

# *Astérisque*

CLAIRE VOISIN

**Géométrie des espaces de modules de courbes et de surfaces  $K3$  [d'après Gritsenko-Hulek-Sankaran, Farkas-Popa, Mukai, Verra, ...]**

*Astérisque*, tome 317 (2008), Séminaire Bourbaki, exp. n° 981, p. 467-490

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_2008\\_\\_317\\_\\_467\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__317__467_0)

© Société mathématique de France, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**GÉOMÉTRIE DES ESPACES DE MODULES  
DE COURBES ET DE SURFACES  $K3$**

[d'après Gritsenko-Hulek-Sankaran, Farkas-Popa, Mukai, Verra, ...]

par Claire VOISIN

**INTRODUCTION**

Si  $X$  est une variété algébrique lisse, complète ou non, on peut considérer (sur un corps de caractéristique 0, qui ici sera  $\mathbb{C}$ ) une complétion lisse  $\overline{X}$  et étudier les sections du fibré canonique  $K_{\overline{X}}$ , et plus généralement des puissances  $K_{\overline{X}}^{\otimes m}$ ,  $m > 0$ . Lorsque  $X$  est singulière, on introduit une désingularisation  $X^s$  de  $X$ , et on étudie de même les sections du fibré canonique d'une complétion lisse  $\overline{X^s}$  de  $X^s$ . Ces espaces de sections sont des invariants birationnels de  $\overline{X^s}$ , et en particulier ne dépendent que de  $X$ .

*DÉFINITION 0.1. — On dit que  $X$  est de type général si l'application rationnelle de  $\overline{X^s}$  dans un espace projectif fournie par les sections  $K_{\overline{X^s}}^{\otimes m}$ , pour  $m$  suffisamment grand, est birationnelle de  $\overline{X^s}$  sur son image.*

La classification birationnelle introduit plus généralement la dimension de Kodaira  $\kappa(X)$ , qui est la dimension de l'image de l'application ci-dessus pour  $m$  suffisamment grand et suffisamment divisible. À l'extrême opposé des variétés de type général, on trouve donc les variétés de dimension de Kodaira négative (ou  $-\infty$ ), c'est-à-dire pour lesquelles aucune des puissances  $K_{\overline{X}}^{\otimes m}$ ,  $m > 0$ , n'admet de section non nulle.

Conjecturalement, ces dernières variétés sont les variétés *uniréglées*, qui sont balayées par des courbes rationnelles. Un grand progrès est fait dans cette direction dans [11]. Des exemples particuliers de variétés uniréglées sont donnés par les variétés *unirationnelles*, c'est-à-dire celles qui admettent un morphisme rationnel dominant

$$\mathbb{P}^N \dashrightarrow X.$$

Ces variétés sont non seulement uniréglées mais aussi *rationnellement connexes* (cf. [16]). Il n'y a aucune conjecture caractérisant les variétés unirationnelles. Il est probable qu'il existe des variétés rationnellement connexes qui ne sont pas unirationnelles, mais aucun exemple n'est connu.

La propriété d'unirationalité est évidemment d'une importance majeure pour les espaces de modules de variétés algébriques d'un type donné. Elle dit en effet qu'on dispose d'un paramétrage qui, le plus souvent, consiste en un algorithme pour construire les objets considérés. Notons que les espaces de modules de variétés algébriques ou de paires sont définis sur  $\mathbb{Q}$  et que, s'ils sont unirationnels, ils le sont alors sur un corps de nombres  $K$ , de sorte que les  $K$ -points sont alors denses au sens de Zariski dans l'espace de modules considéré.

À l'inverse, il est conjecturé par Lang que, pour une variété de type général définie sur un corps de nombres, les  $L$ -points de cette variété ne sont Zariski-denses pour aucune extension finie  $L$  de ce corps. Ainsi, la propriété « de type général » pour un espace de modules de variétés d'un certain type entraîne conjecturalement que les variétés de ce type définies sur un corps de nombres donné ne sont pas génériques !

Le but de cet exposé est de discuter ces deux propriétés extrêmes (type général et unirationalité) pour les espaces de modules de courbes et de surfaces  $K3$  polarisées. Rappelons [7] qu'une surface  $K3$  est une surface complexe compacte  $S$  d'irrégularité  $q := \dim H^0(S, \Omega_S)$  nulle, et satisfaisant  $K_S \cong \mathcal{O}_S$ . L'exemple le plus simple de telles surfaces est donné par les hypersurfaces lisses de degré 4 dans  $\mathbb{P}^3$ . Par des arguments simples de théorie des déformations (cf. [1]), on peut montrer qu'une surface  $K3$  est une (petite) déformation d'une telle surface quartique. En particulier, elles ont toutes la même topologie et sont entre autres simplement connexes. De plus le réseau  $H^2(S, \mathbb{Z})$  muni de sa forme d'intersection naturelle est un réseau pair (par la formule de Wu, c'est une conséquence du fait que  $K_X$  est trivial), isomorphe à  $3U \oplus 2E_8^-$ , où  $U$  est le réseau hyperbolique unimodulaire de rang 2 et  $E_8^-$  est le réseau  $E_8$  muni de l'opposé de sa forme quadratique standard. En utilisant cet argument d'approximation, on voit apparaître un phénomène troublant : toute surface  $K3$  est kählérienne, et on peut construire (cf. [6]) un assez bon espace de modules de surfaces  $K3$  marquées, c'est-à-dire munies d'un isomorphisme

$$(H^2(S, \mathbb{Z}), \langle, \rangle) \cong 3U \oplus 2E_8^-,$$

mais il n'existe pas de bon espace de modules de surfaces  $K3$  kählériennes. On est confronté tout d'abord au fait que l'espace de modules précédent n'est pas séparé, à cause du phénomène décrit par Atiyah [4] de non-unicité de la résolution simultanée des points doubles. Par ailleurs, le groupe des automorphismes d'une surface  $K3$  peut être infini, de sorte qu'oublier le marquage, c'est-à-dire quotienter l'espace de modules ci-dessus par la relation donnée par les automorphismes des surfaces  $K3$  n'est

pas réellement faisable. Ceci explique également pourquoi les surfaces  $K3$  quartiques, pour lesquelles on dispose d'un bon espace de modules (cf. [43]), peuvent être denses parmi les surfaces  $K3$  générales.

Il est donc nécessaire de se restreindre aux espaces de modules de surfaces  $K3$  polarisées, c'est-à-dire munies d'un fibré en droites ample  $\mathcal{L}$ . Un tel fibré en droites satisfait  $c_1(\mathcal{L})^2 = 2g - 2$ , où  $g$  est le genre des courbes lisses  $C \in |\mathcal{L}|$ . Pour cette raison, on parle de surfaces  $K3$  de genre  $g$ .

Les espaces de modules que nous considérerons sont

$$\mathcal{F}_g, \mathcal{P}_g, \mathcal{M}_g,$$

qui paramètrent respectivement les classes d'isomorphisme de surfaces  $K3$  munies d'un fibré en droites  $\mathcal{L}$  ample primitif (i.e. de classe non divisible dans  $\text{Pic } S$ ) tel que  $c_1(\mathcal{L})^2 = 2g - 2$ , les classes d'isomorphisme de paires  $(C, S)$  où  $C \subset S$  est une courbe lisse de genre  $g$ , et  $(S, \mathcal{L} = \mathcal{O}_S(C)) \in \mathcal{F}_g$ , et enfin l'espace de modules des courbes lisses de genre  $g$ . Il est clair que  $\mathcal{P}_g$  admet des morphismes dans  $\mathcal{F}_g$  et  $\mathcal{M}_g$ . Le morphisme  $p : \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{F}_g$  réalise  $\mathcal{P}_g$  comme un ouvert de Zariski dans le fibré projectif sur  $\mathcal{F}_g$  de fibre  $\mathbb{P}(H^0(S, \mathcal{L}))$  au-dessus de  $(S, \mathcal{L}) \in \mathcal{F}_g$ . Le morphisme  $q : \mathcal{P}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$  envoie la paire  $(C, S)$  sur la classe d'isomorphisme de la courbe  $C$ .

Les résultats évoqués dans ce texte sont de trois types : en petit genre, l'unirationalité de  $\mathcal{F}_g$  et  $\mathcal{M}_g$  est connue, et plus précisément, des résultats récents de Mukai établissent l'unirationalité de  $\mathcal{F}_g$  pour  $g \leq 13$ , tandis que Verra montre l'unirationalité de  $\mathcal{M}_{14}$  (cf. sections 3.1, 3.2). Nous évoquerons également l'utilisation récente de  $\mathcal{P}_g$  par Farkas et Popa pour étudier les diviseurs effectifs de  $\mathcal{M}_g$ . Les constructions plus anciennes de diviseurs dans  $\mathcal{M}_g$  étaient dues à Eisenbud et Harris [18], dans le but de simplifier et améliorer le résultat de Harris et Mumford montrant que  $\mathcal{M}_g$  est de type général pour  $g$  suffisamment grand, et faisaient intervenir la théorie de Brill-Noether. La conclusion de Farkas et Popa est que les familles de courbes contenues dans des surfaces  $K3$  fournissent des informations nouvelles sur le cône effectif de  $\mathcal{M}_g$  (cf. section 2.2).

Enfin, la plus grosse partie de l'exposé (section 4) concernera le résultat récent de [22] :

THÉORÈME 0.2. —  $\mathcal{F}_g$  est de type général pour  $g > 62$  et  $g = 47, 51, 55, 58, 59, 61$ .

Les résultats montrés dans [22] concernent en fait des espaces plus généraux de la forme  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_L$ , où  $L$  est un réseau de signature  $(2, n)$  avec  $n \geq 9$  (cf. section 4.1). Les méthodes développées utilisent comme dans [41], qui montre le résultat analogue pour les variétés abéliennes, l'uniformisation donnée par le théorème de Torelli [38], et la théorie des formes automorphes. Elles sont en contraste total avec les méthodes de géométrie algébrique esquissées dans les sections précédentes.

REMERCIEMENTS. — *Je remercie Valery Gritsenko, Klaus Hulek, Gregory Sankaran et Mihnea Popa pour leurs commentaires, et Jean-Michel Coron pour sa lecture attentive de ce texte et ses corrections.*

## 1. SECTIONS HYPERPLANES DES SURFACES $K3$

Le genre  $g$  étant fixé, l'espace de modules  $\mathcal{F}_g$  paramétrant les surfaces  $K3$  de genre  $g$  est de dimension 19. En fait les déformations d'une telle surface  $K3$  sont non obstruées, car  $h^2(S, T_S) = h^2(S, \Omega_S) = h^0(S, \Omega_S) = 0$  et  $h^0(S, T_S)$  vaut également 0 par dualité de Serre. Donc la famille universelle des déformations de  $S$  est lisse de dimension égale à

$$h^1(S, T_S) = h^1(S, \Omega_S) =: h^{1,1}(S) = 20.$$

(Ici on a utilisé l'isomorphisme  $T_S \cong \Omega_S$  dû au fait que  $K_S$  est trivial. On a également utilisé  $b_2(S) = 22$  et  $h^{2,0}(S) = 1$  pour conclure que  $h^{1,1}(S) = 20$ .) Mais les déformations qui préservent la polarisation forment seulement une hypersurface lisse dans cette famille. On a donc  $\dim \mathcal{F}_g = 19$ . Par ailleurs, soit  $\mathcal{L} \in \text{Pic } S$  un fibré inversible ample avec  $c_1(\mathcal{L})^2 = 2g - 2$ . Alors on a

$$h^1(S, \mathcal{L}) = 0 = h^2(S, \mathcal{L})$$

par le théorème d'annulation de Kodaira, et donc

$$h^0(S, \mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}c_1(\mathcal{L})^2 = g + 1,$$

par la formule de Riemann-Roch. Ainsi, la variété  $\mathcal{P}_g$  paramétrant les paires constituées d'une surface  $S$  polarisée de genre  $g$  et d'une courbe  $C$  lisse dans le système linéaire  $|\mathcal{L}|$  sur  $S$  est de dimension  $g + 19$ . Cette variété admet un morphisme évident  $q$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_g$ , qui est de dimension  $3g - 3$ .

Or on a  $3g - 3 > g + 19$  dès que  $g \geq 12$ . On en déduit qu'une courbe générique de genre au moins 12 n'est pas contenue dans une surface  $K3$ . Il serait tentant de penser qu'inversement, si  $g \leq 11$ , une courbe générique de genre  $g$  est une section hyperplane d'une surface  $K3$ , mais il se trouve que c'est faux en genre 10. La raison en est due au fait que dans ce cas les fibres de l'application  $q : \mathcal{P}_{10} \rightarrow \mathcal{M}_{10}$  sont de dimension 3, phénomène découvert et expliqué par Mukai [31] (cf. section 3.1 ci-dessous) : les surfaces  $K3$  de genre 10 sont des intersections complètes de trois sections hyperplanes d'une variété  $X \subset \text{Grass}(2, 7)$  de dimension 5, satisfaisant  $K_X = \mathcal{O}_X(-3)$ , où  $\mathcal{O}_X(1)$  est la restriction à  $X$  du fibré en droites de Plücker, de sorte qu'une courbe section hyperplane d'une telle surface est en fait l'intersection complète de quatre sections hyperplanes de  $X$ , et qu'elle est contenue dans une famille de dimension 3 de telles surfaces  $K3$  : connaissant  $C \subset X$ , pour déterminer  $S \subset X$  contenant  $C$ , il faut

prendre un hyperplan dans l'espace vectoriel de dimension 4 des formes linéaires sur  $X$  s'annulant sur  $C$ .

### 1.1. Les fibrés de Lazarsfeld

On considère ici le cas où  $S$  est une surface  $K3$  de groupe de Picard isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , engendré par la classe d'un fibré en droites ample  $\mathcal{L}$ , avec  $c_1(\mathcal{L})^2 = 2g - 2$ . Les courbes génériques  $C \subset S$ ,  $C \in |\mathcal{L}|$ , sont alors des courbes lisses qui satisfont par la propriété d'adjonction

$$\mathcal{L}|_C = K_C.$$

La théorie de Brill-Noether [2] montre que, si  $g = 2k$  ou  $g = 2k - 1$ , ces courbes admettent des  $g_{k+1}^1$ , c'est-à-dire des diviseurs  $D$  de degré  $k+1$ , satisfaisant la condition

$$h^0(\mathcal{O}_C(D)) \geq 2.$$

Dans l'article [29], Lazarsfeld montre que ces systèmes linéaires sont sans points de base. En fait, Lazarsfeld montre plus précisément le résultat suivant :

**THÉORÈME 1.1 ([29]).** — *Les courbes sections hyperplanes d'une surface  $K3$   $S$  sont génériques du point de vue de la théorie de Brill-Noether, dès qu'elles engendrent le groupe de Picard de  $S$ .*

Ceci signifie que lorsque le nombre  $\rho(g, d, r) := g - (r + 1)(g - d + r)$ , qui est la dimension « attendue » de la sous-variété  $W_d^r$  de  $\text{Pic}^d(C)$  paramétrant les fibrés en droites de degré  $d$  avec au moins  $r + 1$  sections indépendantes, est strictement négatif, ces courbes ne possèdent pas de  $g_d^r$ . En particulier elles ne possèdent pas de  $g_k^1$ , d'où l'absence de point de base. On en conclut également que les diviseurs de degré  $k + 1$  ont au plus deux sections.

Le théorème de Lazarsfeld est doublement intéressant. D'une part, il fournit une nouvelle preuve extrêmement élégante du théorème classique de Brill-Noether (l'existence de courbes  $C$  satisfaisant la conclusion du théorème 1.1) et, d'autre part, il montre que du point de vue de la théorie de Brill-Noether, les courbes sections hyperplanes des surfaces  $K3$  sont génériques, même si elle ne sont pas génériques en modules. C'est le point de départ de [45].

La construction des fibrés de Lazarsfeld, qui jouent un rôle crucial dans les articles [29], [44], [45] et [31], [33], est la suivante. On considère l'application d'évaluation

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C(D),$$

dont le noyau est un faisceau  $F$  localement libre de rang 2 sur  $S$ . On pose  $E := F^*$ .  $C$ 'est un fibré vectoriel de rang 2 sur  $S$ , satisfaisant

$$(1) \quad \det E = \mathcal{L}, \quad c_2(E) = k + 1,$$

$$(2) \quad h^0(S, E) = k + 2, \text{ si } g = 2k, \quad h^0(S, E) = k + 1, \text{ si } g = 2k - 1.$$

La restriction  $E|_C$  est de déterminant égal à  $K_C$ , possède le même nombre de sections indépendantes que  $E$  et est une extension

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow E|_C \rightarrow K_C(-D) \rightarrow 0$$

de  $K_C(-D)$  par  $\mathcal{O}_C(D)$ , comme le montre l'application du foncteur  $\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{O}_C)$  à la suite exacte

$$0 \rightarrow E^* \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow 0.$$

Un point important montré dans [44] est le fait que l'extension (3) n'est pas scindée, ce qui entraîne que ces fibrés restreints sont stables. Ceci montre que, si les courbes sections hyperplanes des surfaces  $K3$  sont génériques du point de vue de la théorie de Brill-Noether classique, elles ne le sont plus du tout (en genre  $g$  assez grand) du point de vue de la théorie de Brill-Noether « non abélienne », qui concerne l'étude des fibrés stables avec « beaucoup » de sections.

En genre impair, ces fibrés dépendent du choix de la courbe et du  $g_{k+1}^1$ . Les fibrés obtenus ainsi sont paramétrés par une surface  $K3$  « duale »  $\widehat{S}$ , qui est un espace de modules de fibrés stables sur  $S$ . Plus précisément, considérons l'espace de modules  $\widehat{S}$  des fibrés stables  $E$  de rang 2 sur  $S$  satisfaisant les conditions (1) avec  $g = 2k - 1$ . La formule de Riemann-Roch combinée avec la stabilité montre que ces fibrés satisfont  $h^0(S, E) \geq k + 1$ . La construction ci-dessus montre que de tels  $E$  existent, et satisfont génériquement  $h^0(S, E) = k + 1$ . Enfin les résultats de Mukai [30] montrent que  $\widehat{S}$  est encore une surface  $K3$ .

Cette surface duale joue un rôle crucial dans [32], où Mukai montre le résultat suivant :

THÉORÈME 1.2. —  $\mathcal{P}_{11}$  est birationnellement équivalent à  $\mathcal{M}_{11}$ .

Il s'agit dans ce cas de montrer qu'une courbe générique  $C$  de genre 11 détermine une unique surface  $K3$   $S$  qui la contient comme section hyperplane. La surface  $K3$   $S$  est construite (par bidualité) comme espace de modules de fibrés sur la surface  $K3$   $\widehat{S}$  ci-dessus, dont Mukai montre qu'elle est déterminée par  $C$  de la façon suivante.

Si  $C$  est contenue dans une surface  $K3$   $S$ , avec  $\text{Pic } S = \mathbb{Z}$  engendré par  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_S(C)$ , pour tout fibré stable  $E$  sur  $S$  satisfaisant les conditions (1), la restriction  $E|_C$  est de rang 2, de déterminant  $K_C$  et possède au moins 7 sections. Mukai montre que cette application de restriction réalise la surface  $\widehat{S}$  comme un schéma de Brill-Noether pour les fibrés de rang 2 sur  $C$ . Elle paramètre les fibrés stables de rang 2 sur  $C$ , de

déterminant  $K_C$ , possédant au moins 7 sections indépendantes. L'inclusion de  $C$  dans  $S$  est donnée par le fibré universel  $\widehat{E}$  sur  $C \times \widehat{S}$ , grâce auquel  $C$  paramètre des fibrés sur  $\widehat{S}$ .

En genre pair, le fibré de Lazarsfeld  $E$  est unique et ne dépend pas du choix de  $C$  ni du  $g_{k+1}^1$  choisi sur  $C$ . Ses  $k+2$  sections, qui s'annulent le long de sous-schémas de longueur  $k+1 = c_2(E)$  dans la surface  $S$ , fournissent un  $\mathbb{P}^{k+1} \subset S^{[k+1]}$ , où  $S^{[k+1]}$  est le schéma de Hilbert paramétrant les sous-schémas de dimension 0 et de longueur  $k+1$  de  $S$ . Cette construction joue un rôle déterminant dans [45].

## 2. Pic $\overline{\mathcal{M}}_g$ ET LA CONJECTURE DE LA PENTE

### 2.1. Diviseurs effectifs sur $\overline{\mathcal{M}}_g$

Dans ce paragraphe, on considérera plutôt le groupe de Picard fonctoriel (cf. [34]) de  $\mathcal{M}_g$  ou  $\overline{\mathcal{M}}_g$  que leur vrai groupe de Picard (ils deviennent égaux après tensorisation par  $\mathbb{Q}$ , et donc la différence est insignifiante ici). On sait d'après Harer [23] que  $\text{Pic } \mathcal{M}_g$  est engendré par  $\lambda$ , qu'on peut définir comme la puissance extérieure maximale du fibré de Hodge  $\mathcal{H}^{1,0}$  sur  $\mathcal{M}_g$  :

$$\lambda := \bigwedge^g R^0 \pi_* \omega_{C/\mathcal{M}_g},$$

où  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}_g$  est la courbe universelle (pour être rigoureux, il faut penser en termes de champs ici). La compactification  $\overline{\mathcal{M}}_g$  [17] est obtenue en ajoutant à  $\mathcal{M}_g$  les diviseurs paramétrant les courbes stables (nodales, avec un groupe fini d'automorphismes). Les classes de ces diviseurs (fonctoriels) dans  $\text{Pic } \overline{\mathcal{M}}_g$  sont notées  $\delta_i$ ,  $0 \leq i \leq \frac{g}{2}$ . Le diviseur  $\delta_0$  paramètre génériquement les courbes irréductibles avec un nœud, tandis que les  $\delta_i$ ,  $i > 0$ , paramètrent génériquement les courbes obtenues comme l'union de deux courbes de genre  $i$  et  $g-i$  respectivement, attachées en un seul point où la singularité est nodale.

Le fibré  $\lambda$  est positif sur  $\overline{\mathcal{M}}_g$  par la théorie de Hodge, mais cela ne dit rien sur les cônes ample (dont la clôture est le cône « nef ») et effectif (dont la clôture est le cône « psef ») de  $\overline{\mathcal{M}}_g$ . L'étude de ces cônes est le point essentiel du théorème de Harris et Mumford ([25], [24], [18]) :

THÉORÈME 2.1. —  $\overline{\mathcal{M}}_g$  est de type général pour  $g \geq 23$ .

L'étude du cône ample de  $\overline{\mathcal{M}}_g$  est menée dans [14]. Il se trouve cependant que le fibré canonique de  $\overline{\mathcal{M}}_g$  n'est pas ample (cf. [26] pour une étude qualitative de ce phénomène). Le critère suivant, montré par Harris et Mumford [25], réduit l'étude de la dimension de Kodaira de  $\mathcal{M}_g$  à l'étude du cône effectif de  $\overline{\mathcal{M}}_g$ .

THÉORÈME 2.2. —  $\mathcal{M}_g$  est de type général s'il existe un diviseur effectif sur  $\overline{\mathcal{M}}_g$  de classe  $a\lambda - \sum_i b_i \delta_i$ , avec

$$\frac{a}{b_i} < \frac{13}{2}, \forall i, 0 \leq i \leq \frac{g}{2}.$$

Dans l'article [18], Eisenbud et Harris utilisent les diviseurs construits à l'aide de la théorie de Brill-Noether pour vérifier ce critère. Ces diviseurs sont essentiellement de deux types, selon que  $g$  est pair ou impair. Si  $g$  est impair,  $g = 2k - 1$ , il y a un diviseur naturel  $D_{k+1}^1 \subset \mathcal{M}_g$  constitué des courbes possédant un  $g_{k+1}^1$  (ce diviseur est considéré dans [27] et comparé avec le diviseur virtuel (en fait un « vrai » diviseur d'après [46]) le long duquel des syzygies non triviales apparaissent). On sait bien que ce diviseur est déterminantiel (cf. [2]), mais pour calculer la classe de la clôture  $\overline{D_{k+1}^1}$  de ce diviseur dans  $\overline{\mathcal{M}}_g$ , il faut ici donner un sens précis à la notion de  $g_r^s$  pour les courbes singulières, ce qui suppose d'avoir une compactification valable de l'espace paramétrant les systèmes linéaires sur les fibres de  $\pi$ .

Si  $g$  est pair,  $g = 2k$ , la théorie de Brill-Noether fournit un substitut  $E_{k+1}^1$  du diviseur précédent : la courbe générique de genre  $2k$  possède un nombre fini de  $g_{k+1}^1$ , d'où un revêtement génériquement fini de  $\mathcal{M}_g$ , dont  $E_{k+1}^1$  est le diviseur de branchement.

THÉORÈME 2.3 ([18], Thm 2.1, Thm 3.1 et section 5). — Le diviseur  $\overline{D_{k+1}^1}$  est de classe  $a\lambda - \sum_i b_i \delta_i$ , avec

$$\frac{a}{b_0} = 6 + \frac{12}{g+1}.$$

Le diviseur  $\overline{E_{k+1}^1}$  est de classe  $a\lambda - \sum_i b_i \delta_i$  avec

$$\frac{a}{b_0} = 6 + \frac{7}{k+1} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Remarque 2.4. — La première partie de l'énoncé peut se retrouver comme une conséquence du théorème 1.1 de Lazarsfeld, et du calcul effectué pour la preuve du théorème 2.6 ci-dessous. En effet, un pinceau de Lefschetz de sections hyperplanes d'une surface  $K3$  de genre  $g = 2k$  fournit une courbe dans  $\overline{\mathcal{M}}_g$  qui ne rencontre ni les diviseurs  $\delta_i$ ,  $i > 0$ , ni  $\overline{D_{k+1}^1}$ .

Définissons la pente d'un diviseur de classe  $a\lambda - b\delta_0 - \sum_{i \geq 1} b_i \delta_i$  de  $\overline{\mathcal{M}}_g$  comme le nombre  $a/b$ . Harris et Morrison ont conjecturé que la pente d'un diviseur effectif de  $\overline{\mathcal{M}}_g$  est supérieure ou égale à  $6 + \frac{12}{g+1}$ , l'égalité étant atteinte en genre impair par les diviseurs de Brill-Noether  $\overline{D_{k+1}^1}$ .

## 2.2. Courbes contenues dans les surfaces $K3$

Dans [20], Farkas et Popa observent que le diviseur de  $\overline{\mathcal{M}}_{10}$  constitué des courbes contenues dans une surface  $K3$  est de pente  $7 < 6 + \frac{12}{11}$ , ce qui contredit la conjecture de Harris et Morrison. Le calcul de ce diviseur, effectué dans [15], utilise une condition nécessaire découverte par Wahl [47], pour qu'une courbe soit plongée dans une surface  $K3$  (voir aussi [8]). Cette condition fait intervenir « l'application de Wahl »

$$\bigwedge^2 H^0(C, K_C) \rightarrow H^0(C, K_C^{\otimes 3}),$$

que l'on peut définir de la façon suivante : on peut voir le terme de gauche comme l'espace

$$H^0(\mathbb{P}^{g-1}, \Omega_{\mathbb{P}^{g-1}}(2)), \quad \mathbb{P}^{g-1} = \mathbb{P}(H^0(C, K_C)),$$

et l'application de Wahl n'est autre que l'application de restriction :

$$H^0(\mathbb{P}^{g-1}, \Omega_{\mathbb{P}^{g-1}}(2)) \rightarrow H^0(C, \Omega_C \otimes K_C^{\otimes 2}) = H^0(C, K_C^{\otimes 3}).$$

THÉORÈME 2.5 ([47]). — *Si  $C$  est une courbe lisse ample contenue dans une surface  $K3$ , l'application de Wahl de  $C$  n'est pas surjective.*

Cuckierman et Ulmer ont montré en genre 10 que la condition nécessaire de Wahl est aussi une condition suffisante. On peut donner une structure schématique au diviseur sur lequel l'application de Wahl n'est pas surjective en genre 10 (ce diviseur est une hypersurface déterminantielle dans ce cas) et le calcul de sa classe en découle assez facilement.

Par ailleurs, en genre 11, rappelons l'isomorphisme birationnel

$$q : \mathcal{P}_{11} \cong \mathcal{M}_{11},$$

où  $p : \mathcal{P}_{11} \rightarrow \mathcal{F}_{11}$  est un ouvert dans un fibré en  $\mathbb{P}^{11}$ . Farkas et Popa montrent (c'est une conséquence du calcul ci-dessous) que les diviseurs provenant via  $q_*p^*$  d'un diviseur ample sur  $\overline{\mathcal{F}}_{11}$  sont de la pente de Harris et Morrison  $7 = 6 + \frac{12}{12}$ , et ont pour dimension de Iitaka 19. Dans ce cas, les diviseurs de Brill-Noether ne sont donc pas les seuls à être de la pente 7.

En tout genre, les courbes contenues dans une surface  $K3$  jouent enfin un rôle important dans cette étude de pentes et particulièrement pour la pente critique détectée par Harris et Morrison :

THÉORÈME 2.6 ([20]). — *Soit  $D$  un diviseur effectif sur  $\overline{\mathcal{M}}_g$  de pente  $< 6 + \frac{12}{g+1}$ . Alors  $D$  contient le lieu des courbes contenues dans une surface  $K3$  polarisée de genre  $g$ , c'est-à-dire l'image de  $\mathcal{P}_g$  dans  $\mathcal{M}_g$ .*

Farkas et Popa calculent pour cela le degré des diviseurs  $\lambda$  et  $\delta_i$  sur la courbe suivante contenue dans  $\overline{\mathcal{M}}_g$  et bien définie à déformation près. On considère une surface  $K3$  polarisée  $(S, \mathcal{L})$  de genre  $g$  générique, et on prend un pinceau de Lefschetz  $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^g = \mathbb{P}(H^0(S, \mathcal{L}))$ , qui s'envoie naturellement dans  $\overline{\mathcal{M}}_g$  puisqu'il paramètre des courbes nodales. Soit  $B \subset \overline{\mathcal{M}}_g$  la courbe ainsi obtenue. Les degrés des diviseurs  $\lambda$  et  $\delta_0$  sur  $B$  sont aisés à calculer. Le nombre  $N := \text{deg } \delta_{0|B}$  est le nombre de fibres singulières du pinceau, qui est donné par la formule de Noether :

$$\chi_{\text{top}}(\tilde{S}) = 2\chi_{\text{top}}(\text{fibre}) + N,$$

où  $\tilde{S}$  est la surface obtenue par éclatement des  $2g - 2$  points de base du pinceau. On obtient donc :

$$24 + 2g - 2 = 2(2 - 2g) + N,$$

soit  $N = 18 + 6g = 6(g + 3)$ .

Par ailleurs, observons que le fibré  $\mathcal{H}^{1,0}$  restreint à  $B \cong \mathbb{P}^1$  est de rang  $g$  et satisfait

$$\text{rang } \mathcal{H}^{1,0} = g, H^0(B, \mathcal{H}^{1,0}(-2)) = H^0(S, K_S), H^1(B, \mathcal{H}^{1,0}(-2)) = H^1(S, K_S).$$

On en déduit que

$$\chi(B, \mathcal{H}^{1,0}(-2)) = h^0(S, K_S) - h^1(S, K_S) = 1 = \text{deg } \lambda|_B - 2g + g,$$

soit  $\text{deg } \lambda|_B = g + 1$ . Notons finalement que les diviseurs  $\delta_i, i \geq 1$ , sont de degré 0 sur  $B$ , qui paramètre un pinceau de Lefschetz sans fibre irréductible.

Un diviseur  $a\lambda - \sum_i b_i \delta_i$  est donc de degré négatif sur  $B$  dès que  $a(g+1) < 6b_0(g+3)$ , c'est-à-dire

$$\frac{a}{b_0} < 6 + \frac{12}{g+1}.$$

### 3. UNIRATIONALITÉ DES ESPACES DE MODULES EN PETIT GENRE

#### 3.1. Surfaces $K3$

Mukai a montré dans une série de travaux (cf. [31], [33], par exemple) l'unirationalité de nombreux espaces de modules  $\mathcal{F}_g$ , pour  $g$  petit.

THÉORÈME 3.1. —  $\mathcal{F}_g$  est unirationnel pour  $g \leq 13$ , et pour  $g = 18, 20$ .

Le cas  $g = 11$  se déduit de l'unirationalité de  $\mathcal{M}_{11}$  et de l'isomorphisme birationnel  $\mathcal{P}_{11} \cong \mathcal{M}_{11}$  du théorème 1.2. Pour les autres valeurs de  $g$ , ces résultats d'unirationalité sont obtenus en réalisant les surfaces  $K3$   $S$  polarisées génériques d'un genre donné comme des sous-variétés de grassmanniennes, obtenues comme lieu des zéros d'une section d'un fibré vectoriel homogène. Cette réalisation se fait à l'aide d'un fibré

vectoriel  $E$  sur  $S$  possédant beaucoup de sections, et satisfaisant  $\det E = \mathcal{L}$ , où  $\mathcal{L}$  est la polarisation de genre  $g$  sur  $S$ . Ici des questions de divisibilité de  $g$  interviennent, qui sont liées au cas  $\rho = 0$  dans la théorie de Brill-Noether. Si on considère le point de vue des fibrés vectoriels de Lazarsfeld associés à des  $g_d^r$  sur  $C \subset S$ ,  $C \in |\mathcal{L}|$ , l'égalité  $\rho = 0$  correspond en fait à la rigidité du fibré vectoriel associé (cf. [29]).

Prenons l'exemple du genre 10. On a  $10 = 2 \cdot 5$  et donc  $\rho = 0$  est satisfait pour les  $g_6^1$  sur  $C \subset S$ . Le fibré de Lazarsfeld associé  $E$  est donc de rang 2, possède 7 sections indépendantes, et on peut montrer que ses sections fournissent un plongement

$$S \subset \text{Grass}(2, 7).$$

Notons  $V = H^0(S, E)$ ; soit  $\mathcal{K}$  le noyau de l'application d'évaluation (surjective)

$$(4) \quad V \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow E.$$

Le fibré  $\bigwedge^4 \mathcal{K}^*$  est isomorphe à  $\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}$ , car  $\det \mathcal{K} = \mathcal{L}^{-1}$ . On obtient donc

$$H^0(S, \bigwedge^4 \mathcal{K}^*) = H^0(S, \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}) = \text{Ker}(V \otimes H^0(S, \mathcal{L}) \rightarrow H^0(S, E \otimes \mathcal{L})).$$

Il est facile de voir que cette flèche de multiplication est surjective, et d'autre part que  $h^0(S, E \otimes \mathcal{L}) = 43$ , comme le montre la formule de Riemann-Roch. Il en résulte que le noyau de cette flèche, c'est-à-dire  $H^0(S, \bigwedge^4 \mathcal{K}^*)$  est de rang  $77 - 43 = 34$ . Mais alors l'application naturelle  $\bigwedge^4 V^* \rightarrow H^0(S, \bigwedge^4 \mathcal{K}^*)$  a un noyau de rang au moins 1. Notant  $U$  un élément non nul de ce noyau, cela signifie que dans ce plongement,  $S$  est contenue dans la sous-variété  $X$  de  $\text{Grass}(2, 7)$  définie par cette section  $U$  de  $\bigwedge^4 \mathcal{K}^*$ .

Par ailleurs, on dispose aussi de la flèche naturelle surjective induite par (4) :

$$(5) \quad \bigwedge^2 V \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow \bigwedge^2 E = \mathcal{L}.$$

Les sections globales du terme de gauche forment un espace de dimension 21, tandis que  $h^0(S, \mathcal{L}) = 11$ . Donc on a 10 éléments indépendants de  $\bigwedge^2 V$  qui s'annulent dans  $H^0(S, \mathcal{L})$ , soit encore 10 sections du fibré de Plücker sur la grassmannienne qui s'annulent sur  $S$ . Mais en fait 7 de ces sections s'annulent déjà sur  $X$ . En effet, voyons aussi  $\mathcal{L}$  comme  $\bigwedge^5 \mathcal{K}^* = \det \mathcal{K}^*$ . Alors pour  $v^* \in V^*$ ,  $U \wedge v^*$  s'annule dans  $H^0(X, \bigwedge^5 \mathcal{K}^*)$ .

En conclusion, on trouve que  $S \subset X$  satisfait seulement trois équations de Plücker supplémentaires. On n'a évidemment pas prouvé ici que  $U$  est générique, ni que les trois équations supplémentaires sont transverses, mais notons inversement que, si  $U$  est un élément générique de  $\bigwedge^4 V^*$ , et  $X$  est définie comme le lieu des zéros de  $U$ , vu comme section du fibré  $\bigwedge^4 \mathcal{K}^*$  sur  $G(2, 7)$ , alors  $X$  est lisse,  $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ ,  $\dim X = 5$  et  $K_X = \mathcal{O}_X(-3)$ . L'intersection de  $X$  avec trois sections hyperplanes génériques de la grassmannienne est alors une surface lisse régulière (par Lefschetz), à fibré canonique trivial et donc une surface  $K3$ . On vérifie que ces surfaces  $K3$  sont de

degré 18 par un calcul de nombre d'intersection sur  $G(2, 7)$ , et génériques. Cela montre bien l'unirationalité, puisqu'une surface  $K3$  générique de genre 10 est paramétrée par le choix d'un élément générique de  $\bigwedge^4 V^*$  et d'un sous-espace de rang 3 de  $\bigwedge^2 V^*$ .

### 3.2. Courbes

THÉORÈME 3.2. — *Les espaces de modules de courbes  $\mathcal{M}_g$  sont unirationnels pour  $g \leq 14$ .*

Le cas  $g = 14$  a été obtenu récemment par Verra, tandis que les genres 11, 12, 13 avaient fait l'objet de travaux antérieurs par Sernesi [40] et Chang-Ran [12]. Pour les genres plus petits, excepté en genre 10, on peut se ramener au cas déjà mentionné des surfaces  $K3$ , puisque  $\mathcal{P}_g$ , qui est un ouvert de Zariski dans un fibré projectif sur  $\mathcal{F}_g$ , domine alors  $\mathcal{M}_g$ .

Le principe de la preuve de Verra est le suivant : la théorie de Brill-Noether [2] dit qu'une courbe générique  $C$  de genre 14 possède un nombre fini de  $g_8^1$ . Choisissons un tel diviseur  $D$  sur  $C$ . Alors  $K_C(-D)$  est de degré 18 et, d'après Riemann-Roch,

$$h^0(C, K_C(-D)) = 7.$$

Le système linéaire  $|K_C(-D)|$  fournit un plongement de  $C$  dans  $\mathbb{P}^6$ . On a alors  $h^0(C, K_C(-D)^{\otimes 2}) = 23$ , et on dispose donc de 5 quadriques  $Q_1, \dots, Q_5$  contenues dans  $\mathbb{P}^6$  et contenant  $C$ . Admettons qu'elles sont génériquement en intersection complète et que la courbe résiduelle  $D$  définie par

$$D \cup C = Q_1 \cap \dots \cap Q_5$$

est lisse et réduite. Les invariants numériques de  $D$  se calculent en utilisant les méthodes de liaison. Cette courbe  $D$  est alors de degré  $14 = 32 - 18$ , non dégénérée dans  $\mathbb{P}^6$  (c'est-à-dire non contenue dans un hyperplan) et de genre 8.

La construction peut s'inverser : partant d'une courbe  $D$  de genre 8 munie d'un système linéaire  $|\mathcal{M}|$  de degré 14 avec 7 sections, on obtient par liaison avec cinq quadriques contenant  $D$  une courbe de genre 14 et de degré 18.

Notons que le système linéaire  $|\mathcal{M}|$  est ici générique au sens de la théorie de Brill-Noether. On a donc  $\mathcal{M} = K_D(-x_1 - \dots - x_4 + x_5 + \dots + x_8)$  pour des points  $x_1, \dots, x_8$  génériques de  $D$ .

Il reste donc essentiellement à montrer que la variété  $\mathcal{M}_8^8$  paramétrant les classes d'isomorphisme de courbes  $D$  de genre 8 avec 8 points marqués est unirationnel.

Ici, Verra utilise une méthode proche de celles de Mukai : sur une courbe  $D$  de genre 8, il existe un fibré  $E'$  de rang 2, de déterminant  $K_D$ , possédant 6 sections (c'est la restriction d'un fibré du type Lazarsfeld sur  $D$  pour un plongement de  $D$  dans une surface  $K3$ ). Plus intrinsèquement, ces fibrés sont des extensions non scindées

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow E' \rightarrow K_D \otimes \mathcal{G}^{-1} \rightarrow 0,$$

où  $\mathcal{G}$  est un fibré inversible de degré 5 sur  $D$  avec deux sections, ce qui entraîne que  $K_D \otimes \mathcal{G}^{-1}$  possède 4 sections. Ce qui caractérise les restrictions des fibrés de type Lazarsfeld est le fait que l'extension (bien que non nulle) induise une suite exacte au niveau des sections globales, de sorte que l'on a :

$$h^0(D, E') = h^0(D, \mathcal{G}) + h^0(D, K_D \otimes \mathcal{G}^{-1}) = 6.$$

Les sections de ce fibré fournissent un plongement de  $D$  dans la grassmannienne  $G(2, 6)$  qui est de dimension 8 et a pour fibré canonique  $\mathcal{L}^{-6}$ , où  $\mathcal{L}$  est le fibré de Plücker. La courbe  $D$  est alors l'intersection complète de 7 sections hyperplanes de  $G(2, 6)$ .

Notons pour conclure que

$$h^0(G(2, 6), \mathcal{L}) = 15.$$

Soient 8 points en position générique  $x_1, \dots, x_8$  sur  $G(2, 6)$ . Il existe un espace vectoriel de dimension 7 de sections de  $\mathcal{L}$  s'annulant sur les  $x_i$ . L'intersection complète définie par ce système linéaire est bien une courbe de genre 8 plongée canoniquement, avec 8 points marqués.

En conclusion, et modulo la preuve qu'on obtient bien la courbe générique de genre 14 de cette manière, ce qui se fait par des arguments de théorie des déformations, Verra obtient ainsi une application rationnelle dominante de  $G(2, 6)^8$  vers  $\mathcal{M}_{14}$ .

## 4. LE THÉORÈME DE GRITSENKO-HULEK-SANKARAN

### 4.1. Théorème de Torelli

Soit  $S$  une surface  $K3$ . L'espace  $H^{2,0}(S) = H^0(S, K_S)$  est un espace vectoriel complexe de rang 1, naturellement contenu dans  $H^2(S, \mathbb{C}) = H^2(S, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ , engendré par la classe  $\omega$  d'une forme holomorphe de degré 2, partout non nulle sur  $S$ . Si par ailleurs  $S$  est polarisée par la donnée d'un fibré ample indivisible  $\mathcal{L} \in \text{Pic } S$ , la classe  $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(S, \mathbb{Z})$  de la polarisation est de type  $(1, 1)$  dans la décomposition de Hodge, et donc orthogonale à  $H^{2,0}(S)$  relativement à la forme d'intersection.

La classe  $\omega \in H^2(S, \mathbb{C})$  satisfait les deux propriétés suivantes :

$$(6) \quad \langle \omega, \omega \rangle = 0, \quad \langle \omega, \bar{\omega} \rangle > 0$$

(ce sont les relations bilinéaires de Hodge-Riemann, qui sont élémentaires à vérifier dans ce cas).

Une autre manière de formuler ces propriétés consiste à observer que le plan réel orienté  $P \subset H^2(S, \mathbb{R})^{\perp c_1(\mathcal{L})}$  engendré par  $\Re \omega$  et  $\Im \omega$  est positif pour la forme d'intersection sur  $H^2(S, \mathbb{R})^{\perp c_1(\mathcal{L})}$ . Ce plan muni de la forme d'intersection et de son orientation détermine en fait  $\omega$ , du fait de la première égalité dans (6). On notera  $L$  le

réseau  $H^2(S, \mathbb{Z})^{\perp c_1(\mathcal{L})}$  muni de la forme d'intersection induite. (Dans la suite,  $L$  sera vu comme un réseau abstrait, indépendant de  $S$ .) Comme la forme d'intersection sur  $L_{\mathbb{R}}$  est de signature  $(2, 19)$ , le domaine paramétrant les plans positifs orientés de  $L_{\mathbb{R}}$  (ou encore les droites complexes  $\langle \alpha \rangle$  de  $L_{\mathbb{C}}$  satisfaisant (6)) possède deux composantes. On fixe une composante qu'on notera  $\mathcal{D}_L$ .

Choisissons un élément  $l \in 3U \oplus 2E_8^-$  non divisible et d'auto-intersection  $2g - 2$ . Pour toute surface  $K3$   $S$  munie d'une polarisation  $\mathcal{L}$  de genre  $g$ , on a un isomorphisme :

$$(H^2(S, \mathbb{Z}), \langle, \rangle) \cong 3U \oplus 2E_8^-, \quad c_1(\mathcal{L}) \mapsto l,$$

envoyant de plus  $\omega$  dans  $\mathcal{D}_L$ . Un tel isomorphisme est défini modulo l'action du groupe discret  $\Gamma \subset O(L)$  défini comme le sous-groupe (d'indice 2) du groupe des restrictions à  $L$  du groupe des automorphismes de  $3U \oplus 2E_8^-$  agissant trivialement sur  $l$ , et préservant la composante  $\mathcal{D}_L$ .

L'application des périodes  $\mathcal{P}$ , qui associe à une surface  $K3$  polarisée  $(S, \mathcal{L})$  la droite complexe  $H^{2,0}(S) \subset H^2(S, \mathbb{C})^{\perp c_1(\mathcal{L})}$  peut donc être interprétée comme une application à valeurs dans  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_L$ . Le théorème de Torelli pour les surfaces  $K3$  algébriques est le suivant :

**THÉORÈME 4.1 ([38]).** — *L'application  $\mathcal{P}$  est injective de l'espace des modules des surfaces  $K3$  polarisées de genre  $g$  sur un ouvert (de Zariski) de  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_L$ .*

*Remarque 4.2.* — L'espace de modules de surfaces  $K3$  polarisées de genre  $g$  a une structure de variété complexe quasi-projective (cf. [43]), de même que le quotient  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_L$  [5]. L'application des périodes est holomorphe par les travaux de Griffiths, et elle est même en fait algébrique. C'est pourquoi désormais on s'occupera uniquement de la géométrie du quotient  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_L$ .

*Remarque 4.3.* — Les surfaces  $K3$  lisses polarisées ne suffisent manifestement pas à remplir le domaine  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_L$ . La raison est que des singularités « insignifiantes » telles que des points doubles ordinaires imposées à une surface  $K3$  de genre  $g$  (degré  $2g - 2$ ) fournissent par désingularisation des surfaces  $K3$  munies d'un fibré positif de degré  $2g - 2$  dont le seul défaut est de n'être plus ample. Ces surfaces à points doubles, déjà mentionnées dans l'introduction, apparaîtront dans la section 4.4. Le diviseur exceptionnel  $v$  de la désingularisation au-dessus de chaque point double d'une telle surface  $S$  est en effet un vecteur d'auto-intersection  $-2$  qui fournit une réflexion  $\gamma_v \in \Gamma$  du réseau  $H^2(S, \mathbb{Z})^{\perp c_1(\mathcal{L})}$  préservant la classe  $\omega \in H^{2,0}(S)$ . Le lieu des points paramétrant de telles surfaces apparaît donc comme lieu de branchement de l'application quotient  $\mathcal{D}_L \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{D}_L$ .

## 4.2. Formes modulaires

Si  $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$  est un caractère (nécessairement d'ordre fini), une forme modulaire de poids  $k$  sur  $\mathcal{D}_L$  relativement à  $\Gamma$  et à  $\chi$  est une fonction holomorphe  $f$  ayant un degré d'homogénéité égal à  $-k$ , définie sur le cône affine  $\mathcal{D}_L^{\text{aff}} \subset L_{\mathbb{C}}$  au-dessus de  $\mathcal{D}_L$ , et satisfaisant la condition

$$f(\gamma \cdot u) = \chi(\gamma)f(u), \forall u \in \mathcal{D}_L^{\text{aff}}, \forall \gamma \in \Gamma.$$

Pour déduire d'une telle forme modulaire une forme canonique sur  $\mathcal{D}_L$  invariante sous  $\Gamma$ , il faut d'une part que le poids  $k$  soit égal à 19, et d'autre part que le caractère  $\chi$  soit donné par le déterminant. En effet, la quadrique  $Q$  de  $\mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$  définie par  $\langle \omega, \omega \rangle = 0$  a pour fibré canonique  $K_Q = \mathcal{O}_Q(-19)$ . Cela signifie qu'il existe une section holomorphe partout non nulle de  $K_Q(19)$ , dont on voit aisément qu'elle est invariante sous  $\Gamma$ . Notons  $\text{Vol}$  son image inverse sur  $\mathcal{D}_L^{\text{aff}}$ . Alors pour toute fonction holomorphe  $f$  sur  $\mathcal{D}_L^{\text{aff}}$  de degré d'homogénéité  $-19$ ,  $f \text{Vol}$  descend en une forme canonique sur  $\mathcal{D}_L$ . Si de plus  $f$  est une forme modulaire,  $f \text{Vol}$  descend en une forme canonique sur  $\mathcal{D}_L$  invariante sous  $\Gamma$ .

En fait, le but étant de calculer les formes pluricanoniques sur  $\mathcal{F}_g$ , c'est-à-dire les sections de  $K_{\mathcal{F}_g}^{\otimes k}$  pour  $k$  grand, on considérera les formes modulaires de poids  $19k$  associées au caractère  $\det^k$ , qui sont des candidats pour fournir des sections de  $K_{\mathcal{F}_g}^{\otimes k}$ .

Pour décider si une telle forme modulaire fournit une forme pluricanonique, il faut considérer les problèmes suivants :

1. Suffit-il qu'une forme soit invariante pour « descendre » à  $\mathcal{F}_g$  ? Le problème est lié au fait que l'action de  $\Gamma$  n'est pas libre et a deux aspects différents :
  - a) (Voir section 4.3.) Lorsque le lieu fixe d'un élément de  $\Gamma$  est de codimension  $\geq 2$ , des singularités apparaissent sur le quotient au voisinage de ce lieu fixe. Les formes obtenues s'étendent-elles à une désingularisation ?
  - b) (Voir section 4.4.) Lorsque le lieu fixe d'un élément de  $\Gamma$  est de codimension 1, l'application quotient est ramifiée le long de ce lieu, et une forme  $m$ -canonique invariante ne peut descendre que si elle s'annule à l'ordre  $m$  le long du diviseur de ramification.
2. Le dernier point important concerne le fait qu'on s'intéresse à une compactification de  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_L$ . Il faut donc étudier le comportement à l'infini des formes pluricanoniques déduites de formes modulaires (voir section 4.5).

## 4.3. Étude des singularités

L'action de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{D}_L$  est bonne au sens où les groupes d'isotropie sont finis. En effet, le groupe des automorphismes orthogonaux de  $L_{\mathbb{R}}$  préservant un sous-espace

positif  $P$  de rang (maximal) 2 est compact, et donc son intersection avec le groupe discret  $\Gamma \subset \text{Aut } L$  est finie.

Cependant cette action n'est pas libre, et les groupes d'isotropie non triviaux créent des singularités-quotients. Si  $G$  est le groupe d'isotropie d'un point  $\omega \in \mathcal{D}_L$ , par le principe de linéarisation, l'allure locale de  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_L$  au voisinage de  $\omega$  est celle d'un quotient par un groupe linéaire  $G \backslash \mathbb{C}^{19}$ .

L'étude de la dimension de Kodaira nécessite en principe l'étude des singularités. Comme dans [41], ce problème est ici contourné par la preuve que les singularités apparaissant dans ce quotient sont *canoniques*. Rappelons d'abord qu'une variété complexe est à singularités  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein si, notant  $j$  l'inclusion du lieu lisse  $X_{\text{reg}}$  dans  $X$ , pour un entier  $k > 0$ , le faisceau  $j_* K_{X_{\text{reg}}}^{\otimes k}$  est un faisceau inversible sur  $X$  (qu'on notera abusivement  $K_X^{\otimes k}$ ). Les singularités quotients sont  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein.

DÉFINITION 4.4. — Une variété complexe  $X$  à singularités  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein est dite à singularités canoniques si, pour tout ouvert  $V$  de  $X$ , notant  $\tau : \widetilde{V} \rightarrow V$  une désingularisation, on a une identification naturelle donnée par la restriction à  $\tau^{-1}(V_{\text{reg}})$

$$H^0(\widetilde{V}, K_{\widetilde{V}}^{\otimes k}) = H^0(V_{\text{reg}}, K_{V_{\text{reg}}}^{\otimes k}),$$

où  $k$  est comme ci-dessus et  $V_{\text{reg}} \subset V$  est l'intersection de  $V$  avec l'ouvert de lissité de  $X$ .

On peut reformuler la définition en termes de « discrepancies » : elles sont définies comme les multiplicités des diviseurs exceptionnels de  $\widetilde{X}$  dans l'expression de  $K_{\widetilde{X}}^{\otimes k}$  à l'aide de  $\tau^* K_X^{\otimes k}$  et des diviseurs exceptionnels dans  $\text{Pic } \widetilde{X}$ . Les singularités sont canoniques lorsque ces multiplicités sont  $\geq 0$ .

Dans le cas des singularités quotients, supposant que  $G$  est un groupe fini agissant sur une variété lisse  $Y$ , et supposant qu'aucun élément  $g$  de  $G$  ne possède un lieu fixe de codimension 1 (dans le cas contraire,  $g$  est appelé une quasi-réflexion), il est clair par le lemme de Hartogs que les singularités de  $G \backslash Y$  sont canoniques si, et seulement si, localement, les formes pluricanoniques sur une désingularisation  $\widetilde{G \backslash Y}$  s'identifient aux formes pluricanoniques sur  $Y$  invariantes sous  $G$ .

Le critère de Reid-Tai [41] fournit une condition très simple pour qu'une singularité quotient linéarisée  $G \backslash \mathbb{C}^N$  (où  $G$  ne contient pas de pseudo-réflexions) soit canonique.

THÉORÈME 4.5. — Les singularités de  $G \backslash \mathbb{C}^N$  sont canoniques si pour tout  $g \in G$ ,  $g \neq \text{Id}$ , on a  $\Sigma(g) \geq 1$ .

Ici l'invariant  $\Sigma(g)$  (parfois appelé « l'âge » de  $g$ ) est défini de la façon suivante : écrivons les valeurs propres de  $g$  (peut-être répétées)

$$e^{2i\pi\lambda_i}, \lambda_i < 1, 1 \leq i \leq N.$$

Alors  $\Sigma(g) = \sum_i \lambda_i$ . Une étape importante de [22] est le résultat suivant, obtenu en vérifiant le critère 4.5 :

THÉOREME 4.6. — *Les singularités du quotient  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_L$  sont canoniques en dehors des points fixés par des quasi-réflexions.*

Ce résultat est montré plus généralement pour tout quotient de la forme  $\Gamma' \backslash \mathcal{D}_{L'}$ , où  $L'$  est un réseau de signature  $(2, n)$  avec  $n \geq 6$  et  $\Gamma' \subset O(L')$  agit sur le domaine  $\mathcal{D}_{L'} \subset \mathbb{P}(L'_\mathbb{C})$  défini par (6).

#### 4.4. Ramification

Lorsqu'on prend un quotient par un groupe agissant discrètement avec des groupes d'isotropie finis, de sorte que localement la situation est celle d'un quotient par un groupe fini, l'application quotient est ramifiée le long des lieux fixes de quasi-réflexions. En fait, si  $g$  est une quasi-réflexion d'ordre  $k$  agissant sur  $X$ , en linéarisant l'action de  $g$ , on voit que l'application quotient

$$X \rightarrow Y := \langle g \rangle \backslash X$$

a pour allure locale

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n), y_n = z_n^k, y_i = x_i, i < n.$$

Cette application est ramifiée à l'ordre  $k - 1$  le long de l'hypersurface  $z_n = 0$ . L'image inverse d'une  $n$ -forme sur  $Y$  fournit une  $n$ -forme sur  $X$  invariante sous  $g$ , s'annulant à l'ordre  $k - 1$  le long du lieu fixe de  $g$ . Plus généralement, une forme  $m$ -canonique invariante sur  $X$  ne proviendra d'une forme  $m$ -canonique sur  $Y$  que si elle s'annule à l'ordre  $m(k - 1)$  le long du lieu fixe de  $g$ .

Revenant au cas considéré de l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{D}_L$ , le résultat suivant est montré dans [22] :

THÉOREME 4.7. — i) *Les quasi-réflexions de  $\Gamma$  sont d'ordre 2.*

ii) *De plus, elles sont exactement de deux types :*

1. *Les réflexions par rapport à un élément  $e \in L$  tel que  $\langle e, e \rangle = -2$ .*
2. *Les opposés de réflexions par rapport à un élément  $e \in L$  tel que  $\langle e, e \rangle = -(2g - 2)$ . Dans ce dernier cas, l'élément  $e$  doit être tel que la divisibilité de l'image de  $e$  dans  $L^*$  soit exactement  $g - 1$  ou  $2g - 2$ .*

Pour la preuve de i), on prend un élément  $\gamma \in \Gamma \subset PGL(L_\mathbb{C})$  possédant un lieu fixe de codimension 1 dans  $\mathcal{D}_L$ , qui est un ouvert dans la quadrique de  $\mathbb{P}(L_\mathbb{C})$  définie par  $\langle \omega, \omega \rangle = 0$ . Comme cette quadrique est non dégénérée de rang  $> 4$ , cela entraîne qu'un espace propre de  $\gamma$  est de codimension 1 dans  $L_\mathbb{C}$ . Donc  $\gamma$  n'a que deux valeurs

propres distinctes sur  $L_{\mathbb{C}}$ , dont une de multiplicité  $> \frac{1}{2} \dim L_{\mathbb{C}}$ . Il en résulte que les valeurs propres de  $\gamma$  sont réelles, et donc que  $\gamma^2 = 1$ .

La preuve de ii) (voir [22], §3) nécessite une analyse délicate du réseau  $L$ , qui est l'orthogonal d'un élément  $l$  tel que  $\langle l, l \rangle = 2g - 2$  dans le réseau unimodulaire  $3U \oplus 2E_8^-$ . Les réflexions de  $L_{\mathbb{R}}$  induisant des quasi-réflexions de  $\mathcal{D}_L$  sont toujours au signe près de la forme

$$u \mapsto u - \frac{2\langle u, r \rangle}{\langle r, r \rangle} r,$$

pour un  $r \in L_{\mathbb{R}}$ . Il s'agit de discuter à quelle condition une telle réflexion ou son opposé est dans  $\Gamma$ , c'est-à-dire non seulement préserve le réseau  $L$ , mais provient d'un automorphisme du réseau ambiant  $3U \oplus 2E_8^-$  préservant  $l$  et préservant la composante  $\mathcal{D}_L$ .

*Remarque 4.8.* — En combinant ce qui précède et le contenu de la section 4.3, on commence à voir quelles sont les formes  $m$ -canoniques  $\Gamma$ -invariantes sur  $\mathcal{D}_L$  qui descendent sur  $\mathcal{F}_g$  : ce sont celles qui s'annulent à l'ordre  $m$  sur les diviseurs des réflexions décrites ci-dessus. On a cependant un peu triché ici en ignorant le fait que certains groupes d'isotropie peuvent contenir un élément dont une puissance est une réflexion, de sorte qu'une singularité non canonique pourrait se cacher dans un diviseur de branchement de l'application quotient. Ce problème est considéré soigneusement dans [22, §2].

#### 4.5. Compactification

Le quotient  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_L$  n'est pas compact. La compactification de Satake consiste à ajouter à  $\mathcal{D}_L$  les composantes de bord rationnelles, à mettre une topologie adéquate sur cet ensemble étendu, et à prendre le quotient par  $\Gamma$ . Ici les composantes de bord se voient bien sur la définition de  $\mathcal{D}_L \subset \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$  par les équations (6).  $\mathcal{D}_L$  est donc un ouvert dans la quadrique d'équation  $\langle \omega, \omega \rangle = 0$  dans  $\mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$ , dont l'adhérence dans cette quadrique est définie par

$$\langle \omega, \bar{\omega} \rangle \geq 0.$$

Il y a donc deux sortes de composantes de bord, selon que le sous-espace vectoriel complexe (défini sur  $\mathbb{R}$ ) de  $L_{\mathbb{C}}$  engendré par  $\omega$  et  $\bar{\omega}$  est de dimension 1 ou 2. Les composantes de bord rationnelles sont celles pour lesquelles cet espace complexe est défini sur  $\mathbb{Q}$ . En d'autres termes, les composantes de bord rationnelles sont en bijection avec les sous-espaces isotropes de  $L_{\mathbb{Q}}$  de dimension 1 ou 2. Ceux-ci fournissent dans  $\mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$  des composantes de bord de dimensions respectives 0 et 1.

La compactification de Satake est munie d'une structure de variété projective à l'aide des formes modulaires qui fournissent un plongement projectif (c'est le point de vue de Baily-Borel). Ceci permet de voir  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_L$  comme une variété quasi-projective. Cependant, étant très singulière, elle ne permet pas d'étudier la dimension de Kodaira

de  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_L$ . La question qui se pose ici est la suivante : à quelle condition une forme modulaire de poids  $19k$  associée au caractère  $\det^k$  fournit-elle une forme pluricanonique sur une compactification/désingularisation de  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_L$  ?

Ce problème est théoriquement résolu dans [3, chapitre IV], qui utilise les compactifications toroïdales de [3] (voir aussi [35]) dépendant de choix combinatoires. La géométrie torique apparaît pour chaque composante de bord  $F$ , via le réseau  $U_{F,\mathbb{Z}} := U_F \cap \Gamma$ , où  $U_F$  est le centre du radical unipotent du groupe stabilisateur de  $F$  dans  $O(2, 19)$ . Le principe des compactifications toroïdales consiste à introduire tout d'abord des compactifications toriques des quotients  $U_{F,\mathbb{C}} \cdot \mathcal{D}_L / U_{F,\mathbb{Z}}$  compatibles avec l'action de  $\Gamma$ . On quotiente alors l'intérieur de la clôture de l'image de  $\mathcal{D}_L$  dans chacune de ces compactifications par le groupe  $\Gamma_F / U_F$ , où  $\Gamma_F \subset \Gamma$  est le stabilisateur de  $F$ . Finalement on recolle ces compactifications partielles à l'aide des compatibilités imposées.

Même si on peut choisir les compactifications toriques lisses, il subsiste le problème des quotients supplémentaires par les groupes  $\Gamma_F / U_F$ , pour lesquels on est encore confronté aux questions 1, a) et b) soulevées dans la section 4.2. Un des résultats montrés dans [22] est que ces obstructions à étendre des formes pluricanoniques ne se présentent en fait pas :

**THÉORÈME 4.9.** — *Pour une compactification toroïdale adéquate  $\widehat{\Gamma \backslash \mathcal{D}_L}$  de  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_L$ , les singularités sont canoniques, et de plus aucun diviseur à l'infini n'est diviseur de ramification de l'application quotient locale décrite ci-dessus.*

Il en résulte que, pour qu'une forme modulaire  $f$  de poids 19 et associée au caractère  $\det$  fournisse une forme pluricanonique sur  $\widehat{\Gamma \backslash \mathcal{D}_L}$  (ou n'importe quelle désingularisation), il suffit que  $f \text{Vol}$  s'étende en une forme canonique sur chaque compactification torique partielle. Mais la forme volume invariante sur un tore  $(\mathbb{C}^*)^m$  a des pôles d'ordre 1 en tous les diviseurs à l'infini d'une compactification torique. On conclut donc que la forme modulaire  $f$  (vue comme section d'un fibré inversible sur la compactification) doit s'annuler à l'ordre 1 le long des diviseurs à l'infini. Une telle forme est dite « cuspidale ».

On a le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 4.10.** — *Supposons qu'il existe une forme cuspidale non nulle sur  $\mathcal{D}_L$  de poids  $l < 19$  s'annulant sur les diviseurs de ramification. Alors  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_L$  est de type général.*

En effet, soit  $F$  une telle forme. Pour toute forme modulaire  $a$  de poids  $k(19 - l) > 0$ ,  $aF^k \text{Vol}^k$  descend d'après le théorème 4.9 en une section de  $K_{\Gamma \backslash \mathcal{D}_L}^{\otimes k}$ . Or les formes modulaires de poids suffisamment grand fournissent un plongement projectif de  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_L$ .

**4.6. La forme de Borchers**

Considérons le réseau  $L_{2,26} = 2U \oplus 3E_8^-$ . Soient  $\mathcal{D}_{L_{2,26}}$  et  $\Gamma_{2,26}$  le domaine et le groupe discret correspondants. Borchers [9] a construit une forme modulaire  $\Phi_{12}$  de poids 12 sur  $\mathcal{D}_{L_{2,26}}$  relativement au caractère  $\det$  sur  $\Gamma_{2,26}$ . Cette forme modulaire a la propriété remarquable de s'annuler à l'ordre 1 le long de tous les hyperplans définis par les vecteurs d'auto-intersection  $-2$  de  $L_{2,26}$ .

Suivant une stratégie initiée par [10] et [28], la forme cuspidale nécessaire pour appliquer le corollaire 4.10 est obtenue en modifiant tout d'abord de façon adéquate  $\Phi_{12}$ , puis en restreignant la forme modifiée à un plongement adéquat de  $\mathcal{D}_L$  dans  $\mathcal{D}_{L_{2,26}}$ . Un tel plongement est obtenu en choisissant un élément  $l' \in E_8^-$  tel que  $\langle l', l' \rangle = -(2g - 2)$ . Rappelons que le réseau  $L$  est l'orthogonal d'un élément d'auto-intersection  $2g - 2$  dans  $L_{3,19} = 3U \oplus 2E_8^-$ . On peut montrer que

$$L = 2E_8^- \oplus 2U \oplus \langle \tilde{l}' \rangle,$$

où  $\tilde{l}' \in L$  est un élément d'auto-intersection  $-(2g - 2)$ . Un élément  $l'$  comme ci-dessus fournit donc une injection de  $L$  dans  $L_{2,26}$  envoyant  $\tilde{l}'$  sur  $l'$ , et l'injection voulue équivariante de  $\mathcal{D}_L$  dans  $\mathcal{D}_{L_{2,26}}$ .

La forme de Borchers sur  $\mathcal{D}_{L_{2,26}}$  est une fonction holomorphe de  $Z \in \mathcal{D}_{L_{2,26}}^{\text{aff}}$  qui a un degré d'homogénéité  $-12$  sur le cône affine  $\mathcal{D}_{L_{2,26}}^{\text{aff}}$ .

Soit  $R_{l'} := \{r \in E_8^-, \langle r, l' \rangle = 0, \langle r, r \rangle = -2\}$ .  $R_{l'}$  est stable par  $\pm Id$ , et son cardinal  $N_{l'}$  est donc pair. Soit  $R_{l'} \subset R'_{l'}$  un sous-ensemble de  $R_{l'}$  de cardinal  $\frac{N_{l'}}{2}$ , constituant un système de représentants de  $R_{l'}/\pm Id$ . Pour chaque  $r \in R_{l'}$ , la fonction  $\langle Z, r \rangle$  est une fonction linéaire sur  $\mathcal{D}_{L_{2,26}}^{\text{aff}}$ . Par la propriété de  $\Phi_{12}$ , cette fonction linéaire divise  $\Phi_{12}$ . De plus, elle s'annule manifestement sur  $\mathcal{D}_L^{\text{aff}} \subset \mathcal{D}_{L_{2,26}}^{\text{aff}}$ . La fonction

$$(7) \quad \frac{\Phi_{12}(Z)}{\prod_{r \in R_{l'}} \langle Z, r \rangle}$$

est donc holomorphe sur  $\mathcal{D}_{L_{2,26}}^{\text{aff}}$  et il n'est pas difficile de voir que sa restriction  $F_{l'} := \left( \frac{\Phi_{12}(Z)}{\prod_{r \in R_{l'}} \langle Z, r \rangle} \right)_{|\mathcal{D}_L^{\text{aff}}}$  à  $\mathcal{D}_L$  est non nulle. La fonction  $F_{l'}$  est modulaire pour  $\Gamma$  et relativement à  $\det$  du fait que  $\Phi_{12}$  l'est, et par la construction du morphisme  $\Gamma \rightarrow \Gamma_{2,26}$ , qui fait agir  $\Gamma$  sur  $L_{2,26} = 2U \oplus 3E_8^-$  en préservant la forme d'intersection, la copie de  $E_8^-$  choisie, et le vecteur  $l'$ . Par ailleurs son poids est  $12 + \frac{N_{l'}}{2}$ . Le résultat suivant est montré dans [22] :

THÉORÈME 4.11. — i)  $F_{l'}$  est une forme cuspidale si  $N_{l'} > 0$ .

ii)  $F_{l'}$  s'annule sur tous les diviseurs de ramification de  $\mathcal{D}_L \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{D}_L$  (décrits dans la section 4.4).

Pour appliquer le corollaire 4.10 avec  $F = F_{l'}$ , on a donc simplement besoin de s'assurer qu'il existe un  $l'$  tel que  $N_{l'} > 0$  et le poids de  $F_{l'}$  est  $< 19$ , c'est-à-dire :

$$N_{l'} > 0, 12 + \frac{N_{l'}}{2} < 19.$$

On est donc ramené à un problème concernant le réseau  $E_8$  :

Pour quelles valeurs de  $g$  existe-t-il  $l' \in E_8$  tel que  $\langle l', l' \rangle = 2g - 2$  et que le nombre (pair) de vecteurs d'auto-intersection 2 et orthogonaux à  $l'$  soit compris entre 2 et 12 ?

L'article [22] se conclut essentiellement par la solution de ce problème.

## RÉFÉRENCES

- [1] *Geometry of K3 surfaces : moduli and periods (Palaiseau, 1981/1982)* – 1985, Astérisque **126**.
- [2] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P. A. GRIFFITHS & J. HARRIS – *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 267, Springer, 1985.
- [3] A. ASH, D. MUMFORD, M. RAPOPORT & Y.-S. TAI – *Smooth compactification of locally symmetric varieties*, Math. Sci. Press, 1975, Lie Groups : History, Frontiers and Applications, Vol. IV.
- [4] M. F. ATIYAH – On analytic surfaces with double points, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A* **247** (1958), p. 237–244.
- [5] W. L. BAILY, JR. & A. BOREL – Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, *Ann. of Math. (2)* **84** (1966), p. 442–528.
- [6] W. BARTH, C. PETERS & A. VAN DE VEN – *Compact complex surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, vol. 4, Springer, 1984.
- [7] A. BEAUVILLE – Surfaces  $K3$ , Séminaire Bourbaki, vol. 1982/83, exp. n° 609, *Astérisque* **105-106** (1983), p. 217–229.
- [8] A. BEAUVILLE & J.-Y. MÉRINDOL – Sections hyperplanes des surfaces  $K3$ , *Duke Math. J.* **55** (1987), p. 873–878.
- [9] R. E. BORCHERDS – Automorphic forms on  $O_{s+2,2}(\mathbf{R})$  and infinite products, *Invent. Math.* **120** (1995), p. 161–213.
- [10] R. E. BORCHERDS, L. KATZARKOV, T. PANTEV & N. I. SHEPHERD-BARRON – Families of  $K3$  surfaces, *J. Algebraic Geom.* **7** (1998), p. 183–193.
- [11] S. BOUCKSOM, J.-P. DEMAILLY, M. PAUN & T. PETERNELL – The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension, prépublication, 2004.

- [12] M. C. CHANG & Z. RAN – Unirationality of the moduli spaces of curves of genus 11, 13 (and 12), *Invent. Math.* **76** (1984), p. 41–54.
- [13] C. CILIBERTO, J. HARRIS & R. MIRANDA – On the surjectivity of the Wahl map, *Duke Math. J.* **57** (1988), p. 829–858.
- [14] M. CORNALBA & J. HARRIS – Divisor classes associated to families of stable varieties, with applications to the moduli space of curves, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **21** (1988), p. 455–475.
- [15] F. CUKIERMAN & D. ULMER – Curves of genus ten on  $K3$  surfaces, *Compositio Math.* **89** (1993), p. 81–90.
- [16] O. DEBARRE – Variétés rationnellement connexes (d’après T. Graber, J. Harris, J. Starr et A. J. de Jong), Séminaire Bourbaki, vol. 2001/2002, exp. n° 905, *Astérisque* **290** (2003), p. 243–266.
- [17] P. DELIGNE & D. MUMFORD – The irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. Math. I.H.É.S.* **36** (1969), p. 75–109.
- [18] D. EISENBUD & J. HARRIS – The Kodaira dimension of the moduli space of curves of genus  $\geq 23$ , *Invent. Math.* **90** (1987), p. 359–387.
- [19] G. FARKAS – The geometry of the moduli space of curves of genus 23, *Math. Ann.* **318** (2000), p. 43–65.
- [20] G. FARKAS & M. POPA – Effective divisors on  $\overline{\mathcal{M}}_g$ , curves on  $K3$  surfaces, and the slope conjecture, *J. Algebraic Geom.* **14** (2005), p. 241–267.
- [21] M. GREEN & R. LAZARSELD – Special divisors on curves on a  $K3$  surface, *Invent. Math.* **89** (1987), p. 357–370.
- [22] V. A. GRITSENKO, K. HULEK & G. K. SANKARAN – The Kodaira dimension of the moduli of  $K3$  surfaces, *Invent. Math.* **169** (2007), p. 519–567.
- [23] J. HARER – The second homology group of the mapping class group of an orientable surface, *Invent. Math.* **72** (1983), p. 221–239.
- [24] J. HARRIS – On the Kodaira dimension of the moduli space of curves. II. The even-genus case, *Invent. Math.* **75** (1984), p. 437–466.
- [25] J. HARRIS & D. MUMFORD – On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, *Invent. Math.* **67** (1982), p. 23–88, With an appendix by William Fulton.
- [26] B. HASSETT & D. HYEON – Log canonical models for the moduli space of curves : First divisorial contraction, prépublication arXiv:math/0607477, à paraître dans *Trans. of the AMS*.
- [27] A. HIRSCHOWITZ & S. RAMANAN – New evidence for Green’s conjecture on syzygies of canonical curves, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **31** (1998), p. 145–152.

- [28] S. KONDŌ – On the Kodaira dimension of the moduli space of  $K3$  surfaces. II, *Compositio Math.* **116** (1999), p. 111–117.
- [29] R. LAZARSFELD – Brill-Noether-Petri without degenerations, *J. Differential Geom.* **23** (1986), p. 299–307.
- [30] S. MUKAI – Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or  $K3$  surface, *Invent. Math.* **77** (1984), p. 101–116.
- [31] ———, Curves,  $K3$  surfaces and Fano 3-folds of genus  $\leq 10$ , in *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. I*, Kinokuniya, 1988, p. 357–377.
- [32] ———, Curves and  $K3$  surfaces of genus eleven, in *Moduli of vector bundles (Sanda, 1994; Kyoto, 1994)*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 179, Dekker, 1996, p. 189–197.
- [33] ———, Polarized  $K3$  surfaces of genus thirteen, in *Moduli spaces and arithmetic geometry*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 45, Math. Soc. Japan, 2006, p. 315–326.
- [34] D. MUMFORD – Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves, in *Arithmetic and geometry, Vol. II*, Progr. Math., vol. 36, Birkhäuser, 1983, p. 271–328.
- [35] Y. NAMIKAWA – *Toroidal compactification of Siegel spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 812, Springer, 1980.
- [36] V. NIKULIN – Integral symmetric bilinear forms and some of their applications, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **14** (1980), p. 103–167.
- [37] ———, A remark on discriminants for moduli of  $K3$  surfaces as sets of zeros of automorphic forms, *J. Math. Sci.* **81** (1996), p. 2738–2743, Algebraic geometry, 4.
- [38] I. I. PJATECKIJ-ŠAPIRO & I. R. ŠAFAREVIČ – Torelli’s theorem for algebraic surfaces of type  $K3$ , *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **35** (1971), p. 530–572.
- [39] M. REID – Young person’s guide to canonical singularities, in *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Amer. Math. Soc., 1987, p. 345–414.
- [40] E. SERNESI – Unirationality of the variety of moduli of curves of genus twelve, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **8** (1981), p. 405–439.
- [41] Y.-S. TAI – On the Kodaira dimension of the moduli space of abelian varieties, *Invent. Math.* **68** (1982), p. 425–439.
- [42] A. VERRA – The unirationality of the moduli spaces of curves of genus 14 or lower, *Compos. Math.* **141** (2005), p. 1425–1444.
- [43] E. VIEHWEG – *Quasi-projective moduli for polarized manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, vol. 30, Springer, 1995.

- [44] C. VOISIN – Sur l’application de Wahl des courbes satisfaisant la condition de Brill-Noether-Petri, *Acta Math.* **168** (1992), p. 249–272.
- [45] ———, Green’s generic syzygy conjecture for curves of even genus lying on a  $K3$  surface, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **4** (2002), p. 363–404.
- [46] ———, Green’s canonical syzygy conjecture for generic curves of odd genus, *Compos. Math.* **141** (2005), p. 1163–1190.
- [47] J. M. WAHL – The Jacobian algebra of a graded Gorenstein singularity, *Duke Math. J.* **55** (1987), p. 843–871.

Claire VOISIN

Institut de Mathématiques de Jussieu  
UMR 7586 du CNRS  
175, rue du Chevaleret  
F-75013 Paris  
*E-mail* : `voisin@math.jussieu.fr`