Astérisque

CHAREF BEDDANI

Comparaison des valuations divisorielles

Astérisque, tome 323 (2009), p. 17-31

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__323__17_0>

Astérisque
323, 2009, p. 17–31

COMPARAISON DES VALUATIONS DIVISORIELLES

par

Charef Beddani

Résumé. — En utilisant la notion de la connexité en codimension un, nous allons donner dans cet article une nouvelle démonstration géométrique du théorème d'Izumi dans deux cas particuliers. Ensuite, nous allons proposer la conjecture suivante : soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local intègre normal complet et ν_1, ν_2 deux valuations divisorielles centrées en $\mathfrak{m}$, alors il existe un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R, tel que les centres de ν_1 et ν_2 dans l'éclatement normalisé de Spec$R$ le long de I sont liés en codimension 1. A la fin de ce travail, nous présentons quelques commentaires concernant cette conjecture.

***Abstract* (Comparison of divisorial valuations).** — Using the notion of connexity in codimension one, we give in this paper a new geometric proof of Izumi's theorem in two special cases. We also propose the following conjecture: let $(R, \mathfrak{m})$ be a complete, normal local domain and ν_1, ν_2 two divisorial valuations centered in $\mathfrak{m}$. Then there exists an $\mathfrak{m}$-primary ideal I of R such that the centers of ν_1 and ν_2 in the normalised blowing up of Spec$R$ along I are linked in codimension 1. At the end of the paper, we make some comments about this conjecture.

Introduction

Les valuations divisorielles sont des objets fondamentaux pour l'étude de la résolution des singularités. Elles ont été étudiées par Zariski, Abhyankar, Rees, Swanson et beaucoup d'autres. Plus récemment l'étude des valuations pour aborder de manière nouvelle le problème de résolution des singularités a été proposé, notamment par M. Spivakovsky (Cf. [**11**]) et B. Teissier (Cf. [**12**]). Nous nous intéressons dans cet article à l'étude des valuations divisorielles. Plus précisément, nous présentons dans la première section quelques résultats élémentaires concernant les valuations divisorielles avec leurs démonstrations. La deuxième section est consacrée à la comparaison des valuations divisorielles. Nous donnons une approche géométrique du théorème d'Izumi (Cf. [**10**]), en utilisant la notion de connexité en codimension 1 (Cf. [**3**]). De

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 13F30, 13G05, 14E05.
Mots clefs. — Algèbre de Rees, cloture intégrales des idéaux, valuations de Rees, valuations divisorielles, théorème d'Izumi, géométrie birationelle.

manière générale, nous allons montrer le résultat suivant : Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local intègre nœthérien analytiquement irréductible et ν_1, ν_2 deux valuations divisorielles associées à un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I telles que les centres E_1 et E_2 de ν_1 et ν_2 respectivement dans l'éclatement normalisé $\overline{X}_I$ de Spec R le long de I sont liés en codimension 1. C'est-à-dire, qu'il existe une suite finie

$$Y_1 = E_1, Y_2, ..., Y_{s-1}, Y_s = E_2$$

de composantes irréductibles de $E_I = \mathrm{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} \overline{I^n}/I \cdot \overline{I^n}$ telle que pour tout $1 \leq i \leq s-1$, la codimension de $Y_i \cap Y_{i+1}$ dans Y_{i+1} est égale à 1. Alors les topologies ν_1-adique et ν_2-adique sont linéairements équivalentes. Autrement dit, il existe un entier naturel r tel que pour tout élément x non nul appartenant à R, nous avons

$$\nu_1(x) \leq r\nu_2(x) \quad \text{et} \quad \nu_2(x) \leq r\nu_1(x).$$

Ensuite, nous en déduisons une nouvelle démonstration du théorème d'Izumi (Cf. Théorème 2.1) sur les anneaux analytiquements irréductibles de dimension inférieure ou égale à deux. Les démonstrations connues auparavant de ce théorème en dimension deux (Cf. [**10, 7, 5**]) sont basées sur le fait que la matrice $M = (E_i.E_j)_{1 \leq i,j \leq s}$ est définie négative. En dimension supérieure où égale à trois, la matrice d'intersection n'a pas de sense. Pour cette raison, D. Rees utilise une démonstration par récurrence sur la dimension de R (Cf. [**10**]) quand la dimension de R est supérieure ou égale à trois. La démonstration qu'on donne dans cet article sous quelques hypothèses est directe en dimension quelconque (sans récurrence sur la dimension de R). Nous trouvons un remplacement géométrique en dimension supérieure pour la négativité de la matrice M qui est un phénomène spécifique en dimension deux.

Le théorème d'Izumi est toujours vrai sans ajouter la condition " ν_1 et ν_2 sont liées en codimension 1", c'est la raison pour laquelle nous allons proposer la conjecture suivante : soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local intègre normal complet et ν_1, ν_2 deux valuations divisorielles centrées en $\mathfrak{m}$. Alors il existe un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R tel que les centres de ν_1 et ν_2 dans $\overline{X_I}$ sont liés en codimension 1.

Pour les surfaces (ie. $\dim R = 2$), nous allons montrer que la conjecture précédente est une conséquence immédiate du théorème principal de Zariski. Ensuite, nous allons suivre les travaux de R. Hartshorne concernant la connexité en codimension (Cf. [**3**]), et ceux de M. Spivakovsky sur les valuations divisorielles (Cf. [**11**]), pour démontrer que cette conjecture est vraie si R admet une résolution des singularités plongée. En particulier, elle est vraie si R est quasi-excellent de caractéristique zéro ou $\dim R \leq 3$ et R est de type fini sur un corps parfait.

Remerciement : Je remercie Mark Spivakovsky, pour les remarques et les conseils qui m'ont permis d'apporter certaines précisions et de rendre plus claires plusieurs parties de ce texte.

1. Préliminaires

Tous les anneaux considérés dans cet article sont commutatifs et unitaires. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier d'un anneau R, on note $\operatorname{ht}\mathfrak{p}$ la hauteur de $\mathfrak{p}$, et $k(\mathfrak{p})$ le corps résiduel de l'anneau $R_{\mathfrak{p}}$. Si $(Q,\mathfrak{n})$ est un anneau local contenant R tel que $\mathfrak{n}\cap R=\mathfrak{m}$, on note $\operatorname{deg.tr.}_{k(\mathfrak{m})} k(\mathfrak{n})$ le degré de transcendance de $k(\mathfrak{n})$ sur $k(\mathfrak{m})$.

Notation 1.1. — *Soit Γ un groupe commutatif totalement ordonné. Nous adjoignons au groupe Γ un élément ∞ et nous appelons Γ_∞ l'ensemble ainsi obtenu : $\Gamma_\infty = \Gamma\cup\{\infty\}$. Nous munissons cet ensemble d'une relation d'ordre total en posant pour tout $\gamma\in\Gamma$:*

1. $\gamma\le\infty$.
2. $\infty+\gamma=\gamma+\infty=\infty+\infty=\infty$.

Définition 1.2. — *Soient $(R,\mathfrak{m})$ un anneau local intègre et K son corps de fractions. On appelle valuation de K à valeurs dans un groupe totalement ordonné Γ, toute application ν de K dans Γ_∞ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *Pour tous $x,y\in K$, $\nu(xy)=\nu(x)+\nu(y)$,*
2. *Pour tous $x,y\in K$, $\nu(x+y)\ge\inf(\nu(x),\nu(y))$,*
3. *Pour tout $x\in K$, $\nu(x)=\infty\Leftrightarrow x=0$.*

Définition 1.3. — *Soient Γ un groupe commutatif totalement ordonné et ν une valuation à valeurs dans Γ. Le rang rationnel de ν est un élément de $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ défini par*

$$\text{rang rat.}\,\nu := \dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}).$$

Si $\Gamma\simeq\mathbb{Z}$, on dit que la valuation ν est discrète. Dans ce cas, on note, pour tout $n\in\mathbb{Z}$:

$$I_n(\nu)=\{x\in R \text{ tel que } \nu(x)\ge n\}.$$

Si I est un idéal de R finiment engendré, on note : $\nu(I)=\min\{\nu(x) \text{ tel que } x\in I\}$. Nous rappelons que si ν est une valuation discrète de K, alors l'ensemble des éléments $x\in K$ tels que $\nu(x)\ge 0$ forme un anneau local. Cet anneau s'appelle l'anneau de valuation associé à ν, on le note R_ν. Son idéal maximal $\mathfrak{m}_\nu$ est défini par $\mathfrak{m}_\nu=\{x\in K \text{ tel que } \nu(x)\ge 1\}$.

Définition 1.4. — *Soient R un anneau intègre, K son corps de fractions et ν une valuation discrète de K centrée dans R en $\mathfrak{p}$ (ie. $R\subset R_\nu$ et $\mathfrak{p}=R\cap\mathfrak{m}_\nu$). La valuation ν est dite divisorielle si elle vérifie l'égalité suivante*

$$\operatorname{deg.tr.}_{k(\mathfrak{p})} k_\nu=\operatorname{ht}\mathfrak{p}-1,$$

où $k_\nu=R_\nu/\mathfrak{m}_\nu$ est le corps résiduel de R_ν.

Définition 1.5. — *Soient R un anneau intègre et K son corps de fractions.*
On dit que R est N-2 si pour toute extension finie L de K, la clôture intégrale de R dans L est un R-module de type fini.

Définition 1.6. — *Un anneau R est dit de Nagata (ou universellement japonais) s'il est nœthérien et pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R, l'anneau $R/\mathfrak{p}$ est N-2.*

Lemme 1.7. — *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau nœthérien local intègre de Nagata et K son corps de fractions. Alors pour toute valuation divisorielle ν de K centrée dans R en $\mathfrak{m}$, il existe un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R tel que le centre de ν dans $\overline{X}_I$ est de codimension 1 dans $\overline{X}_I$.*

Démonstration. — On peut choisir $(a_1, a_2, ..., a_d)$ un système de paramètres de R tel que les images de $a_2/a_1, a_3/a_1, ..., a_d/a_1$ dans $R_\nu/\mathfrak{m}_\nu$ sont algébriquements indépendantes sur $k(\mathfrak{m})$. Pour tout $i = 1, 2, ..., d$, soit $s_i = \prod_{j \neq i} \nu(a_j)$. Prenons I l'idéal de R engendré par $a_1^{s_1}, a_2^{s_2}, ..., a_d^{s_d}$. Il est clair d'après le théorème de la dimension (Cf. [**8**], Théorème 2.5, Page 333) que le centre de ν dans $\overline{X}_I$ est de codimension 1 dans $\overline{X}_I$. □

Définition 1.8. — *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local intègre. On dit que R est analytiquement irréductible si le complété $\mathfrak{m}$-adique de R est intègre.*

Lemme 1.9. — *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local nœthérien intègre analytiquement irréductible et $(\widehat{R}, \widehat{\mathfrak{m}})$ le complété $\mathfrak{m}$-adique de R. Alors pour toute valuation divisorielle ν de R centrée en $\mathfrak{m}$, il existe une seule valuation divisorielle $\widehat{\nu}$ de $\widehat{R}$ centrée en $\widehat{\mathfrak{m}}$ telle que pour tout $x \in R$ on a $\widehat{\nu}(x) = \nu(x)$.*

Démonstration. — Montrons d'abord l'existence de $\widehat{\nu}$. Nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i} & R_\nu \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{R} & \xrightarrow{\widehat{i}} & \widehat{R}_\nu \end{array}$$

où $\widehat{R}_\nu$ est le completé $\mathfrak{m}_\nu$-adique de R_ν. L'anneau $\widehat{R}_\nu$ est un anneau de valuation discrète. Posons $\widehat{\nu}$ la valuation associée à $\widehat{R}_\nu$. Nous allons montrer que le morphisme $\widehat{i}$ est injectif. Supposons le contraire (ie. $\mathfrak{p} = \ker \widehat{i} \neq (0)$). Puisque l'anneau $\widehat{R}_\nu$ est intègre, l'idéal $\mathfrak{p}$ est premier. Notons μ la restriction de $\widehat{\nu}$ à $k(\mathfrak{p})$. Soient ν_0 une valuation de $\widehat{R}_\mathfrak{p}$ centrée en $\mathfrak{p}\widehat{R}_\mathfrak{p}$ et ν_1 une extension de μ au corps résiduel de ν_0. Prenons $\nu_2 = \nu_0 \circ \nu_1$ la valuation composée avec les valuation ν_0 et ν_1 (Cf. [**13**]). Nous avons l'égalité

$$\text{rang rat.}\, \nu_2 = \text{rang rat.}\, \nu_0 + \text{rang rat.}\, \nu_1. \tag{1}$$

Comme $\widehat{R}$ est intègre, la hauteur de $\mathfrak{p}$ est supérieure ou égale à 1. Donc le rang rationnel de ν_0 est supérieur ou égal à 1. Nous en déduisons d'après l'égalité (1) que

$$\text{rang rat.}\, \nu_2 \geq 2. \tag{2}$$

De plus, on a

$$\text{deg.tr.}_{k(\widehat{\mathfrak{m}})}\, k_{\nu_2} \geq \text{deg.tr.}_{k(\mathfrak{m})}\, k_{\nu}. \tag{3}$$

Les inégalités (2) et (3) donnent

$$\text{deg.tr.}_{k(\widehat{\mathfrak{m}})}\, k_{\nu_2} + \text{rang rat.}\, \nu_2 \geq 2 + \text{deg.tr.}_{k(\mathfrak{m})}\, k_{\nu} = \dim R + 1.$$

Cela est une contradiction avec l'inégalité d'Abhyankar [**1**]. Donc le morphisme $\widehat{i}$ est injectif.

Soit x un élément de $\widehat{R}$. Posons $\widehat{\nu}(x) = s$ et $\widehat{\nu}(\widehat{\mathfrak{m}}) = r_1$. Pour tout entier naturel $n > s/r_1$, il existe un élément x' appartenant à R tel que $x - x' \in \widehat{\mathfrak{m}^n}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{\nu}(x) &= \widehat{\nu}\big((x-x') + x'\big) \\ &= \widehat{\nu}(x') \\ &= \nu(x') \end{aligned}$$

Donc les valuations ν et $\widehat{\nu}$ ont le même groupe de valeurs (ie $\Gamma_\nu = \Gamma_{\widehat{\nu}}$.) Maintenant, soient x et $y \neq 0$ deux éléments appartenant à $\widehat{R}$ tels que $x/y \in R_{\widehat{\nu}}$. Nous pouvons choisir deux éléments x' et y' appartenant à R tels que $\widehat{\nu}(x - x') > \widehat{\nu}(x)$ et $\widehat{\nu}(y - y') > \widehat{\nu}(y)$. Donc $\widehat{\nu}(x) = \nu(x')$ et $\widehat{\nu}(y) = \nu(y')$, par suite $x'/y' \in R_\nu$. En plus nous avons

$$\frac{x}{y} - \frac{x'}{y'} = \frac{x - x'}{x} \cdot \frac{x}{y} + \frac{y' - y}{y} \cdot \frac{x'}{y'} \in \mathfrak{m}_{\widehat{\nu}}.$$

ce qui donne que ν et $\widehat{\nu}$ ont le même corps résiduel (ie. $k_{\widehat{\nu}} \simeq k_\nu$). Le fait que $\dim \widehat{R} = \dim R$ et $k(\widehat{\mathfrak{m}}) \simeq k(\mathfrak{m})$ entraîne que la restriction de la valuation $\widehat{\nu}$ au corps de fractions de $\widehat{R}$, qu'on note aussi $\widehat{\nu}$ est une valuation divisorielle centrée dans $\widehat{R}$ en $\widehat{\mathfrak{m}}$, et elle vérifie bien évidemment $\nu(x) = \widehat{\nu}(x)$ pour tout $x \in R$.

Montrons maintenant l'unicité de la valuation $\widehat{\nu}$. Soit $\tilde{\nu}$ une autre valuation divisorielle de $K(\widehat{R})$ centrée dans $\widehat{R}$ en $\widehat{\mathfrak{m}}$ qui vérifie $\nu(x) = \tilde{\nu}(x)$ pour tout $x \in R$. Prenons z un élément de $\widehat{R}$. Soient $\widehat{\nu}(z) = s_1$, $\tilde{\nu}(z) = s_2$ et $\tilde{\nu}(\mathfrak{m}) = r_2$. Alors pour tout entier naturel $n \geq \sup(s_1/r_1, s_2/r_2)$, il existe $z' \in R$ tel que $z - z' \in \mathfrak{m}^n\widehat{R}$. Par consequent $\widehat{\nu}(z) = \widehat{\nu}(z')$ et $\tilde{\nu}(z) = \tilde{\nu}(z')$, et comme $z' \in R$ et les valuations $\widehat{\nu}$ et $\tilde{\nu}$ sont égaux sur R. Il en résulte que $\widehat{\nu}(z) = \tilde{\nu}(z)$. □

Lemme 1.10. — *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau nœthérien local intègre analytiquement irréductible et $\overline{R}$ la normalisation de R. Alors pour toute valuation divisorielle ν de R centrée en $\mathfrak{m}$, il existe une valuation divisorielle $\overline{\nu}$ de $\overline{R}$ centrée en $\overline{\mathfrak{m}}$ (l'idéal maximal de $\overline{R}$*[1]*), telle que pour tout $x \in R$, on a $\overline{\nu}(x) = \nu(x)$.*

Démonstration. — On a bien l'inclusion :

$$R \subseteq \overline{R} \subseteq R_\nu.$$

[1] Sous les hypothèses de ce lemme, la normalisation de R est anneau local (Cf. [**8**]), Proposition 2.14, (c), page 344).

Notons $\overline{\nu}$ l'extension de ν dans $\overline{R}$. Puisque R est analytiquement irréductible, l'anneau $\overline{R}$ est local et $\overline{\mathfrak{m}}$ est son idéal maximal (Cf. [8]). La valuation $\overline{\nu}$ est donc centrée dans $\overline{R}$ en $\overline{\mathfrak{m}}$. De plus, comme ν est divisorielle,

$$\operatorname{ht}\mathfrak{m} = \operatorname{ht}\overline{\mathfrak{m}}$$

et

$$\operatorname{deg.tr.}_{k(\mathfrak{m})} k(\overline{\mathfrak{m}}) = 0,$$

il en résulte que la valuation $\overline{\nu}$ est aussi divisorielle. □

2. Comparaison des valuations divisorielles

Soient $X = \operatorname{Spec} R$ où R est un anneau nœthérien local analytiquement irréductible, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et K son corps de fractions. Pour tout idéal I de R, nous notons $\pi_I : \overline{X}_I \longrightarrow X$ l'éclatement normalisé de X le long de I et $E_I = V(I\mathcal{O}_{\overline{X}_I})_{red}$ le sous-schéma réduit de $\overline{X}_I$ associé au faisceau $I\mathcal{O}_{\overline{X}_I}$. Soient E_1 et E_2 deux composantes irréductibles de E_I. On dit que E_1 et E_2 sont liées en codimension 1, s'il existe une suite finie $Y_1 = E_1, Y_2, ..., Y_{s-1}, Y_s = E_2$ de composantes irréductibles de E_I telle que pour tout $1 \leq i \leq s-1$, la codimension de $Y_i \cap Y_{i+1}$ dans Y_{i+1} est égale à 1. De même, si ν_1 et ν_2 sont deux valuations divisorielles de K centrées dans R en $\mathfrak{m}$, on dit que ν_1 et ν_2 sont liées en codimension 1 s'il existe un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R tel que le centre de ν_1 et le centre de ν_2 dans $\overline{X}_I$ sont liés en codimension 1. Rappelons tout d'abord le théorème d'Izumi :

Théorème 2.1 **(Théorème d'Izumi [10, 5]).** — *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau nœthérien local analytiquement irréductible. Alors pour toutes valuations divisorielles ν_1, ν_2 centrées en $\mathfrak{m}$, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout x non nul appartenant à R on a $\nu_1(x) \leq r\nu_2(x)$.*

Supposons que l'anneau R est analytiquement irréductible et ν_1, ν_2 sont deux valuations divisorielles de R centrées en $\mathfrak{m}$. Le but de cette section est de donner une nouvelle démonstration du théorème d'Izumi dans les cas suivants :

Cas (I) : R est de dimension quelconque et les extensions de ν_1, ν_2 dans le corps de fractions de $\widehat{R}$ sont liées en codimension 1 (Cf. Théorème 2.5).

Cas (II) : R est de dimension inférieure ou égale à 2 et ν_1, ν_2 sont deux valuations divisorielles quelconques (Cf. Théorème 2.10).

2.1. Le cas (I)

Notation 2.2. — *Si $D = \sum n_i D_i$ est un diviseur de Weil d'un schéma X et $Y \subset X$ un sous-schéma de X, nous notons :*

$$D \cap |Y| = \sum_{D_i \subset Y} n_i D_i$$

Proposition 2.3. — *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau de Nagata analytiquement irréductible et ν_1, ν_2 deux valuations divisorielles de $K(R)$ centrées en $\mathfrak{m}$. Si ν_1 et ν_2 sont liées en codimension 1, alors leurs extensions $\widehat{\nu}_1$ et $\widehat{\nu}_2$ dans $\widehat{R}$ sont également liées en codimension 1.*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R tel que les centres de ν_1 et ν_2 sont liés en codimension 1. Soit E_1 (resp. E_2) le centre de ν_1 et ν_2 dans $\overline{X}_I$, il existe donc une suite finie

$$Y_1 = E_1, Y_2, ..., Y_{s-1}, Y_s = E_2$$

de composantes irréductibles de E_I telles que pour tout $1 \leq i \leq s-1$, la codimension de $Y_i \cap Y_{i+1}$ dans Y_{i+1} est égale à 1. Par conséquent, nous pouvons supposer que la codimension de $E_1 \cap E_2$ dans E_2 est égale à 1. Soient

$$S(I) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \overline{I^n} T^n$$

et

$$S(I\widehat{R}) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \overline{I^n \widehat{R}} T^n$$

les algèbres graduées définies par les filtrations $\{\overline{I^n}\}_{n=0}^{+\infty}$ et $\{\overline{I^n \widehat{R}}\}_{n=0}^{+\infty}$ respectivement. Les deux diviseurs E_1 et E_2 sont définis respectivement par deux idéaux premiers homogènes $\mathfrak{q}_1$ et $\mathfrak{q}_2$ de $S(I)$ tels que :

$$\operatorname{ht} \mathfrak{q}_1 = \operatorname{ht} \mathfrak{q}_2 = 1$$

et

$$IS(I) \subseteq \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2.$$

Nous avons donc $R_{\nu_1} = S(I)_{(\mathfrak{q}_1)}$ et $R_{\nu_2} = S(I)_{(\mathfrak{q}_2)}$. Comme le morphisme naturel $R \hookrightarrow \widehat{R}$ est fidèlement plat et I est $\mathfrak{m}$-primaire, $\overline{I^n \widehat{R}} = \overline{I^n}\widehat{R}$.

Par suite,

$$S(I)/IS(I) \cong S(I\widehat{R})/IS(I\widehat{R}).$$

Pour finir la démonstration, on a besoin de l'affirmation suivante :

Affirmation 2.4. — *Pour tout $i = 1, 2$, il existe un unique idéal premier homogène Q_i minimal de $IS(I\widehat{R})$ tel que :*

$$Q_i = \mathfrak{q}_i S(I\widehat{R}).$$

D'abord, admettons que cette affirmation et finissons la preuve de la proposition. On a :

$$(Q_1 + Q_2) = (\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2) S(I\widehat{R}).$$

Par fidèle platitude de l'extension $S(I) \longrightarrow S(I\widehat{R})$, nous obtenons

$$\operatorname{ht}(Q_1 + Q_2) = \operatorname{ht}(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2).$$

De plus, comme les anneaux R et $\widehat{R}$ sont analytiquement irréductibles, les anneaux $S(I)$ et $S(I\widehat{R})$ sont universellement caténaires (Cf. [**4**], Théorème (18.13), Théorème (18.23)). Donc

$$\begin{aligned}\operatorname{ht}((Q_1+Q_2)/Q_2) &= \operatorname{ht}(Q_1+Q_2)-\operatorname{ht}Q_2\\ &= \operatorname{ht}(\mathfrak{q}_1+\mathfrak{q}_2)-\operatorname{ht}\mathfrak{q}_2\\ &= \operatorname{ht}((\mathfrak{q}_1+\mathfrak{q}_2)/\mathfrak{q}_2).\end{aligned}$$

Par construction de $\widehat{\nu}_1$ (resp. $\widehat{\nu}_2$), et l'unicité de Q_1 (resp. Q_2), on obtient que le centre $\widehat{E}_1$ (resp. $\widehat{E}_2$) de $\widehat{\nu}_1$ (resp. $\widehat{\nu}_2$) dans l'éclatement normalisé de Spec $\widehat{R}$ le long de $I\widehat{R}$ est définie par l'idéal homogène Q_1 (resp. Q_2). Nous savons que la codimension de $E_1 \cap E_2$ dans E_2 est égale à la hauteur de $(\mathfrak{q}_1+\mathfrak{q}_2)/\mathfrak{q}_2$ et ainsi la codimension de $\widehat{E}_1 \cap \widehat{E}_2$ dans $\widehat{E}_2$ est égale à la hauteur de $(Q_1+Q_2)/Q_2$. Par conséquent $\widehat{E}_1$ et $\widehat{E}_2$ sont liés en codimension 1. □

Démonstration de l'affirmation 2.4 : Le fait que le morphisme $S(I) \longrightarrow S(I\widehat{R})$ est fidèlement plat entraîne que l'idéal $\mathfrak{q}_1 S(I\widehat{R})$ n'a pas d'idéaux premiers associés plongés. Pour tout idéal premier minimal $\tilde{Q}_1$ de $\mathfrak{q}_1 S(I\widehat{R})$, l'anneau $S(I\widehat{R})_{(\tilde{Q}_1)}$ est un anneau de valuation discrète. La valuation $\widehat{\nu}_1$ associée à cet anneau est une extension de ν_1 à $\widehat{R}$. Comme cette valuation $\widehat{\nu}_1$ est unique (Cf. Lemme 1.9), $\mathfrak{q}_1 S(I\widehat{R})$ admet un unique idéal premier Q_1 associé, par conséquent $\sqrt{\mathfrak{q}_1 S(I\widehat{R})} = Q_1$. De plus, d'après le lemme 1.9, les valuations ν_1 et $\widehat{\nu}_1$ ont le même groupe de valeurs, ce qui implique que :

$$\nu_1\big(\mathfrak{q}_1 S(I\widehat{R}) \cap S(I\widehat{R})_{(Q_1)}\big) = \widehat{\nu}_1\big(\mathfrak{q}_1 S(I\widehat{R}) \cap S(I\widehat{R})_{(Q_1)}\big) = 1.$$

Donc

$$\mathfrak{q}_1 S(I\widehat{R})_{(Q_1)} = Q_1 S(I\widehat{R})_{(Q_1)}.$$

Ceci donne :

$$\mathfrak{q}_1 S(I\widehat{R})_{Q_1} = Q_1 S(I\widehat{R})_{Q_1}.$$

D'après cette dernière égalité et le fait que Q_1 est le seul idéal premier associé à $\mathfrak{q}_1 S(I\widehat{R})$, il résulte que $\mathfrak{q}_1 S(I\widehat{R}) = Q_1$. De façon analogue, nous montrons que $\mathfrak{q}_2 S(I\widehat{R}) = Q_2$. □

Théorème 2.5. — *Soient $(R,\mathfrak{m})$ un anneau local nœthérien analytiquement irréductible et ν_1, ν_2 deux valuations divisorielles de R centrées en $\mathfrak{m}$. Si $\widehat{\nu}_1$ et $\widehat{\nu}_2$ sont liées en codimension 1, alors il existe un entier naturel $r \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout x non nul appartenant à R, on a :*

$$\nu_1(x) \leq r\nu_2(x).$$

Démonstration. — Nous pouvons supposer que R est complet et que ν_1, ν_2 sont liées en codimension 1. Alors par définition, il existe un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R tel que le centre de ν_1 et le centre de ν_2 dans $\overline{X}_I$ sont liés en codimension 1. Soit E_1 (resp. E_2) le centre de ν_1 (resp. ν_2) dans $\overline{X}_I$. Il existe donc une suite finie

$$Y_1 = E_1, Y_2, ..., Y_{s-1}, Y_s = E_2$$

de composantes irréductibles de E_I telles que pour tout $1 \leq i \leq s-1$, la codimension de $Y_i \cap Y_{i+1}$ dans Y_{i+1} est égale à 1. Comme $\overline{X}_I$ est normal et l'anneau R est de Nagata, l'anneau $\mathcal{O}_{\overline{X}_I, Y_i}$ est un anneau de valuation divisorielle de R centrée en $\mathfrak{m}$. Donc pour montrer le théorème, nous pouvons supposer que $E_1 \cap E_2$ est de codimension 1 dans E_2. Notons D le diviseur de E_2 défini par

$$D := E_1 \cap E_2.$$

Soient x un élément arbitraire non nul appartenant à R et $t \in K(R)$ un paramètre régulier de R_{ν_2} (i.e. $\nu_2(t) = 1$). Soient $l = \nu_1(x)$ et $m = \nu_2(x)$. En regardant l'ensemble $E_2 \subseteq \mathbb{P}^n_k$ comme une variété projective sur le corps résiduel k de R, la restriction de $\frac{x}{t^m}$ sur E_2 est une fonction rationnelle sur E_2 qui n'est pas identiquement nulle. Soient $V(t)$ le sous-schéma de $\overline{X_I}$ défini par t et B le sous-schéma de E_2 défini par

$$B := E_2 \cap (\overline{V(t) - E_2}).$$

Notons $\varphi : \mathbb{P}^n_{\bar{k}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$ le morphisme naturel induit par l'inclusion $k \subset \bar{k}$, où $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k, et $\overline{E}_2$ (resp. $\overline{D}$, $\overline{B}$) l'image réciproque de E_2 (resp. D, B) dans $\mathbb{P}^n_{\bar{k}}$.

Soit ξ un point régulier de $\overline{E}_2 - (\overline{D} \cup \overline{B})$. Prenons L un sous-espace linéaire de $\mathbb{P}^n_{\bar{k}}$ de dimension $n - \dim\ E_2 + 1$ qui contient ξ et qui intersecte $\overline{E}_2$ transversalement en ξ. L'intersection $C := L \cap \bar{E}_2$ est une courbe, réduite et irréductible dans un voisinage de ξ. Soit Y l'unique composante irréductible de C qui passe par ξ ; par construction, Y est réduite. Soient $i : Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\bar{k}}$ l'inclusion naturelle, $\psi : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ une résolution des singularités de Y, et $\tilde{E_2}$ (resp. $\tilde{B}$ et $\tilde{D}$) la pré-image naturelle dans $\tilde{Y}$ de E_2 (resp. B et D).

Nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[d, hook] & & \overline{B} \arrow[d, hook] & & & \tilde{B} \arrow[d, hook] \\
\overline{X}_I & E_2 \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^n_k & \mathbb{P}^n_{\bar{k}} \arrow[l, "\varphi"'] & \overline{E}_2 \arrow[l, hook', "i_1"] & Y \arrow[l, hook', "i_2"] & \tilde{Y} \arrow[l, "\psi"] \\
 & D \arrow[u, hook] & & \overline{D} \arrow[u, hook] & & & \tilde{D} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Notons $\phi = \varphi \circ i_1 \circ i_2 \circ \psi$, où i_1, i_2 sont les injections naturelles. Soient maintenant $B = B_1 \cup ... \cup B_s$ la décomposition de B en composantes irréductibles. Pour tout

$i \in \{1, 2, ..., s\}$, soient $V_{i1}, ..., V_{ik_i}$ toutes les composantes irréductibles de $V \setminus E_2$ qui contiennent B_i pour tous $i \in \{1, ..., s\}$ et $j \in \{1, ..., k_i\}$, on a :

$$B_i \subset V_{ij} \cap E_2 \text{ et } V_{ij} \neq E_2.$$

En tout point $\xi \in E_2 - B$ la fonction $\frac{x}{t^m}$ est régulière en codimension 1, elle est donc régulière car $\bar{X}_I$ est normal. Soit ν_{ij} la valuation associée à V_{ij}. Pour tous $1 \leq i \leq s$ et $1 \leq j \leq k_i$, soit

$$t_{ij} \in \bigcap_{i=1}^{s} \mathcal{O}_{\overline{X}_I, B_i}$$

tel que :

$$\nu_{ij}(t_{ij}) \geq \nu_{ij}(t). \tag{4}$$

Posons pour tout $1 \leq i \leq s$:

$$t_i = \prod_{j=1}^{k_i} t_{ij}.$$

Il est clair que la fonction t_i est régulière sur Spec $\mathcal{O}_{\overline{X}_I, B_i}$, et comme $Y \not\subset \overline{B}$, nous pouvons supposer que cette fonction ne s'annule pas identiquement sur Y. En particulier le pullback de t_i définit une fonction rationnelle sur $\tilde{Y}$ non identiquement nulle, qui est régulière sur $\phi^{-1}(B_i)$. L'inégalité (4) entraîne :

$$\frac{x}{t^m} \prod_{i=1}^{s} t_i^m \in \bigcap_{i=1}^{s} \mathcal{O}_{\overline{X}_I, B_i}. \tag{5}$$

Soit H_i le diviseur de $\tilde{Y}$ défini par $H_i = (\phi^*(t_i))_0 \cap |\phi^{-1}(B_i)|$ (Cf. Notation 2.2). La fonction $\phi^*(\frac{x}{t^m})$ n'a pas de pôles dans $\tilde{Y} - \tilde{B}$ et la fonction $\phi^*(\frac{x}{t^m} \prod_{i=1}^{s} t_i^m)$ n'a pas de pôles dans $\tilde{B}$ (Cf. (5)). Alors

$$\deg\,(\phi^*(\frac{x}{t^m}))_\infty \leq \deg\big((\phi^*(\prod_{i=1}^{s} t_i^m) \cap |\tilde{B}|)_0\big).$$

Par suite,

$$\deg\,(\phi^*(\frac{x}{t^m}))_\infty \leq m \sum_{i=1}^{s} \deg H_i. \tag{6}$$

Soient $u \in \mathcal{O}_{\overline{X}_I}(-E_1) \setminus \mathcal{O}_{\overline{X}_I}(-E_2)$ et $p = \nu_1(u)$. Nous distinguons deux cas :
<u>Cas 1</u> : $l - m\nu_1(t) \leq 0$.
<u>Cas 2</u> : $l - m\nu_1(t) > 0$.
Dans le cas 1, on a bien $\nu_1(x) \leq \nu_1(t)\nu_2(x)$, ce qui implique le résultat recherché. Il reste maintenant à démontrer le théorème dans le cas 2. Supposons $l - m\nu_1(t) > 0$. Alors par la définition de u et p, la fonction $x^{2p}/(t^{2mp}u^{l-m\nu_1(t)})$ s'annule sur D. Ainsi sa restriction à $L \cap \overline{E_2}$ s'annule sur $L \cap \overline{D}$. Donc

$$\deg\,(\phi^*(\frac{x}{t^m}))_0 \geq \frac{l - m\nu_1(t)}{2p} \deg \phi^*((u)_0 \cap \tilde{D}) \geq \frac{l - m\nu_1(t)}{2p}. \tag{7}$$

Sachant que tout diviseur d'une fonction rationnelle sur $\tilde{Y}$ est de degré zéro, alors d'après les deux inégalités (6) et (7), nous obtenons

$$\frac{l - m\nu_1(t)}{2p} \leq m \sum_{i=1}^{s} \deg H_i.$$

Par suite,

$$\nu_1(x) \leq \big(\nu_1(t) + 2p \sum_{i=1}^{s} \deg H_i\big)\nu_2(x),$$

(on rappelle que $l = \nu_1(x)$ et $m = \nu_2(x)$).

Ce qui achève la démonstration. □

2.2. Le cas (II). — Pour démontrer le théorème d'Izumi dans ce cas (Cf. Théorème 2.10), nous allons appliquer le théorème principal de Zariski qui s'énonce comme suit :

Théorème 2.6 **(Théorème principal de Zariski, Cf.[8]).** — *Soit $f : Y \longrightarrow X$ un schéma projectif sur un schéma localement nœthérien, tel que $f^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ est un isomorphisme. Alors pour tout point $x \in X$, le fibre Y_x est connexe.*

Lemme 2.7 **(Cf. [8], Corollaire 4.4.3).** — *Soient X un schéma normal et localement nœthérien, et $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme birationnel propre. Alors $f^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ est un isomorphisme.*

Il est important de noter que le schéma Y dans le lemme 2.7 n'est pas supposé normal. Ci-dessous, on va appliquer ce lemme à l'éclatement normalisé du spectre d'un anneau normal le long de son idéal maximal.

Corollaire 2.8. — *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau de Nagata intègre et normal de dimension 2, I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de R, et E_1, E_2 deux composantes irréductibles de E_I. Alors E_1 et E_2 sont liées en codimension 1.*

Démonstration. — Comme l'application $\pi_I : \overline{X}_I \longrightarrow X = \operatorname{Spec} R$ est un morphisme birationnel propre et que l'anneau R est nœthérien et normal, le morphisme naturel ${\pi_I}^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow (\pi_I)_*\mathcal{O}_{\overline{X}_I}$ est un isomorphisme (Cf. Lemme 2.7). Donc d'après le théorème principal de Zariski (Cf. Théorème 2.6), le diviseur exceptionnel E_I est connexe. Ceci implique que pour toutes composantes irréductibles E_1 et E_2 de E_I, il existe une suite finie

$$Y_1 = E_1, Y_2, \cdots, Y_{s-1}, Y_s = E_2$$

de composantes irréductibles de E_I, telle que pour tout $1 \leq i \leq s-1$, nous avons :

$$Y_i \cap Y_{i+1} \neq \varnothing.$$

Comme la dimension de R est égale à 2, cela revient à dire que la codimension de $Y_i \cap Y_{i+1}$ dans Y_{i+1} est égale à 1. Donc les deux composantes irréductibles E_1 et E_2 sont liées en codimension 1. □

Corollaire 2.9. — *Soient* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau de Nagata normal et de dimension inférieure ou égale à 2, et* ν_1 *et* ν_2 *deux valuations divisorielles de* R *centrées en* $\mathfrak{m}$. *Alors* ν_1 *et* ν_2 *sont liées en codimension* 1.

Démonstration. — Si la dimension de R est égale à 1, les deux valuations ν_1 et ν_2 sont égales, donc par définition, elles sont liées en codimension 1. Supposons que la dimension de R est égale à 2. Puisque les valuations ν_1 et ν_2 sont divisorielles, il existe deux idéaux $\mathfrak{m}$-primaires I_1, I_2 de R tels que le centre de ν_1 (resp. ν_2) dans $\overline{X}_{I_1}$ (resp. $\overline{X}_{I_2}$) est de codimension 1. Prenons $I = I_1 I_2$, il est clair que cet idéal est aussi $\mathfrak{m}$-primaire et que les centres de ν_1 et de ν_2 dans $\overline{X}_I$ sont liés en codimension 1 (Cf. Corollaire 2.8). □

Théorème 2.10. — *Soit* $(R, \mathfrak{m})$ *un anneau local nœthérien analytiquement irréductible de dimension inférieure ou égale à deux. Alors pour tout couple* ν_1, ν_2 *de valuations divisorielles centrées en* $\mathfrak{m}$, *il existe un entier naturel* $r \in \mathbb{N}^*$ *tel que pour tout* x *non nul appartenant à* R, *on a :*

$$\nu_1(x) \leq r\nu_2(x).$$

Démonstration. — Si la dimension de R est égale à 1, alors :

$$R_{\nu_1} = R_{\nu_2} = \overline{R}.$$

Cela signifie que $\nu_1(x) = \nu_2(x)$ pour tout x non nul appartenant à R. Supposons maintenant que R est de dimension égale à 2. D'après les lemmes précédents (Cf. Lemme 1.9, lemme 1.10), il nous suffit de montrer le théorème en supposant que R est intègre, normal et complet. Puisque tout anneau nœthérien complet est un anneau de Nagata, il en résulte que ν_1 et ν_2 sont liées en codimension 1 (Cf. Corollaire 2.9). Par conséquent, le théorème devient donc une conséquence immédiate du cas (I) (Cf. Théorème 2.5). □

3. Commentaires

Dans cette sections, nous proposons une conjecture concernant le lien entre les valuations divisorielles et la notion de la connexité en codimension 1. (Cf. **Cas (I)**), et nous donnons certains cas dans lesquelles la conjecture est vraie.

Conjecture 1. Soient $X = \mathrm{Spec}\,(R, \mathfrak{m})$ un schéma affine, intègre, normal et complet, et soient ν_1, ν_2 deux valuations divisorielles de R centrées en $\mathfrak{m}$. Alors il existe un idéal $\mathfrak{m}$-primaire I de R, tel que les centres de ν_1 et ν_2 dans $\overline{X}_I$ sont liés en codimension 1.

Remarque 3.1. — *Le corollaire 2.9, nous assure que cette conjecture est vrai si* R *est de dimension inférieure ou égale à deux.*

Définition 3.2. — *Soit* k *un entier naturel. Un espace topologique nœthérien* X *est dit connexe en codimension* k *si pour tout sous-ensemble fermé* Y *de* X *de codimension strictement supérieure à* k, *l'ensemble* $X - Y$ *est connexe.*

Cette définition a été introduite par R. Hartshorne [3], en 1962. Il a montré que X est connexe en codimension k si, et seulement si, pour tout couple (Y, Z) de composantes irréductibles de X, il existe une suite finie $Y = E_1, Y_2, ..., Y_{s-1}, Y_s = Z$ de composantes irréductibles de X telle que pour tout $1 \leq i \leq s-1$, la codimension de $Y_i \cap Y_{i+1}$ dans X est inférieure ou égale à k.

Définition 3.3. — *Soit X un schéma intègre. Nous disons que X admet une résolution des singularités plongée, si pour tout sous-schéma fermé E de X, il existe une résolution des singularités $\pi : Y \longrightarrow X$ telle que le diviseur $\pi^{-1}(E)$ est à croisements normaux. De plus pour tout point régulier x de X tel que le diviseur E est à croisements normaux, le morphisme π est un isomorphisme au-dessus de x.*

Lemme 3.4. — *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local, I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de R, $\pi : X_I \longrightarrow$ Spec R l'éclatement de Spec R le long de I, et soit $\mathcal{H}$ un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{X_I}$ tel que $V(\mathcal{H}) \subset V(I\mathcal{O}_{X_I})$. Alors le morphisme composé de π et de l'éclatement de X_I le long de $\mathcal{H}$ est un éclatement de* Spec R *le long d'un idéal $\mathfrak{m}$-primaire.*

Démonstration. — Le faisceau $\mathcal{H}(n) = \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{O}_{X_I}} \mathcal{O}_{X_I}(n) = I^n\mathcal{H}$ est engendré par ses sections globales quand n est suffisamment grand (Cf. [8], Théorème 1.27, Page 167). En considérant X_I comme un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^d_R$, soient $f_1, f_2, \cdots, f_r$ les sections globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}$ qui engendrent le faisceau $\mathcal{H}(n)$, donc elles sont des éléments de R, car $\mathcal{H}(n) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d_R}(\mathbb{P}^d_R) = R$. En prenant $J = (f_1, f_2, \cdots, f_r)I$, nous pouvons montrer que la décomposition de π et de l'éclatement de X_I le long de $\mathcal{H}$ est exactement l'éclatement de Spec R le long de J. Reste maintenant à montrer que J est un idéal $\mathfrak{m}$-primaire, et pour cela, il suffit de montrer que :

$$V(J\mathcal{O}_{X_I}) \subset V(\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X_I}). \tag{8}$$

On a :

$$\begin{aligned} V(J\mathcal{O}_{X_I}) &= V(I^n\mathcal{H}) \\ &\subset V(I^n\mathcal{O}_{X_I}) \\ &= V(\mathfrak{m}\mathcal{O}_{X_I}). \end{aligned}$$

Donc on a bien l'inclusion (8). □

Proposition 3.5. — *Soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau nœthérien local à singularité isolée et I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de R tel que le schéma $\overline{X}_I$ admet une résolution des singularités plongée. Alors tout couple (ν_1, ν_2) de valuations divisorielles de Rees associées à I, ν_1 et ν_2 sont liées en codimension 1.*

Démonstration. — Soient E_1 (resp. E_2) les centres de ν_1 (resp. ν_2) dans $\overline{X}_I$. Comme $\overline{X}_I$ admet une résolution des singularités plongée, il existe une résolution des singularités $\pi : Y \longrightarrow \overline{X}_I$ telle que le diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(E_I)$ est à croisements normaux. Donc pour tout couple (D_1, D_2) de composantes irréductibles de $\pi^{-1}(E_I)$ telles que $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$, on a :

$$\operatorname{codim}(D_1 \cap D_2, D_1) = 1$$

et

$$\operatorname{codim}(D_1 \cap D_2, D_2) = 1.$$

Le fait que $\pi^{-1}(E_I)$ est de plus connexe (Cf. Théorème 2.6) implique qu'il est connexe en codimension 1. Par suite, les transformés stricts de E_1 et E_2 sont liées en codimension 1. Il nous reste maintenant de démontrer que Y est obtenu d'un éclatement de Spec R le long d'un idéal $\mathfrak{m}$-primaire. Puisque $\mathfrak{m}$ est le seul point singulier de Spec R, $\overline{X}_I \backslash V(I\mathcal{O}_{\overline{X}_I}) \simeq \operatorname{Spec} R - \{\mathfrak{m}\}$ est régulier. Nous pouvons donc choisir π un éclatement de $\overline{X}_I$ le long d'un faisceau d'idéaux $\mathcal{H}$ de $\mathcal{O}_{\overline{X}_I}$ tel que $V(\mathcal{H}) \subseteq V(I\overline{X}_I)$. En utilisant le lemme 3.4, il est clair que Y est un éclatement de Spec R le long d'un idéal $\mathfrak{m}$-primaire. □

Remarque 3.6. — *En admettant que : « tout schéma X excellent fini sur* Spec $\mathbb{Q}$ *admet une résolution de singularités plongée »* (2). *Alors suivant les hypothèses de la première question, si l'anneau R est un anneau excellent sur $\mathbb{Q}$, alors nous avons toujours une réponse positive a cette question.*

Corollaire 3.7. — *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau de Nagata à singularité isolée tel que tout schéma Y de type fini sur R admet une résolution des singularités plongée. Alors tout couple (ν_1, ν_2) de valuations divisorielles centrées dans R en $\mathfrak{m}$, ν_1 et ν_2 sont liées en codimension 1.*

Références

[1] S. ABHYANKAR – On the valuations centered in a local domain, *Amer. J. Math.* **78** (1956), p. 321–348.

[2] A. GROTHENDIECK – Éléments de géométrie algébrique. IV : Étude locale des schemas et des morphismes de schemas. (Seconde partie).

[3] R. HARTSHORNE – Complete intersections and connectedness, *Amer. J. Math.* **84** (1962), p. 497–508.

[4] M. HERRMANN, S. IKEDA & U. ORBANZ – *Equimultiplicity and blowing up*, Springer, 1988.

[5] R. HÜBL & I. SWANSON – Discrete valuations centered on local domains, *J. Pure Appl. Algebra* **161** (2001), p. 145–166.

[6] C. HUNEKE & I. SWANSON – *Integral closure of ideals, rings, and modules*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 336, Cambridge University Press, 2006.

[7] S. IZUMI – Linear complementary inequalities for orders in analytic geometry (łojasiewicz inequalities and strong approximation theorems), *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku* **926** (1995), p. 30–40.

(2) Il est possible que cette affirmation soit toujours vraie ; pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à EGA IV 7.9 (Cf. [**2**]).

[8] Q. LIU – *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford University Press, 2002.

[9] M. NAGATA – *Local rings*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 13, John Wiley & Sons New York-London, 1962.

[10] D. REES – Izumi's theorem, in *Commutative algebra (Berkeley, CA, 1987)*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 15, Springer, 1989, p. 407–416.

[11] M. SPIVAKOVSKY – Valuations in function fields of surfaces, *Amer. J. Math.* **112** (1990), p. 107–156.

[12] B. TEISSIER – Valuations, deformations and toric geometry, prépublication.

[13] M. VAQUIÉ – Valuations, in *Resolution of singularities (Obergurgl, 1997)*, Progr. Math., vol. 181, Birkhäuser, 2000, p. 539–590.

C. BEDDANI, Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse III, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse, France • *E-mail :* beddani@picard.ups-tlse.fr