente à une sphère. Elle conclut en montrant qu'une telle application est un difféomorphisme conforme [**49**].

4.1. L'ascenseur conforme

Le principe *de l'ascenseur conforme*, mis en évidence par D. Sullivan, exprime que la dynamique permet de changer d'échelle avec distorsion bornée [**64**]. Il est responsable de l'aspect fractal des ensembles limites et des ensembles de Julia de fractions rationnelles. Il permet notamment de quantifier des propriétés qualitatives.

Dans notre contexte, on peut l'énoncer ainsi.

PROPOSITION 4.6 (Principe de l'ascenseur conforme). — *Soit G un groupe de convergence uniforme uniformément quasimöbius opérant sur un espace métrique compact connexe Z. Il existe $r_0 > 0$ et une fonction de distorsion η telles que, pour tout $z \in Z$, pour tout rayon $r \in]0, \operatorname{diam} Z/2]$, il existe $g \in G$ telle que $g(B(z,r)) \supset B(g(z), r_0)$ et $g|_{B(z,r)}$ soit η-quasisymétrique.*

Démonstration. — Comme Z est connexe, on considère x, y dans Z avec $|x-z| = r$ et $|y-z| = r/2$. La propriété de convergence uniforme nous fournit un homéomorphisme $g \in G$ tel que $g\{x,y,z\}$ soit m-séparé. Par le théorème 2.5, (3), la restriction de g à $B(z,r)$ est η-quasisymétrique, où η ne dépend que de la distorsion des birapports. Par suite, $g(B(z,r))$ contient la boule $B(g(z), m/\eta(1))$. □

Nous obtenons les corollaires suivants [**5, 7**] :

COROLLAIRE 4.7 (M. Bonk et B. Kleiner). — *Soit G un groupe de convergence uniforme uniformément quasimöbius opérant sur un espace métrique compact connexe Z.*

(1) *Tous les ouverts de Z ont la même dimension topologique. Si un ouvert est homéomorphe à une boule de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, alors Z est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$.*

(2) *L'espace Z est doublant.*

(3) *Tout espace tangent est quasimöbius équivalent à Z épointé.*

(4) *L'espace Z est linéairement localement connexe.*

On esquisse les démonstrations de (2) et (3) afin d'illustrer la méthode.

Démonstration. — (2) Soient $z \in Z$ et $r > 0$; par le principe de l'ascenseur conforme, il existe $g \in G$ tel que $g(B(z,r)) \supset B(g(z), r_0)$ et $g|_{B(z,r)}$ soit η-quasisymétrique.

On se fixe $\varepsilon > 0$ que l'on déterminera ci-dessous. Comme $\operatorname{diam} g(B(z,r)) \geq r_0$, on peut recouvrir $g(B(z,r))$ par $N(\varepsilon)$ boules de rayon εr_0. Soit B une de ces boules, la proposition 2.2 indique que

$$\operatorname{diam} g^{-1}(B) \geq \frac{\operatorname{diam} B(z,r)}{2\eta\left(\frac{\operatorname{diam} B}{\operatorname{diam} g(B(z,r))}\right)} \geq \frac{r}{2\eta(2\varepsilon)}\,.$$

Il suffit de choisir ε pour que $\eta(2\varepsilon) \leq 1$.

(3) Soit T un espace tangent faible de Z. Il existe une suite (z_n) de Z et une suite (r_n) de réels tendant vers l'infini telles que $(Z, z_n, r_n d)$ tende vers (T, z_∞).

On utilise le principe de l'ascenseur conforme pour obtenir une suite (g_n) de G, ainsi que des points (x_n, y_n) de sorte que les points de chaque paire de (x_n, y_n, z_n) sont à distance de l'ordre de $1/r_n$, et de sorte que $g_n(x_n, y_n, z_n)$ est m-séparé. Quitte à extraire une sous-suite, on peut aussi supposer que (g_n) est un écroulement de base $\{a, b\}$. Il en résulte que les points (x_n, y_n, z_n) tendent vers a ; on peut supposer que les suites $(gx_n)_n$ et $(gy_n)_n$ restent écartées de b.

Pour tout $R > 0$, la suite $(g_n|_{B(z_n, Rr_n)})_n$ est uniformément quasisymétrique, donc on peut supposer que la suite $\{(Z, z_n, r_n d) \xrightarrow{g_n} (Z, g_n(z_n), d)\}$ tend uniformément sur les compacts vers une application continue injective $\varphi : T \to Z$, qui est clairement quasimöbius.

Comme T n'est pas compact, il suffit de montrer que $Z \setminus \{b\}$ est contenu dans $\varphi(T)$ pour conclure. Soit $w \in Z \setminus \{b\}$, et soit $w' \in Z \setminus \{a\}$. On peut supposer que $|g_n x_n - w| \geq m/2$. Comme g_n^{-1} est η-quasimöbius, il vient

$$\frac{|g_n^{-1}w - x_n|}{|g_n^{-1}w - w'|} \cdot \frac{|w' - y_n|}{|x_n - y_n|} \leq \eta\left(\frac{|w - g_n x_n|}{|w - g_n w'|} \cdot \frac{|g_n w' - g_n y_n|}{|g_n x_n - g_n y_n|}\right).$$

Mais puisque $g_n w'$ tend vers b et $g_n^{-1}w$ tend vers a, on obtient

$$\frac{|g_n^{-1}w - x_n|}{r_n} \lesssim \eta\left(\frac{(\operatorname{diam} X)^2}{|w - b|m}\right).$$

Ceci montre que w est dans l'image de φ. □

On tire une dernière application du principe de l'ascenseur conforme [**6**].

THÉORÈME 4.8 (M. Bonk & B. Kleiner). — *Si la dimension Ahlfors-régulière de la jauge d'un groupe hyperbolique G est atteinte et strictement supérieure à 1, alors la jauge contient une métrique de Loewner.*

Démonstration. — Le théorème 3.4 implique que si d est une métrique Q-régulière sur ∂G de dimension minimale, alors il existe un espace tangent faible T de ∂G et une famille de courbes sur T de Q-module strictement positif. Puisque T est quasimöbius à un épointement de ∂G, on en déduit l'existence d'une famille de courbes sur $(\partial G, d)$ de Q-module strictement positif. La suite se déroule en trois temps. On utilise d'abord la dynamique sur $\partial^2 G$ pour montrer que le module des courbes qui relient deux boules disjointes est toujours strictement positif. Ensuite, on utilise l'ascenseur conforme pour quantifier ces modules. Enfin, on en déduit qu'un tel espace est loewnesque. □

Remarque 4.9. — M. Bourdon et H. Pajot relient la dimension conforme Ahlfors-régulière d'un groupe à un autre invariant numérique de quasi-isométrie : l'exposant critique de cohomologie ℓ_p du groupe. Cela leur permet notamment de construire des exemples de groupes hyperboliques dont le bord a toutes les propriétés topologiques pour admettre une métrique loewnesque, mais pour lesquels la dimension conforme Ahlfors-régulière n'est pas atteinte [**16**] : la condition de Loewner dans une jauge ne serait pas topologique.

4.2. Ergodicité

On définit les *fonctions de Busemann*

$$\beta_a(x,y) = \sup \liminf_{t\to\infty} \{d(x,\gamma(t)) - t\}$$

où le supremum est pris sur tous les rayons géodésiques issus de y et définissant $a \in \partial X$.

Rappelons que si g est une isométrie de X, alors tout point du bord $a \in \partial X$ admet un voisinage $V \subset \partial X$ tel que, pour $b, c \in V$, on ait

$$d_\varepsilon(g(b), g(c)) \asymp L_g(a) d_\varepsilon(b,c) = e^{\varepsilon\beta_a(w,g^{-1}(w))} d_\varepsilon(b,c)\,.$$

M. Coornaert généralise la construction des mesures conformes de S. Patterson et D. Sullivan dans ce cadre [**27, 61**].

THÉORÈME 4.10 (M. Coornaert). — *Soit (X,w) un espace hyperbolique pointé muni d'une action géométrique d'un groupe G, et soit d_ε une métrique visuelle. On a*

$$v = \limsup \frac{1}{R} \log |\{G(w) \cap B(w,R)\}| = \varepsilon \cdot \dim(\partial X, d_\varepsilon)\,.$$

Soit ν la mesure de Hausdorff dans la dimension $\alpha = v/\varepsilon$ de $(\partial X, d_\varepsilon)$;

(i) *la mesure ν est Ahlfors-régulière de dimension α ;*

(ii) *la mesure ν est une mesure G-quasiconforme i.e., pour tout $g \in G$, $\nu \ll g^*\nu \ll \nu$ et*

$$\frac{d(g^*\nu)}{d\nu} \asymp (L_g)^\alpha \ \nu - \textit{presque partout};$$

(iii) *l'action de G est ergodique pour ν.*

De plus, si ν' est une autre mesure G-quasiconforme, alors $\nu \ll \nu' \ll \nu$ et

$$\frac{d\nu'}{d\nu} \asymp 1\,.$$

Il en ressort que v ne dépend pas du groupe opérant géométriquement sur X, ce qui justifie de l'appeler *l'entropie volumique de X*.

5. RIGIDITÉ DES ESPACES HYPERBOLIQUES

Le but de ce paragraphe est d'établir les deux théorèmes suivants dus à G.D. Mostow, M. Bourdon, P. Pansu, M. Bourdon et H. Pajot, et X. Xie. Les hypothèses sont expliquées plus bas.

THÉORÈME 5.1 (Rigidité à la Mostow). — (a) *Si un groupe opère géométriquement sur un espace symétrique hyperbolique X différent du plan hyperbolique et sur un espace géodésiquement complet Y de type CAT(-1) de même entropie volumique, alors X et Y sont isométriques.*

(b) *Soient Δ et Δ' deux immeubles fuchsiens modelés sur un polygone régulier. On suppose que ces deux espaces admettent une action géométrique d'un même groupe. Alors Δ et Δ' sont isométriques.*

THÉORÈME 5.2 (Rigidité à la Pansu). — (a) *Toute quasi-isométrie d'un espace symétrique quaternionien ou du plan de Cayley est à distance bornée d'une isométrie.*

(b) *Soient Δ et Δ' deux immeubles fuchsiens modelés sur un polygone régulier dont le groupe d'isométries admet un réseau cocompact. Toute quasi-isométrie entre ces immeubles est à distance bornée d'une isométrie.*

Remarque 5.3. — Si deux quasi-isométries ont même extension au bord, alors le lemme de poursuite de Morse entraîne qu'elles sont à distance finie l'une de l'autre.

Ces théorèmes de rigidité sont établis selon le même schéma, élaboré par G.D. Mostow [**55**].

(1) Une quasi-isométrie $\Phi : X \to X'$ entre deux espaces hyperboliques se prolonge en une transformation quasimöbius $\varphi : \partial X \to \partial X'$ entre les bords. Dans les théorèmes à la Mostow, la quasi-isométrie provient du lemme de Švarc-Milnor, alors qu'elle est donnée dans les théorèmes à la Pansu.

(2) Les hypothèses impliquent que cet homéomorphisme φ est en fait une transformation plus régulière que l'on qualifiera de Möbius. On utilise la dynamique conforme des groupes et leurs propriétés ergodiques ; dans le second cas, cela proviendra aussi d'un théorème de type Rademacher-Stepanov qui implique une rigidité infinitésimale des homéomorphismes quasisymétriques.

(3) La structure des espaces hyperboliques montre qu'il s'agit de l'extension à l'infini d'une isométrie.

Ces résultats sont notamment établis entre des espaces pour lesquels on peut complètement caractériser les isométries par leurs extensions aux bords.

Une partie des arguments communs aux différents contextes peut être axiomatisée naturellement. D'autres points semblent plus spécifiques aux espaces symétriques et immeubles fuchsiens et requièrent des arguments particuliers.

Dressons d'ores et déjà une liste de points communs partagés par les espaces symétriques et les immeubles fuchsiens.

- Ils admettent des gros groupes d'isométries : ils contiennent des réseaux cocompacts.
- Ils sont CAT(-1) et possèdent de nombreuses copies isométriques du plan de Poincaré. Elles sont responsables de nombreuses courbes rectifiables à l'infini.
- Certaines métriques loewnesques à l'infini sont munies d'une structure conforme fine.

5.1. Structure conforme et rigidités au bord d'espaces hyperboliques

On introduit une classe d'espaces hyperboliques pour lesquels les notions d'homéomorphismes de Möbius et d'homéomorphismes conformes ont une signification.

Si X est un espace hyperbolique géodésique propre, on dit qu'il appartient à *la classe* ($\mathscr{C}$), à défaut de fixer une terminologie, s'il admet une action géométrique, et s'il existe une constante $C < \infty$ et des fonctions

$$\{\cdot|\cdot\}_\cdot : \partial X \times \partial X \times X \to \mathbb{R}_+ \text{ et } B : \partial X \times X \times X \to \mathbb{R}$$

telles que :

- si $x, y \in X$, $a, b \in \partial X$, alors $|\{a|b\}_x - [a|b]_x| \leq C$ et $|B_a(x,y) - \beta_a(x,y)| \leq C$ (les fonctions $[\cdot|\cdot]$ et $\beta(\cdot,\cdot)$ sont définies au début des paragraphes § 3 et § 4.2) ;
- si $x, y \in X$, $a, b \in \partial X$ et g est une isométrie de X, alors $\{ga|gb\}_{gx} = \{a|b\}_x$, $\{a|b\}_x = \{b|a\}_x$ et $B_{ga}(gx, gy) = B_a(x,y)$;
- pour tout $(x,y) \in X^2$, l'application $a \in \partial X \mapsto B_a(x,y)$ est continue presque partout (pour la mesure de Hausdorff du théorème 4.10) ;
- si $x, y \in X$, $a, b \in \partial X$, alors

$$\{a|b\}_x = \{a|b\}_y + \frac{1}{2}\left(B_a(x,y) + B_b(x,y)\right) .$$

On dira qu'une métrique visuelle est *naturelle* si elle est définie par

$$d_\varepsilon(a,b) = \inf \sum_{0\leq j<n} \exp(-\varepsilon\{a_j|a_{j+1}\}_w)$$

où l'infimum est pris sur toutes les chaînes finies $(a_j)_{0\leq j\leq n}$ de ∂X telles que $a_0 = a$ et $a_n = b$.

Remarque 5.4. — Les espaces CAT(-1) sont dans la classe ($\mathscr{C}$) munis du produit de Gromov $\{x|y\}_w = (1/2)(|x-w| + |y-w| - |x-y|)$, qui se prolonge au bord par continuité. Pour a, b au bord, la formule $d_w(x,y) = e^{-\{x|y\}_w}$ définit une métrique visuelle naturelle [**9**].

Passons aux définitions d'homéomorphismes de Möbius et conformes. Si X est de la classe ($\mathscr{C}$), on définit le *birapport hyperbolique* sur $\partial^4 X$ par

$$[a,b,c,d]_h = v(\{a|c\} + \{b|d\} - \{a|b\} - \{c|d\}),$$

où v est l'entropie volumique de X. On vérifie aisément qu'il ne dépend pas du point-base choisi dans X.

DÉFINITION 5.5 (Homéomorphisme de Möbius). — *Soient X et Y des espaces de la classe ($\mathscr{C}$). Un homéomorphisme $\varphi : \partial X \to \partial Y$ est* de Möbius *s'il préserve le birapport hyperbolique.*

Si Z, Z' sont des espaces métriques, et $f : Z \to Z'$ un homéomorphisme, on introduit les quantités suivantes :

$$\begin{cases} L_f(z,r) &= \sup\{|f(z)-f(w)|,\ |z-w| \le r\} \\ \ell_f(z,r) &= \inf\{|f(z)-f(w)|,\ |z-w| \ge r\} \\ L_f(z) &= \limsup_{r\to 0} \frac{L_f(z,r)}{r} \\ \ell_f(z) &= \liminf_{r\to 0} \frac{\ell_f(z,r)}{r}. \end{cases}$$

DÉFINITION 5.6 (Homéomorphisme conforme). — *Un homéomorphisme $f : Z \to Z'$ entre espaces métriques réguliers est* conforme *s'il est quasisymétrique et si L_f et ℓ_f sont finis, non nuls et égaux presque partout, ainsi que pour son inverse.*

Les prochains énoncés se démontrent comme dans les cas standard [**9, 14**].

FAIT 5.7. — *Si X, Y sont de la classe ($\mathscr{C}$), et si d_X et d_Y sont des métriques visuelles naturelles, alors*

(1) *une isométrie entre X et Y se prolonge en homéomorphisme de Möbius entre ∂X et ∂Y ;*

(2) *un homéomorphisme de Möbius est conforme si les dimensions des bords coïncident.*

PROPOSITION 5.8 (Structure conforme). — *Soit X un espace de la classe ($\mathscr{C}$).*

(1) *Si $x, y \in X$ et si d_x et d_y sont des métriques visuelles vues de x et y de même paramètre $\varepsilon > 0$, alors $Id : (\partial X, d_x) \to (\partial X, d_y)$ est conforme et*

$$\lim_{b\to a} \frac{d_y(a,b)}{d_x(a,b)} = e^{\varepsilon B_a(x,y)}$$

pour presque tout $a \in \partial X$.

(2) *Si $g : X \to X$ est une isométrie, alors*

$$\lim_{b\to a} \frac{d_x(g(a), g(b))}{d_x(a, b)} = e^{\varepsilon B_a(x, g^{-1}(x))}$$

pour presque tout $a \in \partial X$.

Les estimations approchées que nous avions dans le cas général sont maintenant exactes. Les mesures quasiconformes deviennent par conséquent conformes (*cf.* théorème 4.10 pour les notations) :

COROLLAIRE 5.9 (Propriétés ergodiques). — *Soient X de la classe $(\mathscr{C})$ muni d'une action géométrique d'un groupe G, et $\{d_x\}_{x\in X}$ une famille de métriques visuelles de paramètre ε. Il existe une famille de mesures de probabilités G-ergodiques $\{\nu_x\}_{x\in X}$ dites conformes dans la classe de la mesure de Hausdorff de dimension v/ε de ∂X telles que les dérivées de Radon-Nikodym vérifient*

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_y}{d\nu_x}(a) &= e^{vB_a(x,y)} \\ \frac{d(g^*\nu_x)}{d\nu_x}(a) &= e^{vB_a(x,g^{-1}(x))} \end{aligned}$$

pour presque tout $a \in \partial X$ et toute isométrie g de X.

D'autre part, la mesure σ-finie μ définie sur $\partial^2 X$ par

$$d\mu(a, b) = e^{-2v(a|b)_x} d\nu_x(a) \otimes d\nu_x(b)$$

est indépendante du choix de x, invariante par $\mathrm{Isom}(X)$ *et G-ergodique.*

La mesure μ prend ses origines dans l'étude du flot géodésique d'une variété compacte de courbure strictement négative [**61**]. D. Sullivan en tire l'observation suivante.

FAIT 5.10. — *Soient X, Y de la classe $(\mathscr{C})$. Un homéomorphisme $\varphi : \partial X \to \partial Y$ est de Möbius si et seulement si $\varphi^*\mu_Y$ est proportionnelle à μ_X, où μ_X, μ_Y sont les mesures invariantes sur $\partial^2 X$ et $\partial^2 Y$.*

Ce sera le fondement des rigidités à l'infini.

THÉORÈME 5.11 (Rigidité à l'infini à la Mostow). — *Soient X, Y de la classe $(\mathscr{C})$. On suppose qu'il existe une métrique visuelle d_X loewnesque sur ∂X et une métrique visuelle d_Y de même dimension. S'il existe deux groupes isomorphes G et H qui opèrent géométriquement sur X et Y respectivement, alors il existe une transformation de Möbius $\varphi : \partial X \to \partial Y$ équivariante.*

L'argument qui suit est dû à D. Sullivan [**63**, théorème 5], et adapté par M. Bourdon [**11**].

Démonstration. — D'après le lemme de Švarc-Milnor, il existe une quasi-isométrie équivariante $\Phi : X \to Y$. Cette application se prolonge à l'infini en une quasisymétrie équivariante $\varphi : \partial X \to \partial Y$. Notons ν_X et ν_Y deux mesures conformes sur X et Y respectivement. Le théorème 2.15 implique que $(\partial Y, \nu_Y)$ est loewnesque et que φ est absolument continue. Par suite, il existe une fonction ν_X-intégrable h telle que $d(\varphi^* \nu_Y) = h d\nu_X$. Donc les mesures μ_X et $\varphi^* \mu_Y$ sur $\partial^2 X$ sont dans la même classe. Étant ergodiques, on en déduit qu'elles sont proportionnelles. Par le fait 5.10, on conclut que φ est de Möbius. $\square$

On reproduit ici un argument de M. Bourdon et H. Pajot qui servira pour les théorèmes de rigidités des homéomorphismes quasi-isométriques (sans hypothèse d'équivariance) [**14**].

THÉORÈME 5.12 (M. Bourdon et H. Pajot). — *Soient X, Y de la classe $(\mathscr{C})$. On suppose qu'il existe une métrique visuelle naturelle d_X loewnesque sur ∂X et une métrique visuelle d_Y de même dimension. Toute transformation conforme $\varphi : \partial X \to \partial Y$ est une transformation de Möbius.*

L'ingrédient principal de la démonstration est une version du birapport introduite par J. Lelong-Ferrand [**50**].

DÉFINITION 5.13 (Birapport par les capacités, groupe LF-möbius)

Soit Z un espace Q-loewnesque, $Q > 1$. Le birapport $[a, b, c, d]_{LF}$ est défini comme l'infimum des Q-capacités des condensateurs qui relient $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$. Le groupe des transformations LF-möbius, noté $M_{LF}(Z)$, est le groupe des transformations de Z qui préservent le LF-birapport.

PROPOSITION 5.14. — *Soit X de la classe $(\mathscr{C})$ muni d'une action géométrique d'un groupe G. On suppose qu'il existe une métrique visuelle naturelle d_X loewnesque sur ∂X. Les transformations LF-möbius sont de Möbius.*

Démonstration de la proposition 5.14. — Dans un espace loewnesque, le LF-birapport est petit si et seulement si le birapport standard l'est quantitativement [**4**] : cela suffit pour montrer que $M_{LF}(\partial X)$ est un groupe uniformément quasimöbius qui contient G. Il opère donc proprement sur $\partial^3 X$ par le théorème 2.5 (iii). Du coup, G en est un réseau cocompact. Soit m la mesure image sur $G \backslash M_{LF}(\partial X)$ de la restriction à un domaine fondamental de la mesure de Haar de $M_{LF}(\partial X)$. On définit sur $\partial^2 X$ la mesure

$$\rho(B) = \int_{G \backslash M_{LF}(\partial X)} \mu(s(\bar{g}) \cdot B) dm(\bar{g})$$

où B est un borélien de $\partial^2 X$, μ est la mesure du corollaire 5.9, et $s : G \backslash M_{LF}(\partial X) \to M_{LF}(\partial X)$ est une section mesurable. On en déduit que ρ est invariante par $M_{LF}(\partial X)$.

Comme les applications de $M_{LF}(\partial X)$ sont quasimöbius, elles sont aussi absolument continues, donc ρ est dans la classe de μ. Par l'ergodicité de G, on en déduit qu'elles sont proportionnelles, donc le fait 5.10 conclut. $\square$

Démonstration du théorème 5.12. — On peut supposer que la métrique visuelle d_Y est naturelle. À l'instar des transformations conformes entre variétés riemanniennes, proposition 2.8, φ préserve les Q-modules où Q est la dimension de d_X et d_Y, donc φ est LF-möbius. Par conséquent, il conjugue les groupes LF-möbius sur ∂X et ∂Y, soit les groupes de Möbius d'après la proposition 5.14. Du coup, $\varphi^*\mu_Y$ est proportionnel à μ_X, et on conclut aussi par le fait 5.10. $\square$

Remarque 5.15. — Si on suppose que le groupe des homéomorphismes quasisymétriques d'un espace X de la classe $(\mathscr{C})$ est uniformément quasimöbius, alors l'argument de la proposition 5.14 montre que tout homéomorphisme quasisymétrique de X est de Möbius, voir [**73**, Dém. Thm 1.1]. Si Y est un autre espace qui vérifie les mêmes propriétés que X, alors le même argument adapté par X. Xie montre que tout homéomorphisme quasisymétrique entre ∂X et ∂Y est de Möbius.

5.2. Espaces symétriques

Les espaces symétriques de courbure strictement négative (ou de rang 1 non compacts) sont classés par É. Cartan en quatre catégories : pour $n \geq 1$, les espaces hyperboliques réels $\mathbf{H}^n_{\mathbb{R}}$, complexes $\mathbf{H}^{2n}_{\mathbb{C}}$, quaternioniens $\mathbf{H}^{4n}_{\mathbb{H}}$, et le plan de Cayley $\mathbf{H}^{16}_{\mathbb{C}a}$, que l'on normalise de sorte que la courbure sectionnelle maximale soit (-1). On note $\mathbb{K}$ un des corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou l'algèbre des octaves de Cayley $\mathbb{C}a$, et k sa dimension réelle qui vaut respectivement 1, 2, 4 ou 8.

Les espaces réels exceptés, la courbure sectionnelle d'un espace symétrique $X = \mathbf{H}^{nk}_{\mathbb{K}}$ varie alors entre (-1) et (-4) ; la courbure est constante pour les espaces réels. À chaque point $p = (x, v)$ du fibré unitaire tangent, l'orthogonal $v^\perp$ de v dans l'espace tangent T_xX contient un unique sous-espace $\mathbb{K}$-vectoriel P_p isomorphe à $\mathbb{K}^{(n-1)}$, dont chacun des vecteurs associé à v porte une copie isométrique de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ plongée dans X. Un supplémentaire de P_p est donné par $\mathbb{K}v \cap v^\perp$ de courbure (-4) (si $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$).

Le groupe d'isométries opère transitivement sur le fibré unitaire tangent, donc préserve cette distribution d'hyperplans P_p, $p \in T^1X$.

Étant de courbure strictement négative, ces espaces symétriques sont de la classe $(\mathscr{C})$. Le bord à l'infini peut s'identifier à la limite au sens de Hausdorff-Gromov des sphères $S(x, R)$ normalisées et centrées en un point x quand R tend vers $+\infty$ [**35**, § 3.6]. Plus précisément, les géodésiques issues de x permettent d'identifier les sphères $S(x, R)$ avec la sphère unité $S(x) \subset T_xX$ que l'on munit des métriques (g_R)

obtenues par rapatriement sur $S(x)$ de la restriction à $S(x,R)$ de la métrique riemannienne de X, que l'on normalise pour que le diamètre de $(S(x), g_R)$ soit π. Pour les espaces réels, on obtient la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$. Pour les autres, le processus de renormalisation fait tendre les métriques de g_R vers une métrique de Carnot-Carathéodory : la distance entre deux points de la sphère limite se mesure *via* la longueur des courbes tangentes presque partout à la distribution P_v, $v \in S(x)$, dite *horizontale* [**58**]. Cette distance est une distance visuelle naturelle. Par un théorème de J. Mitchell [**54**], l'espace tangent (métrique) en un point $v \in S(x)$ est naturellement un groupe de Lie nilpotent N. Lorsque le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$, N est abélien. Sinon, l'algèbre de Lie $\mathfrak{N}$ de N admet une graduation $\mathfrak{N} = V^1 \oplus V^2$, où V^1 s'identifie à $\mathbb{K}^{n-1}$. Les translations portées par la géodésique définie par (x,v) définit une famille à un paramètre d'homothéties $\{e^{t\alpha}\}_{t\in\mathbb{R}}$, induite par une dérivation graduée α sur $\mathfrak{N}$, de valeurs propres 1 sur V^1 et 2 sur V^2. Nous avons donc affaire à un *groupe de Carnot* : N est simplement connexe, et son algèbre de Lie est engendrée par $\ker(\alpha - I) = V^1$. L'orbite de V^1 par N est la *distribution horizontale* du groupe de Carnot.

Cet espace tangent est conforme à un épointement $\partial X \setminus \{a\}$ par le corollaire 4.7. Autrement dit, considérons un point (x,v) de T^1X qui porte une géodésique γ issue de a. La variété fortement instable $W^{us}(x,v)$ du flot géodésique représente $\partial X \setminus \{a\}$, et s'identifie au sous-groupe minimal du stabilisateur de $\{a\}$. Les homothéties $(e^{t\alpha})_t$ proviennent des translations le long de γ.

THÉORÈME 5.16 (P. Pansu). — *La métrique de Carnot-Carathéodory portée par la distribution horizontale d'un groupe de Carnot de dimension topologique au moins* 2 *atteint la dimension conforme Ahlfors-régulière de sa jauge.*

COROLLAIRE 5.17. — *Un groupe de Carnot de dimension topologique au moins* 2 *muni d'une métrique de Carnot-Carathéodory portée par la distribution horizontale est loewnesque.*

Démonstration du théorème et du corollaire. — Il découle des travaux de J. Mitchell que la distance est régulière. P. Pansu construit des familles de courbes de modules positifs en considérant des orbites de champs de vecteurs horizontaux auxquels il applique le critère de la proposition 3.7. Ensuite, l'action du groupe des automorphismes conformes permet d'obtenir la condition loewnesque, *cf.* théorème 4.8. $\square$

Remarque 5.18. — Les sphères euclidiennes $\mathbb{S}^n$ sont loewnesques dès que $n \geq 2$. La dimension conforme (Ahlfors-régulière) du bord de $\mathbf{H}^{nk}_{\mathbb{K}}$ est $nk + k - 2$ [**54, 58**].

5.2.1. *Différentiabilité.* — P. Pansu généralise la notion de différentiabilité aux groupes de Carnot. Une application $f : U \to N'$ définie sur un ouvert U d'un groupe de Carnot N est dite *différentiable* si

$$\lim_{t\to\infty} e^{t\alpha'} f(x)^{-1} f(xe^{-t\alpha})$$

existe et définit une application $D_x f : N \to N'$. Cela implique que f préserve la structure horizontale, et que l'application soit différentiable restreinte au plan horizontal.

Il généralise un fameux théorème de Rademacher qui concerne les applications lipschitzienne et de Stepanov qui implique qu'un homéomorphisme quasisymétrique de $\mathbb{R}^n$ est différentiable presque partout :

Théorème 5.19 (P. Pansu). — *Un homéomorphisme quasisymétrique $f : N \to N'$ entre groupes de Carnot de dimension topologique au moins 2 est différentiable presque partout, et la différentielle est un automorphisme gradué de N.*

Démonstration. — Tout d'abord, (N, d, μ) et (N', d', μ') ont la même dimension $Q > 1$ car il s'agit de leur dimension conforme. Puisque ce sont des espaces loewnesques, f est absolument continue, donc on contrôle L_f^Q par la dérivée de Radon-Nikodym de $f^*\mu'$ par rapport à μ : L_f est donc finie presque partout. Un non-sens abstrait montre qu'il suffit de montrer que, pour tout champ de vecteurs horizontal v, la limite

$$\lim_{t\to\infty} e^{t\alpha'} f(x)^{-1} f(xe^{-t\alpha} v) \tag{2}$$

existe presque partout, afin d'avoir l'existence d'une différentielle presque partout qui soit un morphisme de groupes, [**58**, Cor. 3.3].

On se ramène à l'étude des courbes rectifiables : une courbe rectifiable de N est différentiable presque partout et sa tangente est horizontale là où elle est définie [**58**, Prop. 4.1]. Comme f est aussi absolument continue sur presque toutes courbes, presque toute courbe rectifiable est transformée par f en une courbe rectifiable, tangente à la distribution horizontale. Le théorème de différentiation de Lebesgue s'applique pour établir (2). □

Ces résultats sont généralisés aux espaces de Carnot-Carathéodory dans [**53**].

5.2.2. *Groupes quasiconformes.* — Notre premier résultat concerne les espaces symétriques réels et complexes ; il est dû à D. Sullivan en dimension 2 réelle [**62**], P. Tukia en dimension plus grande [**65**], et R. Chow dans le cas complexe [**25**].

Théorème 5.20. — *Soit G un groupe de convergence uniforme, uniformément quasimöbius sur le bord d'un espace symétrique réel ou complexe. Alors son action est conjuguée à une action par transformations de Möbius.*

Démonstration. — Une structure conforme sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{N}$ est donnée par une forme quadratique définie positive sur l'espace horizontal à un facteur réel près, soit par un élément de $\mathrm{SL}(kn, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(kn, \mathbb{R})$. Cet espace est naturellement un espace CAT(0), et $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ opère par isométries. Une *structure conforme* sur N est donnée par une distribution mesurable de structures conformes $(M(x))_{x \in N}$ d'excentricité essentiellement bornée.

Puisque les homéomorphismes quasimöbius sont différentiables presque partout, ils opèrent sur ces structures conformes par isométries. Le groupe G étant dénombrable, on peut construire une structure conforme mesurable invariante par G en prenant le centre de Young $\mathcal{S}(x)$ de $\{g^* S(g(x))\}_{g \in G}$ pour presque tout x, où $S(x)$ désigne la structure initiale.

Le groupe des homéomorphismes quasiconformes contenant $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ou $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$, on peut conjuguer G pour supposer que l'origine est un point de continuité de $\mathcal{S}$, et que cette structure à l'origine est la structure standard. Par le principe de l'ascenseur conforme, il existe des facteurs $t_n \to +\infty$ et des éléments (g_n) tels que $(\exp(t_n \alpha) g_n^{-1})_n$ soit une famille précompacte. Toute limite f redresse la structure $\mathcal{S}$ et fGf^{-1} est un groupe de transformations de Möbius. □

5.2.3. *Rigidités des espaces symétriques.* — On commence par rappeler la caractérisation des isométries par les transformations de Möbius, due originalement à G.D. Mostow [**56**], et généralisée par M. Bourdon [**10**]. Sa démonstration repose sur la construction de J. Cheeger.

THÉORÈME 5.21 (M. Bourdon). — *Soit X un espace symétrique, et soit Y un espace CAT(-1) géodésiquement complet. Ces espaces sont isométriques si et seulement si leurs bords munis de métriques visuelles naturelles sont Möbius-équivalents.*

Notons que ces espaces étant CAT(-1), les paramètres visuels sont pris égaux à 1. Le bord d'un espace symétrique est alors de dimension minimale.

On établit maintenant les résultats annoncés.

Démonstration du théorème 5.1 (a). — Le théorème 5.11 implique que les bords sont Möbius équivalents. Le théorème 5.21 permet de conclure. □

Démonstration du théorème 5.2 (a). — Une quasi-isométrie se prolonge en homéomorphisme quasisymétrique entre les bords. Ceux-ci sont différentiables presque partout, et la différentielle est un automorphisme gradué. Or, pour les bords des espaces quaternioniens et de Cayley, les seuls automorphismes sont des similitudes [**58**, Prop. 10.1] : l'homéomorphisme quasisymétrique est en fait conforme. Le théorème 5.12 implique que l'homéomorphisme est une transformation de Möbius, donc la restriction d'une isométrie par le théorème 5.21. □

Remarque 5.22. — U. Hamenstädt caractérise les variétés compactes localement symétriques de courbure strictement négative par la propriété suivante [**40**] : chaque géodésique de son revêtement universel est contenue dans un plan totalement géodésique de courbure constante maximale. Sa démonstration consiste à reconstruire la structure de Carnot-Carathéodory à l'infini afin de montrer que le groupe des homéomorphismes conformes de son bord est très gros et d'en déduire que la variété est homogène. Cette caractérisation permet de montrer que les seuls revêtements universels de variétés compactes de courbure strictement négative qui admettent des métriques visuelles loewnesques sont symétriques [**26**].

5.3. Immeubles fuchsiens

On se restreint à une sous-classe d'immeubles fuchsiens, voir [**12, 73**] pour une situation plus générale. Soit R un p-gone régulier de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$, $p \geq 5$, d'angle π/m, $m \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$; d'après un théorème de H. Poincaré, R pave le plan hyperbolique. On étiquette chaque arête par une classe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On se fixe aussi un p-uplet $\mathbf{q}$ d'entiers $q_j \geq 2$, $j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Un *immeuble fuchsien* $\Delta = \Delta_{p,m,\mathbf{q}}$ *de type* $(R, \mathbf{q})$ est un 2-complexe cellulaire contractile dont les cellules, appelées *chambres*, sont isomorphes au polygone R étiqueté, et tel que (a) chaque arête de type $j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ soit attachée à $q_j + 1$ copies de R, (b) par deux chambres passe toujours une copie de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{R}}$ pavée par R, appelée *appartement*, et (c) si deux appartements ont une chambre commune, il existe un isomorphisme entre les deux appartements qui fixe la chambre. Notons que l'existence d'un immeuble impose des conditions sur m et $\mathbf{q}$, et que les propriétés ci-dessus ne suffisent pas à définir un unique immeuble lorsque $m \neq 2$ [**12**]. Les immeubles à angle droit ($m = 2$) étant mieux compris, on les distinguera par la suite.

On ne considère dans ce qui suit que des immeubles qui admettent des actions géométriques. Lorsque $m = 2$, le groupe G de présentation

$$G = \langle s_j,\ j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ (s_j s_{j+1})^2 = s_j^{q_j} = 1\rangle \tag{3}$$

est un sous-groupe d'isométries qui opère géométriquement sur Δ et qui préserve les étiquettes.

Muni de la distance induite par celle de R, Δ est un espace CAT(-1), donc hyperbolique. Son bord est homéomorphe à l'éponge de Menger, et chacun de ses points appartient au bord d'au moins un appartement. Un *mur* de Δ est une géodésique contenue dans le 1-squelette. Soit $\partial_{reg}\Delta$ les points du bord qui ne sont pas l'extrémité d'un mur de Δ.

On considère le sous-groupe $\mathrm{Isom}_0(\Delta)$ des isométries de Δ qui préservent l'étiquetage. Ce sous-groupe étant d'indice fini, il contient aussi un groupe G qui opère géométriquement sur Δ. Soit $\mathscr{G}$ le graphe dual de Δ, dont les sommets sont les chambres et les arêtes sont les paires de chambres contigües. Quand $m = 2$, $\mathscr{G}$ représente un graphe de Cayley du groupe défini par (3). M. Bourdon considère la métrique géodésique d_q sur $\mathscr{G}$ telle que chaque arête duale à une arête de type $j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ soit de longueur $\log q_j$. Le groupe d'isométries $\mathrm{Isom}_0(\Delta)$ opère toujours par isométries pour cette nouvelle distance.

THÉORÈME 5.23 (M. Bourdon). — *La métrique d_q est de la classe $(\mathscr{C})$, et il existe une métrique visuelle δ naturelle qui atteint la dimension conforme Ahlfors-régulière.*

Démonstration. — Si a, b, w sont des chambres, on pose $(a|b)_w = (1/2)\{d_q(w,a) + d_q(w,b) - d_q(a,b)\}$ et $B_w(a,b) = d_q(a,w) - d_q(b,w)$. Si $c_w \in w$ et $a \in \partial\Delta$, on note $(a_n)_{n\geq 0}$ l'ensemble ordonné des chambres traversées par le rayon géodésique $[c_w, a[$ pour la métrique CAT(-1). Étant donnés deux chambres w, w' et deux points du bord a, b, on définit

$$\{a|b\}_w = \sup \liminf_{m,n\to\infty} (a_n|b_m)_w$$

où le supremum est pris sur tous les rayons géodésiques joignant un point de w à a et b. On définit aussi $B_a(w,w') = \lim B_{a_n}(w,w')$ où la limite existe, et ne dépend pas du rayon choisi. On vérifie que $\partial_{reg}\Delta$ est de mesure pleine pour la mesure de Hausdorff associée à d_q. Les fonctions $\{\cdot|\cdot\}$ et B vérifient les propriétés définissant la classe $(\mathscr{C})$ sur $\partial_{reg}\Delta$: l'espace $(\mathscr{G}, d_q)$ appartient bien à la classe $(\mathscr{C})$. On peut vérifier que $\{\cdot|\cdot\}$ et B sont localement constants sur $\partial_{reg}\Delta$.

On se fixe une chambre w. On observe que chaque appartement A étant pavé admet une action géométrique (pour les deux métriques hyperboliques) d'un groupe de Coxeter W_A fixant son pavage. Le bord étant un cercle, une distance géodésique peut être définie par une mesure finie sur ∂A. L'idée est donc de considérer sur chaque bord d'appartement les mesures quasiconformes ν_x^A, $x \in A$, associées à W_A. Ces mesures ν_x^A sont régulières de dimension $\tau > 1$, où τ est le taux de croissance logarithmique de W_A muni de d_q. Notons que tous les W_A sont conjugués par une isométrie, donc τ est indépendant de l'appartement.

On définit une structure d'espace de longueur sur $\partial\Delta$ où on ne définit au préalable que la longueur des bords des appartements. À un appartement fixé A, il existe une unique chambre x_A de A qui réalise la d_q-distance de w à A. On considère sur ∂A la mesure $e^{-\tau d_q(w,x_A)}\nu_{x_A}^A$, qui induit une longueur de ses segments. Les propriétés combinatoires des immeubles montrent que ces différentes distances induisent une métrique géodésique δ sur $\partial\Delta$, pour laquelle les bords des appartements qui contiennent w sont géodésiques. Cette distance est une métrique visuelle de paramètre τ.

La famille des bords des appartements qui contiennent une chambre donnée a naturellement une structure d'espace de Cantor décrit par des cylindres. Cela permet de définir une mesure de probabilité uniforme sur ces courbes pour appliquer la proposition 3.7 et montrer que la dimension conforme Ahlfors-régulière est atteinte. Quand $m = 2$, le stabilisateur d'une chambre est lui-même un espace de Cantor, et on peut utiliser sa mesure de Haar. Voir [**11, 12**] pour plus de détails. □

On remarque que la dimension conforme ne permet pas de distinguer tous les immeubles les uns des autres. Le théorème 4.8 implique que la métrique ainsi définie est loewnesque. L'argument initial montre plus précisément que les bords d'immeubles vérifient une 1-inégalité de Poincaré [**13**]. Notons qu'ils sont les premiers exemples d'espaces loewnesques de dimension non entière.

On énonce la caractérisation des isométries des immeubles par leurs extensions, due à M. Bourdon pour les immeubles à angle droit et à X. Xie dans le cas général [**11, 73**].

THÉORÈME 5.24. — *Une transformation de Möbius entre bords d'immeubles se prolonge en isométrie.*

Les homéomorphismes de Möbius préservent un birapport bien particulier, et adapté à la combinatoire des immeubles, ce qui permet notamment de repérer le 1-squelette. Cependant, la démonstration n'en reste pas moins très technique dans le cas général ($m \neq 2$).

La clef de la rigidité à la Pansu est le

THÉORÈME 5.25 (M. Bourdon et H. Pajot). — *Un homéomorphisme quasisymétrique $\varphi : \partial\Delta \to \partial\Delta'$ entre bords d'immeubles fuchsiens à angle droit est conforme.*

Démonstration. — Comme dans le cadre des espaces symétriques, φ est un homéomorphisme entre espaces loewnesques, donc absolument continu sur presque toutes courbes rectifiables, et en particulier sur presque tout bord d'appartements. La restriction de φ à chacun d'eux est dérivable presque partout. Le théorème de Fubini fournit l'existence de dérivées partielles en presque tout point le long de presque tout bord d'appartements contenant ce point. Aux points réguliers, cette quantité ne dépend pas de l'appartement : si un point x est au bord de deux appartements A_1 et A_2, alors il en existe un troisième qui contient x et dont un voisinage se partage en des demi-morceaux de ∂A_1 et ∂A_2. La combinatoire des immeubles à angle droit intervient à ce stade pour contrôler la convergence du taux d'accroissement vers la dérivée et pour conclure que φ est conforme. □

Ceci permet de conclure à la rigidité.

Démonstration des théorèmes 5.1 (b) et 5.2 (b). — Une quasi-isométrie se prolonge en quasisymétrie entre les bords. Quand $m = 2$, le théorème 5.25 implique qu'une telle application est conforme et donc le théorème 5.12 implique que l'homéomorphisme est une transformation de Möbius. Lorsque les immeubles ne sont pas à angle droit, X. Xie utilise un résultat de B. Kleiner qui montre que le groupe des homéomorphismes quasisymétriques d'un immeuble fuchsien est uniformément quasimöbius, *cf.* la remarque 5.15.

Le théorème 5.24 conclut dans tous les cas. □

Remarque 5.26. — Comme le montre M. Bourdon [**11**], aucune métrique visuelle d'une structure CAT(-1) sur Δ ne peut être loewnesque. En effet, le théorème précédent impliquerait que le birapport devrait être localement constant sur $\partial_{reg}\Delta$.

6. CARACTÉRISATION DES GROUPES KLEINÉENS COCOMPACTS OPÉRANT SUR L'ESPACE HYPERBOLIQUE

Le problème posé est dû à J. Cannon [**19**].

CONJECTURE 6.1 (J. Cannon). — *Un groupe hyperbolique dont le bord est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$ opère sur $\mathbf{H}^3_{\mathbb{R}}$ géométriquement.*

Cette conjecture est vraie en dimension 2 [**23, 31, 66**], et fausse en dimension strictement plus grande que 3. Cela découle de constructions par M. Gromov et W. Thurston de variétés compactes de courbure pincée entre (-1) et $(-1-\varepsilon)$ qui n'admettent pas de métrique de courbure constante et ce, pour tout $\varepsilon > 0$ et en toute dimension $n \geq 4$, [**36**]. Notons que P. Pansu montre que la courbure des déformations des variétés localement symétriques non réelles ne peut devenir arbitrairement pincée [**57**]. Donc les variétés de M. Gromov et W. Thurston ne sont pas équivalentes non plus à d'autres variétés localement symétriques.

Les approches de J. Cannon *et al.* [**20, 21, 22**] et de M. Bonk et B. Kleiner [**4, 6**] consistent à reconnaître la structure conforme de la sphère de Riemann à partir de la jauge du groupe. La première approche est plus combinatoire, la seconde plus analytique. On présente ici une argumentation qui entrelace les deux approches et qui impliquera le résultat suivant, voir [**37**] pour des détails.

THÉORÈME 6.2 (M. Bonk et B. Kleiner). — *Soit G un groupe hyperbolique de bord S^2. Si sa jauge atteint sa dimension conforme Ahlfors-régulière, alors G admet une action kleinéennne sur l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^3_{\mathbb{R}}$.*

On s'intéresse dans un premier temps à caractériser la sphère de Riemann. Soit X un espace métrique homéomorphe à une sphère. Un *anneau* $A \subset X$ est un sous-ensemble homéomorphe à $[0,1] \times \mathbb{S}^1$. On désigne par $\Gamma_s = \Gamma_s(A)$ la famille des courbes homotopes à $\{1/2\} \times \mathbb{S}^1$, et $\Gamma_t = \Gamma_t(A)$ les courbes qui joignent les deux composantes de bords. Étant donné un recouvrement $\mathcal{S}$ de A, on définit suivant J. Cannon [**20**], $\mathrm{mod}_{\mathrm{inf}}(A, \mathcal{S}) = \mathrm{mod}_2(\Gamma_s, \mathcal{S})$ et $\mathrm{mod}_{\mathrm{sup}}(A, \mathcal{S}) = 1/\mathrm{mod}_2(\Gamma_t, \mathcal{S})$. Notons que $\mathrm{mod}_{\mathrm{sup}}(A, \mathcal{S}) \asymp \mathrm{mod}_{\mathrm{inf}}(A, \mathcal{S})$ où les constantes implicites ne dépendent que de la valence de $\mathcal{S}$.

On dira qu'un recouvrement est *K-adapté* si son nerf est de valence au plus K et s'il est équivalent à une triangulation de la sphère. Nous énonçons un premier résultat de nature combinatoire.

THÉORÈME 6.3. — *Soit $(\mathcal{S}_n)$ une suite de recouvrements finis K-adaptés de X dont la maille tend vers 0. On suppose que*

(1) *pour tout anneau A, il existe $m > 0$ et n_0 tels que, pour $n \geq n_0$, on ait*

$$\mathrm{mod}_{\mathrm{sup}}(A, \mathcal{S}_n) \geq m\,;$$

(2) *pour tout $x \in X$, tout voisinage V de x et tout $m > 0$, il existe un anneau $A \subset V$ qui sépare x de $X \setminus V$ et n_0 tels que, pour $n \geq n_0$,*

$$\mathrm{mod}_{\mathrm{sup}}(A, \mathcal{S}_n) \geq m\,.$$

Alors il existe un homéomorphisme $\phi : X \to \widehat{\mathbb{C}}$ et une sous-suite (n_k) telle que $\mathrm{mod}_2 \phi(A) \asymp \mathrm{mod}_{\mathrm{inf}}(A, \mathcal{S}_{n_k}) \asymp \mathrm{mod}_{\mathrm{sup}}(A, \mathcal{S}_{n_k})$ *pour tout anneau A de X et tout k assez grand.*

La démonstration que nous proposons ici suit une idée de M. Bonk et B. Kleiner [**4**] : une triangulation de la sphère définit le graphe d'incidence d'un unique empilement de cercles sur $\widehat{\mathbb{C}}$, à transformation homographique près [**48**].

Cette uniformisation discrète est particulièrement bien adaptée à l'étude des modules combinatoires. À un empilement, on associe un pavage dont chaque pièce contient exactement un disque, ce qui peut être fait canoniquement. Disons qu'un anneau est *empilé* s'il est réunion de pièces du pavage.

LEMME 6.4 (du pont). — *Si $\mathcal{E}$ est un empilement de valence bornée et si A est un anneau empilé tel que la distance combinatoire entre les deux bords soit au moins 2, alors*

$$\mathrm{mod}_{\mathrm{sup}}(A, \mathcal{E}) \asymp \mathrm{mod}_2 A \asymp \mathrm{mod}_{\mathrm{inf}}(A, \mathcal{E}),$$

où les constantes implicites ne dépendent que de la valence.

Démonstration du théorème 6.3. — Pour chaque n et chaque pièce $s \in \mathcal{S}_n$, on se fixe un point-base $b_s \in s$. À chaque n, on associe un empilement (normalisé) $\mathcal{E}_n$ de $\widehat{\mathbb{C}}$ de graphe équivalent à celui de $\mathcal{S}_n$. On définit une application $\phi_n : \{b_s,\ s \in \mathcal{S}_n\} \to \widehat{\mathbb{C}}$ en associant le centre du disque correspondant. On rappelle que le module d'un anneau de la sphère est d'autant plus grand qu'une des composantes de son complémentaire a un petit diamètre. Les hypothèses du théorème et le lemme du pont montrent donc que cette famille est équicontinue et que chaque limite est injective, donc est un homéomorphisme. Les estimées sur les modules proviennent aussi du lemme du pont. □

On en déduit une caractérisation de nature analytique de la sphère de Riemann.

COROLLAIRE 6.5 (M. Bonk et B. Kleiner). — *Si X est un espace loewnesque homéomorphe à $\mathbb{S}^2$, alors X est quasisymétrique à $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. — Puisque X est loewnesque, il est localement linéairement localement connexe et Q-régulier, pour une dimension $Q \geq 2$. Ceci produit l'existence d'une constante K et une suite de quasi-empilements K-adaptés $(\mathcal{S}_n)$ de X dont la maille tend vers 0. Du coup, les Q-modules combinatoires et analytiques sont comparables (Prop. 3.5). La propriété loewnesque de X, la décroissance des modules combinatoires en fonction de la dimension, et la régularité de la sphère impliquent facilement l'existence d'un homéomorphisme croissant ψ de $\mathbb{R}_+$ tel que $\Delta(E,F) \geq \psi(\Delta(\phi_n(E),\phi_n(F)))$, pour tout $n \geq 1$, et tout condensateur (E,F) défini par des pièces de $\mathcal{S}_n$. Ceci conduit à des bornes sur les modules, mais elles sont opposées à celles recherchées : un travail plus technique permet alors de les renverser pour appliquer le théorème 6.3. Pour montrer qu'une application limite est quasimöbius, il est en fait plus naturel de travailler avec la suite inverse, en vertu de l'estimée ci-dessus. □

On peut maintenant conclure.

Démonstration du théorème 6.2. — D'après le théorème 4.8, ∂G admet une métrique loewnesque. Le corollaire 6.5 implique que $\widehat{\mathbb{C}}$ est dans la jauge. Par suite, G opère comme un groupe de convergence uniforme uniformément quasimöbius sur $\widehat{\mathbb{C}}$. Le théorème 5.20 implique que cette action est quasiconformément conjuguée à une action kleinéenne. □

7. PARALLÈLE AVEC LA DYNAMIQUE DES REVÊTEMENTS RAMIFIÉS

Dans l'état d'esprit du dictionnaire de D. Sullivan [**64**], on peut étudier la dynamique de revêtements ramifiés en utilisant les techniques hyperboliques [**39**].

Soit $f : X \to X$ un revêtement ramifié d'un compact localement connexe et supposons qu'on ait un recouvrement fini $\mathcal{U}$ par des ouverts connexes. On construit une suite de recouvrements $(\mathcal{U}_n)$ en prenant les composantes connexes des antécédents des éléments de $\mathcal{U}$ par f^{n-1}. Supposons aussi que la réunion $\cup_n \mathcal{U}_n$ est une base de la topologie de X. On peut alors construire un graphe $\mathcal{G}$ à l'instar du paragraphe 3.3. Comme les graphes de Cayley localement finis d'un groupe hyperbolique, ce graphe est hyperbolique, sa classe de quasi-isométrie est bien définie, et son bord est homéomorphe à X.

L'application f opère sur $\mathcal{G}$ de manière simpliciale, et se prolonge à l'infini en une application conjuguée à f. La construction de Patterson-Sullivan conduit alors à la mesure d'équilibre, qui devient maintenant quasiconforme.

En munissant X d'une distance visuelle de paramètre ε, f dilate les boules suffisamment petites par le facteur e^{ε}, et devient donc une application grossièrement conforme. La jauge conforme définit donc un invariant topologique de f.

Le théorème de caractérisation topologique des fractions rationnelles de Thurston [**29**] devient le pendant de la conjecture de Cannon. Dans ce contexte, les obstructions de Thurston des revêtements ramifiés expansifs à ensemble postcritique fini de la sphère deviennent des obstructions à ce que la dimension conforme Ahlfors-régulière de la jauge soit 2 [**38**].

RÉFÉRENCES

[1] J. M. ALONSO *et al.* – Notes on word hyperbolic groups, in *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, Edited by H. Short, p. 3–63.

[2] Z. M. BALOGH, P. KOSKELA & S. ROGOVIN – Absolute continuity of quasiconformal mappings on curves, *Geom. Funct. Anal.* **17** (2007), p. 645–664.

[3] M. BONK – Quasiconformal geometry of fractals, in *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, p. 1349–1373.

[4] M. Bonk & B. Kleiner – Quasisymmetric parametrizations of two-dimensional metric spheres, *Invent. Math.* **150** (2002), p. 127–183.

[5] ———, Rigidity for quasi-Möbius group actions, *J. Differential Geom.* **61** (2002), p. 81–106.

[6] ———, Conformal dimension and Gromov hyperbolic groups with 2-sphere boundary, *Geom. Topol.* **9** (2005), p. 219–246.

[7] ———, Quasi-hyperbolic planes in hyperbolic groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), p. 2491–2494.

[8] M. Bonk & O. Schramm – Embeddings of Gromov hyperbolic spaces, *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), p. 266–306.

[9] M. Bourdon – Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(−1)-espace, *Enseign. Math.* **41** (1995), p. 63–102.

[10] ———, Sur le birapport au bord des CAT(−1)-espaces, *Publ. Math. I.H.É.S.* **83** (1996), p. 95–104.

[11] ———, Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow, *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), p. 245–268.

[12] ———, Sur les immeubles fuchsiens et leur type de quasi-isométrie, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **20** (2000), p. 343–364.

[13] M. Bourdon & H. Pajot – Poincaré inequalities and quasiconformal structure on the boundary of some hyperbolic buildings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **127** (1999), p. 2315–2324.

[14] ———, Rigidity of quasi-isometries for some hyperbolic buildings, *Comment. Math. Helv.* **75** (2000), p. 701–736.

[15] ———, Quasi-conformal geometry and hyperbolic geometry, in *Rigidity in dynamics and geometry (Cambridge, 2000)*, Springer, 2002, p. 1–17.

[16] ———, Cohomologie ℓ_p et espaces de Besov, *J. reine angew. Math.* **558** (2003), p. 85–108.

[17] B. H. Bowditch – A topological characterisation of hyperbolic groups, *J. Amer. Math. Soc.* **11** (1998), p. 643–667.

[18] ———, Convergence groups and configuration spaces, in *Geometric group theory down under (Canberra, 1996)*, de Gruyter, 1999, p. 23–54.

[19] J. W. Cannon – The theory of negatively curved spaces and groups, in *Ergodic theory, symbolic dynamics, and hyperbolic spaces (Trieste, 1989)*, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, 1991, p. 315–369.

[20] ———, The combinatorial Riemann mapping theorem, *Acta Math.* **173** (1994), p. 155–234.

[21] J. W. CANNON, W. J. FLOYD & W. R. PARRY – Sufficiently rich families of planar rings, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **24** (1999), p. 265–304.

[22] J. W. CANNON & E. L. SWENSON – Recognizing constant curvature discrete groups in dimension 3, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), p. 809–849.

[23] A. CASSON & D. JUNGREIS – Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds, *Invent. Math.* **118** (1994), p. 441–456.

[24] J. CHEEGER – Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces, *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), p. 428–517.

[25] R. CHOW – Groups quasi-isometric to complex hyperbolic space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), p. 1757–1769.

[26] C. CONNELL – Minimal Lyapunov exponents, quasiconformal structures, and rigidity of non-positively curved manifolds, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **23** (2003), p. 429–446.

[27] M. COORNAERT – Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov, *Pacific J. Math.* **159** (1993), p. 241–270.

[28] M. COORNAERT, T. DELZANT & A. PAPADOPOULOS – *Géométrie et théorie des groupes*, Lecture Notes in Math., vol. 1441, Springer, 1990.

[29] A. DOUADY & J. H. HUBBARD – A proof of Thurston's topological characterization of rational functions, *Acta Math.* **171** (1993), p. 263–297.

[30] P. EBERLEIN & B. O'NEILL – Visibility manifolds, *Pacific J. Math.* **46** (1973), p. 45–109.

[31] D. GABAI – Convergence groups are Fuchsian groups, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **25** (1991), p. 395–402.

[32] É. GHYS & P. DE LA HARPE (éds.) – *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Math., vol. 83, Birkhäuser, 1990.

[33] M. GROMOV – Groups of polynomial growth and expanding maps, *Publ. Math. I.H.É.S.* **53** (1981), p. 53–73.

[34] ______, Hyperbolic groups, in *Essays in group theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 8, Springer, 1987, p. 75–263.

[35] M. GROMOV & P. PANSU – Rigidity of lattices : an introduction, in *Geometric topology : recent developments (Montecatini Terme, 1990)*, Lecture Notes in Math., vol. 1504, Springer, 1991, p. 39–137.

[36] M. GROMOV & W. THURSTON – Pinching constants for hyperbolic manifolds, *Invent. Math.* **89** (1987), p. 1–12.

[37] P. HAÏSSINSKY – Empilements de cercles et modules combinatoires, à paraître aux *Ann. Inst. Fourier.*

[38] P. HAÏSSINSKY & K. M. PILGRIM – Thurston obstructions and Ahlfors regular conformal dimension, *J. Math. Pures Appl.* **90** (2008), p. 229–241.

[39] ———, Coarse expanding conformal dynamics, à paraître dans *Astérisque.*

[40] U. HAMENSTÄDT – A geometric characterization of negatively curved locally symmetric spaces, *J. Differential Geom.* **34** (1991), p. 193–221.

[41] J. HEINONEN – A capacity estimate on Carnot groups, *Bull. Sci. Math.* **119** (1995), p. 475–484.

[42] ———, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer, 2001.

[43] J. HEINONEN & P. KOSKELA – Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry, *Acta Math.* **181** (1998), p. 1–61.

[44] J. HEINONEN, P. KOSKELA, N. SHANMUGALINGAM & J. T. TYSON – Sobolev classes of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings, *J. Anal. Math.* **85** (2001), p. 87–139.

[45] I. KAPOVICH & N. BENAKLI – Boundaries of hyperbolic groups, in *Combinatorial and geometric group theory (New York, 2000/Hoboken, NJ, 2001)*, Contemp. Math., vol. 296, Amer. Math. Soc., 2002, p. 39–93.

[46] S. KEITH & T. LAAKSO – Conformal Assouad dimension and modulus, *Geom. Funct. Anal.* **14** (2004), p. 1278–1321.

[47] B. KLEINER – The asymptotic geometry of negatively curved spaces : uniformization, geometrization and rigidity, in *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, p. 743–768.

[48] P. KOEBE – Kontaktprobleme der konformen abbildung, *Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig* **88** (1936), p. 141–164.

[49] J. LELONG-FERRAND – Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes (démonstration de la conjecture de A. Lichnerowicz), *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Coll. in-8°* **39** (1971), p. 44.

[50] ———, Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes, *J. Differential Geometry* **8** (1973), p. 487–510.

[51] C. LOEWNER – On the conformal capacity in space, *J. Math. Mech.* **8** (1959), p. 411–414.

[52] G. A. MARGULIS – The isometry of closed manifolds of constant negative curvature with the same fundamental group, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **192** (1970), p. 736–737.

[53] G. A. MARGULIS & G. D. MOSTOW – The differential of a quasi-conformal mapping of a Carnot-Carathéodory space, *Geom. Funct. Anal.* **5** (1995), p. 402–433.

[54] J. MITCHELL – On Carnot-Carathéodory metrics, *J. Differential Geom.* **21** (1985), p. 35–45.

[55] G. D. MOSTOW – Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms, *Publ. Math. I.H.É.S.* **34** (1968), p. 53–104.

[56] ———, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Princeton Univ. Press, 1973, Annals of Mathematics Studies, No. 78.

[57] P. PANSU – Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **14** (1989), p. 177–212.

[58] ———, Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un, *Ann. of Math.* **129** (1989), p. 1–60.

[59] F. PAULIN – Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord, *J. London Math. Soc.* **54** (1996), p. 50–74.

[60] H. M. REIMANN – An estimate for pseudoconformal capacities on the sphere, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **14** (1989), p. 315–324.

[61] D. SULLIVAN – The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, *Publ. Math. I.H.É.S.* **50** (1979), p. 171–202.

[62] ———, On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions, in *Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978)*, Ann. of Math. Stud., vol. 97, Princeton Univ. Press, 1981, p. 465–496.

[63] ———, Discrete conformal groups and measurable dynamics, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6** (1982), p. 57–73.

[64] ———, Seminar on hyperbolic geometry and conformal dynamical systems, prépublication I.H.É.S., 1982.

[65] P. TUKIA – On quasiconformal groups, *J. Analyse Math.* **46** (1986), p. 318–346.

[66] ———, Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups, *J. reine angew. Math.* **391** (1988), p. 1–54.

[67] ———, Convergence groups and Gromov's metric hyperbolic spaces, *New Zealand J. Math.* **23** (1994), p. 157–187.

[68] P. TUKIA & J. VÄISÄLÄ – Quasisymmetric embeddings of metric spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **5** (1980), p. 97–114.

[69] J. T. TYSON – Quasiconformality and quasisymmetry in metric measure spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **23** (1998), p. 525–548.

[70] ———, Metric and geometric quasiconformality in Ahlfors regular Loewner spaces, *Conform. Geom. Dyn.* **5** (2001), p. 21–73.

[71] J. VÄISÄLÄ – *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., vol. 229, Springer, 1971.

[72] ———, Quasi-Möbius maps, *J. Analyse Math.* **44** (1984/85), p. 218–234.

[73] X. XIE – Quasi-isometric rigidity of Fuchsian buildings, *Topology* **45** (2006), p. 101–169.

Peter HAÏSSINSKY

L.A.T.P./C.M.I.
Université de Provence
39, rue Frédéric Joliot-Curie
F-13453 Marseille Cedex 13
E-mail : phaissin@cmi.univ-mrs.fr