Astérisque

JEAN-MICHEL ROQUEJOFFRE

Propriétés qualitatives des solutions des équations de Hamilton-Jacobi [d'après A. Fathi, A. Siconolfi, P. Bernard]

Astérisque, tome 317 (2008), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 975, p. 269-293

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__317__269_0>

Séminaire BOURBAKI Mars 2007
59e année, 2006-2007, n° 975, p. 269 à 293

PROPRIÉTÉS QUALITATIVES DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE HAMILTON-JACOBI [d'après A. Fathi, A. Siconolfi, P. Bernard]

par **Jean-Michel ROQUEJOFFRE**

Soit $\mathbf{T}^N = \mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$ le tore unité de $\mathbb{R}^N$, et soit $(x,p) \in \mathbf{T}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto H(x,p) \in \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞, uniformément strictement convexe en sa seconde variable, i.e. il existe $\alpha > 0$ tel que l'inégalité suivante

$$H_{pp}(x,p) \geq \alpha I \tag{1}$$

soit vraie au sens des formes quadratiques. Cette fonction H sera dans tout l'exposé désignée sous le nom de « hamiltonien ». Considérons l'équation de Hamilton-Jacobi

$$u_t + H(x, Du) = 0 \ (t > 0,\ x \in \mathbf{T}^N) \tag{2}$$

où $Du = (\partial_{x_1} u, ..., \partial_{x_N} u)$. On s'intéresse d'abord au problème de Cauchy pour (2), c'est-à-dire qu'on complète (2) par la donnée initiale

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{3}$$

où u_0 est continue sur $\mathbf{T}^N$. On s'intéresse ensuite à une version stationnaire de (2), à savoir l'équation

$$H(x, Du) = c, \quad x \in \mathbf{T}^N. \tag{4}$$

Il est bien connu que, pour une donnée initiale u_0 régulière sur $\mathbf{T}^N$, le problème de Cauchy (2)-(3) admet une solution régulière *locale*, à savoir qu'il existe $t(u_0) > 0$ tel que l'équation (2) admette une solution $u(t,x)$ de classe C^1 sur $[0, t(u_0)] \times \mathbf{T}^N$ vérifiant $u(0,.) = u_0$. Toutefois, cette solution n'est pas globale : il est en général impossible de la prolonger jusqu'à $t = +\infty$. D'autre part, si nous relâchons la contrainte : u de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbf{T}^N$, pour la remplacer par : u lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbf{T}^N$ – et donc (2)-(3) a lieu presque partout, il y a en général plusieurs solutions globales. Voir par exemple [**18**] pour ces questions. Une question naturelle est donc de savoir si un critère supplémentaire moins contraignant que la régularité C^1, mais plus fort que la régularité Lipschitz, permet de sélectionner une unique solution globale au problème de Cauchy.

Ces considérations ont motivé l'introduction par Crandall et Lions [**10**], au début des années 1980, des *solutions de viscosité.* Cette notion permet de sélectionner, parmi toutes les solutions de (2), « celle qui a un sens physique » – avec toutes les ambiguïtés que peut comporter un tel vocable ! La théorie des solutions de viscosité a par la suite connu des développements spectaculaires, dépassant très largement le cadre des équations de Hamilton-Jacobi du type (2) : citons, sans prétendre à l'exhaustivité, les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman du premier ordre avec leurs applications en contrôle optimal et en finance, les équations elliptiques et paraboliques du second ordre, les équations géométriques (eikonales, courbure moyenne...), l'homogénéisation ; en parallèle avec ces développements théoriques, des méthodes nouvelles d'approximation numérique pour ces problèmes sont apparues, liées aux applications. Faire ici un panorama exhaustif de tous ces développements serait absolument vain ; c'est pourquoi nous nous contentons de mentionner les ouvrages de Barles [**1**] et Lions [**18**] pour les équations du premier ordre, la monographie de Caffarelli-Cabré [**7**] pour les équations elliptiques du second ordre, et l'article de revue de Crandall-Ishii-Lions [**9**] pour un exposé des résultats principaux de la théorie des solutions de viscosité pour les équations du second ordre dégénérées.

Revenons aux équations (2)-(3) et (4). La motivation de cet exposé est l'étude des propriétés qualitatives, principalement de régularité et d'unicité, des solutions de (2)-(4) et (4). En effet, la théorie générale dit que les solutions de viscosité de (2)-(3) sont lipschitziennes, et il serait intéressant de connaître la régularité maximale, ou bien si la solution est plus régulière en certains endroits. D'autre part, si le problème de Cauchy admet une solution unique – c'est l'un des premiers résultats de la théorie de Crandall-Lions – le problème stationnaire n'a aucune raison d'admettre une solution unique ; on souhaite donc compter et classifier les solutions de (4).

La solution de (2)-(3) admet une expression – presque – explicite (formule de Lax-Oleinik). A la fin des années 1990, A. Fathi, dans quatre notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [**12**], [**11**], [**13**], [**14**], a montré comment l'exploitation systématique de cette formule, combinée à des idées empruntées à la théorie de Mather – voir, par exemple, [**20**] – pouvait jeter un éclairage nouveau sur les propriétés qualitatives de (2)-(3) et (4). Les idées présentes dans ces quatre notes ont été développées dans [**15**], et aboutissent à l'important théorème d'existence de sous-solutions critiques C^1, présenté dans Fathi-Siconolfi [**16**]. Ce résultat permet de comprendre comment s'organisent les solutions de (4), et a des conséquences sur la dynamique des solutions du système hamiltonien sous-jacent.

Les travaux de Fathi ont eu d'importantes applications à une classe de problèmes d'optimisation appelée « transport optimal ». Utilisant les idées de Fathi, B. Buffoni et P. Bernard [**5**], [**6**] ont donné une solution générale du problème de Monge, généralisant des travaux antérieurs de Evans-Gangbo, Caffarelli-Feldman-McCann, Ambrosio... Toutefois, pour éviter que le texte ne prenne des proportions démesurées, ni ces applications, ni la théorie de Mather ne seront discutées ici.

Cet exposé se veut une introduction, à peu près auto-contenue, au théorème de Fathi-Siconolfi et à son impact sur les propriétés qualitatives des équations de Hamilton-Jacobi. La première section de ce texte est une introduction aux solutions de viscosité, aboutissant à un théorème d'existence (Lions, Papanicolaou, Varardhan) pour (4). La deuxième section introduit la formule de Lax-Oleinik comme solution explicite du problème de Cauchy pour (2)-(3), et en dégage les principales propriétés. Ces deux premières sections ne sont en aucun cas originales ; leur seul mérite est de synthétiser en quelques pages deux types de résultats différents pour (2)-(3). La courte section 3 présente de façon très simple des propriétés de régularité $C^{1,1}$, cruciales pour la suite. La section 4 analyse le théorème de Fathi-Siconolfi, et la section 5 en présente plusieurs applications et compléments : ensembles d'unicité pour l'équation stationnaire (4), existence de régions invariantes pour le système hamiltonien sous-jacent, régularité additionnelle.

Remarque 0.1. — Dans tout l'exposé, on pourrait remplacer le tore $\mathbf{T}^N$ par une variété riemanienne compacte sans bord. Toutefois ceci n'apporterait rien à la compréhension du texte et ne ferait qu'alourdir les calculs présentés.

Je souhaite remercier ici P. Bernard, A. Fathi et A. Siconolfi pour de nombreuses discussions et leur patience vis-à-vis de mes diverses questions à la limite de la naïveté. Je tiens à adresser une mention spéciale à G. Barles, qui est à l'origine d'une grande partie de ce que je sais de la théorie des solutions de viscosité.

1. SOLUTIONS DE VISCOSITÉ

Nous donnons dans cette section les notions de base sur les solutions de viscosité d'équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre, et démontrons un résutat d'unicité typique de la théorie. Ce dernier permet d'arriver rapidement à la démonstration du théorème d'existence de solutions stationnaires de Lions-Papanicolaou-Varadhan, et des questions d'unicité qu'il soulève.

1.1. Généralités

Nous commençons avec des équations plus générales que (2) ; nous restreindrons les hypothèses au fur et à mesure. Considérons le problème de Cauchy

$$u_t + F(x, u, Du) = 0 \ (t > 0, \ x \in \mathbf{T}^N), \qquad u(0, x) = u_0(x), \tag{5}$$

où $F \in C(\mathbf{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, et où la donnée initiale u_0 est continue sur $\mathbf{T}^N$.

DÉFINITION 1.1. — *Nous dirons que* $u(t,x) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbf{T}^N)$ *est sous-solution de viscosité pour* (5) *si, pour toute fonction* $\phi \in C^1((0,+\infty) \times \mathbf{T}^N)$ *et pour tout couple* $(t_0, x_0) \in (0,+\infty) \times \mathbf{T}^N$ *tel que* (t_0, x_0) *soit un point de maximum pour* $u - \phi$*, on a :*

$$\phi_t(t_0, x_0) + F(x_0, u(t_0, x_0), D\phi(t_0, x_0)) \leq 0. \tag{6}$$

Nous dirons que $u(t,x)$ *est sur-solution de viscosité pour* (5) *si, pour toute fonction* $\phi \in C^1((0,+\infty) \times \mathbf{T}^N)$ *et pour tout couple* $(t_0, x_0) \in (0,+\infty) \times \mathbf{T}^N$ *tel que* (t_0, x_0) *soit un point de minimum pour* $u - \phi$*, on a :*

$$\phi_t(t_0, x_0) + F(x_0, u(t_0, x_0), D\phi(t_0, x_0)) \geq 0. \tag{7}$$

Nous dirons enfin que $u(t,x)$ *est solution de viscosité pour* (5) *si elle est à la fois sous- et sur-solution de viscosité pour* (5).

Remarque 1.2. — Une solution C^1 de (5) est solution de viscosité. Le maximum de deux sous-solutions de viscosité est solution de viscosité, le minimum de deux sur-solutions de viscosité est sur-solution de viscosité. La définition 1.1 s'étend trivialement aux équations stationnaires du type $F(x, u, Du) = 0$ sur $\mathbf{T}^N$.

Le lecteur peut à juste titre se demander si une définition apparemment aussi faible a un quelconque pouvoir sélectif. Il se trouve que oui, et nous donnons ci-après, sans démonstration, la liste des principales propriétés des solutions de viscosité de (5).

1. (Stabilité) Soit $(F_n)_n$ une suite de $C(\mathbf{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, convergeant localement uniformément vers $F \in C(\mathbf{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Soit u_n une solution de viscosité de (5) avec $F = F_n$; supposons la suite $(u_n)_n$ localement uniformément convergente vers $u \in C(\mathbb{R}_+, \mathbf{T}^N)$. Alors u est solution de viscosité de (5).
2. Soit u une solution de viscosité de (5) localement lipschitzienne. Alors elle vérifie (5) presque partout.
3. (Principe du maximum) Supposons que le hamiltonien $F(x, u, p)$ soit de la forme $H(x, p)$, où $H \in C(\mathbf{T}^N \times \mathbb{R}^N)$ vérifie la propriété suivante (dite de coercivité) :

$$\lim_{|p| \to +\infty} H(x, p) = +\infty, \quad \text{uniformément en } x \in \mathbf{T}^N. \tag{8}$$

   Soient $u_{10} \leq u_{20}$ deux données initiales continues pour (5), et supposons que u_{10} (resp. u_{20}) génère au moins une solution de viscosité u_1 (resp. u_2) pour (5). Alors $u_1 \leq u_2$. Ce principe du maximum est vrai pour des hamiltoniens plus généraux, mais c'est hors du propos de ces notes.
4. (Contraction faible) Toujours si le hamiltonien est de la forme $F(x, u, p) = H(x, p)$ et sous l'hypothèse de coercivité (8), soient $u_{10} \leq u_{20}$ deux données initiales continues pour (5). Supposons que u_{10} (resp. u_{20}) génère au moins une solution de viscosité u_1 (resp. u_2) pour (5). Alors $\|u_1(t,.) - u_2(t,.)\|_\infty \leq \|u_{10} - u_{20}\|_\infty$.

La définition 1.1 a été introduite par Crandall et Lions dans leur article fondamental [**10**]. Nous notons au passage l'intérêt de la notion étudiée ici : la propriété (1) assure que l'on peut « passer à la limite » dans l'équation (5) dès lors que l'on dispose d'estimations uniformes sur le module de continuité des solutions (ce qui toutefois peut se révéler extrêmement difficile, voire parfois simplement impossible !) ; la propriété (3) assure l'unicité – à défaut d'assurer l'existence – au problème de Cauchy. Pourquoi l'appellation « solution de viscosité » ? Elle vient justement de cette préoccupation d'assurer la sélection d'une solution « physique » à (5). Une idée naturelle est de régulariser (5) par un terme du second ordre, de résoudre le problème d'apparence plus compliquée :

$$u_t + F(x,u,Du) = \varepsilon \Delta u \ (t>0,\ x \in \mathbf{T}^N), \qquad u(0,x) = u_0(x), \tag{9}$$

et de chercher à passer à la limite $\varepsilon \to 0$. Cette entreprise peut être menée à bien quand le hamiltonien $F(x,u,p)$ est par exemple de la forme $H(x,p)$, et on peut montrer que cette notion de solution assure une propriété d'unicité analogue à la propriété (3) ; voir [**18**] pour un historique. La notion (9) n'est toutefois pas intrinsèque – elle peut dépendre de la régularisation choisie – et il faut donc lui préférer la définition 1.1. **Jusqu'à la fin de l'exposé, une « solution » de** (2) **ou** (4) **sera toujours entendue au sens de viscosité.**

Une problématique centrale de la théorie est celle de l'unicité. Donnons donc, pour terminer ce rapide tour d'horizon, le résultat d'unicité le plus simple, suivi de sa démonstration par la méthode du dédoublement de variables. Cette idée se retrouve dans pratiquement toutes les preuves d'unicité, bien entendu sous des formes plus ou moins élaborées.

PROPOSITION 1.3. — *Supposons que le hamiltonien H soit continu en toutes ses variables, et vérifie la seule hypothèse de coercivité* (8). *Considérons l'équation*

$$H(x,Du) + u = 0 \qquad (x \in \mathbf{T}^N) \tag{10}$$

Soit $\underline{u}$ (resp. $\overline{u}$) une sous- (resp. sur-) solution de viscosité pour (2). *Alors $\underline{u} \le \overline{u}$.*

Preuve. — Supposons un instant $\underline{u}$ et $\overline{u}$ de classe C^1. Si x_0 est un minimum de $\overline{u} - \underline{u}$, nous avons, utilisant l'équation (10) en x_0 : $(\overline{u} - \underline{u})(x_0) \ge 0$, d'où le résultat. Malheureusement, $\underline{u}$ et $\overline{u}$ ne sont que continues, ce qui rend vaine toute tentative de donner un sens ponctuel à $D\overline{u}$ ou $D\underline{u}$. Définissons donc, pour tout $\varepsilon > 0$, la pénalisation

$$u_\varepsilon(x,y) = \overline{u}(x) - \underline{u}(y) + \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon^2}$$

et soit $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ un point de minimum de u_ε. On se persuade facilement que $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon^2} = 0$, et que la famille $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)_\varepsilon$ converge, à une sous-suite près, vers

(x_0, x_0) où x_0 est un minimum de $\overline{u} - \underline{u}$. Appliquant la définition (6) (sous-solution) à la fonction-test $x \mapsto \phi_x(y) = \underline{u}(y) + \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon^2}$, nous obtenons

$$H\left(y_\varepsilon, \frac{y_\varepsilon - x_\varepsilon}{\varepsilon^2}\right) + \underline{u}(y_\varepsilon) \leq 0\,; \tag{11}$$

appliquant la définition (7) (sur-solution) à la fonction-test $x \mapsto \phi_y(x) = \underline{u}(y) - \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon^2}$, nous obtenons

$$H\left(x_\varepsilon, \frac{y_\varepsilon - x_\varepsilon}{\varepsilon^2}\right) + \overline{u}(x_\varepsilon) \geq 0. \tag{12}$$

La coercivité du hamiltonien et (12) impliquent que $\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{\varepsilon^2}$ est bornée. Nous avons alors $H(y_\varepsilon, \frac{y_\varepsilon - x_\varepsilon}{\varepsilon^2}) = H(x_\varepsilon, \frac{y_\varepsilon - x_\varepsilon}{\varepsilon^2}) + o(1)$; soustrayant (12) de (11) nous obtenons $\overline{u}(x_\varepsilon) - \underline{u}(y_\varepsilon) \geq o(1)$ ce qui, à la limite $\varepsilon \to 0$, donne l'inégalité $(\overline{u} - \underline{u})(x_0) \geq 0$. □

Ce résultat prouve automatiquement que (10) a au plus une solution. Il admet l'extension suivante, donnée sans preuve :

PROPOSITION 1.4. — *Soit $\underline{u}$ (resp. $\overline{u}$) une sous-solution de viscosité semi-continue supérieurement (s.c.s.) et $\overline{u}$ sur-solution de viscosité semi-continue inférieurement (s.c.i.) de* (10). *Alors $\underline{u} \leq \overline{u}$.*

1.2. Solutions stationnaires

Stricto sensu, une solution stationnaire de (2) est une solution ne dépendant pas de t, i.e. une solution de $H(x, Du) = 0$. Bien évidemment, une telle équation a toutes les chances de n'avoir pas de solution : il suffit de supposer $H \geq 1$ sur $\mathbf{T}^N \times \mathbb{R}^N$, un cas de figure qui entre parfaitement dans nos hypothèses. Il est donc nécessaire d'étendre un peu la catégorie de solutions particulières recherchées, et l'idée la plus naturelle est de chercher des solutions de la forme $-ct + u(x)$. La fonction u est alors solution de (4). Le résultat principal de cette section est le suivant (Lions, Papanicolaou, Varadhan [**19**]) :

THÉORÈME 1.5. — *Supposons $(x,p) \mapsto H(x,p)$ continu, et la condition de coercivité* (8) *vraie. Il existe un unique $c \in \mathbb{R}$ pour lequel* (4) *admet des solutions.*

Une démonstration possible consiste à résoudre le problème doublement approché suivant :

$$-\,\delta\Delta u + H(x, Du) + \varepsilon u = 0, \quad x \in \mathbf{T}^N, \tag{13}$$

avec $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $\delta > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, le problème (13) admet une solution $u^{\varepsilon,\delta} \in [-\frac{\|H(.,0)\|_\infty}{\varepsilon}, \frac{\|H(.,0)\|_\infty}{\varepsilon}]$. Ceci se voit grâce au principe du maximum pour les équations elliptiques, et des arguments élémentaires non détaillés ici. La preuve du théorème consiste à passer à la limite $\delta \to 0$, puis $\varepsilon \to 0$. La limite $\delta \to 0$ est gérée par le lemme de Barles-Perthame [**2**], énoncé ci-après.

LEMME 1.6. — *Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons*

$$\underline{u}^\varepsilon(x) = \limsup_{y\to x,\delta\to 0} u^{\varepsilon,\delta}(y), \qquad \overline{u}^\varepsilon(x) = \liminf_{y\to x,\delta\to 0} u^{\varepsilon,\delta}(y).$$

Alors $\underline{u}^\varepsilon$ (resp. $\overline{u}^\varepsilon$) est une sur-solution de viscosité s.c.i. (resp. sous-solution de viscosité s.c.s.) de

$$H(x, Du) + \varepsilon u = 0 \qquad (x \in \mathbf{T}^N). \tag{14}$$

Nous avons trivialement $\underline{u}^\varepsilon \geq \overline{u}^\varepsilon$, soit $\overline{u}^\varepsilon = \underline{u}^\varepsilon$ par la proposition 1.4. Notons u^ε cette valeur commune ; c'est une solution de viscosité de (14). Nous avons encore besoin d'un lemme, dont nous explicitons la démonstration pour familiariser le lecteur au maniement des fonctions-tests.

LEMME 1.7. — *Il existe $C > 0$ indépendant de ε tel que $\|Du^\varepsilon\|_\infty \leq C$.*

Preuve. — Soit $x \in \mathbf{T}^N$ et, pour $K > 0$, soit la fonction $y \mapsto u^\varepsilon(y) - u^\varepsilon(x) - K|y-x|$; soit $\hat{x}$ un point de maximum de cette fonction ; supposons $\hat{x} \neq x$. Alors $y \mapsto u^\varepsilon(x) - K|y-x|$ est, au voisinage de $\hat{x}$, une fonction-test admissible ; la condition de sous-solution (6) en $y = \hat{x}$ donne :

$$H(\hat{x}, K\frac{\hat{x}-x}{|\hat{x}-x|}) + \varepsilon u^\varepsilon(\hat{x}) \leq 0.$$

Rappelons que la quantité $\varepsilon\|u^\varepsilon\|_\infty$ est bornée indépendamment de ε. La condition de coercivité (8) implique alors l'existence de $C > 0$ indépendant de ε, tel que $K \leq C$; soit, en particulier : $u(y) - u(x) - C|y-x| \leq 0$. Les points x et y étant quelconques, ceci termine la démonstration. □

Preuve du théorème 1.5. — Notons $\langle u^\varepsilon\rangle$ la moyenne de u^ε sur T^N, et $v^\varepsilon \coloneqq u^\varepsilon - \langle u^\varepsilon\rangle$. Grâce au lemme 1.7, la suite $(v^\varepsilon)_\varepsilon$ converge uniformément – à extraction d'une sous-suite près – vers une fonction $v \in C(\mathbf{T}^N)$. Notons que la famille $(\varepsilon\langle u^\varepsilon\rangle)_\varepsilon$ est bornée ; nous pouvons donc supposer qu'elle converge vers une constante notée $-c$. Par le résultat de stabilité **1**, v est solution de viscosité de (4).

Montrons l'unicité du c. Supposons l'existence de $c_1 < c_2$ tels que (4) ait des solutions pour $c = c_1$ et $c = c_2$; soient u_1 et u_2 de telles solutions. Soit $K > 0$ tel que $u_1 - K \leq u_2 \leq u_2 + K$; les fonctions $-c_1t + u_1 \pm K$ et $-c_2t + u_2$ sont solutions du problème de Cauchy (2) avec les données respectives $u_1 \pm K$ et u_2. Par la propriété **3**, ce sont les seules, et nous avons (principe du maximum) :

$$\forall t > 0, \quad -c_1t + u_1 - K \leq -c_2t + u_2 \leq -c_1t + u_1 + K.$$

Ceci n'est possible que si $c_1 = c_2$. □

Quid, maintenant, de l'unicité d'une solution au problème (4), une fois que le c correct est identifié ? Clairement, si u est solution, $u+q$ est solution pour toute constante q. On pourrait se demander si le quotient par les constantes assure l'unicité, il n'en est malheureusement rien : considérons l'exemple très simple

$$|u'| = f(x), \quad x \in \mathbf{T}^1 \tag{15}$$

où $f \in C^1(\mathbf{T}^1)$ vérifie $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = 0$, et $f > 0$ en dehors de ces trois points, f $\frac{1}{2}$-périodique, et f symétrique par rapport à $\frac{1}{4}$. Définissons les deux fonctions périodiques u_1 et u_2 par leurs valeurs sur $[0,1]$:

$$u_1(x) = \begin{cases} \int_0^x f(y)\,dy & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \int_x^1 f(y)\,dy & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} \qquad u_2(x) = \begin{cases} \int_0^x f(y)\,dy & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ \int_x^{1/2} f(y)\,dy & \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ u_2 \ \frac{1}{2}\text{-périodique.} \end{cases}$$

Ce sont deux solutions de viscosité de (15), et u_2 ne se déduit pas de u_1 par l'addition d'une constante. Un mécanisme plus subtil est donc à l'œuvre, et une des contributions de Fathi est la compréhension générale de celui-ci. Notons que, dans le cas particulier du hamiltonien $H(x,p) = |p|^2 - f(x)$ $f \ge 0$ et $\{f = 0\}$ non vide, nous avons $c = 0$ et les solutions de (4) sont classifiées dans Lions [**18**].

2. REPRÉSENTATION LAGRANGIENNE

Nous terminons dans cette section la résolution du problème de Cauchy (2)-(3), amorcée dans la section 1. Nous savons déjà qu'il y a au plus une solution ; nous allons ici donner une solution « explicite » pour ce problème et nous aurons donc construit une unique solution globale. Dans la section précédente, nous avions supposé assez peu sur le hamiltonien H : seulement un peu de coercivité et de continuité.

Jusqu'à la fin de l'exposé, nous supposons vérifiées les conditions de stricte convexité et de régularité données en introduction.

Nous associons à H le lagrangien $(x,v) \in \mathbf{T}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto L(x,v)$ donné par la formule :

$$L(x,v) = \sup_{p \in \mathbb{R}^N} (p.v - H(x,p)). \tag{16}$$

Les propriétés vérifiées par L, et dont nous aurons besoin par la suite, sont indiquées ci-après.

- L est de classe C^∞ en x et v, et est uniformément strictement convexe en sa deuxième variable.
- Nous avons $H(x,p) = \sup_{v \in \mathbb{R}^N} (p.v - L(x,v))$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ l'application $v \mapsto L_v(x,v)$ est un C^∞-difféomorphisme, et nous avons $(L_v)^{-1} = H_p$.

Voir par exemple [**21**] pour cette définition et ces propriétés.

Définissons, pour tout triplet $(t,x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{T}^N$, la quantité :

$$h_t(x,y) = \inf_{\gamma(0)=x,\gamma(t)=y} \int_0^t L(\gamma,\dot\gamma)\ ds \tag{17}$$

où γ parcourt l'ensemble des chemins tracés sur $\mathbf{T}^N$, C^1 par morceaux. Ce problème de minimisation d'action lagrangienne est classique et admet le résultat suivant (théorème de Tonelli) :

Proposition 2.1. — *Soit $(t,x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{T}^N$. Il existe au moins un chemin $\gamma(s) \in C^2([0,t],\mathbf{T}^N)$, tel que*

$$h_t(x,y) = \int_0^t L(\gamma,\dot\gamma)\ ds.$$

De plus, il existe $C(t,|x-y|) > 0$ tel que $\|\dot\gamma\|_{L^\infty([0,t])} + \|\ddot\gamma\|_{L^\infty([0,t])} \le C(t,|x-y|)$. La fonction C tend vers $+\infty$ quand $t \to 0$ — à $|x-y|$ fixé. De plus γ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{ds}L_v(\gamma,\dot\gamma) - L_x(\gamma,\dot\gamma) = 0. \tag{18}$$

Une telle courbe γ sera désormais appelée une *extrémale*. Soit $u_0 \in C(\mathbf{T}^N)$; définissons la fonction

$$\mathcal{T}(t)u_0(x) = \inf_{y\in\mathbf{T}^N}(u_0(y) + h_t(y,x)). \tag{19}$$

Notons que cet inf est en fait un min. Notons aussi que $(\mathcal{T}(t))_{t>0}$ est un semi-groupe : on montre en effet facilement que $\mathcal{T}(t+s)u_0 = \mathcal{T}(t)\mathcal{T}(s)$, et $\mathcal{T}(0) = I$; ce semi-groupe est maintenant connu sous le nom de *semi-groupe de Lax-Oleinik*. Le lien avec la section 1 est fait grâce au théorème suivant, dont la preuve (là encore très classique) illustre bien les interactions entre cette section et la précédente.

Théorème 2.2. — *La fonction $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbf{T}^N \mapsto u(t,x) := \mathcal{T}(t)u_0(x)$ est la solution du problème de Cauchy* (2)-(3).

Preuve. — Montrons d'abord la propriété de sur-solution : soient $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbf{T}^N$ et ϕ une fonction-test telle que (t_0,x_0) soit un point de minimum de $u-\phi$, que nous pouvons supposer nul – simplement en retranchant une constante à ϕ. Soient y_0 tel que $u(t_0,x_0) = u_0(y_0)+h_{t_0}(y_0,x_0)$, et γ une extrémale de l'action entre 0 et t_0, reliant y_0 à x_0. Nous avons, pour tout $t \le t_0$:

$$\phi(t,\gamma(t)) \le u(t,\gamma(t)) \le u_0(y_0) + \int_0^t L(\gamma,\dot\gamma)\ ds,$$

le deuxième $\leq$ se transformant en égalité pour $t = t_0$. Nous avons donc

$$\frac{d}{dt}\Big(u_0(y_0) + \int_0^t L(\gamma, \dot\gamma)\, ds - \phi(t, \gamma(t))\Big)\Big|_{t=t_0} \leq 0,$$

soit

$$\phi_t(t_0, x_0) + D\phi(t_0, x_0).\dot\gamma(t_0) - L(\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)) \geq 0.$$

Ce qui implique, *via* la formule (16) : $\phi_t(t_0, x_0) + H(x_0, D\phi(t_0, x_0)) \geq 0$.

Pour montrer la propriété de sous-solution, considérons $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{T}^N$ réalisant le maximum de $u - \phi$, où ϕ est toujours une fonction-test. Soit $v \in \mathbb{R}^N$; définissons

$$\gamma_v(s) = x_0 + (t_0 - s)v.$$

Puisque $(\mathcal{T}(t))_t$ est un semi-groupe, nous avons, pour tout $t \leq t_0$:

$$\begin{aligned} u(t_0, x_0) \leq\ & u(t, x_0 - (t_0 - t)v) + h_{t_0 - t}(x_0 - (t_0 - v), x_0) \\ \leq\ & \phi(t, x_0 - (t_0 - t)v) + \textstyle\int_{t_0 - t}^{t_0} L(\gamma_v, \dot\gamma_v)\, ds\,, \end{aligned}$$

le deuxième $\leq$ devenant un $=$ en $t = t_0$, et la même opération que plus haut donne

$$\phi_t(t_0, x_0) + D\phi(t_0, x_0).v - L(x, v) \leq 0.$$

Ceci implique $\phi_t(t_0, x_0) + H(x_0, D\phi(t_0, x_0)) \leq 0$ par la formule (16), puisque v est quelconque. □

À titre d'exemple, remarquons que, si $H(x,p) = |p|^2$, nous avons $L(x, v) = \frac{|v|^2}{4}$ et nous retrouvons la formule bien connue :

$$\mathcal{T}(t)u_0(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^N} \Big(u_0(y) + \frac{|x - y|^2}{4t}\Big).$$

Terminons cette section par un résultat de régularisation instantanée : si u_0 est continue sur $\mathbf{T}^N$, $\mathcal{T}(t)u_0$ devient instantanément lipschitzienne. Il s'agit d'un résultat remarquable, dû au caractère strictement convexe de H. Tel n'est en effet pas le cas pour une équation eikonale ; il suffit pour s'en convaincre d'examiner la solution de

$$u_t + |u_x| = 0, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{T}^1$$

dont l'unique solution de viscosité est donnée par $u(t, x) = \inf_{|x-y| \leq t} u_0(y)$.

THÉORÈME 2.3. — *Soit $u(t,x) = \mathcal{T}(t)u_0(x)$ l'unique solution du problème de Cauchy* (2)-(3), *avec $u_0 \in C(\mathbf{T}^N)$. Pour tout $t > 0$, il existe $C_t > 0$ tel que u est C_t-lipschitzienne sur $[t, +\infty) \times \mathbf{T}^N$. Nous avons $\lim_{t \to 0} C_t = +\infty$.*

Preuve. — Notons qu'il suffit de prendre $t \leq 1$. En effet, par le principe du maximum, si c est l'unique nombre tel que (4) ait des solutions, la fonction $u(t, .) + ct$ est bornée sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbf{T}^N$. Il suffit donc de raisonner de proche en proche sur des intervalles temporels de longueur 1.

Soit alors $t \in (0,1]$; soient x et γ une extrémale telle que

$$u(t,x) = u_0(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma, \dot\gamma)\ ds.$$

Soit $h \in \mathbf{T}^N$; on peut toujours faire en sorte que $x+h \in \mathbf{T}^N$. Soit $\tilde\gamma(s) = \gamma(s) + \frac{s}{t}h$; nous avons $\tilde\gamma(0) = \gamma(0)$ et $\tilde\gamma(t) = x+h$. De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^t (L(\tilde\gamma, \dot{\tilde\gamma} - L(\gamma,\dot\gamma))\ ds = &\ \textstyle\int_0^t L(\gamma + \frac{s}{t}h, \dot\gamma + \frac{1}{t}h)\ ds \\ \leq &\ \textstyle\int_0^t \frac{1}{t}\Big(sL_x(\gamma,\dot\gamma) + L_v(\gamma,\dot\gamma).h\Big)\ ds + C_t|h|^2 \\ = &\ L_v(\gamma(t),\dot\gamma(t)).h + C_t|h|^2 \end{aligned}$$

la dernière égalité venant de l'équation d'Euler-Lagrange (18). Il suffit maintenant d'écrire, au vu de la formule (19) pour $\mathcal{T}(t)u_0$:

$$u(t,x+h) = u(t,\tilde\gamma(t)) \leq u(\gamma(0)) + \int_0^t L(\tilde\gamma,\dot{\tilde\gamma})\ ds = u(t,x) + \int_0^t (L(\tilde\gamma,\dot{\tilde\gamma}) - L(\gamma,\dot\gamma))\ ds.$$

Nous obtenons

$$u(t,x+h) - u(t,x) \leq L_v(\gamma(t),\dot\gamma(t)).h + K|h|^2, \tag{20}$$

ce qui prouve la régularité Lipschitz en espace, les quantités γ et $\dot\gamma$ étant bornées.

Pour montrer la régularité Lipschitz en temps, nous examinons une petite variation de t, notée $t+\tau$ avec $t+\tau > 0$. Perturbant l'extrémale γ en $\tilde\gamma(s) = \gamma(\frac{t}{t+\tau}s)$, nous avons toujours $\tilde\gamma(0) = \gamma(0)$, $\tilde\gamma(t+\tau) = \gamma(t) = x$. Le même calcul que plus haut donne $u(t+\tau,x) - u(t,x) \leq C_t|\tau|$, d'où le résultat. □

Remarque 2.4. — (i) La fonction $u(t,x) = \mathcal{T}(t)u_0(x)$ est, de par la propriété **2** de la section 1, presque partout différentiable.

(ii) Soient $t > 0$ et γ une extrémale telle que u soit différentiable en $x := \gamma(t)$. Nous avons alors $Du(t,x) = Du(t,\gamma(t)) = L_v(x,\dot\gamma(t))$. L'équation de Hamilton-Jacobi donne alors $u_t(t,\gamma(t)) = -H(x, Du(t,x)) = -H(\gamma(t), Du(t,\gamma(t)))$.

La régularisation instantanée est un phénomène remarqué depuis longtemps, en particulier par Lions [**18**]. Toutefois, la preuve donnée ici, inspirée de Fathi [**15**], est fondée sur un calcul contenant des idées cruciales pour la suite.

3. SEMI-CONCAVITÉ ET RÉGULARITÉ $C^{1,1}$

Poursuivant l'étude des propriétés qualitatives des solutions de (2), nous cherchons une régularité supplémentaire. Une notion utile est celle de semi-concavité et de semi-convexité : si une fonction est semi-concave et semi-convexe, elle est de classe $C^{1,1}$. Ce résultat est bien connu en analyse convexe et en contrôle optimal ; voir [**8**] et les références bibliographiques attenantes. L'exploitation qu'en fait Fathi, et l'idée d'introduire le semi-groupe conjugué est toutefois totalement originale. Cette section est inspirée de [**15**] et de discussions avec P. Bernard.

DÉFINITION 3.1. — *Si B est une boule ouverte de $\mathbb{R}^N$, F un fermé de B et K une constante strictement positive, nous dirons que $u \in C(B)$ est K-semi-concave sur F si et seulement si : pour tout $x \in F$, il existe $l_x \in \mathbb{R}^N$ tel que : pour tout $h \in \mathbb{R}^N$ tel que $x+h \in B$, on ait :*

$$u(x+h) \leq u(x) + l_x.h + K|h|^2. \tag{21}$$

La fonction u sera dite K-semi-convexe sur F si $-u$ est K-semi-concave sur F.

Le théorème suivant conditionne toute la suite. Si u est continue sur une boule ouverte B de $\mathbb{R}^N$, et si F est un fermé de B, disons que $u \in C^{1,1}(F)$ si u est différentiable en tout point de F et Du est lipschitzienne sur F.

THÉORÈME 3.2. — *Soient B une boule ouverte de $\mathbb{R}^N$ et F un fermé de B. Supposons que $u \in C(B)$ soit K-semi-concave et semi-convexe sur F. Alors $u \in C^{1,1}(F)$.*

Démonstration. — Il existe, pour tout $x \in F$, deux vecteurs l_x et m_x tels que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^N, \quad \begin{array}{rl} u(x+h) \leq & u(x) + l_x.h + K|h|^2 \\ u(x+h) \geq & u(x) + m_x.h - K|h|^2 \end{array}$$

ce qui donne, par soustraction : $(l_x - m_x).h \leq 2K|h|^2$, ce qui implique en retour que $l_x = m_x$ et que, donc, u est différentiable en x.

Considérons alors $(x,y,h) \in F \times F \times \mathbb{R}^N$; les inégalités de semi-concavité et de semi-convexité deviennent, écrites respectivement entre $x+h$ et x, x et y, $x+h$ et y :

$$\begin{array}{rl} |u(x+h) - u(x) - Du(x).h| \leq & K|h|^2 \\ |u(x) - u(y) - Du(y).(x-y)| \leq & K|x-y|^2 \\ |u(y) - u(x+h) + Du(y).(x+h-y)| \leq & K|x+h-y|^2 . \end{array}$$

Nous obtenons

$$|(Du(x) - Du(y)).h| \leq 3K(|h|^2 + |x-y|^2) . \tag{22}$$

Prenons $h = |x-y|\frac{Du(x)-Du(y)}{|Du(x)-Du(y)|}$; (22) devient $|(Du(x) - Du(y))| \leq 3K|x-y|$, ce qui est l'inégalité cherchée. □

Revenons à notre solution $u(t,x) = \mathcal{T}(t)u_0$ de (2)-(3). Soient $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbf{T}^N$ et γ une extrémale telle que

$$u(t, x = \gamma(t)) = u_0(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma, \dot\gamma)\, ds.$$

D'autre part nous avons, pour tout $s \in (0,t)$:

$$u(s,\gamma(s)) \leq u_0(\gamma(0)) + \int_0^s L(\gamma,\dot{\gamma})\ d\sigma.$$

Nous avons alors, pour tout $(s,s') \in [0,t]^2$ avec $s \leq s'$ – combiner les deux formules précédentes :

$$u(s',\gamma(s')) = u(s,\gamma(s)) + \int_s^{s'} L(\gamma,\dot{\gamma})\ d\sigma. \tag{23}$$

DÉFINITION 3.3. — *On dit que la courbe $\gamma : [0,t] \to \mathbf{T}^N$ est calibrée par u.*

Définissons le semi-groupe conjugué du semi-groupe de Lax-Oleinik par :

$$\forall u_0 \in C(\mathbf{T}^N), \quad \tilde{\mathcal{T}}(t)u_0(x) = \sup_{y\in\mathbf{T}^N} (u_0(y) - h_t(x,y)). \tag{24}$$

La démonstration du lemme suivant est analogue à celle du théorème 2.3 :

LEMME 3.4. — *Si $u_0 \in C(\mathbf{T}^N)$ et $\sigma > 0$, il existe $K(\sigma) > 0$ telle que $\tilde{\mathcal{T}}(\sigma)u_0$ soit $K(\sigma)$-semi-convexe ; la constante $K(\sigma)$ explose quand $\sigma \to 0$.*

COROLLAIRE 3.5. — *Soit $u(t,x) = \mathcal{T}(t)u_0(x)$; soit $\gamma : [0,t] \to \mathbf{T}^N$ une extrémale calibrée par u. Soit Λ un intervalle compact de $(0,t)$; pour tout $s \in \Lambda$ définissons l'ensemble Γ_s par :*

$$\Gamma_s = \{\gamma(s),\ \gamma : \Lambda \to \mathbf{T}^N \text{ calibrée par } u\}. \tag{25}$$

Alors $u \in C^{1,1}\left(\bigcup_{s\in\Lambda}(\{s\}\times\Gamma_s)\right)$.

Preuve. — Nous sommes dans les hypothèses du théorème 2.3 ; il existe donc $K > 0$ dépendant de $\inf\Lambda$ tel que l'inégalité (20) soit vraie – il suffit juste de remplacer t par s. La fonction $u(s,.)$ est alors K-semi-concave sur Γ_s pour tout $s \in \Lambda$. La relation de calibration (23) implique, pour tout $(s,s') \in \Lambda^2$ avec $s < s'$:

$$u(s,\gamma(s)) = \sup_{y\in\mathbf{T}^N} (u(s',y) - h_{s'-s}(\gamma(s),y)) = \tilde{\mathcal{T}}(s'-s)u(s',.)(\gamma(s)).$$

Il existe donc, par le lemme 3.4, une constante $\tilde{K}$ dépendant de $\sup\Lambda - \inf\Lambda$ telle que $u(s,.)$ soit $\tilde{K}$-semi-convexe sur Γ_s. D'après le théorème 3.2, la fonction $u(s,.)$ est de classe $C^{1,1}$ sur Γ_s. La démonstration se conclut *via* la remarque 2.4. □

4. SOUS-SOLUTIONS CRITIQUES

Quittons dans cette partie le problème de Cauchy (2)-(3) pour nous intéresser aux solutions de (4), qui est donc l'équation sur laquelle nous voulons nous concentrer juqu'à la fin de l'exposé. Notons immédiatement qu'on peut supposer, sans perte de généralité, que $c = 0$; il suffit pour cela de changer le hamiltonien. Nous étudions donc l'équation

$$H(x, Du) = 0, \quad x \in \mathbf{T}^N, \tag{26}$$

et nous supposons donc, dans toute cette section, que (26) **a des solutions.**

Une solution u de (26) est solution du problème de Cauchy (2) avec donnée initiale elle-même ; donc $u(x) = \mathcal{T}(t)u(x)$ pour tout $t \geq 0$. Ceci implique que u est semi-convexe ; de plus, si Λ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et, pour $s \in \Lambda$, Γ_s donné par (25), alors u est de classe $C^{1,1}$ sur $\bigcup_{s\in\Lambda} \Gamma_s$.

Le critère suivant sera utile pour savoir si une fonction donnée est sous-solution ou solution de (26).

Proposition 4.1. — (i) *Une fonction $u \in C(\mathbf{T}^N)$ est sous-solution de* (26) *si et seulement si – rappelons que $h_t(y, x)$ est le minimum de l'action entre y et x, et est donnée par* (17) *:*

$$\forall (x, y) \in \mathbf{T}^N \times \mathbf{T}^N, \quad u(x) - u(y) \leq h_t(y, x). \tag{27}$$

(ii) *Une sous-solution de* (26) *en est une solution sur un ouvert U de $\mathbf{T}^N$ si et seulement si : pour tout $x \in U$, il existe $t_x > 0$ et une extrémale $\gamma : [0, t_x] \to \mathbf{T}^N$ calibrée par u, telle que $\gamma(t_x) = x$.*

(iii) *Pour toute solution u de* (26), *pour tout $x \in \mathbf{T}^N$, il existe une extrémale $\gamma : (-\infty, 0] \to \mathbf{T}^N$, telle que $\gamma(0) = x$ et telle que :*

$$\forall t > 0, \quad \phi(x) - \phi(\gamma(-t)) = \int_{-t}^{0} L(\gamma, \dot\gamma)\, ds.$$

Les points (i) et (ii) se déduisent aisément du théorème 2.2. Pour le point (iii), il suffit de considérer, pour tout $T > 0$, une extrémale $\gamma_T : [-T, 0] \to \mathbf{T}^N$ calibrant u et telle que $\gamma_T(0) = x$. La famille $(\gamma_T)_T$ est relativement compacte dans la topologie C^1_{loc} – proposition 2.1 ; il suffit d'en extraire une suite convergeant dans $C^1_{loc}(\mathbb{R}_-)$.

Définition 4.2. — *Une sous-solution de* (26) *est appelée sous-solution critique. Une sous-solution critique u est dite stricte au point $x \in \mathbf{T}^N$ s'il existe U_x voisinage ouvert de x et $c_x < 0$ tel que u vérifie $H(x, Du) \leq c_x$ dans U, au sens de viscosité. Une sous-solution critique est dite stricte sur un ouvert U de $\mathbf{T}^N$ si elle est stricte en chaque point de U.*

Cette section comprend trois parties. Dans la première, nous introduisons les acteurs : le potentiel de Mañé et la barrière de Peierls ; nous donnons leurs premières propriétés. Dans la deuxième partie, nous introduisons l'ensemble d'Aubry ; puis nous énonçons le théorème d'existence et expliquons pourquoi il s'agit d'un résultat non trivial. La troisième partie est consacrée à sa démonstration.

4.1. Mañé, Peierls

Considérons successivement les deux quantités suivantes :

$$\phi(x,y) = \inf_{t>0} h_t(x,y), \qquad h(x,y) = \liminf_{t\to+\infty} h_t(x,y). \tag{28}$$

La fonction ϕ est connue sous le nom de *Potentiel de Mañé*, la fonction h sous le nom de *Barrière de Peierls.* Notons tout de suite que ce sont deux quantités finies : l'action entre x et y est en effet trivialement bornée supérieurement par une fonction localement bornée de $x-y$; de plus, si u est une solution de (26), l'inégalité (27) donne une borne inférieure uniforme pour $h_t(x,y)$. Une conséquence de cette remarque est le jeu d'inégalités

$$\forall (t,x,y,z) \in \mathbb{R}\times(\mathbf{T}^N)^3, \quad \begin{array}{rl} \phi(x,z)-\phi(x,y) \leq & h_t(y,z) \\ h(x,z)-h(x,y) \leq & h_t(y,z) \end{array} \tag{29}$$

ce qui entraîne que les fonctions $\phi_x : \ y\in\mathbf{T}^N \mapsto \phi(x,y)$ et $h_x(y) : \ y\in\mathbf{T}^N \mapsto h(x,y)$ sont des sous-solutions lipschitziennes de (26). En fait, on a bien plus :

PROPOSITION 4.3. — *Pour tout $x\in\mathbf{T}^N$, la fonction h_x est solution de* (26) *sur $\mathbf{T}^N$. La fonction ϕ_x est solution de* (26) *sur $\mathbf{T}^N\backslash\{x\}$.*

Preuve. — Dans les deux cas, on utilise la proposition 4.1. Pour obtenir la propriété sur h_x, considérons $y\in\mathbf{T}^N$ et une suite $(t_n)_n$ tendant vers $+\infty$ telle que $h_{t_n}(x,y)$ tende vers $h(x,y)=h_x(y))$. Soit une suite d'extrémales $(\gamma_n)_n$ réalisant le minimum de l'action entre x et y telles que $\gamma_n(t_n)=y$; soit finalement $t>0$. Notant $\tilde\gamma_n(s) = \gamma_n(t_n+s)$, nous avons

$$h_{t_n}(x,y) = \int_{-t_n}^{0} L(\tilde\gamma_n, \dot{\tilde\gamma}_n)\, ds, \quad h_{t_n}(x,\tilde\gamma_n(-t)) \leq \int_{-t_n}^{-t} L(\tilde\gamma_n, \dot{\tilde\gamma}_n)\, ds\,.$$

Utilisant (i) la relative compacité de la suite $(\tilde\gamma_n)_n$ dans la topologie C^1_{loc} et (ii) le fait que h est une limite inférieure, nous obtenons, en soustrayant les deux (in)égalités précédentes membre à membre : $h(x,y)\geq h(x,\gamma(-t)) + h_t(\gamma(-t),y)$, où γ est la limite locale uniforme de la suite $(\tilde\gamma_n)_n$. Comme h_x est sous-solution critique, on obtient $h_x(y) = h_x(\gamma(-t)) + h_t(\gamma(-t),y)$.

Pour montrer la propriété sur ϕ, considérons là encore $y\in\mathbf{T}^N$; il suffit de supposer que l'inf dans la formule (28) est atteint à un instant t_0 fini : sinon, $\phi_x(y) = h_x(y)$; la fonction ϕ_0 est donc une limite inférieure et la proposition 4.1 s'applique. Nous avons alors $\phi_x(y) < h_x(y)$; puisque ϕ_x et h_x sont lipschitziennes, cette inégalité reste vraie pour tout z assez proche de y. Considérons un tel z ; il existe alors t_1 tel que $\phi_x(z) = h_{t_1}(x,z)$ et nous avons :

$$\phi_x(y) - \phi_x(z) = \int_0^{t_0} L(\gamma_0, \dot\gamma_0)\ ds + \int_{-t_1}^{0} L(\gamma_1, \dot\gamma_1)\ ds,$$

où γ_0 et γ_1 sont les extrémales correspondantes. Ces deux extrémales ont un point commun : x ; il suffit de les coller en ce point et de les reparamétrer pour obtenir $\phi_x(y) - \phi_x(z) = h_{t_0+t_1}(y,z)$. □

Terminons cette rapide présentation des quantités ϕ et h par les formules suivantes, qui sont là encore des conséquences simples de (28), (29), et de la relation (27) pour l'une quelconque des solutions de l'équation stationnaire (26) :

$$(30)\qquad \forall (x,y) \in \mathbf{T}^N \times \mathbf{T}^N, \qquad h(x,y) + h(y,x) \geq 0,\ \ h(x,x) \geq 0,\ \ \phi(x,x) = 0.$$

Nous voyons en particulier que, grâce aux inégalités (29) et (30), la symétrisée de h peut s'interpréter comme une semi-distance sur $\mathbf{T}^N$.

4.2. Le théorème de Fathi et Siconolfi

Définissons l'*ensemble d'Aubry* par

$$(31)\qquad \mathcal{A} = \{x \in \mathbf{T}^N :\ h(x,x) = 0\}.$$

Remarquons que $\mathcal{A}$ est fermé car h est lipschitzienne. Le résultat principal de Fathi et Siconolfi sur les sous-solutions critiques régulières [**16**] peut s'énoncer ainsi.

THÉORÈME 4.4. — *Il existe une sous-solution critique ϕ de* (26), *de classe C^1 sur $\mathbf{T}^N$, qui est stricte sur $\mathbf{T}^N \backslash \mathcal{A}$. De plus, ϕ est de classe $C^{1,1}$ sur $\mathcal{A}$.*

À titre d'exemple, voyons ce qui se passe pour le hamiltonien $H(x,p) = |p|^2 - f(x)$, où f est positive avec un ensemble d'annulation non vide. Il est alors bien connu que (26) admet des solutions – et donc $c = 0$. Le lagrangien est $L(x,v) = \frac{|v|^2}{4} + f(x)$, et nous avons

$$h(x,y) = \liminf_{t \to +\infty} \inf_{\gamma} \int_0^t \Big(\frac{|\dot\gamma|^2}{4} + f(\gamma)\Big)\ ds.$$

Nous voyons immédiatement que $h(x,x) = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$: en effet, toutes les quantités dans l'intégrale sont positives. D'autre part, de par la proposition 2.1, la vitesse d'une extrémale est bornée ; donc $h(x,x) > 0$ dès que $f(x) > 0$. Nous voyons d'autre part qu'une famille de sous-solutions critiques régulières est donnée par les constantes.

Dans le cas général, la situation est bien moins évidente. Il existe toutefois une classe de sous-solutions régulières aisément accessibles ; ce sont celles de l'équation

$H(x, Du) = c$ avec $c > 0$. En effet, si ρ_ε est une approximation de l'identité, nous avons

$$\begin{aligned} H(x, \rho_\varepsilon * u) &= H(x, \int_{\mathbf{T}^N} \rho_\varepsilon(y) Du(x-y)\, dy) \\ &\leq \int_{\mathbf{T}^N} \rho_\varepsilon(y) H(x, Du(x-y))\, dy \qquad \text{(par Jensen)} \\ &\leq O(\varepsilon) + \int_{\mathbf{T}^N} \rho_\varepsilon(x-y) H(x-y, Du(x-y))\, dy = O(\varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Cet argument ne permet toutefois pas d'arriver au niveau $c = 0$; toutefois il réapparaîtra dans le cours de la démonstration.

4.3. Éléments de preuve du théorème 4.4

L'idée de la démonstration est de choisir comme sous-solution critique une combinaison linéaire convexe infinie de sous-solutions de la forme

$$\phi = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\phi_{x_n}}{2^{n+1}},$$

les points de base x_n étant choisis en dehors de $\mathcal{A}$. Ceci définit une sous-solution stricte, qui est de classe $C^{1,1}$ sur $\mathcal{A}$. Une régularisation de ϕ en dehors de $\mathcal{A}$ assure que ϕ est globalement C^1. Il s'agit d'un processus non trivial, mais qui ne demande pas plus d'outils que ceux déjà introduits. Nous donnons ci-après un compte rendu (presque) complet de la démonstration, renvoyant le lecteur à [**16**] pour des démonstrations plus détaillées. De nombreux compléments, non abordés ici, sont également disponibles dans [**16**].

Étape 1 : comportement des ϕ_x sur $\mathcal{A}$. Si u est une sous-solution critique, définissons $\mathcal{I}(u)$ l'ensemble des points de $\mathbf{T}^N$ par lesquels passe une extrémale $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbf{T}^N$ calibrée par u. Le résultat principal de cette étape est le

LEMME 4.5. — *Soit $y \in \mathcal{A}$. Il existe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbf{T}^N$ telle que $\gamma(0) = y$, qui est calibrée par toute sous-solution critique.*

Preuve. — Construisons d'abord l'extrémale en question, à l'aide de la fonction h. Nous allons construire $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbf{T}^N$, telle que $\gamma(0) = x$ et

$$\forall t > 0, \qquad h(\gamma(t), x) = -\int_0^t L(\gamma, \dot\gamma)\, ds, \quad h(x, \gamma(-t)) = -\int_{-t}^0 L(\gamma, \dot\gamma)\, ds. \tag{32}$$

Partons, pour ce faire, d'une suite d'extrémales $(\gamma_n)_n$, avec $\gamma_n : [0, t_n] \to \mathbf{T}^N$ et $\gamma_n(0) = \gamma_n(t_n) = x$, telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{t_n} L(\gamma_n, \dot\gamma_n)\, ds = 0. \tag{33}$$

Nous pouvons supposer que la suite $(\gamma_n)_n$ converge, ainsi que ses dérivées, localement uniformément. Soit γ cette limite locale uniforme ; soit $d_n = |\gamma(t) - \gamma_n(t)|$. Soit $\mu_n : [0, d_n] \to \mathbf{T}^N$ une extrémale de l'action entre $\gamma(t)$ et $\gamma_n(t_n)$; le raccord de μ_n et γ_n, convenablement reparamétrées, donne une courbe lipschitzienne notée $\tilde{\gamma} : [t - d_n, t_n] \to \mathbf{T}^N$. Nous avons

$$\int_{t-d_n}^{t_n} L(\tilde{\gamma}, \dot{\tilde{\gamma}})\, ds \leq Cd_n + \int_t^{t_n} L(\gamma_n, \dot{\gamma}_n)\, ds = Cd_n + \int_0^{t_n} L(\gamma_n, \dot{\gamma}_n) - \int_0^t L(\gamma_n, \dot{\gamma}_n)\, ds.$$

Il en résulte, par minimisation du membre de gauche sur tous les chemins allant de $\gamma(t)$ à x :

$$h_{t_n - t + d_n}(\gamma(t), x) \leq Cd_n + \int_0^{t_n} L(\gamma_n, \dot{\gamma}_n) - \int_0^t L(\gamma_n, \dot{\gamma}_n)\, ds.$$

Ceci, grâce à (33) et à la définition de h comme limite inférieure, implique la première partie de (32). La deuxième partie s'obtient de manière analogue.

Soit maintenant u une sous-solution critique ; nous avons, pour l'extrémale γ construite et $x \in \mathcal{A}$: $u(\gamma(t)) - u(x) \leq \int_0^t L(\gamma, \dot{\gamma})\, ds$ par définition. Mais nous avons aussi, pour tout s : $u(x) - u(\gamma(t)) \leq h_s(\gamma(t), x)$, soit, en passant à la limite inférieure : $u(x) - u(\gamma(t)) \leq h(\gamma(t), x)$. La première partie de (32) dit que cette dernière quantité vaut $-\int_0^t L(\gamma, \dot{\gamma})\, ds$, et donc nous avons

$$u(\gamma(t)) - u(x) = \int_0^t L(\gamma, \dot{\gamma})\, ds.$$

La courbe γ est donc calibrée par u sur $[0, +\infty)$, et un raisonnement analogue implique la calibration sur $(-\infty, 0]$. $\square$

Une conséquence importante est que, pour tout $x \in \mathcal{T}^N$, ϕ_x est $C^{1,1}$ sur $\mathcal{A}$. De plus, la constante de Lipschitz de $D\phi_x$ sur $\mathcal{A}$ ne dépend que du hamiltonien, tout point de $\mathcal{A}$ appartenant à une extrémale calibrée par ϕ_x.

Étape 2 : construction d'une sous-solution stricte en dehors de $\mathcal{A}$. L'ingrédient clé est cette fois-ci le

LEMME 4.6. — *Si $x \in \mathbf{T}^N \backslash \mathcal{A}$, alors ϕ_x n'est pas solution de viscosité sur $\mathbf{T}^N$.*

Preuve. — Supposons que ϕ_x soit solution de (26) sur tout $\mathbf{T}^N$. Nous pouvons alors trouver une extrémale $\gamma : \mathbb{R}_- \to \mathbf{T}^N$ telle que $\gamma(0) = x$ et telle que, pour tout $t > 0$:

$$\phi_x(x) - \phi_x(\gamma(-t)) = \int_{-t}^0 L(\gamma, \dot{\gamma})\, ds = -\phi_x(\gamma(-t)). \tag{34}$$

Fixons $t > 0$. Soit $\varepsilon > 0$; la définition de ϕ_x implique l'existence de $t_\varepsilon > 0$ et d'une extrémale $\gamma_\varepsilon : [0, t_\varepsilon] \to \mathbf{T}^N$ telle que $\gamma_\varepsilon(0) = x$, $\gamma_\varepsilon(t_\varepsilon) = \gamma(-t)$, et telle que

$$\int_0^{t_\varepsilon} L(\gamma_\varepsilon, \dot\gamma_\varepsilon)\, ds \leq \phi_x(\gamma(t_\varepsilon)) + \varepsilon = \phi_x(\gamma(-t)) + \varepsilon.$$

Définissons alors la courbe (lipschitzienne) $\tilde\gamma_\varepsilon(s) = \gamma_\varepsilon(s)$ pour $s \leq t_\varepsilon$, et $\tilde\gamma_\varepsilon(s) = \gamma(s - t_\varepsilon)$ pour $t_\varepsilon \leq s \leq t + t_\varepsilon$. En combinant (31) à l'inégalité précédente, nous obtenons :

$$\int_0^{t+t_\varepsilon} L(\tilde\gamma, \dot{\tilde\gamma}_\varepsilon)\, ds \leq \varepsilon.$$

Il est alors loisible de passer à la limite inférieure $t \to +\infty$ pour obtenir $h(x, x) \leq \varepsilon$ soit, *in fine*, $x \in \mathcal{A}$. □

La combinaison des lemmes 4.6 et 4.5 donne que ϕ_x est une solution de viscosité sur $\mathbf{T}^N$ si et seulement si $x \in \mathcal{A}$.

La construction d'une sous-solution critique se déroule maintenant ainsi. Pour tout $x \in U := \mathbf{T}^N \backslash \mathcal{A}$, ϕ_x n'est pas une sur-solution de viscosité en x ; il existe donc un voisinage ouvert U_x de x, une fonction $\theta_x \in C^1(U_x)$ et un réel $c_x < 0$ tels que $\phi_x > \theta_x$ – on peut toujours modifier θ_x par une fonction parabolique – sur $U_x \backslash \{x\}$, $\phi_x(x) = \theta_x(x)$ et $H(y, D\theta_x) \leq c_x$ sur U_x. Il existe de plus $\varepsilon_x > 0$ et Ω_x voisinage ouvert de x inclus dans U_x tels que $\phi_x \geq \theta_x + \varepsilon_x$ dans Ω_x, $\phi_x = \theta_x + \varepsilon_x$ sur $\partial\Omega_x$. Notons alors

$$u_x(y) = \begin{cases} \theta_x(y) + \varepsilon_x & \text{si } y \in \Omega_x \\ \phi_x(y) & \text{si } y \notin \Omega_x\,. \end{cases}$$

La fonction u_x est encore sous-solution critique sur $\mathbf{T}^N$, comme maximum de sous-solutions, mais elle est maintenant stricte sur Ω_x. Extrayons de $U = \bigcup_{x \in U} \Omega_x$ un recouvrement dénombrable $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{x_n}$. De par la convexité de H, la fonction

$$\underline{\phi} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_{x_n}}{2^{n+1}} \tag{35}$$

est encore sous-solution critique. Elle est bien de classe $C^{1,1}$ sur $\mathcal{A}$, de par la convergence normale de la série des dérivées sur $\mathcal{A}$. On vérifie enfin qu'elle est stricte sur $\mathbf{T}^N \backslash \mathcal{A}$.

Étape 3 : Régularisation. Il s'agit ici de lisser la sous-solution $\underline{\phi}$ construite dans l'étape 2 sur $U := \mathbf{T}^N \backslash \mathcal{A}$, en gardant son caractère strict sur $\mathbf{T}^N \backslash \mathcal{A}$, et en conservant ses valeurs sur $\mathcal{A}$. Ce qui va servir ici est que $\underline{\phi}$ est lipschitzienne, ainsi que le calcul (32). La démonstration de [**16**] se place dans un cadre assez général ; voici comment les choses se passent dans le cas précis de l'équation (26). Soit $(B_n)_n$ un recouvrement de U par des boules ouvertes telles que $B_n \subset U$ pour tout n ; soit r_n le rayon de B_n. Soit $(\psi_n)_n$ une partition de l'unité relative à la famille $(B_n)_n$, c'est-à-dire que :

(i) la famille des supports des ψ_n est localement finie ; (ii) la somme des ψ_n vaut 1 dans Ω. Pour tout $n \in N$, soit $N(n)$ le cardinal de l'ensemble des indices k tels que $\mathrm{supp}\psi_n \cap \mathrm{supp}\psi_k$ soit non vide ; nous avons $N(n) < +\infty$; de plus, nous pouvons toujours choisir les ψ_n pour avoir $\|D\psi_n\|_\infty \leq \frac{2}{r_n}$.

Définissons alors la fonction ϕ par $\phi = \sum_{n\in\mathbb{N}} \psi_n \rho_{\varepsilon_n} * \underline{\phi}$ sur U, et $\phi = \underline{\phi}(x)$ sur $\mathcal{A}$, la fonction $\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^N}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$ étant l'approximation de l'identité classique. Rappelons l'existence de $c_n > 0$ tel que $H(x, D\phi) \leq -c_n$ sur B_n ; nous choisissons la suite $(\varepsilon_n)_n$ décroissante, et vérifiant

$$\varepsilon_n \leq \frac{10^{-10}}{|N(n)|} \min_{k\in N(n)} \min(c_k, r_k, d(\partial B_k, \mathcal{A})^2). \tag{36}$$

Notons d'abord que la fonction ϕ est de classe C^∞ sur U. Pour montrer qu'elle est sous-solution critique stricte sur U, rappelons que, puisque $\underline{\phi}$ est lipschitzienne, il existe $C > 0$ tel que $\|\rho_{\varepsilon_n} * \underline{\phi} - \underline{\phi}\|_\infty \leq C\varepsilon_n$ pour tout n. Soit $x \in U$ et soit n le plus petit indice k tel que $x \in B_k$; puisque $\sum_n D\psi_n(x) = 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
H(x, D\phi(x)) &= H\left(x, \sum_{k\in N(n)} \psi_k(x)\rho_{\varepsilon_k} * \underline{\phi}(x) + \sum_{k\in N(n)} D\psi_k(x)(\rho_{\varepsilon_k} * \underline{\phi} - \underline{\phi})(x)\right) \\
&\leq \sum_{k\in N(n)} \psi_k(x) H(x, \rho_{\varepsilon_k} * \underline{\phi}(x)) + C \sum_{k\in N(n)} \frac{\varepsilon_k}{r_k} \\
&\leq -c_n + \varepsilon_n + C \sum_{k\in N(n)} \frac{\varepsilon_k}{r_k}
\end{aligned}$$

la dernière inégalité venant du calcul (32). Nous avons donc $H(x, D\phi(x)) \leq -\frac{c_n}{2}$; ceci revient à dire, par (36), que ϕ est sous-solution stricte au voisinage de x.

Pour montrer que ϕ est de classe C^1 sur $\mathbf{T}^N$, il suffit de montrer que cette fonction et son gradient se raccordent bien à l'interface $\partial\mathcal{A}$; pour ce faire reprenons $x \in U$ et n le plus petit indice k tel que $x \in B_k$. Par un calcul analogue au précédent, nous avons

$$\begin{aligned}
|\phi(x) - \underline{\phi}(x)| &= \left| \sum_{k\in N(n)} \psi_k(x)(\rho_{\varepsilon_k} * \underline{\phi} - \underline{\phi})(x) \right| \\
&\leq C \sum_{k\in N(n)} \varepsilon_k \leq C \min_{k\in N(n)} d(\partial B_k, \mathcal{A})^2 \leq C d(x, \mathcal{A})^2
\end{aligned}$$

Ceci assure bien le raccord de ϕ et de ses dérivées.

5. APPLICATIONS ET COMPLÉMENTS

5.1. Ensembles d'unicité

Disons qu'un ensemble fermé B de $\mathbf{T}^N$ est un ensemble d'unicité si le problème de Dirichlet

$$H(x, Du) = 0, \quad x \in \mathbf{T}^N \backslash B, \quad u \text{ imposée sur } B. \tag{37}$$

admet *au plus* une solution. Compter les solutions d'une équation aux dérivée partielles étant un des problèmes de base de la théorie, on conçoit l'importance d'un tel renseignement. Le lemme suivant, tiré de Ishii [**17**], donne un critère pour qu'un ensemble B soit un ensemble d'unicité.

LEMME 5.1. — *Supposons l'existence d'un fermé B de $\mathbf{T}^N$ et d'une sous-solution C^1 stricte de* (37) *sur $\mathbf{T}^N \backslash B$. Alors B est un ensemble d'unicité forte pour l'équation stationnaire* (26), *i.e. : si $\underline{u}$ (resp. $\overline{u}$) est une sous-solution s.c.s (resp. une sur-solution s.c.i) de* (37), *avec $\underline{u} \leq \overline{u}$ sur B, alors $\underline{u} \leq \overline{u}$.*

On obtient donc un principe de comparaison encore plus fort qu'un résultat d'unicité. L'application du théorème 4.4 montre que l'ensemble $\mathcal{A}$ est un ensemble d'unicité forte pour (26).

Étudier plus en détail les propriétés qualitatives de $\mathcal{A}$ ainsi que la caractérisation des valeurs admissibles des solutions de (26) sur $\mathcal{A}$ est une question importante non encore complètement résolue. Ce dernier point est traité en détail dans Lions [**18**], pour le hamiltonien $(x, p) \mapsto |p|^2 - f(x)$.

5.2. Ensembles invariants

Commençons par rappeler que, si $x \in \mathcal{A}$, alors $x \in \mathcal{I}(\phi)$. Il vient le

THÉORÈME 5.2. — *Soient $x \in \mathcal{A}$ et $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbf{T}^N$ calibrée par ϕ, telle que $\gamma(0) = x$. Alors γ est tracée sur $\mathcal{A}$.*

Preuve. — Soit $t \in \mathbb{R}$; d'après le lemme 4.5, l'extrémale $\gamma_t : s \mapsto \gamma(t + s)$ est calibrée par toute sous-solution critique, donc en particulier par la sous-solution ϕ de Fathi-Siconolfi. Si $\gamma(t)$ était hors de $\mathcal{A}$, ϕ serait sous-solution stricte en ce point. □

Interprétons ce résultat. Énonçons d'abord une conséquence du théorème 4.4 :

THÉORÈME 5.3. — *Soit ϕ la sous-solution critique construite sur $\mathcal{A}$. Alors $Du = D\phi$ sur $\mathcal{A}$, pour toute sous-solution critique u de* (26).

Preuve. — Si $x \in \mathcal{A}$ est u est une solution critique, soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbf{T}^N$ une extrémale calibrée par toutes les sous-solutions critiques ; de par la remarque 2.4 nous avons $D\phi(\gamma(t)) = L_v(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = Du(\gamma(t))$. □

En se souvenant que $H_p = (L_v)^{-1}$ nous avons :

$$\dot\gamma(t) = H_p(\gamma(t), D\phi(\gamma(t))). \tag{38}$$

Comme $D\phi$ est lipschitzienne sur $\mathcal{A}$, l'équation différentielle (38) définit un flot sur $\mathcal{A}$, et $\mathcal{A}$ est invariant pour ce flot. Notant $P(t) = L_v(\gamma(t), \dot\gamma(t)) = D\phi(\gamma(t))$ nous avons, par l'équation d'Euler-Lagrange pour γ : $\dot P(t) = L_x(\gamma(t), \dot\gamma(t)) = -H_x(\gamma(t), P(t))$, la dernière égalité se déduisant de la dualité de Legendre. Il en résulte le

THÉORÈME 5.4. — *L'ensemble* $\{(x, D\phi(x)),\quad x \in \mathcal{A}\}$ *est un compact invariant pour le système hamiltonien*

$$\begin{cases} \dot X = & H_p(X, P) \\ \dot P = & -H_x(X, P)\,. \end{cases} \tag{39}$$

C'est ce type de propriété, hors de tout contexte perturbatif, qui est à l'origine du vocable « théorie KAM faible » pour les solutions de viscosité de Hamilton-Jacobi.

5.3. Régularité supplémentaire

On peut se demander si les sous-solutions construites ne bénéficient pas d'une meilleure régularité : rappelons que la solution de Fathi-Siconolfi est C^1 sur $\mathbf{T}^N$, $C^{1,1}$ sur $\mathcal{A}$ et C^∞ sur $\mathbf{T}^N \backslash \mathcal{A}$. Peut-on construire des sous-solutions C^∞ ?

Le mot de la fin de cet exposé revient à P. Bernard. Essentiellement : il existe des sous-solutions de classe $C^{1,1}$, et cette régularité est optimale en général. Voici un compte rendu un peu plus détaillé du premier point, traité dans [**4**]. Le théorème 4.4 y est redémontré de façon auto-contenue, avec une preuve directe l'existence de sous-solutions critiques $C^{1,1}$. L'idée de départ est que, si u est sous-solution critique, alors, pour tout $t > 0$ et pour tout $s > 0$ assez petit : $\mathcal{T}(s)\tilde{\mathcal{T}}(t)u$ est semi-convexe ; de plus c'est une sous-solution critique car les semi-groupes $(\mathcal{T}(t))_{t>0}$ et $(\tilde{\mathcal{T}}(t))_{t>0}$ conservent les sous-solutions. Comme $\mathcal{T}(s)\tilde{\mathcal{T}}(t)u$ est une fonction semi-concave, elle est $C^{1,1}$. La pierre angulaire de ce résultat est la régularisation suivante :

LEMME 5.5. — *Si* $v \in C(\mathbf{T}^N)$ *est semi-convexe, alors* $\mathcal{T}(s)v$ *est semi-convexe pour* $s > 0$ *assez petit.*

Preuve (esquisse). — Si v est semi-convexe, il existe un sous-ensemble F borné de $C^2(\mathbf{T}^N)$ tel que : d'une part, pour tout $x \in \mathbf{T}^N$ et tout élément p du sous-différentiel de v en x, nous pouvons trouver $f \in F$ tel que $Df(x) = p$; d'autre part, nous avons :

$$\forall x \in \mathbf{T}^N, \quad v(x) = \max_{f \in F} f(x).$$

Il existe alors s_0 assez petit tel que, pour tout $f \in F$ et pour tout $s \in [0, s_0]$, la quantité $\mathcal{T}(s)f$ soit de classe C^2 ; ce fait repose sur la résolution classique, locale en temps, du problème de Cauchy pour Hamilton-Jacobi. Quitte à restreindre s_0, nous avons alors :

$$\forall s \in [0, s_0], \quad \mathcal{T}(s)v(x) = \max_{f \in F} \mathcal{T}(s)f(x).$$

Cette propriété se démontre par observation de la formule de Lax-Oleinik et par utilisation de la remarque 2.4. □

Une fois construite une sous-solution critique $C^{1,1}$, Bernard considère l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbf{T}^N : \text{ (26) n'a pas de sous-solution } C^1 \text{ stricte en } x.\}.$$

Le point non trivial à démontrer est que $\mathcal{A}$ est non vide ; ceci se fait par des considérations analogues à celles de l'étape 2 de la section 4.3. Il est par contre immédiat, une fois ce point acquis, de vérifier que toutes les sous-solutions critiques C^1 ont le même gradient sur $\mathcal{A}$: si u_1 et u_2 sont deux telles solutions, alors $\frac{u_1+u_2}{2}$ est sous-solution critique C^1 ; la stricte convexité de H implique qu'elle est stricte en x, contredisant le fait que $x \in \mathcal{A}$ si $Du_1(x) \neq Du_2(x)$.

Bernard introduit alors l'ensemble

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{(x, Du(x)), \quad x \in \mathcal{A}\},$$

où u est n'importe quelle sous-solution critique $C^{1,1}$. Il montre alors que $\tilde{\mathcal{A}}$ est invariant par le système hamiltonien (39), et retrouve une par une les propriétés de Fathi-Siconolfi, pour arriver au fait que $\mathcal{A}$ est bien donné par l'équation cartésienne (31).

La régularité $C^{1,1}$ est optimale, et la limitation est atteinte sur $\mathcal{A}$. Choisissons $N = 1$, et considérons le hamilonien suivant, tiré de [**4**] :

$$H_P(x,p) = \frac{1}{2}(p+P)^2 - \sin^2(\pi x).$$

On vérifie alors que

- si $P \in [-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}]$, on a $c = 0$ (on rappelle que c est l'unique valeur, donnée par le théorème de Lions-Papanicolaou-Varadhan, pour laquelle (4) a des solutions),
- si $P \neq \frac{2}{\pi}$, alors $\mathcal{A} = \{0\}$;
- si $P = \frac{2}{\pi}$, alors $\mathcal{A} = \mathbf{T}^1$.

De plus, pour $P = \frac{2}{\pi}$, il existe une seule – aux constantes près – solution critique, qui est une primitive de $x \mapsto \sin(\pi x) - \frac{2}{\pi}$. Cette solution n'est pas plus régulière que $C^{1,1}$.

Il est donc impossible d'obtenir de la régularité supplémentaire sans hypothèse additionnelle. Un résultat là encore dû à P. Bernard [**3**] affirme que, si $\mathcal{A}$ est réunion finie d'orbites périodiques de (39) vérifiant en plus une propriété d'hyperbolicité, alors il existe des sous-solutions aussi régulières que les données.

RÉFÉRENCES

[1] G. Barles – *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Mathématiques & Applications (Berlin), vol. 17, Springer, 1994.

[2] G. Barles & B. Perthame – Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **21** (1987), p. 557–579.

[3] P. Bernard – Smooth critical sub-solutions of the hamilton-jacobi equation, à paraître dans Math. Research Letters.

[4] ———, Existence of $C^{1,1}$ critical sub-solutions of the Hamilton-Jacobi equation on compact manifolds, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **40** (2007), p. 445–452.

[5] P. Bernard & B. Buffoni – Optimal mass transportation and Mather theory, à paraître dans J. European Math. Society.

[6] ———, The Monge problem for supercritical Mañé potentials on compact manifolds, *Adv. Math.* **207** (2006), p. 691–706.

[7] L. A. Caffarelli & X. Cabré – *Fully nonlinear elliptic equations*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 43, American Mathematical Society, 1995.

[8] P. Cannarsa & C. Sinestrari – *Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 58, Birkhäuser, 2004.

[9] M. G. Crandall, H. Ishii & P.-L. Lions – User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **27** (1992), p. 1–67.

[10] M. G. Crandall & P.-L. Lions – Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **277** (1983), p. 1–42.

[11] A. Fathi – Solutions KAM faibles conjuguées et barrières de Peierls, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **325** (1997), p. 649–652.

[12] ———, Théorème KAM faible et théorie de Mather sur les systèmes lagrangiens, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **324** (1997), p. 1043–1046.

[13] ———, Orbites hétéroclines et ensemble de Peierls, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **326** (1998), p. 1213–1216.

[14] ———, Sur la convergence du semi-groupe de Lax-Oleinik, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **327** (1998), p. 267–270.

[15] ———, *Weak KAM theory*, Cambridge University Press, à paraître.

[16] A. Fathi & A. Siconolfi – Existence of C^1 critical subsolutions of the Hamilton-Jacobi equation, *Invent. Math.* **155** (2004), p. 363–388.

[17] H. Ishii – A simple, direct proof of uniqueness for solutions of the Hamilton-Jacobi equations of eikonal type, *Proc. Amer. Math. Soc.* **100** (1987), p. 247–251.

[18] P.-L. Lions – *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Research Notes in Mathematics, vol. 69, Pitman (Advanced Publishing Program), 1982.

[19] P.-L. Lions, G. Papanicolaou & S. Varadhan – Homogenization of Hamilton-Jacobi equations, prépublication.

[20] J. N. Mather – Variational construction of connecting orbits, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **43** (1993), p. 1349–1386.

[21] R. T. Rockafellar – *Convex analysis*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, 1997, Reprint of the 1970 original, Princeton Paperbacks.

Jean-Michel ROQUEJOFFRE

Université Paul Sabatier et IUF
Institut de Mathématiques
(UMR CNRS 5219)
118 route de Narbonne
F–31062 Toulouse
E-mail : `roque@mip.ups-tlse.fr`