Astérisque

VINCENT BEFFARA

Grands graphes planaires aléatoires et carte brownienne [d'après Jean-François Le Gall]

Astérisque, tome 326 (2009), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 992, p. 299-320

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__326__299_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 2008
60e année, 2007–2008, n° 992, p. 299 à 320

GRANDS GRAPHES PLANAIRES ALÉATOIRES ET CARTE BROWNIENNE [d'après Jean-François Le Gall]

par **Vincent BEFFARA**

INTRODUCTION

Un thème récurrent en théorie des probabilités, et en mécanique statistique plus particulièrement, est l'étude de propriétés asymptotiques d'objets aléatoires finis quand leur taille tend vers l'infini — ce qu'en physique on nomme *limite thermodynamique.* Ce que l'on entend par là consiste le plus souvent à définir une variable aléatoire à valeurs réelles représentant une caractéristique d'intérêt de l'objet, et à déterminer si la suite de variables aléatoires ainsi obtenue converge en un certain sens, éventuellement après renormalisation. Deux comportements sont possibles en cas de convergence :

- Il se peut que la limite soit déterministe. Le cas le plus typique est celui de la *loi des grands nombres* : si (X_n) est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi et intégrables, alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge presque sûrement vers l'espérance de X_1. C'est ce qui mène par exemple à la notion de *grandeur intensive* en thermodynamique.
- Il se peut également que la limite reste aléatoire, soit parce qu'elle continue à dépendre fortement de chacune des composantes du système (comme par exemple dans le cas où on considère le signe d'un produit de variables aléatoires), soit parce que la renormalisation a été choisie correctement ; le paradigme est alors celui du *théorème central limite* : si (X_n) est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, d'espérance nulle et de variance σ^2 finie, alors $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge en loi vers une variable gaussienne centrée et de variance σ^2.

Plus récemment, l'attention des probabilistes s'est portée sur l'objet aléatoire lui-même, vu comme une variable aléatoire à valeurs dans un espace mesuré dont les points sont eux-mêmes des espaces métriques — on peut alors parler de problèmes de *limites d'échelle.* Un cas particulièrement représentatif est celui, considéré par Aldous [**1**], des *arbres aléatoires* (obtenus par exemple comme arbres généalogiques de processus de branchement de type Galton-Watson) et de leur convergence en loi vers des *arbres aléatoires continus*, que l'on peut voir comme un théorème central limite dans l'espace des arbres réels.

Cet exposé est consacré à la présentation de résultats concernant certaines classes de *cartes planaires aléatoires* (*i.e.*, de graphes planaires aléatoires plongés dans la sphère) et de leur limite, la *carte brownienne.* En plus de leur connexion directe avec les arbres aléatoires *via* la bijection de Bouttier, Di Francesco et Guitter, sur laquelle nous revenons plus bas, les cartes planaires apparaissent de manière naturelle dans plusieurs domaines de la physique et des probabilités. Signalons-en ici deux, en renvoyant le lecteur vers le premier chapitre de la thèse de Bouttier [**5**] pour une présentation plus détaillée.

Un premier lien est leur apparition dans l'étude des *intégrales matricielles.* Soit $t > 0$, et soit M_N une matrice hermitienne aléatoire de taille N, distribuée selon la mesure gaussienne $\mu_{N,t}$ (de densité proportionnelle à $\exp(-\frac{N}{2t}\mathrm{Tr}M^2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'espace vectoriel $H(n)$ des matrices hermitiennes). Soit $V(x) = \sum_{n=1}^{d} \frac{v_n}{n} x^n$ un polynôme ; on appelle *modèle à une matrice* la mesure de probabilité sur $H(n)$ dont la densité par rapport à la mesure gaussienne est $Z_{N,V}(t)^{-1}\exp(N\mathrm{Tr}(V(M)))$ — le facteur de normalisation $Z_{N,V}(t)$ porte le nom de *fonction de partition* du modèle, et l'écriture suivante justifie le terme « intégrale matricielle » :

$$Z_{N,V}(t) = E\left[e^{N\mathrm{Tr}V(M_N)}\right] = \int_{H(n)} e^{N\mathrm{Tr}V(M)}\mathrm{d}\mu_{N,t}(M).$$

Une conséquence du théorème de Wick est le développement formel suivant de l'énergie libre du modèle :

$$F_{N,V}(t) := \log Z_{N,V}(t) = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F_{N,V}^{(g)}(t),$$

où $F_{N,V}^{(g)}(t)$ est la série génératrice des cartes de genre g, chacune étant affectée d'un poids v_n pour chaque sommet de degré n, d'un poids t par arête et d'un facteur de symétrie. En particulier, le terme dominant quand N tend vers $+\infty$ est donné par la série génératrice des cartes planaires, d'où le nom de *limite planaire* donné à ce régime. Le cas $V(x) = \frac{1}{2p}x^{2p}$ est particulièrement intéressant, puisqu'on peut alors, par dualité, voir la série génératrice qui apparaît comme une somme sur toutes les cartes planaires dont les faces ont $2p$ côtés, lesquelles constituent l'objet principal de cet exposé. Passer d'un tel développement formel à un développement asymptotique de l'énergie libre est loin d'être facile ; on pourra par exemple se référer à la thèse de Maurel-Segala [**25**].

Un second lien entre cartes planaires aléatoires et mécanique statistique est l'un des aspects de la *gravité quantique*, qui, dans le cadre qui nous intéresse, consiste à définir un modèle microscopique (tel que le modèle d'Ising, la percolation, ou simplement la marche aléatoire) sur un graphe lui-même aléatoire, ce qui dans le cas bidimensionnel revient à le définir sur une carte planaire. La mesure uniforme sur les cartes de taille fixée, qui est celle que nous considérerons par la suite, n'est pas la mieux adaptée ici : en effet, si on considère plutôt une distribution de type Bolzman, pour laquelle le poids d'une carte particulière s'écrit comme un produit sur ses sommets de termes locaux, des parties disjointes du graphe deviennent en un sens indépendantes, ce qui simplifie l'étude du système.

Le principal problème est alors de relier le comportement d'un même modèle en géométrie fixée et en géométrie aléatoire, ce qui reste mal compris dans le cas général. Pour des modèles pris à leur point critique, Knizhnik, Polyakov et Zamolodchikov [**15**] obtiennent un tel lien sous la forme d'une relation entre exposants critiques. Des travaux récents (et non encore publiés) de Duplantier et Sheffield [**11, 12**] construisent une structure conforme aléatoire sur la sphère comme exponentielle d'un champ libre gaussien [**30**], et l'objet ainsi obtenu permet (en oubliant les problèmes de passage à la limite continue) de justifier ce formalisme ; les liens entre cet objet et la carte brownienne restent largement à explorer.

Les premiers liens combinatoires entre cartes planaires et arbres décorés apparaissent dans un article de Cori et Vauquelin [**10**], et constituent le thème de la thèse de Schaeffer [**29**]. Des théorèmes limites similaires à ceux que nous présentons ici, mais pour la plupart exprimés en termes d'arbres et de mobiles, apparaissent dans des travaux de Chassaing et Schaeffer [**9**], Marckert et Miermont [**23**] et Marckert et Mokkadem [**24**]. Ce dernier article introduit le terme de carte brownienne, avec un sens légèrement différent de celui que nous utiliserons par la suite.

Il est à noter que les hypothèses faites sur les cartes considérées (taille fixée des faces, ou simplement bipartition du graphe), si elles sont utiles dans les constructions combinatoires, ne semblent pas fondamentales : la conjecture naturelle est que la carte brownienne constitue la limite d'échelle de toute suite de mesures « naturelles » sur des cartes dont la taille tend vers l'infini. Les travaux récents de Miermont et Weill [**27**] fournissent le principe d'invariance nécessaire sur les arbres, la seule différence à ce niveau avec le cas du degré fixé (en dehors de la complication des preuves) étant que les constantes numériques sont bien sûr différentes.

Signalons enfin l'existence d'une autre approche du problème : on peut considérer la limite en loi d'une carte aléatoire dont la taille tend vers l'infini sans renormaliser la distance de graphe. L'objet limite est alors un graphe planaire localement fini aléatoire, et l'on peut étudier ses propriétés à grande échelle. On s'attend naturellement à ce qu'elles correspondent à des propriétés locales de la carte brownienne. Cette approche a été suivie par Angel et Schramm [**2, 3**] dans le cas de triangulations aléatoires, donnant lieu à la construction de la *triangulation infinie uniforme* du plan.

L'exposé suit essentiellement l'ordre et les notations utilisés dans les articles [**19**], [**21**] et [**20**] ; la principale différence est que nous notons ici d_n la distance renormalisée. Les contraintes de format nous empêchant d'y inclure des preuves détaillées des résultats énoncés, nous renvoyons le lecteur à ces articles pour plus de détails et choisissons de nous concentrer sur une présentation de la stratégie générale de la preuve et des arguments combinatoires utilisés, en donnant quelques indications sur la démonstration des points essentiels.

1. CARTES PLANAIRES, MOBILES ET ARBRES ALÉATOIRES

1.1. Cartes planaires aléatoires

Par *carte planaire*, on désigne un plongement d'un graphe planaire fini dans la sphère $\mathbb{S}^2$, défini à l'action près d'un homéomorphisme direct de la sphère dans elle-même. On autorise *a priori* les arêtes multiples entre deux sommets ainsi que les boucles (arêtes joignant un sommet à lui-même) — notons toutefois que les cartes que nous serons amenés à considérer ne posséderont jamais de telles boucles. Le complémentaire d'une carte planaire est une famille finie de *faces* homéomorphes au disque. Le bord d'une face peut être vu comme une suite finie d'arêtes orientées, que l'on appellera les *côtés* de cette face. Une carte est dite *enracinée* si elle est munie d'une arête orientée marquée (dite *arête-racine*) ; on identifiera deux cartes enracinées s'il existe un homéomorphisme direct de la sphère dans elle-même envoyant l'une sur l'autre, et envoyant l'arête-racine de la première sur celle de la seconde.

Dans tout cet exposé, on fixera un entier p strictement supérieur à 1. Pour tout $n > 0$, soit $\mathcal{M}_n^p$ l'ensemble les cartes planaires enracinées à n faces, dont toutes les faces ont $2p$ côtés. On appellera une telle carte une *$2p$-angulation* de la sphère (une *quadrangulation* dans le cas $p = 2$). L'ensemble $\mathcal{M}_n^p$ est fini, ce qui permet de définir l'objet central de cet exposé :

DÉFINITION 1.1. — *On appelle* $2p$-angulation aléatoire à n faces *une variable aléatoire M_n distribuée selon la loi uniforme sur $\mathcal{M}_n^p$.*

Si M_n est une telle carte aléatoire, on notera $\mathbf{m}_n$ l'ensemble de ses sommets. $\mathbf{m}_n$ est muni d'une distance naturelle $\tilde{d}_n$ héritée de celle du graphe sous-jacent. Pour des raisons qui seront vite claires, on munira en fait m_n de la distance

$$d_n := \left[\frac{9}{4p(p-1)}\right]^{1/4} n^{-1/4}\,\tilde{d}_n.$$

Le préfacteur numérique est de peu d'importance pour ce qui nous intéresse ici (particulièrement pour p fixé), le point important étant la valeur $-1/4$ de l'exposant de n.

QUESTION 1.2. — *Quel est le comportement asymptotique de la suite* $(\mathbf{m}_n, d_n)_n$ *?*

Cette question est encore partiellement ouverte ; en particulier on ne sait pas prouver la convergence en loi. Le résultat principal que nous présentons dans cet exposé fournit une réponse partielle ; il nécessite pour son énoncé l'introduction d'un objet qui, s'il est devenu classique en géométrie, l'est peut-être moins dans la communauté probabiliste.

DÉFINITION 1.3. — (1) *Soit* $(\mathcal{X}, d)$ *un espace métrique localement compact ; si* X *est un compact de* $\mathcal{X}$ *et si* $r \in \mathbb{R}_+$*, on note* $V_r(X) := \{x \in \mathcal{X} : d(x, X) \leqslant r\}$*. Pour toute paire* (A, B) *de compacts non vides de* $\mathcal{X}$*, on définit leur* distance de Hausdorff *comme*

$$d_H(A, B) := \inf\big\{r > 0 : A \subset V_r(B) \text{ et } B \subset V_r(A)\big\}.$$

Cela fait de l'ensemble des compacts de $\mathcal{X}$ *un espace métrique lui aussi localement compact.*

(2) *Soient* $(\mathcal{X}_1, d_1)$ *et* $(\mathcal{X}_2, d_2)$ *deux espaces métriques compacts. On définit leur* distance de Gromov-Hausdorff *comme*

$$d_{GH}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) := \inf_{\mathcal{Y}} \inf_{\varphi_1 : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{Y}} \inf_{\varphi_2 : \mathcal{X}_2 \to \mathcal{Y}} \big\{d_H\left(\varphi_1(\mathcal{X}_1), \varphi_2(\mathcal{X}_2)\right)\big\},$$

la borne inférieure étant prise sur tous les espaces métriques compacts $\mathcal{Y}$ *et sur tous les plongements isométriques* φ_1 *(resp.* φ_2*) de* $\mathcal{X}_1$ *(resp.* $\mathcal{X}_2$*) dans* $\mathcal{Y}$*.*

PROPOSITION 1.4. — *Deux espaces métriques compacts sont isométriques si et seulement si leur distance de Gromov-Hausdorff est nulle. Soit* $\mathcal{E}$ *l'espace des classes d'isométries d'espaces métriques compacts :* d_{GH} *induit sur* $\mathcal{E}$ *une distance que l'on continue à noter* d_{GH}*, et qui en fait un espace métrique polonais.*

On peut voir $(\mathbf{m}_n, d_n)$ comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{E}$. Le résultat principal que nous souhaitons présenter ici est le suivant :

THÉORÈME 1.5 (Le Gall-Paulin [**19, 21**]). — *La suite* $(\mathbf{m}_n, d_n)_n$ *est tendue* - i.e. *pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un compact* $\mathcal{K}_\varepsilon$ *de* $\mathcal{E}$ *tel que, pour tout* $n > 0$*, on ait*

$$P\left[(\mathbf{m}_n, d_n) \in \mathcal{K}_\varepsilon\right] \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Toute limite en loi d'une sous-suite de $(\mathbf{m}_n, d_n)$ *est presque sûrement homéomorphe à la sphère* $\mathbb{S}^2$*.*

1.2. Arbres, parcours d'arbres et p-mobiles

La première étape dans la preuve du résultat consiste à relier les cartes planaires à des objets dont la combinatoire est plus facile à manier. La bijection de Bouttier, Di Francesco et Guitter les met en relation avec une classe particulière d'arbres planaires décorés, appelés *p-mobiles.* On suit ici les notations de [**19**].

Soit $\mathcal{U} = \bigcup_{n \geqslant 0} (\mathbb{N}^*)^n$ l'ensemble des suites finies d'entiers strictement positifs (où par convention $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\varnothing\}$). Si $u = (u_1, \cdots, u_n)$ est un élément de $\mathcal{U}$, on notera $|u| = n$ sa *longueur* ($|\varnothing| = 0$). L'opération de concaténation des suites munit $\mathcal{U}$ d'une structure de semi-groupe ; on notera uv la concaténation de u et v. On dira alors que u est un *ancêtre* de uv, et que uv est un *descendant* de u. Dans le cas particulier où $|v| = 1$, u est le *père* de uv, qui est son *fils.* La suite vide est donc le seul élément de $\mathcal{U}$ qui n'a pas de père ; si $|u| > 0$, on notera $\hat{u}$ le père de u.

DÉFINITION 1.6. — *Un* arbre planaire *est une partie finie non vide τ de $\mathcal{U}$ vérifiant les deux conditions suivantes :* (1) *Le père de tout élément non vide de τ est aussi dans τ ;*

(2) *Si $u \in \tau \setminus \{\varnothing\}$ et si $k < u_{|u|}$, alors $(u_1, \cdots, u_{|u|-1}, k) \in \tau$.*
Un p-arbre *est un arbre planaire τ dont tout élément de longueur impaire a exactement $p-1$ fils dans τ. On notera $|\tau|$ le nombre de sommets de τ.*

Autrement dit, si τ est un p-arbre et si $u \in \tau$ est de longueur impaire, les fils de u qui sont dans τ sont exactement les uj avec $1 \leqslant j \leqslant p-1$. On appellera *sommets blancs* (resp. *noirs*) de τ ses éléments de longueur paire (resp. impaire) ; on notera τ° (resp. $\tau^\bullet$) l'ensemble de ses sommets blancs (resp. noirs). Si u est un sommet noir de τ, on notera $u_{(0)} = u_{(p)} = \hat{u}$ et $u_{(j)} = uj$ pour $1 \leqslant j \leqslant p-1$. Notons que τ° est lui-même muni d'une structure d'arbre naturelle, si l'on déclare qu'un sommet u est le père de v dans τ° si et seulement si il est son grand-père dans τ. Nous aurons besoin de la définition suivante :

DÉFINITION 1.7. — *Soit τ un arbre ; supposons τ plongé dans le plan, de telle sorte que pour chaque $u \in \tau$, $\hat{u}$ et les enfants de u dans τ apparaissent autour de u dans le sens indirect. On appelle* parcours de τ en profondeur d'abord *la suite $\mathscr{P}(\tau)$ des sommets rencontrés en longeant le bord du complémentaire de τ dans le sens direct.*

De manière équivalente, le parcours en profondeur d'abord de l'arbre τ est la suite $\mathscr{P}(\tau) = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant 2(|\tau|-1)}$ définie par $x_0 = \varnothing$ et, pour tout $0 \leqslant i < 2(|\tau|-1)$,
- *Si l'un des fils de x_i n'est pas encore apparu dans la suite $(x_k)_{k<i}$, alors $x_{i+1} = x_i j$ est celui des tels sommets pour lequel j est minimal ;*
- *Sinon, $x_{i+1} = \hat{x}_i$.*

L'outil combinatoire central à l'étude qui suit est un arbre décoré :

DÉFINITION 1.8. — *Un* p-mobile *est une paire* $\theta = (\tau, (\ell_u)_{u\in\tau^\circ})$, *où* τ *est un* p*-arbre, et où* (ℓ_u) *est une famille d'entiers strictement positifs, indexée par* τ°*, qui satisfait la condition suivante : pour tout* $u \in \tau^\bullet$*, et pour tout* $j \in \{0,\dots,p-1\}$*, on a l'inégalité* $\ell_{u_{(j+1)}} \geqslant \ell_{u_{(j)}} - 1$*. L'entier* ℓ_u *est appelé l'*étiquette de u.

1.3. La bijection de Bouttier, Di Francesco et Guitter

Soit $\theta = (\tau, \ell)$ un p-mobile ayant n sommets noirs (et donc $1 + pn$ sommets et $k := pn$ arêtes) ; soit $(u_i)_{0\leqslant i\leqslant 2k} = \mathscr{P}(\tau)$ le parcours de τ en profondeur d'abord. L'algorithme que nous décrivons à présent succinctement est dû à Bouttier, Di Francesco et Guitter ; nous renvoyons le lecteur intéressé à leur article [**6**] pour une présentation plus formelle. Supposons l'arbre τ plongé dans le plan, de telle sorte que pour tout $u \in \tau^\bullet$ les $u_{(j)}$ apparaissent autour de u dans cet ordre. Soit ∂ un sommet supplémentaire, muni de l'étiquette $\ell_\partial = 0$, et soit $\mathbf{m} = \tau^\circ \cup \{\partial\}$. On construit alors une carte planaire M, dont $\mathbf{m}$ est l'ensemble des sommets, de la façon suivante : partant du graphe vide sur cet ensemble d'arêtes, pour tout $i \in \{0,\dots,k-1\}$:

- si $\ell_{u_{2i}} = 1$, on ajoute une arête entre u_{2i} et ∂ ;
- sinon, on ajoute une arête entre u_{2i} et $u_{2i'}$, où $i' = \min\{j > i : \ell_{u_{2j}} = \ell_{u_{2i}} - 1\}$.

Toutes ces arêtes sont plongées dans le plan de telle sorte qu'elles n'intersectent par l'arbre τ — ce qui est toujours possible :

PROPOSITION 1.9 (Bouttier, Di Francesco, Guitter [**6**]). — *L'algorithme ainsi décrit produit une carte planaire qui a* n *faces, toutes ayant* $2p$ *côtés et contenant exactement un sommet noir de* τ*. De plus, si on enracine la carte obtenue en y marquant l'arête* $(\partial, \varnothing)$*, il réalise une bijection entre* $\mathscr{M}_n^p$ *et l'ensemble* $\mathscr{T}_n^p$ *des* p*-mobiles à* n *sommets noirs.*

Une conséquence immédiate de cette proposition est que l'on peut réaliser la variable aléatoire $(\mathbf{m}_n, d_n)$ en appliquant l'algorithme à un élément de $\mathscr{T}_n^p$ choisi selon la loi uniforme. Supposons un instant que, dans la définition d'un mobile, les étiquettes soient à valeurs dans $\mathbb{Z}$ plutôt que dans $\mathbb{N}^*$ (appelons l'objet correspondant un *p-mobile signé*). Il est clair que le nombre de p-mobiles signés à n sommets noirs dont l'arbre sous-jacent est τ ne dépend pas de la forme de τ mais seulement de n et de p.

La construction d'un p-mobile signé aléatoire uniforme est alors facile : on peut commencer par choisir un p-arbre aléatoire τ uniformément parmi les p-arbres à n sommets noirs, puis conditionnellement à τ choisir un étiquetage (ℓ_u) uniformément parmi les choix admissibles. Or, le comportement asymptotique d'un p-arbre aléatoire est bien connu, et on sait en particulier que sa profondeur (la longueur maximale de l'un de ses sommets) est d'ordre $n^{1/2}$; par ailleurs, conditionnellement à τ, la suite des étiquettes que l'on trouve le long d'une branche donnée est une suite à accroissements indépendants et stationnaires dont il est facile de vérifier qu'ils sont centrés : le théorème central limite entraîne alors que l'étiquette que l'on trouve à l'extrémité d'une branche de longueur l est d'ordre $l^{1/2}$. Il est donc naturel de s'attendre à ce que la plus grande étiquette vue sur un p-mobile signé uniforme à n sommets noirs soit d'ordre $n^{1/4}$ — c'est en effet le cas, comme nous allons le montrer dans la section suivante, y compris pour des mobiles à étiquettes positives.

Anticipons toutefois la suite de l'exposé par la remarque fondamentale suivante. Dans la construction précédente, soit u un sommet blanc de τ : en suivant les arêtes ajoutées par l'algorithme, on construit immédiatement une suite de ℓ_u arêtes reliant u à ∂ et le long de laquelle ℓ décroît. Comme par ailleurs toute arête relie deux sommets dont les étiquettes diffèrent de 1, on obtient l'égalité $\tilde{d}_n(u, \partial) = \ell_u$, et en corollaire une majoration du diamètre d'une carte aléatoire en fonction de l'étiquette maximale du mobile correspondant, qui explique que l'on normalise la distance d_n par un facteur $n^{-1/4}$.

La principale difficulté est alors que, si l'étude des mobiles se prête bien à l'étude des distances à un point marqué dans une carte aléatoire, elle semble à première vue peu adaptée par exemple au calcul de la distance entre deux points quelconques d'une telle carte ; la dernière partie de cet exposé sera ainsi consacrée à l'utilisation de propriétés fines de l'objet limite pour contourner cette obstruction.

1.4. Fonctions de contour et codage d'arbres

Reprenant les notations de la section précédente, soit $C_i = \frac{1}{2}|u_{2i}|$ pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$. La suite (C_i) porte le nom de *fonction de contour* de l'arbre τ°. Il n'est pas difficile de montrer que la fonction de contour détermine entièrement τ°, et donc aussi τ. On sera aussi amené à considérer la suite (V_i) définie par $V_i = \ell_{u_{2i}}$, appelée *fonction de contour spatiale* du mobile θ — et de manière similaire, la donnée de la paire (C, V) caractérise entièrement θ.

Notons $[k] := \{0, \dots, k\}$, et munissons $[k]$ de la relation d'équivalence $\sim$ telle que l'on ait $i \sim j$ si et seulement si $u_{2i} = u_{2j}$. L'arbre τ° s'identifie alors au quotient $[k]/\sim$. Pour formaliser le lien entre fonction de hauteur et arbres, il suffit de caractériser cette relation d'équivalence en termes de la suite (C_i). Soit donc, pour tous $i \leqslant j$,

$$C_*[i, j] := \min \{C_k, i \leqslant k \leqslant j\}.$$

Par abus de notation, on étendra cette définition au cas $i > j$, pour lequel on donnera à $C_*[i, j]$ la même valeur qu'à $C_*[j, i]$. Clairement, si $i \sim j$, alors on a $C_*[i, j] = C_i = C_j$. La réciproque est fausse en général ; néanmoins, u_{2i} et u_{2j} sont deux apparences successives du même sommet de τ° lors de son exploration en profondeur d'abord si et seulement si

$$i + 1 < j, \quad C_i = C_j \quad \text{et} \quad C_i < C_*[i + 1, j - 1].$$

On peut alors reconstruire la relation $\sim$ par clôture transitive. Ce formalisme va nous permettre de passer à la limite $n \to \infty$ de manière agréable.

DÉFINITION 1.10. — *Un* arbre réel *est un espace métrique* $(\mathcal{T}, d)$ *satisfaisant les deux conditions suivantes :* (1) *Pour tous* a *et* b *dans* $\mathcal{T}$, *il existe un unique plongement isométrique du segment* $[0, d(a, b)]$ *dans* $\mathcal{T}$ *envoyant* 0 *sur* a *et* $d(a, b)$ *sur* b *; on notera* $[\![a, b]\!]$ *son image.*

(2) *Si* $\varphi : [0, 1] \to \mathcal{T}$ *est continue et injective, alors* $\varphi([0, 1]) = [\![\varphi(0), \varphi(1)]\!]$.

L'arbre est dit enraciné *si l'un de ses points (sa* racine*) est distingué. Tous les arbres considérés dans cet exposé seront implicitement supposés enracinés et compacts.*

Soit alors $\sigma > 0$, et soit $g : [0, \sigma] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue nulle en 0 et en σ — on appellera *fonction de contour* une telle fonction. Comme précédemment, on peut, pour tous $s \leqslant t$, définir

$$g_*[s, t] := \min \{g(x), s \leqslant x \leqslant t\},$$

notation que l'on étendra au cas $s > t$ par symétrie. On munit alors l'intervalle $[0, \sigma]$ d'une pseudo-métrique d_g en posant

$$d_g(s, t) := g(s) + g(t) - 2g_*[s, t].$$

En définissant la relation d'équivalence $\sim_g$ associée, pour laquelle $s \sim_g t$ si et seulement si $d_g(s, t) = 0$, on obtient en passant au quotient un espace métrique $\mathcal{T}_g := [0, \sigma]/\sim_g$ (dont on notera la distance d_g également). Notons que si φ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, alors les espaces $\mathcal{T}_g$ et $\mathcal{T}_{g \circ \varphi}$ (où la fonction $g \circ \varphi$ est définie sur $[0, \varphi^{-1}(\sigma)]$) sont isométriques.

PROPOSITION 1.11 (Duquesne–Le Gall [**13**, théorème 2.1]). — *L'espace métrique* $(\mathcal{T}_g, d_g)$ *ainsi obtenu est un arbre réel.*

On choisira pour racine la classe d'équivalence de 0 ; on dira que l'arbre réel $\mathcal{T}_g$ est *codé par la fonction* g, ou que g est *sa fonction de contour.* Ce codage est régulier, au sens suivant : si g et h sont deux fonctions de contour, que l'on peut toujours supposer définies sur le même intervalle $[0, \sigma]$, alors $d_{GH}(\mathcal{T}_g, \mathcal{T}_h) \leqslant 2\|g - h\|_\infty$ (cf. [**13**, lemme 2.3]).

Remarque 1.12. — On peut montrer que tout arbre réel compact $\mathcal{T}$ peut être codé par une fonction continue. Il suffit par exemple de considérer un ε-réseau $(x_i)_{\leqslant i \leqslant n}$ sur cet arbre, et de construire le sous-arbre engendré par les x_i (c'est-à-dire la réunion des $[\![x_i, x_j]\!]$). Il s'agit encore d'un arbre réel, mais il est facile de vérifier qu'il est isométrique à un arbre fini aux arêtes duquel on a donné des longueurs positives ; et l'exploration de cet arbre fini en profondeur d'abord permet d'en construire la fonction de contour. En raffinant alors le réseau considéré, on obtient par passage à la limite une fonction continue g telle que $\mathcal{T}$ soit isométrique à $\mathcal{T}_g$.

Le codage d'un arbre réel par une fonction de contour est en revanche loin d'être unique ; dans le cas discret, en changeant l'ordre des fils d'un nœud donné, on compose la fonction de contour à droite par un échange d'intervalles, sans changer l'espace métrique sous-jacent.

1.5. Limites de mobiles aléatoires et arbres continus

Soit $(e_t)_{t\in[0,1]}$ une excursion brownienne normalisée — que l'on peut par exemple définir comme la limite en loi, quand $\varepsilon > 0$ tend vers 0, du mouvement brownien réel sur $[0, 1]$, issu de ε, et conditionné à atteindre 0 pour la première fois dans l'intervalle $[1 - \varepsilon, 1]$. On appelle *arbre aléatoire continu* l'arbre codé par (e_t).

Une autre façon de définir ce processus, qui explique pourquoi il apparaît naturellement dans le contexte des cartes aléatoires, est la suivante. Soit μ une loi de probabilité symétrique à support fini sur $\mathbb{Z}$, de variance $\sigma^2 > 0$ (le résultat reste vrai sous des hypothèses plus faibles, mais ce cas nous suffira ici) ; pour tout $n > 0$, soit $(S_k^n)_{0\leqslant k\leqslant 2n}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{N}$, issue de 0, de loi de saut μ, et conditionnée à revenir pour la première fois en 0 au temps $2n$. Alors, on a la convergence en loi

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n\sigma^2}}\, S^n_{\lfloor 2nt\rfloor}\right)_{0\leqslant t\leqslant 1} \xrightarrow{\text{(loi)}} (e_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}.$$

Une version résumée (et incomplète) de l'argument qui suit est alors de dire que la fonction de contour d'un p-mobile aléatoire se comporte comme une marche aléatoire, et que l'arbre sous-jacent, muni de sa distance naturelle renormalisée par $n^{-1/2}$, converge donc en loi vers l'arbre aléatoire continu.

On peut encore définir l'excursion brownienne normalisée sans conditionnement, en utilisant le résultat suivant :

THÉORÈME 1.13 (Vervaat [**31**]). — *Soit $(b_t)_{t\in[0,1]}$ un pont brownien standard, et soit t_* le point (presque sûrement) unique où il atteint son minimum. Soit $W_t : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $W_t = b_{t_*+t} - b_{t_*}$ si $t \in [0, 1 - t_*]$ et $W_t = b_{t_*+t-1} - b_{t_*}$ si $t \in [1-t_*, 1]$. Alors, la distribution de $(W_t)_{t\in[0,1]}$ est celle d'une excursion brownienne normalisée.*

Avant d'énoncer précisément ce principe d'invariance, il nous faut définir le processus gaussien limite. Pour toute fonction de contour g sur $[0,\sigma]$, soit $(\Gamma^g_t)_{t\in[0,\sigma]}$ le processus gaussien centré dont la covariance est

$$\mathrm{cov}(\Gamma^g_s,\Gamma^g_t)=g_*[s,t].$$

Il n'est pas difficile de vérifier que pour tous s, t on a $E[(\Gamma^g_s-\Gamma^g_t)^2]=d_g(s,t)$; en particulier, Γ^g prend presque sûrement la même valeur en deux points identifiés par $\sim_g$, ce qui permet de le voir comme un processus gaussien indexé par $\mathcal{T}_g$.

Soit alors $(e^0_t,Z^0_t)_{t\in[0,1]}$ le processus défini de la façon suivante :

(1) $(e^0_t)_{t\in[0,1]}$ est une excursion brownienne normalisée ;

(2) conditionnellement à $(e^0_t)_{t\in[0,1]}$, $(Z^0_t)_{t\in[0,1]}$ a la même loi que le processus $(\Gamma^e_t)_{t\in[0,1]}$.

On note alors (e_t,Z_t) le processus obtenu en conditionnant (e^0_t,Z^0_t) par l'événement $Z_t\geqslant 0$ (pour tout $t\in[0,1]$). Le conditionnement impliqué par cette définition peut se faire de plusieurs manières équivalentes ; on renverra le lecteur intéressé vers l'article [**22**] pour plus de détails sur ce point. Une des constructions possibles est similaire à celle de Vervaart, et consiste à réenraciner l'arbre $\mathcal{T}_{e^0}$ au point où Z^0 atteint son minimum ; on obtient alors Z en soustrayant à Z^0 la valeur de ce minimum.

THÉORÈME 1.14 (Le Gall-Weill [**17, 32**]). — *Soit $(\theta^n)_n$ une suite de mobiles aléatoires, où θ^n est distribué uniformément sur l'ensemble $\mathcal{T}^p_n$ des p-mobiles à n sommets noirs. Soit $(C^n_i)_{i\leqslant pn}$ (resp. $(V^n_i)_{i\leqslant pn}$) la fonction de contour (resp. la fonction de contour spatiale) de θ^n. Alors, on a la convergence en loi suivante :*

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{p-1}}n^{-1/2}C^n_{tpn},\left[\frac{9}{4p(p-1)}\right]^{1/4}n^{-1/4}V^n_{tpn}\right)_{t\in[0,1]}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{(loi)}}(e_t,Z_t)_{t\in[0;1]}$$

(où l'on assimile C^n et V^n à des fonctions continues par interpolation linéaire sur les intervalles entre deux entiers successifs, et où l'énoncé est à comprendre au sens de la convergence faible de lois de probabilités sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}^2)$).

De la même façon que la bijection de Bouttier, Di Francesco et Guitter exprime que l'on peut décrire entièrement une $2p$-angulation de la sphère par la donnée de deux fonctions, il est naturel à ce point de vouloir interpréter la paire (e,Z) comme encodant un espace métrique (aléatoire) homéomorphe à la sphère, et que l'on a en fait convergence en loi (pour la distance de Gromov-Hausdorff) de $(\mathbf{m}_n,d_n)$ vers cet espace. La question ainsi posée reste encore ouverte, et la suite de cet exposé est dédiée à la présentation de progrès récents vers une réponse positive.

Remarque 1.15. — Une démarche similaire à celle que nous avons suivie ici est appliquée par Marckert et Mokkadem dans le cas des quadrangulations uniformes ; plutôt que d'encoder une quadrangulation par une paire de chemins, ils l'encodent par une paire d'arbres. Dans [**24**], ils définissent un espace métrique de *cartes abstraites* et prouvent que l'on a effectivement convergence en loi, dans cet espace, vers un objet limite qu'ils nomment la *carte brownienne.* La topologie qu'ils introduisent est moins fine que celle que nous considérons ici, puisqu'elle ne permet pas d'accéder à la distance entre deux points d'une carte distincts de sa racine ; il semble toutefois naturel de conserver le terme de carte brownienne pour parler de la limite.

2. L'ESPACE MÉTRIQUE LIMITE

2.1. Tension de la suite $(\mathbf{m}_n, d_n)$

Rappelons que, pour tout n positif, $\mathbf{m}_n$ désigne l'ensemble des sommets d'une $2p$-angulation uniforme à n faces M_n de la sphère $\mathbb{S}^2$, et que l'on munit $\mathbf{m}_n$ de la distance $d_n = [9/4p(p-1)]^{1/4} n^{-1/4} \tilde{d}_n$, où $\tilde{d}_n$ désigne la distance de graphe sur M_n. Rappelons également que $\mathcal{E}$ désigne l'espace des classes d'isométries d'espaces métriques compacts.

Comme d_n est une distance sur l'ensemble des sommets blancs de l'arbre τ associé à M_n par la bijection de Bouttier, Di Francesco et Guitter, elle induit, par l'intermédiaire de la fonction de contour C^n de cet arbre, une pseudo-distance (que l'on continuera à noter d_n) sur l'intervalle entier $[pn]$. On peut l'étendre en une fonction continue sur $[0, pn]^2$ par une interpolation linéaire en chacune des deux coordonnées – ce que nous supposerons dorénavant implicitement fait. Si $(s,t) \in [0,1]^2$, on notera $\bar{d}_n(s,t) := d_n(spn, tpn)$.

Proposition 2.1 (Le Gall [**19**, Proposition 3.2]). — *Avec les notations précédentes :*

(1) *la suite des lois des $\bar{d}_n$ est tendue dans l'espace des mesures de probabilité sur $\mathcal{C}([0,1]^2, \mathbb{R})$, muni de la topologie de la convergence uniforme ;*

(2) *la suite des lois des $(\mathbf{m}_n, d_n)$ est tendue dans l'espace des mesures de probabilité sur $\mathcal{E}$, muni de la topologie de Gromov-Hausdorff.*

Esquisse de la preuve. — (1) On a déjà vu un lien entre la fonction de contour V^n et la distance $\tilde{d}_n$: si a est un sommet blanc de M_n, et si i est tel que dans l'exploration de τ on ait $u_{2i} = a$, alors on a $\tilde{d}_n(a, \partial) = \ell_a^n = V_i^n$. Par analogie avec la définition de la distance sur un arbre réel, définissons alors, pour i et j dans $[pn]$,

$$d_n^\circ(i,j) := V_i^n + V_j^n - 2V_*^n[i,j] + 2$$

(où comme précédemment $V_*^n[i,j]$ désigne la plus petite valeur que prend V^n entre i et j). Alors (cf. [**19**, Lemme 3.1]), $\tilde{d}_n \leqslant d_n^\circ$. Par ailleurs, une conséquence directe du principe d'invariance énoncé plus haut est que, si l'on définit

$$D^\circ(s,t) := Z_s + Z_t - 2Z_*[s,t],$$

alors on a la convergence en loi suivante :

$$\left(\left[\frac{9}{4p(p-1)}\right]^{1/4} n^{-1/4} d_n^\circ(spn, tpn)\right)_{(s,t)\in[0,1]^2} \xrightarrow{\text{(loi)}} (D^\circ(s,t))_{(s,t)\in[0,1]^2}.$$

En écrivant la majoration

$$|d_n(spn,tpn) - d_n(s'pn,t'pn)| \leqslant n^{-1/4}\left[d_n^\circ(spn,s'pn) + d_n^\circ(tpn,t'pn)\right],$$

on peut alors contrôler les variations des d_n par un module de continuité de D° et conclure qu'avec probabilité arbitrairement proche de 1 elles restent dans une partie relativement compacte de $\mathscr{C}([0,1]^2,\mathbb{R})$.

(2) La tension de la suite des lois des $(\mathbf{m}_n, d_n)$ est conséquence du critère de compacité suivant :

THÉORÈME 2.2 (Gromov [**8**, Théorème 7.4.15]). — *Si X est un espace métrique compact, soit $P(X,\varepsilon)$ le plus grand cardinal d'une partie ε-séparée de X (son* packing number *à l'échelle ε). Une partie $\mathcal{X}$ de $\mathcal{E}$ est précompacte si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\sup_{X\in\mathcal{X}} P(X,\varepsilon) < +\infty$.*

Comme $\tilde{d}_n \leqslant d_n^\circ$, il suffit à nouveau, pour majorer $P(M_n,\varepsilon)$ uniformément quand $n\to\infty$, de contrôler les fluctuations de (Z_t). □

2.2. La carte brownienne comme espace quotient

Dans l'énoncé du théorème 1.14, la tension nous permet, quitte à considérer la convergence le long d'une sous-suite (n_k), de supposer que l'on a en fait convergence en loi de

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{p-1}}n^{-1/2}C_{tpn}^n, \left[\frac{9}{4p(p-1)}\right]^{1/4} n^{-1/4}V_{tpn}^n, d_n(spn,tpn)\right)_{(s,t)\in[0,1]^2}$$

vers $(e_t, Z_t, D(s,t))_{(s,t)\in[0,1]}$, où D est un processus continu à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Le théorème de Skorohod montre que l'on peut réaliser toutes les variables aléatoires en présence sur un même espace de probabilité de façon à avoir convergence presque sûre — ce que nous supposerons dorénavant.

Rappelons que $\mathscr{T}_e$ est l'arbre réel dont e est la fonction de contour, et que $s\sim_e t$ si et seulement si $e_s = e_t = e_*[s,t]$, de sorte que $\mathscr{T}_e = [0,1]/\sim_e$. Définissons une nouvelle relation d'équivalence $\approx$ sur $[0,1]$ en déclarant que $s\approx t$ si et seulement si $D(s,t) = 0$.

PROPOSITION 2.3 (Le Gall [**19**, proposition 3.3]). — *Presque sûrement, la fonction D satisfait identiquement les relations $D(s,s) = 0$, $D(s,t) = D(t,s)$ et $D(s,u) \leqslant D(s,t) + D(t,u)$; si $s \sim_e t$, alors $D(s,t) = 0$. De plus, $D \leqslant D^\circ$.*

Démonstration. — Soit $(s,t) \in [0,1]^2$; supposons que l'on ait $s \sim_e t$. Deux cas peuvent se présenter :

- Si pour tout $u \in (s,t)$ on a $e_u > e_s$, alors il existe deux suites (i_n) et (j_n) telles que $i_n/pn \to s$, $j_n/pn \to t$, $j_n > i_n + 1$ et $C^n_{i_n} = C^n_{j_n} < C^n_*[i_n + 1, j_n - 1]$, cette dernière condition impliquant $d_n(i_n, j_n) = 0$ comme on l'a vu plus haut. En passant à la limite $n \to \infty$, on obtient bien $D(s,t) = 0$.
- S'il existe $u \in (s,t)$ tel que $e_u = e_s$, un tel u est nécessairement unique (car les minima locaux du mouvement brownien sont presque sûrement deux à deux distincts — on reviendra sur ce fait à la fin de l'exposé). On peut donc appliquer l'argument précédent aux deux intervalles $[s,u]$ et $[u,t]$ et conclure par l'inégalité triangulaire.

Les autres assertions s'obtiennent simplement par passage à la limite des propriétés correspondantes de d_n. □

La relation d'équivalence $\approx$ se factorise donc sur $\mathcal{T}_e$, et D induit une distance sur $\mathcal{T}_e/\approx$, que nous continuerons à noter D. Notons qu'alors les espaces $([0,1]/\approx, D)$ et $(\mathcal{T}_e/\approx, D)$ sont isométriques. Toutefois la (pseudo-)distance sur $[0,1]$ qui est la plus facile à contrôler est D°, laquelle ne s'étend pas aussi facilement à l'arbre $\mathcal{T}_e$.

Si a et b sont deux points de $\mathcal{T}_e$, définissons $D^\circ(a,b)$ comme la plus petite valeur que prend $D^\circ(s,t)$ quand s (resp. t) parcourt l'ensemble des éléments de a (resp. b) vu comme une classe d'équivalence de $\sim_e$, donc comme une partie de $[0,1]$. D° ne satisfait pas en général l'inégalité triangulaire : définissons donc

$$D^*(a,b) := \inf_{q>0} \inf_{a_1,\dots,a_{q-1} \in \mathcal{T}_e} \sum_{i=0}^{q-1} D^\circ(a_i, a_{i+1})$$

(où par convention $a_0 = a$ et $a_q = b$). On voit alors facilement que $D \leqslant D^* \leqslant D^\circ$. Le résultat principal de l'article [**19**] est le suivant :

THÉORÈME 2.4 (Le Gall). — *Si la suite (n_k) est choisie comme précédemment, alors presque sûrement la suite $(\mathbf{m}_{n_k}, d_{n_k})$ converge vers $(\mathcal{T}_e/\approx, D)$ pour la distance de Gromov-Hausdorff. De plus, pour tous a et b dans $\mathcal{T}_e$, les conditions $a \approx b$, $D(a,b) = 0$, $D^*(a,b) = 0$ et $D^\circ(a,b) = 0$ sont équivalentes.*

Démonstration. — La présentation d'une preuve détaillée de ce résultat dépasserait les limites imposées à cet exposé, nous renvoyons pour cela le lecteur à l'article [**19**]. Signalons toutefois deux choses : d'une part, que la convergence elle-même n'est pas la partie la plus difficile du théorème (elle est essentiellement conséquence de la convergence de d vers D) ; d'autre part, que l'équivalence des caractérisations de la relation d'équivalence $\approx$, comme dans la proposition 2.3, repose sur le contrôle de propriétés fines presque sûres de l'objet limite. □

Si la distance D peut *a priori* dépendre de la sous-suite (n_k) choisie, en revanche l'unicité de D^* est garantie par le principe d'invariance, et la relation d'équivalence $\approx$ est donc elle aussi indépendante de ce choix. Par conséquent, même si le théorème ne garantit pas l'existence d'une limite en loi de la suite $(\mathbf{m}_n, d_n)$, il entraîne que toutes les valeurs d'adhérence sont deux à deux homéomorphes. C'est en ce sens qu'il faut comprendre les énoncés de la section qui suit : on parlera de *la* carte brownienne pour désigner l'une quelconque de ces valeurs d'adhérence, et toute propriété énoncée pour la carte brownienne sera en fait partagée par toutes ces valeurs d'adhérence.

On conjecture toutefois que l'objet limite est décrit par la distance D^* :

CONJECTURE 2.5. — *Avec les notations précédentes, on a $D = D^*$; par conséquent, la suite $(\mathbf{m}_n, d_n)$ converge en loi vers $(\mathcal{T}_e/\approx, D^*)$.*

3. LA CARTE BROWNIENNE EST UNE SPHÈRE

Nous pouvons à présent présenter les grandes lignes de la preuve du théorème 1.5. À nouveau, nous choisissons de nous concentrer sur la stratégie globale de la démonstration, et nous renvoyons le lecteur désireux de connaître les détails plus techniques vers l'article de Le Gall et Paulin [**21**]. Dans le cas des quadrangulations, notons l'existence d'une preuve postérieure plus directe due à Miermont [**26**].

3.1. Arbres réels et laminations du disque

Soit g une fonction continue à valeurs réelles définie sur le cercle-unité $\mathbb{S}^1$ du plan complexe; faisons sur g l'hypothèse suivante (H_g), qui nous a déjà servi plus haut dans le cas de l'excursion brownienne : les maxima locaux de g sont deux à deux distincts. Si s et t sont deux points de $\mathbb{S}^1$, notons $[s,t]$ l'arc qui va de s à t dans le sens positif (avec la convention $[s,s] = \{s\}$). Définissons

$$m_g(s,t) := \max\{g_*[s,t], g_*[t,s]\},$$

où comme précédemment $g_*[a,b] = \inf\{g(u) : u \in [a,b]\}$, et

$$d_g(s,t) := g(s) + g(t) - 2m_g(s,t).$$

La construction de la section précédente s'applique : en introduisant la relation d'équivalence $\sim_g$ telle que $s \sim_g t$ si et seulement si $d_g(s,t) = 0$, d_g induit une distance sur l'espace-quotient $\mathbb{S}^1/\sim_g$ qui en fait un arbre réel $\mathcal{T}_g$. L'hypothèse faite sur g implique que les classes d'équivalence de $\sim_g$ ont toutes au plus 3 éléments.

Remarque 3.1. — Si ω est le point de $\mathbb{S}^1$ où g atteint son (unique) minimum global, on peut définir la fonction $\tilde{g} : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ par $\tilde{g}(u) = g(\omega e^{2\imath\pi u})$, et d_g coïncide alors exactement avec $d_{\tilde{g}}$ (au sens de la section précédente) ; les arbres réels $\mathcal{T}_g$ et $\mathcal{T}_{\tilde{g}}$ sont isométriques. Sauf indication contraire, on considérera l'arbre $\mathcal{T}_g$ comme étant enraciné en (la classe d'équivalence de) ω.

Munissons le disque-unité ouvert $\mathbb{D}$ de la métrique hyperbolique usuelle et, pour s et t deux points distincts de $\mathbb{S}^1$, soient st la géodésique hyperbolique ouverte d'extrémités s et t et $\overline{st} := st \cup \{s,t\}$. Par convention on notera $ss = \varnothing$ (et donc $\overline{ss} = \{s\}$). Rappelons la définition suivante :

DÉFINITION 3.2. — *Une* lamination géodésique *de $\mathbb{D}$ est une partie fermée de $\mathbb{D}$ qui est la réunion d'une famille de géodésiques deux à deux disjointes. Une telle lamination est dite* maximale *si elle est maximale pour l'inclusion.*

PROPOSITION 3.3 (Le Gall-Paulin [**21**, proposition 2.1]). — *Soit L_g la réunion des géodésiques st pour $s \sim_g t$: alors, L_g est une lamination géodésique maximale du disque hyperbolique.*

Démonstration. — Les géodésiques st et $s't'$ sont disjointes si et seulement si les intervalles $[s,t]$ et $[s',t']$ sont soit inclus strictement l'un dans l'autre, soit d'intérieurs disjoints. Si tel n'est pas le cas pour quatre points tels que $s \sim_g t$ et $s' \sim_g t'$, on vérifie alors facilement que ces quatre points sont dans la même classe d'équivalence de $\sim_g$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur g : L_g est donc réunion disjointe de géodésiques. Il est fermé par continuité de g, et sa maximalité s'obtient aisément. □

Le complémentaire de L_g dans $\mathbb{D}$ est alors une réunion disjointe de triangles hyperboliques idéaux, qui sont en bijection avec les classes d'équivalence de $\sim_g$ qui ont trois éléments (lesquels sont les sommets du triangle correspondant). On peut étendre la relation $\sim_g$ au disque fermé, en conservant la même notation, en déclarant que $a \sim_g b$ si et seulement si a et b sont soit sur la même géodésique fermée $\overline{st}$ avec $s \sim_g t$ dans $\mathbb{S}^1$, soit dans l'adhérence du même triangle géodésique de $\mathbb{D} \setminus L_g$. Les quotients $\mathbb{S}^1/\sim_g$ et $\bar{\mathbb{D}}/\sim_g$ s'identifient alors de manière naturelle.

3.2. Composition de deux relations d'équivalence sur le disque

On a vu que la carte brownienne pouvait s'écrire comme le quotient d'un arbre, dont le contour est donné par une excursion brownienne, par une relation d'équivalence. Il est naturel de transposer cette situation au cas de laminations du disque hyperbolique ; soit donc $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ une seconde fonction continue, satisfaisant à l'hypothèse (H_h), et supposons de plus que la paire (g, h) vérifie la restriction supplémentaire suivante $(H'_{g,h})$: si a, b et c sont des points de $\mathbb{S}^1$ tels que $a \sim_g b$ et $a \sim_h c$, alors $a = b$ ou $a = c$. On peut voir cette condition comme exprimant l'indépendance des deux relations $\sim_g$ et $\sim_h$; elle est par exemple réalisée si g et h sont deux ponts browniens indépendants.

On compose les relations $\sim_g$ et $\sim_h$ en définissant une relation d'équivalence sur $\mathcal{T}_g$ que nous continuerons à noter $\sim_h$: on dira que deux points α et β de $\mathcal{T}_g$ sont dans la même classe d'équivalence pour $\sim_h$ si et seulement si il en existe deux représentants respectifs a et b dans $\mathbb{S}^1$ tels que $a \sim_h b$. Une autre façon de comprendre cette opération est de l'interpréter comme la description d'une relation d'équivalence $\sim$ sur la sphère (vue comme le recollement de deux copies du disque-unité), pour laquelle deux points sont en relation si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre en suivant une chaîne finie de classes d'équivalence de $\sim_g$ (sur un hémisphère) et de $\sim_h$ (sur l'autre).

L'hypothèse $(H'_{g,h})$ exprime que, dans une telle chaîne de classes d'équivalence, l'une au plus n'est pas un singleton, et en particulier toute classe d'équivalence de $\sim$ est une classe de $\sim_g$ ou une classe de $\sim_h$; la relation $\sim$ est donc fermée (car $\sim_g$ et $\sim_h$ le sont). De plus les classes d'équivalence de $\sim$ sont compactes et toutes homéomorphes soit à un segment, soit à un triangle. Cela nous permet d'appliquer le résultat suivant :

THÉORÈME 3.4 (Moore [**28**]). — *Soit $\sim$ une relation d'équivalence fermée non triviale sur la sphère $\mathbb{S}^2$ dont chaque classe d'équivalence est compacte, connexe par arcs et de complémentaire connexe. Alors l'espace $\mathbb{S}^2/\sim$ est homéomorphe à la sphère.*

COROLLAIRE 3.5 (Le Gall-Paulin [**21**, proposition 2.4]). — *Sous les hypothèses (H_g), (H_h) et $(H'_{g,h})$, le quotient $\mathcal{T}_g/\sim_h$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$.*

Démonstration. — Le théorème s'applique clairement au cas de la relation $\sim$ et entraîne que $\mathbb{S}^2/\sim$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$. Il reste à prouver qu'il est également homéomorphe à $\mathcal{T}_g/\sim_h$. Pour ce faire, remarquons que $\mathcal{T}_g/\sim_h$ est compact (parce que la relation $\sim_h$ est fermée). L'injection naturelle de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^2$ passe au quotient, à droite par $\sim$ et à gauche par $\sim_g$, produisant une application continue de $\mathcal{T}_g$ dans $\mathbb{S}^2/\sim$, laquelle se factorise encore par $\sim_h$ pour induire une application continue de $\mathcal{T}_g/\sim_h$ dans $\mathbb{S}^2/\sim$. Par construction, cette dernière est une bijection, et la compacité de $\mathcal{T}_g/\sim_h$ entraîne qu'elle est fermée. □

3.3. Sur les conditions (H_e), (H_Z) et $(H'_{e,Z})$

L'énoncé du théorème 2.4 peut à présent être récrit de la façon suivante : toute sous-suite convergente (en loi) de $(\mathbf{m}_n, d_n)$ converge en loi vers un espace métrique aléatoire homéomorphe à $\mathcal{T}_e/\sim_Z$. On saura prouver que cet espace est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$ si les fonctions (aléatoires) e et Z satisfont aux trois hypothèses du corollaire précédent. C'est la preuve de ce fait, et en particulier des hypothèses (H_Z) et $(H'_{e,Z})$, qui constitue la majeure partie de l'article [**21**], et les détails nous entraîneraient bien au-delà des limites imposées à ce texte. La première de ces hypothèses en revanche se montre beaucoup plus facilement :

PROPOSITION 3.6. — *Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$ un pont brownien standard. Alors, les minima locaux de (B_t) sont presque sûrement deux à deux distincts, au sens suivant : si $0 < a < b < c < d < 1$, et si B atteint sa plus petite valeur sur $[a, b]$ (resp. $[c, d]$) en un point de (a, b) (resp. (c, d)), alors $B_*[a, b] \neq B_*[c, d]$.*

Démonstration. — On remarque qu'il suffit de démontrer ce fait pour des bornes d'intervalles rationnelles, et que l'énoncé se réduit alors au suivant : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tous $0 < c < d < 1$, on a $P[B_*[c, d] = x] = 0$. Or, le principe de réflexion assure que le maximum d'une trajectoire brownienne sur un intervalle a une loi qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ce qui permet de conclure. □

Toutefois, si cette preuve est correcte, il semble difficile de la généraliser directement aux cas qui nous intéressent. En voici une autre, moins élégante (de loin !) et volontairement présentée de manière informelle, mais qui a l'avantage d'être plus générique. Soient donc a, b, c et d comme ci-dessus, et soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Supposons que la plus petite valeur que prend B sur $[a, b]$ soit dans $[x, x + \varepsilon]$. Cela implique que $B_a \geqslant x$ et, si σ est le premier temps d'atteinte de $[x, x + \varepsilon]$ par B après a, que $\sigma \leqslant b$. Le processus (B_t) doit ensuite rester supérieur ou égal à x sur tout l'intervalle $[\sigma, b]$, ce qui, par une borne du type « ruine du joueur », a une probabilité conditionnelle de l'ordre de $\varepsilon(b - \sigma)^{-1/2}$. L'invariance du mouvement brownien par renversement du temps permet de supposer que $\sigma \leqslant \frac{a+b}{2}$, et on obtient alors l'estimation suivante :

$$P\left(B_*[a, b] \in [x, x + \varepsilon]\right) = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

où les constantes implicites dans la notation $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ne dépendent que de a et b. Le même argument, et la propriété de Markov, entraînent en fait que

$$P\left(\{B_*[a, b], B_*[c, d]\} \subset [x, x + \varepsilon]\right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Par conséquent, pour tout $n > 0$, la probabilité qu'il existe $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ pour lequel les minima de B sur $[a, b]$ et $[c, d]$ soient tous les deux dans $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ est au plus d'ordre $2^n 2^{-2n} = 2^{-n}$. Le lemme de Borel-Cantelli permet alors de conclure que pour n assez grand, ces minima, s'ils sont dans l'intervalle $[0, 1]$, sont dans des intervalles disjoints, et qu'ils sont par conséquent distincts, ce qui entraîne le résultat voulu.

L'avantage de la méthode est qu'on peut l'appliquer à (Z_t), qui ne satisfait pas le principe de réflexion mais qui, étant un processus gaussien, se prête à des calculs explicites. Pour prouver l'hypothèse $(H'_{e,Z})$, on peut raisonner de manière similaire : s'il existe trois points a, b et c du cercle tels que $a \sim_e b$ et $b \sim_Z c$ (notons cet événement F), alors il existe trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) convergeant vers a, b et c respectivement, d'arguments de la forme $2k\pi 2^{-n}$, et tels que $|a_n - b_n|$ et $|b_n - c_n|$ soient au plus d'ordre 2^{-n}. Des résultats connus précédemment sur les modules de continuité de e et Z entraînent qu'alors, $d_e(a_n, b_n)$ est au plus d'ordre $2^{-n/2}$ et $d_Z(b_n, c_n)$ au plus d'ordre $2^{-n/4}$ (à des termes polynomiaux en n près). Pour tout n, on a donc exhibé une famille finie d'événements dont la réunion contient F. La probabilité de chacun d'entre eux peut s'estimer individuellement, sous la forme $2^{-\alpha n}$, et on obtient $P(F) = 0$ si α est assez grand — ce qui exprime qu'alors $(H'_{e,Z})$ est satisfaite presque sûrement.

3.4. Quelques propriétés géométriques de la carte brownienne

Nous terminons cet exposé par l'énoncé de certaines propriétés de la carte brownienne qui ont une contrepartie en termes combinatoires pour des cartes planaires aléatoires uniformes. La première est une réinterprétation du fait que la normalisation naturelle de la distance de graphe fasse intervenir l'exposant $\frac{1}{4}$:

THÉORÈME 3.7 (Le Gall [**19**, théorème 6.1]). — *La dimension de Hausdorff de la carte brownienne est presque sûrement égale à* 4.

Cela correspond au fait qu'une boule de rayon R dans une grande carte aléatoire aura de l'ordre de R^4 sommets — un énoncé précis dans le cas de la triangulation infinie se trouve dans l'article [**2**].

Un résultat plus récent, et non encore publié, de Le Gall ([**20**]) concerne les géodésiques dans les cartes planaires et dans la carte brownienne.

DÉFINITION 3.8. — *Soit e une excursion brownienne normalisée. On appelle* squelette *de l'arbre $\mathcal{T}_e$ l'ensemble* $\mathrm{Skel}(\mathcal{T}_e)$ *des sommets de $\mathcal{T}_e$ dont le complémentaire n'est pas connexe. On appellera squelette de la carte brownienne $\mathbf{m}_\infty$ l'image de* $\mathrm{Skel}(\mathcal{T}_e)$ *par la projection canonique, que l'on notera également* $\mathrm{Skel}(\mathbf{m}_\infty)$.

THÉORÈME 3.9 (Le Gall [**20**, théorème 1.4]). — *Soit $\mathbf{m}_\infty = \mathcal{T}_e/\sim_Z$ une carte brownienne et soit ∂ sa racine. Presque sûrement, pour tout point x de $\mathbf{m}_\infty$:*

- *si x n'est pas dans le squelette de $\mathbf{m}_\infty$, alors il existe une unique géodésique joignant ∂ à x dans $\mathbf{m}_\infty$;*

– *si x est dans le squelette de $\mathbf{m}_\infty$, alors il a un unique antécédent ξ dans $\mathcal{T}_e$, et le nombre de géodésiques joignant ∂ à x est égal au nombre de composantes connexes de $\mathcal{T}_e \setminus \{\xi\}$. Ce nombre est au plus égal à 3.*

Ce théorème est bien sûr faux pour une carte aléatoire finie : il est en effet facile de construire une carte possédant un nombre arbitrairement grand de géodésiques disjointes entre deux de ses sommets. En revanche, il a une contrepartie à grande échelle qui en est un corollaire. Nous concluons cet exposé par l'énoncé de ce résultat.

Soit $(\mathbf{m}_n, d_n)$ une carte planaire aléatoire à n sommets ; rappelons que d_n est la distance de graphe sur $\mathbf{m}_n$, renormalisée par un facteur proportionnel à $n^{-1/4}$. Pour $j \in \{1,2\}$, soit $\gamma_j : \{0,\dots,l_j\} \to \mathbf{m}_n$ un chemin de longueur $n^{-1/4} l_j$ dans cette carte. On définit la distance entre ces deux chemins par

$$d_n(\gamma_1,\gamma_2) := \max_k d_n(\gamma_1(k \wedge l_1), \gamma_2(k \wedge l_2)).$$

Soit ε_n une suite de réels positifs tendant vers 0, et soit $\delta > 0$ fixé ; on appellera *géodésique approchée* entre deux points a et b de $\mathbf{m}_n$ un chemin de longueur au plus $d_n(a,b) + \varepsilon_n$ les joignant. On notera $\mathrm{Geo}_n(a,b)$ (resp. $\overline{\mathrm{Geo}}_n(a,b)$) l'ensemble des géodésiques (resp. géodésiques approchées) entre a et b, et on appellera *multiplicité* (resp. *multiplicité approchée*) entre a et b, notée $\mathrm{Mult}_{n,\delta}(a,b)$ (resp. $\overline{\mathrm{Mult}}_{n,\delta}(a,b)$), le cardinal maximal d'une partie δ-séparée de $\mathrm{Geo}_n(a,b)$ (resp. $\overline{\mathrm{Geo}}_n(a,b)$). On peut voir la multiplicité entre a et b comme le nombre de géodésiques « vraiment différentes » entre a et b. On a toujours $1 \leqslant \mathrm{Mult} \leqslant \overline{\mathrm{Mult}}$.

THÉORÈME 3.10 (Le Gall [**20**]). — *Soit $(\mathbf{m}_n, d_n)$ une suite de cartes planaires aléatoires, et soit ∂ la racine de $\mathbf{m}_n$; soit a_n un point de $\mathbf{m}_n$ choisi aléatoirement selon la mesure uniforme. Alors :*

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\overline{\mathrm{Mult}}_{n,\delta}(\partial_n, a_n) = 1\right] = 1 ;$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\exists a \in \mathbf{m}_n : \overline{\mathrm{Mult}}_{n,\delta}(\partial_n, a) \geqslant 4\right] = 0 ;$$

$$\lim_{\delta\to 0} \liminf_{n\to\infty} P\left[\exists a \in \mathbf{m}_n : \mathrm{Mult}_{n,\delta}(\partial_n, a) = 3\right] = 1.$$

En d'autre termes : la multiplicité entre deux points génériques de $\mathbf{m}_n$ tend vers 1 en probabilité, et la multiplicité maximale entre deux points de $\mathbf{m}_n$ tend vers 3 en probabilité.

RÉFÉRENCES

[1] D. ALDOUS – The continuum random tree I, *Ann. Probab.* **19** (1991), p. 1–28.

[2] O. ANGEL – Growth and percolation on the uniform infinite planar triangulation, *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), p. 935–974.

[3] O. ANGEL & O. SCHRAMM – Uniform infinite planar triangulations, *Comm. Math. Phys.* **241** (2003), p. 191–213.

[4] F. BONAHON – Geodesic laminations on surfaces, in *Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology (Stony Brook, NY, 1998)*, Contemp. Math., vol. 269, Amer. Math. Soc., 2001, p. 1–37.

[5] J. BOUTTIER – Physique statistique des surfaces aléatoires et combinatoire bijective des cartes planaires, Thèse, Université Paris 6, 2005.

[6] J. BOUTTIER, P. DI FRANCESCO & E. GUITTER – Planar maps as labeled mobiles, *Electron. J. Combin.* **11** (2004), Research Paper 69.

[7] J. BOUTTIER & E. GUITTER – Statistics of geodesics in large quadrangulations, *J. Phys. A : Math. Theor.* **41** (2008), 145001.

[8] D. BURAGO, Y. BURAGO & S. IVANOV – *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Math., vol. 33, Amer. Math. Soc., 2001.

[9] P. CHASSAING & G. SCHAEFFER – Random planar lattices and integrated superBrownian excursion, *Probab. Theory Related Fields* **128** (2004), p. 161–212.

[10] R. CORI & B. VAUQUELIN – Planar maps are well labeled trees, *Canad. J. Math.* **33** (1981), p. 1023–1042.

[11] B. DUPLANTIER & S. SHEFFIELD – Liouville quantum gravity and KPZ, prépublication arXiv:0808.1560, 2008.

[12] ______, Duality and KPZ in Liouville quantum gravity, prépublication arXiv:0901.0277, 2009.

[13] T. DUQUESNE & J.-F. LE GALL – Probabilistic and fractal aspects of Lévy trees, *Probab. Theory Related Fields* **131** (2005), p. 553–603.

[14] M. GROMOV – *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progress in Math., vol. 152, Birkhäuser, 1999.

[15] V. G. KNIZHNIK, A. M. POLYAKOV & A. B. ZAMOLODCHIKOV – Fractal structure of 2D-quantum gravity, *Modern Phys. Lett. A* **3** (1988), p. 819–826.

[16] S. K. LANDO & A. K. ZVONKIN – *Graphs on surfaces and their applications*, Encyclopaedia of Math. Sciences, vol. 141, Springer, 2004.

[17] J.-F. LE GALL – A conditional limit theorem for tree-indexed random walk, *Stochastic Process. Appl.* **116** (2006), p. 539–567.

[18] ———, Random real trees, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **15** (2006), p. 35–62.

[19] ———, The topological structure of scaling limits of large planar maps, *Invent. Math.* **169** (2007), p. 621–670.

[20] ———, Geodesics in large planar maps and in the Brownian map, prépublication arXiv:0804.3012.

[21] J.-F. Le Gall & F. Paulin – Scaling limits of bipartite planar maps are homeomorphic to the 2-sphere, *Geom. Funct. Anal.* **18** (2008), p. 893–918.

[22] J.-F. Le Gall & M. Weill – Conditioned Brownian trees, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **42** (2006), p. 455–489.

[23] J.-F. Marckert & G. Miermont – Invariance principles for random bipartite planar maps, *Ann. Probab.* **35** (2007), p. 1642–1705.

[24] J.-F. Marckert & A. Mokkadem – Limit of normalized quadrangulations : the Brownian map, *Ann. Probab.* **34** (2006), p. 2144–2202.

[25] E. Maurel-Segala – Étude de l'énergie libre de certains modèles matriciels, grandes déviations et relation avec des objets combinatoires, Thèse, ENS de Lyon, 2007.

[26] G. Miermont – On the sphericity of scaling limits of random planar quadrangulations, *Electron. Commun. Probab.* **13** (2008), p. 248–257.

[27] G. Miermont & M. Weill – Radius and profile of random planar maps with faces of arbitrary degrees, *Electron. J. Probab.* **13** (2008), p. 79–106.

[28] R. L. Moore – Concerning upper semi-continuous collections of continua, *Trans. Amer. Math. Soc.* **27** (1925), p. 416–428.

[29] G. Schaeffer – Conjugaison d'arbres et cartes combinatoires aléatoires, Thèse, Université de Bordeaux I, 1998.

[30] S. Sheffield – Gaussian free fields for mathematicians, *Probab. Theory Related Fields* **139** (2007), p. 521–541.

[31] W. Vervaat – A relation between Brownian bridge and Brownian excursion, *Ann. Probab.* **7** (1979), p. 143–149.

[32] M. Weill – Asymptotics for rooted bipartite planar maps and scaling limits of two-type spatial trees, *Electron. J. Probab.* **12** (2007), p. 887–925.

Vincent BEFFARA

U.M.P.A.
École normale supérieure de Lyon
46 allée d'Italie
F-69364 Lyon Cedex 07
E-mail : `vbeffara@ens-lyon.fr`