Astérisque

DAVID HARARI

Points rationnels sur les sous-variétés des variétés abéliennes au-dessus d'un corps de fonctions [d'après Poonen et Voloch]

Astérisque, tome 317 (2008), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 979, p. 415-440

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__317__415_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 2007
59^e année, 2006-2007, n^o 979, p. 415 à 440

POINTS RATIONNELS SUR LES SOUS-VARIÉTÉS DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES AU-DESSUS D'UN CORPS DE FONCTIONS
[d'après Poonen et Voloch]

par **David HARARI**

Introduction

Les travaux [**20**] de B. Poonen et J.F. Voloch dont nous allons parler dans cet exposé concernent les points rationnels de certaines variétés algébriques sur le corps de fonctions d'une courbe, c'est-à-dire sur un corps K extension finie d'un corps $k(t)$ (où k est un corps de base fixé). Bien que la plupart de leurs résultats s'appliquent à des corps k assez généraux, ils sont particulièrement significatifs quand k est un corps fini. On verra du reste que certains de leurs arguments sont spécifiques à la caractéristique positive.

Il est bien connu que les corps de nombres (i.e. les extensions finies du corps $\mathbf{Q}$ des rationnels) et les corps de fonctions d'une courbe sur un corps fini ont des propriétés très similaires. Le problème résolu par Poonen et Voloch trouve son origine dans une question concernant les courbes sur les corps de nombres (posée indépendamment par Scharaschkin et Skorobogatov vers 1998), que nous allons maintenant décrire.

Soit X une courbe algébrique (non singulière) projective définie sur un corps de nombres K, par exemple une courbe plane donnée dans $\mathbf{P}^2$ par une équation polynomiale $P(x,y,t)=0$ (homogène de degré d). Supposons X de genre au moins 2 (pour une courbe plane, cela équivaut à $d \geq 4$). On sait depuis 1983 que X n'a qu'un nombre fini de points rationnels (conjecture de Mordell, démontrée par Faltings), autrement dit l'équation ci-dessus n'a qu'un nombre fini de solutions non triviales à coordonnées dans K (à une constante multiplicative près). Mais comment déterminer si l'ensemble $X(K)$ des points rationnels de X est non vide ?

Première constatation : une condition nécessaire pour avoir $X(K) \neq \varnothing$ est que, pour tout complété K_v de K (relativement à ses différentes places, i.e. ses différentes classes d'équivalence de valeurs absolues), l'ensemble $X(K_v)$ des K_v-points de X soit non vide. Par exemple pour $K=\mathbf{Q}$, les complétés sont les corps p-adiques $\mathbf{Q}_p$ ($\mathbf{Q}_p$ est le complété de $\mathbf{Q}$ pour la valeur absolue $|\, x\,|_p = p^{-v_p(x)}$, où $v_p(x)$ est la valuation p-adique de x) et le corps $\mathbf{R}$ des réels. Si X est donnée par une équation polynomiale homogène, il s'agit donc de vérifier que cette équation a au moins une solution non triviale dans chaque complété K_v. Il se trouve que ce type de conditions est en pratique facile à vérifier, grâce au lemme de Hensel et aux estimées de Lang-Weil (cf. [**19**], paragraphe 1.2.)

Malheureusement ces conditions (dites locales) sont en général insuffisantes pour garantir l'existence d'un point rationnel (cela marche dans des cas particuliers comme les quadriques, théorème de Hasse-Minkowski) : par exemple la courbe de Cassels $x^4 + y^4 - (241)^2 t^4 = 0$ n'a pas de point rationnel, bien qu'elle ait des points réels et sur tous les $\mathbf{Q}_p$ (on trouvera d'autres exemples explicites dans [**29**], et des situations analogues en dimension supérieure dans [**19**]).

Soit J la *jacobienne* de X, qui est une variété abélienne (c'est-à-dire un groupe algébrique connexe et projectif) de dimension g. Il se trouve que l'ensemble $X(K)$ est mieux compris quand la courbe X est plongée dans J ; un tel plongement existe dès que X possède un *zéro-cycle de degré* 1, i.e. des points dans des extensions de K de degrés premiers entre eux dans leur ensemble.

Notons Ω l'ensemble de toutes les places de K. On pose, pour toute K-variété projective V :

$$V(\mathbf{A}_K) = \prod_{v \in \Omega} V(K_v).$$

C'est l'*espace adélique* de V que l'on munit de la topologie produit des topologies v-adiques. On note alors $\overline{V(K)}$ l'adhérence de $V(K)$ dans $V(\mathbf{A}_K)$: ainsi une famille de points locaux $(P_v)_{v \in \Omega}$ sur V est dans $\overline{V(K)}$ si et seulement si, pour tout ensemble fini de places S de K, il existe un point rationnel de V arbitrairement proche de P_v pour v dans S.

La question initiale (Q1) de Scharaschkin ([**24**]) et Skorobogatov portait sur *l'obstruction de Manin* à l'existence d'un point rationnel sur X. Nous reviendrons sur cet aspect dans la dernière partie de ce texte. Comme l'énoncé précis de (Q1) est un peu technique, nous allons essentiellement nous intéresser à la question suivante (Scharaschkin et Skorobogatov ont montré que (Q1) s'y ramenait) :

(Q2) *Soit X une courbe de genre au moins deux plongée dans sa jacobienne J. A-t-on $X(K) = X(\mathbf{A}_K) \cap \overline{J(K)}$?*

(Bien entendu l'inclusion $\subset$ est évidente). Quand le groupe de Mordell-Weil $J(K)$ de J est fini, on a $\overline{J(K)} = J(K)$, d'où une réponse positive à (Q2). Mais en général, la question ci-dessus reste très largement ouverte. On trouvera des conjectures du même style dans l'article de M. Stoll [**31**], avec notamment de nombreux liens entre l'obstruction de Brauer-Manin et les revêtements non ramifiés de la courbe X. On verra du reste que certains résultats de [**20**] sont des analogues naturels d'énoncés démontrés ou conjecturés dans [**31**] dans le cadre des corps de nombres, bien que leur démonstration dans le contexte des corps de fonctions fasse souvent intervenir des méthodes spécifiques à la caractéristique p.

Le but principal de l'article de Poonen et Voloch est de montrer que lorsque l'on se place sur un corps de fonctions, l'analogue de (Q2) admet (sous des hypothèses peu restrictives) une réponse positive dans le cadre plus général des sous-variétés des variétés abéliennes. Dans la section suivante, nous allons énoncer leurs résultats en détail.

1. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

1.1. Notations et conventions

Soit k un corps (dans tout ce texte, « corps » signifie corps commutatif). On considère un corps K de type fini et de degré de transcendance 1 sur k, et on suppose que k est algébriquement fermé dans K ; ainsi K est le corps des fonctions d'une courbe C (qu'on peut supposer projective et régulière) géométriquement irréductible sur k. On considère l'ensemble Ω de toutes les places de K/k, c'est-à-dire des classes d'équivalence de valeurs absolues non triviales de K qui sont triviales sur k. Ainsi Ω correspond à toutes les valuations discrètes données par les points fermés de C. Pour $v \in \Omega$, on note K_v le complété de K en v, $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de K_v, et $\mathbf{F}_v$ son corps résiduel (qui est une extension finie de k). On fixe des clôtures algébriques respectives $\bar{k}$, $\overline{K}$ de k et K, avec $\bar{k} \subset \overline{K}$. On note K^s la clôture séparable de K dans $\overline{K}$.

Pour toute K-variété projective V, on notera $V(\mathbf{A}_K) := \prod_{v\in\Omega} V(K_v)$ l'ensemble de ses *points adéliques.* Il est muni de la topologie produit des topologies v-adiques et on notera $\overline{V(K)}$ l'adhérence de $V(K)$ dans $V(\mathbf{A}_K)$. Si maintenant V est une variété sur un corps F et F' est une extension de F, on note $X_{F'} = X \times_F F'$ la F'-variété obtenue par extension des scalaires de F à F'. Une K-variété V est dite *isotriviale* (resp. constante) s'il existe une $\bar{k}$-variété (resp. une k-variété) W telle que $V_{\overline{K}}$ (resp. V) soit isomorphe à $W_{\overline{K}}$ (resp. W_K). Un sous-K-schéma fermé X d'une K-variété abélienne J est dit *sans cossette* si $X_{\overline{K}}$ ne contient aucun translaté de sous-variété abélienne non nulle de $J_{\overline{K}}$.

Si M est un groupe abélien et n un entier naturel, on note $M[n] = \{x \in M, nx = 0\}$ le sous-groupe de n-torsion de M et $M_{\mathrm{tors}} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} M[n]$ son sous-groupe de torsion. Si p est un nombre premier, on note $M[p^\infty] = \bigcup_{r\geq 0} M[p^r]$ le sous-groupe de torsion p-primaire de M. Pour tout groupe abélien profini G, on note $G^{(p)}$ son pro-p-quotient maximal (on a donc $G = \prod_p G^{(p)}$). Pour tout corps F de caractéristique p, on note F^{p^n} le sous-corps de F constitué des x^{p^n} pour $x \in F$, et on pose $F^{p^\infty} = \bigcap_{n\geq 1} F^{p^n}$.

1.2. Les principaux résultats

La conjecture la plus générale concernant « l'intersection adélique » pour une sous-variété fermée d'une variété abélienne est la suivante :

CONJECTURE 1.1 (Poonen/Voloch). — *Soient J une variété abélienne sur K et X un sous-K-schéma fermé de J. Alors :*

$$\overline{X(K)} = X(\mathbf{A}_K) \cap \overline{J(K)}.$$

Notons que, sans hypothèse supplémentaire, on ne peut pas remplacer ici $\overline{X(K)}$ par $X(K)$, même si X est une courbe de genre au moins deux : il y a des contre-exemples avec une courbe constante plongée dans sa jacobienne ([**20**], remarque 1.3.). Ceci dit, on va voir qu'on a $X(K) = \overline{X(K)}$ dans toutes les situations considérées par Poonen et Voloch, qui nécessitent du reste des conditions assez peu restrictives.

Le premier cas est le suivant :

THÉORÈME 1.2 (Poonen/Voloch). — *Supposons le corps k de caractéristique zéro. Alors $X(K) = X(\mathbf{A}_K) \cap \overline{J(K)}$ pour tout sous-K-schéma fermé X d'une K-variété abélienne J.*

Comme on le verra, ce cas est relativement simple car on a en fait $\overline{J(K)} = J(K)$ dès que k est de caractéristique zéro. Beaucoup plus difficile est le théorème suivant, qui répond positivement dans de nombreux cas à l'analogue de la question (Q2) :

THÉORÈME 1.3 (Poonen/Voloch). — *Supposons k de caractéristique $p > 0$. Soit J une K-variété abélienne telle que $J_{\overline{K}}$ n'ait aucun quotient isotrivial non nul, et telle que $J(K^s)[p^\infty]$ soit fini. Soit X un sous-K-schéma fermé sans cossette de J. Alors $X(K) = X(\mathbf{A}_K) \cap \overline{J(K)}$.*

Remarque 1.4. — Au lieu de considérer l'ensemble Ω de toutes les places, on peut travailler avec un sous-ensemble Ω_1 de Ω dont le complémentaire est fini ; on obtient les mêmes énoncés en remplaçant $X(\mathbf{A}_K)$ par $X(A_K^{\Omega_1}) := \prod_{v\in\Omega_1} X(K_v)$ et $\overline{J(K)}$ par l'adhérence de $J(K)$ dans $\prod_{v\in\Omega_1} J(K_v)$. Comme les preuves sont exactement les mêmes, nous nous limiterons à l'énoncé concernant $\mathbf{A}_K$ pour ne pas trop alourdir les notations.

Remarque 1.5. — Si $J_{\overline{K}}$ n'a pas de quotient isotrivial non nul et X est sans cossette, alors $X(K)$ est fini ([**11**], théorème 1.1 ; l'analogue sur les corps de nombres est un théorème classique de Faltings). De ce fait, si la conjecture 1.1 est vraie, l'hypothèse $J(K^s)[p^\infty]$ fini est inutile dans le théorème précédent. Notons que, d'après [**33**], on a $J(K^s)[p^\infty] = 0$ dans le cas « générique » où J est ordinaire telle que la classe de Kodaira-Spencer de J/K soit de rang maximal. Il faut aussi remarquer que cette condition sur la torsion p-primaire de $J(K^s)$ est tout à fait spécifique à la caractéristique p ; de fait il ne semble pas possible de s'inspirer des méthodes de Poonen et Voloch pour attaquer (Q2) sur les corps de nombres.

Enfin, dans le cas d'un corps global de caractéristique p (i.e. quand k est un corps fini), et sous les mêmes hypothèses que pour le théorème précédent, Poonen et Voloch donnent une réponse positive à la question initiale (Q1) de Skorobogatov et Scharaschkin. Nous exposerons ce résultat en détail à la fin de ce texte (théorème 6.12).

2. LA CARACTÉRISTIQUE ZÉRO

Dans cette section, nous démontrons le théorème 1.2. Le point-clef est la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. — *Supposons k de caractéristique zéro. Soit J une variété abélienne sur K. Alors, si v est une place quelconque de K, la topologie v-adique sur $J(K)$ est discrète.*

(On notera qu'ici K_v n'est pas localement compact.) Le théorème 1.2 se déduit immédiatement de cette proposition, car on obtient a fortiori que la topologie induite sur $J(K)$ par $J(\mathbf{A}_K)$ est discrète, donc $J(K)$ est fermé dans $J(\mathbf{A}_K)$ comme sous-groupe discret d'un groupe topologique séparé, ce qui implique

$$X(\mathbf{A}_K) \cap \overline{J(K)} = X(\mathbf{A}_K) \cap J(K) = X(K)$$

pour tout sous K-schéma fermé X de J.

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.1 — Soit $\mathcal{J}$ le modèle de Néron de J sur $\mathcal{O}_v$. Notons $J^1(K_v) := \ker[J(K_v) \to J(\mathbf{F}_v)]$ le noyau de l'application de réduction modulo v sur $J(K_v) = \mathcal{J}(\mathcal{O}_v)$. On peut supposer J simple (elle est isogène à un produit de variétés abéliennes simples, et l'énoncé de la proposition est invariant par isogénie), auquel cas soit $J(K)$ (si J n'est pas constante), soit $J(K)/J(k)$ (si J est constante) est un groupe abélien de type fini : c'est une conséquence du théorème de Lang-Néron ([**12**]) qui dit que dans tous les cas le quotient de $J(K)$ par $(\mathrm{Tr}_{K/k}\, J)(k)$ est de type fini (où $\mathrm{Tr}_{K/k}\, J$ est la k-variété abélienne définie comme la trace de J sur k).

Il en résulte que, dans tous les cas, l'intersection $J^1(K) := J(K) \cap J^1(K_v)$ est un groupe de type fini. Considérons alors la filtration

$$J^1(K_v) \supset J^2(K_v) \supset ...$$

de $J^1(K_v)$ par des sous-groupes ouverts dont l'intersection est nulle (on prend pour $J^n(K_v)$ le noyau de la flèche $J(K_v) \to \mathcal{J}(\mathcal{O}_v/\mathcal{M}_v^n)$, où $\mathcal{M}_v$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_v$). L'hypothèse $\mathrm{Car}\, k = 0$ implique que les quotients successifs de cette filtration sont sans torsion. De ce fait, la filtration correspondante sur $J^1(K)$ (qui est un groupe de type fini) n'a qu'un nombre fini de quotients non nuls. On obtient ainsi que $\{0\}$ est un sous-groupe ouvert de $J^1(K)$, qui est donc discret. Comme $J^1(K_v)$ est ouvert dans $J(K_v)$, le groupe $J(K)$ est également discret pour la topologie v-adique.

Remarque 2.2. — Des énoncés proches de la proposition 2.1 étaient déjà apparus dans la littérature ; le résultat figure par exemple dans [**2**] dans le cas particulier où $\mathrm{Tr}_{K/k} J = 0$.

On suppose désormais, jusqu'à la fin de ce texte, que k est de caractéristique $p > 0$.

Les trois prochaines sections sont consacrées à la preuve du théorème 1.3. La stratégie est la suivante : des résultats de comparaison entre topologies sur $J(K)$ permettent de démontrer la proposition 3.16, qui est une importante étape intermédiaire. Des arguments de théorie des modèles donnent une forme « très uniforme » de la conjecture de Mordell-Lang (proposition 4.10), qui entraîne (proposition 5.2) l'analogue dans notre cadre de la « conjecture de Mordell-Lang adélique » de Stoll. On obtiendra alors facilement le théorème 1.3 en combinant les propositions 3.16 et 5.2.

3. COMPARAISON ENTRE TOPOLOGIES SUR $J(K)$

La première étape de la preuve du théorème 1.3 consiste à montrer que la topologie adélique (i.e. la topologie induite par $J(\mathbf{A}_K)$) sur $J(K)$ est plus forte (au sens large) que celle induite par les sous-groupes d'indice fini. Autrement dit, si $H \subset J(K)$ est un sous-groupe d'indice fini, il existe un sous-groupe ouvert U de $J(\mathbf{A}_K)$ tel que $U \cap J(K) \subset H$. Ce résultat est l'analogue des résultats de Serre [**25**], [**27**] concernant les sous-groupes de congruence des variétés abéliennes sur un corps de nombres. Il apparaît déjà dans l'article de Milne [**17**] dans le cas d'un corps k de type fini sur son sous-corps premier. Nous allons expliquer la méthode de Poonen et Voloch, qui consiste à reprendre l'approche de Serre pour s'occuper des sous-groupes d'indice premier à p, et à démontrer, sous l'hypothèse $J(K^s)[p^\infty]$ fini, un résultat plus précis (qui sera nécessaire pour la suite) en ce qui concerne les sous-groupes d'indice une puissance de p.

Pour simplifier l'exposition, *nous supposerons également dans toute cette section 3 que k est un corps fini.* La plupart des résultats sont valables sans cette hypothèse au prix de quelques efforts supplémentaires. Nous nous bornerons à indiquer à chaque fois brièvement les arguments à utiliser pour traiter le cas général.

3.1. Sous-groupes d'indice premier à p

On va ici expliquer la preuve de la

PROPOSITION 3.1. — *La topologie adélique sur $J(K)$ est plus forte que celle induite par les sous-groupes d'indice fini premier à p.*

La démonstration va essentiellement être la même que celle de Serre [**25**], [**27**]. Nous allons en décrire les principales étapes. Soit l un nombre premier distinct de p et n un entier strictement positif. On considère le groupe de cohomologie galoisienne $H^1(K, J[l^n]) := H^1(\mathrm{Gal}(K^s/K), J(K^s)[l^n])$ et son sous-groupe $\text{Ш}^1(K, J[l^n])$ constitué des classes dont la restriction à $H^1(K_v, J[l^n])$ est nulle pour toute place v de K. L'ingrédient essentiel dans la preuve de la proposition 3.1 est le lemme suivant (qui comme on le verra a un intérêt propre) :

LEMME 3.2. — *On a*

$$\varprojlim_{n\geq 1} \text{Ш}^1(K, J[l^n]) = 0.$$

(Toutes les limites projectives sur $n \in \mathbf{N}^*$ que nous considérerons sont relatives à la relation d'ordre donnée par la divisibilité.)

Preuve du lemme 3.2. — On note T_l le module de Tate de J : c'est le module galoisien défini comme la limite projective des $J(K^s)[l^n]$. Soit G_l l'image du groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(K^s/K)$ dans le groupe des automorphismes de T_l ; posons $V_l = T_l \otimes_{\mathbf{Z}_l} \mathbf{Q}_l$. On peut voir G_l comme un groupe de Lie l-adique dont on note $\mathcal{G}_l$ l'algèbre de Lie. Pour prouver le lemme, le premier point fondamental est l'annulation (démontrée par Serre dans [**27**]) du groupe de cohomologie d'algèbre de Lie (cf. [**3**], chapitre XIII) $H^1(\mathcal{G}_l, V_l)$, d'où on déduit $H^1(G_l, V_l) = 0$ (c'est un fait général que $H^1(G_l, V_l)$ s'injecte dans $H^1(\mathcal{G}_l, V_l)$). Ceci implique que le $\mathbf{Z}_l$-module de type fini $H^1(G_l, T_l)$ est en fait fini.

On définit alors $H^1_*(G_l, T_l)$ comme le sous-groupe de $H^1(G_l, T_l)$ constitué des éléments dont la restriction à tout sous-groupe procyclique de G_l est nulle. Le théorème de Čebotarev dit qu'il existe un élément s de G_l tel que, pour tout a de T_l, la condition $s.a = 0$ implique $a = 0$. Montrons alors que le $\mathbf{Z}_l$-module $H^1_*(G_l, T_l)$ est nul. Il suffit pour cela de voir qu'il est sans torsion puisqu'on a vu qu'il était fini. Soit donc x dans $H^1_*(G_l, T_l)$ avec $lx = 0$. La longue suite exacte de cohomologie dit que x provient d'un $y \in H^0(G_l, T_l/lT_l)$. Si C est le sous-groupe topologique engendré par x, la restriction de x à $H^1(C, T_l)$ est nulle car x est dans $H^1_*(G_l, T_l)$; ainsi l'image de y dans $H^1(C, T_l)$ est nulle. Or, le noyau de l'application $H^0(C, T_l/lT_l) \to H^1(C, T_l)$ est $H^0(C, T_l)$ (via la suite de cohomologie) qui est nul grâce à l'hypothèse sur s. Finalement y est nul car la restriction $H^0(G_l, T_l/lT_l) \to H^0(C, T_l/lT_l)$ est clairement injective ; d'où la nullité de x comme on voulait. □

Considérons maintenant le sous-groupe $H^1_*(K, J[l^n])$ de $H^1(K, J[l^n])$ constitué des éléments dont la restriction à tout sous-groupe procyclique est nulle. La nullité de $H^1_*(G_l, T_l)$ donne alors le lemme 3.2 : on utilise pour cela le fait que $Ш^1(K, J[l^n])$ est inclus dans $H^1_*(K, J[l^n])$ via le théorème de Čebotarev, puis que T_l est la limite projective des groupes finis $J(K^s)[l^n]$.

Preuve de la proposition 3.1. — Il suffit de démontrer que, pour n fixé, il existe un sous-groupe ouvert U de $J(\mathbf{A}_K)$ avec $J(K) \cap U \subset l^n J(K)$. En effet on peut se limiter à montrer que, pour chaque nombre premier $l \neq p$, le résultat vaut en se restreignant aux sous-groupes de $J(K)$ d'indice fini de la forme l^n ; or un tel sous-groupe contient un sous-groupe de la forme $l^n J(K)$. Le lemme 3.2 dit qu'il existe un entier m tel que l'application canonique $Ш^1(K, J[l^{m+n}]) \to Ш^1(K, J[l^n])$ soit nulle car les groupes $Ш^1(K, J[l^n])$ sont finis (voir par exemple [**18**], lemma I.4.9).

Pour tout entier strictement positif r, considérons la suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to J(K^s)[l^r] \to J(K^s) \xrightarrow{.l^r} J(K^s) \to 0.$$

Elle donne naissance à une longue suite exacte de cohomologie, d'où une flèche ∂_r : $J(K) \to H^1(K, J[l^r])$ dont le noyau est $l^r J(K)$. Pour conclure, il nous suffit de trouver un sous-groupe ouvert U de $J(\mathbf{A}_K)$ tel que l'image de $U \cap J(K)$ par l'application ∂_{m+n} soit dans $Ш^1(K, J[l^{m+n}])$. En effet on obtiendra par fonctorialité que l'image de $U \cap J(K)$ par ∂_n est nulle, i.e. $U \cap J(K) \subset l^n J(K)$.

Posons $r = m + n$. On observe que l'image de $J(K)$ par l'application ∂_r est finie car $J(K)$ est de type fini via le théorème de Mordell-Weil et le but de ∂_r est un groupe de torsion. Soient alors $\alpha_1, ..., \alpha_s$ les éléments de $\operatorname{Im} \partial_r$ qui ne sont pas dans $Ш^1(K, J[l^r])$. Pour chacun des α_i, il existe une place v_i telle que la restriction de α_i à $H^1(K_{v_i}, J[l^r])$ soit non nulle. Soit S la réunion de toutes les places v_i. On définit alors un sous-groupe ouvert U de $J(\mathbf{A}_K)$ en considérant les éléments dont la composante sur $J(K_{v_i})$ appartient au sous-groupe $l^r J(K_{v_i})$: en effet comme l^r est premier à p, la multiplication par l^r est un morphisme étale de J dans J et $l^r J(K_{v_i})$ est donc un sous-groupe ouvert de $J(K_{v_i})$. Alors par définition de v_i, l'image de $U \cap J(K)$ par ∂_r évite les α_i puisque sa restriction à $H^1(K_{v_i}, J[l^r])$ est nulle, d'où le résultat. □

Remarque 3.3. — Poonen et Voloch montrent que le résultat est valable sans l'hypothèse k fini. L'idée est de se ramener à un corps de type fini sur le corps premier via le théorème de Lang-Néron, et d'utiliser une version du théorème de Čebotarev dans ce cadre.

3.2. Sous-groupes d'indice une puissance de p

Dans [**17**], Milne démontre l'analogue du lemme 3.2 dans le cas $l = p$. Plus précisément, en notant ici $H^1(K, J[p^n])$ les groupes de cohomologie *fppf* associés au K-schéma en groupe fini $J[p^n]$, et $\text{Ш}^1(K, J[p^n])$ le sous-groupe de $H^1(K, J[p^n])$ constitué des classes dont la restriction à $\text{Ш}^1(K_v, J[p^n])$ est nulle pour toute place v, il démontre qu'on a :

$$\varprojlim_{n\geq 1} \text{Ш}^1(K, J[p^n]) = 0. \tag{1}$$

Sa méthode est tout à fait similaire à celle de Serre, avec quelques difficultés techniques supplémentaires. Le même raisonnement lui permet alors de conclure que l'analogue de la proposition 3.1 est vrai pour les sous-groupes d'ordre une puissance de p, d'où finalement la

PROPOSITION 3.4. — *La topologie adélique sur $J(K)$ est plus forte que la topologie induite par les sous-groupes d'indice fini.*

Pour poursuivre la démonstration du théorème 1.3, une version plus précise de la proposition précédente est nécessaire en ce qui concerne les sous-groupes d'indice une puissance de p. Il s'agit de l'énoncé suivant :

PROPOSITION 3.5. — *Supposons $J(K^s)[p^\infty]$ fini. Alors pour toute place v de K, la topologie v-adique sur $J(K)$ est plus forte que celle induite par les sous-groupes d'indice une puissance (finie) de p.*

Remarque 3.6. — Joint à la proposition 3.1, ce résultat permet d'obtenir tout de suite la proposition 3.4 dans la situation qui nous intéresse. Toutefois la formule (1) est utile en elle-même, comme on le verra au prochain paragraphe.

Pour démontrer la proposition 3.5, on a besoin d'un lemme sur les corps qui a un intérêt propre :

LEMME 3.7. — *Soit v une place de K. Alors si $\alpha \in K_v$ est algébrique sur K, il est séparable sur K.*

Preuve. — Quitte à remplacer K par sa fermeture séparable dans $L := K(\alpha)$, on peut supposer que L est une extension purement inséparable de K. Alors la valuation v de K se prolonge de manière unique en une valuation w de L, et l'inclusion induite $K_v \to L_w$ est un isomorphisme. D'après [**26**], I.4, proposition 10, on a $[L : K] = [L_w : K_v] = 1$ donc $\alpha \in K$. □

Preuve de la proposition 3.5. — Soit $e \geq 0$. On veut montrer qu'il existe un ouvert V de $J(K_v)$ tel que $J(K) \cap V \subset p^e J(K)$. Comme $J(K^s)[p^\infty]$ est fini, on peut trouver un entier $m > 0$ tel que $p^m(J(K^s)[p^\infty]) = 0$. Posons $M = e + m$; alors $J(K)/p^M J(K)$ est fini, donc son image dans $J(K_v)/p^M J(K_v)$ est discrète. En effet $J(K_v)/p^M J(K_v)$ est séparé (la multiplication par p^M est propre sur J, et K_v est localement compact vu qu'on a supposé k fini). On en déduit qu'il existe un ouvert V de $J(K_v)$ tel que

$$J(K) \cap V = \ker[J(K) \to J(K_v)/p^M J(K_v)].$$

Maintenant, si $b \in J(K) \cap V$, on a $b = p^M c$ avec $c \in J(K_v) \cap J(\overline{K})$, d'où $c \in J(K^s)$ (on a $K_v \cap \overline{K} \subset K^s$ d'après le lemme 3.7). Alors $p^m c \in J(K)$: en effet si $\sigma \in \mathrm{Gal}(K^s/K)$, on a $(\sigma.c - c) \in J(K^s)[p^\infty]$ (car $b \in J(K)$ d'où $\sigma.b - b = 0$), d'où $p^m(\sigma.c - c) = 0$, ce qui signifie bien que $p^m c \in J(K)$. On obtient alors $b \in p^e J(K)$ comme on voulait. □

Remarque 3.8. — La proposition 3.5 (et donc aussi la proposition 3.4 vu la remarque 3.3) est encore valable sans l'hypothèse k fini. On se ramène aisément au cas où $J(K)$ est un groupe de type fini ; puis pour montrer que $J(K_v)/p^M J(K_v)$ reste séparé (alors que K_v n'est plus forcément localement compact et que la multiplication par p^M sur J n'est pas étale en général), il faut un petit argument utilisant le théorème d'approximation de Greenberg [**8**], voir [**20**], lemme 3.4.

3.3. Applications

Dans ce paragraphe, nous déduisons diverses conséquences des résultats topologiques précédents. On considère, pour tout $n > 0$, le n-groupe de Selmer de J, soit

$$\mathrm{Sel}^n(J) := \ker[H^1(K, J[n]) \to \prod_{v \in \Omega} H^1(K_v, J)],$$

étant entendu que la cohomologie utilisée est toujours la cohomologie fppf (on peut travailler avec la cohomologie galoisienne usuelle si n est premier à p). On pose également

$$\mathrm{Sel}^\wedge(J) = \varprojlim_{n \geq 1} \mathrm{Sel}^n(J)$$

et

$$J(K)^\wedge = \varprojlim_{n \geq 1} (J(K)/n).$$

Enfin on dispose aussi du groupe de Tate-Shafarevitch $Ш(J) = \ker[H^1(K, J) \to \prod_{v \in \Omega} H^1(K_v, J)]$ et de son module de Tate total $TШ(J) = \varprojlim_{n \geq 1} Ш(J)[n]$. Si l'on suppose $Ш(J)$ fini (conjecture classique à laquelle croient les gens raisonnablement optimistes...), on a bien sûr $TШ(J) = 0$. On a la suite exacte de K-groupes algébriques (ou de faisceaux fppf sur $\mathrm{Spec}\, K$) :

$$0 \to J[n] \to J \xrightarrow{.n} J \to 0. \tag{2}$$

PROPOSITION 3.9. — *On a la suite exacte*

$$0 \to J(K)^\wedge \to \mathrm{Sel}^\wedge(J) \to T\text{Ш}(J) \to 0.$$

Preuve. — On passe à la limite projective dans la suite exacte (obtenue via la suite de cohomologie associée à (2)

$$0 \to J(K)/n \to \mathrm{Sel}^n(J) \to \text{Ш}(J)[n] \to 0,$$

ce qui est licite car $J(K)/n$ et $\text{Ш}(J)[n]$ sont finis (ce dernier point a été démontré par Lang et Tate [**13**] si n est premier à p, et par Milne [**16**] en général). □

Remarque 3.10. — Il est important de noter que, contrairement à la situation sur les corps de nombres, les groupes $J(K_v)/pJ(K_v)$ et $H^1(K_v, J[p])$ *ne sont pas finis* en général (du reste pour avoir la finitude de $\text{Ш}(J)[p]$, il est nécessaire d'avoir pris pour Ω l'ensemble de toutes les places de K) car $pJ(K_v)$ n'est pas toujours un sous-groupe ouvert de $J(K_v)$. Néanmoins on a bien $J(K_v) = \varprojlim_{n\geq 1} J(K_v)/n$ car $J(K_v)$ est un groupe profini. De ce fait, on a

$$J(\mathbf{A}_K) = \prod_{v\in\Omega} \varprojlim_{n\geq 1} (J(K_v)/n).$$

Ceci permet de définir une flèche canonique

$$j : \mathrm{Sel}^\wedge(J) \to J(\mathbf{A}_K)$$

via la suite exacte de cohomologie fppf (obtenue à partir de (2))

$$0 \to J(K_v)/n \to H^1(K_v, J[n]) \to H^1(K_v, J)[n] \to 0.$$

PROPOSITION 3.11. — *L'application $j : \mathrm{Sel}^\wedge(J) \to J(\mathbf{A}_K)$ est injective.*

Preuve. — On applique le lemme 3.2, et la formule (1) qui est son pendant pour la p-partie. On obtient, en utilisant le fait que $\varprojlim$ commute avec ker :

$$\ker j = \varprojlim_{n\geq 1} \ker[\mathrm{Sel}^n(J) \to \prod_{v\in\Omega} J(K_v)/n)] = \varprojlim_{n\geq 1} \text{Ш}^1(K, J[n]) = 0.$$

□

COROLLAIRE 3.12. — *Le groupe $J(K)^\wedge$ s'identifie à $\overline{J(K)}$ et on a une suite exacte*

$$0 \to \overline{J(K)} \to \mathrm{Sel}^\wedge(J) \to T\text{Ш}(J) \to 0.$$

En effet $J(K)^\wedge$ s'injecte dans $\mathrm{Sel}^\wedge(J)$ (le foncteur « limite projective » étant exact à gauche), donc dans $J(\mathbf{A}_K)$ d'après la proposition 3.11. D'autre part l'image de $J(K)^\wedge$ dans $J(\mathbf{A}_K)$ est exactement $\overline{J(K)}$ car $J(K)$ est un sous-groupe dense du groupe compact $J(K)^\wedge$. Enfin la suite exacte résulte de la proposition 3.9.

COROLLAIRE 3.13. — *On a $\overline{J(K)}_{\mathrm{tors}} = J(K)_{\mathrm{tors}}$.*

Cela résulte de ce que $J(K)$ est isomorphe à un groupe du type $\mathbf{Z}^r \oplus F$ (avec F fini), et du corollaire précédent, vu que le complété profini $\widehat{\mathbf{Z}}$ de $\mathbf{Z}$ est sans torsion.

Remarque 3.14. — La proposition 3.11 est classique si l'on excepte la p-partie : elle est déjà implicite dans les travaux de Serre [**25**], [**27**], et apparaît explicitement dans [**18**] (corollaire I.6.23). La démonstration de l'énoncé général figure dans [**7**]. On verra dans la dernière section de ce texte que l'intérêt de travailler avec $\mathrm{Sel}^{\wedge}(J)$ au lieu de $\overline{J(K)}$ est de s'affranchir de l'hypothèse $\text{Ш}(J)$ fini.

Remarque 3.15. — Le corollaire 3.13 est valable sous l'hypothèse plus faible que $J(K)$ est de type fini (au lieu de k fini), avec un argument un peu plus compliqué, consistant à montrer que $J(K) \simeq T \oplus L$, où L est un réseau et la topologie de T est induite par les sous-groupes $nT, n > 0$ (ce dernier point utilise la proposition 3.4) ; on en déduit alors $T \simeq T \otimes \widehat{\mathbf{Z}}$, puis le résultat voulu. Voir [**20**], lemme 3.8 pour une preuve détaillée. La proposition 3.16 ci-dessous est du coup également valable en toute généralité (il n'est pas difficile de se ramener au cas où $J(K)$ est de type fini).

La proposition suivante est une étape cruciale dans la preuve du théorème 1.3. Elle est très analogue à un énoncé démontré par Stoll ([**31**], théorème 3.11) dans le cas des corps de nombres, mais sa preuve (spécifique à la caractéristique p) est fort différente. En effet, Stoll avait besoin d'un théorème de Serre ([**28**], p. 60) qui dit que l'image de $\mathrm{Gal}(K^s/K)$ dans le groupe $\mathrm{Aut}(TJ) \simeq \mathrm{GL}_{2g}(\widehat{\mathbf{Z}})$ (où $TJ = \prod_l T_l(J)$ est le module de Tate total de J) contient un sous-groupe des matrices scalaires de la forme $\widehat{\mathbf{Z}}^{*^c}$ avec $c \geq 1$. L'analogue de ce dernier énoncé est faux sur les corps de fonctions d'après Zarhin [**34**].

Proposition 3.16. — *On suppose $J(K^s)[p^\infty]$ fini. Soit Z un sous K-schéma fini de J. Alors*

$$Z(\mathbf{A}_K) \cap \overline{J(K)} = Z(K).$$

Preuve. — La première étape consiste à se ramener au cas où Z est constitué de K-points. Tout d'abord, l'hypothèse $J(K^s)[p^\infty]$ subsiste si l'on remplace K par une extension finie L. Ceci est évident pour L séparable, il suffit donc de le vérifier quand L est purement inséparable sur K. Soit alors $n \geq 0$ tel que $L^{p^n} \subset K$. Alors $(L^s)^{p^n} \subset K^s$ d'où $p^n(J(L^s)[p^\infty]) \subset J(K^s)[p^\infty]$. Il en résulte que $p^n(J(L^s)[p^\infty])$ est fini, donc aussi $J(L^s)[p^\infty]$ vu que $J(L^s)[p^n]$ est fini. D'autre part, si on démontre que $Z(\mathbf{A}_L) \cap \overline{J(L)} = Z(L)$, alors on aura $Z(\mathbf{A}_K) \cap \overline{J(K)} \subset Z(\mathbf{A}_K) \cap Z(L)$; or $Z(\mathbf{A}_K) \cap Z(L) = Z(K)$: en effet si v est une place de K, alors l'application canonique $K_v \otimes_K L \to \prod_{w|v} L_w$ est un isomorphisme ([**1**], 8.5, corollaire 3) d'où $K_v \cap L = K$ dans $\prod_{w|v} L_w$. Nous pouvons donc supposer dans la suite que Z est constitué de K-points.

Soit maintenant P dans $\overline{J(K)}$; il est par définition limite d'une suite de points (P_n) de $J(K)$ au sens suivant : pour toute place v de K, la suite (P_n) tend vers P dans $J(K_v)$. Comme Z est constitué de K-points, cela signifie que, pour chaque place v, on a un point $Q_v \in Z(K)$ tel que P_n tende vers Q_v dans $J(K_v)$. De ce fait, $P_n - Q_v$ est de plus en plus divisible par p quand n tend vers l'infini, d'après la proposition 3.5. Il en va de même pour $P_n - Q_{v'}$ si v' est une autre place de K. On obtient ainsi que $Q_v - Q_{v'}$ est infiniment p-divisible dans le groupe abélien de type fini $J(K)$. En particulier ceci implique que $Q_v - Q_{v'}$ est un point de torsion de $J(K)$. Comme $J(K)_{\mathrm{tors}}$ est fini, on a donc un $m > 0$ tel que $m(Q_v - Q_{v'}) = 0$ pour toute place v' de K (v étant fixée).

Maintenant, la composante en v' de P est $Q_{v'}$, et on obtient $m(P - Q_v) = 0$, c'est-à-dire que $P - Q_v$ est un point de torsion de $\overline{J(K)}$. Mais $\overline{J(K)}_{\mathrm{tors}} = J(K)_{\mathrm{tors}}$ par le corollaire 3.13, ce qui donne $P \in J(K)$ puisque $Q_v \in J(K)$. Finalement on obtient $P \in J(K) \cap Z(\mathbf{A}_K) = Z(K)$. □

4. UNE FORME UNIFORME DE LA CONJECTURE DE MORDELL-LANG EN CARACTÉRISTIQUE p

4.1. Diverses formes de la conjecture de Mordell-Lang

La *conjecture de Mordell-Lang* classique est l'énoncé suivant :

CONJECTURE 4.1 (Lang). — *Soient A une variété semi-abélienne sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et Γ un sous-groupe de type fini de $A(\overline{\mathbf{Q}})$. Soit X un sous-schéma fermé de A. Alors les composantes irréductibles de l'adhérence de Zariski de $X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap \Gamma$ sont des translatés par des points de $A(\overline{\mathbf{Q}})$ de sous-groupes algébriques de A.*

Cette conjecture a été démontrée par Faltings et Vojta (voir [**32**]). La *conjecture de Mordell-Lang généralisée* consiste à remplacer $X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap \Gamma$ par $X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap \Gamma'$ dans la conclusion, où $\Gamma' = \{x \in \Gamma, \exists n \geq 1, nx \in \Gamma\}$. Cette conjecture généralisée a été démontrée par Mc Quillan [**15**]. Dans le cas particulier où X est sans cossette (i.e. ne contient pas de translaté de sous-groupe algébrique de dimension > 0 de A), on obtient que $X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap \Gamma$ (resp. $X(\overline{\mathbf{Q}}) \cap \Gamma'$) est fini.

Remarque 4.2. — Le cas où l'on prend $\Gamma = \{0\}$ dans la conjecture de Mordell-Lang généralisée était connu depuis les travaux de Raynaud et d'Hindry [**10**]. (Raynaud a traité le cas où A est une variété abélienne [**22**] ; le cas particulier d'une courbe dans sa jacobienne était la *conjecture de Manin-Mumford* [**21**].)

D'autre part, Stoll a proposé une version « adélique » de la conjecture de Mordell-Lang dans le cadre des variétés abéliennes sur un corps de nombres. Si K est un corps de nombres et V une K-variété projective, notons Ω_f l'ensemble des places finies de K et Ω_∞ l'ensemble de ses places archimédiennes, puis

$$V(A_K)_\bullet = \prod_{v\in\Omega_f} V(K_v) \times \prod_{v\in\Omega_\infty} V(K_v)^0$$

où $V(K_v)^0$ est l'ensemble des composantes connexes de $V(K_v)$. La conjecture de Stoll est la suivante :

CONJECTURE 4.3 (Stoll). — *Soit J une variété abélienne sur un corps de nombres K. Soit X un sous K-schéma fermé sans cossette de J. Alors il existe un sous-schéma fini Z de X tel que*

$$X(\mathbf{A}_K)_\bullet \cap \mathrm{Sel}^\wedge(J) \subset Z(\mathbf{A}_K)_\bullet.$$

(Il est nécessaire de travailler avec l'ensemble « modifié » $X(\mathbf{A}_K)_\bullet$ parce que les conditions données par $\mathrm{Sel}^\wedge(J)$ ne disent pas grand chose aux places archimédiennes.) D'après le théorème 3.11 de [**31**], ceci impliquerait $X(K) = X(\mathbf{A}_K)_\bullet \cap \mathrm{Sel}^\wedge(J)$ (et donc $X(K) = X(\mathbf{A}_K)_\bullet \cap \overline{J(K)}$ si l'on suppose de plus la finitude de $\text{Ш}(J)$, le corollaire 3.12 étant encore valable sur les corps de nombres avec une preuve identique).

En caractéristique p, une forme de la conjecture de Mordell-Lang est le résultat suivant, dû à Hrushovski ([**11**], lemme 6.2) :

THÉORÈME 4.4 (Hrushovski). — *Soit F un corps séparablement clos de caractéristique p. Soit J une variété abélienne sur F telle qu'aucun quotient non trivial de $J_{\overline{F}}$ ne provienne (par extension des scalaires) d'une variété abélienne définie sur F^{p^∞}. Soit X un sous-schéma fermé sans cossette de J. Alors il existe $e > 0$ tel que pour tout a de $J(F)$, l'ensemble $J(F) \cap (a + p^e A(F))$ soit fini.*

La fin de la preuve du théorème 1.3 consiste à démontrer une version uniforme du résultat précédent (en utilisant le théorème de compacité en théorie des modèles), puis à en déduire un analogue de la conjecture 4.3 dans le cas des corps des fonctions. La proposition 3.16 permettra alors de conclure.

4.2. Un énoncé très uniforme à la Mordell-Lang

On suppose *dans ce paragraphe 4.2 seulement* que K est un corps arbitraire de caractéristique p vérifiant $[K : K^p]$ fini.

L'élévation à la puissance p-ième $K \to K^p$ est un isomorphisme de corps ; on dispose donc de l'isomorphisme inverse « racine p-ième » de K^p dans K.

DÉFINITION 4.5. — *Une extension L de K est dite séparable si elle est linéairement disjointe (au-dessus de K) de l'extension $K^{p^{-1}} := \{x \in \overline{L}, x^p \in K\}$.*

Bien entendu ceci coïncide avec la notion usuelle de séparabilité dans le cas des extensions algébriques.

DÉFINITION 4.6. — *Une p-base $\mathcal{B}$ de K est une famille $\{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$ d'éléments de K telle que $(\alpha_1^{i_1} ... \alpha_r^{i_r})_{0 \le i_1, ..., i_r \le p-1}$ soit une base de K sur K^p. Les p-composantes (de niveau 1) d'un élément a de K sur $\mathcal{B}$ sont les racines p-ièmes des coefficients de K^p qui apparaissent quand on décompose a sur $\mathcal{B}$.*

Notons qu'une extension L de K garde $\mathcal{B}$ pour p-base si et seulement si elle est séparable et vérifie $[L : L^p] = [K : K^p]$. On pourra se reporter à [**5**] pour plus de détails sur ces notions.

Citons sans démonstration deux lemmes liés aux p-bases qui vont être utiles par la suite.

LEMME 4.7 ([**20**], lemma 3.12). — *Soit L une extension de K admettant la même p-base $\mathcal{B}$ que K. Soit c un élément de L qui n'est pas algébrique sur K. Alors il existe une extension séparablement close F de L telle que $\mathcal{B}$ reste une p-base de F et l'orbite de c sous* $\mathrm{Aut}(F/K)$ *soit infinie.*

LEMME 4.8 ([**20**], lemma 3.13). — *On suppose que le corps K^{p^∞} est algébriquement clos. Soit F une extension séparable de K. Soit J une variété abélienne sur K telle qu'aucun quotient non trivial de $J_{\overline{K}}$ ne provienne d'une variété abélienne sur K^{p^∞}. Alors aucun quotient non trivial de $J_{\overline{F}}$ ne provient d'une variété abélienne sur F^{p^∞}.*

Soit F une extension de K admettant la même p-base $\mathcal{B}$. Pour toute variété abélienne J sur K, on peut prendre la restriction des scalaires $R_n = \mathbf{R}_{K/K^{p^n}}\, J$ de J, puis reprendre l'extension $J_n := R_n \times_{K^{p^n}} K$ en utilisant l'isomorphisme de racine p^n-ième. Alors $J_n(F) = R_n(F^{p^n}) = J(F)$ et on a des morphismes de transition $J_{n+1} \to J_n$ compatibles avec les identifications ci-dessus. Soit maintenant X une K-variété. On note $\mathcal{Y}_n$ l'ensemble des K-sous-variétés (pas forcément fermées) $Y \subset J_n \times X$ dont la projection vers J_n est à fibres finies. En particulier $Y(F) \subset J(F) \times X(F)$. En prenant l'image réciproque via la flèche $J_{n+1} \times X \to J_n \times X$, on obtient une application (ensembliste) $\mathcal{Y}_n \to \mathcal{Y}_{n+1}$, et on pose $\mathcal{Y} = \varinjlim \mathcal{Y}_n$. Notons que si $Y \in \mathcal{Y}$, $Y(F)$ a un sens et c'est un sous-ensemble de $J(F)$; d'autre part les $\mathcal{Y}_n$ et $\mathcal{Y}$ sont stables par union finie.

Remarque 4.9. — La raison pour introduire $\mathcal{Y}$ comme ci-dessus au lieu de prendre simplement des sous-variétés de $J \times X$ est qu'on va avoir besoin de considérer non seulement des ensembles définis par des équations et inéquations polynomiales (qui sont les variétés au sens classique) en les coordonnées de J et X, mais aussi des ensembles correspondant à des équations et inéquations polynomiales en leurs p-composantes itérées.

La forme « très uniforme » du théorème 4.4 que démontrent Poonen et Voloch (d'après des idées de Chatzidakis, Delon et Scanlon) est la suivante :

PROPOSITION 4.10. — *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique p et K une extension de type fini de k. On fixe une p-base $\mathcal{B}$ de K. Soit J une variété abélienne sur K telle qu'aucun quotient non trivial de $J_{\overline{K}}$ ne provienne d'une k-variété abélienne. Soit X un sous K-schéma fermé sans cossette de J ; on définit $\mathcal{Y}$ comme ci-dessus.*

Alors il existe $e \geq 1$ et $Y \in \mathcal{Y}$ tels que pour toute extension de corps $F \supset K$ de p-base $\mathcal{B}$, on ait :

si $a \in J(F)$ et $c \in J(F) \cap (a + p^e J(F))$, alors $(a, c) \in Y(F)$.

Preuve (esquisse). — On raisonne par l'absurde en supposant le résultat faux. Un argument de théorie des modèles (principalement le théorème de compacité) permet alors d'« uniformiser » en e et Y la négation de la conclusion de la proposition. Plus précisément, on obtient qu'il existe une extension F de K, possédant la même p-base $\mathcal{B}$, un $a \in J(F)$ et un c appartenant à $X(F) \cap (a + p^e A(F))$ pour tous les $e \geq 1$, tels que $(a, c) \notin Y(F)$ pour tout $Y \in \mathcal{Y}$. Soit alors $\widetilde{K(a)}$ la plus petite extension de $K(a)$ dans F qui est stable par l'opération consistant à prendre les p-composantes itérées par rapport à $\mathcal{B}$. Alors $\widetilde{K(a)}$ admet également $\mathcal{B}$ pour p-base, et $K(c)$ n'est pas algébrique sur $\widetilde{K(a)}$ sinon il y aurait une relation algébrique définissant un Y de $\mathcal{Y}$ contenant (a, c) (c'est pour cette raison qu'il faut considérer $\mathcal{Y}$ et non pas seulement des sous-variétés de $J \times X$, qui permettraient seulement de travailler avec $K(a)$ au lieu de $\widetilde{K(a)}$; or en général $K(a)$ n'est pas stable par « extraction des p-composantes », i.e. elle n'admet pas $\mathcal{B}$ comme p-base).

On applique alors le lemme 4.7 à l'extension $F/\widetilde{K(a)}$. Il permet de supposer (quitte à grossir F en gardant la même p-base) que F est séparablement clos et que l'orbite de c sous $\mathrm{Aut}(F/\widetilde{K(a)})$ est infinie. Comme cette orbite est incluse dans $X(F) \cap (a + p^e A(F))$, ce dernier ensemble est infini pour tout $e \geq 1$. On obtient alors une contradiction avec le théorème 4.4 : en effet comme on a ici $K^{p^\infty} = k$, le lemme 4.8 dit que $J_{\overline{F}}$ reste sans quotient non trivial défini sur F^{p^∞} ; d'autre part X_F reste sans cossette (si $X_{\overline{K}}$ avait un cossette sur une extension de $\overline{K}$, il en aurait un sur une extension de type fini de $\overline{K}$, donc aussi un sur $\overline{K}$ par spécialisation). □

5. FIN DE LA PREUVE DU THÉORÈME 1.3

Dans cette section, on suppose à nouveau que K est le corps des fonctions d'une courbe géométriquement irréductible sur un corps k de caractéristique p.

LEMME 5.1. — *Soient v une place de K et J une variété abélienne sur K. Soit Γ_v l'adhérence de $J(K)$ dans $J(K_v)$. Alors pour tout $e \geq 0$, l'application canonique $J(K)/p^e J(K) \to \Gamma_v / p^e \Gamma_v$ est surjective.*

Preuve. — Soit $\mathcal{J}$ le modèle de Néron de J sur $\mathcal{O}_v$. Pour tout $r \geq 1$, notons G_r le noyau de la flèche $J(K_v) = \mathcal{J}(\mathcal{O}_v) \to \mathcal{J}(\mathcal{O}_v/\mathcal{M}_v^r)$. Alors G_r/G_{r+1} est isomorphe à $\mathbf{F}_v^g$ (où g est la dimension de J) qui est de p-torsion. Ainsi chaque G_r est un $\mathbf{Z}_p$-module topologique (c'est un pro-p-groupe abélien). Comme l'intersection des G_r est nulle et que $J(K_v)[p]$ est fini, il en résulte que l'un des G_r satisfait $G_r[p] = 0$, i.e. G_r est sans torsion. Ainsi $J(K_v)$ possède un sous-groupe ouvert U, qui est un $\mathbf{Z}_p$-module topologique sans torsion ; on peut également supposer que $U^0 := J(K) \cap U$ est un groupe de type fini (même argument que dans la preuve du théorème 1.2).

Maintenant le groupe $\Gamma_v^0 := \Gamma_v \cap U$ est l'adhérence de U^0, il est donc isomorphe à $\mathbf{Z}_p^s$ pour un certain entier s. Ceci implique que, pour tout $e \geq 0$, le groupe $p^e\Gamma_v^0$ est ouvert dans Γ_v^0, donc aussi dans Γ_v. A fortiori $p^e\Gamma_v$ est ouvert dans Γ_v puisqu'il contient $p^e\Gamma_v^0$ qui est un voisinage de zéro dans Γ_v. Ainsi le groupe $\Gamma_v/p^e\Gamma_v$ est discret, et comme l'image de $J(K)$ dans ce groupe est dense, elle est égale à $\Gamma_v/p^e\Gamma_v$. □

On peut maintenant démontrer un analogue de la « conjecture de Mordell-Lang adélique » :

PROPOSITION 5.2. — *Soit J une variété abélienne sur K telle que $J_{\overline{K}}$ n'ait aucun quotient isotrivial non nul. Soit X un sous-K-schéma fermé sans cossette de J. Alors il existe un K-sous-schéma fini Z de X tel que $X(\mathbf{A}_K) \cap \overline{J(K)} \subset Z(\mathbf{A}_K)$.*

Preuve. — On peut supposer k algébriquement clos, quitte à remplacer K par $\bar{k}K$. On a alors $[K : K^p] = p$ car K est le corps des fonctions d'une courbe sur k. On choisit α dans $K - K^p$; alors $\{\alpha\}$ est une p-base de K. D'autre part $\{\alpha\}$ reste une p-base pour K_v car $[K_v : K_v^p] \leq p$ (en effet K_v est engendré par K et K_v^p) et $\alpha \notin K_v^p$ via le lemme 3.7.

Soient alors e et Y comme dans la proposition 4.10. On peut voir Y comme une sous-variété de $J_n \times X$ pour un certain n. Si $a \in J(K)$, notons Y_a la fibre de $Y \to J_n$ en a (rappelons que $J_n(K) = J(K)$), qu'on peut voir comme un sous-schéma fini de X. Ici $J(K)$ est de type fini car $J_{\overline{K}}$ n'a pas de quotient isotrivial non nul. Fixons un système de représentants $\Lambda \subset J(K)$ pour $J(K)/p^eJ(K)$, et posons $Z = \bigcup_{a\in\Lambda} Y_a$. La proposition 4.10 appliquée avec $F = K_v$ donne

$$X(K_v) \cap (a + p^eJ(K_v)) \subset Y_a(K_v)$$

pour tout a de Λ. En particulier, si Γ_v est l'adhérence de $J(K)$ dans $J(K_v)$, on a, en faisant la réunion sur tous les $a \in \Lambda$:

$$X(K_v) \cap \Gamma_v \subset Z(K_v)$$

car le lemme 5.1 dit que toutes les classes de $\Gamma_v/p^e\Gamma_v$ sont représentées par des éléments de Λ. Comme ceci vaut pour toute place v, on obtient $X(\mathbf{A}_K) \cap \overline{J(K)} \subset Z(\mathbf{A}_K)$. □

Remarque 5.3. — Ici le fait que $X(K_v) \cap \Gamma_v$ soit fini est un phénomène très spécifique à la caractéristique p. Si par exemple $K_v = \mathbf{Q}_p$, il est possible que Γ_v soit un sous-groupe ouvert de $J(K_v)$ si on n'a pas la « condition de Chabauty » $\operatorname{rg} J(K) < \dim J$; on a alors $X(K_v) \cap \Gamma_v$ infini dès qu'il est non vide. Cela signifie en quelque sorte qu'en caractéristique p, la topologie associée à une seule place v est nettement plus forte que dans le cas des corps de nombres, phénomène que nous avons déjà rencontré dans la proposition 3.5.

Fin de la preuve du théorème 1.3. — Soit Z comme dans la proposition 5.2. D'après la proposition 3.16, on a

$$X(\mathbf{A}_K) \cap \overline{J(K)} \subset Z(\mathbf{A}_K) \cap \overline{J(K)} = J(K) \subset Z(K).$$

□

6. LIEN AVEC L'OBSTRUCTION DE BRAUER-MANIN

6.1. Rappels sur l'obstruction de Brauer-Manin

Dans ce paragraphe 6.1, K est un corps de nombres ou une extension finie d'un corps $k(t)$ avec k fini.

Soit X une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur K. On dispose de son *groupe de Brauer* cohomologique $\operatorname{Br} X = H^2(X, \mathbf{G}_m)$ (la cohomologie utilisée ici étant la cohomologie étale). On notera abusivement $\operatorname{Br} K$ l'image (injective si $X(K) \neq \varnothing$) de $\operatorname{Br} K$ dans $\operatorname{Br} X$.

Si maintenant $\alpha \in \operatorname{Br} X$ et $P_v \in X(K_v)$, on peut évaluer α en P_v, ce qui donne un élément $\alpha(P_v) \in \operatorname{Br} K_v$, où $\operatorname{Br} K_v$ est le groupe de Brauer usuel du corps local K_v. La théorie du corps de classes local fournit un homomorphisme injectif $j_v : \operatorname{Br} k_v \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et la théorie du corps de classes global donne une suite exacte

$$0 \to \operatorname{Br} K \to \bigoplus_{v \in \Omega} \operatorname{Br} K_v \xrightarrow{\sum j_v} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0. \tag{3}$$

LEMME 6.1. — *Pour tout point adélique $(P_v) \in X(\mathbf{A}_K)$ et tout $\alpha \in \operatorname{Br} X$, la somme*

$$\sum_{v \in \Omega} j_v(\alpha(P_v))$$

est finie et ne dépend que de la classe de α dans $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} K$. L'application $X(\mathbf{A}_K) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, $(P_v) \mapsto \sum_{v \in \Omega} j_v(\alpha(P_v))$ est continue si on munit $X(\mathbf{A}_K)$ de la topologie adélique et $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ de la topologie discrète.

Preuve. — Il existe un modèle propre et lisse $\mathcal{X}$ de X au-dessus de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K,S}$, où S est un ensemble fini de places de K et $\mathcal{O}_{K,S}$ l'anneau des S-entiers de K. On peut également supposer que α s'étend en un élément de $\operatorname{Br} \mathcal{X}$. Alors on a $\alpha(P_v) = 0$ pour tout $v \notin S$ et tout $P_v \in X(k_v)$ car P_v s'étend en un $\mathcal{O}_v$-point de $\mathcal{X}$ (par propreté) et $\operatorname{Br} \mathcal{O}_v = 0$. Le résultat en découle, le fait que $\sum_{v \in \Omega} j_v(\alpha(P_v))$ ne dépende que de la classe de α modulo $\operatorname{Br} K$ résultant de la suite exacte (3). □

DÉFINITION 6.2. — *On appelle ensemble de Brauer-Manin de X le sous-ensemble $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ de $X(\mathbf{A}_K)$ constitué des points adéliques (P_v) qui vérifient*

$$\sum_{v \in \Omega} j_v(\alpha(P_v)) = 0$$

pour tout $\alpha \in \operatorname{Br} X$ (ou encore pour tout $\alpha \in \operatorname{Br} X / \operatorname{Br} K$).

Remarque 6.3. — Si $f : X \to Y$ est un K-morphisme entre variétés projectives et lisses, alors l'image par f de $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ est inclus (par fonctorialité contravariante du groupe de Brauer) dans $Y(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}}$.

D'après la suite exacte (3), on a $X(K) \subset X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ et le lemme 6.1 donne :

PROPOSITION 6.4. — *On a $\overline{X(K)} \subset X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}}$.*

Ainsi, si $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \varnothing$, on a une obstruction (dite de *Brauer-Manin*) à l'existence d'un point rationnel. Cette obstruction a été introduite par Manin dans son article fondateur [**14**] (voir aussi [**19**] ou [**30**], paragraphe 5.2). Beaucoup de travaux ont consisté à montrer que pour certaines classes de variétés définies sur un corps de nombres, la condition $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$ implique $X(K) \neq \varnothing$ (« l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse est la seule »). De même certaines classes de variétés vérifient $\overline{X(K)} = X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ (« l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule »). On trouvera de nombreux exemples et contre-exemples dans [**19**].

La question initiale (qui est à l'origine de (Q2)) posée par Scharaschkin et Skorobogatov est la suivante :

(Q1) *Soit X une courbe projective et lisse sur un corps de nombres. L'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un point rationnel est-elle la seule pour X ?*

Dans [**14**], Manin a donné une réponse positive à (Q1) pour les courbes de genre 1 en supposant le groupe de Tate-Shafarevich $Ш(J)$ de J fini.

Remarque 6.5. — Si $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$, X possède un zéro-cycle de degré 1 (sous l'hypothèse $Ш(J)$ fini) d'après un théorème de S. Saito ([**23**]), pour lequel on pourra aussi consulter [**4**] (proposition 3.7) et [**6**] (théorème 1.1). En particulier X se plonge dans sa jacobienne ; ceci permet notamment de ramener la question (Q1) à la question (Q2) discutée dans les sections précédentes de cet article. À part dans le cas $J(K)$ fini, (Q1) et (Q2) restent complètement ouvertes sur les corps de nombres.

Sous les hypothèses du théorème 1.3, Poonen et Voloch répondent positivement (théorème 6.12 ci-dessous) à l'analogue de la question (Q1). Il s'agit essentiellement du premier résultat de ce type qui s'applique à une classe assez générale de sous-variétés de variétés abéliennes. Un autre point frappant est que, dans ce contexte, on n'a pas besoin de supposer la finitude du groupe de Tate-Shafarevitch $Ш(J)$ de J, ce qui est particulièrement remarquable (tous les résultats connus précédemment concernant l'obstruction de Brauer-Manin sur un corps global pour une variété abélienne nécessitaient cette finitude).

6.2. L'ensemble de Brauer-Manin pour une sous-variété d'une variété abélienne

Jusqu'à la fin de ce texte, K est un corps global de caractéristique $p > 0$, c'est-à-dire le corps des fonctions d'une courbe sur un corps fini k.

Rappelons d'abord la « suite exacte de Cassels-Tate » dans une version qui ne suppose pas la finitude du groupe de Tate-Shafarevitch. Dans cette généralité, c'est un résultat prouvé dans [**7**].

PROPOSITION 6.6 (Suite exacte de Cassels-Tate). — *Soient J une variété abélienne sur K et J^t la variété abélienne duale. On a une suite exacte*

$$0 \to \mathrm{Sel}^{\wedge}(J) \to J(\mathbf{A}_K) \to H^1(K, J^t)^D$$

où $H^1(K, J^t)^D$ est le dual $\mathrm{Hom}(H^1(K, J^t), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ *du groupe discret $H^1(K, J^t)$.*

Ici l'application $J(\mathbf{A}_K) \to H^1(K, J^t)^D$ est induite par des accouplements locaux $J(K_v) \times H^1(K_v, J^t) \to \mathrm{Br}\, K_v \simeq \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, qui induisent d'ailleurs une dualité parfaite entre le groupe discret $H^1(K_v, J^t)$ et le groupe compact $J(K_v)$ ([**18**], théorème III.7.8. ; cet énoncé est dû à Tate si on remplace K_v par un corps p-adique).

Remarque 6.7. — Nous avons déjà rencontré l'exactitude à gauche (proposition 3.11). Si l'on excepte la p-partie, l'exactitude au milieu remonte à Cassels et Tate (si on suppose la finitude de $Ш(J)$), et une preuve complète en figure dans [**18**] (théorème I.6.13). Si $Ш(J)$ est fini, on peut remplacer $\mathrm{Sel}^{\wedge}(J)$ par $\overline{J(K)}$ (corollaire 3.12).

La suite duale de Cassels-Tate permet de relier l'ensemble de Brauer-Manin de J à $\mathrm{Sel}^{\wedge}(J)$:

PROPOSITION 6.8. — *Soit J une variété abélienne sur K. Alors*

$$J(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \subset \mathrm{Sel}^{\wedge}(J).$$

Preuve. — Posons $\overline{J} = J \times_K K^s$ et $\operatorname{Br}_1 J = \ker[\operatorname{Br} J \to \operatorname{Br} \overline{J}]$. Il est bien connu que, grâce à la propriété $H^3(K, \mathbf{G}_m) = 0$ (cf. [**18**], corollaire I.4.21), le groupe $\operatorname{Br}_1 J/\operatorname{Br} K$ s'identifie à $H^1(K, \operatorname{Pic} \overline{J})$ (voir par exemple [**30**], corollaire 2.3.9). Ceci induit en particulier une flèche $H^1(K, \operatorname{Pic}^0 \overline{J}) \to \operatorname{Br} J/\operatorname{Br} K$, ou encore une flèche $\theta : H^1(K, J^t) \to \operatorname{Br} J/\operatorname{Br} K$ (rappelons que $J^t(K^s) = \operatorname{Pic}^0 \overline{J}$). D'après la proposition 8 de [**14**] (voir aussi [**9**], preuve du théorème 6.1, pour une généralisation), la flèche θ est compatible avec les accouplements de Tate et de Brauer-Manin au sens suivant : pour tout point adélique $(P_v) \in J(\mathbf{A}_K)$ et tout élément $\alpha \in H^1(K, J^t)$, on a

$$\sum_{v \in \Omega} j_v(\theta(\alpha))(P_v) = \sum_{v \in \Omega} (P_v, \alpha_v),$$

où $(P_v, \alpha_v) \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est l'accouplement local de $P_v \in J(K_v)$ avec la restriction $\alpha_v \in H^1(K_v, J^t)$ de α.

Si $(P_v) \in J(A_K)^{\operatorname{Br}}$, le terme de gauche est nul, et la nullité du terme de droite jointe à la suite exacte de Cassels-Tate donne alors $(P_v) \in \operatorname{Sel}^\wedge(J)$. □

COROLLAIRE 6.9. — *Soit X un sous-schéma fermé d'une K-variété abélienne J. Alors l'inclusion $X(\mathbf{A}_K) \subset J(\mathbf{A}_K)$ induit une inclusion $X(\mathbf{A}_K)^{\operatorname{Br}} \subset \operatorname{Sel}^\wedge(J)$.*

En effet, la remarque 6.3 dit que $X(\mathbf{A}_K)^{\operatorname{Br}}$ s'envoie dans $J(\mathbf{A}_K)^{\operatorname{Br}}$ et on applique la proposition 6.8.

Remarque 6.10. — Si $Ш(J)$ est fini, la proposition 6.8 et le corollaire 3.12 donnent $J(\mathbf{A}_K)^{\operatorname{Br}} = \overline{J(K)}$. L'analogue de ce résultat pour les corps de nombres est classique (voir par exemple [**30**], proposition 6.2.4) mais il faut alors travailler avec le groupe des adèles « modifié » $J(\mathbf{A}_K)_\bullet$ parce que c'est dans ce cadre que la suite duale de Cassels-Tate est valable.

Remarque 6.11. — Quand X est une courbe projective et lisse plongée dans sa jacobienne J et qu'on suppose $Ш(J)$ fini, un petit argument supplémentaire donne $X(\mathbf{A}_K)^{\operatorname{Br}} = \overline{J(K)} \cap X(\mathbf{A}_K)$ ([**20**], proposition 4.6). L'analogue de ce résultat sur les corps de nombres a été initialement démontré par Scharaschkin [**24**] ; une autre preuve en a été donnée par Stoll ([**31**], corollaire 7.4).

6.3. Lien avec l'intersection adélique

Nous allons ici démontrer le

THÉORÈME 6.12 (Poonen/Voloch). — *Soit J une variété abélienne sur K telle que $J_{\overline{K}}$ n'ait pas de quotient isotrivial non nul et $J(K^s)[p^\infty]$ soit fini. Soit X un sous-K-schéma fermé sans cossette de J. Alors*

$$X(K) = X(\mathbf{A}_K)^{\operatorname{Br}} = X(\mathbf{A}_K) \cap \operatorname{Sel}^\wedge(J).$$

La preuve va être très similaire à celle du théorème 1.3, en remplaçant $\overline{J(K)}$ par $\mathrm{Sel}^\wedge(J)$.

LEMME 6.13. — *On a* $J(K)_{\mathrm{tors}} = J(K)^\wedge_{\mathrm{tors}} = \mathrm{Sel}^\wedge(J)_{\mathrm{tors}}$.

PREUVE. – Nous avons déjà vu que $J(K)_{\mathrm{tors}} = J(K)^\wedge_{\mathrm{tors}}$ (corollaires 3.12 et 3.13). L'égalité $J(K)^\wedge_{\mathrm{tors}} = \mathrm{Sel}^\wedge(J)_{\mathrm{tors}}$ résulte de la proposition 3.9 car, par définition, le groupe $T\text{Ш}(J)$ est sans torsion.

Le résultat suivant est très similaire à la proposition 3.5.

PROPOSITION 6.14. — *Supposons* $J(K^s)[p^\infty]$ *fini. Alors pour toute place* v *de* K, *l'application canonique* $(\mathrm{Sel}^\wedge(J))^{(p)} \to J(K_v)^{(p)}$ *est injective.*

Preuve. — Une difficulté est ici que les complétés K_v ne sont pas inclus dans K^s. Pour la contourner, on considère l'*henselisé* $K'_v \subset K^s$ du corps K par rapport à la valuation v ; on définit $\mathrm{Sel}^{n'}(J)$ et $\mathrm{Sel}^{\wedge'}(J)$ de la même façon que $\mathrm{Sel}^n(J)$ et $\mathrm{Sel}^\wedge(J)$, mais en remplaçant partout K_v par K'_v. D'après [**18**], I.3.10.(a), on a alors $\mathrm{Sel}^{n'}(J) = \mathrm{Sel}^n(J)$, ainsi que $J(K_v)^{(p)} = J(K'_v)^{(p)} = \varprojlim_r J(K'_v)/p^r J(K'_v)$. On est donc ramené à l'injectivité de la flèche $i : (\mathrm{Sel}^\wedge(J))^{(p)} \to J(K'_v)^{(p)}$.

Fixons m tel que $p^m(J(K^s)[p^\infty]) = 0$. Soit b dans $\ker i$, notons (pour $M \geq 0$) b_M l'image de b dans $\mathrm{Sel}'^{p^M} \subset H^1(K, J[p^M])$. Comme b est tué dans $J(K'_v)^{(p)}$, son image dans tous les $J(K'_v)/p^M J(K'_v)$ est nulle, donc aussi son image dans $H^1(K'_v, J[p^M])$, et a fortiori son image dans $H^1(K^s, J[p^M])$ (noter l'analogie avec la preuve de la proposition 3.5, dans laquelle on avait utilisé $K_v \cap \overline{K} \subset K^s$). D'après la suite exacte (analogue de la suite de restriction-inflation en cohomologie galoisienne) tirée de la suite spectrale de Hochschild-Serre, on obtient que b_M provient d'un élément de $H^1(\mathrm{Gal}(K^s/K), J(K^s)[p^M])$, d'où $p^m b_M = 0$ puisque $J(K^s)[p^M] \subset J(K^s)[p^\infty]$ est annulé par p^m. Comme ceci est vrai pour tout $M \geq 0$, on obtient $p^m b = 0$. D'après le lemme 6.13, b est dans l'image du groupe fini $J(K)[p^\infty]$, lequel s'injecte dans $J(K'_v)^{(p)}$. □

PROPOSITION 6.15. — *On suppose* $J(K^s)[p^\infty]$ *fini. Soit* Z *un sous-*K*-schéma fini de* J. *Alors* $Z(\mathbf{A}_K) \cap \mathrm{Sel}^\wedge(J) = Z(K)$.

Preuve (esquisse). — C'est l'exact analogue de la proposition 3.16. On se ramène encore au cas où Z est constitué de K-points. Si alors P est dans $Z(\mathbf{A}_K) \cap \mathrm{Sel}^\wedge(J)$, on obtient que sa composante v-adique est un point $Q_v \in Z(K)$, avec la propriété que l'image de $Q_{v'} - Q_v$ dans $\mathrm{Sel}^{(p)}(J)$ est nulle si v, v' sont deux places de K (utiliser la proposition 6.14 au lieu de 3.5). On en déduit alors $(Q_{v'} - Q_v) \in J(K)_{\mathrm{tors}}$ (parce que $(J(K)^\wedge)^{(p)}$ s'injecte dans $(\mathrm{Sel}^\wedge(J))^{(p)}$), puis $(P - Q_v) \in \mathrm{Sel}^\wedge(J)_{\mathrm{tors}} = J(K)_{\mathrm{tors}}$ (lemme 6.13) donc $P \in J(K) \cap Z(\mathbf{A}_K) = Z(K)$.

Il est utile d'avoir une description plus géométrique de l'ensemble $\mathrm{Sel}^{\wedge}(J)$. Pour cela, on note que si $e \geq 0$, on peut représenter une classe $\tau \in \mathrm{Sel}^{p^e}(J)$ par un K-torseur fppf T sous le groupe J, équipé de plus d'un K-morphisme $\phi_T : T \to J$ qui devient isomorphe sur K^s à $J \xrightarrow{\cdot p^e} J$ (cf. [**30**], paragraphe 3.3). Le torseur est trivialisé sur K^s (et pas seulement par un changement de base fppf sur $\operatorname{spec} K$) parce que J est un groupe lisse sur K. En particulier $T(K^s) \neq \varnothing$. □

LEMME 6.16. — *Soit $e \geq 0$. Avec les notations ci-dessus, on a*

$$\mathrm{Sel}^{\wedge}(J) \subset \bigcup_{\tau \in \mathrm{Sel}^{p^e}} \phi_T(T(\mathbf{A}_K)).$$

Preuve. — Soient $b \in \mathrm{Sel}^{\wedge}(J)$ et τ son image dans $\mathrm{Sel}^{p^e}(J)$. Alors par définition de ϕ_T, l'ensemble $\phi_T(T(\mathbf{A}_K))$ est une classe d'équivalence C de $J(\mathbf{A}_K)$ modulo $p^e J(\mathbf{A}_K)$, dont l'image dans $J(\mathbf{A}_K)/p^e J(\mathbf{A}_K)$ est τ. Il en résulte que b est l'image dans $J(\mathbf{A}_K)$ d'un élément de C. □

Preuve du théorème 6.12. — D'après la proposition 6.4 et le corollaire 6.9, on a

$$X(K) \subset X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \subset X(\mathbf{A}_K) \cap \mathrm{Sel}^{\wedge}(J).$$

Il suffit donc de montrer que $X(\mathbf{A}_K) \cap \mathrm{Sel}^{\wedge}(J) \subset X(K)$. Pour cela, on va procéder comme dans la fin de la preuve du théorème 1.3.

Soient e et Y comme dans la proposition 4.10. Pour tout $\tau \in \mathrm{Sel}^{p^e}(J)$, on choisit $\phi_T : T \to J$ comme ci-dessus, puis on prend t dans $T(K^s)$ et on pose $a = \phi_T(t)$. Alors la fibre Y_a de $Y \to J_n$ au-dessus de a peut être vue comme un sous-schéma fini de X_{K^s}. Mais alors, comme $\mathrm{Sel}^{p^e}(J)$ est fini (cf. preuve de la proposition 3.9), on peut trouver un sous-K-schéma fini Z de X tel que Z_{K^s} contienne tous les Y_a (pour τ décrivant $\mathrm{Sel}^{p^e}(J)$).

Pour toute place v de K, fixons une clôture séparable K_v^s de K_v qui contient K^s. Comme dans la preuve de la proposition 5.2, on voit que toute p-base de K reste une p-base de K_v, et donc aussi de K_v^s, ce qui permet d'appliquer la proposition 4.10 avec $F = K_v^s$. On obtient

$$X(K_v^s) \cap (a + p^e J(K_v^s)) \subset Y_a(K_v^s)$$

pour chaque a. Mais par définition de ϕ_T, on a $\phi_T(T(K_v^s)) = a + p^e J(K_v^s)$, ce qui donne

$$X(K_v) \cap \phi_T(T(K_v)) \subset Y_a(K_v^s) \subset Z(K_v^s)$$

d'où finalement $X(K_v) \cap \phi_T(T(K_v)) \subset X(K_v) \cap Z(K_v^s) = Z(K_v)$. Comme ceci vaut pour toute place v, on obtient

$$X(\mathbf{A}_K) \cap \phi_T(T(\mathbf{A_K})) \subset Z(\mathbf{A}_K).$$

D'après le lemme 6.16, on obtient

$$X(\mathbf{A}_K) \cap \mathrm{Sel}^{\wedge}(J) \subset Z(\mathbf{A}_K)$$

en faisant la réunion sur tous les $\tau \in \mathrm{Sel}^{p^e}(J)$. On conclut avec la proposition 6.15. $\square$

REMERCIEMENTS. — *Je remercie Elisabeth Bouscaren, Jean-Louis Colliot-Thélène, Ofer Gabber, Vincent Maillot, Bjorn Poonen et Tamás Szamuely pour les intéressantes discussions que j'ai eues avec eux pendant la préparation de cet exposé.*

RÉFÉRENCES

[1] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre VI : Groupes et corps ordonnés*, Actualités Sci. Ind., no. 1179, Hermann et Cie, Paris, 1973.

[2] A. BUIUM & J. F. VOLOCH – Integral points of abelian varieties over function fields of characteristic zero, *Math. Ann.* **297** (1993), p. 303–307.

[3] H. CARTAN & S. EILENBERG – *Homological algebra*, Princeton University Press, 1956.

[4] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE – Conjectures de type local-global sur l'image des groupes de Chow dans la cohomologie étale, in *Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., 1999, p. 1–12.

[5] F. DELON – Separably closed fields, in *Model theory and algebraic geometry*, Lecture Notes in Math., vol. 1696, Springer, 1998, p. 143–176.

[6] D. ERIKSSON & V. SCHARASCHKIN – On the Brauer-Manin obstruction for zero-cycles on curves, prépublication arXiv:math/0602355v1, 2006.

[7] C. D. GONZÁLEZ-AVILÉS & K.-S. TAN – A generalization of the Cassels-Tate dual exact sequence, *Math. Res. Lett.* **14** (2007), p. 295–302.

[8] M. J. GREENBERG – Rational points in Henselian discrete valuation rings, *Publ. Math. I.H.É.S.* **31** (1966), p. 59–64.

[9] D. HARARI & T. SZAMUELY – Local global principles for 1-motives, *Duke Math. J.* **143** (2008), p. 531–557.

[10] M. HINDRY – Autour d'une conjecture de Serge Lang, *Invent. Math.* **94** (1988), p. 575–603.

[11] E. HRUSHOVSKI – The Mordell-Lang conjecture for function fields, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), p. 667–690.

[12] S. LANG & A. NÉRON – Rational points of abelian varieties over function fields, *Amer. J. Math.* **81** (1959), p. 95–118.

[13] S. Lang & J. Tate – Principal homogeneous spaces over abelian varieties, *Amer. J. Math.* **80** (1958), p. 659–684.

[14] Y. I. Manin – Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne, in *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1*, Gauthier-Villars, 1971, p. 401–411.

[15] M. McQuillan – Division points on semi-abelian varieties, *Invent. Math.* **120** (1995), p. 143–159.

[16] J. S. Milne – Elements of order p in the Tate-Šafarevič group, *Bull. London Math. Soc.* **2** (1970), p. 293–296.

[17] ———, Congruence subgroups of abelian varieties, *Bull. Sci. Math. (2)* **96** (1972), p. 333–338.

[18] ———, *Arithmetic duality theorems*, second éd., BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006.

[19] E. Peyre – Obstructions au principe de Hasse et à l'approximation faible, Séminaire Bourbaki. vol. 2003/2004, exp. n° 931, *Astérisque* **299** (2005), p. 165–193.

[20] B. Poonen & J. F. Voloch – The Brauer-Manin obstruction for subvarieties of abelian varieties over function fields, prépublication `http://math.berkeley.edu/~poonen/papers/brauer.pdf`, 2007.

[21] M. Raynaud – Courbes sur une variété abélienne et points de torsion, *Invent. Math.* **71** (1983), p. 207–233.

[22] ———, Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion, in *Arithmetic and geometry, Vol. I*, Progr. Math., vol. 35, Birkhäuser, 1983, p. 327–352.

[23] S. Saito – Some observations on motivic cohomology of arithmetic schemes, *Invent. Math.* **98** (1989), p. 371–404.

[24] V. Scharaschkin – Local-global problems and the Brauer-Manin obstruction, Thèse, University of Michigan, 1999.

[25] J-P. Serre – Sur les groupes de congruence des variétés abéliennes, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **28** (1964), p. 3–20.

[26] ———, *Corps locaux*, Hermann, 1968, Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.

[27] ———, Sur les groupes de congruence des variétés abéliennes. II, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **35** (1971), p. 731–737.

[28] ———, Lettre à Ken Ribet du 7 mars 1986, in *J-P. Serre : Œuvres*, vol. 4, Springer, 2003.

[29] S. Siksek & A. Skorobogatov – On a Shimura curve that is a counterexample to the Hasse principle, *Bull. London Math. Soc.* **35** (2003), p. 409–414.

[30] A. Skorobogatov – *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 144, Cambridge University Press, 2001.

[31] M. Stoll – Finite descent obstructions and rational points on curves, *Algebra and Number Theory* **1** (2007), p. 349–391.

[32] P. Vojta – Integral points on subvarieties of semiabelian varieties. I, *Invent. Math.* **126** (1996), p. 133–181.

[33] J. F. Voloch – Diophantine approximation on abelian varieties in characteristic p, *Amer. J. Math.* **117** (1995), p. 1089–1095.

[34] Y. G. Zarhin – Abelian varieties without homotheties, *Math. Res. Lett.* **14** (2007), p. 157–164.

David HARARI

Université Paris XI
Département de Mathématiques
UMR 8628 du CNRS
Bâtiment 425
F-91405 Orsay Cedex
E-mail : David.Harari@math.u-psud.fr