Astérisque

CHARLES TOROSSIAN

# La conjecture de Kashiwara-Vergne [d'après Alekseev et Meinrenken]

*Astérisque*, tome 317 (2008), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 980, p. 441-465
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__317__441_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 2007
59$^e$ année, 2006-2007, n$^o$ 980, p. 441 à 465

# LA CONJECTURE DE KASHIWARA-VERGNE
## [d'après Alekseev et Meinrenken]

par **Charles TOROSSIAN**

## INTRODUCTION

En 1978, M. Kashiwara et M. Vergne ont conjecturé dans [**16**] une propriété remarquable et universelle sur la série de Campbell-Hausdorff d'une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ de dimension finie. Cette propriété conjecturale admet comme corollaire l'isomorphisme de Duflo entre le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et les invariants de l'algèbre symétrique. Cette conjecture a été démontrée en toute généralité par A. Alekseev et E. Meinrenken en 2005 et publiée en 2006 à Inventiones [**5**].

Ce texte se décompose de la façon suivante : on rappelle dans un premier temps des résultats élémentaires sur la formule de Campbell-Hausdorff et la symétrisation. On introduit ensuite la conjecture de Kashiwara-Vergne, en expliquant ses origines et ses conséquences. La troisième section est consacrée à la preuve d'Alekseev et Meinrenken. On a résumé, dans l'appendice, la construction de Kontsevich pour la quantification des crochets de Lie qu'il nous a semblé nécessaire de rappeler pour une bonne compréhension du texte.

Je remercie A. Alekseev, B. Keller, D. Manchon, F. Rouvière et M. Vergne pour leurs commentaires, suggestions et améliorations lors de la relecture de ce texte.

## 1. FORMULE DE CAMPBELL-HAUSDORFF ET SYMÉTRISATION

### 1.1. La formule de Campbell-Hausdorff

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbf{R}$. D'après le théorème de Lie, il existe un groupe de Lie réel $G$, connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et une application exponentielle notée $\exp_{\mathfrak{g}}$ qui définit un difféomorphisme local en $0 \in \mathfrak{g}$ sur $G$.

Il en résulte que l'on peut lire la loi de groupe de $G$ en coordonnées exponentielles. C'est la fameuse formule de Campbell-Hausdorff. En d'autres termes, pour $X, Y$ proches de 0 dans $\mathfrak{g}$, il existe une série en des polynômes de Lie, convergente et à valeurs dans $\mathfrak{g}$, notée $Z(X, Y)$ telle que l'on ait

$$\exp_{\mathfrak{g}}(X) \cdot_G \exp_{\mathfrak{g}}(Y) = \exp_{\mathfrak{g}}\big(Z(X,Y)\big).$$

Les premiers termes de la série de Campbell-Hausdorff sont bien connus et s'écrivent

$$(1)\quad Z(X,Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] + \frac{1}{12}[Y,[Y,X]] + \frac{1}{48}[Y,[X,[Y,X]]] - \frac{1}{48}[X,[Y,[X,Y]]] + \cdots.$$

Il existe de nombreuses expressions de $Z(X,Y)$ en termes de crochets itérés (cf. § 5.1) ou écrites de manière récursive (cf. [**28**] page 118). Une difficulté majeure concernant la formule de Campbell-Hausdorff est qu'il n'existe pas de base de l'algèbre de Lie libre qui soit particulièrement commode pour effectuer des calculs [(1)]. La quantification de Kontsevich donne une autre façon d'écrire la formule de Campbell-Hausdorff comme rappelé en § 4.2.

### 1.2. Symétrisation et application exponentielle

La symétrisation $\beta$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$ notée $S[\mathfrak{g}]$ et l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ notée $U(\mathfrak{g})$ ; c'est une version du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt. La symétrisation commute à l'action adjointe (resp. aux dérivations $\mathrm{ad}X$) et vérifie la condition, pour $X \in \mathfrak{g}$,

$$\beta(X^n) = X^n.$$

On en déduit la formule, pour $X_i \in \mathfrak{g}$,

$$\beta(X_1 \cdots X_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(n)}.$$

Il existe plusieurs façons de voir l'algèbre $S[\mathfrak{g}]$ ; comme algèbre symétrique, comme algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}^*$, comme algèbre des opérateurs différentiels invariants par translation sur $\mathfrak{g}$ (i.e. à coefficients constants) et enfin comme algèbre pour la convolution des distributions de support 0. On peut voir $U(\mathfrak{g})$ comme l'algèbre enveloppante universelle, l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur $G$ et enfin l'algèbre pour la convolution des distributions supportées par l'origine de $G$.

---

(1) Les bases de Hall, par exemple sont définies de manière récursive. Par ailleurs il existe une base qui permet d'écrire la formule de Campbell-Hausdorff en utilisant des combinaisons à coefficients complexes [**18**].

La formule de Taylor énonce que l'on a l'égalité de distributions formelles $e^X = \delta_X$, avec $\delta_X$ la masse de Dirac au point $X$. On a donc dans une complétion adéquate de $U(\mathfrak{g})$ :

$$\beta(\delta_X) = \beta(e^X) = \sum_{n\geq 0} \frac{X^n}{n!} = \delta_{\exp_{\mathfrak{g}}(X)}, \tag{2}$$

où $\delta_{\exp_{\mathfrak{g}}(X)}$ est la distribution ponctuelle au point $\exp_{\mathfrak{g}}(X)$ dans $G$.
La symétrisation envoie donc la distribution $\delta_X$ sur la distribution $\delta_{\exp_{\mathfrak{g}}(X)}$ ; c'est donc l'application exponentielle au niveau des distributions, car on a $(\exp_{\mathfrak{g}})_*(\delta_X) = \delta_{\exp_{\mathfrak{g}}(X)}$.

On peut ramener, via l'application $\beta$, le produit de $U(\mathfrak{g})$, en un produit associatif dans $S[\mathfrak{g}]$. C'est l'étoile produit de Gutt (2) [**14**], réalisant la quantification par déformation de l'algèbre de Poisson $S[\mathfrak{g}]$. On a donc pour $w, v$ dans $S[\mathfrak{g}]$

$$w \underset{Gutt}{\star} v := \beta^{-1}(\beta(w)\beta(v)). \tag{3}$$

Comme distribution de support 0, on aura donc

LEMME 1.1. — *Pour $w, v$ des éléments de $S[\mathfrak{g}]$, $\beta^{-1}(\beta(w)\beta(v))$ correspond à la distribution de support $0 \in \mathfrak{g}$ définie pour $f$, fonction test sur $\mathfrak{g}$, par la formule :*

$$\langle\, \beta^{-1}(\beta(w)\beta(v)), f\,\rangle := \langle\, w(X) \otimes v(Y), f(Z(X,Y))\,\rangle.$$

### 1.3. Le centre de l'algèbre enveloppante et l'isomorphisme de Duflo

Comme la symétrisation $\beta$ commute aux dérivations, c'est aussi un isomorphisme d'espaces vectoriels de $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ sur $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ (les invariants pour l'action adjointe).

Dans [**13**], en utilisant les idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante, Duflo montre que, pour *toute algèbre de Lie* de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle, $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ et $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ sont isomorphes *comme algèbres* et exhibe un isomorphisme. Ce résultat généralise celui de Dixmier [**11**] dans le cas nilpotent, de Duflo dans le cas résoluble [**12**] et d'Harish-Chandra [**15**] dans le cas semi-simple et s'inscrit dans l'esprit de la méthode des orbites initiée par Kirillov.

On notera par $j(X)$ le déterminant jacobien de la fonction $\exp_{\mathfrak{g}}$ (cf. § 5.2), à savoir la fonction définie par

$$j(X) = \det{}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{1-e^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X}\right) = \exp\left(-\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\frac{\mathrm{ad}X}{2}\right)\det{}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\sinh(\mathrm{ad}\frac{X}{2})}{\frac{\mathrm{ad}X}{2}}\right). \tag{4}$$

Cette fonction va intervenir de manière cruciale dans la suite.

Notons $S[[\mathfrak{g}^\star]]$ l'algèbre des séries formelles en les éléments de $\mathfrak{g}^*$. La série formelle $j^{\frac{1}{2}}$ est donc dans $S[[\mathfrak{g}^\star]]$. C'est donc un opérateur différentiel sur $\mathfrak{g}^*$ d'ordre

(2) C'est-à-dire que l'étoile produit s'exprime comme une série formelle d'opérateurs bi-différentiels sur $\mathfrak{g}^*$ à coefficients polynomiaux.

infini à coefficients constants que l'on note $j^{\frac{1}{2}}(\partial)$. La formule de Duflo s'écrit alors, pour $P \in S[\mathfrak{g}]$,

$$\gamma(P) := \beta\left(j^{\frac{1}{2}}(\partial)P\right). \tag{5}$$

C'est clairement un isomorphisme d'espaces vectoriels de $S[\mathfrak{g}]$ sur $U(\mathfrak{g})$, qui commute aux dérivations ad$X$.

THÉORÈME 1.2 ([**13**]). — *L'application $\gamma$ ci-dessus est un isomorphisme d'algèbres de $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ sur $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.*

Ce théorème est non trivial. Dans [**19**], Kontsevich montre par un argument d'homotopie que $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ et $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ sont isomorphes *comme algèbres* et en déduit qu'il s'agit de l'isomorphisme de Duflo [(3)] ; ce résultat s'étend automatiquement aux super-algèbres de Lie et Kontsevich montre que les algèbres de cohomologie $H(\mathfrak{g}, S[\mathfrak{g}])$ et $H(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g}))$ sont isomorphes [(4)]. Dans [**21**] on vérifie qu'il s'agit encore de la formule de Duflo étendue à la cohomologie [(5)]. On dispose donc d'une démonstration qui n'utilise pas la théorie des représentations.

Afin d'étendre l'isomorphisme de Duflo aux germes de distributions invariantes, Kashiwara et Vergne suggèrent dans [**16**] une méthode basée sur une déformation de la formule de Campbell-Hausdorff. Ces techniques sont connues aujourd'hui sous le vocable « méthode de Kashiwara-Vergne ». En quelque sorte on cherche à lire l'isomorphisme de Duflo sur la formule de Campbell-Hausdorff.

## 2. LA CONJECTURE COMBINATOIRE DE KASHIWARA-VERGNE

### 2.1. Notations

Soient $(e_i)_{i=1,\ldots,d}$ une base de $\mathfrak{g}$, $(e_i^*)_{i=1,\ldots,d}$ la base duale et $X = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$. Pour $X \mapsto A(X)$ une fonction régulière de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ (c'est-à-dire un champ de vecteurs sur $\mathfrak{g}$), on désigne le champ adjoint associé par

$$[X, A(X)] \cdot \partial_X = \sum_{i=1}^{d} \langle\, e_i^*, [X, A(X)]\,\rangle \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{6}$$

On note aussi $\partial_X A$ la différentielle de $A$ en $X$ ; c'est une application linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$.

(3) L'argument utilise la forme a priori de l'isomorphisme obtenu comparé à celui de Duflo.
(4) En degré 0 on retrouve les algèbres d'invariants $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ et $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.
(5) Ce résultat est aussi cité dans [**26**] comme un travail en commun avec Kontsevich, mais non publié.

### 2.2. Énoncé de la conjecture combinatoire

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbf{R}$. Pour $X, Y \in \mathfrak{g}$, on note $Z(X,Y)$ la série de Campbell-Hausdorff définie par

$$Z(X,Y) = \log\Big(\exp_{\mathfrak{g}}(X) \underset{G}{\cdot} \exp_{\mathfrak{g}}(Y)\Big).$$

Dans tout ce qui suit, nous travaillons au niveau des séries formelles mais des arguments élémentaires montrent que toutes les séries formelles que nous manipulons sont convergentes dans un voisinage de $(0,0)$.

La conjecture combinatoire de Kashiwara-Vergne [**16**] s'énonce de la manière suivante :

THÉORÈME 2.1 (Conjecture KV 78). — *Notons $Z(X,Y)$ la série de Campbell-Hausdorff. Il existe des séries $F(X,Y)$ et $G(X,Y)$ sur $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ sans terme constant et à valeurs dans $\mathfrak{g}$ telles que l'on ait*

$$X + Y - \log(\exp_{\mathfrak{g}}(Y) \cdot \exp_{\mathfrak{g}}(X)) = \big(1 - e^{-\mathrm{ad}X}\big)F(X,Y) + \big(e^{\mathrm{ad}Y} - 1\big)G(X,Y) \tag{7}$$

*et telle que l'identité de trace suivante soit vérifiée*

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}X \circ \partial_X F + \mathrm{ad}Y \circ \partial_Y G) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\mathrm{ad}X}{e^{\mathrm{ad}X} - 1} + \frac{\mathrm{ad}Y}{e^{\mathrm{ad}Y} - 1} - \frac{\mathrm{ad}Z(X,Y)}{e^{\mathrm{ad}Z(X,Y)} - 1} - 1\right). \tag{8}$$

*Remarque 2.2.* — La conjecture porte sur l'existence d'un couple $(F,G)$ de solutions universelles [6] vérifiant les équations ci-dessus. Par ailleurs, si un tel couple convient, alors le couple

$$(G(-Y,-X), F(-Y,-X))$$

est aussi une solution. On peut donc rechercher des solutions symétriques, c'est-à-dire vérifiant $G(X,Y) = F(-Y,-X)$. Pour de telles solutions on s'aperçoit facilement que les termes à l'ordre 1 en $Y$ sont uniquement déterminés [**6**], ce qui aurait pu faire croire à l'unicité d'une solution symétrique, mais ce n'est pas le cas [7].

*Remarque 2.3.* — L'équation (7) peut se résoudre complètement dans l'algèbre tensorielle engendrée par $X, Y$. Puis en utilisant l'idempotent de Dynkin (cf. § 5.1), on peut exhiber toutes les solutions de (7) (cf. [**10**]). La difficulté majeure de cette conjecture est donc l'équation de trace (8).

(6) Remarque postérieure à l'exposé : voir [**7**] pour des éléments d'une complétion de l'algèbre de Lie libre universelle engendrée par $X, Y$. L'algèbre de Lie libre sur un espace vectoriel $V$ est naturellement graduée, ainsi que son algèbre enveloppante qui est l'algèbre associative libre sur $V$ ; par exemple, l'élément $[X,Y] = XY - YX$ est de degré 2. La complétion consiste à considérer les séries de termes homogènes dont les degrés tendent vers l'infini [**25**].

(7) Voir [**7**] pour des développements fondamentaux dans cette direction.

*Remarque 2.4.* — Les équations (7) et (8) forment un système affine à coefficients rationnels. Si on dispose d'une solution à coefficients réels, alors il existera une solution à coefficients rationnels. Expliciter une solution rationnelle est un problème intéressant que l'on peut poser.

2.2.1. *La solution conjecturale de Kashiwara-Vergne.* — Dans leur article, Kashiwara et Vergne proposent un couple symétrique $(F^0, G^0)$ de séries de Lie universelles et montrent, *dans le cas résoluble*, que ce couple vérifie la condition de trace (8). Nous suivons l'article [**24**] qui propose une réécriture de ce couple conjectural.

Notons $\psi$ la fonction analytique au voisinage de 0 définie par

$$\psi(z) = \frac{e^z - 1 - z}{(e^z - 1)(1 - e^{-z})}.$$

Soit $Z(t) = Z(tX, tY)$ ; posons

$$F^1(X, Y) = \left( \int_0^1 \frac{1 - e^{-t\,\mathrm{ad}X}}{1 - e^{-\mathrm{ad}X}} \circ \psi(\mathrm{ad}Z(t))\mathrm{d}t \right) (X + Y)$$

et $G^1(X, Y) = F^1(-Y, -X)$. Posons alors

$$F^0(X, Y) = \frac{1}{2} \left( F^1(X, Y) + e^{\mathrm{ad}X} F^1(-X, -Y) \right) + \frac{1}{4} \left( Z(X, Y) - X \right)$$

et $G^0(X, Y) = F^0(-Y, -X)$ [(8)].

Par construction (cf. [**16**], [**24**]) ce couple $(F^0, G^0)$ vérifie la première équation (7). Dans leur article, Kashiwara et Vergne conjecturent que $(F^0, G^0)$ vérifie l'équation de trace (8) et vérifient ce fait dans le cas des algèbres de Lie résolubles.

2.2.2. *Historique des résultats.* — Dans [**23**], Rouvière vérifie la conjecture dans le cas $\mathrm{sl}(2, \mathbf{R})$ pour le couple $(F^0, G^0)$ ci-dessus.

En 1999 dans [**29**], Vergne démontre la conjecture dans le cas quadratique, c'est-à-dire pour une algèbre de Lie munie d'une forme bilinéaire invariante et non dégénérée ; les algèbres réductives, mais aussi $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ avec $\mathfrak{g}$ quelconque, sont quadratiques. L'article [**29**] suit les idées de [**2**] concernant l'isomorphisme de Duflo pour les algèbres de Lie quadratiques. Dans [**3**], Alekseev et Meinrenken proposent, toujours dans le cas quadratique, une solution différente en utilisant la géométrie de Poisson et le « Moser trick ». Toutefois dans [**6**], il est montré que ces solutions du cas quadratique ne sont pas universelles, c'est-à-dire qu'elles ne résolvent pas la conjecture pour toutes les algèbres de Lie.

Enfin A. Alekseev et E. Meinrenken [**5**] ont démontré en mai 2005 la conjecture combinatoire en utilisant une déformation de la série de Campbell-Hausdorff décrite

---

(8) Écrivons pour simplifier $x = \mathrm{ad}X$ et $y = \mathrm{ad}Y$. Des calculs fastidieux dans les années 80, mais que l'on peut maintenant effectuer sur ordinateur, montrent que les premiers termes s'écrivent (jusqu'à l'ordre 4) : $F^0(X, Y) = \frac{1}{4}Y + \frac{1}{24}xY - \frac{1}{48}x^2Y - \frac{1}{48}yxY - \frac{1}{180}x^3Y - \frac{1}{480}yx^2Y + \frac{1}{360}y^2xY + \ldots$

dans [**27**] et résultant de la quantification de Kontsevich [**19**]. Le lien avec le couple conjectural $(F^0, G^0)$ n'y est cependant pas abordé [9].

### 2.3. Origine et conséquences de cette conjecture

Cette égalité sur les traces peut sembler étrange mais elle est une conséquence naturelle de l'intégration par parties. Expliquons un peu tout ceci, ce qui motivera le lecteur.

2.3.1. *Transport de la convolution.* — Un des buts de l'article de Kashiwara-Vergne est de démontrer, pour les distributions invariantes, le transport du produit de convolution par l'application exponentielle.

Plus précisément, il s'agissait de montrer le résultat conjectural [10] suivant assurant que l'on peut transporter la convolution sur $\mathfrak{g}$ en la convolution sur $G$. Ce point est important car les caractères des représentations irréductibles sont des solutions propres pour le centre de $U(\mathfrak{g})$ et, exprimés en coordonnées exponentielles, ils deviennent alors des solutions propres des opérateurs différentiels invariants à coefficients constants [11].

Ce théorème fut démontré par la suite dans [**8**], [**9**], [**20**] comme corollaire de la quantification de Kontsevich.

THÉORÈME 2.5 ([**8**], [**9**], [**20**]). — *Soient $w$ et $v$ deux germes de distributions invariantes au voisinage de $0$ dans $\mathfrak{g}$ et vérifiant une certaine condition de support* [12] *afin d'assurer un sens à la convolution. On a*

$$\langle\, w \otimes v\,,\, \frac{j^{\frac{1}{2}}(X) j^{\frac{1}{2}}(Y)}{j^{\frac{1}{2}}(Z(X,Y))} f(Z(X,Y))\,\rangle = \langle\, w \otimes v\,,\, f(X+Y)\,\rangle \tag{9}$$

*avec $f$ une fonction $C^\infty$ dans un voisinage de $0$ et à support compact.*

DÉFINITION 2.6. — *On appellera fonction de densité le quotient*

$$D(X,Y) := \frac{j^{\frac{1}{2}}(X) j^{\frac{1}{2}}(Y)}{j^{\frac{1}{2}}(Z(X,Y))}.$$

(9) Remarque postérieure à l'exposé : dans [**1**] on vérifie par ordinateur que le couple $(F^0, G^0)$ ne vérifie pas l'équation de trace à l'ordre 8.

(10) Conjecture aussi formulée par Raïs.

(11) L'évaluation sur une orbite définit alors un caractère pour $S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$.

(12) On peut demander par exemple que les supports asymptotiques de $u$ en $0$ (resp. $v$), noté $C_u$ (resp. $C_v$), vérifient $C_u \cap -C_v = \{0\}$.

2.3.2. *Déformation par dilatation.* — L'idée de base de l'article [**16**] est de considérer la déformation naturelle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ qui consiste à remplacer le crochet $[X,Y]$ par $t[X,Y]$ pour $t \in [0,1]$. La série de Campbell-Hausdorff est changée en $Z_t(X,Y) = \frac{1}{t}Z(tX,tY)$. Remarquons que cette expression est bien définie pour $t=0$ et que l'on obtient $Z_0(X,Y) = X+Y$.

On déduit de la différentielle de l'application exponentielle (cf. §5.3), que l'équation (7) est équivalente à l'équation différentielle suivante

$$\frac{\partial}{\partial t}Z_t(X,Y) = [X, F_t(X,Y)]\cdot\partial_X Z_t(X,Y) + [Y, G_t(X,Y)]\cdot\partial_Y Z_t(X,Y), \tag{10}$$

où on a noté $F_t(X,Y) = \frac{1}{t}F(tX,tY)$ [13].

Notons $q(X)$ la fonction $\det_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\sinh\frac{\mathrm{ad}X}{2}}{\frac{\mathrm{ad}X}{2}}\right)$. En utilisant la formule [14]

$$\ln(q(X)) = \sum_{n\geq 1}\frac{b_{2n}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}X)^{2n}}{(2n)!2n},$$

on trouve facilement [**16**] :

$$j^{-\frac{1}{2}}(tX)\frac{\partial}{\partial t}j^{\frac{1}{2}}(tX) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\mathrm{ad}X}{\exp(t\,\mathrm{ad}X)-1} - \frac{1}{t}\right). \tag{11}$$

Compte tenu de la déformation en le paramètre $t$, il suffit de démontrer qu'on a l'égalité, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\langle\, w\otimes v\,,\, \frac{j^{\frac{1}{2}}(t\,X)j^{\frac{1}{2}}(t\,Y)}{j^{\frac{1}{2}}(t\,Z_t(X,Y))}f(Z_t(X,Y))\,\rangle = \langle\, w\otimes v\,,\, f(X+Y)\,\rangle. \tag{12}$$

L'idée est maintenant simple, il suffit de demander que la dépendance en $t$ soit triviale, c'est-à-dire que la dérivée par rapport à $t$ soit nulle.

2.3.3. *Calcul de la dérivée en t.* — Notons $D_t(X,Y)$ la fonction de densité

$$D_t(X,Y) = D(tX,tY) = \frac{j^{\frac{1}{2}}(tX)j^{\frac{1}{2}}(tY)}{j^{\frac{1}{2}}(tZ_t(X,Y))}.$$

On peut remplacer $j$ par $q$ dans cette formule, la fonction de densité reste la même. On a facilement, compte tenu des équations (10) et (11),

(13)
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}D_t(X,Y) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\mathrm{ad}X}{e^{t\,\mathrm{ad}X}-1} + \frac{\mathrm{ad}Y}{e^{t\,\mathrm{ad}Y}-1} - \frac{\mathrm{ad}Z_t(X,Y)}{e^{t\,\mathrm{ad}Z_t(X,Y)}-1} - \frac{1}{t}\right)D_t(X,Y)+\\ [X, F_t(X,Y))]\cdot\partial_X D_t(X,Y) + [Y, G_t(X,Y))]\cdot\partial_Y D_t(X,Y).\end{aligned}$$

[13] Comme $F(0,0) = (0,0)$ cette expression est bien définie pour $t=0$.

[14] Voir §5.2 pour les nombres de Bernoulli $b_n$.

Pour simplifier on va noter :

$$T(X,Y) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\mathrm{ad}X}{e^{\mathrm{ad}X}-1} + \frac{\mathrm{ad}Y}{e^{\mathrm{ad}Y}-1} - \frac{\mathrm{ad}Z(X,Y)}{e^{\mathrm{ad}Z(X,Y)}-1} - 1\right). \tag{14}$$

Par conséquent le premier terme du second membre de (13) est $\frac{1}{t}T(tX,tY)$. Ce calcul se justifie comme suit : le premier terme dans le membre de droite (13) résulte de la dérivée par rapport à $t$ dans les termes $j^{\frac{1}{2}}(t\cdot)$ et le second terme résulte de la dérivée en $t$ dans $Z_t$. Plus précisément compte tenu de (10) il vient que pour toute fonction $\phi$ on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi\left(Z_t(X,Y)\right) = [X, F_t(X,Y)]\cdot\partial_X\phi\left(Z_t(X,Y)\right) + [Y, G_t(X,Y)]\cdot\partial_Y\phi\left(Z_t(X,Y)\right). \tag{15}$$

Le champ de vecteurs $[X, F_t(X,Y)]\cdot\partial_X + [Y, F_t(X,Y)]\cdot\partial_Y$ agit trivialement sur la fonction $j^{\frac{1}{2}}(tX)j^{\frac{1}{2}}(tY)$ car cette dernière est invariante en chaque variable sous l'action adjointe, par conséquent la dérivée du terme en $Z_t$ s'écrit bien comme annoncé. On peut maintenant terminer le calcul de la dérivée dans (12). Il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(D_t(X,Y)f(Z_t(X,Y))\right) = &\\ \Big([X, F_t(X,Y)]\cdot\partial_X + [Y, G_t(X,Y)]\cdot\partial_Y\Big)&\left(D_t(X,Y)f(Z_t(X,Y))\right) + \\ &\frac{1}{t}T(tX,tY)D_t(X,Y)f(Z_t(X,Y)).\end{aligned} \tag{16}$$

On est donc amené à calculer l'action à droite[15] du champ de vecteurs $[X, F_t(X,Y)]\cdot\partial_X + [Y, F_t(X,Y)]\cdot\partial_Y$ sur la distribution $w\otimes v$. Compte tenu de l'invariance de cette distribution, on a

$$\begin{aligned}w\otimes v\Big([X, F_t(X,Y))]\cdot\partial_X + [Y, F_t(X,Y))]\cdot\partial_Y\Big) = &\\ -\, w\otimes v\Big(\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{ad}X\circ\partial_X F_t(X,Y) + \mathrm{ad}Y\circ\partial_Y G_t(X,Y)\big)\Big)&.\end{aligned} \tag{17}$$

Pour conclure au transport de la convolution dans (9), il suffit de demander que l'on ait pour tout $t$ :

$$\frac{1}{t}T(tX,tY) - \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{ad}X\circ\partial_X F_t(X,Y) + \mathrm{ad}Y\circ\partial_Y G_t(X,Y)\big) = 0. \tag{18}$$

*La conjecture combinatoire de Kashiwara-Vergne est précisément cette égalité.*

[15] En effet les distributions sont plutôt un module à droite sur les champs de vecteurs. Cette action à droite n'est utilisée qu'à cet endroit du texte.

*Remarque 2.7.* — Si l'égalité (7) (ou bien (10)) est vérifiée, alors l'équation (8) est équivalente à l'équation (19) suivante

$$(19)\quad \frac{\partial}{\partial t}D_t(X,Y) = \Big([X,F_t(X,Y)]\cdot\partial_x + [Y,G_t(X,Y)]\cdot\partial_y\Big)D_t(X,Y) + \Big(\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{ad}X\circ\partial_X F_t(X,Y) + \mathrm{ad}Y\circ\partial_Y G_t(X,Y)\big)\Big)D_t(X,Y).$$

2.3.4. *Isomorphisme de Duflo.* — On déduit comme cas particulier du transport de la convolution (9) le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.8. — *Le théorème* 2.5 *généralise l'isomorphisme de Duflo.*

PREUVE — En effet, pour $P,Q\in S[\mathfrak{g}]^{\mathfrak{g}}$ considérées comme des distributions invariantes de support 0 et pour toute fonction test $f$, on a, d'après le théorème 2.5 appliqué à $j^{1/2}f$

$$\langle\, P\otimes Q, j^{\frac12}(X)j^{\frac12}(Y)f(Z(X,Y))\,\rangle = \langle\, P\otimes Q, (j^{1/2}f)(X+Y)\,\rangle = \langle\, j^{\frac12}(\partial)(PQ), f\,\rangle.$$

On a donc

$$\langle\, j^{\frac12}(\partial)P\otimes j^{\frac12}(\partial)Q, f(Z(X,Y))\,\rangle = \langle\, j^{\frac12}(\partial)(PQ), f\,\rangle.$$

Et d'après le lemme 1.1, le membre de gauche correspond à l'élément

$$\beta^{-1}\left(\beta\left(j^{\frac12}(\partial)P\right)\beta\left(j^{\frac12}(\partial)Q\right)\right),$$

tandis que le membre de droite correspond à $j^{\frac12}(\partial)(PQ)$. On en déduit que l'on a bien la formule de Duflo sur les éléments invariants

$$\beta\Big(j^{\frac12}(\partial)(PQ)\Big) = \beta\left(j^{\frac12}(\partial)P\right)\beta\left(j^{\frac12}(\partial)Q\right).$$

## 3. PREUVE DE LA CONJECTURE COMBINATOIRE DE KASHIWARA-VERGNE

On explique dans cette section les deux résultats principaux de [**5**], à savoir la preuve de la conjecture de Kashiwara-Vergne et l'extension de l'isomorphisme de Duflo à toute la cohomologie comme corollaire. Le texte suit essentiellement l'article [**5**].

On pose dans un premier temps des définitions utiles.

### 3.1. Notations

3.1.1. *Application de Duflo sur les distributions.* — On fixe un voisinage symétrique $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathfrak{g}$ sur lequel $\exp_{\mathfrak{g}}$ est un difféomorphisme sur son image $U = \exp_{\mathfrak{g}}(\mathcal{U})$. On suppose $j > 0$ sur $\mathcal{U}$. L'application de Duflo sur les distributions à support compact

$$\mathrm{Duf} = (\exp_{\mathfrak{g}})_\star \circ j^{1/2} : \mathcal{D}'_{comp}(\mathcal{U}) \quad \rightarrow \quad \mathcal{D}'_{comp}(U)$$

est alors bien définie. On rappelle que l'on a noté $D(X,Y) = \frac{j^{1/2}(X)j^{1/2}(Y)}{j^{1/2}(Z(X,Y))}$ la fonction de densité.

3.1.2. *Produit m.* — On fixe alors un voisinage $\mathcal{O}$ de 0 dans $\mathfrak{g}$ suffisamment petit, tel que $\exp_{\mathfrak{g}}(\mathcal{O})\exp_{\mathfrak{g}}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{U}$ et tel que la série de Campbell-Hausdorff $Z$ définisse une fonction régulière de $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ dans $\mathcal{U}$.

La convolution des distributions à support compact dans $\exp_{\mathfrak{g}}(\mathcal{O})$ est alors bien définie et on peut remonter le produit de convolution de $G$ via l'application de Duflo en un produit sur $\mathcal{D}'_{comp}(\mathcal{O})$ ; c'est la formule du théorème 2.5. On note ce produit

$$m = Z_\star \circ D : \quad \mathcal{D}'_{comp}(\mathcal{O} \times \mathcal{O}) \quad \rightarrow \quad \mathcal{D}'_{comp}(\mathcal{U}). \tag{20}$$

3.1.3. *Déformation par dilatation $m_t$.* — Utilisons la déformation du crochet de Lie : $[X,Y]_t = t[X,Y]$ et notons $\mathfrak{g}_t$ cette nouvelle algèbre de Lie. Pour $t = 0$, on trouve le crochet trivial, et pour $t \neq 0$ c'est une algèbre isomorphe à $\mathfrak{g}$.

La série de Campbell-Hausdorff pour $\mathfrak{g}_t$ s'écrit $Z_t(X,Y) = \frac{1}{t}Z(tX,tY)$ et la fonction de densité vaut $D_t(X,Y) = D(tX,tY)$. On en déduit comme précédemment un produit $m_t$ sur $\mathcal{D}'_{comp}(\frac{1}{t}\mathcal{O})$

$$m_t = (Z_t)_\star \circ D_t : \quad \mathcal{D}'_{comp}(\frac{1}{t}\mathcal{O} \times \frac{1}{t}\mathcal{O}) \quad \rightarrow \quad \mathcal{D}'_{comp}(\frac{1}{t}\mathcal{U}).$$

3.1.4. *Dérivée de Lie.* — La dérivée de Lie de l'action adjointe sur les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g})$ est définie pour $v \in \mathfrak{g}$ par

$$(L(v)f)(X) = [X,v] \cdot \partial_X f.$$

Si $u$ est une distribution et $f$ une fonction test, alors par définition [16] on a $\langle L(e_i)u, f\rangle = -\langle u, L(e_i)f\rangle$. Une distribution est dite invariante si elle est annulée par les $L(e_i)$ pour $i = 1,\ldots,n$ [17].

Soit $X \mapsto A(X) = A_1(X)e_1 + \cdots + A_n(X)e_n$ un champ de vecteurs sur $\mathfrak{g}$. Alors la dérivée de Lie $L(A)$ vaut $\sum_i A_i L(e_i)$ sur les fonctions et $\sum_i L(e_i) \circ A_i$ sur les distributions.

[16] Il n'y aurait pas de signe − si on prenait l'action à droite.

[17] On rappelle que $(e_i)_i$ est une base de $\mathfrak{g}$.

3.1.5. *Structure de Lie sur* $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})$. — On définit une structure de Lie $[\ ,\ ]_{Lie}$ sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})$ en demandant que

$$\beta=(F(X,Y),G(X,Y)) \quad\mapsto\quad \Xi^\beta=[X,F(X,Y)]\cdot\partial_X+[Y,G(X,Y)]\cdot\partial_Y$$

soit un morphisme lorsqu'on munit les champs de vecteurs sur $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ du crochet standard.

Explicitement on a pour $\beta,\gamma\in\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})$, en utilisant la dérivée de Lie $L(\beta)$ du champ de vecteurs sur $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ [18]

$$[\beta,\gamma]_{Lie}=L(\beta)\gamma-L(\gamma)\beta+[\beta,\gamma]_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}}.$$

## 3.2. Reformulation de la conjecture

Dans leur article, Alekseev et Meinrenken utilisent une reformulation plus géométrique de la conjecture de Kashiwara-Vergne.

Pour cela, il est commode d'utiliser la base de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ et les dérivées de Lie de l'action adjointe de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. On notera $(\hat{e_i})_{i=1,\dots,2n}$ une base de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ (on prend deux copies de la base $e_i$) et $L(\hat{e_i})$ la dérivée de Lie de l'action de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{D}'_{comp}(\mathcal{O}\times\mathcal{O})$.

3.2.1. *Deux reformulations équivalentes de la conjecture de Kashiwara-Vergne.* — Soit $\beta\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}\times\mathcal{O},\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})$, tel que $\beta(0,0)=0$. On suppose que $\beta$ est un couple vérifiant la conjecture de Kashiwara-Vergne. Utilisons la base ci-dessus et écrivons

$$\beta=(F(X,Y),G(X,Y))=\sum_{1\le i\le 2n}\beta^i\hat{e_i}$$

et $\beta_t=\frac{1}{t}\beta(tX,tY)=(F_t(X,Y),G_t(X,Y))=\sum_{1\le i\le 2n}\beta_t^i\hat{e_i}$.

**Première reformulation :** Les équations (7) et (8) sont équivalentes aux équations (10) et (19) (cf. § 5.3 et la remarque 2.7) que l'on peut écrire de manière plus condensée en utilisant les dérivées de Lie sur les fonctions :

$$\partial_t Z_t=\left(\sum_{1\le i\le 2n}\beta_t^i L(\hat{e_i})\right)Z_t \tag{21}$$

et

$$\partial_t D_t=\sum_{1\le i\le 2n}L(\hat{e_i})(\beta_t^i D_t)=\left(\sum_{1\le i\le 2n}L(\hat{e_i})\circ\beta_t^i\right)D_t. \tag{22}$$

**Deuxième reformulation :** L'idée astucieuse de [**5**] est de constater que ces équations peuvent se condenser en une seule. La preuve est élémentaire et consiste à vérifier l'assertion sur les distributions de dirac $\delta_{p,q}$ au point $(p,q)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$.

---

[18] La dérivée de Lie est pour l'action adjointe de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ sur les fonctions.

PROPOSITION 3.1. — *Les équations* (7) *et* (8) *sont équivalentes à l'équation suivante où la dérivée de Lie porte sur les distributions*

$$\partial_t m_t = -m_t \circ \left( \sum_{1\leq i\leq 2n} \beta_t^i L(\hat{e_i}) \right). \tag{23}$$

**Notation :** On notera $V(\beta)$ l'opérateur agissant sur les distributions $\sum\limits_{1\leq i\leq 2n} \beta_t^i L(\hat{e_i})$.

La conjecture de Kashiwara-Vergne s'écrit donc plus simplement

$$\partial_t m_t = -m_t \circ V(\beta_t).$$

*Remarque 3.2.* — Comme on le constate, ce n'est pas la dérivée de Lie $L(\beta_t)$ sur les distributions qui intervient mais l'opérateur sur les distributions $V(\beta_t) = \sum_{1\leq i\leq 2n} \beta_t^i L(\hat{e_i})$. Toutefois on vérifie (cf. [**5**]) que l'on a la relation importante suivante pour $\beta, \gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}\times\mathcal{O}, \mathfrak{g}\times\mathfrak{g})$,

$$V([\beta,\gamma]_{Lie}) = [V(\beta), V(\gamma)],$$

c'est-à-dire $V$ est un homomorphisme de Lie.

### 3.3. Équation de courbure nulle

Dans [**27**] on définit, grâce à la quantification de Kontsevich (cf. Appendice A, § 4.3), une déformation $Z_u(X,Y)$ (resp. $D_u(X,Y)$) de la série de Campbell-Hausdorff (resp. de la fonction de densité).

On écrit maintenant ces équations de déformation en termes analogues à la proposition 3.1. D'après le § 4.3, théorème 4.3, il existe une fonction $\gamma_u \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}\times\mathcal{O}, \mathfrak{g}\times\mathfrak{g})$ analytique en $u \in [0,1]$, vérifiant $\gamma_u(0,0) = (0,0)$ et donnée par des séries de Lie universelles convergentes et il existe une déformation $\widehat{m_u}$ (définie comme en (20) avec $Z_u$ et $D_u$) du produit sur les distributions, telles que l'on ait

$$\partial_u \widehat{m_u} = -\widehat{m_u} \circ V(\gamma_u).$$

Pour $u=0$, on retrouve $m_0$ le produit standard dans $\mathfrak{g}$, et pour $u=1$ on retrouve le produit $m$. Il est important de remarquer que la déformation $m_u$ n'est pas un produit associatif, contrairement à $m_t$.

En considérant le paramètre de déformation par dilatation $t\in[0,1]$ on en déduit que l'on a aussi par dilatation

$$\partial_u \widehat{m_{u,t}} = -\widehat{m_{u,t}} \circ V(\gamma_{u,t}) \tag{24}$$

avec $\gamma_{u,t}(X,Y) = \frac{1}{t}\gamma_u(tX,tY)$ et $\widehat{m_{u,t}}$ définie comme en (20) avec $\frac{1}{t}Z_u(tX,tY)$ et $D_u(tX,tY)$. On a $\widehat{m_{u=0,t}} = m_0$ et $\widehat{m_{u=1,t}} = m_t$.

L'idée d'Alekseev et Meinrenken est de construire à partir de la solution $\gamma_u$ une solution $\beta_t$ de la proposition 3.1. Pour cela, il faut résoudre une équation de courbure.

PROPOSITION 3.3. — *Il existe une série de Lie universelle $\beta_{u,t}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ convergente dans un voisinage de $(0,0)$, telle que $\beta_{0,t}=(0,0)$, et vérifiant l'équation*

$$\partial_u\beta_{u,t}-\partial_t\gamma_{u,t}+[\beta_{u,t},\gamma_{u,t}]_{Lie}=0.$$

*On a $\beta_{u,t}(X,Y)=\frac{1}{t}\beta_{u,t=1}(tX,tY)$.*

PREUVE — C'est une équation différentielle en $u$ linéaire avec second membre. Il y a donc unicité et l'assertion sur la dilatation résulte de l'égalité $\gamma_{u,t}(X,Y)=\frac{1}{t}\gamma_{u,t=1}(tX,tY)$. On peut résoudre formellement cette équation en utilisant les résolvantes (19). On trouve facilement

$$\beta_{u,t}=\sum_{n\geq 0}\int_{0\leq u_0\leq u_1\leq\cdots\leq u_n\leq u}\mathrm{d}u_0\ldots\mathrm{d}u_n\mathrm{ad}\gamma_{u_n,t}\ldots\mathrm{ad}\gamma_{u_1,t}\partial_t\gamma_{u_0,t}.$$

À partir de cette expression, on montre la convergence et d'après la définition du crochet $[\ ,\ ]_{Lie}$, § 3.1.5, il est clair que l'on ne manipule que des séries de Lie.

*Remarque 3.4.* — Une autre façon de voir l'équation de courbure est la suivante. On résout formellement, dans le groupe de Lie associé à la structure de Lie $[\ ,\ ]_{Lie}$, l'équation $\partial_u g(u,t)=-g(u,t)\gamma_{u,t}$ avec condition initiale $g(0,t)=1$. On a alors facilement

$$\beta_{u,t}=-g(u,t)^{-1}\partial_t g(u,t).$$

### 3.4. Solution d'Alekseev et Meinrenken à la conjecture de Kashiwara-Vergne

On conclut maintenant par le théorème suivant qui résout la conjecture de Kashiwara-Vergne.

THÉORÈME 3.5 ([**5**]). — *La série de Lie universelle $\beta_{u=1,t}=(F_t(X,Y),G_t(X,Y))$ résout la conjecture de Kashiwara-Vergne.*

PREUVE — Le formalisme de la remarque précédente est très pratique pour comprendre la preuve. Le point clef est que l'on a la formule suivante

$$\widehat{m_{u,t}}=m_0\circ V(g(u,t)).$$

En effet les deux membres coïncident pour $u=0$ et vérifient la même équation différentielle (24). On a en effet

$$\begin{aligned}(25)\quad \partial_u\left(m_0\circ V(g(u,t))\right)=m_0\circ V(\partial_u g(u,t))=\\ -m_0\circ V(g(u,t)\gamma_{u,t})=-\left(m_0\circ V(g(u,t))\right)\circ V(\gamma_{u,t})\end{aligned}$$

car $V$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie pour $[\ ,\ ]_{Lie}$.

(19) On pourrait utiliser aussi les séries de Magnus.

Comme on a $\beta_{u,t} = -g(u,t)^{-1}\partial_t g(u,t)$, on en déduit

$$\partial_t \widehat{m_{u,t}} = -\widehat{m_{u,t}} \circ V(\beta_{u,t}).$$

Or on a $\widehat{m_{u=1,t}} = m_t$ ; il vient donc l'équation $\partial_t m_t = -m_t \circ V(\beta_t)$ avec $\beta_t = \beta_{u=1,t}$. Ceci résout la conjecture de Kashiwara-Vergne d'après la reformulation de la proposition 3.1.

### 3.5. Prolongement de l'isomorphisme de Duflo en cohomologie

Considérons le morphisme d'algèbres de Lie, $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ donné par l'injection diagonale. L'application duale $\psi^*$ s'étend aux algèbres extérieures :

$$\psi^* : \bigwedge(\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*) = \bigwedge \mathfrak{g}^* \otimes \bigwedge \mathfrak{g}^* \longrightarrow \bigwedge \mathfrak{g}^*.$$

C'est le produit dans l'algèbre extérieure $\bigwedge \mathfrak{g}^*$.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathfrak{g}$-module, on notera $d_{\mathcal{M}}$ la différentielle de Chevalley-Eilenberg sur $\mathcal{M} \otimes \bigwedge \mathfrak{g}^*$ et $C(\mathfrak{g}, \mathcal{M})$ le complexe des cochaînes. Comme d'habitude, on notera par $H(\mathfrak{g}, \mathcal{M})$ l'algèbre de cohomologie.

Considérons $\mathcal{D}'_{comp}(\mathcal{O} \times \mathcal{O})$ comme un $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$-module et $\mathcal{D}'_{comp}(\mathcal{O})$ comme un $\mathfrak{g}$-module. Notons $M_t = m_t \otimes \psi^*$. C'est une application de complexes de $C\left(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \mathcal{D}'_{comp}(\mathcal{O} \times \mathcal{O})\right)$ dans $C\left(\mathfrak{g}, \mathcal{D}'_{comp}(\mathcal{O})\right)$. On a

$$\partial_t M_t = \partial_t m_t \otimes \psi^*.$$

Dans [**5**], on montre que $V(\beta) \otimes \psi^*$, qui est une application de complexes de $C\left(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \mathcal{D}'_{comp}(\mathcal{O} \times \mathcal{O})\right)$ dans $C\left(\mathfrak{g}, \mathcal{D}'_{comp}(\mathcal{O} \times \mathcal{O})\right)$, est homotopiquement triviale. Plus précisément on a [20]

$$V(\beta) \otimes \psi^* = (1 \otimes \psi^*) \circ [d, \iota(\beta)]$$

avec $\iota(\beta) = \sum_{1 \leq i \leq 2n} \beta_i \iota(\hat{e_i})$ et $\iota(\hat{e_i})$ la dérivation de l'algèbre extérieure $\bigwedge(\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*)$ donnée par la contraction. Comme on a $\partial_t m_t = -m_t \circ V(\beta_t)$, il vient alors

$$\partial_t M_t = -(m_t \circ V(\beta_t)) \otimes \psi^* = -(m_t \otimes 1) \circ (1 \otimes \psi^*) \circ [d, \iota(\beta_t)] = -M_t \circ [d, \iota(\beta_t)].$$

L'égalité

$$\partial_t M_t = -M_t \circ [d, \iota(\beta_t)]$$

peut se comprendre comme une troisième reformulation de la conjecture de Kashiwara-Vergne dans le complexe des cochaînes.

Cette égalité montre que l'application de Duflo se prolonge en un morphisme d'algèbres de $H(\mathfrak{g}, S[\mathfrak{g}])$ dans $H(\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g}))$, précisant ainsi l'isomorphisme démontré dans [**19**]. On retrouve le résultat de [**21**].

---

(20) Ici intervient le fait que $\beta$ est une application $\mathfrak{g}$-équivariante.

# 4. APPENDICE A

La formule de Kontsevich pour la quantification formelle des variétés de Poisson montre que l'on peut donner une expression pour la série de Campbell-Hausdorff en utilisant tous les crochets possibles à la différence de la formule de Dynkin (cf. § 5.1).

## 4.1. Quantification de Kontsevich

Dans cette section, afin de faciliter la compréhension de la déformation utilisée dans [**5**], on va rappeler brièvement la construction de Kontsevich pour la quantification formelle des variétés de Poisson dans le cas du dual des algèbres de Lie.

4.1.1. *Variétés de configurations.* — On note $C_{n,m}$ l'espace des configurations de $n$ points distincts dans le demi-plan de Poincaré (points de première espèce ou points aériens) et $m$ points distincts sur la droite réelle (ce sont les points de seconde espèce ou points terrestres), modulo l'action du groupe $az+b$ (pour $a \in \mathbf{R}^{+*}, b \in \mathbf{R}$). Dans son article [**19**], Kontsevich construit des compactifications de ces variétés notées $\overline{C}_{n,m}$. Ce sont des variétés à coins de dimension $2n-2+m$. Ces variétés ne sont pas connexes pour $m \geq 2$. On notera par $\overline{C}^{+}_{n,m}$ la composante qui contient les configurations où les points terrestres sont ordonnés dans l'ordre croissant (i.e. on a $\overline{1} < \overline{2} < \cdots < \overline{m}$).

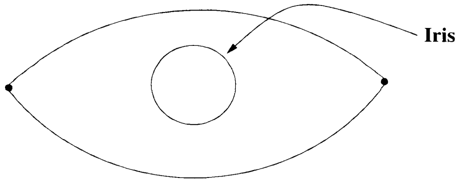


FIGURE 1. La variété $\overline{C}_{2,0}$.

4.1.2. *Graphes et graphes géométriques.* — On note $G_{n,2}$ l'ensemble des graphes étiquetés [21] et orientés (les arêtes sont orientées) ayant $n$ sommets de première espèce numérotés $1, 2, \cdots, n$ et deux sommets de deuxième espèce $\overline{1}, \overline{2}$, tels que :

i) Les arêtes partent des sommets de première espèce. De chaque sommet de première espèce partent exactement deux arêtes.

ii) Le but d'une arête est différent de sa source (il n'y a pas de boucle).

iii) Il n'y a pas d'arête multiple.

Dans le cas linéaire qui nous intéresse, les graphes qui interviennent de manière non triviale (on dira essentiels) sont tels que les sommets de première espèce ne peuvent

(21) Par graphe étiqueté, on entend un graphe $\Gamma$ muni d'un ordre total sur l'ensemble $E_\Gamma$ de ses arêtes, compatible avec l'ordre des sommets.

recevoir qu'au plus une arête. Il en résulte que tout graphe essentiel est superposition de graphes simples de type Lie (graphe ayant une seule racine comme dans Fig. 2) ou de type roue (cf. Fig. 3 pour un exemple).

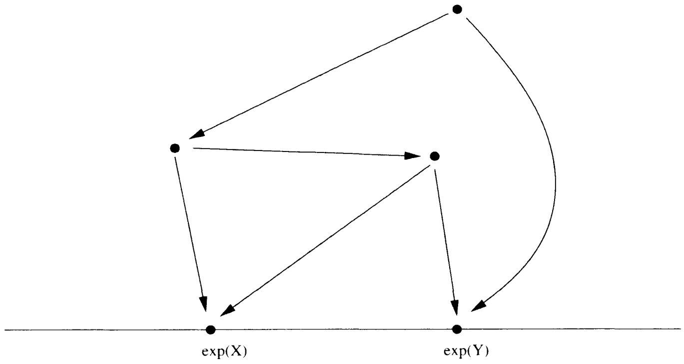


FIGURE 2. Graphe simple de type Lie et de symbole $\Gamma(X,Y) = [[X,[X,Y]],Y]$.

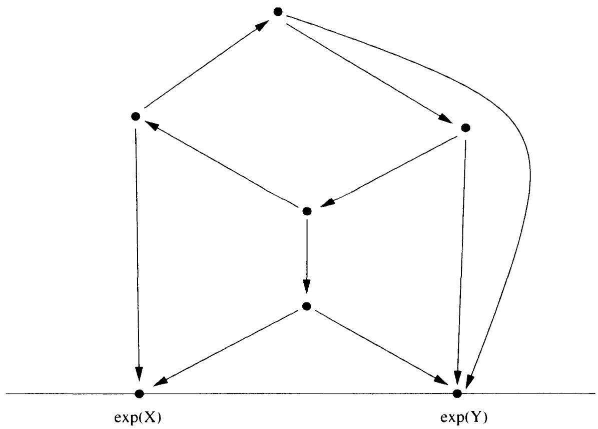


FIGURE 3. Graphe de type roue et de symbole $\Gamma(X,Y) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}X\mathrm{ad}[X,Y]\mathrm{ad}Y\mathrm{ad}Y)$.

Les graphes simples essentiels de type Lie n'ont pas de symétries. Par conséquent les graphes de $G_{n,2}$ étiquetés associés à un graphe géométrique de type Lie (graphe orienté associé pour lequel on oublie l'étiquetage) sont au nombre de $n!2^n$.

Les graphes simples de type roue peuvent admettre des symétries. On notera $m_\Gamma$ le cardinal du groupe de symétries de $\Gamma$.

4.1.3. *Fonction d'angle et coefficients.* — Soient deux points distincts $(p,q)$ dans le demi-plan de Poincaré muni de la métrique de Lobachevsky. On note

$$\phi_h(p,q) = \operatorname{Arg}\left(\frac{q-p}{q-\overline{p}}\right) \tag{26}$$

la fonction d'angle de $C_{2,0}$ dans $\mathbb{S}^1$. Cette fonction d'angle s'étend en une fonction régulière à la compactification $\overline{C}_{2,0}$.

Si $\Gamma$ est un graphe dans $G_{n,2}$, alors toute arête $e$ définit par restriction une fonction d'angle notée $\phi_e$ sur la variété $\overline{C}^+_{n,2}$. On note $E_\Gamma$ l'ensemble des arêtes du graphe $\Gamma$. Le produit ordonné

$$\Omega_\Gamma = \bigwedge_{e\in E_\Gamma} \mathrm{d}\phi_e \tag{27}$$

est donc une $2n$-forme sur $\overline{C}^+_{n,2}$ variété compacte de dimension $2n$.

DÉFINITION 4.1. — *Le poids associé à un graphe* $\Gamma$ *est par définition*

$$w_\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\overline{C}^+_{n,2}} \Omega_\Gamma. \tag{28}$$

### 4.2. Nouvelle formule de Campbell-Hausdorff

Si $\Gamma$ est un graphe simple de type Lie, on notera $\Gamma(X,Y)$ le mot dans l'algèbre de Lie libre associée (cf. Fig. 2 pour un exemple). Plus généralement si $\Gamma$ est simple de type roue alors $\Gamma(X,Y)$ sera une fonction de trace (cf. Fig. 3 pour un exemple).

THÉORÈME 4.2 ([**17**], [**9**]). — *La série de Campbell-Hausdorff peut s'écrire en termes de graphes sous la forme d'une série convergente au voisinage de* $(0,0)$

$$Z(X,Y) = X + Y + \sum_{n\geq 1} \sum_{\substack{\Gamma \text{ simple} \\ \text{géométrique} \\ \text{de type Lie } (n,2)}} w_\Gamma \Gamma(X,Y). \tag{29}$$

*La fonction de densité s'écrit alors comme série convergente au voisinage de* $(0,0)$

$$D(X,Y) = \exp\left(\sum_{n\geq 1} \sum_{\substack{\Gamma \text{ simple} \\ \text{géométrique} \\ \text{de type Roue } (n,2)}} \frac{w_\Gamma}{m_\Gamma}\Gamma(X,Y)\right). \tag{30}$$

### 4.3. Déformation de Kontsevich

On construit une déformation 2-dimensionnelle de la série de Campbell-Hausdorff en déformant les coefficients via un paramètre $\xi \in \overline{C}_{2,0}$. Pour $\Gamma \in G_{n,2}$, notons $\overline{C}_\xi$ la pré-image de $\xi$ dans l'espace de configurations $\overline{C}_{n+2,0}$ et

$$w_\Gamma(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\overline{C}_\xi} \Omega_\Gamma.$$

On définit les déformations $Z_\xi(X,Y)$ et $D_\xi(X,Y)$ en remplaçant dans les formules du théorème 4.2 le coefficient $w_\Gamma$ par sa déformation $w_\Gamma(\xi)$. Ces déformations sont régulières et admettent comme conditions aux limites pour $\xi = (0,1)$ [22]

$$Z_{(0,1)}(X,Y) = Z(X,Y) \quad \text{et} \quad D_{(0,1)}(X,Y) = D(X,Y),$$

et pour $\xi = \alpha$ une position sur l'iris [23] (cf. Fig 1)

$$Z_\alpha(X,Y) = X+Y \quad \text{et} \quad D_\alpha(X,Y) = 1.$$

Cette déformation est contrôlée par des équations différentielles provenant de l'action tangente du groupe $G$, c'est-à-dire les champs adjoints qui interviennent dans la conjecture de Kashiwara-Vergne. Ce contrôle provient essentiellement de la formule de Stokes comme utilisée dans [**19**].

THÉORÈME 4.3 ([**27**]). — *Il existe des séries de Lie universelles $F_\xi(X,Y)$ et $G_\xi(X,Y)$ explicites construites en termes de diagrammes, convergentes dans un voisinage de $(0,0)$ et qui sont des 1-formes régulières sur $\overline{C}_{2,0}$ telles que l'on ait :*

$$\mathrm{d}_\xi Z_\xi(X,Y) = [X, F_\xi(X,Y)]\cdot\partial_X Z_\xi(X,Y) + [Y, G_\xi(X,Y)]\cdot\partial_Y Z_\xi(X,Y) \tag{31}$$

*et*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_\xi D_\xi(X,Y) = {} & \Big([X, F_\xi(X,Y)]\cdot\partial_X + [Y, G_\xi(X,Y)]\cdot\partial_Y\Big) D_\xi(X,Y) + \\ & \Big(\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\big(\partial_X F_\xi(X,Y)\circ \mathrm{ad}X + \partial_Y G_\xi(X,Y)\circ\mathrm{ad}Y\big)\Big) D_\xi(X,Y).\end{aligned} \tag{32}$$

*Remarque 4.4.* — Pour $\xi$ générique, la déformation $Z_\xi$ ne définit pas une loi associative. Par exemple, la déformation le long de la paupière de $\overline{C}_{2,0}$ fait intervenir des polynômes de Bernoulli (cf. [**27**]).

*Remarque 4.5.* — On peut montrer que la connexion $\gamma_\xi := (F_\xi, G_\xi)$ est plate, c'est-à-dire que l'on a $\mathrm{d}_\xi\gamma_\xi + \frac{1}{2}[\gamma_\xi,\gamma_\xi]_{Lie} = 0$, pour le crochet défini §3.1.5.

---

[22] Cette position sur l'axe réel correspond à un coin de $\overline{C}_{2,0}$.

[23] Cela correspond à une concentration des deux points selon un angle $\alpha$.

*Remarque 4.6.* — Grâce à la quantification de Kontsevich, on construit les déformations vérifiant les équations (10) et (19). En suivant un chemin comme dans Fig. 4 de l'iris jusqu'au coin, on définit donc des déformations $Z_u(X,Y), D_u(X,Y)$ pour $u \in [0,1]$ et une fonction $\gamma_u = (F_u, G_u)$ définie dans un voisinage de $(0,0)$ à valeurs dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

*Remarque 4.7.* — On peut étendre toutes ces constructions au cas de la série de Campbell-Hausdorff avec $n$ arguments $Z(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ en considérant un paramètre de déformation dans $\overline{C}_{n,0}$. On a encore un contrôle par des équations différentielles comme dans le théorème 4.3. La méthode d'Alekseev-Meinrenken s'étend sans problème et résout le problème de Kashiwara-Vergne avec $n$ arguments posé dans [**10**].

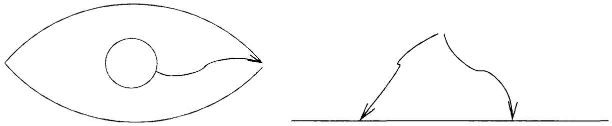

FIGURE 4. Chemin de l'iris jusqu'au coin

## 5. APPENDICE B

On regroupe dans cet appendice quelques résultats complémentaires sur la formule de Dynkin et on précise certains calculs utiles pour la compréhension de ce texte.

### 5.1. La formule de Dynkin

Il existe de nombreuses façons d'écrire la série de Campbell-Hausdorff. On peut notamment écrire les développements que l'on obtient en calculant la dérivée de l'application exponentielle puis en intégrant à nouveau. Nous allons ici rappeler une autre formule due à Dynkin.

Pour simplifier, on note comme ci-dessous les crochets successifs normalisés :

$$[X_1, \ldots, X_n]_* = \frac{1}{n}[X_1, [X_2, \ldots, [X_{n-1}, X_n]] \ldots]$$

et

$$[X_1^{r_1}, \ldots, X_n^{r_n}]_* = [\underbrace{X_1, \ldots, X_1}_{r_1}, \ldots, \underbrace{X_n \ldots X_n}_{r_n}]_*$$

On obtient alors la célèbre formule de Dynkin.

PROPOSITION 5.1. — *On a la formule*

$$(33)\quad Z(X,Y) \;=\; X + Y + \sum_{m\geq 2}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\sum_{p_i+q_i>0}\frac{[X^{p_1},Y^{q_1},\dots,X^{p_m},Y^{q_m}]_*}{p_1!q_1!\dots p_m!q_m!}.$$

Rappelons comment on obtient cette formule : notons $L_{X,Y}$ l'algèbre de Lie libre engendrée par $X,Y$ [24] et $\mathrm{Ass}_{X,Y}$ l'algèbre associative libre engendrée par $X,Y$. Plaçons-nous dans l'algèbre enveloppante $U(L_{X,Y})$ qui, rappelons-le, s'identifie à $\mathrm{Ass}_{X,Y}$ (cf. [**25**]). On calcule formellement

$$e^Xe^Y = \sum_{p,q\geq 0}\frac{X^p}{p!}\frac{Y^q}{q!},$$

puis en utilisant le développement de

$$\ln z = \sum_{m\geq 1}\frac{(-1)^{m-1}}{m}(z-1)^m,$$

on trouve formellement

$$Z(X,Y) = \sum_{m\geq 1}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\sum_{p_i+q_i\geq 1}\frac{X^{p_1}Y^{q_1}\dots X^{p_m}Y^{q_m}}{p_1!q_1!\dots p_m!q_m!}.$$

On utilise alors une caractérisation des éléments de l'algèbre de Lie libre dans l'algèbre associative libre due à Dynkin ([**25**] §4.4) : un élément

$$a = \sum_\alpha c_\alpha X_{\alpha_1}X_{\alpha_2}\dots X_{\alpha_n}$$

d'ordre $n$ est dans $L_{X,Y}$ si et seulement si

$$a = \sum_\alpha c_\alpha[X_{\alpha_1},X_{\alpha_2},\dots,X_{\alpha_n}]_*.$$

*Remarque 5.2.* — La formule de Dynkin n'utilise que des crochets itérés.

### 5.2. La différentielle de l'application exponentielle

À partir de la formule de Dynkin, on peut mener un calcul explicite sur les termes à l'ordre 1 en $y$ (voir [**22**], page 103), ce qui permet de retrouver les nombres de Bernoulli $b_n$. Ce calcul n'est pas évident, mais il est faisable. Rappelons que la série de Bernoulli est donnée par

$$(34)\qquad \sum_{n\geq 0}\frac{b_nx^n}{n!} = \frac{x}{e^x-1} = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+\frac{x^6}{30240}\cdots.$$

Les $b_n$ pour $n\geq 3$ impair sont nuls.

[24] On appellera aussi polynôme de Lie en $X,Y$ ou élément de type Lie, tout élément de $L_{X,Y}$.

En calculant la série $Z(X,Y)$ à l'ordre 1 en $Y$, on déduit la formule bien connue suivante :

$$Z(X,Y) \equiv X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] + \cdots \pmod{Y^2}$$
$$\equiv X + \frac{\mathrm{ad}X}{1 - e^{-\mathrm{ad}X}} \cdot Y \pmod{Y^2}.$$

On en tire la formule

$$\exp_{\mathfrak{g}}(X)\exp_{\mathfrak{g}}\left(\frac{1 - e^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X} \cdot Y\right) \equiv \exp_{\mathfrak{g}}(X + Y + \bmod Y^2),$$

et on conclut que la différentielle de l'application exponentielle s'identifie à l'endomorphisme

$$Y \mapsto \frac{1 - e^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X} \cdot Y, \tag{35}$$

si on utilise la multiplication à gauche[25] pour identifier $\mathfrak{g}$ avec l'espace tangent en $\exp_{\mathfrak{g}}(X)$.

### 5.3. Équivalence entre les équations (7) et (10) pour $Z_t(X,Y)$

Dans cette sous-section, nous expliquons comment on passe de l'équation (7) à l'équation (10). On suit les références [**16**] et [**24**].
On fait un calcul à l'ordre 1 en $\epsilon$, comme dans une dérivée pour

$$Z_t(X + \epsilon[X, F_t], Y + \epsilon[Y, G_t]).$$

D'après la formule de la différentielle (proposition 35) pour l'application exponentielle, on a :

$$\exp_{\mathfrak{g}}(tX + \epsilon[tX, F_t]) = \exp_{\mathfrak{g}}(tX)\exp_{\mathfrak{g}}\left(\epsilon\frac{1 - e^{-\mathrm{ad}tX}}{\mathrm{ad}tX}[tX, F_t]\right) = \exp_{\mathfrak{g}}(tX)\exp_{\mathfrak{g}}\left(\epsilon(1 - e^{-\mathrm{ad}tX})F_t\right). \tag{36}$$

De même on a

$$\exp_{\mathfrak{g}}(tY + \epsilon[tY, G_t]) = \exp_{\mathfrak{g}}\left(\epsilon(e^{\mathrm{ad}tY} - 1)G_t\right)\exp_{\mathfrak{g}}(tY).$$

On en déduit alors

(37)
$$\exp_{\mathfrak{g}}\left(tZ_t(X + \epsilon[X, F_t], Y + \epsilon[Y, G_t])\right) = \exp_{\mathfrak{g}}(tX + \epsilon[tX, F_t])\exp_{\mathfrak{g}}(tY + \epsilon[tY, G_t]) =$$
$$\exp_{\mathfrak{g}}(tX)\exp_{\mathfrak{g}}\left(\epsilon(1 - e^{-\mathrm{ad}tX})F_t + \epsilon(e^{\mathrm{ad}tY} - 1)G_t\right)\exp_{\mathfrak{g}}(tY).$$

---

[25] Si on utilisait la multiplication à droite, on trouverait $Y \mapsto \frac{e^{\mathrm{ad}X} - 1}{\mathrm{ad}X} \cdot Y$.

L'équation (10) dit que l'on a

$$Z_t(X+\epsilon[X,F_t],Y+\epsilon[Y,G_t]) = Z_t(X,Y)+\epsilon\partial_t Z_t(X,Y) = Z_{t+\epsilon}(X,Y).$$

Dans ce cas, en utilisant la formule

$$\exp_{\mathfrak{g}}(tY)Z_t(X,Y)\exp_{\mathfrak{g}}(-tY) = Z_t(Y,X),$$

le membre de gauche de (37) s'écrit

$$\begin{aligned}(38)\qquad & \exp_{\mathfrak{g}}(tZ_{t+\epsilon}(X,Y)) \\ &= \exp_{\mathfrak{g}}((t+\epsilon)Z_{t+\epsilon}(X,Y))\exp_{\mathfrak{g}}(-\epsilon Z_t(X,Y)) \\ &= \exp_{\mathfrak{g}}((t+\epsilon)X)\exp_{\mathfrak{g}}((t+\epsilon)Y)\exp_{\mathfrak{g}}(-\epsilon Z_t(X,Y)) \\ &= \exp_{\mathfrak{g}}(tX)\exp_{\mathfrak{g}}\Big(\epsilon X+\epsilon Y-\epsilon Z_t(Y,X)\Big)\exp_{\mathfrak{g}}(tY).\end{aligned}$$

En comparant avec le membre de droite de (37), il se trouve que l'on a, à l'ordre 1 en $\epsilon$ :

$$X+Y-Z_t(Y,X) = (1-e^{-\mathrm{ad}\, tX})F_t(X,Y)+(e^{\mathrm{ad}\, tY}-1)G_t(X,Y)$$

qui est exactement l'équation (7).
Réciproquement si l'équation (7) est vérifiée, alors on aura

$$(1-e^{-\mathrm{ad}\, tX})F_t+(e^{\mathrm{ad}\, tY}-1)G_t = X+Y-\frac{1}{t}\log\left(\exp_{\mathfrak{g}}(tY)\exp_{\mathfrak{g}}(tX)\right).$$

En remplaçant ce terme dans (37), on retrouve le terme de droite de (38), ce qui permet de remonter le calcul et de conclure que l'on a

$$Z_{t+\epsilon}(X,Y) = Z_t\big(X+\epsilon[X,F_t],Y+\epsilon[Y,G_t]\big),$$

c'est-à-dire

$$\partial_t Z_t(X,Y) = \big([X,F_t]\cdot\partial_X+[Y,G_t]\cdot\partial_Y\big)Z_t(X,Y),$$

qui est bien l'équation (10).

## RÉFÉRENCES


[1] L. Albert, P. Harinck & C. Torossian – Solution non universelle pour le problème $KV-78$, preprint, arXiv:0802.2049, 2008.

[2] A. Alekseev & E. Meinrenken – The non-commutative Weil algebra, *Invent. Math.* **139** (2000), p. 135–172.

[3] ———, Poisson geometry and the Kashiwara-Vergne conjecture, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **335** (2002), p. 723–728.

[4] ———, Lie theory and the Chern-Weil homomorphism, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **38** (2005), p. 303–338.

[5] ______, On the Kashiwara-Vergne conjecture, *Invent. Math.* **164** (2006), p. 615–634.

[6] A. Alekseev & E. Petracci – Low order terms of the Campbell-Hausdorff series and the Kashiwara-Vergne conjecture, *J. Lie Theory* **16** (2006), p. 531–538.

[7] A. Alekseev & C. Torossian – The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators, preprint arXiv:0802.4300, 2008.

[8] M. Andler, A. Dvorsky & S. Sahi – Kontsevich quantization and invariant distributions on Lie groups, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **35** (2002), p. 371–390.

[9] M. Andler, S. Sahi & C. Torossian – Convolution of invariant distributions : proof of the Kashiwara-Vergne conjecture, *Lett. Math. Phys.* **69** (2004), p. 177–203.

[10] E. Burgunder – Eulerian idempotent and Kashiwara–Vergne conjecture, *Ann. Inst. Fourier* **58** (2008), p. 1153–1184.

[11] J. Dixmier – Sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente, *Arch. Math.* **10** (1959), p. 321–326.

[12] M. Duflo – Caractères des groupes et des algèbres de Lie résolubles, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **3** (1970), p. 23–74.

[13] ______, Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **10** (1977), p. 265–288.

[14] S. Gutt – An explicit *-product on the cotangent bundle of a Lie group, *Lett. Math. Phys.* **7** (1983), p. 249–258.

[15] Harish-Chandra – On some applications of the universal enveloping algebra of a semisimple Lie algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.* **70** (1951), p. 28–96.

[16] M. Kashiwara & M. Vergne – The Campbell-Hausdorff formula and invariant hyperfunctions, *Invent. Math.* **47** (1978), p. 249–272.

[17] V. Kathotia – Kontsevich's universal formula for deformation quantization and the Campbell-Baker-Hausdorff formula, *Internat. J. Math.* **11** (2000), p. 523–551.

[18] A. A. Kljačko – Lie elements in a tensor algebra, *Sibirsk. Mat. Ž.* **15** (1974), p. 1296–1304, 1430.

[19] M. Kontsevich – Deformation quantization of Poisson manifolds, *Lett. Math. Phys.* **66** (2003), p. 157–216.

[20] T. Mochizuki – On the morphism of Duflo-Kirillov type, *J. Geom. Phys.* **41** (2002), p. 73–113.

[21] M. Pevzner & C. Torossian – Isomorphisme de Duflo et la cohomologie tangentielle, *J. Geom. Phys.* **51** (2004), p. 487–506.

[22] M. Postnikov – *Leçons de géométrie – groupes et algèbres de lie*, Mathématiques, "Mir", 1985.

[23] F. Rouvière – Démonstration de la conjecture de Kashiwara-Vergne pour l'algèbre sl(2), *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **292** (1981), p. 657–660.

[24] ______, Espaces symétriques et méthode de Kashiwara-Vergne, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **19** (1986), p. 553–581.

[25] J-P. Serre – *Lie algebras and Lie groups*, Lectures given at Harvard University, vol. 1964, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965.

[26] B. Shoikhet – Tsygan formality and Duflo formula, *Math. Res. Lett.* **10** (2003), p. 763–775.

[27] C. Torossian – Sur la conjecture combinatoire de Kashiwara-Vergne, *J. Lie Theory* **12** (2002), p. 597–616.

[28] V. S. Varadarajan – *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 102, Springer, 1984, Reprint of the 1974 edition.

[29] M. Vergne – Le centre de l'algèbre enveloppante et la formule de Campbell-Hausdorff, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **329** (1999), p. 767–772.

Charles TOROSSIAN

Université Denis Diderot – Paris 7
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
175, rue du Chevaleret
F-75013 Paris
*E-mail* : `torossian@math.jussieu.fr`