Astérisque

LAURENT BERGER

Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés

Astérisque, tome 319 (2008), p. 13-38

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__13_0>

Astérisque
319, 2008, p. 13–38

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES ET (φ, N)-MODULES FILTRÉS

par

Laurent Berger

Résumé. — L'objet de cet article est de montrer que les deux catégories suivantes sont équivalentes (1) la catégorie des (φ, N, G_K)-modules filtrés (2) la catégorie des (φ, Γ_K)-modules sur l'anneau de Robba tels que l'algèbre de Lie de Γ_K agit localement trivialement.

De plus, on montre que sous cette équivalence, les (φ, N, G_K)-modules filtrés admissibles correspondent aux (φ, Γ_K)-modules étales, ce qui nous permet de donner une nouvelle démonstration du théorème de Colmez-Fontaine.

***Abstract* (p-adic differential equations and filtered (φ, N)-modules).** — The goal of this article is to show that the following two categories are equivalent (1) the category of filtered (φ, N, G_K)-modules (2) the category of (φ, Γ_K)-modules over the Robba ring such that the Lie algebra of Γ_K acts locally trivially.

Furthermore, we show that under this equivalence, the admissible filtered (φ, N, G_K)-modules correspond to the étale (φ, Γ_K)-modules, which gives a new proof of Colmez-Fontaine's theorem.

Introduction

Dans tout cet article, K est un corps local qui contient $\mathbf{Q}_p$ et qui est muni d'une valuation discrète étendant la valuation p-adique et pour laquelle K est complet et de corps résiduel parfait k_K. Pour $n \leqslant \infty$, on pose $K_n = K(\mu_{p^n})$ et $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$.

(φ, N, G_K)-modules filtrés et (φ, Γ_K)-modules. — L'objet de cet article est de construire une équivalence de catégories entre deux catégories utilisées dans la théorie des représentations p-adiques et des équations différentielles p-adiques (on se reportera au chapitre I pour des rappels sur ces catégories). Il s'agit de :

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F80, 12H25, 13K05, 14F30.
Mots clefs. — Représentations p-adiques, (φ, N)-modules filtrés, équations différentielles p-adiques, (φ, Γ)-modules.

1. la catégorie des (φ, N, G_K)-modules filtrés, dont la sous-catégorie des objets admissibles paramétrise les représentations p-adiques potentiellement semi-stables du groupe de Galois absolu G_K du corps K ;
2. la catégorie des (φ, Γ_K)-modules sur l'anneau de Robba tels que l'algèbre de Lie de Γ_K agit localement trivialement, qui généralise la notion d'équation différentielle p-adique munie d'une structure de Frobenius.

On construit un foncteur $D \mapsto \mathscr{M}(D)$ qui à un (φ, N, G_K)-module filtré D associe un (φ, Γ_K)-module $\mathscr{M}(D)$ sur l'anneau de Robba $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ et le résultat principal de cet article est le suivant :

Théorème A. — *Le $\otimes$-foncteur exact $D \mapsto \mathscr{M}(D)$, de la catégorie des (φ, N, G_K)-modules filtrés, dans la catégorie des (φ, Γ_K)-modules sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ dont la connexion associée est localement triviale, est une équivalence de catégories.*

Étant donné un (φ, N, G_K)-module filtré D, le (φ, Γ_K)-module $\mathscr{M}(D)$ admet (par le théorème [**19**, théorème 6.10] de Kedlaya) une filtration canonique par les « pentes de Frobenius ». Nous calculons ces pentes en terme des invariants t_H et t_N de D et de ses sous-objets. Comme corollaire de ces calculs, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème B. — *Le (φ, N, G_K)-module filtré D est admissible si et seulement si $\mathscr{M}(D)$ est étale.*

Application aux représentations p-adiques. — Comme application du théorème B, on obtient une nouvelle démonstration du théorème [**12**, théorème A] de Colmez-Fontaine :

Théorème. — *Si D est un (φ, N, G_K)-module filtré admissible, alors il existe une représentation p-adique V potentiellement semi-stable telle que $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) = D$.*

Enfin, les constructions précédentes nous permettent de préciser les liens entre les divers invariants que l'on peut associer à une représentation p-adique potentiellement semi-stable V (qui devient semi-stable sur une extension galoisienne finie L de K). Ces invariants sont :

1. le $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_L}$;
2. l'équation différentielle p-adique $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$;
3. le (φ, Γ_K)-module étale sur l'anneau de Robba $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$.

À l'équation différentielle p-adique $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$, on associe (cf définition III.2.2) son espace $\mathrm{Sol}_L(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V))$ de G_L-solutions, qui est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module, et on montre dans le théorème III.2.3 comment la donnée de $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ détermine une filtration sur $\mathrm{Sol}_L(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V))$, ce qui en fait un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré. On a alors (les notations restantes sont définies dans le corps du texte) :

Théorème C. — *Si V est une représentation p-adique de G_K semi-stable quand on la restreint à G_L, alors :*

1. $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = \mathrm{Sol}_L(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V))$;
2. $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathscr{M}(\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))$;
3. $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{L_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))^{\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty),N=0}$.

Ces identifications sont compatibles à toutes les structures en présence.

Cela permet notamment de « retrouver la filtration » sur $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ quand on le construit à partir de $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ (cf [**9**, proposition 5.6] pour une construction similaire).

Enfin, nous montrons comment reconstruire, pour une représentation semi-stable V, le (φ, Γ_K)-module $\mathbf{D}^{\dagger}(V)$ sur $\mathbf{B}^{\dagger}_K$ à partir de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ (comme dans [**10**, §4.3.1]).

Théorème D. — *Si V est une représentation semi-stable de G_K et si*
- *$\{e_i\}_{i=1\cdots d}$ est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ adaptée à la décomposition par les pentes de Frobenius ;*
- *$N(e_i) = \sum_{j=1}^{d} n_{j,i} e_j$;*
- *$\{f_j\}_{j=1\cdots d}$ est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ adaptée à la filtration et $\varphi^{-n}(e_i) = \sum_{j=1}^{d} p_{j,i}^{(n)} f_j$,*

alors $x = \sum_{i=1}^{d} x_i(X) \otimes e_i \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X, 1/t] \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ appartient à $\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$ si et seulement si :

1. *$N(x_j) + \sum_{i=1}^{d} n_{j,i} x_i = 0$ pour $j = 1 \cdots d$;*
2. *$\sum_{i=1}^{d} \iota_n(x_i) p_{j,i}^{(n)} \in t^{-t_H(f_j)} K_n[\![t]\!]$ pour $j = 1 \cdots d$ et $n \geqslant n(r)$;*
3. *$\mathrm{ord}(x_i) \leqslant -\mathrm{pente}(e_i)$ pour $i = 1 \cdots d$.*

Ceci permet de construire « explicitement » les éléments de $\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$ ce qui a des applications directes à la correspondance de Langlands p-adique.

Remerciements : Je remercie Pierre Colmez, Jean-Marc Fontaine et Kiran Kedlaya pour des discussions éclairantes sur certains points de cet article ainsi que Francesco Baldassarri et le referee pour leurs commentaires sur une première version.

I. Rappels et compléments

Dans tout cet article, K est un corps local qui contient $\mathbf{Q}_p$ et qui est muni d'une valuation discrète étendant la valuation p-adique et pour laquelle K est complet et de corps résiduel parfait k_K.

On écrit $\mu_{p^n} \subset \overline{K}$ (la clôture algébrique de K) pour désigner l'ensemble des racines p^n-ièmes de l'unité, et pour $n \geqslant 1$, on définit $K_n = K(\mu_{p^n})$ ainsi que $K_\infty = \cup_{n=1}^{+\infty} K_n$. Si $n = 0$, on pose $K_0 = W(k_K)[1/p]$ ce qui fait que K/K_0 est totalement ramifiée. Les notations ne sont donc pas vraiment compatibles, mais elles sont usuelles. Finalement, K_0' désigne l'extension maximale non-ramifiée de K_0 contenue dans K_∞.

Soient $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ le noyau du caractère cyclotomique $\chi : G_K \to \mathbf{Z}_p^*$ et $\Gamma_K = G_K/H_K$ le groupe de Galois de K_∞/K, qui s'identifie via le caractère cyclotomique à un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^*$. On note $\sigma : \widehat{K}_0^{\mathrm{nr}} \to \widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$ le Frobenius absolu (qui relève $x \mapsto x^p$ sur k_K^{sep}).

I.1. Les $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés. — Le corps L désigne une extension galoisienne finie de K, et $G_{L/K}$ le groupe de Galois de L/K. La catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés et sa sous-catégorie pleine de $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés admissibles sont étudiées en détail dans [**15**, §4]. Nous nous contentons donc de rappeler les définitions et quelques résultats dont nous aurons besoin par la suite.

Un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module est un L_0-espace vectoriel D de dimension finie et muni d'une application σ-semi-linéaire bijective $\varphi : D \to D$, d'une application linéaire $N : D \to D$ qui vérifie $N\varphi = p\varphi N$ et d'une action semi-linéaire de $G_{L/K}$ qui commute à φ et N. Si $L = K$, on parle tout simplement de (φ, N)-module (relatif à K).

Un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré est la donnée d'un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module D et d'une filtration décroissante exhaustive et separée $\mathrm{Fil}^i D_L$ sur $D_L = L \otimes_{L_0} D$, par des sous L-espaces vectoriels stables par $G_{L/K}$. Il est équivalent de se donner une filtration sur $D_K = D_L^{G_{L/K}}$.

La catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés est une catégorie additive $\mathbf{Q}_p$-linéaire qui admet des noyaux et des conoyaux (mais qui n'est pas abélienne), ainsi que des produits tensoriels et des Hom internes.

Par abus de langage, on dira que D est un (φ, N, G_K)-module filtré s'il existe une extension finie galoisienne L/K telle que D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré.

Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré de dimension 1, on définit $t_H(D)$ comme le plus grand entier i tel que $\mathrm{Fil}^i D_L \neq 0$ et si $\varphi(d) = \lambda d$ avec $d \in D$, alors $v_p(\lambda)$ ne dépend pas du choix de $d \neq 0$ et on définit $t_N(D) = v_p(\lambda)$. Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré de dimension $\geqslant 1$, on définit $t_H(D) = t_H(\det D)$ et $t_N(D) = t_N(\det D)$. Si $e \in D_L$, on pose $t_H(e) = t_H(L \cdot e)$.

On dit qu'un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré D est admissible si $t_H(D) = t_N(D)$ et si pour tout sous-objet D' de D, on a $t_N(D') - t_H(D') \geqslant 0$. La catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés admissibles est une sous-catégorie pleine de la catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés et elle est de plus abélienne.

Rappelons que la principale source de $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés admissibles est la suivante : si V est une représentation p-adique de G_K dont la restriction à G_L est semi-stable, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré admissible.

I.2. L'anneau de Robba. — Définissons ici quelques anneaux de séries formelles (ces constructions sont faites en détail dans [**11**]). Si r est un réel positif et $F = K_0$ (pour alléger un peu les notations), soit $\mathbf{B}_F^{\dagger,r}$ l'anneau des séries formelles $f(X) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k X^k$ où $\{a_k \in F\}_{k \in \mathbf{Z}}$ est une suite bornée telle que $f(X)$ converge sur la couronne $0 < v_p(X) \leqslant 1/r$. Cet anneau est muni d'une action de Γ_F, qui est triviale sur les coefficients et donnée par $\gamma(X) = (1 + X)^{\chi(\gamma)} - 1$ et on peut définir un Frobenius $\varphi : \mathbf{B}_F^{\dagger,r} \to \mathbf{B}_F^{\dagger,pr}$ qui est σ-semi-linéaire sur les coefficients et tel que $\varphi(X) = (1 + X)^p - 1$. Le « théorème de préparation de Weierstrass » montre que

$\mathbf{B}_F^\dagger = \cup_{r\geqslant 0}\mathbf{B}_F^{\dagger,r}$ est un corps. Ce corps n'est pas complet pour la norme de Gauss et on appelle $\mathbf{B}_F$ son complété qui est un corps local de dimension 2 dont le corps résiduel s'identifie à $k_K(\!(\overline{X})\!)$.

On pose aussi $F_n = F(\mu_{p^n})$ ainsi que $F_\infty = \cup_{n=1}^{+\infty} F_n$ ce qui fait que l'extension K_∞/F_∞ est une extension finie de degré de ramification $e_K \leqslant [K_\infty : F_\infty]$ et par la théorie du corps de normes de [**18, 23**] il lui correspond une extension séparable $k'_K(\!(\overline{X}_K)\!)/k_K(\!(\overline{X})\!)$ de degré $[K_\infty : F_\infty]$ qui nous permet de définir des extensions non-ramifiées $\mathbf{B}_K/\mathbf{B}_F$ et $\mathbf{B}_K^\dagger/\mathbf{B}_F^\dagger$ de degré $[K_\infty : F_\infty]$. On peut montrer que $\mathbf{B}_K^\dagger = \cup_{r\geqslant 0}\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ et qu'il existe $r_0(K)$ tel que si $r \geqslant r_0(K)$, alors $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ est un $\mathbf{B}_F^{\dagger,r}$-module libre de rang $[K_\infty : F_\infty]$ qui s'identifie à un anneau de séries formelles $f(X_K) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k X_K^k$ où $\{a_k \in K'_0\}_{k\in\mathbf{Z}}$ est une suite bornée telle que $f(X_K)$ converge sur la couronne $0 < v_p(X_K) \leqslant 1/e_K r$. L'élément $\overline{X}_K$ vérifie une équation d'Eisenstein sur $k'_K(\!(\overline{X})\!)$ qu'on peut relever en une équation sur $\mathbf{B}_{K'_0}^{\dagger,r}$; l'action de Γ_K s'étend naturellement à $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ de même que le Frobenius $\varphi : \mathbf{B}_K^{\dagger,r} \to \mathbf{B}_K^{\dagger,pr}$.

L'anneau $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ s'identifiant à un anneau de séries formelles convergeant sur une couronne, il est naturellement muni d'une topologie de Fréchet, la topologie de la « convergence compacte » sur les couronnes $C_K[r;s] = \{z \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p},\ 1/e_K s \leqslant v_p(z) \leqslant 1/e_K r\}$ pour $s \geqslant r$, et son complété $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ pour cette topologie s'identifie à l'anneau de séries formelles $f(X_K) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k X_K^k$ où $\{a_k \in K'_0\}_{k\in\mathbf{Z}}$ est une suite non nécessairement bornée telle que $f(X_K)$ converge sur la couronne $0 < v_p(X_K) \leqslant 1/e_K r$. Par exemple, si on pose $t = \log(1+X)$, alors $t \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^{\dagger,r} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ pour tout $r \geqslant 0$. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger = \cup_{r\geqslant 0}\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ est « l'anneau de Robba ». Nous allons rappeler quelques-uns des résultats de [**2**, §4] qui nous seront utiles dans la suite.

Il existe $r(K)$ que l'on peut supposer $\geqslant r_0(K)$ tel que si $p^{n-1}(p-1) \geqslant r \geqslant r(K)$, alors on a une application injective $\iota_n : \mathbf{B}_K^{\dagger,r} \to K_n[\![t]\!]$ (c'est l'application φ^{-n} de [**6**, §III.2]). Par exemple si $K = K_0$, alors $\iota_n(X) = \varepsilon^{(n)}\exp(t/p^n) - 1$ où $\varepsilon^{(n)}$ est une racine primitive p^n-ième de 1 et ι_n agit par σ^{-n} sur les coefficients. On définit $n(r)$ comme étant le plus petit entier n tel que $p^{n-1}(p-1) \geqslant r$ ce qui fait que $\iota_n : \mathbf{B}_K^{\dagger,r} \to K_n[\![t]\!]$ est définie dès que $n \geqslant n(r)$.

L'application ι_n se prolonge en une application injective $\iota_n : \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r} \to K_n[\![t]\!]$. Le groupe Γ_K est un groupe de Lie de dimension 1 qui agit sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ et l'algèbre de Lie de Γ_K agit aussi sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$, cette action étant donnée par $\nabla(f) = \log(\gamma)(f)/\log_p(\chi(\gamma))$ pour $\gamma \in \Gamma_K$ assez proche de 1. Si $f = f(X) \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^{\dagger,r}$ alors $\nabla(f(X)) = t(1+X)df/dX$. Si $f \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ alors on pose $\partial(f) = t^{-1}\nabla(f)$ ce qui fait que si $f = f(X) \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^{\dagger,r}$ alors $\partial(f(X)) = (1+X)df/dX$ et que si $f \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger$ vérifie une équation algébrique $P(f) = 0$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},F}^\dagger$ telle que $P'(f) \neq 0$, alors on peut aussi calculer $\partial(f)$ par la formule $\partial(f) = -(\partial P)(f)/P'(f)$. En particulier $\partial(f) = 0$ si et seulement si $f \in K'_0$.

Lemme I.2.1. — *Si $w \geqslant 1$ alors il existe $t_{n,w} \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}$ tel que $\iota_n(t_{n,w}) = 1 \bmod t^w K_n[\![t]\!]$ et $\iota_m(t_{n,w}) \in t^w K_n[\![t]\!]$ si $m \neq n$.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la solution du problème des « parties principales » (voir [**20**, §8]). □

Rappelons que les anneaux $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ et donc aussi $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ sont des anneaux de Bézout, c'est-à-dire que tout idéal de type fini en est principal. Ceci a un certain nombre de conséquences pour lesquelles on se reportera par exemple à [**19**, §2]. Dans la suite, on pose $q = \varphi(X)/X = ((1+X)^p - 1)/X$, ce qui fait que $\iota_n(\varphi^{n-1}(q))$ est une uniformisante de $K_n[\![t]\!]$.

Proposition I.2.2. — *Si I est un idéal principal de $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$, qui divise (t^h) pour $h \geqslant 0$, alors I est engendré par un élément de la forme $\prod_{n=n(r)}^{+\infty}(\varphi^{n-1}(q)/p)^{j_n}$ avec $j_n \leqslant h$.*

Démonstration. — Rappelons que l'on a une décomposition $t = X \cdot \prod_{n=1}^{+\infty}(\varphi^{n-1}(q)/p)$. Le lemme [**2**, lemme 4.9] montre que $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}/\varphi^{n-1}(q) \simeq K_n$ et donc que les idéaux $(\varphi^{n-1}(q))$ sont premiers (et même maximaux) dans $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$. Ceci montre que si x divise t^h, alors x est le produit d'une unité par un élément de la forme $\prod_{n=n(r)}^{+\infty}(\varphi^{n-1}(q)/p)^{j_n}$ et il reste à appliquer cela à un générateur de l'idéal I. □

I.3. Les (φ, Γ_K)-modules sur l'anneau de Robba. — Dans ce paragraphe, nous rappelons la définition des φ-modules et des (φ, Γ_K)-modules sur l'anneau de Robba ainsi que quelques résultats techniques concernant ces objets. Pour des définitions d'ordre plus général, on peut voir [**19**, §2.5]. Un φ-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ est un $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-module $\mathbf{D}$ libre de rang fini (noté d) et muni d'une application φ-semi-linéaire toujours notée $\varphi : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ telle que $\varphi^*(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$ (on note $\varphi^*(\mathbf{D})$ le φ-module engendré par $\varphi(\mathbf{D})$). Un (φ, Γ_K)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ est un φ-module muni en plus d'une action de Γ_K semi-linéaire par rapport à l'action de ce groupe sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ et commutant à φ. On a un résultat de descente galoisienne (voir aussi [**19**, §2.5]) pour les (φ, Γ_K)-modules.

Définition I.3.1. — Si L/K est une extension galoisienne finie, et si $\mathbf{D}$ est un (φ, Γ_L)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}$, on dit que $\mathbf{D}$ est muni d'une action de $G_{L/K}$ si le groupe G_K agit sur $\mathbf{D}$ et si de plus :

1. $H_L \subset G_K$ agit trivialement sur $\mathbf{D}$;
2. l'action de $G_L/H_L \subset G_K/H_L$ induite coïncide avec celle de Γ_L.

La proposition suivante se trouve essentiellement dans [**19**, corollary 2.7] :

Proposition I.3.2. — *Si L/K est une extension galoisienne finie et si $\mathbf{D}$ est un (φ, Γ_L)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}$ muni d'une action de $G_{L/K}$, alors $\mathbf{D}^{H_K}$ est un (φ, Γ_K)-module et $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{H_K}$.*

Démonstration. — L'action de Γ_K sur $\mathbf{D}^{H_K}$ est donnée par l'isomorphisme $\Gamma_K = G_K/H_K$. Le fait que $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{H_K}$ suit de [**19**, lemma 2.6] (par exemple). Montrons que $\varphi^*(\mathbf{D}^{H_K}) = (\mathbf{D}^{H_K})$. Si $x \in \mathbf{D}^{H_K}$, et si $\{y_i\}$ est une base de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}$

contenue dans $\mathbf{D}^{H_K}$, alors on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{d} x_i \varphi(y_i)$ avec $x_i \in \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}$ et comme x et les y_i sont fixes par H_K, on a aussi $x_i \in \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ ce qui fait que $x \in \varphi^*(\mathbf{D}^{H_K})$. □

Le théorème suivant est une variante d'un résultat de Cherbonnier (voir [**4**]).

Théorème I.3.3. — *Si $\mathbf{D}$ est un φ-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ alors il existe $r(\mathbf{D}) \geqslant r(K)$ tel que pour tout $r \geqslant r(\mathbf{D})$, il existe un unique sous $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$-module $\mathbf{D}_r$ de $\mathbf{D}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$ *;*
2. *le $\mathbf{B}^{\dagger,pr}_{\mathrm{rig},K}$-module $\mathbf{B}^{\dagger,pr}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$ a une base contenue dans $\varphi(\mathbf{D}_r)$.*

En particulier, on a $\mathbf{D}_s = \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$ pour tous $s \geqslant r$ et si $\mathbf{D}$ est un (φ, Γ_K)-module, alors $\gamma(\mathbf{D}_r) = \mathbf{D}_r$ pour tout $\gamma \in \Gamma_K$.

Démonstration. — Comme $\mathbf{D}$ est un $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-module libre de rang d, il en existe une base $e_1, \cdots, e_d$. Il existe alors $r = r(\mathbf{D})$ tel que la matrice de φ dans cette base est dans $\mathrm{GL}(d, \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})$ et si l'on pose $\mathbf{D}_r = \oplus_{i=1}^{d} \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} e_i$, alors les deux conditions du théorème sont remplies. Si $\mathbf{D}_r^{(1)}$ et $\mathbf{D}_r^{(2)}$ sont deux $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$-modules satisfaisant les deux conditions ci-dessus, et qu'on en choisit des bases, alors la matrice M de passage d'une base à l'autre et les matrices P_1 et P_2 de φ dans ces deux bases vont satisfaire la relation $\varphi(M) = P_1^{-1} M P_2$ avec P_1 et $P_2 \in \mathrm{GL}(d, \mathbf{B}^{\dagger,pr}_{\mathrm{rig},K})$ ce qui implique que $M \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})$. En effet, si $M \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K})$ avec $s > pr$, alors $P_1^{-1} M P_2$ et donc $\varphi(M)$ est dans $\mathrm{M}(d, \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K})$. Mais $\varphi(\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}) \cap \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K} = \varphi(\mathbf{B}^{\dagger,s/p}_{\mathrm{rig},K})$ ce qui fait que si $s > pr$, alors on peut remplacer s par s/p et donc finalement que $M \in \mathrm{M}(d, \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})$. Comme on peut en dire autant de M^{-1}, c'est que $M \in \mathrm{GL}(d, \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})$ et donc finalement que $\mathbf{D}_r^{(1)} = \mathbf{D}_r^{(2)}$. □

Étant donné un φ-module $\mathbf{D}$ sur l'anneau de Robba, et $n \geqslant n(r)$ avec $r \geqslant r(\mathbf{D})$, l'application $\iota_n : \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K} \to K_n[\![t]\!]$ donne une structure de $\iota_n(\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})$-module à $K_n[\![t]\!]$ et la formule $\iota_n(\lambda) \cdot x = \lambda x$ donne une structure de $\iota_n(\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})$-module à $\mathbf{D}_r$ que l'on note alors $\iota_n(\mathbf{D}_r)$, ce qui nous permet de définir $K_n[\![t]\!] \otimes_{\iota_n(\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})} \iota_n(\mathbf{D}_r)$. Pour alléger les notations, on écrit plutôt : $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$.

Proposition I.3.4. — *Si $\mathbf{D}$ est un φ-module de rang d sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ et si $\mathbf{D}^{(1)}$ et $\mathbf{D}^{(2)}$ sont deux sous-$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-modules libres de rang d et stables par φ de $\mathbf{D}[1/t] = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}$ tels que :*

1. $\mathbf{D}^{(i)}[1/t] = \mathbf{D}[1/t]$ *si* $i = 1, 2$ *;*
2. $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r^{(1)} = K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r^{(2)}$ *pour tout* $n \gg 0$,

alors $\mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{D}^{(2)}$.

Démonstration. — Comme $\mathbf{D}^{(1)}[1/t] = \mathbf{D}^{(2)}[1/t]$, il existe $h \geqslant 0$ tel que $t^h\mathbf{D}^{(2)} \subset \mathbf{D}^{(1)}$. Choisissons r tel que $r \geqslant \max(r(\mathbf{D}^{(1)}), r(\mathbf{D}^{(2)}))$ et tel qu'en plus :

$$K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{(1)}_r = K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{(2)}_r$$

pour tout $n \geqslant n(r)$. Les diviseurs élémentaires de $t^h\mathbf{D}^{(2)} \subset \mathbf{D}^{(1)}$ sont des idéaux de $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ qui divisent t^h et donc de la forme $(\prod_{n\geqslant n(r)} \varphi^{n-1}(q^{\beta_{n,i}}))$ pour $i = 1,\ldots,d$ par la proposition I.2.2. Comme le calcul des diviseurs élémentaires commute à la localisation, on voit que ceux de l'inclusion $t^h K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{(2)}_r \subset K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{(1)}_r$ sont donnés par les idéaux $(t^{\beta_{n,i}})$ ce qui fait que $\beta_{n,i} = h$ pour tous n, i et donc finalement que $\mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{D}^{(2)}$. □

II. Construction de (φ, Γ_K)-modules

L'objet de ce chapitre est de montrer comment construire un φ-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$, c'est-à-dire un objet « global », à partir de conditions locales. Comme application, on donne la construction d'un (φ, Γ_K)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ à partir d'un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré.

II.1. Recollement de réseaux locaux. — Si $\mathbf{D}$ est un φ-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ alors on a une application naturelle :

$$\varphi_n : K_{n+1}(\!(t)\!) \otimes_{K_n(\!(t)\!)} \left[K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r\right] \longrightarrow K_{n+1}(\!(t)\!) \otimes^{\iota_{n+1}}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$$

définie par $\varphi_n[f(t) \otimes (g(t) \otimes \iota_n(x))] = f(t)g(t) \otimes \iota_{n+1}(\varphi(x))$ en utilisant le fait que $\varphi(\mathbf{D}_r) \subset \mathbf{B}^{\dagger,pr}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$, que $\iota_{n+1}(\mathbf{B}^{\dagger,pr}_{\mathrm{rig},K}) \subset K_{n+1}[\![t]\!]$ et que $\iota_{n+1}(\varphi(\lambda)) = \iota_n(\lambda)$ si $\lambda \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$.

Définition II.1.1. — Si $\mathbf{D}$ est un φ-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ et si $r \geqslant r(\mathbf{D})$ et $\{M_n\}_{n\geqslant n(r)}$ est une suite de $K_n[\![t]\!]$-réseaux de $K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$, alors on dit que $\{M_n\}$ est une suite φ-compatible si $\varphi_n(K_{n+1}[\![t]\!] \otimes_{K_n[\![t]\!]} M_n) = M_{n+1}$.

On vérifie sans mal que la donnée d'un sous-φ-module $\mathbf{M}$ de rang maximal d'un φ-module $\mathbf{D}$ détermine une suite φ-compatible de $K_n[\![t]\!]$-réseaux de $K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$ en posant $M_n = K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r$. Le théorème suivant donne la réciproque de cette construction.

Théorème II.1.2. — *Si $\mathbf{D}$ est un φ-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ et si $\{M_n\}_{n\geqslant n(r)}$ est une suite φ-compatible de réseaux de $K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$, alors il existe un unique sous φ-module $\mathbf{M}$ de $\mathbf{D}[1/t]$ tel que $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r = M_n$ pour tout $n \geqslant n(r)$. Enfin, on a $\mathbf{M}[1/t] = \mathbf{D}[1/t]$.*

Si $\mathbf{D}$ est un (φ, Γ_K)-module et si les M_n sont stables sous l'action induite de Γ_K, alors $\mathbf{M}$ est lui aussi un (φ, Γ_K)-module.

L'unicité de $\mathbf{M}$ résulte immédiatement de la proposition I.3.4 et le reste de ce paragraphe est consacré à la démonstration de l'existence d'un tel $\mathbf{M}$.

Lemme II.1.3. — *Il existe un entier $h \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n(r)$ on ait :*

$$t^h K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r \subset M_n \subset t^{-h} K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r.$$

Démonstration. — Comme $M_{n(r)}$ est un réseau de $K_{n(r)}(\!(t)\!) \otimes^{\iota_{n(r)}}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$, il existe h tel que l'inclusion ci-dessus est vraie pour $n = n(r)$. Le fait que :

$$\varphi_n(K_{n+1}[\![t]\!] \otimes_{K_n[\![t]\!]} K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r) = K_{n+1}[\![t]\!] \otimes^{\iota_{n+1}}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$$

et que $\varphi_n(K_{n+1}[\![t]\!] \otimes_{K_n[\![t]\!]} M_n) = M_{n+1}$ montrent que si l'inclusion est vraie pour n elle est aussi vraie pour $n+1$, ce qui montre le lemme par récurrence. □

Lemme II.1.4. — *Si on pose $\mathbf{M}_r = \{x \in t^{-h}\mathbf{D}_r$ tels que $\iota_n(x) \in M_n$ pour tout $n \geqslant n(r)\}$, alors $\mathbf{M}_r$ est un $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$-module libre de rang d.*

Démonstration. — Comme les applications $\iota_n : t^{-h}\mathbf{D}_r \to M_n[1/t]$ sont continues, $\mathbf{M}_r$ est fermé dans $t^{-h}\mathbf{D}_r$. D'autre part, le lemme II.1.3 montre que $t^h\mathbf{D}_r \subset \mathbf{M}_r$ et le théorème de Forster (cf [**2**, théorème 4.10] pour une démonstration) montre alors que $\mathbf{M}_r$ est un $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$-module libre de rang d. □

Lemme II.1.5. — *On a $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r = M_n$ pour tout $n \geqslant n(r)$.*

Démonstration. — Comme $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r$ et M_n sont complets pour la topologie t-adique, il suffit de montrer que l'application naturelle $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r \to M_n/t^h M_n$ est surjective pour tout n. Si $x \in M_n$, alors le lemme II.1.3 montre qu'il existe $y \in t^{-h}\mathbf{D}_r$ tel que $\iota_n(y) - x \in t^h M_n$. Le lemme I.2.1 appliqué à $w = 3h$ nous donne un élément $t_{n,3h}$ et on pose $z = t_{n,3h} y$ ce qui fait que :

$$\iota_n(z) - \iota_n(y) \in t^{2h} K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r \subset t^h M_n$$

tandis que si $m \neq n$ alors :

$$\iota_m(z) \in t^{2h} K_m[\![t]\!] \otimes^{\iota_m}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r \subset t^h M_m \subset M_m$$

ce qui fait finalement que $z \in \mathbf{M}_r$ et on trouve bien que l'application naturelle :

$$K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r \to M_n/t^h M_n$$

est surjective. □

Démonstration du théorème II.1.2. — Les deux lemmes précédents montrent que si l'on pose $\mathbf{M}_r = \{x \in t^{-h}\mathbf{D}_r$ tels que $\iota_n(x) \in M_n$ pour tout $n \geqslant n(r)\}$, alors $\mathbf{M}_r$ est un $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$-module libre de rang d et $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r = M_n$ pour tout $n \geqslant n(r)$ et qu'on peut donc poser $\mathbf{M} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r$. Le fait que la suite de réseaux $\{M_n\}$

est φ-compatible montre que $\varphi^*(\mathbf{M}) \subset \mathbf{M}$ et que $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \varphi^*(\mathbf{M})_{pr} = M_n$ pour tout $n \geqslant n(pr)$ et la proposition I.3.4 appliquée à $\mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{M}$ et $\mathbf{D}^{(2)} = \varphi^*(\mathbf{M})$ montre alors qu'en fait $\varphi^*(\mathbf{M}) = \mathbf{M}$. Enfin le fait que $\mathbf{M}[1/t] = \mathbf{D}[1/t]$ suit immédiatement du lemme II.1.4.

L'assertion quant à l'action éventuelle de Γ_K est évidente. □

II.2. Des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés aux (φ, Γ_K)-modules. — Soit ℓ_X une variable ; on prolonge les actions de φ et de Γ_K à $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X]$ par les formules suivantes : $\varphi(\ell_X) = p\ell_X + \log(\varphi(X)/X^p)$ et $\gamma(\ell_X) = \ell_X + \log(\gamma(X)/X)$. Bien sûr, il faut penser à ℓ_X comme à « $\log(X)$ ». On définit alors un opérateur de monodromie N sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X]$ par la formule $N(\ell_X) = -p/(p-1)$ et on prolonge l'application ι_n à $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X]$ par $\iota_n(\ell_X) = \log(\varepsilon^{(n)} \exp(t/p^n) - 1) \in K_n[\![t]\!]$.

Si D est un (φ, N)-module filtré (relatif à K), on pose $\mathbf{D} = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X] \otimes_{K_0} D)^{N=0}$. On montre facilement que :

$$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X] \otimes_{K_0} D,$$

et cela implique en particulier que $\mathbf{D}$ est un φ-module. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a $K_0 = \varphi^{-n}(K_0) \subset K$ ce qui nous donne une structure de $\varphi^{-n}(K_0)$-module sur K et sur D que l'on note alors $\iota_n(D)$ et nous écrivons $K \otimes^{\iota_n}_{K_0} D$ au lieu de $K \otimes_{\varphi^{-n}(K_0)} \iota_n(D)$ pour alléger les notations ; l'application $\xi_n : K \otimes_{K_0} D \to K \otimes^{\iota_n}_{K_0} D$ qui envoie $\mu \otimes x$ sur $\mu \otimes \iota_n(\varphi^n(x))$ est un alors isomorphisme (rappelons que $\iota_n = \varphi^{-n}$) que l'on utilise pour définir une filtration sur $D^n_K = K \otimes^{\iota_n}_{K_0} D$. On définit une filtration sur $K_n(\!(t)\!)$ par la formule $\mathrm{Fil}^i K_n(\!(t)\!) = t^i K_n[\![t]\!]$ ce qui nous donne une filtration sur $K_n(\!(t)\!) \otimes_K D^n_K$, et on pose $M_n(D) = \mathrm{Fil}^0(K_n(\!(t)\!) \otimes_K D^n_K)$. Le foncteur $D \mapsto M_n(D)$ est alors un $\otimes$-foncteur exact.

De plus, en utilisant l'application $\iota_n : \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X] \to K_n[\![t]\!]$ et le fait que :

$$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X] \otimes_{K_0} D,$$

on trouve que :

$$K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r = K_n(\!(t)\!) \otimes_K D^n_K$$

et donc que $M_n(D)$ est un réseau de $K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$.

Proposition II.2.1. — *La famille de réseaux $\{M_n\}$ de $K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$ définie par $M_n(D) = \mathrm{Fil}^0(K_n(\!(t)\!) \otimes_K D^n_K)$ est φ-compatible.*

Démonstration. — Le $K_n[\![t]\!]$-module $M_n(D) = \mathrm{Fil}^0(K_n(\!(t)\!) \otimes_K D^n_K)$ est libre de rang d, engendré par une base de la forme $t^{-h_i} \otimes \xi_n(e_i)$ où $\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant d}$ est une base de D_K adaptée à la filtration et $h_i = t_H(e_i)$, ce qui fait que $M_{n+1}(D) = \varphi_n(K_{n+1}[\![t]\!] \otimes_{K_n[\![t]\!]} M_n(D))$ puisque $\xi_{n+1} = \varphi_n \circ \xi_n$ sur D_K. □

Définition II.2.2. — Si D est un (φ, N)-module filtré relatif à K, soit $\mathscr{M}(D)$ le (φ, Γ_K)-module fourni par le théorème II.1.2 à partir des réseaux :

$$M_n(D) = \mathrm{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K^n)$$

pour le (φ, Γ_K)-module $\mathbf{D} = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X] \otimes_F D)^{N=0}$.

Proposition II.2.3. — *Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré et D' est le (φ, N)-module filtré relatif à L qu'on en déduit (par oubli de l'action de $G_{L/K}$), alors $\mathscr{M}(D')$ est un (φ, Γ_L)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},L}$ muni d'une action de $G_{L/K}$ (cf définition I.3.1).*

Démonstration. — Vérification immédiate. □

Définition II.2.4. — Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré, alors on définit $\mathscr{M}(D) = \mathscr{M}(D')^{H_K}$.

Rappelons (cf [**15**, 4.3.2]) que par définition on a une filtration $\mathrm{Fil}^i D_L$ sur $D_L = L \otimes_{L_0} D$ et que si $\mathrm{Fil}^i D_K$ est la filtration induite sur $D_K = K \otimes_{K_0} D$, alors $\mathrm{Fil}^i D_L = L \otimes_K \mathrm{Fil}^i D_K$. On a construit au début du paragraphe un isomorphisme $G_{L/K}$-équivariant $D_L \to D_L^n$ que l'on utilise pour définir $D_K^n = (D_L^n)^{G_{L/K}}$ ce qui fait que $D_L^n = L \otimes_K D_K^n$.

Proposition II.2.5. — *Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré, et si on pose $M_n(D_K) = \mathrm{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K^n)$, alors $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D)_r = M_n(D_K)$ pour tout $n \geqslant n(r)$.*

Démonstration. — Par construction, $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D)_r \subset \mathrm{Fil}^0(L_n((t)) \otimes_L D_L^n)^{H_K}$. Ce que l'on a rappelé ci-dessus montre que $\mathrm{Fil}^0(L_n((t)) \otimes_L D_L^n)^{H_K} = \mathrm{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K^n)$ et donc $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D)_r \subset M_n(D_K)$.

Si $x \in M_n(D_K)$, alors $x \in L_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},L}} \mathscr{M}(D')_r = L_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D)_r$. Finalement, comme x est fixé par H_K, on a $x \in (L_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D)_r)^{H_K} = K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D)_r$ ce qui montre que l'application $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D)_r \to M_n(D_K)$ est un isomorphisme. □

Théorème II.2.6. — *Le foncteur $D \mapsto \mathscr{M}(D)$ est un $\otimes$-foncteur exact de la catégorie des (φ, N, G_K)-modules filtrés dans la catégorie des (φ, Γ_K)-modules sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ et le rang de $\mathscr{M}(D)$ est égal à la dimension de D.*

Démonstration. — Si l'on a une suite exacte $0 \to D_1 \to D_2 \to D_3 \to 0$, alors montrons que $\mathscr{M}(D_2) \to \mathscr{M}(D_3)$ est surjectif. Comme on l'a dit plus haut, les foncteurs $D \mapsto M_n(D)$ sont des $\otimes$-foncteurs exacts. Comme $M_n(D_2) \to M_n(D_3)$ est surjectif pour tout n, l'image $\mathbf{M}$ de $\mathscr{M}(D_2)$ dans $\mathscr{M}(D_3)$ vérifie la condition que $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r = M_n(D_3)$ du théorème II.1.2 pour $D = D_3$ et par unicité, on a donc que l'image de $\mathscr{M}(D_2)$ dans $\mathscr{M}(D_3)$ est $\mathscr{M}(D_3)$ tout entier, ce qui fait que $\mathscr{M}(D_2) \to \mathscr{M}(D_3)$ est bien surjectif. La vérification du fait que $\mathscr{M}(D_1 \otimes D_2) = \mathscr{M}(D_1) \otimes \mathscr{M}(D_2)$ et celle des autres conditions sont similaires. □

Dans le chapitre suivant, nous allons déterminer l'image essentielle du foncteur $D \mapsto \mathscr{M}(D)$ et montrer que ce foncteur est une équivalence de catégories sur son image essentielle.

III. Construction de (φ, N, G_K)-modules filtrés

L'objet de ce chapitre est de montrer comment on peut associer à certains (φ, Γ_K)-modules sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ un (φ, N, G_K)-module filtré. Cette construction est un inverse de celle du chapitre précédent.

III.1. L'algèbre de Lie de Γ_K. — Le groupe Γ_K s'identifie, via le caractère cyclotomique, à un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^*$, et c'est donc un groupe de Lie p-adique de dimension 1. Son algèbre de Lie : $\mathrm{Lie}(\Gamma_K)$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de rang 1 dont une base est donnée par l'opérateur $\log(\gamma)/\log_p \chi(\gamma)$ qui ne dépend pas du choix de $\gamma \in \Gamma_K$.

Proposition III.1.1. — *Si $\mathbf{D}$ est un (φ, Γ_K)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ alors l'algèbre de Lie de Γ_K agit par un opérateur différentiel $\nabla_{\mathbf{D}} : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ qui commute à φ et à l'action de Γ_K et qui vérifie $\nabla_{\mathbf{D}}(\lambda x) = \nabla(\lambda)x + \lambda \nabla_{\mathbf{D}}(x)$.*

Démonstration. — La démonstration est semblable à celle de [**2**, lemme 5.2] et du paragraphe qui la suit. Soit $V_{[r;s]}$ la valuation sup sur la couronne $C_K[r;s]$. La topologie de $\mathbf{D}_r$ est la topologie de Fréchet définie par l'ensemble $\{V_{[r;s]}\}_{s \geqslant r}$. Fixons $s \geqslant r$; l'action de Γ_K sur $\mathbf{D}_r$ est continue, et il existe donc un sous-groupe ouvert $\Gamma_s \subset \Gamma_K$ tel que $V_{[r;s]}((1-\gamma)x) \geqslant V_{[r;s]}(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbf{D}_r$ et $\gamma \in \Gamma_s$. La série d'opérateurs :

$$-\frac{1}{\log_p \chi(\gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\gamma)^n}{n}$$

converge alors vers un opérateur continu $\nabla_{\mathbf{D},s}$ de $\mathbf{D}_r$ vers sa complétion pour $V_{[r;s]}$, qui ne dépend pas du choix de $\gamma \in \Gamma_s$. Ces opérateurs $\nabla_{\mathbf{D},s}$ se recollent en un opérateur $\nabla_{\mathbf{D}} : \mathbf{D}_r \to \mathbf{D}_r$ qui est continu pour la topologie de Fréchet.

Enfin le fait que $\nabla_{\mathbf{D}}(\lambda x) = \nabla(\lambda)x + \lambda \nabla_{\mathbf{D}}(x)$ résulte par passage à la limite du fait que :

$$(1-\gamma)(\lambda \cdot x) = (1-\gamma)(\lambda) \cdot x + \lambda \cdot (1-\gamma)(x) - (1-\gamma)(\lambda) \cdot (1-\gamma)(x). \qquad \square$$

Définition III.1.2. — On dit que l'opérateur $\nabla_{\mathbf{D}}$ est localement trivial sur un (φ, Γ_K)-module $\mathbf{D}$ s'il existe r tel que :

$$K_{n(r)}(\!(t)\!) \otimes^{\iota_{n(r)}}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r = K_{n(r)}(\!(t)\!) \otimes_{K_{n(r)}} \left(K_{n(r)}(\!(t)\!) \otimes^{\iota_{n(r)}}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r \right)^{\nabla_{\mathbf{D}}=0}.$$

Avant de continuer, faisons quelques rappels sur les modules à connexion. Soit E un corps de caractéristique 0, et M un $E(\!(t)\!)$-espace vectoriel de dimension finie d muni d'une connexion $\nabla_M : M \to M$ qui étend $\nabla : f(t) \mapsto t \cdot df/dt$. Une section horizontale de M est un élément de $M^{\nabla_M=0}$ et un argument classique montre que $\dim_E M^{\nabla_M=0} \leqslant d$.

On dit que la connexion ∇_M est régulière si M possède un $E[\![t]\!]$-réseau M_0 tel que $\nabla_M(M_0) \subset M_0$ et on dit que la connexion ∇_M est triviale si M possède un $E[\![t]\!]$-réseau M_0 tel que $\nabla_M(M_0) \subset tM_0$. Un argument d'approximations successives montre que dans ce dernier cas, $M_0^{\nabla_M=0}$ est un E-espace vectoriel de dimension d et que $M_0 = E[\![t]\!] \otimes_E M_0^{\nabla_M=0}$. On voit donc que la connexion ∇_M est triviale si et seulement si $\dim_E M^{\nabla_M=0} = d$, et que dans ce cas $M_0 = E[\![t]\!] \otimes_E M^{\nabla_M=0}$ est l'unique $E[\![t]\!]$-réseau de M tel que $\nabla_M(M_0) \subset tM_0$.

Lemme III.1.3. — *Si N est un sous-$E(\!(t)\!)$-espace vectoriel de M stable par la connexion ∇_M, et si ∇_M est triviale sur M, alors elle est aussi triviale sur N.*

Démonstration. — Si M_0 est un $E[\![t]\!]$-réseau de M tel que $\nabla_M(M_0) \subset tM_0$, alors $M_0 \cap N$ est un $E[\![t]\!]$-réseau de N et $\nabla_M(M_0 \cap N) \subset t(M_0 \cap N)$ ce qui fait que la connexion ∇_M est triviale sur N. □

La terminologie de la définition III.1.2 est compatible avec ce que l'on vient de rappeler : $\nabla_{\mathbf{D}}$ est localement triviale si et seulement si $\nabla_{\mathbf{D}}$ est triviale sur le $K_{n(r)}(\!(t)\!)$-module à connexion $K_{n(r)}(\!(t)\!) \otimes^{\iota_{n(r)}}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$. En particulier, si $\nabla_{\mathbf{D}}$ est localement triviale sur $\mathbf{D}$ et si $\mathbf{D}'$ est un sous-objet de $\mathbf{D}$, alors $\nabla_{\mathbf{D}}$ est localement triviale sur $\mathbf{D}'$.

Lemme III.1.4. — *Si $\nabla_{\mathbf{D}}$ est localement triviale sur $\mathbf{D}$, alors, $\nabla_{\mathbf{D}}$ est triviale sur $K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$ pour tout $n \geqslant n(r)$.*

Dans ce cas, si D_n est le réseau de $K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$ tel que $\nabla_{\mathbf{D}}(D_n) \subset tD_n$, alors $D_{n+1} = \varphi_n(K_{n+1}[\![t]\!] \otimes_{K_n[\![t]\!]} D_n)$.

Démonstration. — Si $D_n = K_n[\![t]\!] \otimes_{K_n} (K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r)^{\nabla_{\mathbf{D}}=0}$, alors par hypothèse, $\nabla_{\mathbf{D}}(D_{n(r)}) \subset tD_{n(r)}$ et si $n \geqslant n(r)$ et $\nabla_{\mathbf{D}}(D_n) \subset tD_n$ alors $\nabla_{\mathbf{D}}(D_{n+1}) \subset tD_{n+1}$ si D_{n+1} est le réseau de $K_{n+1}(\!(t)\!) \otimes^{\iota_{n+1}}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r$ donné par $D_{n+1} = \varphi_n(K_{n+1}[\![t]\!] \otimes_{K_n[\![t]\!]} D_n)$ puisque $\nabla_{\mathbf{D}}$ commute à φ_n, ce qui montre le résultat par récurrence. □

Proposition III.1.5. — *Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré, alors $\nabla_{\mathbf{D}}$ est localement triviale sur $\mathscr{M}(D)$.*

Démonstration. — Par la proposition II.2.5, on a $K_n(\!(t)\!) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D)_r = K_n(\!(t)\!) \otimes_K D^n_K$ et comme $G_{L/K}$ est fini, $\nabla_{\mathbf{D}} = 0$ sur D^n_K. □

Cette proposition montre que si $\mathbf{M}$ est dans l'image du foncteur $D \mapsto \mathscr{M}(D)$, alors $\nabla_{\mathbf{M}}$ est localement triviale sur $\mathbf{M}$. Nous allons voir que réciproquement, si $\nabla_{\mathbf{M}}$ est localement triviale sur $\mathbf{M}$, alors $\mathbf{M}$ est dans l'image du foncteur $D \mapsto \mathscr{M}(D)$.

III.2. Équations différentielles p-adiques. — Dans ce paragraphe, nous déterminons l'image essentielle du foncteur $D \mapsto \mathscr{M}(D)$. Si $\mathbf{D}$ est un φ-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ muni d'un opérateur différentiel $\partial_{\mathbf{D}}$ qui étend l'opérateur $\partial : f \mapsto (1+X)df/dX$ et tel que $\partial_{\mathbf{D}} \circ \varphi = p \cdot \varphi \circ \partial_{\mathbf{D}}$, alors on dit que $\mathbf{D}$ est une équation différentielle p-adique avec structure de Frobenius.

Si $\mathbf{D}$ est un (φ, Γ_K)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ et si $\mathbf{D}$ est stable par l'opérateur $\partial_{\mathbf{D}} = t^{-1}\nabla_{\mathbf{D}}$, alors $\mathbf{D}$ est une équation différentielle p-adique avec structure de Frobenius.

Rappelons tout d'abord le théorème de monodromie p-adique, conjecturé par Crew et démontré par André, Kedlaya et Mebkhout (cf [**1**], [**19**] et [**22**] ainsi que le séminaire Bourbaki [**9**]) :

Théorème III.2.1. — *Si $\mathbf{D}$ est une équation différentielle p-adique avec structure de Frobenius, alors il existe une extension finie L/K telle que l'application naturelle :*

$$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{L'_0} \left(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}\right)^{\partial_D = 0} \to \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}$$

est un isomorphisme.

Supposons maintenant que $\mathbf{D}$ est un (φ, Γ_K)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ qui est stable par l'opérateur $\partial_{\mathbf{D}} = t^{-1}\nabla_{\mathbf{D}}$ et posons $S_L(\mathbf{D}) = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D})^{\partial_D = 0}$. C'est un L'_0-espace vectoriel qui hérite d'une action résiduelle de Γ_K triviale sur un sous-groupe ouvert (puisque $t\partial_D = \nabla_D = 0$). Quitte à remplacer L par une extension finie, on peut donc supposer que Γ_L agit trivialement sur $S_L(\mathbf{D})$, ce qui fait que $L'_0 = L_0$ et on pose alors $\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D}) = S_L(\mathbf{D})$ ce qui fait que :

$$\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D}) = \left(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}\right)^{G_L}$$

est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module tel que :

$$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{L_0} \mathrm{Sol}_L(\mathbf{D}) = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}.$$

Définition III.2.2. — Le L_0-espace vectoriel $\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D})$ est alors appelé l'espace des G_L-solutions du (φ, Γ_K)-module $\mathbf{D}$.

On peut donc reformuler le théorème III.2.1 ci-dessus et la discussion qui suit en disant que si $\mathbf{D}$ est un (φ, Γ_K)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ qui est stable par l'opérateur $\partial_{\mathbf{D}} = t^{-1}\nabla_{\mathbf{D}}$, alors il admet des G_L-solutions pour L assez grand.

Théorème III.2.3. — *Si $\mathbf{M}$ est un (φ, Γ_K)-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ tel que $\nabla_{\mathbf{M}}$ est localement triviale, alors il existe un unique (φ, Γ_K)-module $\mathbf{D} \subset \mathbf{M}[1/t]$ tel que $\mathbf{D}[1/t] = \mathbf{M}[1/t]$ et tel que $\partial_{\mathbf{M}}(\mathbf{D}) \subset \mathbf{D}$.*

De plus, la donnée de $\mathbf{M}$ détermine une filtration sur $L \otimes_{L_0} \mathrm{Sol}_L(\mathbf{D})$ et donc une structure de $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré sur $\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D})$ qui a la propriété que $\mathbf{M} = \mathscr{M}(\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D}))$.

Démonstration. — Comme $\nabla_{\mathbf{M}}$ est localement triviale, il existe une famille de réseaux D_n de $K_n((t)) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r$ tels que $\nabla_{\mathbf{D}}(D_n) \subset tD_n$ et comme $D_{n+1} = \varphi_n(K_{n+1}[\![t]\!] \otimes_{K_n[\![t]\!]} D_n)$ par le lemme III.1.4, la famille $\{D_n\}$ est φ-compatible. Par le théorème II.1.2, il existe donc un (φ, Γ_K)-module $\mathbf{D}$ tel que $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r = D_n$. Comme $\nabla_{\mathbf{D}}(D_n) \subset tD_n$ pour tout n, on a $\nabla_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}) \subset t\mathbf{D}$ ce qui fait que $\mathbf{D}$ muni de la connexion $\partial_{\mathbf{D}} = t^{-1}\nabla_{\mathbf{D}}$ est une équation différentielle p-adique avec structure de Frobenius ce qui montre le premier point. L'unicité de $\mathbf{D}$ suit du fait que l'on a nécessairement $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r = D_n$ pour tout $n \geqslant n(r)$.

Par le théorème de monodromie p-adique de André, Kedlaya et Mebkhout que l'on a rappelé ci-dessus en III.2.1, et la discussion qui le suit, le (φ, Γ_K)-module $\mathbf{D}$ admet des G_L-solutions pour L/K assez grand. Posons $D = \mathrm{Sol}_L(\mathbf{D})$ pour alléger les notations ; nous allons construire une filtration sur $D_L = L \otimes_{L_0} D$ à la manière de [**9**, proposition 5.6].

On a des isomorphismes :

$$L_n((t)) \otimes_L D_L^n = L_n((t)) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}_r \simeq L_n((t)) \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r$$

que l'on utilise pour définir $\mathrm{Fil}^i D_L^n = D_L^n \cap t^i L_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r$ et l'isomorphisme $D_L \to D_L^n$ permet de définir $\mathrm{Fil}^i D_L$. Par définition, l'isomorphisme $D_L \to D_L^n$ est donné par $\mu \otimes x \mapsto \mu \otimes \iota_n(\varphi^n(x))$ et donc l'isomorphisme $D_L \to D_L^{n+1}$ coïncide avec la composition $D_L \to D_L^n \xrightarrow{\varphi_n} D_L^{n+1}$ ce qui fait que la filtration induite sur D_L ne dépend pas de n.

Enfin, on a $K_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{M}_r = \mathrm{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K^n)$ ce qui fait que $\mathbf{M} = \mathscr{M}(D) = \mathscr{M}(\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D}))$.

Remarquons pour terminer que dans le cas particulier où $\mathbf{M} = \mathbf{D}$, alors la filtration sur D_K est donné par $\mathrm{Fil}^i D_K = D_K$ si $i \leqslant 0$ et $\mathrm{Fil}^i D_K = 0$ si $i \geqslant 1$. Si on suppose de plus que $\mathbf{M}$ est étale, alors on est dans la situation étudiée dans [**2**, §5.6]. □

En rassemblant les théorèmes II.2.6 et III.2.3, on trouve :

Théorème III.2.4. — *Le $\otimes$-foncteur exact $D \mapsto \mathscr{M}(D)$, qui va de la catégorie des (φ, N, G_K)-modules filtrés, vers la catégorie des (φ, Γ_K)-modules sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ dont la connexion associée est localement triviale, est une équivalence de catégories.*

En particulier, on a le résultat suivant qui nous servira dans la suite (on dit qu'un sous-(φ, Γ)-module est saturé si il l'est en tant que sous-module).

Corollaire III.2.5. — *Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré, et si $\mathbf{M}'$ est un sous-(φ, Γ_K)-module saturé de $\mathbf{M} = \mathscr{M}(D)$, alors il existe un sous-objet $D' \subset D$ tel que $\mathbf{M}' = \mathscr{M}(D')$.*

Démonstration. — Par le lemme III.1.3 et la remarque qui le suit, la connexion $\nabla_{\mathbf{M}}$ est localement triviale sur $\mathbf{M}'$ et on peut donc écrire $\mathbf{M}' = \mathscr{M}(D')$ pour un

$(\varphi, N, G_{M/K})$-module filtré où M/K est une extension suffisamment grande. L'inclusion $\mathbf{M}' \subset \mathbf{M}$ nous donne par fonctorialité une inclusion de $(\varphi, N, G_{M/K})$-modules filtrés $D' \subset D$, ce qui fait que $G_{M/L}$ agit trivialement sur D' et donc que D' est un sous-$(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré de D. □

IV. Pentes de Frobenius

Nous calculons dans ce paragraphe les pentes de Frobenius des (φ, Γ_K)-modules $\mathscr{M}(D)$ associés aux (φ, N, G_K)-modules filtrés D. En particulier, on montre que D est admissible si et seulement si $\mathscr{M}(D)$ est étale.

IV.1. Rappels sur les pentes de Frobenius. — Rappelons le théorème principal (le théorème 6.10) de [**19**]. Pour cela, il convient de noter que les anneaux $\Gamma_{\mathrm{an,con}}$ et $\Gamma_{\mathrm{con}}[1/p]$ de Kedlaya sont nos anneaux $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ et $\mathbf{B}^{\dagger}_K$.

Théorème IV.1.1. — *Si $\mathbf{M}$ est un φ-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$, alors $\mathbf{M}$ admet une filtration canonique $\{0\} = \mathbf{M}_0 \subset \mathbf{M}_1 \subset \cdots \subset \mathbf{M}_\ell = \mathbf{M}$ par des sous φ-modules telle que :*

1. *pour $i = 1, \cdots, \ell$, le quotient $\mathbf{M}_i/\mathbf{M}_{i-1}$ est isocline de pente spéciale s_i ;*
2. *$s_1 < s_2 < \cdots < s_\ell$;*
3. *chaque quotient $\mathbf{M}_i/\mathbf{M}_{i-1}$ peut s'écrire $\mathbf{M}_i/\mathbf{M}_{i-1} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{N}_i$ où $\mathbf{N}_i$ est un φ-module sur $\mathbf{B}^{\dagger}_K$ isocline de pente générique s_i.*

De plus, les conditions (1) et (2) ci-dessus déterminent la filtration, et les $\mathbf{N}_i$ du (3) sont aussi uniques.

Nous ne rappelons pas ce que sont les pentes spéciales et génériques, mais signalons que si $\mathbf{M}$ est de rang 1 alors les pentes spéciales et génériques coïncident, et si de plus on a $\mathbf{M} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \cdot x$ où $\varphi(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathscr{O}_{K'_0}$, alors cette pente est égale à $v_p(\lambda)$.

Si $\mathbf{M}$ est un (φ, Γ_K)-module, alors, comme l'action de Γ_K commute à φ, les $\mathbf{M}_i$ sont stables par Γ_K puisque la filtration est canonique et les $\mathbf{N}_i$ sont aussi stables par Γ_K par unicité.

Définition IV.1.2. — On dit qu'un φ-module $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ est étale si dans le théorème IV.1.1 ci-dessus, $\ell = 1$ et $s_1 = 0$, c'est-à-dire s'il existe un (φ, Γ_K)-module étale (i.e. de pente générique nulle) $\mathbf{M}^{\dagger}$ sur $\mathbf{B}^{\dagger}_K$ tel que $\mathbf{M} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{M}^{\dagger}$.

Proposition IV.1.3. — *Si $\mathbf{M}$ est un φ-module, dont les pentes $s_1 < s_2 < \cdots < s_\ell$ sont $\geqslant 0$, et $x \in \mathbf{M}$ est tel que $\varphi(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in K'_0$, alors $\lambda \in \mathscr{O}_{K'_0}$.*

Démonstration. — Le vecteur x est un vecteur propre de Frobenius. La démonstration de [**19**, theorem 6.10] montre que $\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{M}$ est de pente égale à la plus petite pente spéciale de $\mathbf{M}$. Les pentes spéciales de $\mathbf{M}$ sont définies à partir des vecteurs propres de Frobenius (cf [**19**, §4.4]) ce qui fait que si $s_1 \geqslant 0$, alors $v_p(\lambda) \geqslant 0$. □

IV.2. Calcul des pentes de $\mathscr{M}(D)$. — Le résultat principal de ce chapitre est le théorème ci-dessous :

Théorème IV.2.1. — *Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré, alors la pente de $\det \mathscr{M}(D)$ est égale à $t_N(D) - t_H(D)$.*

Démonstration. — Comme le foncteur $D \mapsto \mathscr{M}(D)$ est un $\otimes$-foncteur exact, on a $\det \mathscr{M}(D) = \mathscr{M}(\det D)$ et d'autre part on a par définition $t_N(D) = t_N(\det D)$ et $t_H(D) = t_H(\det D)$ ce qui fait qu'il suffit de montrer le théorème quand D est de rang 1. Si e est une base de D telle que $\varphi(e) = p^\nu \lambda_0 e$ où $\lambda_0 \in \mathscr{O}_{K_0}^*$ et $t_H(e) = \eta$, alors on voit que $\mathscr{M}(D) = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger t^{-\eta} \otimes e$ et que $\varphi(t^{-\eta} \otimes e) = p^{\nu-\eta}\lambda_0 \cdot t^{-\eta} \otimes e$ ce qui fait que la pente de $\mathscr{M}(D)$ est égale à $\nu - \eta$ et vaut bien $t_N(D) - t_H(D)$. □

Proposition IV.2.2. — *Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré, alors D est admissible si et seulement si $\mathscr{M}(D)$ est un (φ, Γ_K)-module étale.*

Démonstration. — Supposons tout d'abord que D est admissible. Le théorème [**19**, theorem 6.10] de Kedlaya rappelé ci-dessus montre que $\mathscr{M}(D)$ admet une filtration canonique par des sous (φ, Γ_K)-modules isoclines de pentes croissantes. La somme de ces pentes (comptées avec multiplicités) est la pente de $\det \mathscr{M}(D)$ (cf [**19**, prop 5.13]) et vaut donc $t_N(D) - t_H(D) = 0$. Pour montrer que $\mathscr{M}(D)$ est isocline de pente nulle, il suffit donc de montrer que les pentes de $\mathscr{M}(D)$ sont $\geqslant 0$. Par le corollaire III.2.5, tout sous-objet de $\mathscr{M}(D)$ est de la forme $\mathscr{M}(D')$ où $D' \subset D$ et la pente de $\det \mathscr{M}(D')$ vaut $t_N(D') - t_H(D') \geqslant 0$ puisque D est supposé admissible. On en conclut que $\mathscr{M}(D)$ ne peut pas contenir de sous-objet isocline de pente < 0 et donc que $\mathscr{M}(D)$ est étale.

Montrons maintenant que si $\mathscr{M}(D)$ est étale, alors D est admissible. La pente de $\det \mathscr{M}(D)$ est nulle et donc $t_N(D) - t_H(D) = 0$. Si D' est un sous-objet de D, de dimension d', alors $\det(D')$ est de dimension 1 dans $\wedge^{d'} D$ et $\mathscr{M}(\det D')$ est un sous-φ-module de rang 1 de $\mathscr{M}(\wedge^{d'} D)$. Par la proposition IV.1.3, et comme $\mathscr{M}(\wedge^{d'} D) = \wedge^{d'} \mathscr{M}(D)$ est lui-même étale, la pente de $\mathscr{M}(\det D')$ est $\geqslant 0$ ce qui fait que $t_N(D') - t_H(D') \geqslant 0$. On en conclut que D' est admissible. □

Remarque IV.2.3. — Comme on le verra au chapitre V, la proposition IV.2.2 ci-dessus permet de redémontrer le théorème d'admissibilité de Colmez-Fontaine en utilisant la correspondance entre représentations p-adiques et (φ, Γ_K)-modules étales.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la proposition IV.2.2 ci-dessus.

Théorème IV.2.4. — *Le $\otimes$-foncteur exact $D \mapsto \mathscr{M}(D)$, qui va de la catégorie des (φ, N, G_K)-modules filtrés admissibles, vers la catégorie des (φ, Γ_K)-modules étales sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^\dagger$ dont la connexion associée est localement triviale, est une équivalence de catégories.*

Remarque IV.2.5. — Ce théorème permet notamment de retrouver le théorème de Faltings-Totaro qui affirme que la catégorie des (φ, N, G_K)-modules filtrés admissibles est stable par produits tensoriels.

Remarque IV.2.6. — En général, on peut se demander comment calculer les pentes de $\mathscr{M}(D)$. Posons $\mu(D) = (t_N(D) - t_H(D))/\dim D$. Si D est irréductible, alors $\mathscr{M}(D)$ est aussi irréductible et le théorème IV.2.1 montre que $\mathscr{M}(D)$ est isocline de pente $\mu(D)$. Cela suggère un procédé pour calculer les pentes de $\mathscr{M}(D)$ en général : parmi tous les sous-objets irréductibles $D' \subset D$, en choisir un $D_{\min}$ qui minimise $\mu(D')$. Les pentes de $\mathscr{M}(D)$ sont alors : $\mu(D_{\min})$ et les pentes de $D/D_{\min}$.

Remarque IV.2.7. — Si D est un (φ, N)-module filtré admissible, alors $\mathscr{M}(D)$ peut très bien contenir des sous-objets de pente > 0. Ceci n'est pas en contradiction avec le théorème de Kedlaya, car c'est la filtration par des pentes croissantes qui est canonique.

Exemple IV.2.8. — Voici quelques exemples de calcul de $\mathscr{M}(D)$ pour des φ-modules filtrés D relatifs à $\mathbf{Q}_p$. Dans tous les cas, $D = \mathbf{Q}_p e \oplus \mathbf{Q}_p f$.

1. $\varphi(e) = e$, $\varphi(f) = pf$, $\mathrm{Fil}^0 D = D$, $\mathrm{Fil}^1 D = \mathbf{Q}_p(e+f)$ et $\mathrm{Fil}^2 D = \{0\}$. Ce D est admissible. Une base de $\mathscr{M}(D)$ est donnée par e et $\alpha e + f$ où α est une fonction telle que $\alpha(\zeta_{p^n} - 1) = p^{-n}$ pour $n \gg 0$. Il y a deux sous-φ-modules dans $\mathscr{M}(D)$: celui engendré par e est de pente 0 et celui engendré par f est de pente 1.
2. $\varphi(e) = e$, $\varphi(f) = pf$, $\mathrm{Fil}^0 D = D$, $\mathrm{Fil}^1 D = \mathbf{Q}_p e$ et $\mathrm{Fil}^2 D = \{0\}$. Ce D n'est pas admissible. Une base de $\mathscr{M}(D)$ est donnée par $t^{-1}e$ et f. Il y a deux sous-φ-modules dans $\mathscr{M}(D)$: celui engendré par $t^{-1}e$ est de pente -1 et celui engendré par f est de pente 1.
3. $\varphi(e) = p^2 f$, $\varphi(f) = e$, $\mathrm{Fil}^0 D = D$, $\mathrm{Fil}^{1,2} D = \mathbf{Q}_p e$ et $\mathrm{Fil}^3 D = \{0\}$. Ce D est admissible. Une base de $\mathscr{M}(D)$ est donnée par e/t_+^2 et f/t_-^2 où les fonctions :
$$t_+(X) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+X)^{p^{2n}} - 1}{p((1+X)^{p^{2n-1}} - 1)} \quad \text{et} \quad t_-(X) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+X)^{p^{2n-1}} - 1}{p((1+X)^{p^{2n-2}} - 1)}$$
sont les produits partiels pairs et impairs de $t = \log(1+X)$. Il y a deux sous-φ-modules dans $\mathscr{M}(D)$, engendrés par $e \pm pf$, qui sont tous les deux de pente 1.

V. Applications aux représentations p-adiques

L'objet de ce chapitre est de donner des applications des constructions ci-dessus aux représentations p-adiques. Dans tout ce chapitre, une représentation p-adique de G_K est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G_K.

V.1. Anneaux de Fontaine et représentations p-adiques. — Dans ce paragraphe, nous donnons de brefs rappels sur certains aspects de la théorie des représentations p-adiques. Afin d'étudier les représentations p-adiques, on construit un certains nombres d'anneaux de périodes, et nous avons besoin des anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ définis dans [**14**] et de l'anneau $\mathbf{B}^{\dagger}$ défini dans [**5**]. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ est une $\mathbf{Q}_p$-algèbre qui est aussi un (φ, N, G_K)-module (mais $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ est de dimension infinie et G_K n'agit pas à travers un quotient fini cette fois) et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est un corps qui est aussi une $\mathbf{Q}_p$-algèbre filtrée. On a de plus une injection $K \otimes_{K_0} \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ ce qui fait que l'on peut voir $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ comme une sorte de (φ, N, G_K)-module filtré.

Étant donnée une représentation p-adique V de G_K, le K_0-espace vectoriel $(\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ est de dimension $\leqslant \dim(V)$ et on dit que V est semi-stable si sa dimension est $= \dim(V)$. Si V n'est pas semi-stable mais le devient quand on la restreint à un sous-groupe ouvert G_L de G_K, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_L}$ est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré admissible. En fait, $L \otimes_{L_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ s'identifie naturellement à $L \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ où $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$.

On dit qu'une représentation p-adique V est de de Rham si le K-espace vectoriel $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ est de dimension $\dim(V)$ et la construction précédente montre que les représentations potentiellement semi-stables sont de de Rham. La réciproque est aussi vraie, ainsi que Fontaine l'avait conjecturé dans [**15**, §6.2] (c'est la conjecture de monodromie pour les représentations p-adiques. Voir le « séminaire Bourbaki » [**9**] pour des détails sur cette conjecture ; la démonstration du fait que la conjecture de Crew (la conjecture de monodromie pour les équations différentielles p-adiques) implique la conjecture de monodromie pour les représentations p-adiques se trouve dans [**2**] et la conjecture de Crew est démontrée dans [**1, 19, 22**]. Des démonstrations « directes » de la conjecture de monodromie pour les représentations p-adiques se trouvent dans [**11, 17**]).

Dans une autre direction, le corps $\mathbf{B}^{\dagger}$ est muni d'un Frobenius φ et d'une action de G_K telle que $(\mathbf{B}^{\dagger})^{H_K} = \mathbf{B}^{\dagger}_K$. Si $\mathbf{D}^{\dagger}$ est un (φ, Γ_K)-module étale et de dimension d sur $\mathbf{B}^{\dagger}_K$, alors on peut montrer que $V(\mathbf{D}^{\dagger}) = (\mathbf{B}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{D}^{\dagger})^{\varphi=1}$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension d qui hérite d'une action de G_K. Si on combine les résultats de Fontaine (cf [**13**]) et le théorème de Cherbonnier-Colmez (cf [**5**]), on trouve que le foncteur $\mathbf{D}^{\dagger} \to V(\mathbf{D}^{\dagger})$ est une équivalence de catégories de la catégorie des (φ, Γ_K)-modules étales sur $\mathbf{B}^{\dagger}_K$ vers la catégorie des représentations p-adiques de G_K ; on note $V \mapsto \mathbf{D}^{\dagger}(V)$ l'inverse de ce foncteur.

Si V est de de Rham, alors on peut montrer (cf [**16**, proposition 3.25]) que la connexion $\nabla_{\mathbf{D}}$ sur $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$ est localement triviale, et le théorème III.2.3 (qui dans ce cas est aussi donné dans [**2**, théorème 5.10]) montre qu'il existe alors un unique (φ, Γ_K)-module $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ de rang $\dim(V)$ contenu dans $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ et tel que $\nabla_{\mathbf{D}}(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)) \subset t\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$. Cette construction est d'ailleurs le point de départ d'une démonstration du théorème de monodromie pour les représentations p-adiques.

V.2. Représentations potentiellement semi-stables. — Si V est une représentation p-adique de G_K qui devient semi-stable quand on la restreint à G_L pour une extension galoisienne finie L/K, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_L}$ est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré admissible. L'objet de ce paragraphe est de montrer comment on peut utiliser le théorème IV.2.4 pour donner une nouvelle démonstration du théorème de Colmez-Fontaine (cf [**12**, théorème A]) rappelé ci-dessous :

Théorème V.2.1. — *Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré admissible, alors il existe une représentation p-adique V de G_K qui devient semi-stable quand on la restreint à G_L et telle que $D = \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$.*

Démonstration. — Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré admissible, alors le théorème IV.2.4 montre que $\mathscr{M}(D)$ est un (φ, Γ_K)-module étale sur $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ ce qui fait que l'on peut écrire $\mathscr{M}(D) = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_K} \mathbf{D}^{\dagger}$ où $\mathbf{D}^{\dagger}$ est un (φ, Γ_K)-module étale sur $\mathbf{B}^{\dagger}_K$. Par la construction $\mathbf{D}^{\dagger} \mapsto V(\mathbf{D}^{\dagger})$ rappelée au paragraphe précédent, il existe une représentation p-adique V de G_K telle que $\mathbf{D}^{\dagger} = \mathbf{D}^{\dagger}(V)$.

Rappelons que par [**2**, théorème 3.6], si V est une représentation p-adique de G_K, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X, 1/t] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V))^{\Gamma_L}$. Dans notre cas, le fait que :

$$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X, 1/t] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathscr{M}(D) = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X, 1/t] \otimes_{L_0} D$$

et que $(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X, 1/t])^{\Gamma_L} = L_0$ montrent que $D = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X, 1/t] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V))^{\Gamma_L}$ et donc que $D = \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ en tant que $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules. Il reste à voir que la filtration de $L \otimes_{L_0} D$ construite dans le théorème III.2.3 coïncide avec la filtration provenant de l'isomorphisme $(L \otimes_{L_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))^{G_{L/K}} = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. Pour cela, il suffit de constater que par [**2**, §2.4], l'application ι_n envoie $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X, 1/t] \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ et donc $L_n(\!(t)\!) \otimes_L D_L$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ ce qui fait que, comme pour n assez grand on a (cf [**2**, §5.3] et [**16**, §3]) :

$$L_n[\![t]\!] \otimes^{\iota_n}_{\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathrm{Fil}^0(L_n(\!(t)\!) \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)),$$

la filtration construite dans le théorème III.2.3 coïncide avec la filtration provenant de celle de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, et donc de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$.

On a donc construit une représentation p-adique V de G_K dont la restriction à G_L est semi-stable et telle que $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = D$ en tant que $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés. □

Remarque V.2.2. — La démonstration ci-dessus utilise la construction $D \mapsto \mathscr{M}(D)$ mais pas la caractérisation de l'image essentielle de ce foncteur, ce qui fait que notre démonstration n'utilise pas le théorème de monodromie p-adique (mais on utilise la filtration par les pentes de Frobenius).

Pour finir, nous allons récapituler les différents objets que l'on associe à une représentation p-adique V de G_K semi-stable quand on la restreint à G_L. Ces objets sont :

1. le $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$;
2. l'équation différentielle p-adique $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$;
3. le (φ, Γ_K)-module étale sur l'anneau de Robba $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$.

Ces objets sont reliés entre eux de la manière suivante (rappelons que par le théorème III.2.3, la donnée de $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ détermine une filtration sur $L \otimes_{L_0} \mathrm{Sol}_L(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)))$:

Théorème V.2.3. — *Si V est une représentation p-adique de G_K semi-stable quand on la restreint à G_L, alors :*

1. $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = \mathrm{Sol}_L(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V))$ *avec la filtration provenant de* $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ *;*
2. $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathscr{M}(\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))$ *;*
3. $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{L_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))^{H_K, N=0}$.

Ces identifications sont compatibles à toutes les structures en présence.

Démonstration. — La démonstration du théorème V.2.1 montre que l'on a $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathscr{M}(\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))$. Si on pose $\mathbf{N} = (\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},L}[\ell_X] \otimes_{L_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))^{H_K, N=0}$, alors $\mathbf{N}[1/t] = \mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]$ et $\mathbf{N}$ est un (φ, Γ_K)-module tel que $\nabla_{\mathbf{N}}(\mathbf{N}) \subset t\mathbf{N}$ ce qui fait que $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ par [**2**, théorème 5.10]. Enfin, le fait que $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathscr{M}(\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))$ et que $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)[1/t] = \mathscr{M}(\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V))[1/t]$ montrent que $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = \mathrm{Sol}_L(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V))$ avec la filtration provenant de $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$. □

Remarquons que le fait qu'on retrouve l'action de $G_{L/K}$ à partir de $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ avait été observé par Marmora (cf [**21**, §4.2]).

V.3. Construction de $\mathbf{D}^{\dagger}(V)$. — Dans tout ce paragraphe, V est une représentation semi-stable de G_K. Comme on l'a signalé au paragraphe précédent, on peut récupérer $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ à partir de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ par la recette $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathscr{M}(\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V))$. Plus explicitement, si on regarde comment le foncteur $\mathscr{M}$ est défini, on voit que $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)$ est l'ensemble des $x \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X, 1/t] \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ tels que :

1. $N(x) = 0$;
2. $\varphi^{-n}(x) \in \mathrm{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V))$ pour tout $n \geqslant n(r)$.

L'objet de ce chapitre est de montrer comment récupérer le $\mathbf{B}^{\dagger,r}_K$-module $\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$ à partir de $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X, 1/t] \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$.

Rappelons que l'on a construit dans [**2**, §2] un anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ qui contient $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ et aussi l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$ de [**2**, §1.2] (dont on rappelle brièvement la construction ci-dessous). Nous allons rappeler la définition de l'ordre d'un élément $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$. Pour cela, rappelons (cf [**2**, §2.1]) que l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ construit dans [**5**] est un sous-anneau du corps des fractions $W(\widetilde{\mathbf{E}})[1/p]$ de l'anneau des vecteurs de Witt sur un corps valué

$\widetilde{\mathbf{E}}$ et que si $x = \sum_{k \gg -\infty} p^k[x_k] \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ et si I est un intervalle compris dans $[r; +\infty[$, alors la formule :

$$V_I(x) = \left\lfloor \inf_{\alpha \in I} \inf_{k \in \mathbf{Z}} k + \frac{p-1}{p\alpha} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_k) \right\rfloor$$

définit une valuation sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ et que par définition (cf [**2**, §2.3]), $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ est le complété de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ pour la topologie de Fréchet définie par l'ensemble des valuations $\{V_{[r;s]}\}_{s \geqslant r}$.

Si $s \geqslant r$, on a par conséquent une valuation $V_{[s;s]}$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ dont on peut montrer (cf [**11**, §7.2] et [**2**, lemme 2.7]) que la restriction à $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$ coïncide avec la partie entière de la valuation associée à la norme « sup sur la couronne de rayon $p^{-1/e_K s}$ ». Posons $\rho = (p-1)/p$. Si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ et n est assez grand, alors $\varphi^{-n}(x) \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,\rho}_{\mathrm{rig}}$. On pose $I(x) = \{s \in \mathbf{R}$ tels que la suite $\{ns + V_{[\rho,\rho]}(\varphi^{-n}(x))\}$ est bornée inférieurement$\}$, ce qui fait que soit $I(x)$ est vide, soit il existe $\alpha \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ tel que $I(x) = [\alpha; \infty[$ ou $I(x) =]\alpha; \infty[$.

Définition V.3.1. — Si $I(x) = [\alpha; \infty[$, on dit que x est d'ordre α et si $I(x) =]\alpha; \infty[$ on dit que x est d'ordre α^+. On écrit alors $\mathrm{ord}(x) = \alpha$ ou $\mathrm{ord}(x) = \alpha^+$.

Rappelons que l'on a écrit ℓ_X pour l'élément $\log(\pi)$ de [**2**, §2.4] et que $\log(\pi) = \log[\overline{\pi}] + \log([\overline{\pi}]/\pi)$ avec $\log([\overline{\pi}]/\pi) \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathbf{Q}_p}$ ce qui nous permet de prolonger $\mathrm{ord}(\cdot)$ à $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}[\ell_X] = \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}[\log[\overline{\pi}]]$ en décidant que $\mathrm{ord}(x_0 + x_1 \log[\overline{\pi}] + \cdots + x_k \log[\overline{\pi}]^k) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant k} \mathrm{ord}(x_i) + i$.

Proposition V.3.2. — *La fonction* ord *vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\mathrm{ord}(x+y) \leqslant \max(\mathrm{ord}(x), \mathrm{ord}(y))$ *et* $\mathrm{ord}(xy) \leqslant \mathrm{ord}(x) + \mathrm{ord}(y)$;
2. $t = \log(1+X)$ *est d'ordre* 1 *et* $\mathrm{ord}(tx) = \mathrm{ord}(x) + 1$;
3. $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ *appartient à* $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ *si et seulement si* $\mathrm{ord}(x) \leqslant 0$;
4. *Si* $f(X_K) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X_K^i \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$, *et* $s \geqslant 0$, *alors notre définition de l'ordre coïncide avec la définition habituelle, c'est-à-dire que* $s \in I(x)$ *si et seulement si* $\{v_p(a_i) + s\log(i)/\log(p)\}_{i \geqslant 1}$ *est bornée inférieurement.*

Démonstration. — Le point (1) est immédiat. Le point (2) suit du fait que $\varphi(t) = pt$. Le point (3) suit du fait que $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ appartient à $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ si et seulement si $\{V_{[r;s]}(x)\}_{s \geqslant r}$ est bornée inférieurement, c'est-à-dire si $0 \in I(x)$.

Pour montrer le point (4), rappelons (cf [**2**, §2.1]) que $V_{[r;s]}(\varphi^{-1}(x)) = V_{[pr;ps]}(x)$ et donc que $s \in I(x)$ si et seulement si la suite $\{ns + V_{[\rho_n,\rho_n]}(x)\}$ est bornée inférieurement, avec $\rho_n = p^{n-1}(p-1)$ (ce qui fait que $\rho = \rho_0$). Si $f(X_K) \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$, et $s \geqslant r$, alors $V_{[s;s]}(f(X_K)) = \lfloor v_p(\sup_{z \in C_K[s;s]} |f(z)|_p) \rfloor$, et par la théorie classique des fonctions holomorphes, on a :

$$v_p\left(\sup_{z \in C_K[\rho_n;\rho_n]} |f(z)|_p\right) = \inf_{i \in \mathbf{Z}} \left(v_p(a_i) + \frac{i}{e_K p^{n-1}(p-1)}\right),$$

ce qui fait que pour montrer le point (4), il suffit de montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. la suite $\{v_p(a_i) + s\log(i)/\log(p)\}_{i\geqslant 1}$ est bornée inférieurement ;
2. la suite double $\{ns + v_p(a_i) + i/(e_K p^{n-1}(p-1))\}_{i\geqslant 1, n\geqslant n(r)}$ est bornée inférieurement.

Ceci est un exercice d'analyse (réelle !). □

La propriété (2) de la proposition ci-dessus nous permet d'étendre ord à $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}[\ell_X, 1/t]$ en posant $\mathrm{ord}(x) = \mathrm{ord}(t^h x) - h$ pour $h \gg 0$.

Si $\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}}$ dénote l'anneau construit dans [**14**], tel que $\mathbf{B}_{\mathrm{st}} = \mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}}[\log[\overline{\pi}], 1/t]$, alors l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ est défini par $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \cap_{n=0}^{\infty}\varphi^n(\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}})$ et a les propriétés suivantes :

1. si V est une représentation p-adique, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\log[\overline{\pi}], 1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$;
2. $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \subset \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ et en fait, c'est le complété pour la topologie de Fréchet du sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ formé des éléments $\sum_{k\gg -\infty} p^k[x_k]$ tels que $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_k) \geqslant 0$ pour tout k.

Le lemme suivant est immédiat et généralise le (2) de la proposition ci-dessus.

Lemme V.3.3. — *Soit V une représentation semi-stable de G_K et D un sous-φ-module de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ de pente $\alpha \in \mathbf{Q}$. Si $M = (m_{j,i}) \in \mathrm{M}(d, \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\log[\overline{\pi}], 1/t])$ est la matrice d'éléments de D dans une base de V, alors* $\mathrm{ord}(m_{j,i}) = \alpha$.

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème V.3.4. — *Si V est une représentation semi-stable de G_K et si*

- *$\{e_i\}_{i=1\cdots d}$ est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ adaptée à la décomposition par les pentes de Frobenius ;*
- *$N(e_i) = \sum_{j=1}^d n_{j,i} e_j$;*
- *$\{f_j\}_{j=1\cdots d}$ est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ adaptée à la filtration et $\varphi^{-n}(e_i) = \sum_{j=1}^d p_{j,i}^{(n)} f_j$,*

alors $x = \sum_{i=1}^d x_i \otimes e_i \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}[\ell_X, 1/t] \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ appartient à $\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$ si et seulement si :

1. *$N(x_j) + \sum_{i=1}^d n_{j,i} x_i = 0$ pour $j = 1\cdots d$;*
2. *$\sum_{i=1}^d \iota_n(x_i) p_{j,i}^{(n)} \in t^{-t_H(f_j)} K_n[\![t]\!]$ pour $j = 1\cdots d$ et $n \geqslant n(r)$;*
3. $\mathrm{ord}(x_i) \leqslant -\mathrm{pente}(e_i)$ *pour $i = 1\cdots d$.*

Démonstration. — Un petit calcul montre que la condition (1) est équivalente à $N(x) = 0$ et que la condition (2) est équivalente à $\varphi^{-n}(x) \in \mathrm{Fil}^0(K_n(\!(t)\!) \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V))$ pour tout $n \geqslant n(r)$, ce qui fait que, comme on l'a rappelé plus haut, $x \in \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)$ si et seulement s'il satisfait à (1) et (2).

Supposons donc que $x \in \mathbf{D}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}(V)$ satisfait (3). Si $\{v_i\}_{i=1\cdots d}$ est une base de V et si l'on écrit $e_i = \sum_{j=1}^d m_{j,i} v_j$, alors $m_{j,i} \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\log[\overline{\pi}], 1/t]$ et le fait que e_i est dans un φ-module de pente pente(e_i) implique par le lemme V.3.3 que $\mathrm{ord}(m_{j,i}) \leqslant \mathrm{pente}(e_i)$, ce qui fait que si $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i = \sum_{j=1}^d y_j v_j$, alors $\mathrm{ord}(y_j) = \mathrm{ord}(\sum_{i=1}^d x_i m_{j,i}) \leqslant 0$. Par le (3) de la proposition V.3.2, cela implique que $y_j \in \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ et donc que $y_j \in \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger = \mathbf{B}^{\dagger,r}$ ce qui fait que $x \in \mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$. La réciproque est immédiate. □

Remarque V.3.5. — Si $K = K_0$ et $N = 0$, alors la condition (2) équivaut à : « pour tout $n \geqslant n(r)$, la fonction $\sum_{i=1}^d \varphi^n(p^{(n)}_{j,i}) x_i(X)$ a un zéro d'ordre au moins $-t_H(f_j)$ en $\varepsilon^{(n)} - 1$ ». La stabilité de $\mathbf{D}^{\dagger,r}(V)$ sous l'action de Γ_K montre que l'on peut remplacer $\varepsilon^{(n)}$ par n'importe quelle racine primitive p^n-ième de 1.

Appendice A
Liste des notations

Voici une liste des principales notations dans l'ordre où elles apparaissent :

I : K, k_K, K_n, K_∞, K_0, K_0', G_K, H_K, Γ_K, σ.

I.1 : L, $G_{L/K}$, D_L, $t_N(D)$, $t_H(D)$.

I.2 : F, $\mathbf{B}^{\dagger,r}_F$, φ, $\mathbf{B}^\dagger_F$, $\mathbf{B}_F$, e_K, $\mathbf{B}_K$, $\mathbf{B}^\dagger_K$, $r_0(K)$, $\mathbf{B}^{\dagger,r}_K$, $C_K[r;s]$, $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}$, t, $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$, $r(K)$, ι_n, $n(r)$, ∇, ∂, q.

I.3 : $\mathbf{D}_r$, $r(\mathbf{D})$, $\otimes^{\iota_n}$.

II.1 : φ_n, M_n.

II.2 : ℓ_X, ξ_n, D^n_K, $M_n(D)$, $\mathscr{M}(D)$.

III.1 : $\nabla_{\mathbf{D}}$, $V_{[r;s]}$.

III.2 : $\partial_{\mathbf{D}}$, $S_L(\mathbf{D})$, $\mathrm{Sol}_L(\mathbf{D})$.

V.1 : $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, $\mathbf{B}^\dagger$, $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$, $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, $\mathbf{D}^\dagger(V)$, $V(\mathbf{D}^\dagger)$, $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$, $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}(V)$.

V.3 : $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$, $V_{[r;s]}$, ord, $\log[\overline{\pi}]$, $\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}}$.

Appendice B
Erratum à [2]

Comme cet article fait assez naturellement suite à « Représentations p-adiques et équations différentielles » [**2**], il me semble utile de donner un erratum. Je remercie P. Colmez, J.-M. Fontaine, J. Teitelbaum et H. Zhu pour leurs remarques.

Exemple 2.8, 1 : remplacer $\mathbf{A}^+_{\max}$ par $\mathbf{A}_{\max}$.

Sections 3.3, 5.5 : Kedlaya a complètement modifié son article [34] et la plupart des numéros des références sont donc incorrects.

Théorème 4.10 : le théorème 4.10 est en fait dû à Forster, voir : O. Forster, Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln, Math. Zeitschrift, 97, p. 376ff, 1967.

Proposition 2.24 : l'application log n'est bien sûr pas définie pour $x = 0$. De plus je ne l'ai définie que pour $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ mais plus tard, je l'utilise sur $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger$ (par exemple : $\log(\pi_K)$). Il faut donc l'étendre à $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger$ ce que fait Colmez dans [**11**]. On peut aussi le faire « à la main ».

Démonstration du lemme 5.27 : remplacer $\mathrm{GL}_d(\mathbf{A}^{\dagger,r}, K)$ par $\mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_K^{\dagger,r})$ et de même, remplacer $\mathrm{M}_d(\mathbf{A}^{\dagger,r}, K)$ par $\mathrm{M}_d(\mathbf{A}_K^{\dagger,r})$.

Matrices : j'ai écrit les matrices « à l'envers », par exemple si f et g sont deux applications semi-linéaires, alors dans mes notations $\mathrm{Mat}(fg) = f(\mathrm{Mat}(g))\,\mathrm{Mat}(f)$. Pour retrouver la notation habituelle, il faut tout transposer (ce que j'ai fait dans mes autres articles).

Démonstration de la proposition 5.15 : il n'est pas vrai que $\iota_n(N_s) = K_n[\![t]\!] \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. Ce qui est vrai, c'est que l'image de ι_n est dense pour la topologie t-adique. C'est ce qui est démontré et utilisé dans le reste de la preuve.

p.229 l.3 : remplacer $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ par $\widetilde{\mathbf{A}}$.

L'anneau $\mathbf{B}_K^\dagger$ *:* il est affirmé que l'anneau $\mathbf{B}_K^\dagger$ est un anneau de séries formelles à coefficients dans F ce qui n'est pas toujours le cas. C'est un anneau de séries formelles à coefficients dans l'extension maximale non-ramifiée de F dans K_∞, qui peut être plus grande que F. Comme il est vrai que $(\mathbf{B}_K^\dagger)^{\Gamma_K} = F$, cela n'affecte pas les résultats de l'article, et les démonstrations sont presque inchangées.

Monodromie : pour retrouver le (φ, N)-module $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\cdot)$, il faut prendre $N(\log(\pi)) = -p/(p-1)$ au lieu de $N(\log(\pi)) = -1$.

Diagramme p. 271 : dans le diagramme en haut de la page, remplacer ∇_M par la connexion associée à ∂_M.

Lemme 2.7 : remplacer $k \gg 0$ par $k \gg -\infty$ dans $\sum_{k \gg 0} p^k [x_k]$.

Références

[1] Y. ANDRÉ – Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 285–317.

[2] L. BERGER – Représentations p-adiques et équations différentielles, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 219–284.

[3] ———, Limites de représentations cristallines, *Compos. Math.* **140** (2004), p. 1473–1498.

[4] F. CHERBONNIER – Représentations p-adiques surconvergentes, Thèse, Université d'Orsay, 1996.

[5] F. CHERBONNIER & P. COLMEZ – Représentations p-adiques surconvergentes, *Invent. Math.* **133** (1998), p. 581–611.

[6] ———, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), p. 241–268.

[7] P. COLMEZ – Représentations cristallines et représentations de hauteur finie, *J. reine angew. Math.* **514** (1999), p. 119–143.

[8] ———, Espaces de Banach de dimension finie, *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), p. 331–439.

[9] ———, Les conjectures de monodromie p-adiques, *Astérisque* **290** (2003), p. 53–101, Séminaire Bourbaki, vol. 2001/2002, exposé n° 897.

[10] ———, La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique, *Astérisque* **294** (2004), p. 251–319, Séminaire Bourbaki, vol. 2002/2003, exposé n° 919.

[11] ———, Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, ce volume.

[12] P. Colmez & J.-M. Fontaine – Construction des représentations p-adiques semi-stables, *Invent. Math.* **140** (2000), p. 1–43.

[13] J.-M. Fontaine – Représentations p-adiques des corps locaux. I, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 249–309.

[14] ———, Le corps des périodes p-adiques, *Astérisque* **223** (1994), p. 59–111.

[15] ———, Représentations p-adiques semi-stables, *Astérisque* **223** (1994), p. 113–184.

[16] ———, Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, *Astérisque* **295** (2004), p. 1–115.

[17] ———, Représentations de de Rham et représentations semi-stables, prépublication Orsay, 2004.

[18] J.-M. Fontaine & J.-P. Wintenberger – Le « corps des normes » de certaines extensions algébriques de corps locaux, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **288** (1979), p. A367–A370.

[19] K. S. Kedlaya – A p-adic local monodromy theorem, *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), p. 93–184.

[20] M. Lazard – Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet, *Publ. Math. I.H.É.S.* **14** (1962), p. 47–75.

[21] A. Marmora – Irrégularité et conducteur de Swan p-adiques, *Doc. Math.* **9** (2004), p. 413–433.

[22] Z. Mebkhout – Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 319–351.

[23] J.-P. Wintenberger – Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **16** (1983), p. 59–89.

Laurent Berger, Université de Lyon, UMPA ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon
E-mail : `laurent.berger@umpa.ens-lyon.fr` • *Url :* `www.umpa.ens-lyon.fr/~lberger/`