JACQUES SAULOY

Équations aux q-différences et fibres vectoriels holomorphes sur la courbe elliptique $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$

Astérisque, tome 323 (2009), p. 397-429
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__323__397_0>

Astérisque
323, 2009, p. 397–429

ÉQUATIONS AUX q-DIFFÉRENCES ET FIBRÉS VECTORIELS HOLOMORPHES SUR LA COURBE ELLIPTIQUE $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$

par

Jacques Sauloy

Résumé. — Nous présentons diverses applications des fibrés vectoriels aux équations aux q-différences, dans la lignée de la correspondance de Weil.

Abstract **(Equations in q-differences and holomorphic vector bundles over the elliptic curve $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$)**
We present some applications of vector bundles to q-difference equations, in continuation of Weil's correspondence.

1. Introduction

Divers fils mathématiques et historiques relient les équations aux q-différences aux *fibrés vectoriels holomorphes sur une courbe elliptique*[1]. Ces dernières années, ces derniers sont apparus à plusieurs reprises comme un cadre naturel pour des problèmes de classification et de théorie de Galois (problème de Riemann-Hilbert). Il est peut-être temps de survoler et de mettre en ordre des résultats épars, dont certains ont été énoncés dans diverses conférences (Groningen, Conférence Ramis, Lisbonne, Luminy, Kyoto, Tordesillas) mais n'ont jamais été publiés. Ces résultats ont été très largement motivés par les travaux de Ramis, Zhang et l'auteur et l'une des raisons de non publication est le blocage sur une question difficile, celle du « problème global » (section 4). Cependant les percées des dernières années sur le problème local ([**28**], [**24**] et [**25**]) nous encouragent.

L'article comprend peu de résultats extraordinaires mais permet un éclairage nouveau de la théorie. Il permet en particulier de proposer une énigme (apparition de la dualité de Serre) et un problème ouvert (le problème global mentionné ci-dessus).

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 39A13; 34M40, 32G34.
Mots clefs. — Correspondance de Weil, équations aux q-différences, fibrés vectoriels, courbes elliptiques.

(1) Dans tout le texte, nous dirons « fibré » pour « fibré vectoriel holomorphe » (sur une surface de Riemann).

Nous n'évoquons pas deux autres pistes, celle de la *confluence* ([**33**], [**34**]) et celle des *déformations isomonodromiques* ([**37**]).

Nous nous occupons principalement d'équations aux q-différences et ne sommes venus aux fibrés vectoriels que par nécessité : nous ne prétendons à aucune expertise dans ce domaine, et espérons au contraire que les spécialistes nous apporteront leurs lumières.

Ce fut un plaisir tout particulier de parler de tout cela à la conférence en l'honneur de José-Manuel Aroca, Gran Jefe Capitán Pirata, en présence de tant d'amis de Valladolid et d'ailleurs. À Valladolid et à Tordesillas, on rit beaucoup avant, pendant et après les exposés (parfois, à la place) parce que le plaisir de faire des mathématiques s'y exprime plus librement qu'ailleurs. Merci pour tout cela à Jose-Manuel, l'âme du groupe.

J'avais préfacé mon exposé (en anglais) à Tordesillas de la dédicace suivante :

With a special thought for Jean Giraud,
who, a long time ago, guided my first steps
into the wild world of singularities ...

Jean Giraud, qui n'avait pu assister à la conférence, nous a quittés le 27 mars. Je partage ici ma tristesse avec nos amis espagnols.

1.1. Apparition des fibrés dans la théorie des équations fonctionnelles. — Le théorème clé dans la résolution par Birkhoff du problème de Riemann-Hilbert ([**3**]) est un théorème de factorisation de matrice holomorphe. Dans [**30**], [**31**], Röhrl a interprété ce théorème en termes de *trivialité de fibré vectoriel* (voir aussi [**10**]). Dans [**23**], van der Put et Singer donnent de cette factorisation une preuve moderne, qui s'appuie directement sur la cohomologie des fibrés vectoriels sur une surface de Riemann, et l'appliquent (dans la droite ligne de [**3**]) aux équations aux différences et aux q-différences. Auparavant, Praagman, un élève de van der Put, avait invoqué la trivialité méromorphe des fibrés pour démontrer l'existence d'un système fondamental de solutions méromorphes sur $\mathbf{C}^*$ pour les équations aux différences et aux q-différences ([**20**]). Cependant, dans tous ces cas, les fibrés n'interviennent qu'à travers leurs propriétés cohomologiques, et non en tant qu'objets géométriques.

Dans [**2**], Baranovsky et Ginzburg étudient la classification formelle des équations aux q-différences fuchsiennes (dans une autre terminologie, liée aux groupes de lacets). Ils caractérisent chaque classe *formelle* à l'aide d'un objet *analytique*, un fibré vectoriel sur la courbe elliptique $\mathbf{E}_q = \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$. Sur une suggestion de Kontsevitch, ils en déduisent le groupe de Galois local. Indépendamment, l'auteur a obtenu dans [**34**] la classification (formelle ou analytique, ce qui revient au même dans ce cas) des équations aux q-différences fuchsiennes par des fibrés plats, d'où se déduit la description complète du groupe de Galois local et celle moins détaillée du groupe de Galois global (cas abélien régulier).

Nous allons, dans cette introduction, suivre le chemin inverse et montrer comment la description des fibrés sur une courbe (resp. une courbe elliptique) se traduit naturellement en termes d'équations fonctionnelles (resp. d'équations aux q-différences).

1.1.1. *La correspondance de Weil.* — Dans [**41**], Weil propose, sous le nom de G-diviseurs, une généralisation non-abélienne de la notion de diviseur sur une surface de Riemann. Ces G-diviseurs ne sont autres que des fibrés vectoriels avant la lettre. Selon la présentation « moderne » de [**14**] (et sous une forme simplifiée), cela donne ce qui suit.

1.1.1.1. *Fibrés équivariants.* — Soit E une surface de Riemann, et soit $\tilde{E}$ son revêtement universel, qui est donc également une surface de Riemann. Nous noterons $\pi : \tilde{E} \to E$ la projection canonique.

Soit $\mathcal{F}$ un fibré (vectoriel holomorphe) sur E. En relevant $\mathcal{F}$ à $\tilde{E}$ par π, on obtient un fibré $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$, qui est trivial puisque $\tilde{E}$ est simplement connexe. On écrit donc $\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{E} \times V$, où V est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Provenant de E, ce fibré trivial est muni d'une *action équivariante* du groupe $G = \mathrm{Aut}(\tilde{E}/E) = \pi_1(E)$ (nous ne précisons pas le point-base pour le groupe fondamental π_1, qui n'apparaitra qu'en tant que groupe des automorphismes du revêtement). Le mot « action équivariante » signifie ici « action sur $\tilde{E} \times V$ qui commute avec l'action sur $\tilde{E}$ » (on dit aussi que $\tilde{\mathcal{F}}$ est un fibré équivariant). Une telle action est complètement décrite par l'action naturelle $(\gamma, x) \mapsto \gamma.x$ de G sur $\tilde{E}$ et par la donnée d'une application holomorphe (en la seconde variable) :

$$A : G \times \tilde{E} \longrightarrow \mathcal{GL}(V).$$

Tout $\gamma \in G$ opère alors sur $\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{E} \times V$ par l'application :

$$(x, X) \mapsto (\gamma.x, A(\gamma, x)X)\,.$$

Pour que ce soit bien une opération de groupe, il faut, et il suffit, que soit réalisée une condition de cocycle :

$$\forall \gamma, \gamma' \in G\;,\; \forall x \in \tilde{E}\;,\; A(\gamma'\gamma, x) = A(\gamma', \gamma.x)A(\gamma, x).$$

On peut également exprimer, par une condition de cobord, la trivialité du fibré $\mathcal{F}$ de départ ou, plus généralement, à quelle condition deux cocycles représentent des fibrés isomorphes.

Un morphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ de fibrés sur E se relève en un morphisme $\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{E} \times V \to \tilde{\mathcal{F}'} = \tilde{E} \times V'$ de fibrés sur $\tilde{E}$ compatible avec la structure ci-dessus : si $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\tilde{\mathcal{F}'}$ sont respectivement décrits par les cocycles A et A', le morphisme $\tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{F}'}$ est de la forme $(x, X) \mapsto (x, F(x)X)$, où F est une application holomorphe de $\tilde{E}$ dans $\mathcal{L}(V, V')$, qui satisfait à la condition suivante :

$$\forall \gamma \in G\;,\; \forall x \in \tilde{E}\;,\; F(\gamma.x)A(\gamma, x) = A'(\gamma, x)F(x).$$

1.1.1.2. *Description géométrique.* — Supposons réciproquement donné le cocycle holomorphe (en la seconde variable) $A : \pi_1(E) \times \tilde{E} \to \mathcal{GL}(V)$. On lui associe la relation d'équivalence $\sim_A$ sur le fibré trivial $\tilde{F} = \tilde{E} \times V$ engendrée par les relations :

$(x,X) \sim_A (\gamma.x, A(\gamma,x)X)$: la relation $\sim_A$ provient donc d'une action équivariante de $\pi_1(E)$ sur $\tilde{E}$. En un sens évident, cette relation est compatible avec la relation $\sim$ sur $\tilde{E}$ induite par l'action de $\pi_1(E)$. Le fibré sur E associé, que nous noterons $\tilde{F}_A$, s'obtient par passage au quotient de la projection $\tilde{F} = \tilde{E} \times V \to \tilde{E}$ par ces relations d'équivalence :

$$\mathcal{F}_A = \frac{\tilde{E} \times V}{\sim_A} \longrightarrow E = \frac{\tilde{E}}{\sim}.$$

On peut alors décrire le faisceau des sections de $\mathcal{F}_A$. Soit V un ouvert de E. Alors l'espace des sections de $\mathcal{F}_A$ sur V est :

$$\Gamma(V, \mathcal{F}_A) = \{X : \pi^{-1}(V) \to V \text{ holomorphes } \mid \forall x \in \pi^{-1}(V)\ ,\ \forall \gamma \in \pi_1(E)\ ,\ X(\gamma.x) = A(\gamma,x)X(x)\}.$$

Exemple. — Prenons $E = \mathbf{C}^*$. Alors $\tilde{E} = \mathbf{C}$ sur lequel $\pi_1(E) = \mathbf{Z}$ agit par translations, et la projection canonique $\pi : \tilde{E} \to E$ est ici $x \mapsto e^{2i\pi x}$. La condition de cocycle entraine que A est entièrement déterminée par la matrice $A(1,x)$. Notons (abusivement) $A(x) = A(1,x)$. De même, la condition qui définit les sections peut se tester simplement en prenant $\gamma = 1$:

$$\Gamma(V, \mathcal{F}_A) = \{X : \pi^{-1}(V) \to V \text{ holomorphes } \mid \forall x \in \pi^{-1}(V)\ ,\ X(x+1) = A(x)X(x)\}.$$

On voit bien la parenté avec les équations fonctionnelles.

Si l'on note $\underline{1} = \mathcal{F}_1$ (« objet unité ») le fibré en droites trivial sur E, associé au cocycle trivial $(\gamma, x) \mapsto 1 \in \mathcal{GL}(\mathbf{C})$, le lecteur pourra vérifier que les morphismes de $\underline{1}$ dans un fibré $\mathcal{F}_A$ quelconque s'identifient aux sections globales de $\mathcal{F}_A$.

1.1.1.3. *Fibrés plats et représentations de* $\pi_1(E)$. — Un cas important est celui où, à isomorphisme près, on peut supposer $A(\gamma,x)$ indépendant de $x \in \tilde{E}$: on l'écrit donc $A(\gamma)$, et la condition de cocycle dit alors que $\gamma \mapsto A(\gamma)$ est une représentation de $\pi_1(E)$ dans $\mathcal{GL}(V)$. Un tel fibré est appelé *plat* ([**16**]). Les fibrés plats admettent une caractérisation topologique : les classes de Chern sur leurs facteurs indécomposables sont nulles ; et une caractérisation différentielle : on peut les munir d'une connexion holomorphe. *Nous n'aurons pas l'usage de ces caractérisations*[(2)]. On obtient ainsi la célèbre *correspondance de Weil* entre fibrés plats et représentations du groupe fondamental.

Il faut cependant prendre garde que cette correspondance n'est pas une équivalence entre la catégorie des fibrés plats sur E et celle des représentations de $\pi_1(E)$. Soient en effet $A : \pi_1(E) \to \mathcal{GL}(V)$ et $A' : \pi_1(E) \to \mathcal{GL}(V')$ deux telles représentations, et soient $\mathcal{F}_A$ et $\mathcal{F}_{A'}$ les fibrés plats qui leur correspondent respectivement. Un morphisme de $\mathcal{F}_A$ dans $\mathcal{F}_{A'}$ est décrit comme une application holomorphe $F : \tilde{E} \to \mathcal{L}(V, V')$, telle que :

$$\forall \gamma \in G\ ,\ \forall x \in \tilde{E}\ ,\ F(\gamma.x)A(\gamma) = A'(\gamma)F(x).$$

(2) Van der Put et Reversat utilisent la seconde dans [**22**], voir là-dessus la section 2.2.

Si F est constant sur $\tilde{E}$, c'est bien un morphisme de représentations, mais pas autrement. Nous en verrons un exemple à la section suivante, et des conséquences pour le groupe de Galois à la section 2.1.1.

1.1.2. *Le cas des fibrés sur une courbe elliptique*

1.1.2.1. *Fibrés sur* $\mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau)$. — Prenons pour E la courbe elliptique[3] $\mathbf{C}/\Lambda_\tau$, où $\operatorname{Im}\tau < 0$ et $\Lambda_\tau = \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$. (Nous poserons plus loin $q = e^{2i\pi\tau}$ et voudrons avoir $|q| > 1$.) Ici, $\pi_1(E) = \Lambda_\tau$ agit sur $\tilde{E} = \mathbf{C}$ par translations. Notons encore $\pi : \mathbf{C} \to E$ la projection canonique. Pour tout cocycle A, notons $A_1(x) = A(1,x)$ et $A_\tau(x) = A(\tau,x)$. À cause de la relation de commutation $\tau+1 = 1+\tau$, la condition de cocycle entraine :

$$\forall x \in \mathbf{C}\ ,\ A_\tau(x+1)A_1(x) = A_1(x+\tau)A_\tau(x).$$

Réciproquement, deux applications holomorphes de $\mathbf{C}$ dans $\mathcal{GL}(V)$ qui vérifient cette relation s'étendent de manière unique en un cocycle A et définissent donc un fibré $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$ sur E. Les sections de ce fibré sur l'ouvert $V \subset E$ s'identifient aux solutions holomorphes sur $\pi^{-1}(V) \subset \mathbf{C}$ de l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \pi^{-1}(V)\ ,\ X(x+1) = A_1(x)X(x) \quad \text{et} \quad X(x+\tau) = A_\tau(x)X(x).$$

Si $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_{A'}$ est le fibré défini par A'_1 et A'_τ (holomorphes de $\mathbf{C}$ dans $\mathcal{GL}(V')$), un morphisme de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}'$ est représenté par une application holomorphe de $\mathbf{C}$ dans $\mathcal{L}(V,V')$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{C}\ ,\ F(x+1)A_1(x) = A'_1(x)F(x) \quad \text{et} \quad F(x+\tau)A'_\tau(x) = A_\tau(x)F(x).$$

Le fibré $\mathcal{F}_A$ est plat si, à isomorphisme près, on peut supposer que A_1 et A_τ ne dépendent pas de x : $A_1, A_\tau \in \mathcal{GL}(V)$. La condition de cocycle dit alors que ces deux matrices commutent. La représentation de $\pi_1(E) = \Lambda_\tau$ associée à $\mathcal{F}_A$ par la correspondance de Weil est celle définie par $1 \mapsto A_1$ et $\tau \mapsto A_\tau$.

1.1.2.2. *Fibrés sur* $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$. — Pour trivialiser le fibré $\mathcal{F}$ sur E, il n'est cependant pas nécessaire de le relever au revêtement universel $\mathbf{C}$. Ce revêtement se factorise en $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C}/\Lambda_\tau$. Or, l'application $x \mapsto z = e^{2i\pi x}$ permet d'identifier $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ à la surface de Riemann ouverte $\mathbf{C}^*$. La même application permet d'identifier $E = \mathbf{C}/\Lambda_\tau$ à $\mathbf{E}_q = \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$, où $q = e^{2i\pi\tau}$ est un nombre complexe arbitraire de module $|q| > 1$. On peut alors relever le fibré $\mathcal{F}$ sur $\mathbf{E}_q$ en un fibré sur $\mathbf{C}^*$ par le revêtement $\mathbf{C}^* \to \mathbf{E}_q$. L'interêt de cette opération est que tout fibré vectoriel holomorphe sur une surface de Riemann ouverte (*i.e.* non compacte) est trivial ([**15**], théorème 3 p. 184).

Le formalisme des fibrés équivariants décrit à la section 1.1.1 s'applique alors tout aussi bien ici. Nous partirons donc maintenant de la description « de Jacobi » (ou « de Tate ») des courbes elliptiques pour fixer nos notations. Soit q un complexe de module $|q| > 1$. Soit $\mathbf{E}_q = \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$. On note π la projection canonique $\mathbf{C}^* \to \mathbf{E}_q$.

[3] *A priori*, la surface de riemann E devrait être appelée « tore complexe », mais l'on sait que c'est essentiellement la même chose qu'une courbe elliptique.

C'est un revêtement, dont le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^*/\mathbf{E}_q)$ est $q^{\mathbf{Z}}$ agissant sur $\mathbf{C}^*$ en tant que sous-groupe.

Tout fibré $\mathcal{F}$ sur $\mathbf{E}_q$ se relève par π en un fibré trivial $\tilde{\mathcal{F}} = \mathbf{C}^* \times V$ muni d'une action équivariante de $q^{\mathbf{Z}}$, autrement dit, d'une application holomorphe (en la seconde variable) $A : q^{\mathbf{Z}} \times \mathbf{C}^* \to \mathcal{GL}(V)$. Celle-ci satisfait la condition de cocycle suivante :

$$\forall m, n \in \mathbf{Z} \;,\; \forall z \in \mathbf{C}^* \;,\; A(q^{m+n}, z) = A(q^m, q^n z) A(q^n, z).$$

Il est aisé de voir que la donnée de $A(q, z)$ détermine A. Notant abusivement $A(z) = A(q, z)$, on trouve que l'on a, pour $n \geq 1$: $A(q^n, z) = A(q^{n-1}z) \cdots A(z)$; et, pour $n \leq -1$ ... une formule laissée en exercice au lecteur ! Ainsi, il revient au même de se donner un cocycle A ou une application holomorphe $A : \mathbf{C}^* \to \mathcal{GL}(V)$; et une telle fonction matricielle A définit un fibré $\mathcal{F}_A$ sur $\mathbf{E}_q$. Ce dernier peut être construit géométriquement ainsi :

$$\mathcal{F}_A = \frac{\mathbf{C}^* \times V}{\sim_A} \longrightarrow \mathbf{E}_q = \frac{\mathbf{C}^*}{\sim},$$

où les relations d'équivalences sont définies par $(z, X) \sim_A (qz, A(z)X)$ et $z \sim qz$. Une section de $\mathcal{F}_A$ sur l'ouvert $V \subset \mathbf{E}_q$ s'identifie à une solution holomorphe sur $\pi^{-1}(V)$ de l'*équation aux q-différences* :

$$X(qz) = A(z) X(z).$$

Soient $A : \mathbf{C}^* \to \mathcal{GL}(V)$, $A' : \mathbf{C}^* \to \mathcal{GL}(V')$ deux telles applications holomorphes et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_{A'}$ les fibrés sur $\mathbf{E}_q$ associés. Un morphisme de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}'$ est représenté par une application holomorphe $F : \mathbf{C}^* \to \mathcal{L}(V, V')$ telle que :

$$\forall z \in \mathbf{C}^* \;,\; F(qz) A(z) = A'(z) F(z).$$

Par exemple, si l'on note $\underline{1}$ le fibré en droites trivial [4], provenant de la fonction constante 1 de $\mathbf{C}^*$ dans $\mathbf{C}^* = \mathcal{GL}(\mathbf{C})$, on voit que les morphismes de $\underline{1}$ dans $\mathcal{F}$ s'identifient aux sections de $\mathcal{F}$.

Remarque. — Si l'on relève le fibré $\mathcal{F}$ sur $\mathbf{E}_q$ d'abord à $\mathbf{C}^*$ puis à $\mathbf{C}$, on obtient successivement $\mathbf{C}^* \times V$, (muni d'une fonction matricielle $A(z)$ sur $\mathbf{C}^*$), et $\mathbf{C} \times V$. Ainsi, le fibré trivial équivariant sur $\mathbf{C}$ décrit plus haut à l'aide des fonctions matricielles A_1 et A_τ sur $\mathbf{C}$, peut-il toujours être réalisé en prenant $A_1(x) = Id_V$ et $A_\tau(x) = A(e^{2i\pi x})$. Pour être précis, parmi toutes les trivialisations de l'image réciproque de $\mathcal{F}$ sur $\mathbf{C}$, l'une au moins est munie d'une action équivariante de cette nature. Cette propriété, qui traduit la trivialité des fibrés holomorphes sur $\mathbf{C}^*$, équivaut à la suivante : la fonction matricielle A_1 étant donnée, l'équation fonctionnelle $X(x+1) = A_1(x) X(x)$ admet une solution fondamentale (c'est-à-dire une solution à valeurs dans $\mathcal{GL}(V)$) holomorphe.

Si l'on se restreint aux fibrés plats, on en déduit (correspondance de Weil) que toute représentation de $\mathbf{Z}^2 \simeq \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ est équivalente à une représentation triviale sur le

(4) La notation $\underline{1}$ désigne l'objet unité, c'est à dire le neutre pour le produit tensoriel, dans une « catégorie tannakienne ».

premier facteur. C'est évidemment faux pour l'équivalence habituelle des représentations, mais c'est vrai au sens de l'équivalence « équivariante » décrite à la fin de la section 1.1.1.

1.1.2.3. *Relations avec la théorie classique des équations fonctionnelles.*— Comme on l'a vu, es sections de $\mathcal{F}_A$ s'identifient aux solutions de l'*équation aux q-différences* : $X(qz) = A(z)X(z)$. Il y a cependant une différence notable avec la théorie classique des équations fonctionnelles ([**3**], [**6**], [**12**], [**23**], [**33**]) : ici, la matrice $A(z)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}^*$, et même régulière, *i.e.* son inverse A^{-1} est aussi holomorphe; alors que dans la théorie classique, la matrice $A(z)$ est rationnelle (et inversible). Ainsi :

- Pour ramener la théorie classique à celle des fibrés, il faut se débarrasser des pôles de A et de A^{-1}.
- Pour ramener la théorie des fibrés sur $\mathbf{E}_q$ à la théorie classique des équations aux q-différences, il faut dompter la sauvagerie des équations (et des solutions) en 0 et en ∞.

Comme on le verra (section 2.1.1), la théorie fuchsienne vient naturellement se placer à l'intersection des deux points de vue.

1.1.2.4. *Le cas des équations aux différences.* — Dans le cas des équations aux q-différences, le corps des constantes de la théorie (solutions méromorphes sur $\mathbf{C}^*$ de l'équation triviale $f(qz) = f(z)$) s'identifie au corps des fonctions elliptiques $\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)$, corps des donctions méromorphes sur la surface de Riemann compacte $\mathbf{E}_q$; celle-ci s'identifie à une courbe algébrique (courbe elliptique) et $\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)$ à un corps de fonctions algébriques ; plus généralement, les fibrés vectoriels holomorphes sont algébriques ([**38**]).
La théorie des *équations aux différences* $X(z+1) = A(z)X(z)$ se prête également au point de vue des fibrés, mais c'est plus compliqué. En effet, la surface de Riemann appropriée est ici $E = \mathbf{C}/\mathbf{Z} \simeq \mathbf{C}^*$, mais celle-ci n'est pas compacte. Les constantes de la théorie (solutions méromorphes sur $\mathbf{C}$ de l'équation triviale $f(z+1) = f(z)$) est « très gros ». Il faut donc artificiellement imposer des conditions de croissance aux solutions pour les maitriser. Au fond, le cas des équations aux différences est une dégéneréscence du cas des équations aux q-différences. C'est parce que l'opérateur de translation $z \mapsto z+1$ n'a qu'un point fixe sur la sphère de Riemann, alors que l'opérateur de dilatation $z \mapsto qz$ en a deux. Anne Duval ([**7**], voir aussi [**8**]) a étudié la *confluence* de ces deux points fixes en un seul et ses conséquences sur les liens entre les deux types d'équations.

1.2. Conventions générales. — Dans tout l'article, nous fixerons un nombre complexe $q \in \mathbf{C}$ de module $|q| > 1$. Nous noterons $\mathbf{E}_q$ la courbe elliptique $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ et $\pi : \mathbf{C}^* \to \mathbf{E}_q$ la projection canonique. L'image dans $\mathbf{E}_q$ de $a \in \mathbf{C}^*$ sera notée $\overline{a}$. La *spirale logarithmique discrète* $\pi^{-1}(\overline{a}) = aq^{\mathbf{Z}}$ sera notée $[a;q]$. On écrira alors $[a,b;q] = [a;q] \cup [b;q]$, etc.

L'opérateur de dilatation $z \mapsto qz$ de la sphère de Riemann $\mathbf{S}$ induit un automorphisme σ_q sur de nombreux anneaux ou corps de fonctions, par la formule

$(\sigma_q f)(z) = f(qz)$ (cette notation s'étend naturellement à des vecteurs ou des matrices de fonctions). Les principaux corps d'interêt sont $\mathbf{C}(z)$ (fonctions rationnelles), $\mathbf{C}(\{z\})$ (germes méromorphes en 0), $\mathbf{C}((z))$ (séries de Laurent formelles) et $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$ (fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}^*$). Plus généralement, le corps des fonctions méromorphes (resp. l'anneau des fonctions holomorphes) sur une surface de Riemann E est noté $\mathcal{M}(E)$ (resp. $\mathcal{O}(E)$).

1.2.1. *Fonctions.* — Les fonctions méromorphes sur $E = \mathbf{C}/(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau)$ s'identifient aux fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$ admettant le réseau de périodes $\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$: c'est la description classique du corps $\mathcal{M}(E)$ des fonctions elliptiques. Les fonctions méromorphes sur $\mathbf{E}_q = \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ s'identifient de même aux fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}^*$ invariantes par σ_q, ce qui donne la description *loxodromique* du corps $\mathcal{M}(\mathbf{E}_q) = \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^{\sigma_q}$ des fonctions elliptiques : si $q = e^{2i\pi\tau}$, il s'agit des mêmes fonctions et des mêmes corps. Toute fonction elliptique $f \in \mathcal{M}(\mathbf{E}_q)$ non triviale admet un *diviseur des zéros et des pôles sur* $\mathbf{E}_q$, noté $\mathrm{div}_{\mathbf{E}_q}(f)$. En tant que fonction q-invariante sur $\mathbf{C}^*$, elle admet également un diviseur sur $\mathbf{C}^*$, noté $\mathrm{div}_{\mathbf{C}^*}(f)$.

La théorie classique des fibrés en droites (ou des diviseurs) sur $E = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$ est la théorie des fonctions Theta de la forme $\Theta(\tau, x)$ ([**19**]) : par trivialisation sur le revêtement universel $\mathbf{C}$, on identifie les sections d'un tel fibré comme des fonctions sur $\mathbf{C}$. La trivialisation sur $\mathbf{C}^*$ fait de même apparaitre les *fonctions Theta de Jacobi*. Nous utiliserons principalement la fonction :

$$\theta_q(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{-n(n+1)/2} z^n.$$

Cette fonction, qui est holomorphe sur $\mathbf{C}^*$ y admet la factorisation (*formule du triple produit de Jacobi*) :

$$\theta_q(z) = \prod_{n \geq 1} (1 - q^{-n}) \prod_{n \geq 1} (1 + q^{-n} z) \prod_{n \geq 0} (1 + q^{-n} z^{-1}).$$

Ses zéros sont donc les points de $[-1; q]$, comptés avec multiplicité 1. Comme elle n'a pas de pôles, son diviseur sur $\mathbf{C}^*$ est :

$$\mathrm{div}_{\mathbf{C}^*}(\theta_q) = \sum_{a \in [-1;q]} [a].$$

La fonction θ_q vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\sigma_q \theta_q = z \theta_q.$$

C'est donc une section du fibré en droite $\mathcal{F}_{(z)}$. En tant que section, elle admet un diviseur sur $\mathbf{E}_q$:

$$\mathrm{div}_{\mathbf{E}_q}(\theta_q) = [\overline{-1}];$$

autrement dit, bien que ses valeurs sur $\mathbf{E}_q$ ne soient pas définies, elle y admet le zéro simple $\overline{-1}$ et pas de pôles. Nous noterons, pour $a \in \mathbf{C}^*$:

$$\theta_{q,a}(z) = \theta_q(z/a).$$

C'est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}^*$, qui y vérifie l'équation aux q-différences $\sigma_q \theta_{q,a} = \frac{z}{a} \theta_{q,a}$ (c'est donc une section de $\mathcal{F}_{(z/a)}$) et l'on a : $\mathrm{div}_{\mathbf{E}_q}(\theta_q) = \boxed{-a}$. Elle permet de construire les *q-caractères* :

$$e_{q,a} = \frac{\theta_q}{\theta_{q,a}}.$$

On a $\sigma_q e_{q,a} = e_{q,a}$ (c'est donc une section de $\mathcal{F}_{(a)}$) et $\mathrm{div}_{\mathbf{E}_q}(e_{q,a}) = \boxed{-1} - \boxed{-a}$.

1.2.2. *Modules aux q-différences.* — Soit K l'un de nos corps de fonctions, muni de l'automorphisme σ_q. Notre objet est l'étude des *équations aux q-différences* :

$$\sigma_q X = AX, \quad A \in \mathcal{GL}_n(K). \tag{1}$$

Les cas d'intérêt sont ceux des corps $\mathbf{C}(z)$ et $\mathbf{C}(\{z\})$. Pour avoir un bon formalisme algébrique, on définit un anneau de polynômes de Laurent non commutatifs :

$$\mathcal{D}_{q,K} = K\left\langle \sigma, \sigma^{-1} \right\rangle,$$

par la règle de (non-)commutation : $\sigma z = qz\sigma$. Nous noterons $\mathrm{DiffMod}\,(K, \sigma_q)$ la catégorie des $\mathcal{D}_{q,K}$-modules à gauche de longueur finie.

Un objet de $\mathrm{DiffMod}\,(K, \sigma_q)$ peut se réaliser sous la forme $M = (V, \Phi)$ où V est un K-espace vectoriel de dimension finie et Φ un automorphisme σ_q-linéaire, c'est-à-dire tel que $\Phi(\lambda x) = \sigma_q(\lambda)\Phi(x)$ (l'action de σ sur M est alors celle de Φ). Après choix d'une base, on peut même écrire $M = M_A = (K^n, \Phi_A)$, où $\Phi_A(X) = A^{-1}(\sigma_q X)$ pour une matrice $A \in \mathcal{GL}_n(K)$. Si $A \in \mathcal{GL}_n(K)$ et $B \in \mathcal{GL}_p(K)$, un morphisme de A dans B est une matrice $F \in \mathrm{Mat}_{p,n}(K)$ telle que :

$$(\sigma_q F)A = BF. \tag{2}$$

Si par exemple F est un isomorphisme, alors on a la formule de transformation de jauge :

$$B = F[A] = (\sigma_q F)AF^{-1}.$$

Lorsque par exemple $K = \mathbf{C}(z)$, on retrouve l'équivalence rationnelle des équations aux q-différences, étudiée par Birkhoff. Par ailleurs, $\mathrm{DiffMod}\,(K, \sigma_q)$ est une catégorie abélienne que l'on peut munir de constructions tensorielles (par exemple [**23**] ou [**25**]), et il n'est pas très difficile de vérifier que c'est une catégorie tannakienne ([**4**]). En particulier, outre le produit tensoriel, les constructions suivantes sont disponibles.

1. Hom interne : si $M = (V, \Phi)$ et $N = (W, \Psi)$ sont deux modules, alors $\mathcal{L}_K(V, W)$ muni de $f \mapsto \Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$ est le module noté $\underline{\mathrm{Hom}}(M, N)$. On a une adjonction : $\mathrm{Hom}\,(M, \underline{\mathrm{Hom}}(M', M'')) = \mathrm{Hom}(M \otimes M', M'')$.
2. Objet unité : c'est le module $\underline{1} = M_{(1)} = (K, \sigma_q)$, qui modélise l'équation triviale $\sigma_q f = f$. Il est neutre pour le produit tensoriel et l'on a $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{1}, M) = M$.
3. Dual : c'est $M^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}(M, \underline{1})$. Si $M = (K^n, \Phi_A)$, on peut le décrire comme $M^\vee = (K^n, \Phi_{A^\vee})$, où $A^\vee = {}^tA^{-1}$.
4. Foncteur des sections : $\Gamma(M) = \mathrm{Hom}(\underline{1}, M)$ s'identifie au K^{σ_q}-espace vectoriel des points fixes de $M = (V, \Phi)$ (les $X \in V$ tels que $\Phi(X) = X$). Par exemple

$\Gamma(M_A)$ est l'espace des solutions de (1) dans K. Le foncteur Γ est exact à gauche. Son premier foncteur dérivé est $\Gamma^1(M) = Ext(\underline{1}, M)$.

Notons, pour un usage futur, les identifications naturelles suivantes : $\underline{\mathrm{Hom}}(M, N) = M^\vee \otimes N$ et par conséquent : $\mathrm{Hom}(M, N) = \Gamma(M^\vee \otimes N)$. Par un argument d'algèbre homologique, on en déduit $Ext(M, N) = \Gamma^1(M^\vee \otimes N)$. Les $Ext^n(M, N)$ pour $n \geq 2$ sont nuls, car $\mathcal{D}_{q,K}$ est euclidien à gauche.

Les objets de DiffMod $(\mathbf{C}(z), \sigma_q)$, DiffMod $(\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q)$ et DiffMod $(\mathbf{C}((z)), \sigma_q)$ sont appelés *modules aux q-différences.* Dans la pratique, on ne distingue pas toujours le module M_A, l'équation (1) et la matrice A. Nous étudierons de près des foncteurs fibres sur ces trois catégories. La première (« cas global ») est *a priori* notre catégorie d'intérêt, mais l'étude locale préliminaire conduit à examiner DiffMod $(\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q)$ (« cas local analytique ») et DiffMod $(\mathbf{C}((z)), \sigma_q)$ (« cas formel »).

Contrairement à ce qui se fait pour les équations différentielles, ni la classification ni la théorie de Galois ne reposent fortement sur l'étude des solutions. La raison est essentiellement celle-ci. Pour construire une solution matricielle fondamentale $\mathcal{X}$ de l'équation (1), il faut un assez gros corps de fonctions, mettons $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$. Les solutions vectorielles sont alors les $X = \mathcal{X}C$, où le vecteur colonne C a ses coefficients dans le corps des constantes $\mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^{\sigma_q} = \mathcal{M}(\mathbf{E}_q)$: c'est un trop gros corps des constantes (en théorie de Galois différentielle, le corps des constantes qui fournit les invariants de classification est $\mathbf{C}$). Ces raisons et la stratégie qui en découle ont été détaillées dans [**34**], [**28**] et [**24**]. Si l'on ne tient pas à une théorie qui fournisse des invariants transcendants, alors l'approche algébrique de van der Put et Singer dans [**23**] est appropriée.

2. Constructions locales

2.1. Construction géométrique générale. — Nous noterons désormais $\mathcal{E}^{(0)} =$ DiffMod $(\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q)$ la catégorie des modules (ou équations) aux q différences sur $\mathbf{C}(\{z\})$. Soit $A(z) \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C}(\{z\}))$. Soit D un disque épointé en son centre 0 tel que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathcal{O}(D))$, *i.e.* A et A^{-1} sont holomorphes sur D. Sur le fibré trivial $D \times \mathbf{C}^n$ (resp., sur sa base D), on définit une action *partielle* de $q^{\mathbf{Z}}$ par l'action de son générateur : $(z, X) \mapsto (qz, A(z)X)$ (resp. $z \mapsto qz$). (Il reviendrait donc au même de considérer l'action du semi-groupe $q^{-\mathbf{N}}$.) Via la projection $D \times \mathbf{C}^n \to D$, ces actions sont compatibles. On a donc une relation d'équivalence $\sim_A$ sur $D \times \mathbf{C}^n$ (resp. $\sim$ sur D) engendrée par les relations $(z, X) \sim_A (qz, A(z)X)$ (resp. $z \sim qz$). On en déduit, par passage au quotient, un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} D \times \mathbf{C}^n & \xrightarrow{pr_1} & D \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{F}_A = \frac{D \times \mathbf{C}^n}{\sim_A} & \longrightarrow & \mathbf{E}_q = \frac{D}{\sim} \end{array}$$

Il est en effet bien évident que le quotient de la surface de Riemann D par $\sim$ est bien la courbe elliptique $\mathbf{E}_q$. La seule nouveauté ici, par rapport au formalisme général de l'introduction, est que la projection $\pi : D \to \mathbf{E}_q$ n'est plus un revêtement, c'est seulement un isomorphisme local. La ligne du bas décrit un *fibré vectoriel holomorphe* $\mathcal{F}_A$ sur $\mathbf{E}_q$, et la plus grande partie du discours des sections 1.1.1 et 1.1.2 se transpose ici. On peut décrire le fibré $\mathcal{F}_A$ en termes de cocycles, comme dans [**16**] : c'est fait dans [**13**]. Voici la description du faisceau des sections. Soit V un ouvert de $\mathbf{E}_q$. Alors l'espace des sections de $\mathcal{F}_A$ sur V est :

(3)
$$\Gamma(V, \mathcal{F}_A) = \{X \in \mathcal{O}\left(\pi^{-1}(V) \cap D\right)^n \mid \forall z \in \pi^{-1}(V) \cap q^{-1}D \text{ , } X(qz) = A(z)X(z)\}.$$

(La condition $z \in q^{-1}D$ équivaut à $z \in D \wedge qz \in D$.) On peut vérifier directement que ce faisceau est localement libre sur $\mathbf{E}_q$ ([**20**], [**13**]).

Si l'on remplace D par $D' \subset D$, on obtient un fibré $\mathcal{F}'_A$ et, pour tout ouvert V de $\mathbf{E}_q$, un morphisme canonique de restriction $\Gamma(V, \mathcal{F}_A) \to \Gamma(V, \mathcal{F}'_A)$ dont il est facile de vérifier qu'il est bijectif. Ainsi, le fibré $\mathcal{F}_A$ ne dépend pas du choix particulier du disque D. Ce dernier peut d'ailleurs être remplacé par un disque épointé topologique. Dans (3), il faut alors remplacer la condition $z \in \pi^{-1}(V) \cap q^{-1}D$ par la condition $z \in \pi^{-1}(V) \cap q^{-1}D \cap D$. Puisque notre construction ne dépend que du *germe* $(D, 0)$ de disque épointé D au voisinage de 0, nous noterons plus intrinsèquement :

$$\mathcal{F}_A = \frac{(D,0) \times \mathbf{C}^n}{\sim_A} \longrightarrow \mathbf{E}_q = \frac{(D,0)}{\sim}.$$

On obtient ainsi un foncteur $A \rightsquigarrow \mathcal{F}_A$ de $\mathcal{E}^{(0)} = \mathrm{DiffMod}\left(\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q\right)$ dans la catégorie des fibrés vectoriels holomorphes sur $\mathbf{E}_q$. Les propriétés (faciles) suivantes sont alors essentielles pour la théorie de Galois : *ce foncteur est exact, fidèle et $\otimes$-compatible.* Dans la terminologie de [**4**], on dit que c'est un foncteur fibre de $\mathcal{E}^{(0)}$ sur $\mathbf{E}_q$. Il permet de construire des familles de foncteurs fibres sur $\mathbf{C}$, respectivement indexées par $\mathbf{E}_q$ et par $\mathbf{C}^*$: voir [**24**] et [**25**].

D'un point de vue purement fonctoriel, nous verrons que le fonteur $A \rightsquigarrow \mathcal{F}_A$ est essentiellement surjectif ; mais cela ne sert à rien, car il n'est pas pleinement fidèle. Par exemple, il peut associer des fibrés isomorphes à des modules qui ne le sont pas (voir un exemple section 2.3.3). Cette question sera abordée à la la section 2.3.2.

Pratiquement, le problème se présente ainsi. Soient $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C}(\{z\}))$ et $B \in \mathcal{GL}_p(\mathbf{C}(\{z\}))$ les matrices de deux objets M_A, M_B de $\mathcal{E}^{(0)}$. Soit $\phi : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$ un morphisme. D'après les généralités de l'introduction, on peut décrire ϕ comme une application holomorphe F de D dans $\mathrm{Mat}_{p,n}(\mathbf{C})$ qui satisfait l'équation (2). Pour en faire un morphisme dans $\mathcal{E}^{(0)}$, il faudrait le prolonger méromorphiquement en 0. *Mais on ne sait (en général) rien du mode de croissance de F en* 0.

Exemples. — 1. Un morphisme de $\mathcal{F}_{(1)}$ dans $\mathcal{F}_{(z)}$ s'identifie à une fonction holomorphe $f : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}$ telle que $f(qz) = zf(z)$, autrement dit, à une section holomorphe de $\mathcal{F}_{(z)}$. (Ainsi, $\mathcal{F}_{(1)}$ se comporte comme l'objet unité $\underline{1}$ décrit en 1.2.2.) Par exemple, θ_q réalise un tel morphisme, et il a une singularité essentielle en 0. D'ailleurs, il n'existe

aucun morphisme non trivial de $\underline{1} = M_{(1)}$ dans $M_{(z)}$: en effet, ce serait une série de Laurent $f \in \mathbf{C}(\{z\})$ telle que $\sigma_q f = zf$, ce qui implique $f = 0$. (Cela reste vrai dans DiffMod $(\mathbf{C}((z)), \sigma_q)$.)
2. Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)$ et $F = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \theta_q & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Alors F réalise un automorphisme de $\mathcal{F}_A$, qui ne provient pas d'un automorphisme de M_A.
3. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^2 \end{smallmatrix}\right)$. Nous verrons en 2.3.3 que $\mathcal{F}_A$ est somme de deux fibrés en droites de degré 1, alors que M_A est indécomposable.

Remarques. — 1. Le fibré $\mathcal{F}_A$ défini à partir du quotient de $D \times \mathbf{C}^n$ se relève par $\pi : \mathbf{C}^* \to \mathbf{E}_q$ en un fibré trivial sur $\mathbf{C}^*$ (section 1.1.2). Il est donc de la forme $\mathcal{F}_{A'}$, où A' est holomorphe de $\mathbf{C}^*$ dans $\mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$. Le fait qu'il s'agisse de deux relèvements du même fibré signifie qu'il existe $F : D \to \mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$ holomorphe tel que $(\sigma_q F)A = A'F$. Les matrices A et A' sont holomorphiquement équivalentes sur D, mais A se prolonge méromorphiquement en 0 alors que A' se prolonge holomorphiquement à $\mathbf{C}^*$.
2. Tout fibré sur une surface de Riemann compacte est méromorphiquement trivial ([**16**], p. 103) [(5)]. Il existe donc $F : D \to \mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$ méromorphe tel que $A = F[I_n]$: F est donc une solution matricielle fondamentale *méromorphe* de (1). (C'est en substance l'argument de Praagman dans [**20**].)

2.1.1. *Équations fuchsiennes.* — Nous dirons que le module M de $\mathcal{E}^{(0)}$ ou DiffMod $(\mathbf{C}((z)), \sigma_q)$ est *fuchsien* s'il est de la forme M_A, où $A(0) \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$. De même, si $K = \mathbf{C}(\{z\})$ ou $\mathbf{C}((z))$, l'équation (1) est dite *fuchsienne* si elle est équivalente à une équation de matrice B telle que $B(0) \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$. Dans le cas d'un module de DiffMod $(\mathbf{C}(z), \sigma_q)$ ou d'une équation à coefficients dans $\mathbf{C}(z)$, considérés via le plongement $\mathbf{C}(z) \hookrightarrow \mathbf{C}(\{z\})$, on dit *fuchsien(ne) en* 0. Cette propriété équivaut à des conditions de croissance des solutions ([**33**]) ou de polygone de Newton (section 2.2.1). Pour une caractérisation plus intrinsèque, en termes de « réseau stable », voir [**23**], [**5**].

Un lemme clé dit alors que *toute équation fuchsienne est localement équivalente à une équation à coefficients constants*, autrement dit, il existe $A^{(0)} \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$ et $F \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C}(\{z\}))$ tels que $A = F\left[A^{(0)}\right]$. Comme dans le cas des équations différentielles, se lemme se prouve en deux étapes : élimination des *résonnances* à l'aide de transformations de shearing ; détermination d'un unique F formel tangent à l'identité, et preuve de convergence.

La catégorie $\mathcal{E}_f^{(0)}$ des équations fuchsiennes en 0 est, par définition, la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}^{(0)}$ formée des objets fuchsiens. (En fait, on constate *a posteriori* que l'on peut aussi bien partir de DiffMod $(\mathbf{C}(z), \sigma_q)$ ou de DiffMod $(\mathbf{C}((z)), \sigma_q)$.) C'est une sous-catégorie tannakienne de $\mathcal{E}^{(0)}$ (elle est stable par toutes les opérations linéaires). La sous-catégorie pleine formée des équations à coefficients constants est également

(5) Gunning l'affirme en général, en faisant référence à la page 43 où c'est prouvé seulement pour la droite projective ; en fait, la démonstration s'adapte sans problème.

une sous-catégorie tannakienne, que nous noterons $\mathcal{P}$. Il découle du lemme-clé que *l'inclusion* $\mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{E}_f^{(0)}$ *est une équivalence de catégories.*

Pour tout objet M_A de $\mathcal{P}$ défini par $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$, le fibré $\mathcal{F}_A$ admet la construction simplifiée :

$$\mathcal{F}_A = \frac{\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^n}{(z, X) \sim (qz, AX)}.$$

C'est donc un fibré plat.

Théorème 2.1 **([34]).** — *Le foncteur $A \rightsquigarrow \mathcal{F}_A$ de $\mathcal{P}$ dans la catégorie $Fib_p(\mathbf{E}_q)$ des fibrés plats sur $\mathbf{E}_q$ est une équivalence de catégories tannakiennes.*

Démonstration. — Soit $\phi : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$, représenté par une matrice F holomorphe sur $\mathbf{C}^*$ et telle que $(\sigma_q F)A = BF$. On a donc $F(qz) = BF(z)A^{-1}$, d'où l'on déduit facilement que F a une croissance modérée en 0, donc un prolongement méromorphe, d'où la pleine fidélité. (En fait, il n'est pas très difficile de voir que F est à coefficients dans $\mathbf{C}[z, z^{-1}]$, *cf.* [**34**].)
Pour l'essentielle surjectivité, on part d'un fibré plat défini par la représentation telle que $1 \mapsto A_1$, $\tau \mapsto A_\tau$. Les matrices A_1 et A_τ commutent. Il existe donc un logarithme $2\mathrm{i}\pi B$ de A_1 qui commute avec A_1 et A_τ. En posant $G(x) = e^{2\mathrm{i}\pi x B}$, on voit que $G(x+1) = A_1 G(x)$ et $G(x+\tau)A = A_\tau G(x)$, où $A = A_\tau A_1^{-\tau}$. Le fibré est donc isomorphe à $\mathcal{F}_A$. □

Au fibré plat $\mathcal{F}_A$ est associée par la correspondance de Weil la représentation de $\pi_1(\mathbf{E}_q) = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ définie par $1 \mapsto I_n$, $\tau \mapsto A$. Le théorème dit que toute représentation de $\pi_1(\mathbf{E}_q)$ est équivalente (dans ce sens étendu) à une représentation de cette forme. La catégorie $Fib_p(\mathbf{E}_q)$ (dont les morphismes sont *tous* les morphismes de fibrés vectoriels holomorphes) est donc équivalente à la catégorie dont les objets sont les représentations du groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}^*/\mathbf{E}_q) = q^{\mathbf{Z}} \simeq \mathbf{Z}$, et les morphismes sont les morphismes équivariants de la section 1.1.1. La catégorie $\mathcal{E}_f^{(0)}$ est donc équivalente à la catégorie $Rep_{\mathbf{E}_q}(\mathbf{Z})$ obtenue en épaississant la catégorie $Rep(\mathbf{Z})$ des représentations (complexes de dimension finie) de $\mathbf{Z}$. Dans [**34**] (et, par une autre voie, dans [**2**]) on en déduit la description du groupe de Galois de $\mathcal{E}_f^{(0)}$. L'action de ce groupe de Galois est explicitée dans [**24**] et [**25**].

2.1.2. *Quelques exemples de rang* 1. — Un module de rang 1 dans $\mathcal{E}^{(0)}$ est de la forme $M_{(a)}$, où $a \in \mathbf{C}(\{z\})^*$. Écrivons $a = a_0 z^\mu u$, où $a_0 \in \mathbf{C}^*$, $\mu = v_0(a) \in \mathbf{Z}$ (valuation z-adique de a) et $u = 1 + u_1 z + \cdots$. Pour construire des solutions, on applique la section 1.2.1.

L'équation $\sigma_q f = uf$ admet la solution régulière $v(z) = \prod_{n \geq 1} u(q^{-n}z)$. Il revient au même de dire que $v : (1) \to (u)$ est une équivalence analytique, ou que $v : \underline{1} \to M_{(u)}$ est un isomorphisme. Le fibré $\mathcal{F}_{(u)}$ est donc isomorphe au fibré en droites trivial $\underline{1} = \mathcal{F}_{(1)}$.

L'équation $\sigma_q f = z^\mu f$ admet la solution θ_q^μ. Le module $M_{(z^\mu)}$ est isomorphe à $M_{(z)}^{\otimes \mu}$, puissance tensorielle μ^{e} de $M_{(z)}$. (Comme tout module de rang 1, il admet son dual comme inverse pour $\otimes$, ses puissances tensorielles négatives sont donc définies.) Le fibré associé est $\mathcal{F}_{(z^\mu)} \simeq \mathcal{F}_{(z)}^{\otimes \mu}$, dont une section est θ_q^μ, de diviseur $\mathrm{div}_{\mathbf{E}_q} \theta_q^\mu = \mu[\overline{-1}]$.

L'équation fuchsienne scalaire $\sigma_q f = a_0 f$ admet pour solution le q-caractère e_{q,a_0}, qui est une section du fibré plat $\mathcal{F}_{a_0}$. Comme $\mathrm{div}_{\mathbf{E}_q}(e_{q,a_0}) = [\overline{-1}] - [\overline{-a_0}]$, le degré de ce fibré est 0. (Le lecteur remarquera que, si $a_0 \in q^{\mathbf{Z}}$, le degré est nul et le module et le fibré sont en fait triviaux.)

Le module $M_{(a)}$ (resp. le fibré $\mathcal{F}_{(a)}$ associé) est isomorphe au produit tensoriel de ces trois modules (resp. de ces trois fibrés). Le degré de $\mathcal{F}_{(a)}$ est donc μ. Sa pente (quotient du degré par le rang, *cf.* [**40**]) est donc μ.

2.2. Équations irrégulières

2.2.1. *Polygone de Newton.* — On montre que tout module aux q-différences sur $K = \mathbf{C}(z)$, $\mathbf{C}(\{z\})$ ou $\mathbf{C}((z))$ peut se mettre sous la forme $M = \mathcal{D}_{q,K}/\mathcal{D}_{q,K}P$ (« lemme du vecteur cyclique » et euclidianité à gauche de $\mathcal{D}_{q,K}$). On peut prendre P sous la forme $a_n\sigma^n + \cdots + a_0$, où $a_0 a_n \neq 0$. Notons $v_0(a)$ la valuation z-adique de $a \in K$. La frontière de l'enveloppe convexe de $\{(i,j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z} \mid 0 \leq i \leq n \text{ et } j \geq v_0(a_j)\}$ est formée de deux demi-droites verticales et de k vecteurs $(r_1, d_1), \ldots, (r_k, d_k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{Z}$. Notant $\mu_i = \frac{d_i}{r_i} \in \mathbf{Q}$, on indexe ces vecteurs de gauche à droite, de sorte que $\mu_1 < \cdots < \mu_k$. On prouve que les *pentes*[(6)] μ_i et leurs *multiplicités* r_i ne dépendent que de M.

Exemples. — 1. Soit $L = \sigma - a$ où $a \in \mathbf{C}(\{z\})^*$. L'équation $Lf = 0$, c'est-à-dire $\sigma_q f = af$, est modélisée par le module $M_{(a)}$, dont on peut démontrer qu'il est isomorphe à $\mathcal{D}_{q,K}/\mathcal{D}_{q,K}\mathcal{L}^\vee$, où $L^\vee = a\sigma - 1$. Les pentes de $M_{(a)}$ se calculent avec $L^\vee$: l'unique pente est $\mu = v_0(a)$. Le fibré $\mathcal{F}_{(a)}$ est de rang 1 et de degré μ (section 2.1.2), donc de pente μ.

2. Soit $L = qz\sigma^2 - (1+z)\sigma + 1 = (\sigma - 1)(z\sigma - 1)$. L'équation Lf est intéressante, parce qu'elle est satisfaite par la *série de Tschakaloff* $\sum_{n \geq 0} q^{n(n-1)/2} z^n$, qui est un q-analogue de la série d'Euler. On en fait une équation vectorielle de type (1) en posant (par exemple) $X = \begin{pmatrix} f \\ z\sigma_q f - f \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} z^{-1} & z^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le module M_A est isomorphe à à $\mathcal{D}_{q,K}/\mathcal{D}_{q,K}\mathcal{L}^\vee$, où $L^\vee = (\sigma - z)(\sigma - 1) = \sigma^2 - (1+z)\sigma + z$. Ses pentes sont -1 et 0. La forme triangulaire de la matrice indique qu'il y a une suite exacte : $0 \to M_{(z^{-1})} \longrightarrow M_A \longrightarrow M_{(1)} \to 0$, où l'inclusion a pour matrice $\binom{1}{0}$ et la projection $(0\ 1)$. Il y a donc également une suite exacte de fibrés : $0 \to \mathcal{F}_{(z^{-1})} \longrightarrow \mathcal{F}_A \longrightarrow \mathcal{F}_{(1)} \to 0$.

La donnée du *polygone de Newton* N_M de M équivaut à celle de la fonction r_M de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{N}$ telle que $\mu_i \mapsto r_i$ et qui est nulle par ailleurs. Selon [**36**], le polygone de Newton est additif pour les suites exactes, multiplicatif pour le produit tensoriel et tel que $r_{M^\vee}(\mu) = r_M(-\mu)$. Ces règles sont assez différentes de celles qui régissent les équations différentielles.

(6) Depuis [**24**], [**25**], nous avons adopté pour les pentes une convention *opposée* à celle qui prévalait dans [**36**], [**28**], [**35**].

Nous dirons qu'un module est *pur isocline* s'il admet une seule pente et *pur* s'il est somme directe de modules purs isoclines (7). Les modules fuchsiens sont les modules purs isoclines de pente 0.

2.2.2. *Filtration par les pentes*

Théorème 2.2 **([36])**. — *(i) Tout module de* $\mathcal{E}^{(0)}$ *ou* $\mathrm{DiffMod}\,(\mathbf{C}((z)),\sigma_q)$ *admet une unique filtration croissante* $(M_{\leq\mu})_{\mu\in\mathbf{Q}}$ *telle que les quotients* $M_{(\mu)} = M_{\leq\mu}/M_{<\mu}$ *sont purs de pente* μ. *(Le rang de* $M_{(\mu)}$ *est donc* $r_M(\mu)$.*)*
(ii) la filtration est strictement fonctorielle : le foncteur gradué associé : $M \rightsquigarrow grM = \bigoplus\limits_{\mu\in\mathbf{Q}} M_{(\mu)}$ *est exact. Il est de plus fidèle et* $\otimes$*-compatible.*
(iii) Dans $\mathrm{DiffMod}\,(\mathbf{C}((z)),\sigma_q)$, *le foncteur gr est isomorphe au foncteur identité.*

En termes d'opérateurs, ce théorème dit que, pour $K = \mathbf{C}(\{z\})$, tout $L \in \mathcal{D}_{q,K}$ admet une factorisation $L = L_1 \cdots L_k$ où les L_i sont purs de pentes $\mu_1 < \cdots < \mu_k$. Pour $K = \mathbf{C}((z))$, une telle factorisation est possible avec un ordre des pentes arbitraires. En termes de matrices, toute $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C}(\{z\}))$ peut se mettre sous la forme triangulaire supérieure par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & U_{i,j} & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix},$$

où chaque A_i est pure de pente μ_i. Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C}((z)))$, on peut prendre les $U_{i,j} = 0$.

Exemple. — Soit $L = qz\sigma^2 - (1+z)\sigma + 1$, dont les pentes sont 0 et -1. L'existence analytique de la filtration vient de la factorisation analytique $L = (\sigma - 1)(z\sigma - 1)$ (qui remonte à Adams, Birkhoff et Guenther). L'opérateur dual se factorise : $L^\vee = (\sigma - z)(\sigma - 1)$, d'où une suite exacte pour le module associé $M = \mathcal{D}_{q,K}/\mathcal{D}_{q,K}\mathcal{L}^\vee$:

$$0 \to \mathcal{D}_{q,K}/\mathcal{D}_{q,K}(\sigma - z) \longrightarrow M \longrightarrow \mathcal{D}_{q,K}/\mathcal{D}_{q,K}(\sigma - 1) \to 0.$$

C'est cette suite exacte qui permet de construire la forme triangulaire $A = \left(\begin{smallmatrix} z^{-1} & z^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ obtenue page 410. En effet, le module $\mathcal{D}_{q,K}/\mathcal{D}_{q,K}(\sigma - z)$ se décrit également comme $(\mathbf{C}(\{z\}), \Phi_{z^{-1}})$, et correspond donc à la matrice $(z^{-1}) \in \mathcal{GL}_1(\mathbf{C}(\{z\}))$. De même, $\mathcal{D}_{q,K}/\mathcal{D}_{q,K}(\sigma - 1)$ correspond à $(1) \in \mathcal{GL}_1(\mathbf{C}(\{z\}))$.

Corollaire 2.3. — *Le fibré* $\mathcal{F}_A$ *est muni d'une filtration* $\mathcal{F}_{(1)} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_k$ *telle que chaque* $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ *est le fibré associé à une équation pure de pente* μ_i.

(7) Nous avons adopté cette terminologie depuis [**24**], [**25**] (anciens termes : « pur », et « modérément irrégulier ». Nos modules purs sont les « split modules » de [**22**].

Remarque. — En fait, sous cette forme, l'énoncé ci-dessus est presque vide. Selon le théorème 10, p. 63 de [**16**], tout fibré sur $\mathbf{E}_q$ peut être décrit par une matrice triangulaire supérieure (sans blocs). Avec les calculs de la section 2.1.2, on peut obtenir des termes diagonaux de la forme $\alpha_i z^{d_i}$ ($\alpha_i \in \mathbf{C}^*$, $d_i \in \mathbf{Z}$). De plus, chaque fois que $i < j$ et $d_i > d_j$, on peut permuter les deux termes diagonaux correspondants. En effet, cela se ramène à la constatation que l'équation $\alpha_j z^{d_j} \sigma_q f - \alpha_i z^{d_i} f = u$ admet, pour tout $u \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^*)$, une solution $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^*)$; et ce point est immédiat par identification des séries de Laurent. On obtient donc un résultat apparemment analogue au théorème mais plus fort pour les fibrés. Cependant, les exposants d_i qui apparaissent ici n'ont aucune signification intrinsèque en termes de fibrés. (Pour une mise en forme plus intrisèque, voir la section 2.3.3.)

À partir de ce théorème, deux voies distinctes ont été suivies. En supposant les pentes entières, on a une description simple des blocs purs A_i (section 2.3). On en tire, *par voie transcendante*, des conséquences pour la classification ([**28**], [**35**], section 3.1) et pour la théorie de Galois ([**24**], [**25**], section 3.2).

Récemment, van der Put et Reversat ont élucidé la structure des modules purs dans le cas général ([**22**]). Dans le cas d'un module indécomposable de rang r et pente $\mu = \frac{d}{r}$, on a $d \wedge r = 1$ et la description est similaire à celle des fibrés indécomposables sur $\mathbf{E}_q$ par Atiyah ([**1**], [**17**]), qu'elle permet de retrouver de manière plus simple. L'extension des résultats de Ramis, Sauloy et Zhang au cas des pentes rationnelles à l'aide de [**22**] ne semble pas avoir été faite. Elle devrait entrainer des complications algébriques, mais peut-être pas mettre en jeu d'idées analytiques nouvelles. Dans *loc. cit.*, van der Put et Reversat enrichissent de plus le fibré d'une connexion méromorphe, mais cela ne modifie pas le problème de la pleine fidélité. Nous proposerons une autre structure à la section 2.3.2.

2.3. Équations irrégulières à pentes entières

2.3.1. *Description des équations à pentes entières.* — Pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}^{(0)} = \mathrm{DiffMod}\,(\mathbf{C}(\{z\}), \sigma_q)$ formée des équations à pentes dans $\frac{1}{d}\mathbf{Z}$ est une sous-catégorie tannakienne. Pour $d = 1$, on obtient la catégorie $\mathcal{E}_1^{(0)}$ des équations à pentes entières. La sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}_1^{(0)}$ formée des équations pures à pentes entières en est encore une sous-catégorie tannakienne $\mathcal{E}_{p,1}^{(0)}$.

Si M est pur (isocline) de pente $\mu \in \mathbf{Z}$, alors $M_{(z^{-\mu})} \otimes M$ est fuchsien, donc de la forme M_A avec $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$. On a donc $M \simeq M_{z^\mu A}$. On peut alors améliorer la forme triangulaire des matrices en une *forme standard* :

$$A = \begin{pmatrix} z^{\mu_1} A_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & U_{i,j} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & z^{\mu_k} A_k \end{pmatrix}, \tag{4}$$

où les pentes $\mu_1 < \cdots < \mu_k$ sont entières, $r_i \in \mathbf{N}^*$, $A_i \in \mathcal{GL}_{r_i}(\mathbf{C})$ $(i = 1, \ldots, k)$ (ces μ_i et r_i constituent le polygone de Newton de A) et :

$$U = (U_{i,j})_{1 \leq i < j \leq k} \in \prod_{1 \leq i < j \leq k} \mathrm{Mat}_{r_i, r_j}(\mathbf{C}(\{z\})).$$

On peut même imposer aux $U_{i,j}$ d'être polynomiaux ([**28**]).

Soit B une matrice à pentes entières décrite de manière similaire : blocs diagonaux $z^{\nu_{i'}} B_{i'}$, où $B_{i'} \in \mathcal{GL}_{s_{i'}}(\mathbf{C})$ $(i' = 1, \ldots, k')$ et surdiagonaux $V_{i',j'} \in \mathrm{Mat}_{s_{i'}, s_{j'}}(\mathbf{C}(\{z\}))$. La filtration étant fonctorielle, tout morphisme $F : A \to B$ est triangulaire supérieur par blocs. Plus précisément, F admet une décomposition en blocs $F_{i',i} \in \mathrm{Mat}_{s_{i'}, r_i}(\mathbf{C}(\{z\}))$, nuls pour $i < i'$ et tels que, pour $i' \geq i$:

$$(\sigma_q F_{i',i}) z^{\mu_i} A_i + \sum_{i' \leq l < i} (\sigma_q F_{i',l}) U_{l,i} = z^{\nu_{i'}} B_{i'} F_{i',i} + \sum_{i' \leq l < i} V_{i',l} F_{l,i}.$$

2.3.2. *Fibrés associés aux équations à pentes entières.* — Pour tout module pur isocline $M \simeq M_{z^\mu A}$, le fibré $\mathcal{F}_M$ est isomorphe à $\mathcal{F}_{(z^\mu)} \otimes \mathcal{F}_A$. Disons qu'un fibré est *pur isocline de pente* μ si c'est le produit tensoriel d'un fibré en droites de degré μ par un fibré plat. Il résulte du théorème 2.2 et de son corollaire que l'on peut associer à tout objet M de $\mathcal{E}_1^{(0)}$ un fibré $\mathcal{F}_M$ muni d'une filtration à quotients purs isoclines $\mathcal{F}_{(1)} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_k$.

Théorème 2.4. — *Le foncteur $M \rightsquigarrow (F_M, \mathcal{F}_{(1)} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_k)$ est exact, pleinement fidèle et $\otimes$-compatible.*

Démonstration. — Les objets de la catégorie d'arrivée sont les couples $(\mathcal{F}, (\mathcal{F}_{\leq \mu})_{\mu \in \mathbf{Z}})$ formés d'un fibré et d'une filtration croissante par des sous-fibrés telle que les $\mathcal{F}_{(\mu)} = \mathcal{F}_{\leq \mu} / \mathcal{F}_{< \mu}$ sont des fibrés purs isoclines de pente μ. Les morphismes de cette catégorie sont les morphismes de fibrés $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ qui respectent la filtration : $\phi(\mathcal{F}_{\leq \mu}) \subset \mathcal{F}'_{\leq \mu}$. La structure tensorielle est définie en munissant $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ de la filtration :

$$(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}')_{\leq \mu} = \mathrm{Im} \left(\sum_{\nu + \nu' \leq \mu} \mathcal{F}_{\leq \nu} \otimes \mathcal{F}'_{\leq \nu'} \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}' \right).$$

Le seul point nouveau dans l'énoncé du théorème est que ce foncteur est *pleinement* fidèle. Soient A, B des objets de $\mathcal{E}_1^{(0)}$ et $\phi : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$ un morphisme. On écrit ϕ sous la forme $F \in \mathrm{Mat}_{p,n}(\mathcal{O}(\mathbf{C}^*))$ tel que $(\sigma_q F) A = BF$. L'hypothèse sur le respect des filtrations dit que F est triangulaire par blocs au sens de la section précédente, et que ces blocs vérifient les mêmes équations que ceux des morphismes dans $\mathcal{E}_1^{(0)}$. Le lemme ci-dessous entraine alors, par récurrence, que F admet un prolongement méromorphe en 0. (La récurrence est amorcée par les blocs diagonaux de F qui se déduisent du cas fuchsien.) □

Lemme 2.5. — *Soient $\mu < \nu$, $C \in \mathcal{GL}_r(\mathbf{C})$, $D \in \mathcal{GL}_s(\mathbf{C})$ et $U \in \mathrm{Mat}_{s,r}(\mathbf{C}(\{z\}))$. Soit $F \in \mathrm{Mat}_{s,r}(\mathcal{O}(\mathbf{C}^*))$ tel que $(\sigma_q F)(z^\mu C) - (z^\nu D) F = U$. Alors F est méromorphe en* 0.

Démonstration. — On écrit le développement en série de Laurent : $F = \sum_{n \in \mathbf{Z}} F_n z^n$. On a donc : $q^{n-\mu} F_{n-\mu} C - D F_{n-\nu} = U_n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Puisque U est méromorphe en 0, il existe donc n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on ait : $q^n F_n = D F_{n-\delta} C^{-1}$, où $\delta = \nu - \mu \geq 1$. Si l'on n'a pas $F_n = 0$ pour $n \ll 0$, alors F_n est de l'ordre de grandeur de $q^{n^2/2\delta}$ lorsque $n \to -\infty$, contredisant la convergence de la série de Laurent. □

2.3.3. *Lien avec la filtration de Harder-Narasimhan.* — La filtration introduite à la section précésente présente des ressemblances formelles avec la filtration de Harder-Narasimhan ([**40**]), mais nous allons voir qu'elles ne sont pas liées. Cependant, il y a d'intrigantes questions de stabilité. Les calculs qui suivent sont en grande partie tirés de [**13**].

2.3.3.1. *Une famille génériquement stable.* — Soit $A_u = \left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)$, avec $u \in \mathbf{C}(\{z\})$. D'après [**28**], on peut ramener A_u à la forme A_v avec $v \in \mathbf{C}$ via un unique morphisme de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, où $f \in \mathbf{C}(\{z\})$, *i.e.* trivial sur les gradués associés.
Soient maintenant $u, v \in \mathbf{C}$. D'après la fonctorialité de la filtration et ce que l'on sait sur les morphismes entre objets fuchsiens, tout morphisme de A_u dans A_v est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right)$, où $f \in \mathbf{C}(\{z\})$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{C}^*$. Or, l'équation correspondante $z\sigma_q f - f = v - \frac{\alpha}{\beta} u$ admet pour seule solution formelle $f = \left(v - \frac{\alpha}{\beta} u\right) \hat{\phi}$, où $\hat{\phi}$ est la série de Tschakaloff, et f n'est donc convergente que si $v = \frac{\alpha}{\beta} u\cdot$ Ainsi, A_u n'est isomorphe à A_v que si $u = v = 0$ ou bien si $u \neq 0, v \neq 0$. Les A_u, autrement dit, les extensions de (z) par (1) se répartissent en deux classes [(8)] : scindée ou non. Dans le cas non scindé, A_u est de plus indécomposable (cela se déduit de la fonctorialité de la filtration par les pentes).

Discutons maintenant la *stabilité* du fibré $\mathcal{F}_{A_u}$ ([**16**], [**40**]). Le degré de $\mathcal{F}_{A_u}$ est 1 (extension de $\mathcal{F}_{(z)}$ par $\mathcal{F}_{(1)}$), son rang est 2, sa pente est donc $\frac{1}{2}\cdot$ Pour qu'il soit instable, il faut, et il suffit, qu'il admette un sous-fibré en droite de pente, donc de degré $> \frac{1}{2}$, donc ≥ 1, autrement dit, qu'il admette une section méromorphe non triviale de degré ≥ 1. Les sections méromorphes de $\mathcal{F}_{A_u}$ s'identifient aux solutions méromorphes $X = \left(\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}\right)$ de l'équation $\sigma_q X = A_u X$, *i.e.* du système :

$$\begin{cases} \sigma_q f = f + ug, \\ \sigma_q g = zg. \end{cases}$$

Le degré $\deg X \underset{\text{déf}}{=} \deg \operatorname{div}_{\mathbf{E}_q} X$ de la section X se calcule ainsi : si $h \in \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)^*$ est telle que $h^{-1} X \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^*)^2$ ne s'annule en aucun point, alors $\operatorname{div}_{\mathbf{E}_q} X \underset{\text{déf}}{=} \operatorname{div}_{\mathbf{E}_q} h$ et $\deg \operatorname{div}_{\mathbf{E}_q} X = \deg \operatorname{div}_{\mathbf{E}_q} h$. Il est clair que, si ϕ est elliptique et non triviale, alors $\deg(\phi X) = \deg X$.
Si $g = 0$, f est elliptique et, par hypothèse, non triviale, donc $\deg X = \deg f = 0$ (ce cas correspond au sous-fibré $\mathcal{F}_{(1)}$).

(8) Il s'agit des classes d'isomorphie des modules qui sont des extensions de (z) par (1), et non des classes d'extension au sens habituel. Ces dernières forment l'espace $Ext((z),(1))$, qui est de dimension 1 ([**28**]) et paramétré par u.

Si $g \neq 0$, alors $g = h\theta_q$, où h est elliptique et, quitte à diviser par h, on peut aussi bien supposer que $g = \theta_q$ et $\sigma_q f - f = u\theta_q$. Dire que $\deg X \geq 1$ c'est dire que f et g ont un zéro commun, donc que $f = \theta_q f_1$, où $f_1 \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^*)$. Mais alors $z\sigma_q f_1 - f_1 = u$, qui n'a de solution dans $\mathcal{O}(\mathbf{C}^*)$ que si $u = 0$ (on le voit en examinant les séries de Laurent).

Nous avons donc une dichotomie : soit $u = 0$ et A_u et $\mathcal{F}_{A_u}$ sont scindés ; soit $u \neq 0$, et A_u est indécomposable et $\mathcal{F}_{A_u}$ est stable. Dans ce dernier cas, la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathcal{F}_{A_u}$ est triviale, alors que celle induite par la filtration par les pentes de A_u ne l'est pas.

2.3.3.2. *Une famille semi-stable.* — Soit $A_u = \left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & z^2 \end{smallmatrix}\right)$, avec $u \in \mathbf{C}(\{z\})$. D'après [**28**], on peut ramener A_u à la forme forme A_v avec $v \in \mathbf{C} + \mathbf{C}z$ via un unique morphisme trivial sur les gradués associés. Nous supposerons donc d'emblée que $u = u_0 + u_1 z$. Par un raisonnement similaire à celui du paragraphe précédent, on voit que la classe d'isomorphie de A_u détermine $(u_0, u_1) \in \mathbf{C}^2$ à un facteur près dans $\mathbf{C}^*$. De plus, si $u \neq 0$, l'objet A_u est indécomposable.

Le degré de $\mathcal{F}_{A_u}$ est 2, sa pente est 1. Si $u = 0$, ce fibré est scindé. On suppose désormais que $u \neq 0$. On va voir que, dans ce cas, $\mathcal{F}_{A_u}$ est semi-stable et non stable : autrement dit, il admet des sections méromorphes de degré 1, mais pas plus. Une section méromorphe de $\mathcal{F}_{A_u}$ est (par les identifications habituelles) de la forme $X = \left(\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}\right)$, où :

$$\begin{cases} \sigma_q f = f + ug, \\ \sigma_q g = z^2 g. \end{cases}$$

Si $g = 0$ et $f \neq 0$, $\deg X = 0$ (cas du sous-fibré $\mathcal{F}_{(1)}$). Si $g \neq 0$, on se ramène au cas où $g = \theta_q^2$, on écrit $f = f_1\theta_q^2$ et l'on doit avoir : $z^2\sigma_q f_1 - f_1 = u$. Pour que $\deg X \geq 1$, il faut que f_1 ait au pire un pôle simple sur $\mathbf{E}_q$, soit $\overline{a}$, donc que l'on ait $f_1 = \frac{h}{\theta_a}$ avec $h \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^*)$. On est donc ramené à chercher $a \in \mathbf{C}^*$ et $h \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^*)$ tels que $az\sigma_q h - h = u\theta_a$. Par développement en série de Laurent $h = \sum h_n z^n$, cette équation équivaut à :

$$\forall n \in \mathbf{Z}\ ,\ aq^{n-1}h_{n-1} - h_n = \left(u_0 q^{-n(n+1)/2} + u_1 a q^{-n(n-1)/2}\right) a^{-n},$$

soit encore à :

$$\forall n \in \mathbf{Z}\ ,\ \frac{h_{n-1}}{q^{(n-1)(n-2)/2}a^{n-1}} - \frac{h_n}{q^{n(n-1)/2}a^n} = \left(u_0 q^{-n^2} + u_1 a q^{-n(n-1)}\right) a^{-2n}.$$

Il s'agit essentiellement d'une *transformation de q-Borel* (voir [**28**] et la section 3.2). Par sommation et annulation télescopique, on voit immésiatement qu'une condition *nécessaire* est la nullité de :

$$\phi_u(a) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(u_0 q^{-n^2} + u_1 a q^{-n(n-1)}\right) a^{-2n}.$$

Les mêmes majorations que dans [**35**], preuve du lemme 2.9, montrent que c'est une condition suffisante.

On a sans peine :

$$\phi(a) = u_0\theta_{q^2}(qa^{-2}) + u_1 a^{-1}\theta_{q^2}(a^{-2}).$$

Notons que la condition posée, $\phi(a) = 0$, est invariante par $a \leftarrow qa$, comme il se doit (c'est une condition sur le pôle $\overline{a} \in \mathbf{E}_q$).
Si $u_0 = 0 \neq u_1$, on doit résoudre $\theta_{q^2}(a^{-2}) = 0$, ce qui donne $a^{-2} \in [-1, q^2]$. Les deux solutions dans $\mathbf{E}_q$ sont $\overline{\mathrm{i}}$ et $\overline{-\mathrm{i}}$. De même, si $u_0 \neq 0 = u_1$, on résoud $\theta_{q^2}(qa^{-2}) = 0$, donc $a^{-2} \in [-q, q^2]$, donc les deux solutions dans $\mathbf{E}_q$ sont $\overline{\sqrt{-q}}$ et $\overline{-\sqrt{-q}}$ (avec un choix arbitraire de racine carrée).
Supposons $u_0u_1 \neq 0$. La fonction $\psi(a) = \frac{\theta_{q^2}(qa^{-2})}{a^{-1}\theta_{q^2}(a^{-2})}$ est q-elliptique [9] et admet, dans $\mathbf{E}_q$, deux pôles simples et deux zéros simples. Elle prend donc chaque valeur $\frac{u_1}{u_0}$ deux fois, et il y a encore deux pôles $\overline{a} \in \mathbf{E}_q$ possibles.
Si l'on a trouvé $\overline{a_1} \neq \overline{a_2}$, les sections X_1 et X_2 correspondantes sont non proportionnelles. On peut en déduire que $\mathcal{F}_{A_u}$ est scindé dans ce cas (qui est générique).

3. Le phénomène de Stokes

3.1. Classification d'équations irrégulières. — D'après la section 2.3.1, on peut représenter tout objet M de $\mathcal{E}_1^{(0)}$ par une matrice A de la forme (4) page 412. Le gradué $M_0 = \mathrm{gr}M$ est alors décrit par la matrice :

$$A_0 = \begin{pmatrix} z^{\mu_1}A_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & z^{\mu_k}A_k \end{pmatrix}, \tag{5}$$

De la dernière assertion du théorème 2.2, il découle alors qu'il existe une unique matrice *formelle*, c'est-à-dire à coefficients dans $\mathbf{C}((z))$:

$$F = \begin{pmatrix} I_{r_1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & F_{i,j} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & I_{r_k} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

telle que $F[A_0] = A$. Nous la noterons $\hat{F}_A \in \mathfrak{G}(\mathbf{C}((z)))$, la notation $\mathfrak{G}$ désignant le sous-groupe algébrique unipotent de $\mathcal{GL}_n$ correspondant au format ci-dessus. Plus généralement, si A' est aussi de la forme (4), alors l'unique $F \in \mathfrak{G}(\mathbf{C}((z)))$ tel que $F[A] = A'$ est $\hat{F}_{A,A'} = \hat{F}_{A'}\left(\hat{F}_A\right)^{-1}$. Les isomorphismes formels $\hat{F}_A$, $\hat{F}_{A,A'}$ sont en général très divergents : les blocs $F_{i,j}$ tels que $\mu_j - \mu_i = \delta \in \mathbf{N}^*$ sont en général

[9] En fait, on a une factorisation : $\psi(a) = \frac{\theta_q(-\sqrt{-q}a)\,\theta_q(\sqrt{-q}a)}{a\,\theta_q(-\mathrm{i}a)\,\theta_q(\mathrm{i}a)}$.

de *niveau q-Gevrey* δ, autrement dit, leurs coefficients sont de la forme $\sum f_n z^n$ avec $f_n = O\left(R^n q^{n^2/2\delta}\right)$ pour un certain $R > 0$.

3.1.0.3. *Classification analytique isoformelle.* — Il s'agit de la classification analytique à classe formelle fixée (ou à gradué fixé, ce qui revient au même). On fixe un module pur $M_0 = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$ dans $\mathcal{E}_{p,1}^{(0)}$ et l'on considère tous les couples (M, u), où M est un objet de $\mathcal{E}_1^{(0)}$ et $u : \mathrm{gr} M \to M_0$ un isomorphisme. On dit que $(M, u) \sim (N, v)$ s'il existe un isomorphisme $\phi : M \to N$ tel que $v \circ (\mathrm{gr}\phi) = u$ (isomorphismes triviaux sur le gradué). Avec les notations vues plus haut, il n'est pas très difficile de voir que, si M_0 est décrit par la matrice A_0 de la forme (5), alors un couple (M, u) est la même chose qu'une matrice A sous la forme (4) et que, si (M, u) et (M', u') correspondent à A et A', alors ils sont équivalents si, et seulement si $\hat{F}_{A,A'} \in \mathfrak{G}(\mathbf{C}(\{z\}))$.

Il a été démontré dans [**28**] que l'ensemble $\mathcal{F}(M_0)$ des classes pour cette relation est un espace affine de dimension $\mathrm{irr}(M_0) \underset{\text{déf}}{=} \sum\limits_{1 \leq i < j \leq k} r_i r_j (\mu_j - \mu_i)$, où les μ_i, r_i proviennent du polygone de Newton de M_0 (et de tous les M de sa classe formelle) [10]. Il s'agit en fait d'un vrai schéma de modules pour ce problème. Une preuve consiste à vérifier que, dans chaque classe, il existe une unique matrice A en *forme normale*, c'est-à-dire en forme standard (4) et telle que chaque $U_{i,j}$ est à coefficients dans $\sum\limits_{\mu_i \leq d < \mu_j} \mathbf{C} z^d$. Cette forme normale est inspirée de Birkhoff et Guenther. Cependant, l'objectif de [**28**] est d'obtenir des *invariants transcendants* sous une forme q-analogue aux théorèmes de Malgrange-Sibuya. Nous allons décrire l'un de ces résultats sous la forme moins puissante, mais plus simple, de [**35**].

3.1.0.4. *Sommation de* $\hat{F}_A$. — Dans [**35**], on définit un sous-ensemble fini explicite Σ_{A_0} de $\mathbf{E}_q$, qui est, en général, de cardinal $\mathrm{irr}(A_0)$ (et moins dans certains cas « résonnants »). On prouve alors :

Théorème 3.1. — *Pour tout* $\overline{c} \in \mathbf{E}_q \setminus \Sigma_{A_0}$, *il existe un unique isomorphisme méromorphe* $F : A_0 \to A$ *tel que* $F \in \mathfrak{G}(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*))$, *dont les pôles sont situés sur la q-spirale discrète* $[-c; q] = -cq^{\mathbf{Z}}$ *et tel que, pour* $1 \leq i < j \leq k$, *les pôles de* $F_{i,j}$ *ont une multiplicité* $\leq \mu_j - \mu_i$. *(Ce que l'on peut écrire :* $\mathrm{div}_{\mathbf{E}_q} F_{i,j} \geq -(\mu_j - \mu_i)[\overline{c}]$.*) Nous noterons* $S_{\overline{c}} \hat{F}_A$ *cette matrice* F.

La description de Σ_{A_0} et le calcul de $S_{\overline{c}} \hat{F}_A$ seront explicités dans un cas crucial à la section 3.2, en vue de comparaison avec d'autres constructions intéressantes.

Remarque. — Le morphisme méromorphe $S_{\overline{c}} \hat{F}_A$ induit un isomorphisme holomorphe du faisceau $\mathcal{F}_{A_0}$ sur le faisceau $\mathcal{F}_A$ en restriction à l'ouvert $\mathbf{E}_q \setminus \{\overline{c}\}$. ces deux faisceaux sont donc localement isomorphes. Comme il est facile de prouver que $\mathcal{F}_{A_0}$ est un fibré, cela fournit une nouvelle preuve du fait que $\mathcal{F}_A$ l'est également. En

(10) Ce résultat est utilisé dans [**21**], mais attribué de manière erronée à Ramis et Sauloy, et donné sans référence.

fait, cela montre que le fibré $\mathcal{F}_A$ s'obtient à partir du fibré $\mathcal{F}_{A_0}$ par l'opération de cohomologie non-abélienne « torsion par un cocycle » ([**11**]).

Nous considérons $S_{\overline{c}}\hat{F}_A$ comme une *sommation de la série divergente* $\hat{F}_A$ *dans la direction* $\overline{c} \in \mathbf{E}_q$. Ce point de vue admet diverses justifications, dont celle-ci : selon la théorie asymptotique q-Gevrey développée par Ramis et Zhang dans [**29**], $S_{\overline{c}}\hat{F}_A$ est asymptote à $\hat{F}_A$.

Il est facile de déduire du théorème que, si A et A' sont sous la forme (4) (avec même gradué A_0), alors $S_{\overline{c}}\hat{F}_{A'}\left(S_{\overline{c}}\hat{F}_A\right)^{-1}$ est l'unique isomorphisme méromorphe de A dans A' satisfaisant aux mêmes conditions de polarité : il est donc légitime de le noter $S_{\overline{c}}\hat{F}_{A,A'}$. On peut alors démontrer :

Proposition 3.2. — *Soit* $\overline{c} \in \mathbf{E}_q \setminus \Sigma_{A_0}$. *Pour que* A *et* A' *soient dans la même classe analytique, il faut, et il suffit, que* $S_{\overline{c}}\hat{F}_{A,A'}$ *n'ait pas de pôle sur* $[-c;q]$.

Naturellement, dans ce cas, $\hat{F}_{A,A'}$ est analytique et tous les $S_{\overline{c}}\hat{F}_{A,A'}$ lui sont égaux. Ce qui est remarquable dans ce résultat, c'est que l'absence des pôles sur $[-c;q]$, qui *a priori* ne devrait entrainer que l'holomorphie sur $\mathbf{C}^*$, suffit en fait à garantir la méromorphie en 0. L'argument est directement lié à celui qui a permis de prouver le théorème 2.1.

3.1.0.5. *Opérateurs de Stokes.* — Classiquement, l'ambiguïté dans la sommation d'une solution divergente d'équation fonctionnelle est le *phénomène de Stokes.* Il se réalise ici sous la forme suivante. On prend deux directions de sommation autorisées $\overline{c}, \overline{d} \in \mathbf{E}_q \setminus \Sigma_{A_0}$ et l'on pose :

$$S_{\overline{c},\overline{d}}\hat{F}_A = \left(S_{\overline{c}}\hat{F}_A\right)^{-1} S_{\overline{d}}\hat{F}_A.$$

C'est donc un automorphisme méromorphe de A_0. Il est holomorphe sur l'ouvert $U_{c,d} = \mathbf{C}^* \setminus [-c,-d;q]$ de $\mathbf{C}^*$. On peut aussi bien le considérer comme un automorphisme méromorphe du fibré $\mathcal{F}_{A_0}$, holomorphe sur l'ouvert $V_{\overline{c},\overline{d}} = \mathbf{E}_q \setminus \{\overline{c},\overline{d}\}$ de $\mathbf{E}_q$. On a donc $U_{c,d} = \pi^{-1}\left(V_{\overline{c},\overline{d}}\right)$.

On définit le faisceau en groupes (non commutatifs) $\Lambda_I(M_0)$ comme suit ; pour tout ouvert V de $\mathbf{E}_q$:

$$\Gamma\left(V, \Lambda_I(M_0)\right) = \{F \in \mathfrak{G}\left(\mathcal{O}(\pi^{-1}(V))\right) \mid F[A_0] = A_0\}.$$

C'est le faisceau des *automorphismes de* M_0 *tangents à l'identité.* La terminologie (empruntée au cas analogue des équations différentielles) est justifiée par le fait que, si $F \in \Gamma\left(V, \Lambda_I(M_0)\right)$, alors $F - I_n$ est plat près de 0 sur V. En effet, tout bloc hors diagonal $F_{i,j}$ vérifie $\sigma_q F_{i,j} = z^{\mu_i-\mu_j} A_i F_{i,j} A_j^{-1}$, d'où l'on tire que $\theta_q^{\mu_j-\mu_i} F_{i,j}$ est à croissance modérée près de 0 sur son ouvert de définition. On dit que $F_{i,j}$ est *t-plat*, où $t = \mu_j - \mu_i$.

On a donc :

$$S_{\overline{c},\overline{d}}\hat{F}_A \in \Gamma\left(V_{\overline{c},\overline{d}}, \Lambda_I(M_0)\right).$$

Notant $V_{\bar{c}} = \mathbf{E}_q \setminus \{\bar{c}\}$, il est donc clair que l'on a défini un élément de l'ensemble $Z^1(\mathfrak{V}, \Lambda_I(M_0))$ des cocycles du faisceau en groupes $\Lambda_I(M_0)$ associés au recouvrement $\mathfrak{V} = (V_{\bar{c}})$ de $\mathbf{E}_q$ ($Z^1(\mathfrak{V}, \Lambda_I(M_0))$ est bien un ensemble pointé, pas un groupe). Voici le théorème de type Malgrange-Sibuya annoncé :

Théorème 3.3. — *On obtient ainsi une bijection :*

$$\mathcal{F}(M_0) \simeq H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(M_0)).$$

3.1.0.6. *Dévissage q-Gevrey.* — On peut plagier le *dévissage Gevrey* de Ramis en un dévissage q-Gevrey du faisceau $\Lambda_I(M_0)$ et de l'ensemble de cohomologie $H^1(\mathbf{E}_q, \Lambda_I(M_0))$. Tout d'abord, il s'agit d'un faisceau de groupes unipotents dont on peut facilement décrire le faisceau Λ_I des algèbres de Lie :

$$\Gamma(V, \lambda_I(M_0)) = \{F \in \mathfrak{g}\left(\mathcal{O}(\pi^{-1}(V))\right) \mid (\sigma_q F)A_0 = A_0 F\}.$$

Naturellement, $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$, définie par :

$$F \in \mathfrak{g}(K) \Leftrightarrow I_n + F \in \mathfrak{G}(K) \Leftrightarrow \exp(F) \in \mathfrak{G}(K).$$

On note $\lambda_I^t(M_0)$ le sous-faisceau en algèbres de Lie nilpotentes de $\lambda_I(M_0)$ formé des éléments t-plats. On peut montrer qu'il s'agit des éléments dont les seuls blocs $F_{i,j}$ non nuls sont ceux tels que $\mu_j - \mu_i \geq t$ (donc triangulaires supérieurs par blocs, « assez loin » de la diagonale).
Si l'on note de même $\lambda_I^{(t)}(M_0)$ le sous-faisceau formé des éléments dont les seuls blocs $F_{i,j}$ non nuls sont ceux tels que $\mu_j - \mu_i = t$ (donc ne comportant qu'une « surdiagonale par blocs »), on conctate que $\lambda_I(M_0)$ est graduée :

$$\lambda_I(M_0) = \bigoplus_{t \in \mathbf{N}^*} \lambda_I^{(t)}(M_0).$$

Les $\lambda_I^t(M_0)$ forment la filtration correspondante par des idéaux :

$$\lambda_I^t(M_0) = \bigoplus_{t' \geq t} \lambda_I^{(t')}(M_0).$$

Proposition 3.4. — *(i) Le faisceau $\lambda_I^{(t)}(M_0)$ est localement libre. C'est le fibré associé au module pur isocline : $\underline{\mathrm{End}}_{(-t)}(M_0)$.*
(ii) Le faisceau $\lambda_I(M_0)$ est localement libre. C'est le fibré associé au module pur : $\underline{\mathrm{End}}_{<0}(M_0)$.

Rappelons que $\underline{\mathrm{Hom}}$ désigne le *Hom interne*, $\underline{\mathrm{End}}(M_0)$ n'est autre que le module $\underline{\mathrm{Hom}}(M_0, M_0) = \bigoplus \underline{\mathrm{Hom}}(P_i, P_j)$ (où $M_0 = \bigoplus P_i$, chaque P_i étant pur isocline de pente μ_i). On a alors : $\underline{\mathrm{End}}(M_0)_{(t)} = \bigoplus_{\mu_j - \mu_i = t} \underline{\mathrm{Hom}}(P_i, P_j)$.

À la *graduation* de $\lambda_I(M_0)$ correspond une *filtration* de $\Lambda_I(M_0)$ par les (faisceaux en) sous-groupes distingués :

$$\Lambda_I^t(M_0) = I_n + \lambda_I^t(M_0) = \exp \lambda_I^t(M_0).$$

Le *dévissage q-Gevrey* du faisceau en groupes unipotents non commutatifs par des fibrés est donné par les suites exactes :

$$(7) \qquad 1 \to \Lambda_I^{t+1}(M_0) \to \Lambda_I^t(M_0) \to \lambda_I^{(t)}(M_0) \to 0.$$

Il y a aussi une suite d'extensions centrales :

$$(8) \qquad 0 \to \lambda_I^{(t)}(M_0) \to \frac{\Lambda_I(M_0)}{\Lambda_I^{t+1}(M_0)} \to \frac{\Lambda_I(M_0)}{\Lambda_I^t(M_0)} \to 1.$$

Ce sont ces suites qui permettent une preuve « élémentaire » du théorème 3.3.

3.2. Calculs explicites d'invariants. — Puisque l'espace de modules $\mathcal{F}(M_0)$ est de dimension finie, on doit pouvoir déterminer des coordonnées, *i.e.* un jeu complet d'invariants finis. Les $\mathrm{irr}(M_0)$ coefficients des polynômes $U_{i,j}$ dans l'écriture en forme normale conviennent, mais ne sont pas très intéressants.

On va détailler ici le cas d'un polygone de Newton à deux pentes. Trois types d'invariants se présentent. Le premier est fourni par la transformation de q-Borel (qui, en analyse, devrait être accompagnée de la ransformation de q-Laplace, [**42**]). En théorie de Galois apparaissent les q-dérivées étrangères ([**24**] et [**25**]). Enfin, nous allons rencontrer une application inattendue de la dualité de Serre. Actuellement, nous ne savons définir pour un nombre arbitraire de pentes que les q-dérivées étrangères (et les pentes doivent être entières).

Lemme 3.5. — *Pour tout module M, on a une identification naturelle :*

$$\Gamma^1(M) \simeq H^1(\mathbf{E}_q, \mathcal{F}_M).$$

Démonstration. — Le foncteur exact à gauche $M \rightsquigarrow \Gamma(M)$ s'identifie naturellement au foncteur composé du foncteur exact $M \rightsquigarrow \mathcal{F}_M$ et du foncteur exact à gauche $\mathcal{F} \rightsquigarrow \Gamma(\mathbf{E}_q, \mathcal{F})$. Leurs foncteurs dérivés à droite sont donc égaux. □

Soit $M_0 = P_1 \oplus P_2$, où $P_i = M_{z^{\mu_i} A_i}$, $A_i \in \mathcal{GL}_{r_i}(\mathbf{C})$ $(i = 1, 2)$, $\mu_1 < \mu_2 \in \mathbf{Z}$. L'espace $\mathcal{F}(M_0)$ s'identifie naturellement à $Ext(P_2, P_1)$ et ce dernier, d'après la section 1.2.2, à $\Gamma^1(P)$, où $P = P_2^\vee \otimes P_1$ est un module pur de pente $\mu = \mu_1 - \mu_2 < 0$ et de rang $r = r_1 r_2$. Pour l'étude du cas de deux pentes, on peut donc se restreindre aux calculs sur $M_0 = P \oplus \underline{1} = M_{A_0}$, où $P = M_{z^\mu A}$:

$$A_0 = \begin{pmatrix} z^\mu A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbf{Z}, \mu < 0 \text{ et } A \in \mathcal{GL}_r(\mathbf{C}), r \in \mathbf{N}^*.$$

Nous poserons $d = -\mu$ (« niveau » q-Gevrey). Nous allons expliciter dans ce cas les isomorphismes $\mathcal{F}(M_0) = \Gamma^1(P) \simeq H^1(\mathbf{E}_q, \mathcal{F}_{M_0})$.

Les sections de $\Lambda_I(M_0)$ sont ici les matrices $\left(\begin{smallmatrix} I_r & F \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ telles que $\sigma_q F = z^\mu A F$, la multiplication dans le groupe $\Gamma(V, \Lambda_I(M_0))$ correspondant à l'addition de leurs composantes F. Le faisceau $\Lambda_I(M_0)$ est donc isomorphe au fibré $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}_{z^\mu A}$. Puisque l'on a un faisceau en groupes commutatifs, le H^1 est ici un groupe (cohomologie des faisceaux abéliens).

3.2.0.7. *Calcul de cocycles.* — On va calculer des cocycles par « sommation ». Pour cela, on choisit un module M_U, de matrice $A_U = \left(\begin{smallmatrix} z^\mu A & U \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de gradué A_0, avec $U \in \mathrm{Mat}_{r,1}(\mathbf{C}(\{z\}))$; on impose que U soit polynomial (en fait, holomorphe sur $\mathbf{C}^*$ et méromorphe en 0 suffit pour les calculs qui suivent). On fixe une direction de sommation $\overline{c} \in \mathbf{E}_q$, et l'on cherche $\left(\begin{smallmatrix} I_r & F \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ qui soit un isomorphisme méromorphe de A_0 dans A_U, avec pour seuls pôles $[-c; q]$, de multiplicité $\geq d = -\mu$. L'équation satisfaite par F est :

$$\sigma_q F - z^\mu A F = U.$$

On pose $F = \frac{G_c}{\theta_{q,c}^d}$. On est ramené à résoudre l'équation :

$$c^d \sigma_q G_c - A G_c = U \theta_{q,c}^d.$$

On développe en séries de Laurent $G_c = \sum G_n z^n$, $V = U\theta_{q,c}^d = \sum V_n z^n$, d'où :

$$\forall n \in \mathbf{Z}\ ,\ (c^d q^n I_r - A) G_n = V_n.$$

Supposons maintenant que toutes les matrices $c^d q^n I_r - A$ soient inversibles, *i.e.* éléments de $\mathcal{GL}_r(\mathbf{C})$. Cela équivaut à :

$$\overline{c} \in \mathbf{E}_q \setminus \Sigma_{A_0}, \quad \text{où } \Sigma_{A_0} = \overline{\sqrt[d]{\mathrm{Sp}(A)}} = \sqrt[d]{\mathrm{Sp}(A)} \pmod{q^{\mathbf{Z}}}.$$

Notons que, génériquement (c'est-à-dire si $\mathrm{Sp}(A)$ admet r valeurs distinctes modulo $q^{\mathbf{Z}}$), l'ensemble interdit Σ_{A_0} a $rd = \mathrm{irr}(M_0)$ éléments. Pour une direction autorisée, les équations ci-dessus admettent une unique solution :

$$\begin{aligned} G_c &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} (c^d q^n I_r - A)^{-1} V_n z^n, \\ F = F_{\overline{c}} &= \frac{1}{\theta_{q,c}^d} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (c^d q^n I_r - A)^{-1} V_n z^n. \end{aligned}$$

La notation $F_{\overline{c}}$ est légitime, car cette fonction ne dépend que de la classe de c dans $\mathbf{E}_q$. Si l'on pose :

$$F_{\overline{c},\overline{d}} = F_{\overline{d}} - F_{\overline{c}},$$

on voit que $F_{\overline{c},\overline{d}}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}^* \setminus [-c, -d; q]$ et vérifie $\sigma_q F_{\overline{c},\overline{d}} = z^\mu A F_{\overline{c},\overline{d}}$. Les fonctions $F_{\overline{c},\overline{d}}$ sont des sections du fibré $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}_{z^\mu A}$ sur les ouverts $V_{\overline{c},\overline{d}}$, et constituent un cocycle. La classe de ce cocycle dans le groupe de cohomologie $H^1(\mathbf{E}_q, \mathcal{F}_{M_0})$ s'identifie à la fois à la classe de A_U dans $\mathcal{F}(M_0)$ et à la classe de l'extension M_U de $\underline{1}$ par P dans $\Gamma^1(P) = Ext(\underline{1}, P)$. Nous noterons $\mathrm{cl}(M_U)$ cette classe (dans l'un quelconque des trois ensembles ainsi identifiés).

3.2.0.8. *Invariants à la q-Borel.* — Pour résoudre (ou pour étudier l'obtruction à résoudre) l'équation $\sigma_q F - z^\mu A F = U$, on développe en séries de Laurent : $F = \sum F_n z^n$, $U = \sum U_n z^n$, d'où :

$$\forall n \in \mathbf{Z}\ ,\ q^n F_n - A F_{n+d} = U_n.$$

On introduit des coefficients t_n tels que :

$$\forall n \in \mathbf{Z}\ ,\ q^n t_n = t_{n-d}.$$

Par exemple, le développement en série de Laurent $\theta_q^d = \sum t_n z^n$ fournit de tels coefficients, comme il découle de l'équation fonctionnelle $\sigma_q \theta_q^d = z^d \theta_q^d$. On appelle *transformées de q-Borel au niveau d* d'une série $f(z) = \sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} f_n z^n$ la série :

$$\mathcal{B}_q^{(\delta)} f(\xi) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{-n} t_{-n} f_n \xi^n.$$

Un petit calcul montre que notre relation ci-dessus équivaut à :

$$(I_r - \xi^{-d} A) \mathcal{B}_q^{(\delta)} F(q\xi) = \mathcal{B}_q^{(\delta)} U(\xi).$$

Si U (resp. F) est analytique, $\mathcal{B}_q^{(\delta)} U$ (resp. $\mathcal{B}_q^{(\delta)} F$) est entière, et l'on peut évaluer cette égalité partout. On choisit une matrice B racine d^{e} de A, et l'on voit qu'une condition nécessaire est l'annulation des $\mathcal{B}_q^{(\delta)}(j\mathcal{B})$ pour $j^d = 1$. C'est en fait une condition suffisante, et l'on peut démontrer que les d vecteurs $\mathcal{B}_q^{(\delta)}(j\mathcal{B}) \in \mathbf{C}^r$ constituent un jeu complet d'invariants analytiques. Plus précisément, l'application qui, à U, associe le d-uplet des $\mathcal{B}_q^{(\delta)}(j\mathcal{B})$ induit un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(M_0)$ sur $\mathbf{C}^{rd}$.

3.2.0.9. *Invariants de* [**24**], [**25**]. — On fixe un $a \in \mathbf{C}^*$ « générique » (pratiquement, loin de tous les points qui vont intervenir). Il jouera le rôle d'un point-base. On fixe une direction de sommation autorisée arbitraire $\overline{c_0} \in \mathbf{E}_q$. L'application $\overline{d} \mapsto F_{\overline{c_0}, \overline{d}}(a)$ est méromorphe sur $\mathbf{E}_q$, avec des pôles sur Σ_{A_0}. Elle est à valeurs dans *l'algèbre de Lie* $\mathfrak{st}(M_U)$ *du groupe de Stokes* $\mathfrak{St}(M_U)$. (C'est pour cela que l'on a dû introduire $\overline{c_0}$, qui n'intervient pas dans le résultat du calcul). La prise de résidu est une intégration, donc donne un résultat dans l'espace vectoriel $\mathfrak{st}(M_U)$. On pose, pour tout $\overline{c} \in \Sigma_{A_0}$:

$$\dot{\Delta}_{\overline{c}}(A_U) = \operatorname{Res}_{\overline{d} = \overline{c}} F_{\overline{c_0}, \overline{d}}(a).$$

Les $\dot{\Delta}_{\overline{c}}(A_U)$ prennent leurs valeurs dans des espaces vectoriels de dimension totale rd et constituent un jeu complet d'invariants analytiques. Dans [**24**], on donne des formules de transformations entre ces « q-dérivées étrangères » et les invariants de q-Borel.

3.2.0.10. *Invariants provenant de la dualité de Serre.* — Il s'agit de la dualité de Serre pour les fibrés vectoriels holomorphes sur une surface de Riemann compacte ([**16**]). Le diviseur canonique de $\mathbf{E}_q$ est trivial. Il y a en effet une différentielle globale de diviseur nul : c'est, par exemple $\frac{dz}{z} = 2\mathrm{i}\pi dx$, où x et z sont les uniformisantes globales provenant des revêtements $\mathbf{C} \to \mathbf{E}_q$ et $\mathbf{C}^* \to \mathbf{E}_q$. De la dualité de Serre, on déduit alors que, pour tout fibré sur $\mathbf{E}_q$, les espaces vectoriels $H^0(\mathbf{E}_q, \mathcal{F}^\vee)$ et $H^1(\mathbf{E}_q, \mathcal{F})$ sont duaux l'un de l'autre. Une base de $H^0(\mathbf{E}_q, \mathcal{F}_{M_0}^\vee)$ fournira donc un système de coordonnées sur $H^1(\mathbf{E}_q, \mathcal{F}_{M_0})$, c'est-à-dire un jeu complet d'invariants analytiques pour $\mathcal{F}(M_0)$.

Le mécanisme de dualité est le suivant. Soit X une section globale de $\mathcal{F}_{M_0}^\vee$: c'est donc une solution holomorphe sur $\mathbf{C}^*$ de l'équation :

$$\sigma_q X = z^{-\mu}\, {}^t A^{-1} X.$$

Alors $Y = {}^tX$ est holomorphe sur $\mathbf{C}^*$ et vérifie : $\sigma_q Y = z^{-\mu} Y A^{-1}$. On forme le produit scalaire

$$\phi_{\overline{c},\overline{d}} = <X, F_{\overline{c},\overline{d}}> = {}^tXF_{\overline{c},\overline{d}} = YF_{\overline{c},\overline{d}}.$$

C'est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}^*$ avec des pôles connus, et, des équations satisfaites par Y et $F_{\overline{c},\overline{d}}$, on déduit :

$$\sigma_q\phi_{\overline{c},\overline{d}} = \sigma_q Y \sigma_q F_{\overline{c},\overline{d}} = z^{-\mu} Y A^{-1}\, z^{\mu} A F_{\overline{c},\overline{d}} = \phi_{\overline{c},\overline{d}}.$$

On a donc une fonction elliptique $\phi_{\overline{c},\overline{d}}$ de pôles $\overline{c},\overline{d} \in \mathbf{E}_q$. La somme de ses résidus sur $\mathbf{E}_q$ est donc nulle. Par ailleurs, cette fonction est, par définition, une différence :

$$\phi_{\overline{c},\overline{d}} = <X, F_{\overline{d}} - F_{\overline{c}}> = <X, F_{\overline{d}}> - <X, F_{\overline{c}}> = \phi_{\overline{d}} - \phi_{\overline{c}},$$

où chaque section $\phi_{\overline{c}} = <X, F_{\overline{c}}>$ a un seul pôle sur $\mathbf{E}_q$ (une q-spirale sur $\mathbf{C}^*$), à savoir $\overline{-c}$. On a donc :

$$\mathrm{Res}_{\overline{-c}}\, \phi_{\overline{c}} = \mathrm{Res}_{\overline{-d}}\, \phi_{\overline{d}}.$$

(On prendra garde qu'il s'agit ici de résidus par rapport à la variable z et non par rapport à la direction de sommation, comme dans le cas des $\dot{\Delta}_{\overline{c}}$!) Par définition, le nombre calculé ci-dessus, qui ne dépend pas de $\overline{c} \in \mathbf{E}_q$, est celui associé par la dualité de Serre à $X \in H^0(\mathbf{E}_q, \mathcal{F}_{M_0}^{\vee})$ et à $\mathrm{cl}(M_U) \in H^1(\mathbf{E}_q, \mathcal{F}_{M_0})$. Nous le noterons $<X, \mathrm{cl}(M_U)>$.

Lemme 3.6. — *On a les égalités :*

$$<X, \mathrm{cl}(M_U)> = [(\sigma_q X)U]_0 = [z^{dt} X A^{-1} U]_0 = [{}^tXA^{-1}U]_\mu.$$

Démonstration. — Nous employons la notation commode suivante : si $f = \sum f_n z^n$, alors $[f]_n = f_n$. Ici, $X = \sum X_n z^n$, $U = \sum U_n z^n$ (séries de Laurent convergentes sur $\mathbf{C}^*$) et l'on calcule le coefficient de degré 0 (resp. de degré μ) de $z^{dt} X A^{-1} U$ (resp. de ${}^tXA^{-1}U$). La dernière égalité est donc triviale. La seconde l'est également, puisque $\sigma_q X = z^d\, {}^tXA^{-1}$.

Pour calculer le résidu en $\overline{-c} \in \mathbf{E}_q$, on choisit un représentant $c \in \mathbf{C}^*$ et une couronne fondamentale contenant le pôle $-c$,. On écrit la frontière orientée de cette couronne sous la forme $q\gamma - \gamma$, où γ est un cercle de centre 0 parcouru positivement. Alors, par le théorème des résidus :

$$\begin{aligned} <X, \mathrm{cl}(M_U)> = \mathrm{Res}_{\overline{-c}}\, \phi_{\overline{c}} &= \int_{q\gamma} {}^tXF_{\overline{c}} \frac{dz}{2\mathrm{i}\pi z} - \int_{\gamma} {}^tXF_{\overline{c}} \frac{dz}{2\mathrm{i}\pi z} \\ &= \int_{\gamma} \left(\sigma_q({}^tXF_{\overline{c}}) - {}^tXF_{\overline{c}}\right) \frac{dz}{2\mathrm{i}\pi z} = \int_{\gamma} (\sigma_q X) U \frac{dz}{2\mathrm{i}\pi z} = [(\sigma_q X)U]_0. \quad \square \end{aligned}$$

Donc $<X, \mathrm{cl}(M_U)> = \sum q^{-n} X_n U_n$. Pour produire concrètement de tels nombres, il est naturel de construire la section X à l'aide de fonctions Theta. On choisit une racine d^{e} B de la matrice A, et l'on voit que :

$$T_B = \Theta_B^d(z) \underset{\text{déf}}{=} \theta^d(B^{-1}z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} t_n B^{-n} z^n$$

vérifie $\sigma_q T_B = T_B z^d A^{-1}$. On peut donc prendre pour ${}^tX$ l'une quelconque des r lignes de T_B. En faisant le même calcul pour chacune des d matrices jB ($j^d = 1$), on trouve une base de $H^0(\mathbf{E}_q, \mathcal{F}_{M_0}^{\vee})$ et les invariants correspondants sont les invariants de q-Borel calculés précédemment.

4. Constructions globales

Historiquement, les équations aux q-différences intéressantes sont définies sur la sphère de Riemann $\mathbf{S}$, c'est-à-dire à coefficients rationnels : matrice $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C}(z))$ codant un objet M_A de $\mathcal{E} = \mathrm{DiffMod}\,(\mathbf{C}(z), \sigma_q)$ (voir [3]). Par exemple, l'équation q-hypergéométrique ([**12**], [**33**], [**6**]).

Pour étudier une équation globale, on la localise. Il n'y a *a priori* que deux points possibles pour localiser, 0 et ∞, car ce sont les seuls points de $\mathbf{S}$ fixés par la dilatation $z \mapsto qz$. En localisant en 0, c'est à dire par extension de base $\mathbf{C}(z) \hookrightarrow \mathbf{C}(\{z\})$, on obtient un plongement $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}^{(0)}$. Il y a similairement une localisation en ∞ : $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}^{(\infty)}$ (cette dernière catégorie est d'ailleurs isomorphe à $\mathcal{E}^{(0)}$).

En fait, il y aurait lieu de localiser aux *singularités intermédiaires* de A, *i.e.* les singularités dans $\mathbf{C}^*$. Mais elles bougent sous l'action de $z \mapsto qz$, et il faut en fait trouver une notion de localisation en une q-spirale ou en un point de $\mathbf{E}_q$. Le peu que nous savons faire en ce sens est l'objet de cette section.

4.1. Le cas des équations fuchsiennes. — C'est celui où Birkhoff a posé et résolu le problème du recollement des données locales. Classiquement, pour les équations différentielles, c'est le problème des matrices de connexion. La corrsepondance de Riemann-Hilbert permet, à partir des monodromies locales et d'un nombre fini de matrices de connexion, de reconstruire la classe d'équivalence rationnelle d'une équation différentielle linéaire fuchsienne. Sous forme moderne, les données locales et de connexion sont traduites comme une représentation de monodromie.

Disons que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C}(z))$ est *fuchsienne* si elle l'est en 0 et ∞ (*i.e.* dans $\mathcal{E}^{(0)}$ et dans $\mathcal{E}^{(\infty)}$). Il revient au même de dire que A est rationnellement équivalente (c'est-à-dire via une transformation de jauge $F \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C}(z))$ à une matrice qui est non singulière en 0 et ∞. Nous supposerons donc, comme le fait Birkhoff, que $A(0), A(\infty) \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$.

Birkhoff construit alors des « solutions locales » fondamentales $\mathcal{X}^{(0)}$ et $\mathcal{X}^{(\infty)}$ de $\sigma_q X = AX$, qui sont méromorphes (mais multiformes) sur $\mathbf{C}^*$, et définit la *matrice de connexion de Birkhoff* :

$$P = \left(\mathcal{X}^{(\infty)}\right)^{-1} \mathcal{X}^{(0)}.$$

La matrice P est méromorphe (mais multiforme) sur $\mathbf{C}^*$ et vérifie $P(qz) = P(z)$ par construction (elle connecte deux solutions d'une même équation, elle est donc « q-constante »). Elle est donc presque elliptique. Birkhoff démontre que la donnée d'un nombre fini d'invariants locaux en 0 et ∞ et de la matrice de connexion P permet de retrouver la matrice A à équivalence rationnelle près. C'est pour prouver l'*existence* d'une matrice A qu'il a inventé le théorème de factorisation dont nous avons parlé au début.

Le travail a été repris dans [**33**], en n'utilisant que des fonctions méromorphes uniformes. Par exemple, on résout $\sigma_q f = cf$ $(c \in \mathbf{C}^*)$ à l'aide de $e_{q,c} = \theta_q/\theta_{q,c}$, là où Birkhoff utilisait $z^{\log_q \gamma}$. Ainsi, $P \in \mathcal{GL}_n\left(\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)\right)$. Le résultat de Birkhoff prend la forme précise d'une équivalence de catégories. L'inconvénient de la matrice de Birkhoff (dans sa version d'origine ou dans celle de [**33**]) est qu'elle ne se comporte pas bien par produit tensoriel, d'où des difficultés pour la théorie de Galois (c'est-à-dire pour obtenir une représentation de groupes). Ce mauvais comportement a sa source dans le fait que $e_{q,c}e_{q,d} \neq e_{q,cd}$ et ce, quel que soit le choix fait des solutions méromorphes $e_{q,c}$.

En fait, pour des équations *régulières en* 0 *et* ∞, c'est-à-dire telles que $A(0) = A(\infty) = I_n$, on n'a pas besoin de fonctions spéciales pour résoudre l'équation, on peut le faire avec des séries convergentes. Etingof a montré dans ce cas ([**9**]) que les valeurs de la matrice de connexion engendrent le groupe de Galois. Sans cette hypothèse, van der Put et Singer ont obtenu un résultat similaire mais à l'aide de la résolution symbolique : les $e_{q,c}$ sont remplacés par des symboles e_c tels que $e_c e_d = e_{cd}$. On n'obtient pas par cette voie de véritables invariants transcendants.

4.1.0.11. *Avec des fibrés, ça marche mieux.* — Dans [**34**], on procède comme suit. D'après le lemme-clé de la section 2.1.1, on peut écrire :

$$\begin{aligned} A &= F^{(0)}\left[A^{(0)}\right], \quad A^{(0)} \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C}) \text{ et } F^{(0)}(z) \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C}(\{z\})) \\ &= F^{(\infty)}\left[A^{(\infty)}\right], \quad A^{(\infty)} \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C}) \text{ et } F^{(\infty)}(w) \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C}(\{z\})), \end{aligned}$$

où $w = z^{-1}$ (uniformisante en $\infty \in \mathbf{S}$). Des équations fonctionnelles satisfaites par $F^{(0)}$ et $F^{(\infty)}(w)$ découle d'ailleurs qu'ils admettent des prolongements méromorphes respectivement à $\mathbf{C}$ et à $\mathbf{S} \setminus \{0\}$.

La matrice $F = \left(F^{(\infty)}\right)^{-1} F^{(0)}$ vérifie alors : $F \in \mathcal{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*))$ et $F\left[A^{(0)}\right] = A^{(\infty)}$. Elle code donc un *isomorphisme méromorphe* :

$$\phi : \mathcal{F}^{(0)} = \mathcal{F}_{A^{(0)}} \to \mathcal{F}^{(\infty)} = \mathcal{F}_{A^{(\infty)}}.$$

En fait, $\mathcal{F}^{(0)}$ est le fibré local étudié aux sections 2 et 3. On démontre alors que $A \rightsquigarrow (\mathcal{F}^{(0)}, \phi, \mathcal{F}^{(\infty)})$ est une *équivalence de catégories tannakiennes.* On en déduit que le groupe de Galois de A est engendré par ses composantes locales $G_f^{(0)}$ et $G_f^{(\infty)}$, plus des données de recollement qui sont essentiellement les valeurs de ϕ. Le résultat d'Etingof est un cas particulier.

Remarque. — Un premier résultat, beaucoup moins élégant, avait consisté à tordre la matrice de connexion, de manière assez compliquée, pour que ses valeurs contribuent au groupe de Galois. C'est cette version peu conceptuelle qui sert dans la pratique : pour la confluence des automorphismes galoisiens dans [**34**] ; et pour le calcul par Julien Roques de la plupart des groupes de Galois q-hypergéométriques dans [**32**].

4.1.0.12. *Localisation dans le cas abélien.* — Les constructions ci-dessus ont toutes le même défaut : il faut une quantité non-dénombrable de générateurs $P(a)$ ou $\phi(a)$ pour engendrer le groupe de Galois. Cela est à comparer avec la représentation de monodromie, qui est de type fini. Le groupe de Galois obtenu par voie algébrique n'a pas le caractère discret et transcendant de la « vraie » correspondance de Riemann-Hilbert.

Dans le cas régulier, ou seule la matrice de connexion compte, on a vu que le groupe de Galois de A est paramétré par la fonction matricielle elliptique P. (En fait, par la fonction $a \mapsto P(a_0)^{-1}P(a)$, mais on peut supposer que $P(a_0) = I_n$). Comme une fonction méromorphe sur la surface de Riemann $\mathbf{E}_q$ est la même chose qu'une fonction rationnelle sur la courbe algébrique $\mathbf{E}_q$, on a donc un groupe algébrique rationnellement paramétré par une courbe algébrique. Dans le cas où le groupe est abélien, cette situation relève de la *théorie géométrique du corps de classes* ([**39**]). On a pu ainsi, dans [**34**] localiser la matrice de connexion et en déduire un équivalent raisonnable du groupe de monodromie. Cette description est trop lourde pour être reprise ici. Elle est surtout peu utile (sauf comme encouragement), car les équations abéliennes sont trop rares (elles sont presque la même chose que les équations de rang 1).

4.2. Le cas général. — La vraie généralisation attendue n'est pas tellement le passage du cas fuchsien au cas irrégulier (qui commence à être bien compris), mais le passage au cas non abélien : comment alors localiser l'effet des singularités ? On va proposer une construction intéressante qui réalise platoniquement cette localisation.

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C}(z))$. (Une bonne partie de ce qui suit garde un sens si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*))$.) Notons $Sing(A)$ le lieu singulier de A, défini comme sui :

$$Sing(A) = \{\text{pôles de } A \text{ dans } \mathbf{C}^*\} \cup \{\text{pôles de } A^{-1} \text{ dans } \mathbf{C}^*\}.$$

Soit par ailleurs U un ouvert connexe de $\mathbf{C}^*$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1. $\pi(U) = \mathbf{E}_q$; la restriction à U du revêtement $\pi : \mathbf{C}^* \to \mathbf{E}_q$ est donc un isomorphisme local. Un exemple de tel ouvert est toute couronne $\mathcal{C}(r, R) = \{z \in \mathbf{C}^* \mid r < |z| < R\}$, où $R > r|q|$, en particulier les disques épointés $\mathcal{C}(0, r)$ et $\mathcal{C}(r, \infty)$ pour $r \in \mathbf{R}_+^*$.
2. $U \cap q^{-1}U \cap Sing(A) = \varnothing$; l'ouvert U ne contient donc aucune *paire singulière* $\{z, qz\} \subset Sing(A)$. (Une bonne partie de ce qui suit reste valable sans cette condition.)

On pose alors :

$$\mathcal{F}_{U,A} = \frac{U \times \mathbf{C}^n}{\sim_A},$$

avec la même définition de $\sim_A$ que précédemment. C'est un fibré vectoriel holomorphe sur $\mathbf{E}_q$. Le faisceau des sections se calcule ainsi :

$$\Gamma(V, \mathcal{F}_{U,A}) = \{X \in \mathcal{O}\left(U \cap \pi^{-1}(V)\right)^n \mid \sigma_q X = AX\}.$$

Une section $X \in \Gamma(V, \mathcal{F}_{U,A})$, vue comme fonction holomorphe $U \cap \pi^{-1}(V)$, admet automatiquement un prolongement méromorphe à $\pi^{-1}(V)$, en vertu de l'équation fonctionnelle $\sigma_q X = AX$. On peut décrire le fibré $\mathcal{F}_{U,A}$ en termes de diviseurs matriciels, proches de [**41**]. Pour cela on introduit une solution méromorphe fondamentale $\mathcal{X}_0 \in \mathcal{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbf{C}^*))$ de $\sigma_q X = AX$. (Il en existe pour les mêmes raisons qu'auparavant.) Alors le faisceau $\mathcal{F}_{U,A}$ est isomorphe, via la transformation de jauge $X = \mathcal{X}_0 Y$, au faisceau $\mathcal{F}_{U,\mathcal{X}_0}$ défini par :

$$\Gamma(V, \mathcal{F}_{U,\mathcal{X}_0}) = \{\mathcal{O}_{\mathbf{E}_q}(V)^n \mid \mathcal{X}_0 Y \text{ est holomorphe sur } U \cap \pi^{-1}(V)\}.$$

On a noté ici $\mathcal{O}_{\mathbf{E}_q}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbf{E}_q$. Il s'identifie naturellement au faisceau $V \mapsto \mathcal{O}_{\mathbf{C}^*}(\pi^{-1}(V))^{\sigma_q}$ des fonctions holomorphes σ_q-invariantes sur $\mathbf{C}^*$, ce qui donne un sens au produit $\mathcal{X}_0 Y$.

4.2.0.13. *Application souhaitée à la localisation.* — Si U et U' sont deux ouverts vérifiant les conditions précédentes, il y a un isomorphisme méromorphe naturel $\phi_{U,U',A}$ de $\mathcal{F}_{U,A}$ sur $\mathcal{F}_{U',A}$. Par exemple, si U et U' sont des disques épointés respectivement centrés en 0 et en ∞, on obtient essentiellement la matrice de connexion (sous sa forme intrinsèque).

En général, on peut se ramener sans difficulté au cas où $Sing(A) = \{z_1, \ldots, z_l\}$, avec $|z_{i+1}| > |qz_i|$ pour $1 \leq i \leq l-1$ et $\overline{z_i} \neq \overline{z_j}$ pour $1 \leq i < j \leq l$. On peut de plus choisir des réels positifs r_i tels que $|z_i| < r_i < |qz_i|$ pour $1 \leq i \leq l$. Posons de plus $r_0 = 0$, $r_{l+1} = +\infty$ et $U_i = \mathcal{C}(r_{i-1}, r_i)$ pour $1 \leq i \leq l+1$ et $\phi_i = \phi_{U_i,U_{i+1},A}$ pour $1 \leq i \leq l$. Alors chaque isomorphisme méromorphe ϕ_i admet pour seule singularité $\overline{z_i} \in \mathbf{E}_q$, et leur produit est la matrice de connexion $\phi = \phi_{U_0,U_{l+1},A}$. On a donc localisé [11] les singularités de celle-ci. De plus, chaque U_i permet de construire des foncteurs fibres, et les valeurs des ϕ_i sur $\mathbf{E}_q$ fournissent des opérateurs galoisiens.

Comparons maintenant le problème à celui du groupe de Stokes. On avait également une quantité non dénombrable de générateurs, les $S_{\overline{c},\overline{d}}\hat{F}_A(a)$. Mais ceux-ci étaient tous dans un même groupe unipotent, que l'on a pu remplacer par son algèbre de Lie. Une fois le problème linéarisé (et abélianisé), on pouvait localiser l'effet des singulariés par prise de résidus. Nous ne savons rien faire de tel ici, parce que nous ne connaissons pas de forme normale maniable pour les ϕ_i.

Il est à noter que Krichever a réussi dans [**18**] à traiter un problème analogue pour les équations aux différences.

Références

[1] M. F. Atiyah – Vector bundles over an elliptic curve, *Proc. London Math. Soc. (3)* **7** (1957), p. 414–452.

[2] V. Baranovsky & V. Ginzburg – Conjugacy classes in loop groups and G-bundles on elliptic curves, International Mathematics Research Notes, 1996.

(11) On a choisi d'utiliser de vraies couronnes, à bords circulaires. En fait, on pourrait prendre des couronnes topologiques, n'imposer aucune condition aux z_i et les parcourir dans n'importe quel ordre. Une géométrie et une combinatoire de $\mathbf{C}^*$ interviennent donc ici.

[3] G. BIRKHOFF – The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations, *Proc. Amer. Acad.* **49** (1913), p. 521–568.

[4] P. DELIGNE – Catégories tannakiennes, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 111–195.

[5] L. DI VIZIO – Arithmetic theory of q-difference equations : the q-analogue of Grothendieck-Katz's conjecture on p-curvatures, *Invent. Math.* **150** (2002), p. 517–578.

[6] L. DI VIZIO, J.-P. RAMIS, J. SAULOY & C. ZHANG – Équations aux q-différences, *Gaz. Math.* **96** (2003), p. 20–49.

[7] A. DUVAL – Confluence q-différence vers différence pour un système fuchsien, *Pacific J. Math.* **217** (2004), p. 221–245.

[8] A. DUVAL & J. ROQUES – Confluence q-différence vers différence, soumis à publication, 2006.

[9] P. I. ETINGOF – Galois groups and connection matrices of q-difference equations, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* **1** (1995), p. 1–9.

[10] O. FORSTER – *Lectures on Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 81, Springer, 1991.

[11] J. FRENKEL – Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, *Bull. Soc. Math. France* **85** (1957), p. 135–220.

[12] G. GASPER & M. RAHMAN – *Basic hypergeometric series*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 35, Cambridge University Press, 1990.

[13] A. GRANIER – Fibrés vectoriels et équations aux q-différences, mémoire de DEA, 2005.

[14] A. GROTHENDIECK – Sur le mémoire de Weil : généralisation des fonctions abéliennes, in *Séminaire Bourbaki, 1956/57, exposé n° 141*, Réédition Soc. Math. France, 1995, p. 57–71.

[15] J. GUENOT & R. NARASIMHAN – *Introduction à la théorie des surfaces de Riemann*, L'Enseignement Mathématique, 1976, Extrait de l'Enseignement Math. (2) **21** (1975), no. 2-4, 123–328.

[16] R. C. GUNNING – *Lectures on vector bundles over Riemann surfaces*, University of Tokyo Press, 1967.

[17] J.-L. KOSZUL – Fibrés vectoriels sur les courbes elliptiques, in *Séminaire Bourbaki, 1957/58*, exposé n° 154, 1958.

[18] I. M. KRICHEVER – Analytic theory of difference equations with rational and elliptic coefficients and the Riemann-Hilbert problem, *Uspekhi Mat. Nauk* **59** (2004), p. 111–150.

[19] D. MUMFORD – *Tata lectures on theta. I*, Progress in Mathematics, vol. 28, Birkhäuser, 1983.

[20] C. PRAAGMAN – Fundamental solutions for meromorphic linear difference equations in the complex plane, and related problems, *J. reine angew. Math.* **369** (1986), p. 101–109.

[21] M. VAN DER PUT – Skew differential fields, differential and difference equations, *Astérisque* **296** (2004), p. 191–205.

[22] M. VAN DER PUT & M. REVERSAT – Galois theory of q-difference equations, *Ann. Fac. Sci. de Toulouse* **16** (2005), p. 1–54.

[23] M. VAN DER PUT & M. F. SINGER – *Galois theory of difference equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1666, Springer, 1997.

[24] J.-P. RAMIS & J. SAULOY – The q-analogue of the wild fundamental group. I, in *Algebraic, analytic and geometric aspects of complex differential equations and their deformations. Painlevé hierarchies*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B2, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2007, p. 167–193.

[25] ———, The q-analogue of the wild fundamental group. II, ce volume.

[26] J.-P. RAMIS, J. SAULOY & C. ZHANG – La variété des classes analytiques d'équations aux q-différences dans une classe formelle, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **338** (2004), p. 277–280.

[27] ———, Développement asymptotique et sommabilité des solutions des équations linéaires aux q-différences, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **342** (2006), p. 515–518.

[28] ———, Local analytic classification of irregular q-difference equations, en préparation, 2007.

[29] J.-P. RAMIS & C. ZHANG – Développement asymptotique q-Gevrey et fonction thêta de Jacobi, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **335** (2002), p. 899–902.

[30] H. RÖHRL – Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen, *Math. Ann.* **133** (1957), p. 1–25.

[31] ———, Holomorphic fiber bundles over Riemann surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **68** (1962), p. 125–160.

[32] J. ROQUES – Groupe de Galois des équations q-hypergéométriques, soumis à publication, 2007.

[33] J. SAULOY – Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **50** (2000), p. 1021–1071.

[34] ———, Galois theory of Fuchsian q-difference equations, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **36** (2003), p. 925–968.

[35] ———, Algebraic construction of the Stokes sheaf for irregular linear q-difference equations, *Astérisque* **296** (2004), p. 227–251.

[36] ———, La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences et le gradué associé, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **54** (2004), p. 181–210.

[37] ———, Isomonodromy for q-difference equations, à paraître dans *Séminaires et congrés*, SMF, *Actes de la Conférence Painlevé, Angers, 2004*.

[38] J-P. SERRE – Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **6** (1955–1956), p. 1–42.

[39] ———, *Groupes algébriques et corps de classes*, Publications de l'institut de mathématique de l'université de Nancago, VII. Hermann, Paris, 1959.

[40] C. S. SESHADRI – *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, Astérisque, vol. 96, Société Mathématique de France, 1982.

[41] A. WEIL – Généralisation des fonctions abéliennes, *J. Math. Pures et Appl.* **17** (1938), p. 47–87.

[42] C. ZHANG – Une sommation discrète pour des équations aux q-différences linéaires et à coefficients analytiques : théorie générale et exemples, in *Differential equations and the Stokes phenomenon*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002, p. 309–329.

J. SAULOY, Laboratoire Emile Picard, CNRS UMR 5580, U.F.R. M.I.G., 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4