MICHEL LEDOUX

Géométrie des espaces métriques mesurés : les travaux de Lott, Villani, Sturm

Astérisque, tome 326 (2009), Séminaire Bourbaki, exp. nº 990, p. 257-279

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__326__257_0>

Séminaire BOURBAKI Mars 2008
60e année, 2007–2008, n° 990, p. 257 à 279

GÉOMÉTRIE DES ESPACES MÉTRIQUES MESURÉS : LES TRAVAUX DE LOTT, VILLANI, STURM

par **Michel LEDOUX**

L'étude géométrique des espaces métriques mesurés s'est récemment dotée d'une définition synthétique de borne inférieure de courbure de Ricci issue de la théorie du transport optimal de mesures grâce aux travaux parallèles et complémentaires de J. Lott et C. Villani [**34, 35**] et K.-T. Sturm [**52, 53**].

L'analogue d'une borne sur la courbure sectionnelle riemannienne dans un espace métrique est ancien, et remonte aux travaux de A. Aleksandrov qui a fourni une définition purement métrique, par comparaison de triangles (voir [**13**], [**12**], [**24**]...). Un aspect significatif de cette définition métrique est sa stabilité par limite de Gromov-Hausdorff, conduisant ainsi à une notion de courbure sur des espaces éventuellement singuliers. (La distance de Gromov-Hausdorff entre deux espaces métriques compacts (X, d) et (X', d') peut être définie comme l'infimum de la distance de Hausdorff $\delta(j(X), j'(X'))$ sur tous les plongements isométriques j, j' de (X, d) et (X', d') respectivement dans un espace métrique (Y, δ).)

Dans le cas de la courbure de Ricci d'une variété riemannienne, une information seulement métrique est insuffisante, et la mesure de volume entre en jeu, reflétant le contrôle de la déformation du volume riemannien par la courbure. La problématique s'inscrit naturellement dans le cadre du théorème de précompacité de M. Gromov pour la famille des variétés riemanniennes uniformément de courbure de Ricci minorée par K, de dimension majorée par N et de diamètre borné par D [**24**], dont les éléments limites sont des espaces métriques mais plus nécessairement des variétés (voir [**16**] pour un examen approfondi de ces espaces limites). L'étude entreprise par J. Lott, C. Villani [**34, 35**] et K.-T. Sturm [**52, 53**] introduit une définition de minoration de la courbure (couplée avec une dimension) dans un espace métrique mesuré (X, d, μ), étendant la minoration de la courbure de Ricci riemannienne, par une propriété de convexité d'une fonctionnelle de type entropique le long de géodésiques dans l'espace des mesures de probabilités sur X. Cette définition est directement inspirée de son analogue sur les espaces réguliers qui s'effectue à travers un transport optimal de mesures. Ces développements récents ont pris place au carrefour de l'analyse, de la géométrie et du calcul des probabilités, notamment à travers le transport de Brenier-Rachev-Rüschendorf-McCann [**11**], [**48**], [**38**], ainsi que par l'examen de diverses inégalités géométriques et fonctionnelles avec les travaux de D. Bakry et M. Émery [**5**], [**4**], F. Otto et C. Villani [**43**], D. Cordero-Erausquin, R. McCann et M. Schmuckenschläger [**19**], [**20**], D. Cordero-Erausquin [**17**], M.-K. von Renesse et K.-T. Sturm [**47**] ...

Cette courte présentation ne donne qu'un aperçu de ces développements, se limitant aux aspects principaux, plusieurs autres introductions (dont ce texte s'inspire) étant déjà disponibles [**18**], [**33**], [**55**], sans compter la monumentale exposition [**56**] de C. Villani lui-même lors de l'École d'Été de Probabilités de Saint-Flour 2005, à paraître dans la collection des Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.

1. LES PRÉMISSES RIEMANNIENNES ET FONCTIONNELLES

Le rôle de la mesure (de volume) dans l'obtention de bornes ou d'inégalités en géométrie riemannienne est souvent un élément clef. L'exemple de la minoration spectrale de Lichnerowicz (cf. e.g. [**23**]) est significatif à cet égard. Soient (M, g) une variété riemannienne compacte (sans bord) de dimension n (≥ 2), Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M (avec la convention des analystes), et λ_1 la première valeur propre non-triviale de Δ. Alors, si $\mathrm{Ric}_x \geq K$, $K > 0$ (au sens où, pour tout $x \in M$ et tout vecteur tangent $v \in T_x(M)$, $\mathrm{Ric}_x(v, v) \geq K|v|^2$),

$$\lambda_1 \geq \frac{nK}{n-1}\,. \tag{1}$$

(Une borne un peu moins fine, indépendante néanmoins de la dimension, est tout simplement $\lambda_1 \geq K$.) La démonstration est la suivante. D'après la formule de Bochner (dans sa forme métrique), pour toute fonction régulière f sur M, en tout point,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\Delta\big(|\nabla f|^2\big) - \nabla f \cdot \nabla(\Delta f) &= \big\|\mathrm{Hess}(f)\big\|_2^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \\ &\geq \frac{1}{n}\,(\Delta f)^2 + K\,|\nabla f|^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Intégrer les deux membres de cette inégalité par rapport à l'élément de volume riemannien dx sur M de sorte que, après intégration par parties de part et d'autre,

$$\int_M (\Delta f)^2 dx \geq \frac{1}{n} \int_M (\Delta f)^2 dx + K \int_M f(-\Delta f) dx.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer l'inégalité à une fonction propre non triviale de $-\Delta$ de valeur propre $\lambda_1 > 0$.

Cette démonstration peut être adaptée pour une autre forme volume, et cette observation a fondé une partie des résultats pionniers de D. Bakry et M. Émery [**5**], [**4**] dans l'étude d'inégalités de trou spectral, de Sobolev logarithmique et de Sobolev pour des opérateurs de diffusion généralisant le laplacien sur une variété. Un exemple simple est le cas d'une mesure de probabilités $d\mu(x) = \mathrm{e}^{-V(x)}dx$ sur $\mathbb{R}^n$ pour un potentiel (régulier) V tel que, en tout point, $\mathrm{Hess}_x(V) \geq K$ pour un $K > 0$ (la mesure gaussienne standard $(2\pi)^{-n/2}\,\mathrm{e}^{-|x|^2/2}dx$, $|\cdot|$ désignant la norme euclidienne, par exemple avec $K = 1$). La mesure μ est invariante et symétrique pour l'opérateur linéaire $\mathrm{L} = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$, et l'hypothèse de convexité sur V se retrouve dans l'analogue de la formule de Bochner pour L,

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad \Gamma_2(f,f) &\equiv \frac{1}{2}\mathrm{L}\big(|\nabla f|^2\big) - \nabla f \cdot \nabla(\mathrm{L}f) \\
&= \big\|\mathrm{Hess}(f)\big\|_2^2 + \mathrm{Hess}(V)(\nabla f, \nabla f) \geq K\,|\nabla f|^2.
\end{aligned}
$$

(Noter que, dans cette famille d'exemples, il n'est en général pas possible d'introduire dans l'inégalité (3) un analogue $\frac{1}{n}\,(\mathrm{L}f)^2$ du terme dimensionnel pour un $n < \infty$.) D. Bakry et M. Émery démontrent que la mesure μ vérifie l'inégalité de Poincaré ou de trou spectral

$$
(4) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\mu \leq \frac{1}{K}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = 0
$$

(qui caractérise variationnellement le λ_1 sur une variété), ainsi que l'inégalité (plus forte) de Sobolev logarithmique ([**50**], [**25**])

$$
(5) \qquad H_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \log f d\mu \leq \frac{1}{2K}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{f}\,|\nabla f|^2 d\mu, \quad f > 0, \; \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = 1.
$$

Le membre de gauche $H_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \log f d\mu$ définit l'entropie relative de la densité de probabilités f par rapport à μ, et l'intégrale $I_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{f}\,|\nabla f|^2 d\mu$ l'information de Fisher. (Que l'inégalité de Sobolev logarithmique (5) renforce l'inégalité de Poincaré (4) peut se constater en appliquant la première à $1+\varepsilon f$, $\int f d\mu = 0$, et en faisant tendre ε vers 0.) Dans cette étude, ils mettent en jeu une méthode de paramétrisation le long du semi-groupe de la chaleur $(P_t)_{t\geq 0}$ associé à l'opérateur L (solution de l'équation $\frac{\partial}{\partial t} P_t f = \mathrm{L} P_t f$) par la propriété de flot de gradient

$$
\frac{d}{dt}\,H_\mu(P_t f) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{L}P_t f \log P_t f d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{P_t f}\,|\nabla P_t f|^2 d\mu.
$$

L'opérateur Γ_2 issu de la formule de Bochner (3) décrit par la formule

$$
\frac{d^2}{dt^2}\,H_\mu(P_t f) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t f\, \Gamma_2(\log P_t f, \log P_t f) d\mu
$$

les propriétés de convexité de l'entropie H_μ le long de P_t qui conduisent à l'inégalité de Sobolev logarithmique (5) sous l'hypothèse de convexité uniforme d'ordre $K > 0$

du potentiel V. Dans [**3**], D. Bakry démontre également une importante équivalence de la minoration de courbure $\Gamma_2 \geq K$ en une condition de commutation

$$|\nabla P_t f| \leq \mathrm{e}^{-Kt} P_t\big(|\nabla f|\big) \tag{6}$$

entre les actions du semi-groupe et du gradient sur toute fonction f suffisamment régulière (qui permet d'atteindre les formes locales des inégalités précédentes). Ces techniques ont permis d'établir nombre d'inégalités fonctionnelles pour des opérateurs de Markov et leurs formes de Dirichlet associées [**4**]. Ce cadre couvre naturellement le cas des variétés à poids $d\mu = \mathrm{e}^{-V} dx$ pour lesquelles la minoration sur l'opérateur Γ_2 s'exprime à travers le critère

$$\mathrm{Ric}_x + \mathrm{Hess}_x(V) \geq K, \quad x \in M. \tag{7}$$

Le tenseur de Bakry-Émery Ric + Hess (V), dont plusieurs aspects géométriques et topologiques sont présentés dans [**39**] et [**32**], apparaît également dans l'équation du flot de Ricci (modifiée) considérée par G. Perelman [**44**]. La comparaison avec la minoration (2) permet aussi d'introduire une notion de couple courbure-dimension (pas nécessairement la dimension topologique pour des opérateurs différentiels du second ordre sur une variété : par exemple, comme noté plus haut, $\mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne et de la mesure gaussienne standard définit de cette façon un espace de courbure 1 et de dimension infinie). Nous renvoyons à la synthèse [**4**] pour plus de détails. Si ces définitions permettent de définir une notion de minorant de la courbure de Ricci pour des espaces et modèles généraux (variétés riemanniennes, graphes, modèles de mécanique statistique, etc.) et de travailler avec elle, celle-ci nécessite néanmoins la donnée préalable, non triviale, d'une structure d'opérateur de diffusion sur ces espaces.

C'est une autre technique de paramétrisation qui va permettre de considérer une notion de minorant de courbure de Ricci dans des espaces métriques mesurés assez généraux, sans donnée complémentaire, étendant la courbure sur les variétés et présentant de remarquables propriétés de stabilité, notamment par limite de Gromov-Hausdorff (mesurée). Cette paramétrisation est issue de la théorie du transport de masse et, à nouveau, la recherche et la compréhension d'inégalités fonctionnelles et géométriques, comme par exemple celle de Brunn-Minkowski, ont joué un rôle prépondérant dans son développement.

L'inégalité géométrique de Brunn-Minkowski-Lusternik indique que, pour des parties compactes non vides A, B de $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{vol}(A+B)^{1/n} \geq \mathrm{vol}(A)^{1/n} + \mathrm{vol}(B)^{1/n}, \tag{8}$$

où $A + B$ désigne la somme de Minkowski $\{x + y; x \in A, y \in B\}$. En choisissant pour B une boule euclidienne de rayon tendant vers 0, cette inégalité conduit à l'inégalité isopérimétrique de $\mathbb{R}^n$. Par homogénéité, l'inégalité (8) est équivalente à

$$\mathrm{vol}\big((1-t)A+tB\big) \geq \mathrm{vol}(A)^{1-t}\mathrm{vol}(B)^t$$

où $t \in [0,1]$ et, sous cette forme, s'établit très souvent par l'intermédiaire de sa version sur les fonctions connue comme le théorème de Prékopa-Leindler (cf. [**36**]).

THÉORÈME 1.1. — *Si $t \in [0,1]$ et si f_0, f_1, f_t sont trois fonctions mesurables positives ou nulles sur $\mathbb{R}^n$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$f_t\big((1-t)x+ty\big) \geq f_0(x)^{1-t} f_1(y)^t, \tag{9}$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_t\,dx \geq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_0\,dx\Big)^{1-t}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_1\,dx\Big)^t.$$

La formulation du théorème de Prékopa-Leindler pour une mesure $d\mu = \mathrm{e}^{-V}dx$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{Hess}_x(V) \geq K$, $K \in \mathbb{R}$, s'énonce après un changement de fonctions sous la forme : si $t \in [0,1]$ et si f_0, f_1, f_t sont trois fonctions positives ou nulles sur $\mathbb{R}^n$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$f_t\big((1-t)x+ty\big) \geq \mathrm{e}^{-Kt(1-t)|x-y|^2/2} f_0(x)^{1-t} f_1(y)^t, \tag{10}$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_t\,d\mu \geq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_0\,d\mu\Big)^{1-t}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_1\,d\mu\Big)^t.$$

On aura observé l'apparition du coefficient $\mathrm{e}^{-Kt(1-t)|x-y|^2/2}$ qui peut s'interpréter comme un coefficient de courbure reflétant les propriétés de convexité du potentiel V, et donc de la géométrie de l'espace mesuré $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure μ. En choisissant, dans (10), $f_0 = 1$, $f_1 = \mathrm{e}^{f/t}$ et en faisant tendre t vers 1, il est démontré dans [**8**] comment déduire l'inégalité de Sobolev logarithmique (5) de cette version du théorème de Prékopa-Leindler.

Le théorème de Prékopa-Leindler peut se démontrer en faisant appel au semi-groupe de la chaleur $(P_t)_{t\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^n$ [**9**] (qui démontre la stabilité de l'hypothèse (9) sous P_t), mais le succès de cette étude va se faire à travers une interpolation par transports de mesures initiée par R. McCann [**37**], et développée ensuite par F. Barthe dans l'obtention d'inégalités de Brascamp-Lieb (cf. [**7**], [**36**]). L'un de ces transports, mis en évidence par Y. Brenier [**10, 11**] et S. T. Rachev et L. Rüschendorf [**48**], assure que le transport d'une mesure à densité $f_0(x)dx$ sur $\mathbb{R}^n$ vers une autre mesure à densité $f_1(y)dy$ de même masse peut s'effectuer par le gradient $\nabla\varphi$ d'une fonction convexe φ ($f_1(y)dy$ est la mesure image de $f_0(x)dx$ par l'application $T = \nabla\varphi$ de $\mathbb{R}^n$

dans lui-même). Considérant alors le changement de variable $z = (1-t)x + t\nabla\varphi(x)$ en supposant φ suffisamment régulière,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f_t(z)\,dz &\geq \int_{\mathbb{R}^n} f_t\big((1-t)x + t\nabla\varphi(x)\big)\det\big((1-t)\,\mathrm{Id} + t\,\mathrm{Hess}_x\,\varphi\big)dx\\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)^{1-t} f_1\big(\nabla\varphi(x)\big)^t(\det\mathrm{Hess}_x\,\varphi)^t dx\end{aligned}$$

où la seconde inégalité résulte de l'hypothèse (9) et de l'inégalité arithmético-géométrique sur le déterminant des matrices symétriques positives $\det\big((1-t)A+tB\big) \geq (\det A)^{1-t}(\det B)^t$. La conclusion s'ensuit à travers l'équation de Monge-Ampère

$$f_0(x) = f_1\big(\nabla\varphi(x)\big)\det(\mathrm{Hess}_x\,\varphi)$$

issue du transport de $f_0(x)dx$ vers $f_1(y)dy$ par $\nabla\varphi$. Une justification rigoureuse nécessite des propriétés de régularité du transport ; des résultats de régularité forte sur φ (sous des hypothèses sur f_0 et f_1) ont été mis en évidence par L. Caffarelli [**14**] alors que R. McCann [**37**] étend l'équation de Monge-Ampère en un sens faible généralisé suffisant pour la démonstration (cf. [**7**], [**36**], [**18**]...).

Ainsi qu'il est exposé dans [**36**], d'autres transports peuvent être mis en œuvre à cet effet, comme par exemple le transport triangulaire de Knothe. Le transport de Brenier-Rachev-Rüschendorf est néanmoins optimal pour le problème dit de Monge assurant, avec les notations précédentes, l'existence d'une solution à la minimisation

$$\inf \int_{\mathbb{R}^n} \big|x - T(x)\big|^2 f_0(x)dx$$

sur toutes les applications $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ envoyant la mesure $f_0(x)dx$ sur $f_1(y)dy$ (sous l'hypothèse de moments d'ordre 2), donnée donc par l'application par $T = \nabla\varphi$, unique f_0dx-presque partout. Ce changement de variable monotone est donc canonique, ne dépendant que de la structure euclidienne. Le problème de G. Monge, qui remonte à son mémoire de 1781 sur la théorie des déblais et des remblais et a été étendu par L. V. Kantorovich aux plans de transfert, est une question ancienne qui a donné lieu à de nombreux développements dans le cadre de la théorie du transport optimal et de ses applications pour laquelle nous renvoyons à la monographie [**45**] pour les aspects classiques. La vision du transport optimal qu'en a développée Y. Brenier et son potentiel applicatif marquent une étape fondamentale dans le regain d'intérêt de cette théorie avec l'étude analytique et géométrique des minimisantes du transport et ses interactions avec la théorie des équations aux dérivées partielles (équation de Monge-Ampère, mécanique des fluides, équations de diffusion...) ainsi qu'en témoigne la première monographie, déjà célèbre, de C. Villani [**54**] (voir aussi [**56**] pour des aspects plus dynamique, probabiliste et géométrique).

Le caractère canonique du transport de Brenier-Rachev-Rüschendorf ouvre parallèlement la porte à son extension géométrique dans les variétés riemanniennes. Celle-ci, due à R. McCann [**38**], requiert une reformulation adéquate en termes du déplacement de x à $T(x) = x + \nabla\psi(x)$ ($\psi(x) = \varphi(x) - \frac{|x|^2}{2}$) afin de comparer le gradient du transport à la hessienne du carré de la distance riemannienne. (M, g) désignera une variété riemannienne complète, connexe, de classe C^∞ (l'hypothèse supplémentaire de compacité pourra simplifier, voire justifier, divers aspects techniques, notamment dans ce texte). L'application exponentielle $\exp_x(v)$ d'un champ de vecteurs v sur (M, g) associe au point x le point $y = \gamma(1)$ obtenu en suivant pendant un temps 1 une courbe géodésique γ issue de x avec la vitesse v. Sur une variété riemannienne complète M, le transport optimal T de $f_0(x)dx$ vers $f_1(y)dy$ qui minimise

$$\inf \int_M d\big(x, T(x)\big)^2 f_0(x)dx$$

pour la distance géodésique d est de la forme $T(x) = \exp_x(\nabla\psi(x))$ où ψ est $d^2/2$-convexe au sens où elle peut s'écrire comme une transformée de Legendre

$$\psi(x) = \sup_{y \in M} \left[\zeta(y) - \frac{d(x,y)^2}{2}\right]$$

par rapport à $d^2/2$ (dans $\mathbb{R}^n$, $\psi(x) = \varphi(x) - \frac{|x|^2}{2}$ et $\zeta(y) = -\varphi^*(y) + \frac{|y|^2}{2}$ où φ^* est la conjuguée de Fenchel-Legendre de φ). Cette propriété exprime que, en un sens faible,

$$\Big[\mathrm{Hess}_x\big(\tfrac{1}{2}\, d^2\big(\cdot\,, T(x_0)\big) + \psi\big)\Big]_{x=x_0} \geq 0$$

pour presque tout x_0 dans le support de f_0. Cette intervention de la métrique riemannienne fait la richesse du transport optimal dans les variétés. Si $J(x)$ est le jacobien de T, l'équation jacobienne $f_0(x) = f_1\big(\exp_x\big(\nabla\psi(x)\big)\big)J(x)$ est satisfaite $f_0(x)dx$-presque partout.

Noter que les atouts du transport optimal de Brenier-Rachev-Rüschendorf-McCann sont quelque peu amoindris par les difficultés liées à son manque de régularité, même pour des densités régulières (cf. [**56**]). Si, suivant les problèmes abordés, des arguments d'approximation peuvent être mis à profit, développer les changements de variables du transport optimal dans un cadre régulier n'est en général pas possible, en particulier dans les variétés. Une construction remarquable de G. Loeper [**31**] montre par exemple que sur une variété riemannienne compacte dont une courbure sectionnelle est strictement négative en un point, il existe des densités de probabilités C^∞ et strictement positives pour lesquelles le transport optimal est discontinu. La théorie du transport optimal fait donc nécessairement appel à des outils d'analyse non régulière, souvent délicats, développés avec succès ces dernières années en particulier par l'école italienne autour de L. Ambrosio (cf. [**1**]).

Forts de cette version géométrique du transport optimal, D. Cordero-Erausquin, R. McCann et M. Schmuckenschläger [**19**] ont ainsi entrepris d'étendre la démonstration par transport du théorème de Prékopa-Leindler au cas des variétés riemanniennes, à l'aide notamment d'un corpus de lemmes techniques d'analyse non régulière, d'intérêt indépendant. Le schéma de la preuve consiste à introduire l'interpolation par déplacement $F_t(x) = \exp_x(t\nabla\psi(x))$, $t \in [0,1]$, issue du transport optimal entre $f_0(x)dx$ et $f_1(y)dy$. Le changement de variables (non régulier) $z = F_t(x)$ conduit alors à la différentielle $dF_t(x)$ qui définit une matrice de champs de Jacobi le long de la géodésique $t \mapsto F_t(x)$. Les auteurs de [**19**] démontrent que les variations du changement de variables sont contrôlées par les facteurs de distorsion du volume $v_t(x,y)$ et $v_{1-t}(y,x)$ où

$$v_t(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{vol}\big(Z_t(x, B_r(y))\big)}{\mathrm{vol}\big(B_{tr}(y)\big)}, \tag{11}$$

$B_r(y)$ désignant la boule géodésique de rayon r et de centre $y \in M$ et $Z_t(x, B_r(y))$ l'ensemble des t-barycentres de $x \in M$ et $z \in B_r(y)$. Les coefficients $v_t(x,y)$ et $v_{1-t}(y,x)$, liés à la différentielle de l'application exponentielle et à la hessienne de la fonction distance, conduisent à une forme générale remarquable du théorème de Prékopa-Leindler [**19**]. Ils peuvent être évalués sous des conditions de courbure par le théorème de comparaison de Bishop ; ils sont par exemple minorés par 1 en courbure de Ricci positive ou nulle (égaux à 1 dans $\mathbb{R}^n$), ce qui donne ainsi lieu à l'extension riemannienne du théorème 1.1 et met en évidence l'influence de la courbure sur le transport optimal dans une variété. Dans cet ordre d'idée, D. Cordero-Erausquin, R. McCann et M. Schmuckenschläger démontrent à la fin de leur article une propriété de convexité de la fonctionnelle d'entropie H de Boltzmann, définie par $H(\nu) = \int_M \frac{d\nu}{dx} \log \frac{d\nu}{dx}\, dx$ pour une mesure de probabilités ν (avec quelques précautions dans l'existence de l'intégrale), par rapport à la mesure de volume le long des géodésiques du transport (convexité par déplacement) dans les variétés à courbure de Ricci positive ou nulle (sorte de forme duale du théorème de Prékopa-Leindler).

THÉORÈME 1.2. — *Dans une variété riemannienne complète (M,g) de courbure de Ricci positive ou nulle, pour tout couple (ν_0, ν_1) de mesures de probabilités absolument continues sur M, si ν_t, $t \in [0,1]$, désigne la mesure ν_0 poussée par l'application $F_t(x) = \exp_x(t\nabla\psi(x))$, alors*

$$H(\nu_t) \le (1-t)H(\nu_0) + t\,H(\nu_1). \tag{12}$$

Esquisse de démonstration. En désignant par $J_t(x)$ le jacobien (en un sens généralisé décrit dans [**19**]) de $F_t(x) = \exp_x(t\nabla\psi(x))$, l'équation de Monge-Ampère $f_0 = f_t(F_t)J_t$, où $f_t = \frac{d\nu_t}{dx}$ et J_t est le jacobien de F_t, fournit

$$H(\nu_t) = \int f_t \log f_t \, dx = \int \log f_t(F_t)\, d\nu_0 = H(\nu_0) - \int \log J_t \, d\nu_0.$$

L'inégalité jacobienne de [**19**], issue d'une analyse fine et délicate de champs de Jacobi et de la log-concavité du déterminant des matrices symétriques définies positives, indique qu'en les points x où ψ admet une hessienne généralisée,

$$\log J_t(x) \geq (1-t)\log\Big(v_{1-t}\big(F_1(x),x\big)\Big) + t\log\Big(v_t\big(x,F_1(x)\big)J_1(x)\Big)$$

pour les coefficients de distorsion v de (11). Ceux-ci étant uniformément minorés par 1 en courbure positive ou nulle,

$$(1-t)H(\nu_0) + tH(\nu_1) - H(\nu_t) = \int \log J_t d\nu_0 - t\int \log J_1 d\nu_0 \geq 0$$

et la conclusion s'ensuit. □

Le théorème 1.2 était conjecturé en fait dès 1999 par F. Otto et C. Villani [**43**] qui ont mis en évidence les liens profonds entre l'interpolation le long du transport optimal et les équations aux dérivées partielles associées. Les travaux de R. Jordan, D. Kinderlehrer et F. Otto [**27**] et, plus significativement encore, de F. Otto [**42**] sur lesquels s'appuient les auteurs de [**43**] définissent formellement une structure naturelle de variété riemannienne (de dimension infinie) sur l'espace $\mathscr{P}_2(M)$ des mesures de probabilités sur M ayant un moment d'ordre 2 telle que le flot de gradient associé à l'entropie H est l'équation de la chaleur (voir [**2**] pour une présentation rigoureuse dans le cas de l'espace euclidien). Une direction le long d'une courbe (ν_t) dans $\mathscr{P}_2(M)$ peut être (formellement) représentée par l'équation $\partial_t\nu_t = -\nabla\cdot(\nu\nabla\Phi)$ où $\Phi \equiv \Phi(t)$ est une fonction sur M. L'« espace tangent » $T_\nu\mathscr{P}_2(M)$ est ainsi paramétré par Φ, et le produit scalaire formel sur $T_\nu\mathscr{P}_2(M)$ est donné par la forme quadratique $\int_M \nabla\Phi\cdot\nabla\Phi\, d\nu$. Munie de cette métrique riemannienne, l'équation géodésique sur $\mathscr{P}_2(M)$ prend la forme de l'équation d'Hamilton-Jacobi $\partial_t\Phi + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 = 0$. La longueur associée sur $\mathscr{P}_2(M)$ correspond à la distance de Wasserstein (voir la définition 2.1 plus bas) et les géodésiques correspondent précisément à l'interpolation par $\exp(t\nabla\psi)$ au sens du transport optimal. Le flot de gradient issu de l'entropie

$$\frac{d}{dt}H(\nu_t) = -\int_M \Delta\Phi f_t\, dx,$$

où f_t est la densité de ν_t par rapport à la mesure de volume sur M, suggère naturellement la question de la convexité de H. Le calcul riemannien formel montre en effet que le long d'une courbe (ν_t),

$$\frac{d^2}{dt^2}H(\nu_t) = \int_M \big[|\mathrm{Hess}(\Phi)|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla\Phi,\nabla\Phi)\big] f_t\, dx.$$

Ce calcul formel, qui s'apparente à la démarche de D. Bakry et M. Émery [**5**] exposée précédemment, justifie ainsi intuitivement le théorème 1.2.

Un des points de départ des travaux de J. Lott et C. Villani, et K.-T. Sturm, est l'observation, cruciale, due à M.-K. von Renesse et K.-T. Sturm [**47**], suivant laquelle la réciproque au théorème 1.2 est vraie, à savoir la convexité par déplacement (12) caractérise en fait la courbure de Ricci positive ou nulle. Les arguments sont locaux, et M.-K. von Renesse et K.-T. Sturm font usage d'une comparaison de petits volumes pour les mesures uniformes normalisées ν_0 et ν_1 sur deux boules géodésiques. J. Lott et C. Villani [**34**] (voir aussi [**56**]) proposent une démonstration par une étude locale du transport optimal de ν_0 concentrée sur une petite boule B autour d'un point x_0 par $F_t(x) = \exp_x(t\nabla\psi(x))$, où ψ est définie dans un voisinage de x_0, régulière et telle que $\nabla\psi(x_0) = v$, $\mathrm{Hess}_{x_0}(\psi) = g(x_0)$ pour un $v \in T_{x_0}(M)$ fixé. On montre que $\varepsilon\psi$ est $d^2/2$-convexe pour ε suffisamment petit. Ainsi, F_ε est l'unique transport optimal de ν_0 à $\nu_1 = \nu_0 \circ F_\varepsilon^{-1}$, et $\nu_0 \circ F_{\varepsilon t}^{-1}$, $0 \leq t \leq 1$, l'unique géodésique de Wasserstein joignant ν_0 à ν_1. Lorsque le rayon de B et ε tendent vers 0 dans l'inégalité de convexité de l'entropie le long de cette géodésique, des calculs locaux entraînent que $\mathrm{Ric}_{x_0}(v,v) \geq 0$, et ainsi la conclusion.

Ces diverses observations forment le point de départ d'une théorie de la courbure de Ricci dans les espaces métriques mesurés à l'aide du transport optimal : sur la base du théorème 1.2, et de sa caractérisation d'une minoration (positive ou nulle) de la courbure de Ricci d'une variété riemannienne, il n'y a qu'un pas pour définir une courbure positive ou nulle d'un espace métrique mesuré (X, d, μ) en postulant l'existence d'une géodésique dans l'espace $\mathscr{P}_2(X)$ des mesures de probabilités sur X liant deux probabilités ν_0 et ν_1 le long de laquelle certaines fonctionnelles non linéaires de densités de probabilités, comme l'entropie H de Boltzmann, sont convexes. Cette démarche fournit une définition synthétique et robuste de courbure qui étend la courbure de Ricci riemannienne et qui présente de remarquables propriétés de stabilité par convergence de Gromov-Hausdorff (mesurée) établies dans les travaux de J. Lott, C. Villani [**34**] et K.-T. Sturm [**52**].

2. COURBURE DE RICCI D'ESPACES MÉTRIQUES MESURÉS

Avant de présenter les résultats de J. Lott, C. Villani et K.-T. Sturm, précisons quelques éléments de vocabulaire en géométrie métrique. Dans un espace métrique (X, d), une courbe joignant deux points $x, y \in X$ est une application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. La longueur de γ est définie par $L(\gamma) = \sup \sum_{j=1}^n d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))$ où le supremum porte sur toutes les subdivisions $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$. Une courbe γ est géodésique si $L(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(1))$. Les géodésiques seront toujours paramétrées à vitesse constante $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|\, d(\gamma(0), \gamma(1))$. L'espace métrique (X, d) est un espace de longueurs si, pour tous $x, y \in X$, $d(x, y) = \inf L(\gamma)$ où l'infimum porte sur toutes les courbes γ joignant x à y. L'espace (X, d) est dit géodésique si tout couple de points $x, y \in X$ est relié par une géodésique. Dans un espace géodésique, il existe des points milieux, ou t-milieux ($t \in [0,1]$), z entre $x, y \in X$, i.e. $d(x,z) = td(x,y)$, $d(z,y) = (1-t)d(x,y)$.

La notion de minorant de courbure de Ricci d'un espace métrique va s'obtenir en plongeant celui-ci dans un espace de mesures de probabilités appelé espace de Wasserstein.

DÉFINITION 2.1. — *Si (X,d) est un espace métrique, l'espace $\mathcal{P}_2(X)$ des mesures de probabilités ν sur les boréliens de X admettant un moment d'ordre 2, au sens où $\int_X d(x,x_0)^2 d\nu(x) < \infty$ pour un, ou tout, $x_0 \in X$, est appelé espace de Wasserstein L^2 sur (X,d). Il est muni de la distance de Wasserstein*

$$d_W(\nu,\nu') = \left(\inf \int_{X\times X} \frac{d(x,y)^2}{2}\, d\pi(x,y)\right)^{1/2}$$

où l'infimum porte sur toutes les mesures de probabilités π sur l'espace produit $X \times X$ de marginales ν et ν' dans $\mathcal{P}_2(X)$ (π est dit un couplage, ou plan de transfert, de ν et ν').

L'espace de Wasserstein $\mathcal{P}_2(X)$ est de longueurs si (X,d) l'est. L'espace X est naturellement plongé dans $\mathcal{P}_2(X)$ par $x \mapsto \delta_x$. J. Lott et C. Villani [**34**] et K.-T. Sturm [**52**] précisent les liens entre les courbures d'Aleksandrov de X (sectionnelle dans une variété) et de $\mathcal{P}_2(X)$. Comme décrit dans le premier paragraphe, si X est une variété riemannienne complète et si $\nu_0, \nu_1 \in \mathcal{P}_2(X)$ (avec ν_0 absolument continue par rapport à la mesure de volume), il existe une unique géodésique dite de Wasserstein $(\nu_t)_{t\in[0,1]}$ dans $\mathcal{P}_2(X)$ joignant ν_0 et ν_1 donnée par le transport optimal $F_t(x) = \exp_x(t\nabla\psi(x))$ (poussant ν_0 en ν_t, $t \in [0,1]$).

Dans toute la suite, un espace métrique mesuré (X,d,μ) désignera un espace métrique séparable complet (X,d) muni d'une mesure μ sur les boréliens de X localement finie, et souvent finie et normalisée en une mesure de probabilités. J. Lott et C. Villani [**34**] le supposent en outre toujours de longueurs, voire géodésique (en fait, sous une hypothèse minimale de courbure $> -\infty$, quand la mesure μ est finie, son support est toujours de longueurs). À la lumière des développements riemanniens présentés dans la première partie, une définition naturelle et intrinsèque d'un minorant de courbure (de Ricci) sur un espace métrique mesuré est alors la suivante. Pour la courbure positive ou nulle, c'est la forme mise en évidence dans le théorème 1.2, étendue pour une courbure quelconque $K \in \mathbb{R}$ comme une convexité uniforme d'ordre K par rapport à la distance de Wassertein d_W.

DÉFINITION 2.2. — *Un espace métrique mesuré (X,d,μ) est dit de courbure (de Ricci) minorée par $K \in \mathbb{R}$ si pour tout couple (ν_0,ν_1) de mesures de probabilités de*

$\mathcal{P}_2(X)$, de supports contenus dans le support de μ, il existe une géodésique $(\nu_t)_{t\in[0,1]}$ dans $\mathcal{P}_2(X)$ joignant ν_0 et ν_1 telle que

$$H_\mu(\nu_t) \leq (1-t)H_\mu(\nu_0) + tH_\mu(\nu_1) - K\,t(1-t)d_W(\nu_0,\nu_1)^2, \quad t \in [0,1],$$

où $H_\mu(\nu) = \int_X \log \frac{d\nu}{d\mu}\, d\nu$ est l'entropie de ν par rapport à μ (supposée bien définie dans l'inégalité ci-dessus).

La définition de J. Lott et C. Villani [**34**] est un peu plus restrictive, mais elle coïncide avec la précédente utilisée par K.-T. Sturm [**52**] pour des espaces sans branchements (une géodésique $[0,1] \to X$ est entièrement déterminée par sa restriction à un sous-intervalle de $[0,1]$).

Comme annoncé, le théorème suivant, pour $K = 0$, résulte de la discussion menée lors de la première partie.

THÉORÈME 2.3. — *Une variété riemannienne complète (M, g) est de courbure de Ricci minorée par K, $K \in \mathbb{R}$, si et seulement si l'espace métrique mesuré formé de M muni de sa distance géodésique et de sa mesure de volume riemannien est de courbure minorée par K.*

L'extension à une courbure quelconque $K \in \mathbb{R}$ est établie dans [**47**] (dans cet article, M.-K. von Renesse et K.-T. Sturm mettent par ailleurs en évidence diverses caractérisations de la courbure de Ricci étendant notamment les propriétés de commutation de gradient et de semi-groupe de la chaleur (6)). Si la variété est à poids, de densité e^{-V} par rapport à la mesure de volume dx, la définition 2.2 est équivalente au critère de Ricci-Bakry-Émery (7), $\mathrm{Ric}_x + \mathrm{Hess}_x(V) \geq K$ (cf. [**51**] et [**20**] pour l'extension du théorème de Prékopa-Leindler dans la forme (10)). En fait, la définition 2.2 et le théorème 2.3 fournissent une définition alternative de minorant de courbure de Ricci d'une variété riemannienne déjà intéressante en elle-même ainsi que par ses conséquences et le nouveau point de vue qu'elle exprime.

L'un des résultats principaux des travaux [**34**] et [**52**] est la stabilité de la définition précédente par convergence de Gromov-Hausdorff. Comme les mesures entrent en jeu, il convient d'associer leur convergence. Ceci peut s'effectuer par exemple à travers des familles d'isométries approchées. Une suite d'espaces métriques compacts mesurés normalisés $(X_i, d_i, \mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Gromov-Hausdorff mesuré vers un espace limite (X, d, μ) s'il existe une suite $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels positifs convergeant vers 0 et une famille $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de ε_i-isométries boréliennes $h_i : X_i \to X$ telles que les mesures μ_i poussées par h_i convergent faiblement vers μ (sur (X,d)) [**13**], [**24**], [**22**], [**16**], [**34**], [**56**] ($h_i : X_i \to X$ est une ε_i-isométrie si pour tous $x_i, y_i \in X_i$, $|d(h_i(x_i), h_i(y_i)) - d_i(x_i, y_i)| \leq \varepsilon_i$ et si, pour tout $x \in X$, il existe $x_i \in X_i$ tel que

$d(x, h_i(x_i)) \leq \varepsilon_i$). Cette convergence est une notion assez faible qui autorise des limites singulières ou des changements de dimension. K.-T. Sturm [**52**] introduit quant à lui une distance $\mathbb{D}$ entre deux espaces métriques mesurés normalisés (X, d, μ) et $(X,' d', \mu')$ en posant

$$\mathbb{D}\big((X, d, \mu), (X', d', \mu')\big) = \inf \left(\int_{X \times X'} D(x, y)^2 d\pi(x, y) \right)^{1/2} \tag{13}$$

où l'infimum porte sur tous les couplages π de μ et μ' et tous les couplages D de d et d' sur l'union disjointe $X \sqcup X'$ de X et X'. La métrique $\mathbb{D}$ est complète et séparable sur la famille des classes d'isomorphismes d'espaces métriques mesurés (normalisés). La convergence pour $\mathbb{D}$ est plus faible que la convergence de Gromov-Hausdorff mesurée (équivalente pour des espaces métriques mesurés de diamètres uniformément bornés et de mesures de supports l'espace entier et satisfaisant une condition uniforme de doublement). Le chapitre $3\frac{1}{2}$ de [**24**] décrit d'autres distances sur des familles d'espaces métriques mesurés.

Cette convergence de Gromov-Hausdorff mesurée est appropriée pour couvrir des exemples naturels de limites d'espaces, comme la convergence de produits finis vers un produit infini, la convergence de la dimension vers l'infini ($\mathbb{R}^n$ muni d'une mesure gaussienne par exemple), la convergence de discrétisation de variétés riemanniennes, les modèles fractals ou des effondrements de la mesure (cf. [**52**], [**56**]). Modulo les définitions respectives, un des théorèmes principaux de J. Lott, C. Villani [**34**] et K.-T. Sturm [**52**] est la stabilité de la définition de minorant de courbure par limite de Gromov-Hausdorff mesurée.

THÉORÈME 2.4. — *Soit $(X_i, d_i, \mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques compacts mesurés normalisés convergeant vers un espace limite (X, d, μ) au sens de la convergence de Gromov-Hausdorff mesurée telle que, pour chaque i, (X_i, d_i, μ_i) soit de courbure minorée par K, $K \in \mathbb{R}$. Alors l'espace métrique mesuré (X, d, μ) est aussi de courbure minorée par K.*

Esquisse de démonstration. — Les idées principales reposent sur la stabilité de l'espace de Wasserstein par la limite de Gromov-Hausdorff, la stabilité du transport optimal et les bonnes propriétés de la fonctionnelle d'entropie (semi-continuité inférieure, principe de contraction). Un peu plus précisément, en suivant [**34**], soient ν_0 et ν_1 dans $\mathscr{P}_2(X)$ de densités respectives f_0 et f_1 par rapport à μ. Poser $\mu_i \circ h_i^{-1}$ la mesure μ_i poussée par une ε_i-isométrie $h_i : X_i \to X$, et définir ν_0^i et ν_1^i comme les mesures sur X_i telles que leurs images par h_i soient respectivement $f_0 \mu_i \circ h_i^{-1}$ et $f_1 \mu_i \circ h_i^{-1}$ normalisées en des mesures de probabilités. Les suites de mesures $\nu_0^i \circ h_i^{-1}$ et $\nu_1^i \circ h_i^{-1}$, $i \in \mathbb{N}$, convergent faiblement vers ν_0 et ν_1 respectivement, et $H_{\mu_i}(\nu_0^i) \to H_\mu(\nu_0)$,

$H_{\mu_i}(\nu_1^i) \to H_\mu(\nu_1)$. Par définition, il existe, pour tout $i \in \mathbb{N}$, une géodésique $(\nu_t^i)_{t\in[0,1]}$ dans $\mathscr{P}_2(X_i)$ reliant ν_0^i et ν_1^i telle que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$H_{\mu_i}(\nu_t^i) \leq (1-t)H_{\mu_i}(\nu_0^i) + tH_{\mu_i}(\nu_1^i) - K\,t(1-t)d_W(\nu_0^i, \nu_1^i)^2. \tag{14}$$

La convergence de Gromov-Hausdorff de X_i vers X s'étend en la convergence des espaces de Wasserstein $\mathscr{P}_2(X_i)$ vers $\mathscr{P}_2(X)$. En particulier, $d_W(\nu_0^i, \nu_1^i) \to d_W(\nu_0, \nu_1)$. Par un argument de compacité, les composées $\nu_t^i \circ h_i^{-1}$ convergent uniformément (le long d'une sous-suite) vers une application continue $\nu : [0,1] \to \mathscr{P}_2(X)$ qui définit une géodésique de Wasserstein de ν_0 à ν_1. Il reste à passer à la limite dans (14). La propriété de contraction

$$H_{\mu_i \circ h_i^{-1}}(\nu_t^i \circ h_i^{-1}) \leq H_{\mu_i}(\nu_t^i)$$

ainsi que la limite

$$H_\mu(\nu_t) \leq \liminf_{i\to\infty} H_{\mu_i \circ h_i^{-1}}(\nu_t^i \circ h_i^{-1})$$

issus de la représentation variationnelle et de la semi-continuité inférieure de l'entropie permettent alors de conclure. K.-T. Sturm [**52**] de son côté définit une application canonique Q' entre les espaces de Wasserstein $\mathscr{P}_2(X)$ et $\mathscr{P}_2(X')$ de deux espaces métriques mesurés (X, d, μ) et (X', d', μ') à partir d'un couplage des distances et des mesures. Ce couplage est construit de sorte que l'image de μ par Q' est μ' et que, pour toute mesure ν absolument continue par rapport à μ, $H_{\mu'}(\nu') \leq H_\mu(\nu)$ où ν' est l'image de ν par Q'. En outre,

$$d_W^2(\nu, \nu') \leq \frac{2 + B^2 H_\mu(\nu)}{-\log \mathbb{D}}$$

où B est une constante contrôlée par les diamètres de X et X' et $\mathbb{D} < 1$ leur distance (13). Ces contrôles conduisent ensuite à la convergence de la suite d'espaces $(X_i, d_i, \mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vers (X, d, μ) au sens de $\mathbb{D}$. □

L'extension du théorème 2.4 aux espaces métriques (pointés) localement compacts est développée dans [**34**] (voir aussi [**56**]).

Une autre propriété importante couverte par ces travaux [**52**] (voir aussi [**56**]) est une propriété de globalisation, dans l'esprit du théorème analogue de Topogonov en géométrie d'Aleksandrov. Un espace métrique mesuré (X, d, μ) est localement de courbure minorée par K si tout point de X a un voisinage X' tel que X' muni des restrictions de d et μ est de courbure minorée par K. Si (X, d) est compact et sans branchements, et si $\mathscr{P}_2(X)$ est géodésique, la courbure locale détermine alors la courbure globale.

L'hypothèse de courbure strictement positive permet d'atteindre parallèlement des familles d'inégalités fonctionnelles du type de celles évoquées au début de ce texte, et leurs applications à la concentration de la mesure [**30**], [**54, 55, 56**]. L'article [**43**] de

F. Otto et C. Villani décrit le schéma qui conduit de l'hypothèse de courbure de la définition 2.2 avec $K > 0$ à des inégalités de transport et de Sobolev logarithmique (5) par interpolation le long des géodésiques du transport. Dans $\mathbb{R}^n$, D. Cordero-Erausquin [**17**] utilise directement, et avec plus de souplesse, le changement de variables entre le point de départ et le point d'arrivée. Cet argument a permis d'atteindre de façon élégante et efficace les inégalités classiques de Sobolev dans $\mathbb{R}^n$, avec un nouveau point de vue dans l'identification de leurs fonctions extrêmales [**21**], et a ouvert récemment de nouvelles perspectives dans l'analyse des déficits isopérimétriques.

3. COURBURE ET DIMENSION

La théorie géométrique développée grâce au transport optimal permet d'introduire une notion, effective, de dimension couplée avec celle de courbure, le tandem courbure et dimension permettant alors d'atteindre des bornes géométriques comme par exemple le théorème de Bonnet-Myers sur le diamètre. L'introduction de cette dimension s'effectue par le remplacement de la fonctionnelle non-linéaire d'entropie par une autre fonctionnelle convexe de type polynomial (entropie de Rényi). Typiquement, l'entropie H_μ sera généralisée en

$$U_\mu(\nu) = \int U(f)d\mu$$

où f est la densité de Radon-Nikodym de ν par rapport à μ (en cas de partie singulière ν_s, compléter par un terme $U'(\infty)\nu_s(X)$) et $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ nulle en 0 et telle que $r \mapsto r^N U(r^{-N})$ soit convexe pour un $N > 1$ (non nécessairement entier). Par exemple, $U(r) = -r^{1-(1/N)}$. (Si $N = \infty$, remplacer $r^N U(r^{-N})$ par $e^r U(e^{-r})$ et couvrir ainsi la fonction $U(r) = r \log r$ de l'entropie.) Au moins lorsque $K = 0$, la définition d'espace de courbure positive ou nulle et de dimension N s'obtient essentiellement en remplaçant H_μ par U_μ. L'adaptation est cependant plus délicate (et assez lourde) pour une courbure quelconque et introduit des coefficients de distorsion dans les propriétés de convexité de la fonctionnelle correspondant aux modèles à courbure constante. On parlera alors d'espace métrique mesuré (X, d, μ) de courbure-dimension $\mathrm{CD}(K, N)$, $K \in \mathbb{R}$, $N \in]1, \infty]$. J. Lott et C. Villani [**34**] introduisent $\mathrm{CD}(0, N)$ pour N quelconque, K.-T. Sturm [**53**] la définition complète (voir aussi [**35**], [**56**]).

L'extension du théorème 2.4, à savoir la stabilité de cette courbure de Ricci minorée et de dimension donnée par convergence de Gromov-Hausdorff mesurée, est préservée. Nous renvoyons aux travaux originaux, ainsi qu'à la synthèse [**56**], pour plus de détails. Pour tout triplet (K, N, D), la famille des espaces métriques mesurés normalisés (X, d, μ) de diamètres plus petits que D et vérifiant $\mathrm{CD}(K, N)$ est compacte (pour la métrique $\mathbb{D}$). Le théorème de stabilité par convergence de Gromov-Hausdorff mesurée est intéressant déjà pour des variétés. Il décrit par exemple la courbure-dimension des espaces limites qui sont réguliers (une variété, éventuellement à poids, limite de Gromov-Hausdorff mesurée de variétés de courbure de Ricci négative ou nulle et de dimension au plus n vérifie le critère $\mathrm{CD}(0, n)$). Il permet d'atteindre par ailleurs des espaces singuliers ayant une courbure et une dimension.

Cette notion de courbure et dimension $\mathrm{CD}(K, N)$ étend la définition de courbure de Ricci et de dimension d'une variété riemannienne (M, g) (la variété M munie de sa distance géodésique et de sa mesure de volume est un espace métrique mesuré de courbure et dimension $\mathrm{CD}(K, N)$, $K \in \mathbb{R}$, $1 \leq N < \infty$, si et seulement si $\mathrm{Ric}_M \geq K$ et $\dim(M) \leq N$). Elle couvre de la même façon les variétés à poids, ainsi que les opérateurs de diffusion étudiés par D. Bakry et M. Émery dont elle peut en être considérée comme la version géométrique, pour lesquelles la condition (7) est complétée par un facteur dimensionnel sous la forme

$$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\,(V) - (N-n)^{-1} \nabla V \otimes \nabla V \geq K, \quad N > n.$$

Les exemples non riemanniens ne sont certes pas encore très nombreux, mais ils indiquent déjà la richesse et le potentiel de la définition : cône euclidien, bord d'un convexe non régulier, $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme quelconque sont de courbure-dimension $\mathrm{CD}(0, N)$ (avec $N = n$ pour le dernier exemple qui n'est pas un espace d'Aleksandrov, ni une limite d'espaces riemanniens de courbure de Ricci minorée). La définition de courbure peut être dans certains cas stable par quotient sous une action de groupe. Un exemple relevant de cet ordre d'idée est celui d'un groupe de Lie compact G agissant isométriquement sur une variété riemannienne M de dimension n et de courbure de Ricci positive ou nulle. Alors $X = M/G$ muni de la métrique quotient et de la mesure image de la mesure de volume sur M par l'application quotient est un espace métrique mesuré de courbure-dimension $\mathrm{CD}(0, n)$. Le travail récent [**28**] de N. Juillet montre à l'opposé que l'espace de Heisenberg $\mathbb{H}^n$ ne vérifie aucune condition $\mathrm{CD}(K, N)$ (tout en satisfaisant une propriété plus faible de contraction de la mesure – voir plus bas). Les exemples de graphes et d'espaces discrets sont le sujet de quelques études récentes, pas encore parfaitement satisfaisantes cependant.

La mise en œuvre du critère $\mathrm{CD}(K, N)$ développée dans [**34**] et [**52, 53**] pour l'obtention de bornes géométriques sur des espaces métriques mesurés (X, d, μ) répond au principe de M. Berger de la domination universelle de la courbure de Ricci. Un moyen commode dans leur obtention est la version dimensionnelle de l'inégalité de Brunn-Minkowski qui, en courbure positive ou nulle de dimension N par exemple, énonce que

$$\mu\big([A, B]_{1-t}\big)^{1/N} \geq (1-t)\mu(A)^{1/N} + t\mu(B)^{1/N}, \tag{15}$$

où A et B sont des compacts non vides tels que $\mu(A)\mu(B) > 0$ et $[A,B]_{1-t}$ est l'ensemble de tous les $(1-t)$-barycentres de A et B le long de géodésiques. Cette dernière découle pour l'essentiel de la définition de $\mathrm{CD}(0,N)$ appliquée à μ restreinte (et normalisée) à A et B respectivement. Elle permet d'établir aisément le théorème de comparaison de Bishop-Gromov sur le volume (pour tout point x dans le support de μ, $\mu(B(x,r))/r^N$ est une fonction décroissante de r) en appliquant l'inégalité (15) à $A = B(x,\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, $B = B(x,r)$ et $t = \frac{s}{r} < 1$. Ces deux résultats admettent des généralisations adéquates pour des courbures quelconques et, dans [**52**], des estimées sur la croissance du volume en dimension infinie sont également évoquées. De la même façon, le critère $\mathrm{CD}(K,N)$ avec $K > 0$ et $N < \infty$ entraîne que le support de μ est compact, majoré par $\pi\sqrt{(N-1)/K}$ (théorème de Bonnet-Myers).

La démonstration d'inégalités fonctionnelles dimensionnelles par le transport de mesures n'est pas encore, en revanche, complètement aboutie. L'exemple simple de la minoration de Lichnerowicz (1) nécessite un effort important [**35**], alors que la courbure au sens des opérateurs de diffusion est beaucoup plus souple à cet égard. Par exemple, la mesure de probabilités invariante μ d'un opérateur de diffusion L de courbure $N-1$ et de dimension N (> 2) vérifie l'inégalité optimale de Sobolev

$$\left(\int_X |f|^{2N/(N-2)} d\mu\right)^{(N-2)/N} \leq \int_X f^2 du + \frac{4}{N(N-2)} \int_X |\nabla f|^2 d\mu, \tag{16}$$

où $\int_X |\nabla f|^2 d\mu$ s'interprète comme la forme de Dirichlet $\int_X f(-\mathrm{L}f)d\mu$ [**4**]. (Cette inégalité de Sobolev optimale entraîne un théorème de Bonnet-Myers pour le générateur L [**6**].) Qu'en est-il sur un espace métrique mesuré de courbure-dimension $\mathrm{CD}(N-1,N)$? (L'article [**35**] présente des inégalités de Sobolev non optimales sous $\mathrm{CD}(K,N)$, $K > 0$, $N < \infty$.)

Cette nouvelle approche d'une minoration de la courbure dans les espaces métriques mesurés suscite une activité importante de recherches, et pose de nombreuses questions (voir [**56**]). Parmi celles-ci, alors que des bornes sur la courbure sectionnelle impliquent automatiquement des bornes sur la courbure de Ricci dans une variété riemannienne, l'analogue entre courbure au sens d'Aleksandrov et cette définition synthétique de courbure de Ricci n'est pas encore éclaircie. Le critère de localité sous $\mathrm{CD}(K,N)$ peut-il être étendu ? Le théorème isopérimétrique de Lévy-Gromov, comparant sous $\mathrm{CD}(N-1,N)$ les fonctions isopérimétriques d'une variété à celle de la sphère $\mathbb{S}^N$ (cf. [**23**]), voire seulement, ainsi que nous l'avons vu plus haut, l'inégalité de Sobolev (16), est pour l'instant hors d'atteinte par le biais de ces méthodes. De manière générale enfin, de nouveaux exemples d'espaces métriques avec courbure et dimension sans référence préalable à un cadre régulier, ainsi que des critères plus souples, sont certainement souhaitables.

On peut aussi espérer que cette courbure synthétique le long des géodésiques du transport permette d'aborder des questions plus analytiques. Le travail pionnier [**27**] suggère un semi-groupe de la chaleur et un laplacien naturels sur un espace métrique mesuré (X, d, μ) comme le flot de gradient sur $\mathcal{P}_2(X)$ de l'entropie H_μ, de sorte que des hypothèses de courbure minorée par K devraient impliquer des propriétés de contraction de noyaux de la chaleur p_t,

$$d_W(\mu p_t, \nu p_t) \leq \mathrm{e}^{-Kt} d_W(\mu, \nu),$$

des estimées de gradient, etc. S.-i. Ohta [**41**] et G. Savaré [**49**] ont obtenu récemment quelques résultats nouveaux dans cet ordre d'idée pour des familles d'espaces métriques sous des conditions sur la courbure d'Aleksandrov. Un lien mieux établi avec la courbure au sens d'un opérateur de diffusion reste également encore à comprendre.

La forme locale des inégalités de Poincaré est un outil privilégié pour le développement de l'analyse dans les espaces métriques mesurés. Des travaux récents (voir par exemple [**15**], [**26**]) montrent que, si un espace de longueurs mesuré (X, d, μ) vérifie une inégalité de doublement de la mesure et une inégalité de Poincaré locale, alors il admet une structure différentiable définie de manière mesurable. Parmi plusieurs définitions, (X, d, μ) est dit vérifier une inégalité de Poincaré locale, à l'échelle, s'il existe $\lambda \geq 1$ et $C > 0$ tels que, pour toute boule $B = B_r(x)$ avec $\mu(B) > 0$, et toute fonction lipschitzienne f sur X,

$$\int_B \left| f - \fint_B f d\mu \right|^2 d\mu \leq C r^2 \int_{\lambda B} |\nabla f|^2 d\mu.$$

Les références [**15**], [**26**] présentent les conséquences et applications d'une telle propriété, notamment pour la construction d'espaces de Sobolev. J. Cheeger et T. Colding [**16**] ont montré que les limites de variétés riemanniennes de courbure de Ricci (uniformément) minorée vérifient une inégalité de Poincaré locale (et cette dernière est stable par convergence de Gromov-Hausdorff mesurée). Les travaux récents [**35**], [**53**], [**40**], [**46**] démontrent des inégalités de Poincaré locales dans des espaces de longueurs de courbure-dimension $\mathrm{CD}(0, N)$ sous une hypothèse supplémentaire d'unicité de géodésiques ou d'absence de branchements. Les auteurs de [**35**] considèrent à cet effet un couplage dit démocratique, ceux de [**53**], [**40**], [**46**] font usage d'une propriété de contraction de la mesure (voir aussi [**29**]). Cette dernière correspond en un certain sens au choix, dans la définition de $\mathrm{CD}(K, N)$, de courbes dans l'espace $\mathcal{P}_2(X)$ dont l'une des extrémités est une masse de Dirac. Ces conditions partagent beaucoup des propriétés de stabilité et de convergence de $\mathrm{CD}(K, N)$ et permettent d'atteindre plusieurs de ses conséquences géométriques. Sur la base d'études antérieures (voir [**53**] pour plus de détails), K.-T. Sturm met à profit l'outil de contraction de la mesure pour décrire une intégrale d'énergie d'ordre 2 dont la forme bilinéaire associée définit une forme de Dirichlet sur $L^2(X, \mu)$, et un unique opérateur linéaire Δ_N qui fait office de laplacien. Ce cadre permet de développer une théorie du potentiel naturelle, et d'étendre ainsi des résultats classiques de régularité.

Remerciements

Je remercie F. Barthe, J. Bertrand, J. Lott, J.-M. Schlenker, K.-T. Sturm et C. Villani pour leurs remarques et commentaires sur la version préliminaire de ce texte.

RÉFÉRENCES

[1] L. Ambrosio, N. Gigli & G. Savaré – *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser, 2005.

[2] L. Ambrosion & G. Savaré – Gradient flows of probability measures, in *Handbook of Differential Equations. Evolutionary equations*, vol. 3, Elsevier, 2007.

[3] D. Bakry – Transformations de Riesz pour les semi-groupes symétriques, in *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, Lecture Notes in Math., vol. 1123, Springer, 1985, p. 130–174.

[4] ______, L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes, in *Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992)*, Lecture Notes in Math., vol. 1581, Springer, 1994, p. 1–114.

[5] D. Bakry & M. Émery – Diffusions hypercontractives, in *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, Lecture Notes in Math., vol. 1123, Springer, 1985, p. 177–206.

[6] D. Bakry & M. Ledoux – Sobolev inequalities and Myers's diameter theorem for an abstract Markov generator, *Duke Math. J.* **85** (1996), p. 253–270.

[7] F. Barthe – Autour de l'inégalité de Brunn-Minkowski, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **12** (2003), p. 127–178.

[8] S. G. Bobkov & M. Ledoux – From Brunn-Minkowski to Brascamp-Lieb and to logarithmic Sobolev inequalities, *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), p. 1028–1052.

[9] C. Borell – Diffusion equations and geometric inequalities, *Potential Anal.* **12** (2000), p. 49–71.

[10] Y. Brenier – Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **305** (1987), p. 805–808.

[11] ———, Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions, *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991), p. 375–417.

[12] M. R. Bridson & A. Haefliger – *Metric spaces of non-positive curvature*, Grund. Math. Wiss., vol. 319, Springer, 1999.

[13] D. Burago, Y. Burago & S. Ivanov – *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Math., vol. 33, Amer. Math. Soc., 2001.

[14] L. A. Caffarelli – The regularity of mappings with a convex potential, *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), p. 99–104.

[15] J. Cheeger – Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces, *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), p. 428–517.

[16] J. Cheeger & T. H. Colding – On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I, II, III, *J. Differential Geom.* **46** (1997), p. 406–480 ; **54** (2000), p. 13–35 & 37–74.

[17] D. Cordero-Erausquin – Some applications of mass transport to Gaussian-type inequalities, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **161** (2002), p. 257–269.

[18] ———, Quelques exemples d'application du transport de mesure en géométrie euclidienne et riemannienne, in *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 22. Année 2003–2004*, Sémin. Théor. Spectr. Géom., vol. 22, Univ. Grenoble I, 2004, p. 125–152.

[19] D. Cordero-Erausquin, R. J. McCann & M. Schmuckenschläger – A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb, *Invent. Math.* **146** (2001), p. 219–257.

[20] ———, Prékopa-Leindler type inequalities on Riemannian manifolds, Jacobi fields, and optimal transport, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **15** (2006), p. 613–635.

[21] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret & C. Villani – A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities, *Adv. Math.* **182** (2004), p. 307–332.

[22] K. Fukaya – Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator, *Invent. Math.* **87** (1987), p. 517–547.

[23] S. GALLOT, D. HULIN & J. LAFONTAINE – *Riemannian geometry*, 3^e^ éd., Universitext, Springer, 2004.

[24] M. GROMOV – *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progress in Math., vol. 152, Birkhäuser, 1999.

[25] L. GROSS – Logarithmic Sobolev inequalities, *Amer. J. Math.* **97** (1975), p. 1061–1083.

[26] J. HEINONEN – *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer, 2001.

[27] R. JORDAN, D. KINDERLEHRER & F. OTTO – The variational formulation of the Fokker-Planck equation, *SIAM J. Math. Anal.* **29** (1998), p. 1–17.

[28] N. JUILLET – Geometric inequalities and generalized Ricci bounds in the Heisenberg group, prépublication `http://sfb611.iam.uni-bonn.de/uploads/279-komplett.pdf`.

[29] K. KUWAE & T. SHIOYA – Sobolev and Dirichlet spaces over maps between metric spaces, *J. reine angew. Math.* **555** (2003), p. 39–75.

[30] M. LEDOUX – *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 89, Amer. Math. Soc., 2001.

[31] G. LOEPER – Continuity of maps solutions of optimal transportation problems, à paraître dans *Acta Math.*

[32] J. LOTT – Some geometric properties of the Bakry-Émery-Ricci tensor, *Comment. Math. Helv.* **78** (2003), p. 865–883.

[33] ———, Optimal transport and Ricci curvature for metric-measure spaces, in *Surveys in differential geometry. Vol. XI*, Surv. Differ. Geom., vol. 11, Int. Press, Somerville, MA, 2007, p. 229–257.

[34] J. LOTT & V. CÉDRIC – Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport, à paraître dans *Ann. Math.*

[35] J. LOTT & C. VILLANI – Weak curvature conditions and functional inequalities, *J. Funct. Anal.* **245** (2007), p. 311–333.

[36] B. MAUREY – Inégalité de Brunn-Minkowski-Lusternik, et autres inégalités géométriques et fonctionnelles, Séminaire Bourbaki, vol. 2003/2004, exposé n° 928, *Astérisque* **299** (2005), p. 95–113.

[37] R. J. MCCANN – A convexity principle for interacting gases and equilibrium crystals, Thèse, Princeton University, 1994.

[38] ———, Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps, *Duke Math. J.* **80** (1995), p. 309–323.

[39] F. Morgan – Manifolds with density, *Notices Amer. Math. Soc.* **52** (2005), p. 853–858.

[40] S.-i. Ohta – On the measure contraction property of metric measure spaces, *Comment. Math. Helv.* **82** (2007), p. 805–828.

[41] ______, Gradient flows on Wasserstein spaces over compact Alexandrov spaces, à paraître dans *Amer. J. Math.*

[42] F. Otto – The geometry of dissipative evolution equations : the porous medium equation, *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2001), p. 101–174.

[43] F. Otto & C. Villani – Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality, *J. Funct. Anal.* **173** (2000), p. 361–400.

[44] G. Perelman – The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, prépublication arXiv:math.DG/0211159.

[45] S. T. Rachev & L. Rüschendorf – *Mass transportation problems*, Springer, 1998.

[46] M.-K. von Renesse – On local Poincaré via transportation, *Math. Z.* **259** (2008), p. 21–31.

[47] M.-K. von Renesse & K.-T. Sturm – Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature, *Comm. Pure Appl. Math.* **58** (2005), p. 923–940.

[48] L. Rüschendorf & S. T. Rachev – A characterization of random variables with minimum L^2-distance, *J. Multivariate Anal.* **32** (1990), p. 48–54.

[49] G. Savaré – Gradient flows and diffusion semigroups in metric spaces under lower curvature bounds, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **345** (2007), p. 151–154.

[50] A. J. Stam – Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon, *Information and Control* **2** (1959), p. 101–112.

[51] K.-T. Sturm – Convex functionals of probability measures and nonlinear diffusions on manifolds, *J. Math. Pures Appl.* **84** (2005), p. 149–168.

[52] ______, On the geometry of metric measure spaces. I, *Acta Math.* **196** (2006), p. 65–131.

[53] ______, On the geometry of metric measure spaces. II, *Acta Math.* **196** (2006), p. 133–177.

[54] C. Villani – *Topics in optimal transportation*, Graduate Studies in Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., 2003.

[55] ______, Transport optimal et courbure de Ricci, in *Seminaire : Equations aux Dérivées Partielles. 2005–2006*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, exp. 7, École Polytech., 2006.

[56] ———, *Optimal transport, old and new*, Grund. Math. Wiss., vol. 338, Springer, 2009.

Michel LEDOUX

Institut de Mathématiques de Toulouse
UMR 5219 du CNRS
Université de Toulouse
F-31062 Toulouse
E-mail : ledoux@math.univ-toulouse.fr