Astérisque

MIHAI PĂUN

Courants d’Ahlfors et localisation des courbes entières [d’après Julien Duval]

Astérisque, tome 326 (2009), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 991, p. 281-297

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__326__281_0>

Séminaire BOURBAKI Mars 2008
60e année, 2007–2008, n° 991, p. 281 à 297

COURANTS D'AHLFORS ET LOCALISATION DES COURBES ENTIÈRES [d'après Julien Duval]

par **Mihai PĂUN**

INTRODUCTION

En 1967, S. Kobayashi a introduit une *pseudo-distance* intrinsèque sur toute variété complexe X de la manière suivante.

Etant donnés $x, y \in X$, on considère toutes les familles finies de points de $(w_1, ...w_N)$ contenus dans X telles que $w_1 := x, w_N := y$ et telles que, pour chaque $1 \leq j \leq N-1$, le couple de points (w_j, w_{j+1}) appartienne à l'image d'un disque holomorphe. La distance entre deux points à l'intérieur de chaque disque est mesurée par rapport à la métrique de Poincaré ; la pseudo-distance de Kobayashi $d_X(x, y)$ est alors la limite inférieure sur toutes familles de points de la somme des distances $d_{\mathbb{D}}(w_j, w_{j+1})$ entre les points successifs (on remarquera l'analogie avec la distance induite par une métrique riemannienne).

La version infinitésimale de d_X s'exprime de la manière suivante : étant donnés $x \in X$ et $v \in T_{X,x}$ un vecteur tangent, la norme de v par rapport à la *pseudo-métrique* de Kobayashi est

$$|v|_K := \inf\{r^{-1} : r > 0, \exists f \in \mathrm{H}(\mathbb{D}, X), f(0) = x, f'(0) = rv\}.$$

Lorsque cette pseudo-métrique est non-dégénérée, on dit que X est *hyperbolique.*

Dans cet exposé, nous allons principalement nous intéresser à la classe des variétés qui ne sont pas hyperboliques au sens de Kobayashi, i.e. il existe un point $x \in X$ et un vecteur $v \in T_{X,x}$ tels que $|v|_K = 0$. Notre but est de présenter un résultat récent et très remarquable dû à J. Duval, qui met en évidence des conséquences géométriques importantes de la dégénérescence de $| \cdot |_K$ pour les *variétés X compactes*, ainsi que des corollaires qui en découlent.

Avant d'énoncer le résultat principal, introduisons un peu de terminologie. Soit ω une métrique fixée sur X, et considérons $\varphi_m : \overline{\mathbb{D}} \to X$ une famille d'applications holomorphes définies sur l'adhérence du disque unité, telles que la longueur du bord $\varphi_m(\partial\mathbb{D})$ divisée par l'aire de $\varphi_m(\mathbb{D})$ tende vers zéro lorsque $m \to \infty$.

DÉFINITION 0.1. — *Un courant T de bidimension $(1,1)$ est dit d'Ahlfors si*

$$\langle T, \alpha \rangle = \lim_m \frac{1}{\int_{\mathbb{D}} \varphi_m^\star \omega} \int_{\mathbb{D}} \varphi_m^\star \alpha$$

où α est une forme de type $(1,1)$ sur X.

Nous remarquons le fait qu'un courant d'Ahlfors T est *positif et fermé.* Dans ce contexte, le résultat de J. Duval est le suivant.

THÉORÈME 0.2 ([**12**]). — *Soit T un courant d'Ahlfors sur X, et soit $K \subset X$ un compact chargé par T. Alors il existe une courbe entière $\varphi : \mathbb{C} \to X$ telle que l'aire de l'intersection de son image avec K soit non-nulle.* □

En rapport étroit avec ce résultat, on pourrait rappeler le lemme classique de Brody : *une suite divergente de disques tracés sur X produit par reparamétrage une courbe entière dont la norme de la dérivée est uniformément bornée* (cf. [**3**]). Nous pouvons constater que même si la suite précédente fixe un point, il n'est pas garanti que ce point va se retrouver dans l'image de la courbe entière produite – principalement à cause des reparamétrisations. Un exemple dû à J. Winkelmann illustrant ce phénomène se trouve dans l'article [**26**]. Le théorème précédent peut donc être vu comme une version qualitative du lemme de Brody.

Dans le but de mieux cerner la portée du résultat de J. Duval, considérons une variété projective X telle qu'il existe $Z \subsetneq X$ avec la propriété suivante : l'image de toute courbe entière non-constante $\varphi : \mathbb{C} \to X$ est contenue dans Z. Alors étant donnée une suite de disques φ_m divergente au sens de Gromov, l'accumulation de l'aire lorsque $m \to \infty$ peut se produire au voisinage de Z uniquement. Ainsi, le théorème ci-dessus est une excellente illustration du « principe de Bloch », tel qu'il a été interprété dans [**18**].

Avant d'expliquer en quelques mots le mécanisme de la démonstration de 0.2, nous voulons présenter quelques corollaires. Le premier caractérise l'hyperbolicité d'une variété complexe compacte *via* une inégalité isopérimétrique linéaire « à la Gromov ».

COROLLAIRE 0.3 ([**12**], [**15**]). — *Une variété complexe compacte X est hyperbolique si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\mathrm{aire}(\Delta) \leq C \,\mathrm{long}(\partial\Delta)$$

pour tout disque holomorphe $\Delta \subset X$. □

Soit T un courant d'Ahlfors ; le théorème de décomposition de Siu (voir [**25**]) montre que

$$T = \sum_j \nu_j [C_j] + R$$

où les $C_j \subset X$ sont des courbes compactes, et R est un courant positif fermé. Le théorème 0.2 montre en particulier le résultat suivant.

COROLLAIRE 0.4 ([**12**], [**11**]). — *Le genre géométrique des courbes C_j ci-dessus est inférieur ou égal à* 1.

Il convient de citer ici un théorème dû à T. Nishino et M. Suzuki. Soit $f : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to X$ une application holomorphe. On note

$$f(0) := \{x \in X / x = \lim_m f(z_m) \text{ ou } (z_m) \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}, z_m \to 0\};$$

c'est un ensemble fermé, et on a (voir [**20**]) : *si $f(0)$ coïncide avec une courbe analytique $C \subset X$, alors le genre géométrique de toute composante de C est zéro ou un.* □

Voici en quelques mots le schéma de la preuve : l'outil technique principal est une version très astucieuse du théorème de compacité de Bishop-Gromov pour une famille de disques d'aire majorée.

Un lemme de Besicovitch montre que, pour tout entier positif $m \gg 0$, il existe dans $\mathbb{D}$ une famille F_m de disques disjoints, dont l'image par φ_m intersecte un voisinage de K selon un ensemble d'aire ≥ 1 ; le nombre de tels disques est de l'ordre de l'aire de l'image de φ_m (notée a_m), car T charge K. Un argument simple montre qu'on peut supposer de plus que l'aire de l'image de ces disques est majorée uniformément (par rapport à m). Si on croit à l'énoncé 0.2, le germe de la courbe entière qu'on doit obtenir se trouve parmi ces disques, et une idée importante dans l'approche de J. Duval est tout simplement de « doubler » les disques à la source. Plusieurs problèmes se posent : d'abord, les disques de rayon double doivent être contenus dans $\mathbb{D}$. Ce serait le cas pour une grande partie de notre famille de disques, comme conséquence de l'hypothèse T *fermé.* Ensuite, rien ne garantit qu'après avoir doublé le rayon des disques, on conserve un nombre de l'ordre de a_m de disques *disjoints* (et, sans cela, on ne peut plus obtenir un majorant uniforme de l'aire de leur image). L'argument à ce moment devient dichotomique : si le nombre de disques disjoints de rayon double est toujours de l'ordre de a_m, on recommence ce processus ; sinon, on produit des anneaux disjoints de module arbitrairement grand, qui finiront par engendrer une image non-constante de $\mathbb{C}^\star$.

Ce texte est organisé comme suit. Dans la première partie, on esquisse la preuve du 0.2, en suivant de très près l'article original [**12**]. Ensuite, nous allons évoquer certains faits/observations illustrant le rapport entre ce résultat et les travaux de

M. McQuillan et M. Brunella concernant les courbes entières tangentes aux feuilletages holomorphes par disques. Finalement, on voudrait mettre en évidence quelques problèmes de géométrie algébrique où les idées et techniques introduites dans [**12**] pourraient être utiles. □

Je remercie pour leur aide à la préparation de cet exposé M. Brunella, F. Campana, B. Claudon, M. Damian, O. Debarre, J. Duval et M. McQuillan. □

1. QUELQUES IDÉES DE LA PREUVE DE 0.2

1.1. La technique

Notre point de départ sera le théorème de compacité de Bishop-Gromov, dans la version suivante (voir e.g. [**1**], [**13**], [**24**]).

THÉORÈME 1.1. — *Considérons* $(g_m) \subset \mathrm{H}(\mathbb{D}, X)$ *une suite d'applications telle que l'aire de l'image* $\Delta_m := g_m(\mathbb{D})$ *soit uniformément majorée. Alors, quitte à extraire, on a :*

1. *la suite* g_m *converge vers* g *sur* $\mathbb{D}$ *privé d'un nombre fini de points d'explosion* e_j ;
2. *la limite* g *se prolonge sur tout le disque* $\mathbb{D}$;
3. *en un point d'explosion* $e \in \mathbb{D}$, *il existe une suite de disques* $d_m \subset \mathbb{D}$ *qui tendent vers* e *et telle que les* $g_m(d_m)$ *convergent vers une réunion finie de courbes rationnelles.*

La convergence du point 3) est celle de Hausdorff et est en aire ; on dit alors que g_m converge vers g *au sens de Gromov.* □

On remarquera que, dans le cas où les g_m sont définies sur *l'adhérence* du disque unité, l'analyse des explosions au $\partial\mathbb{D}$ produit soit des courbes rationnelles, soit des *disques* (cette dernière éventualité se produit, par exemple, lorsque le rapport entre la norme de la dérivée et la distance au bord est borné). Au vu du théorème qu'on veut démontrer, nous voulons donner un critère pour empêcher cette dernière possibilité de se produire ; c'est une première contribution importante de l'article [**12**], dont voici les deux versions ci-dessous.

COROLLAIRE 1.2 ([**12**]). — *Soit* $f_m : \mathbb{D} \setminus d_m \to X$ *une famille de disques holomorphes, où* d_m *est une suite de disques convergeant vers l'origine. On suppose que la longueur de* $f_m(\partial d_m)$ *converge vers zéro, et que l'aire de l'image des* (f_m) *est uniformément bornée. Alors* f_m *tend au sens de Gromov vers une application* $f_\infty \in \mathrm{H}(\mathbb{D}, X)$.

En d'autres termes, l'explosion éventuelle à l'origine produit forcément un arbre de courbes rationnelles, malgré la présence du bord ∂d_m. □

La deuxième variante de ce type de résultat qui nous sera très utile par la suite est la suivante.

COROLLAIRE 1.3 ([**12**]). — *Soit $\mathbb{D}^+$ le demi-disque supérieur et soit $f_m : \mathbb{D}^+ \to X$ une suite d'applications holomorphes, de classe $\mathscr{C}^\infty$ jusqu'à $s :=]-1,1[$. On suppose que l'aire de $f_m(\mathbb{D}^+)$ est uniformément bornée, et que la longueur de $f_m(s)$ tend vers zéro. Alors (f_m) tend au sens de Gromov vers un point.*

La preuve détaillée de 1.3 est donnée dans [**12**] ; donc, nous allons indiquer les arguments pour 1.2, pour illustrer la façon dont l'hypothèse sur la longueur du bord intervient.

PREUVE (de 1.2). — Compte tenu du fait que l'aire de l'image de f_m est uniformément bornée, et que l'aire d'une courbe rationnelle est minorée par une constante universelle, il existe un réel $r_0 > 0$ avec la propriété suivante : pour tout compact $K \subset \mathbb{D}(r_0) \setminus \{0\}$, la norme sup de la dérivée de f_m sur K est uniformément majorée (pour $m \gg 0$, tel que f_m soit définie sur K).

On suppose que les disques d_m sont centrés en zéro ; soit r_m le rayon de d_m. Nous considérons $z_m \in \mathbb{D}(r_0) \setminus \mathbb{D}(r_m)$ tel que

$$C_m := |f'_m(z_m)| = \sup_{z \in \mathbb{D}(r_0) \setminus \mathbb{D}(r_m)} |f'_m(z)|.$$

Par la suite, nous allons analyser les cas suivants.

• $\limsup_m C_m(|z_m| - r_m) \to \infty$: alors on définit la suite de disques

$$g_m(z) := f_m\big(z_m + \frac{z}{C_m}\big)$$

dont le rayon tend vers l'infini et dont la dérivée est uniformément majorée et vaut 1 à l'origine. Par ailleurs, l'aire de g_m est aussi uniformément majorée, donc par passage à la limite, on produit une courbe rationnelle.

• $\limsup_m C_m(|z_m| - r_m) < \infty$: c'est dans ce cas que l'hypothèse sur la longueur du bord de l'image de f_m est indispensable. Par renormalisation à la source, on définit $\widetilde{f}_m : \mathbb{D}(C_m r_0) \setminus \mathbb{D}(C_m r_m) \to X$ telle que

$$\widetilde{f}_m(w) := f_m\big(\frac{w}{C_m}\big).$$

La dérivée de $\widetilde{f}_m$ est uniformément bornée. Par ailleurs, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier positif m, on ait $C_m|z_m| < C_m r_m + C$. Si la suite $C_m r_m$ ne tend pas vers zéro, alors les fonctions $\widetilde{f}_m$ produisent par passage à la limite une application holomorphe non-constante sur un disque fermé, qui est constante sur un intervalle de longueur positive contenu dans le bord du disque, ce qui est absurde.

En conclusion, la suite $C_m r_m$ converge vers zéro, et notre suite $\widetilde{f}_m$ converge vers une courbe rationnelle (on observe que la limite est définie y compris en zéro, car l'aire totale est bornée, voir [**13**]). □

Les arguments pour 1.3 sont parfaitement analogues : l'étude de la convergence au sens de Gromov autour des points d'explosion combinée avec l'hypothèse font que la limite est composée seulement des courbes rationnelles, exactement comme dans le cas compact. □

1.2. Comment utiliser la technique

Soit $(\varphi_m) \subset \mathrm{H}(\overline{\mathbb{D}}, X)$ une famille de disques dans X définis sur l'adhérence du disque unité. On introduit les notations suivantes $\Delta_m := \varphi_m(\mathbb{D})$, $a_m := \int_{\mathbb{D}} \varphi_m^\star \omega$, i.e. l'aire de Δ_m par rapport à une métrique fixée ω sur X, et l_m désigne la longueur du bord de Δ_m.
Supposons que

$$l_m / a_m \to 0 \tag{1}$$

lorsque $m \to \infty$. Alors (quitte à extraire), les Δ_m définissent un courant d'Ahlfors T par la relation

$$\langle T, \alpha \rangle := \lim_m \frac{1}{a_m} \int_{\mathbb{D}} \varphi_m^\star \alpha$$

pour toute (1,1)–forme α sur X. Le courant T est positif, et l'hypothèse (1) montre facilement qu'il est fermé (voir e.g. [**5**])

On considère $K \subset X$ un compact chargé par T ; cela signifie qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\langle T, \chi_U \omega \rangle \geq \delta,$$

pour tout ouvert $U \subset X$ qui contient K ; la notation χ_U dans l'intégrale précédente désigne la fonction caractéristique de U.

Il existe donc un système de voisinages (U_m) de K tel que

$$\frac{1}{a_m} \int_{\mathbb{D}} \varphi_m^\star (\chi_{U_m} \omega) \geq \delta > 0\,; \tag{2}$$

donc si on définit la mesure $\mu_m := \varphi_m^\star (\chi_{U_m} \omega)$ sur $\mathbb{D}$, la masse totale de μ_m sera supérieure à δa_m.

Avant de commencer la preuve proprement dite, on remarque qu'on peut supposer

$$a_m \to \infty. \tag{3}$$

En effet, dans le cas contraire, on aura $l_m \to 0$ (par la relation (1) ci-dessus) et φ_m convergera au sens de Gromov vers une famille de courbes rationnelles. Alors la preuve du 0.2 est terminée, car le support de T est constitué par ces courbes, donc l'aire de l'intersection avec K d'au moins une d'elles sera positive.

Les arguments principaux de la démonstration de J. Duval seront présentés dans les lignes suivantes.

— *Construction des germes*

Soit m un entier positif. Pour chaque point $t \in \mathbb{D}$, on considère le disque de rayon minimal centré en t et de masse égale à 1 par rapport à la mesure μ_m (un tel disque existe dès que $m \gg 0$, grâce à la relation (3) ci-dessus). Par le lemme classique de Besicovitch (cf. [**16**]), on peut extraire de l'ensemble de disques ainsi obtenus une famille F_m qui a les propriétés suivantes :

A.1 les disques de F_m sont disjoints ;

A.2 le cardinal de F_m est supérieur à $\delta_1 a_m$ pour un certain réel positif δ_1 ;

A.3 pour chaque disque $D \in F_m$, on a $\mu_m(\chi_D) = 1$.

On peut remarquer que, même si nous appelons « disques » tous les éléments de F_m, certains ne le sont pas vraiment (à cause du bord de $\mathbb{D}$).

Pour chaque m assez grand, l'ensemble F_m sera notre famille initiale ; le but du processus qui va suivre est d'agrandir successivement la taille des rayons des disques, tout en conservant les propriétés A.1-A.3 ci-dessus (nous allons voir par la suite la façon dont ces propriétés interviennent).

— *Récurrence*

Soient D un disque et λ un réel positif ; on note λD le disque concentrique dont le rayon est multiplié par λ. Pour chaque entier $m \gg 0$, on note

$$2F_m := \{2D/D \in F_m\}$$

(on « double les disques » de la famille précédente F_m). L'observation pertinente dans ce contexte est la suivante.

Proposition 1.4 ([**12**]). — *Supposons que F_m admette un sous-ensemble F'_m tel que $2F'_m$ vérifie les propriétés* A.1 *et* A.2 *ci-dessus. Si on ne peut pas extraire une famille F^1_m de F'_m avec les propriétés* A.1, A.2 *et*

A.4 *les éléments de F^1_m sont contenus dans $\mathbb{D}$;*

A.5 *l'aire de l'image des éléments de F^1_m est uniformément bornée (par rapport à m) ;*

alors il existe une courbe rationnelle $C \subset X$ telle que l'aire de $C \cap K$ soit positive. □

La preuve de cette proposition est assez aisée ; voici en quelques mots le type d'arguments impliqués.

Par hypothèse, card $F'_m \geq \delta a_m$; alors nous avons au plus $\frac{\delta}{2} a_m$ disques $D \in F_m$ tels que l'aire de $\varphi_m(2D \cap \mathbb{D})$ soit supérieure à $2/\delta$ (on utilise ici le fait que les éléments de F'_m sont disjoints). Ainsi, quitte à réduire le cardinal de F'_m de moitié, les disques restants vont satisfaire une borne d'aire uniforme.

Un raisonnement analogue montre qu'un sous-ensemble de disques $D \in F'_m$ de cardinal au moins $\frac{\delta}{4} a_m$ satisfait une borne d'aire uniforme *et* la longueur du chemin $\varphi_m(2D \cap \partial\mathbb{D})$ est inférieure à $\dfrac{4l_m}{\delta a_m}$. Combiné avec le corollaire 1.3, on obtient soit la relation A.4 dans 1.4, soit une courbe rationnelle.

— *Une première conclusion*

Supposons que le procédé décrit au paragraphe précédent peut être répété à l'infini. Alors on construit les familles (F^k_m) telles que :

A.6 on a $F^{k+1}_m \subset F^k_m$;

A.7 le cardinal de F^k_m est minoré par $\delta_k a_m$, où δ_k est un réel positif ;

A.8 si D est un disque de F^k_m, alors on a $2^k D \subset \mathbb{D}$;

A.9 il existe une constante C_k uniforme par rapport à m, et telle que l'aire de $\varphi_m(2^k D)$ soit majorée par C_k.

Compte tenu de ces propriétés, la conclusion de 0.2 s'ensuit par le procédé diagonal standard. □

— *L'alternative*

Si l'opération de doubler les disques s'interrompt avant la fin de la démonstration de 0.2 (disons au début, afin d'alléger l'écriture) la proposition 1.4 explique sans équivoque pourquoi : on ne peut extraire de F_m une famille de cardinaux de l'ordre de a_m dont les disques doublés soient disjoints. La façon de procéder sera de remplacer les disques par des anneaux et une analyse combinatoire, comme suit.

— *Arborescence des presque–incidences*

Pour commencer, on peut supposer que, si D et D' sont deux disques appartenant à la famille $4F_m$ tels que D' soit inférieur à D et tels que $2D \cap 2D'$ soit non-vide, alors $D' \leq 16D$ (la relation d'ordre est celle induite par la longueur du rayon), voir **[12]**, page 7 (nous allons voir un peu plus loin la raison pour laquelle on utilise précisément le multiple « $4F_m$ »).

Les incidences de disques induisent une structure de graphe orienté sur $4F_m$, dont les sommets sont les éléments de cet ensemble, et une arête joint D et D' si $D' \leq D$ et $D' \cap D \neq \varnothing$. On transforme ce graphe en une *arborescence* par le procédé suivant : soit δ le disque le plus petit de $4F_m$ et notons k sa valence. Alors on remplace ces arêtes par un chemin $D_1 \to ... \to D_k \to \delta$, et ensuite on recommence ce procédé en considérant le disque de taille immédiatement supérieure

Voici quelques propriétés de la structure d'arbre $\mathscr{A}_m$ ainsi obtenue :

B.1 si $D \cap D' \neq \varnothing$, alors il existe un chemin dans $\mathscr{A}_m$ de D à D' ;

B.2 s'il existe un chemin de D à D' dans $\mathscr{A}_m$, alors D' est contenu dans $2D$.

Par une analyse astucieuse de la structure de $\mathscr{A}_m$ – pour laquelle on renvoie une fois de plus à l'article original [**12**] –, on aboutit à une nouvelle arborescence notée $\mathscr{A}'_m$, qui vérifiera de plus :

B.3 $\mathscr{A}'_m$ est constitué par des chemins $D_1 \to ... \to D_k$ qui sont des disques emboîtés, i.e. $2D_{j+1}$ est contenu dans D_j ;

B.4 le nombre de sommets de $\mathscr{A}'_m$ est de l'ordre de a_m ; en revanche, le nombre des chemins qui forment cette arborescence est $o(a_m)$;

B.5 pour tout chemin $D_1 \to D_2 \to ... \to D_k$ de $\mathscr{A}'_m$, les anneaux $D_j \setminus D_{j+1}$ sont de module minoré, et l'aire de leurs images par φ_m intersectées avec U_m est également minorée.

La construction de $\mathscr{A}'_m$ avec les propriétés ci-dessus ne sera pas reproduite ici ; voici néanmoins le type d'argument qu'on est amené à faire.

Dans l'arborescence $\mathscr{A}_m$, le nombre de sommets terminaux (i.e. qui ne sont pas origine d'une arête) est de l'ordre de $o(a_m)$, car cela correspond aux disques dans F_m qui restent disjoints *après* les avoir doublés, et on a convenu que le nombre de ces derniers est négligeable devant a_m. Par ailleurs, la somme des valences dans un arbre est majorée par le nombre des sommets ; comme conséquence, on déduit que le nombre de sommets de $\mathscr{A}_m$ qui sont origines d'au moins deux arêtes est aussi $o(a_m)$. Si on supprime ce type de sommets multiples, on obtient une nouvelle arborescence qui vérifie B.4.

On note G_m les anneaux de $\mathscr{A}'_m$.

— *Doublement des anneaux et fin de la preuve*

Le procédé de « doublement des anneaux » auquel on fait allusion ci-dessus est le suivant. Soit $A_j := D_j \setminus D_{j+1}$ un élément de G_m ; son double est par définition

$2A_j := D_{j-1} \setminus D_{j+2}$. Nous observons que ces anneaux ne sont pas nécessairement disjoints, mais $\mathbb{D}$ est recouvert au plus 3 fois par les $2A_j$. On peut donc extraire un sous-ensemble $G_m^1 \subset G_m$ tel que :

B.6 les anneaux $2A$ sont disjoints, et l'aire de l'image (par φ_m) de la trace de $2A$ sur $\mathbb{D}$ est uniformément majorée, pour tout $A \in G_m^1$;

B.7 la longueur de l'image de $\varphi_m(2A \cap \partial\mathbb{D})$ converge vers zéro lorsque $m \to \infty$.

Par un raisonnement déjà évoqué en début de preuve, on aura l'alternative suivante : *lorsque $m \to \infty$, soit les anneaux de G_m^1 sont contenus dans $\mathbb{D}$, soit on produit une courbe rationnelle dont l'aire de l'intersection avec K est positive.*

Supposons que lorsqu'on applique ce processus de manière récurrente on est toujours dans le premier cas (sinon, la preuve est finie) ; on produit une famille G_m^k telle que :

B.8 pour tout couple de paramètres (m, k), on ait $G_m^{k+1} \subset G_m^k$, et le cardinal de G_m^k soit supérieur à $\delta_k a_m$, pour un certain réel positif δ_k indépendant de m ;

B.9 si $A \in G_m^k$, alors $2^k A \subset \mathbb{D}$;

B.10 il existe une constante C_k telle que l'aire de l'anneau $\varphi_m(2^k A)$ soit majorée par C_k.

Bien entendu, il se peut que la suite (δ_k) ci-dessus tende vers zéro, mais ceci n'est pas une obstruction pour continuer le doublement des anneaux. Compte tenu de ces relations, voici la fin de la preuve.

Considérons $A_m \in G_m^m$; alors la relation B.9 ci-dessus montre que $2^m A_m \subset \mathbb{D}$, tandis que par B.5 on a $\mu_m(\chi_{A_m}) \geq C_0$ (indépendamment de m). De plus, l'aire de $\varphi_m(2^k A_m)$ est majorée par C_k, si $1 \leq k \leq m$.

Supposons que le module de A_m est borné, et soit r_m l'application affine de $\mathbb{C}$ telle que $r_m(0)$ soit le centre du bord intérieur de $2^m A_m$ et telle que r'_m soit le diamètre de A_m. L'image inverse de $2^m A_m$ par r_m tend vers $\mathbb{C}^\star$ (car le diamètre de A_m tend vers zéro). Quitte à extraire, la suite $\varphi_m \circ r_m$ tend vers une application $\varphi : \mathbb{C}^\star \to X$, dont l'aire de l'intersection avec K est positive, car l'anneau $r_m^{-1}(A_m)$ reste dans un compact de $\mathbb{C}^\star$ lorsque $m \to \infty$.

Le raisonnement pour le cas où le module de A_m n'est pas borné est similaire et ceci achève la preuve de 0.2. □

Remarque 1.5. — En gros, on a analysé deux cas dans le cours de la preuve de 0.2 : un modèle simple du premier est celui d'une famille de disque F_m « bien répartis » dans $\mathbb{D}$, tandis que dans le second cas on a des chaînes de disques emboîtés, qui se concentrent en un point. Pour une présentation complète de la démonstration, voir [**12**]. □

Remarque 1.6. — Une fois le théorème principal établi, déduire les corollaires 0.3 et 0.4 est immédiat ; cependant, on voudrait mettre en parallèle 0.3 avec la conjecture suivante, formulée par J.-P. Demailly dans [**10**] : *une variété projective X est hyperbolique si et seulement si elle est algébriquement hyperbolique, i.e. s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute courbe complète $Z \subset X$, on ait*

$$\deg(Z) \leq Cg(\widehat{Z}).$$

Dans la relation ci-dessus, on note $\widehat{Z}$ la normalisation de la courbe Z . □

2. PROPRIÉTÉS NUMÉRIQUES DES COURANTS ASSOCIÉS AUX COURBES ENTIÈRES

Soit X une variété projective non-singulière de dimension n ; considérons une courbe entière $\varphi : \mathbb{C} \to X$ tracée sur X. L'inégalité isopérimétrique d'Ahlfors (voir e.g. [**5**], ainsi que les références dans cet article) montre qu'on peut choisir une suite de rayons $r_m \to \infty$ telle que le courant défini par

$$\langle T, \alpha \rangle := \lim_m \frac{1}{a_m} \int_{\mathbb{D}(r_m)} \varphi^\star \alpha$$

soit fermé ; autrement dit, la courbe φ produit un courant d'Ahlfors à la limite. Ainsi, nous pouvons remarquer que le théorème 0.2 nous donne des renseignements importants sur les compacts de X chargés par ce courant, donc sur le comportement asymptotique de la courbe φ.

Dans les travaux de McQuillan sur l'hyperbolicité des surfaces algébriques (voir [**17**], [**19**] et également [**6**]), c'est la version « à la Nevanlinna » de ce courant qui joue un rôle déterminant ; en voici la construction, en quelque mots.

Soit ω une métrique fixée sur X ; *l'indicatrice de croissance* d'une courbe entière φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$r \to T(\varphi, r) := \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{D}(t)} \varphi^\star \omega.$$

Ensuite, on utilise cette quantité comme facteur de normalisation (à la place de l'aire dans (1)) et on définit le courant positif $T_r[\varphi]$ par la relation

$$\langle T_r[\varphi], \alpha \rangle := \frac{1}{T(\varphi, r)} \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{D}(t)} \varphi^\star \alpha,$$

où α est une forme de type (1,1) sur X. Exactement comme dans le cas des courants d'Ahlfors, on peut trouver une suite $r_m \to \infty$ telle que

$$T[\varphi] := \lim_m T_{r_m}[\varphi] \tag{4}$$

soit positif *et fermé* (voir e.g. [**5**]).
Les arguments employés pour la démonstration de 0.2 se transposent sans difficulté afin de montrer un résultat analogue pour $T[\varphi]$ (voir [**12**]). □

En guise de motivation pour les énoncés à venir, nous allons nous placer maintenant dans le contexte suivant.

Soit X une variété projective et non-singulière, dont le fibré tangent est noté T_X. On suppose que X est dirigée par un fibré vectoriel $V \subset T_X$ de rang 2 (cf. [**10**]), et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe par disques, tel que le fibré tangent $T_{\mathcal{F}}$ qui lui est associé soit contenu dans V, en dehors des singularités de $\mathcal{F}$. Considérons également une courbe entière $\varphi : \mathbb{C} \to X$ tangente à $\mathcal{F}$.

Un problème important dans le cadre de la conjecture de Green-Griffiths sera d'élaborer un critère qui assure l'existence d'une sous-variété algébrique $Z \subset X$ qui contient l'image de φ (voir [**22**] ainsi que les références dans cet article pour un *survey* des résultats récents et des techniques autour de ce problème).

L'idée introduite par M. McQuillan dans [**17**] est d'utiliser le courant $T[\varphi]$ comme « compactification de φ » ; les techniques usuelles de la théorie d'intersection deviennent ainsi disponibles. Supposons la relation ci-dessous vérifiée

$$\langle T[\varphi], \Theta\big(\det(V)\big)\rangle < 0,$$

et l'image de la courbe φ Zariski-dense ; l'inégalité précédente sera contredite si on est capable de montrer que $\langle T[\varphi], \Theta\big(T_{\mathcal{F}}\big)\rangle \geq 0$ et $\langle T[\varphi], \Theta\big(N_{\mathcal{F},V}\big)\rangle \geq 0$ (on note $N_{\mathcal{F},V}$ le fibré en droites dont le dual est contenu dans $V^\star$ en dehors des singularités de $\mathcal{F}$ et qui est formé de 1-formes holomorphes s'annulant le long de $\mathcal{F}$).

Dans le cas où ce programme a été complété (cf. [**17**], [**19**] et également [**4**], [**6**]), on utilise deux techniques fondamentales : le théorème de « désingularisation » des feuilletages et les propriétés numériques de $T[\varphi]$. Par la suite, nous allons mettre en évidence les connexions du théorème 0.2 avec la seconde technique.

On note $\mathcal{E}_{NS} \subset H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ le sous–ensemble correspondant aux fibrés en droites *pseudo–effectifs* sur X, i.e. l'adhérence du cône des $\mathbb{Q}$–diviseurs effectifs.

— Soient D une hypersurface réduite et irréductible de X et s_D la section canonique de $\mathcal{O}(D)$ qui lui est associée. Si h est une métrique fixée sur $\mathcal{O}(D)$, la formule de Jensen en conjonction avec la formule de Poincaré–Lelong implique

$$\langle T_r[\varphi], \Theta_h(D)\rangle \geq \frac{1}{T(\varphi, r)}\Big(\sum_j \nu_j \log_+\big(\frac{r}{|z_j|}\big) + O(1)\Big) \tag{5}$$

où $\Theta_h(D)$ désigne la forme de courbure de $\mathcal{O}(D)$ par rapport à h et $\sum_j \nu_j\delta_{z_j}$ est le diviseur sur $\mathbb{C}$ correspondant à $\varphi^\star D$; comme conséquence, nous avons

$$\langle T[\varphi], \alpha\rangle \geq 0 \tag{6}$$

pour tout $\alpha \in \mathcal{E}_{NS}$.

— Le problème suivant sera *de formuler certaines conditions portant sur* φ *et/ou* $T[\varphi]$ *afin d'avoir une inégalité stricte dans (6)*, dès que la *dimension numérique* du fibré correspondant à α est positive. Nous n'allons pas expliquer ici cette notion en toute généralité, mais on rappelle toutefois une conséquence de cette propriété qui va nous être extrêmement utile.

Fixons $A \to X$ un fibré ample et soit $L \to X$ un fibré pseudo–effectif. On note $\nu(L)$ sa dimension numérique. Alors on a : *pour chaque* $x \in X$ *et* $k \geq 1$, *il existe* D_k *un* $\mathbb{Q}$*–diviseur effectif dans* $c_1(kL + A)$ *dont la multiplicité en* x *est de l'ordre* $k^{\frac{\nu(L)}{n}}$ (c'est une conséquence de la formule de Riemann-Roch, voir e.g. [**2**], [**18**]).

Un critère « théorique » qui assurera une inégalité stricte dans (6) sera de supposer que la courbe φ passe par un point $x \in X$ assez de fois pour que la limite du terme de dénombrement dans (5) soit positive : lorsque $D := D_k$ et $k \gg 0$, on obtiendrait en effet

$$\langle T[\varphi], \Theta(kL + A)\rangle \geq C_0 k^{\frac{\nu(L)}{n}} \tag{7}$$

et donc $\langle T[\varphi], \Theta(L)\rangle > 0$ si $\nu(L) \geq 1$. Mais l'hypothèse qu'on a faite pour avoir cette inégalité est trop forte : pratiquement, on demande que l'équation $\varphi(z) = x$ ait autant de solutions dans $\mathbb{D}(r)$ que $\varphi(z) \in H$ où H est une section hyperplane !

Supposons qu'on remplace l'hypothèse précédente par la condition $\nu(T[\varphi], x) > 0$, i.e. le nombre de Lelong de $T[\varphi]$ en x est positif. Dans ce cas, on voit sans beaucoup d'efforts que le courant associé à la courbe $z \to (z, \exp(z))$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sera de carré nul, donc cette hypothèse n'est pas suffisante pour notre but. Néanmoins, on a l'énoncé suivant.

Proposition 2.1 ([**18**], [**21**]). — *Soit* $\varphi : \mathbb{C} \to X$ *une courbe entière, telle que* $\nu(T[\varphi], x) > 0$. *On suppose que le courant* $T[\varphi]$ *ne charge aucun ensemble analytique qui contient* x. *Alors*

$$\langle T[\varphi], \Theta(L)\rangle > 0 \tag{8}$$

pour tout fibré pseudo–effectif L *tel que* $\nu(L) \geq 1$.

Nous ne donnons pas la preuve de cette remarque ici ; intuitivement, la raison pour laquelle on a besoin de l'hypothèse supplémentaire dans l'énoncé ci-dessus est qu'en général les diviseurs D_k qu'on voudrait utiliser pour montrer l'inégalité (8) n'ont pas une singularité isolée en x. □

La remarque précédente est particulièrement intéressante lorsqu'on la combine avec le théorème 0.2 : *si* $\nu(T[\varphi], x) > 0$, *alors soit* $T[\varphi]$ *est strictement positif sur la partie de* $\mathcal{E}_{NS}$ *correspondant aux diviseurs dont la dimension numérique est positive, soit* *il existe un ensemble analytique* $Y \subsetneq X$ *qui contient l'image d'une courbe entière non-constante.* On se réfère à l'article [**17**] (voir également le preprint [**19**]) pour les conséquences de ce fait dans le contexte de la conjecture de Green-Griffiths.

Les propriétés numériques des courants associés aux courbes entières ont été également utilisées dans [**8**] pour des applications concernant la classe des *variétés spéciales* introduites par F. Campana dans [**7**]

Remarque 2.2. — Dans l'article [**21**], nous établissons des propriétés numériques analogues dans le cadre plus général des classes de cohomologie pseudo–effectives transcendantes.

3. QUELQUES QUESTIONS

Pour finir, nous voudrions rappeler quelques problèmes concernant les familles de disques holomorphes dans une variété projective.

— Dans l'article [**7**], on introduit la notion suivante : *la variété* X *est spéciale si elle n'admet pas des fibrations de type général,* i.e. si $f : X \to Y$ est une application rationnelle dominante, alors la dimension de Kodaira de l'orbifold (Y, Δ_f) est strictement inférieure à $\dim Y$. La conjecture de F. Campana est la suivante : X *est spéciale si et seulement si la pseudo-métrique de Kobayashi est identiquement nulle sur* $X \times X$. Cette conjecture est confirmée pour les courbes et les surfaces qui ne sont pas de type général et pour les variétés rationnellement connexes ; voir [**7**], page 615, pour plus de renseignements à ce sujet. □

— La conjecture suivante a été formulée par Iitaka dans [**14**] : *soit* X *une variété projective, telle que son revêtement universel soit* $\mathbb{C}^n$ *; alors* X *est une variété abélienne, à revêtement étale fini près.* Dans [**8**], on montre que la solution de cette conjecture s'ensuit *si* on est capable de reparamétrer le revêtement universel $\pi : \mathbb{C}^n \to X$ de la manière suivante : *il existe une suite de boules* $f_m : \mathbb{B}(m) \to X$ *telle que :*

1) *il existe un ouvert* $U \subset X$ *contenu dans l'image de* f_m*, pour tout* $m \geq 1$;

2) *la norme du jacobien de* f_m *en zéro vaut* 1 ;

3) *la suite* $\dfrac{1}{m^2} T(f_m, m)$ *est bornée (cette condition sera satisfaite par exemple s'il existe une constante* C *telle que* $\sup |df_m| \leq C$*).*

Les arguments classiques de Brody ne semblent pas adéquats pour résoudre le problème de reparamétrisation évoqué ci-dessus ; une question sera de savoir si l'analyse combinatoire de J. Duval – transposée dans le contexte actuel – peut aider. □

— Dans [17], on se place dans le cadre suivant : on a une surface S munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$, et une courbe entière φ tracée sur S, tangente à $\mathcal{F}$. Si $N_{\mathcal{F}}$ désigne le fibré normal du feuilletage, M. McQuillan montre l'énoncé suivant : *si* $\nu(T[\varphi], x) = 0$ *pour tout* $x \in X$, *alors* $\langle T, \Theta(N_{\mathcal{F}})\rangle \geq 0$. En fait, son résultat est plus quantitatif dans le sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε telle que

$$\langle T, \Theta(N_{\mathcal{F}})\rangle + \varepsilon \geq -C_\varepsilon \sum_{x \in \mathcal{F}_s} \nu(T[\varphi], x) \tag{9}$$

où les $\mathcal{F}_s$ sont les points singuliers de $\mathcal{F}$ (voir également [6]). La démonstration présentée dans [17] est assez indirecte, dans le sens suivant : on montre d'abord (9) pour les feuilletages dont les singularités sont réduites, et l'inégalité s'ensuit par un théorème de Seidenberg (voir [23], et aussi [4] pour une présentation moderne) et la formule de changement de $N_{\mathcal{F}}$ par éclatements.

Une autre façon d'interpréter (9) est : *si* $\langle T[\varphi], \Theta(N_{\mathcal{F}})\rangle < 0$, *alors* $T[\varphi]$ *aura un nombre de Lelong positif en un point.* Ceci montre que les hypothèses données dans 2.1 ont un support géométrique substantiel.

En dimension supérieure, l'analogue du théorème de Seidenberg n'est pas (encore...) disponible, donc il serait vivement souhaitable de trouver une preuve *directe* de (9) (déjà dans le cas des surfaces). □

— Soit X une variété complexe compacte ; on note $X_1 := \mathbb{P}(T_X)$ la variété projectivisé de son fibré tangent. Soit $\mathcal{O}(1)$ le fibré tautologique sur X_1. Si $\varphi : \mathbb{C} \to X$ est une courbe entière, alors on a l'inégalité suivante :

$$\langle T[d\varphi], \Theta\big(\mathcal{O}(1)\big)\rangle \leq 0$$

(c'est l'inégalité « tautologique », voir [17], [5]).

Considérons la décomposition de Siu des courants associés à φ, respectivement à sa dérivée $d\varphi$:

$$T[\varphi] = \sum_j \nu_j [C_j] + R \tag{10}$$

et

$$T[d\varphi] = \sum_j \nu'_j [C'_j] + R_1. \tag{11}$$

Il est établi dans [21] que les courbes algébriques dans (11) sont soit des relevées canoniques de celles de (10), soit contenues dans les fibres de l'application $X_1 \to X$. Par le corollaire 0.4, le genre géométrique de chaque C_j est strictement inférieur à 2 ; donc $\mathcal{O}(1) \cdot \widehat{C}_j \leq 0$. Donc, l'inégalité tautologique est vérifiée pour la partie algébrique du courant $T[d\varphi]$ correspondant aux relevées des courbes de $T[\varphi]$; une question intéressante sera de savoir si l'inégalité tautologique est vérifiée également pour R_1. □

RÉFÉRENCES

[1] E. BISHOP – Conditions for the analyticity of certain sets, *Michigan Math. J.* **11** (1964), p. 289–304.

[2] S. BOUCKSOM – Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), p. 45–76.

[3] R. BRODY – Compact manifolds in hyperbolicity, *Trans. Amer. Math. Soc.* **235** (1978), p. 213–219.

[4] M. BRUNELLA – Courbes entières et feuilletages holomorphes, *Enseign. Math.* **45** (1999), p. 195–216.

[5] ———, Courbes entières dans les surfaces algébriques complexes (d'après McQuillan, Demailly-El Goul, ...), Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001, exposé n° 881, *Astérisque* **282** (2002), p. 39–61.

[6] ———, *Birational geometry of foliations*, Publicações Matemáticas do IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2004.

[7] F. CAMPANA – Orbifolds, special varieties and classification theory, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **54** (2004), p. 499–630.

[8] F. CAMPANA & M. PĂUN – Variétés faiblement spéciales à courbes entières dégénérées, *Compos. Math.* **143** (2007), p. 95–111.

[9] ———, Une généralisation du théorème de Kobayashi-Ochiai, *Manuscripta Math.* **125** (2008), p. 411–426.

[10] J.-P. DEMAILLY – Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials, in *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., 1997, p. 285–360.

[11] J. DUVAL – Singularités des courants d'Ahlfors, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **39** (2006), p. 527–533.

[12] ———, Sur le lemme de Brody, *Invent. Math.* **173** (2008), p. 305–314.

[13] M. GROMOV – Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* **82** (1985), p. 307–347.

[14] S. IITAKA – Genus and classification of algebraic varieties. I, *Sûgaku* **24** (1972), p. 14–27.

[15] B. KLEINER – Hyperbolicity using minimal surfaces, prépublication.

[16] P. MATTILA – *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 44, Cambridge Univ. Press, 1995.

[17] M. MCQUILLAN – Diophantine approximations and foliations, *Publ. Math. I.H.É.S.* **87** (1998), p. 121–174.

[18] ———, Integrating $\partial\bar{\partial}$, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002)*, Higher Ed. Press, 2002, p. 547–554.

[19] ———, Uniform uniformization, prépublication I.H.É.S., 2005.

[20] T. NISHINO & M. SUZUKI – Sur les singularités essentielles et isolées des applications holomorphes à valeurs dans une surface complexe, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **16** (1980), p. 461–497.

[21] M. PĂUN – Currents associated to transcendental entire curves on compact Kähler manifolds, prépublication, 2003.

[22] E. ROUSSEAU – Hyperbolicité des variétés complexes, cours Peccot, arXiv:0709.3882, 2007.

[23] A. SEIDENBERG – Reduction of singularities of the differential equation $A\,dy = B\,dx$, *Amer. J. Math.* **90** (1968), p. 248–269.

[24] J.-C. SIKORAV – Some properties of holomorphic curves in almost complex manifolds, in *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progr. Math., vol. 117, Birkhäuser, 1994, p. 165–189.

[25] Y. T. SIU – Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, *Invent. Math.* **27** (1974), p. 53–156.

[26] J. WINKELMANN – A projective manifold where Brody and entire curves behave very differently, prépublication arXiv:math/0511142.

Mihai PĂUN

Université de Nancy
Institut Élie Cartan
B.P. 239
F–54506 Vandœuvre-lès-Nancy
E-mail : Mihai.Paun@iecn.u-nancy.fr