Astérisque

OLIVIER DEBARRE

Systèmes pluricanoniques sur les variétés de type général [d'après Hacon-McKernan, Takayama, Tsuji]

Astérisque, tome 317 (2008), Séminaire Bourbaki, exp. n^{o} 970, p. 119-140

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__317__119_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 2006
59e année, 2006-2007, n° 970, p. 119 à 140

SYSTÈMES PLURICANONIQUES SUR LES VARIÉTÉS DE TYPE GÉNÉRAL [d'après Hacon–McKernan, Takayama, Tsuji]

par **Olivier DEBARRE**

INTRODUCTION

Un des premiers objets intrinsèquement attachés à une variété [(1)] projective lisse X est son *fibré* (en droites) *canonique* ω_X, défini comme le déterminant de son fibré cotangent. Pour tout entier m, on note $P_m(X)$ (le m-ième *plurigenre*) la dimension de l'espace vectoriel des sections (holomorphes) globales du fibré en droites $\omega_X^{\otimes m}$ et on définit un invariant numérique de X, appelé sa *dimension de Kodaira,* en posant

$$\kappa(X) = \limsup_{m \to +\infty} \frac{\log P_m(X)}{\log m}.$$

Si n est la dimension de X, on a $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, \ldots, n\}$. On dit que X est *de type général* si $\kappa(X) = n$. Comme leur nom l'indique, les variétés de type général sont très répandues : une courbe projective lisse est de type général si et seulement si son genre est $\geqslant 2$; une hypersurface (lisse) de $\mathbf{P}^{n+1}$ définie par une équation homogène de degré d est de type général lorsque $d \geqslant n+3$ (sa dimension de Kodaira est 0 pour $d = n+2$ et $-\infty$ pour $d \leqslant n+1$).

Le choix d'une base de l'espace vectoriel des sections globales de $\omega_X^{\otimes m}$ permet de définir une application rationnelle

$$\varphi_{m,X} : X \dashrightarrow \mathbf{P}^{P_m(X)-1}$$

dont on sait montrer, si X est de type général, qu'elle est génériquement injective pour tout entier m assez grand. Le but de cet exposé est de montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 0.1 (Hacon–McKernan, Takayama, Tsuji). — *Pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe un entier m_n tel que l'application rationnelle $\varphi_{m,X}$ soit génériquement injective*

[(1)] Nous travaillons sur le corps des complexes et toutes nos variétés et sous-variétés sont irréductibles.

pour toute variété projective lisse de type général X de dimension n et tout entier $m \geqslant m_n$.

Comme Maehara le montre dans [**14**], cela entraîne la conjecture suivante de Severi–Iitaka.

Corollaire 0.2. — *Une variété X étant fixée, il n'y a qu'un nombre* fini *de classes d'équivalence birationnelle de variétés de type général qui sont images de X par une application rationnelle.*

Pour les courbes, on peut prendre $m_1 = 3$ (cela résulte du théorème de Riemann–Roch). Pour les surfaces, on peut prendre $m_2 = 5$ ([**3**]). Pour les variétés de dimension 3, on peut prendre $m_3 = 18(2^9 \cdot 3^7)!$ ([**21**]) et on a en tout état de cause $m_3 \geqslant 27$ ([**9**]).

En dimension 2, la démonstration s'appuie de façon essentielle sur l'existence d'un modèle minimal (c'est-à-dire pour lequel le fibré canonique est *nef*[(2)]) lisse. En dimension supérieure, le résultat était déjà connu (avec une constante m_n effective) pour les variétés de type général dont le fibré canonique est nef, grâce aux travaux de Demailly, Angehrn–Siu, Kollár et Tsuji sur la conjecture de Fujita (*cf.* cor. 3.2). Le Programme du Modèle Minimal de Mori prédit l'existence d'un modèle minimal pour toutes les variétés de type général, dont des démonstrations viennent d'ailleurs d'être proposées par Birkar, Cascini, Hacon et M^cKernan d'une part ([**2**]) et Siu d'autre part ([**17**]). Cependant, les singularités de ce modèle empêchent d'obtenir notre résultat à partir du cas nef.

Il existe deux démonstrations, publiées simultanément, du th. 0.1, toutes deux basées sur des idées de Tsuji ([**22**], [**23**]) : celle de Hacon et M^cKernan ([**8**]) et celle de Takayama ([**20**]). Aucune ne donne de valeur explicite pour m_n.

La stratégie de Tsuji est, brièvement, la suivante (la terminologie est définie dans le texte). Grâce au théorème d'annulation de Nadel (th. 2.1), il suffit, étant donnés deux points très généraux x_1 et x_2 de X, de produire un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif numériquement équivalent à un multiple positif du diviseur canonique K_X et dont le lieu non klt contient x_1 comme point isolé, et x_2. Il est facile de produire un diviseur dont le lieu non klt contient x_1 et x_2 ; on cherche ensuite à diminuer la dimension d'une composante V de ce lieu contenant x_1. Comme x_1 est très général, V est de type général et par récurrence sur la dimension, on peut trouver un diviseur convenable sur V.

Tout le problème est de relever ce diviseur à X. Lorsque K_X est nef, c'est simplement le théorème d'annulation de Serre (c'est la stratégie qui mène au th. 3.1), mais

(2) Cela signifie que son degré sur toute courbe est positif.

en général, on a besoin d'un énoncé d'extension de formes pluricanoniques de V à X. Lorsque V est un diviseur, de tels énoncés existaient déjà dans la littérature, tous plus ou moins issus de [**18**], et à la fois Hacon–M$^{\text{c}}$Kernan et Takayama démontrent d'abord un résultat de ce type (th. 6.1). Pour traiter le cas général, on éclate V dans X et on se ramène au cas précédent en comparant les formes pluricanoniques sur V aux formes pluricanoniques sur l'éclaté. Takayama utilise pour cela des résultats de Kawamata sur la positivité de certaines images directes, tandis que Hacon et M$^{\text{c}}$Kernan utilisent un résultat de Campana généralisant des résultats de positivité analogues de Viehweg. Cet exposé suit la preuve de Takayama, sauf à cet endroit où nous préférons utiliser le résultat de Campana. On obtient ainsi l'injectivité générique de $\varphi_{m,X}$ dès que m est plus grand qu'un entier qui dépend de n et du *volume* de K_X. Si ce volume est grand, on en déduit le théorème ; s'il est petit, X appartient à une famille limitée de variétés et l'existence de m_n est claire (c'est ici que l'on perd l'effectivité).

Je remercie pour leur aide à la préparation de cet exposé Arnaud Beauville, Laurent Bonavero, Frédéric Campana, Stéphane Druel, Gianluca Pacienza, Mihai Păun, Shigeharu Takayama et Eckart Viehweg, ainsi que tous les participants aux groupes de travail de Strasbourg et du Kleebach.

1. PRÉLIMINAIRES

1.1. Diviseurs grands et volume

Soit L un diviseur de Cartier sur une variété projective X de dimension n, c'est-à-dire une combinaison linéaire à coefficients entiers d'hypersurfaces de X qui peut être définie localement par une seule équation (on permettra parfois des coefficients rationnels, et on parlera alors de $\mathbf{Q}$-diviseur). On note $\mathscr{O}_X(L)$ le fibré en droites sur X associé à L, puis $H^0(X, L)$ l'espace vectoriel de ses sections globales et $h^0(X, L)$ sa dimension.

On désigne par $\equiv$ l'équivalence linéaire entre diviseurs de Cartier (qui signifie que les fibrés en droites associés sont isomorphes). Pour des $\mathbf{Q}$-diviseurs de Cartier D et D' sur X, on note $D \equiv_{\mathbf{Q}} D'$ s'il existe un entier $q \neq 0$ pour lequel les $\mathbf{Q}$-diviseurs qD et qD' sont entiers et linéairement équivalents, et $D \sim D'$ si D et D' sont numériquement équivalents, c'est-à-dire que leur degré sur toute courbe de X est le même.

On appelle *volume* de L le réel positif

$$\operatorname{vol}(L) = \limsup_{m \to +\infty} \frac{h^0(X, mL)}{m^n/n!}$$

(c'est en fait une limite). Pour tout entier positif q, on a $\operatorname{vol}(qL) = q^n \operatorname{vol}(L)$, ce qui permet de définir le volume d'un $\mathbf{Q}$-diviseur D en posant $\operatorname{vol}(D) = q^{-n} \operatorname{vol}(qD)$, où

q est un entier > 0 quelconque tel que qD soit un diviseur (entier). Le volume d'un $\mathbf{Q}$-diviseur est invariant par image inverse par un morphisme birationnel. Si D est *nef* (*cf.* note 2), on a $\mathrm{vol}(D) = D^n$ (théorème de Riemann–Roch), où D^n désigne le produit d'intersection $\overbrace{D \cdot \ \dots \ \cdot D}^{n \text{ fois}}$ [3]. Le volume d'un diviseur (entier) nef est donc un nombre entier, mais on sait construire des diviseurs de volume irrationnel.

On dit que D est *grand* (« big » en anglais) si $\mathrm{vol}(D) > 0$. Tout $\mathbf{Q}$-diviseur ample est grand (et nef), mais la notion est plus souple : l'image inverse d'un $\mathbf{Q}$-diviseur grand par un morphisme génériquement fini entre variétés projectives est encore un $\mathbf{Q}$-diviseur grand. Un $\mathbf{Q}$-diviseur est grand si et seulement si c'est la somme d'un $\mathbf{Q}$-diviseur ample et d'un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif (lemme de Kodaira). Si L est un diviseur grand, l'application rationnelle

$$\varphi_{|mL|} : X \dashrightarrow \mathbf{P}H^0(X, mL)^*$$

définie par les sections globales de $\mathscr{O}_X(mL)$ est génériquement injective pour tout entier $m \gg 0$.

Lorsque X est de plus *lisse*, on désigne par K_X tout diviseur sur X vérifiant $\omega_X = \mathscr{O}_X(K_X)$ (il est donc défini à équivalence linéaire près). Comme expliqué dans l'introduction, X est de type général si et seulement si K_X est grand, et l'application $\varphi_{m,X}$ de cette introduction est $\varphi_{|mK_X|}$. Plus généralement, une variété projective est de type général si une désingularisation l'est (elles le sont alors toutes).

Donnons à titre d'exemple un corollaire du th. 0.1 qui fait intervenir la notion de volume.

COROLLAIRE 1.1. — *Pour toute variété projective lisse de type général X de dimension n, on a* $\mathrm{vol}(K_X) \geqslant m_n^{-n}$.

PREUVE — Si $\mu : X' \to X$ est une désingularisation de l'éclatement de l'idéal du lieu de base [4] du système linéaire $|m_n K_X|$, on a une décomposition $\mu^*(m_n K_X) \equiv M + F$,

---

(3) D'un point de vue topologique, pour un diviseur *entier* L, c'est le cup-produit

$$\overbrace{c_1(\mathscr{O}_X(L)) \smile \cdots \smile c_1(\mathscr{O}_X(L))}^{n \text{ fois}} \in H^{2n}(X, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}.$$

(4) On appelle *lieu de base* d'un système linéaire $|T|$ sur une variété X l'intersection schématique

$$\mathrm{Base}(|T|) = \textstyle\bigcap_{L \in |T|} L.$$

On note $\mathfrak{b}(|T|) \subset \mathscr{O}_X$ le faisceau d'idéaux associé. Si $\mu : X' \to X$ est une désingularisation de l'éclatement de $\mathfrak{b}(|T|)$, on a une décomposition $\mu^*(|T|) = |M| + F$ en somme d'une partie sans point base (donc nef) $|M|$ et d'une partie fixe (effective) F. On a $\mathfrak{b}(|T|) = \mu_* \mathscr{O}_{X'}(-F)$ et la composée $\varphi_{|T|} \circ \mu$ est le *morphisme* $\varphi_{|M|}$.

avec M diviseur nef et grand et F diviseur effectif. On a alors $\varphi_{|m_n K_X|} \circ \mu = \varphi_{|M|}$ et

$$\begin{aligned}(1) \qquad \operatorname{vol}(K_X) &= \tfrac{1}{m_n^n} \operatorname{vol}(\mu^*(m_n K_X)) \geqslant \tfrac{1}{m_n^n} \operatorname{vol}(M) \\ &= \tfrac{1}{m_n^n} M^n = \tfrac{1}{m_n^n} \deg(\varphi_{|M|}) \deg\big(\varphi_{|M|}(X')\big) \geqslant \tfrac{1}{m_n^n}\,,\end{aligned}$$

d'où le corollaire. □

2. IDÉAUX MULTIPLICATEURS

2.1. Motivations

Soit X une variété projective lisse de dimension n. Lorsque L est un diviseur *ample*, on a (théorème de Kodaira)

$$\forall i > 0 \qquad H^i(X, K_X + L) = 0.$$

Il n'est pas très difficile de montrer que cela subsiste si L est nef et grand, mais on a encore mieux.

THÉORÈME 2.1 (Nadel). — *Soit X une variété projective lisse. Soit D un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif et soit L un diviseur sur X tels que $L - D$ soit nef et grand. Pour tout $i > 0$, on a*

$$H^i(X, \mathscr{I}_D(K_X + L)) = 0.$$

Dans cet énoncé, $\mathscr{I}_D$ est un faisceau d'idéaux sur X, appelé *idéal multiplicateur* de D, que l'on peut considérer ici comme un terme compensateur du défaut éventuel de positivité de L. Il est défini ainsi [5] : par le théorème d'Hironaka, il existe une variété projective lisse X' et une *log-résolution* $\mu : X' \to X$ de D, c'est-à-dire un morphisme birationnel dont le lieu exceptionnel [6] $\operatorname{Exc}(\mu)$ est tel que (le support de) $\operatorname{Exc}(\mu) + \mu^* D$ est un diviseur à croisements normaux simples. On pose $K_{X'/X} = K_{X'} - \mu^* K_X$ et [7]

$$\mathscr{I}_D = \mu_* \mathscr{O}_{X'}(K_{X'/X} - [\mu^* D]).$$

[5] Pour une définition analytique des idéaux multiplicateurs, voir [**6**].

[6] C'est-à-dire le complémentaire du plus grand ouvert de X' sur lequel μ est un isomorphisme.

[7] Bien que les diviseurs $K_{X'}$ et K_X ne soient pas bien définis, $K_{X'/X}$ l'est ; c'est un diviseur effectif combinaison linéaire de diviseurs μ-exceptionnels, c'est-à-dire dont l'image par μ est de codimension au moins 2. D'autre part, on note $[D]$ la partie entière d'un $\mathbf{Q}$-diviseur D, obtenue en prenant les parties entières de ses coefficients. De la même façon, on note $\{D\} = D - [D]$ sa partie fractionnaire.

On vérifie que $\mathscr{I}_D$ est bien un faisceau d'idéaux qui ne dépend pas des choix faits. Il est trivial hors du support de D et vérifie :

- si D est à coefficients entiers, $\mathscr{I}_D = \mathscr{O}_X(-D)$;
- si D est à croisements normaux simples, $\mathscr{I}_D = \mathscr{O}_X(-[D])$;

(2) • si D' est un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif, $\mathscr{I}_{D+\varepsilon D'} = \mathscr{I}_D$ pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit ;

(3) • si $\operatorname{mult}_x D \geqslant n$, on a $\mathscr{I}_{D,x} \neq \mathscr{O}_{X,x}$.

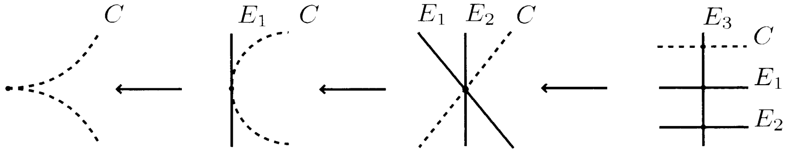
On dit que la paire (X, D) (ou simplement le $\mathbf{Q}$-diviseur D) est *klt*[8] en un point x si $\mathscr{I}_{D,x} = \mathscr{O}_{X,x}$. Le lieu des points de X où la paire (X, D) n'est pas klt sera noté $\operatorname{Nklt}(X, D)$; c'est le cosupport[9] de $\mathscr{I}_D$, muni de la structure réduite. On appellera *seuil en x* de la paire (X, D) le nombre[10]

$$\inf\{t \in \mathbf{Q}^+ \mid (X, \tfrac{1}{t}D) \text{ est klt en } x\}.$$

C'est un rationnel positif qui est < 1 si et seulement si la paire (X, D) est klt en x. La fonction seuil est semi-continue supérieurement : elle augmente par spécialisation. Le lieu non klt de la paire (X, D) est le fermé où son seuil est $\geqslant 1$.

Exemple 2.2. — Un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif à croisements normaux simples est klt si et seulement si ses coefficients sont tous < 1.

Exemple 2.3. — Soit C la courbe d'équation $y^2 = x^3$ dans $\mathbf{C}^2$. Les éclatements



fournissent une log-résolution $\mu : X' \to \mathbf{C}^2$ de la paire $(\mathbf{C}^2, C)$. On a

$$\begin{aligned} \mu^* C &= C + 2E_1 + 3E_2 + 6E_3 \\ K_{X'} &\equiv E_1 + 2E_2 + 4E_3 \end{aligned}$$

de sorte que

$$K_{X'} - [\mu^*(\tfrac{1}{t}C)] \equiv -[\tfrac{1}{t}]C + (1 - [\tfrac{2}{t}])E_1 + (2 - [\tfrac{3}{t}])E_2 + (4 - [\tfrac{6}{t}])E_3.$$

---

(8) Pour *Kawamata log-terminale* ; la terminologie est abominable, mais il semble hélas trop tard pour en changer.

(9) On appellera « cosupport » d'un faisceau d'idéaux $\mathscr{I}$ sur X le sous-schéma de X qu'il définit, c'est-à-dire le support de $\mathscr{O}_X/\mathscr{I}$.

(10) Attention : c'est l'inverse du « log-canonical threshold » tel qu'il est défini habituellement, comme par exemple dans [**13**], Definition 9.3.12.

L'idéal $\mathscr{I}_{\frac{1}{t}C}$ est trivial si et seulement si tous ces coefficients sont positifs, c'est-à-dire lorsque $t > \frac{6}{5}$. Le seuil de $(\mathbf{C}^2, C)$ en l'origine est $\frac{6}{5}$.

3. LE CAS AMPLE : LE THÉORÈME D'ANGEHRN ET SIU

Si A est un diviseur ample sur une variété projective lisse X de dimension n, Fujita a conjecturé en 1987 que $\varphi_{|K_X+mA|}$ est un morphisme injectif (et même un plongement) pour $m \geqslant n+2$. Cette conjecture est encore ouverte, mais beaucoup de progrès ont été réalisés. Un des meilleurs résultats connus est le suivant ([**1**]).

Théorème 3.1 (Angehrn–Siu). — *Soit A un diviseur ample sur une variété projective lisse X de dimension n. Pour tout entier $m \geqslant \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, l'application rationnelle $\varphi_{|K_X+mA|}$ est un morphisme injectif.*

Lorsque A n'est que nef et grand, et avec la même hypothèse sur m, une variante due à Kollár ([**12**], Theorem 5.9) entraîne que l'application rationnelle $\varphi_{|K_X+mA|}$ est génériquement injective [11]. La même remarque s'applique bien sûr au corollaire ci-dessous.

Corollaire 3.2. — *Soit X une variété projective lisse de dimension n dont le diviseur canonique K_X est* ample. *Pour tout entier $m \geqslant 1 + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, l'application rationnelle $\varphi_{|mK_X|}$ est un morphisme injectif.*

Preuve du théorème — Nous allons étudier l'application $\varphi_{|K_X+A|}$. Soient x_1 et x_2 des points distincts de X. Supposons construit un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif $D_0 \sim t_0 A$, avec $t_0 < 1$, qui n'est klt ni en x_1 ni en x_2. Comme $A - D_0$ est ample, le th. 2.1 entraîne

$$H^1(X, \mathscr{I}_{D_0}(K_X + A)) = 0$$

d'où une surjection

$$H^0(X, K_X + A) \twoheadrightarrow H^0(Z, (K_X + A)|_Z)$$

où Z est le sous-schéma de X défini par le faisceau d'idéaux $\mathscr{I}_{D_0}$ (il contient donc les points x_1 et x_2). *Si on arrive à faire en sorte que x_1 soit isolé dans Z*, il existe alors un élément de $H^0(Z, (K_X + A)|_Z)$ non nul en x_1 et nul partout ailleurs sur Z, qui se remonte en un élément de $H^0(X, K_X + A)$ non nul en x_1 et nul en x_2. Cela signifie que $\varphi_{|K_X+A|}$ est un morphisme et que

$$\varphi_{|K_X+A|}(x_1) \neq \varphi_{|K_X+A|}(x_2).$$

(11) Plus exactement, sa restriction à l'ouvert dense $X - \mathbf{B}_+(A)$, qui sera défini en (4), est un morphisme injectif.

La construction de D_0 se fait de la façon suivante : on exhibe tout d'abord un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif D non klt en x_1 et x_2 et de seuil 1 en, disons, x_1 et on procède par récurrence pour diminuer la dimension d de $\mathrm{Nklt}(X, D)$ en x_1 (en ajoutant à chaque pas à D des petits multiples de A) jusqu'à ce qu'elle soit nulle.

3.1. Premier pas : construction d'un diviseur très singulier en x_1 et x_2

C'est classique : avoir multiplicité au moins r en chacun des points (lisses !) x_1 et x_2 impose $2\binom{n+r-1}{n} \sim 2\frac{r^n}{n!}$ conditions sur les éléments d'un système linéaire. Posons $v_n = n\sqrt[n]{2/\operatorname{vol}(A)} + \varepsilon$ (avec $\varepsilon > 0$ petit) ; on a

$$h^0(X, [mv_n]A) \sim \operatorname{vol}(A)\frac{[mv_n]^n}{n!} > \frac{2m^n n^n}{n!}$$

pour $m \gg 0$. On peut donc trouver un diviseur $G \in |[mv_n]A|$ de multiplicité au moins mn en x_1 et en x_2. Le $\mathbf{Q}$-diviseur $\frac{1}{m}G$ a alors multiplicité au moins n en x_1 et en x_2, donc n'est klt ni en x_1, ni en x_2 par (3). En multipliant $\frac{1}{m}G$ par un rationnel de $]0, 1]$ convenable, on obtient un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif $D_{n-1} \sim t_{n-1}A$, avec $t_{n-1} \leqslant v_n$, qui est de seuil 1 en x_1 ou x_2. Cela initie la récurrence pour $d = n - 1$. On supposera pour simplifier que le seuil est 1 en x_1, mais > 1 en x_2 (12).

3.2. Deuxième pas : rendre le lieu non klt irréductible en x_1

Soit D un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif de seuil 1 en x_1 et > 1 en x_2. Soit V une composante irréductible de $\mathrm{Nklt}(X, D)$ passant par x_1 et soit B un élément général de $|mA|$ contenant V, pour un $m \gg 0$. Fixons un rationnel $\delta \in]0, 1[$.

Hors de V, le lieu non klt de $(1-\delta)D + bB$ coïncide avec celui de $(1-\delta)D$ pour tout rationnel $b \in [0, 1[$ (cela résulte du théorème de Bertini : B est lisse hors de V) donc évite un voisinage de x_1. En revanche, pour tout δ assez petit, le seuil reste > 1 en x_2 par (2).

En x_1, il existe un unique rationnel $b_\delta > 0$ pour lequel le seuil de $(1-\delta)D + b_\delta B$ est exactement 1, et $\liminf_{\delta \to 0} b_\delta = 0$.

Pour des δ arbitrairement petits, on a $b_\delta < 1$, le lieu $\mathrm{Nklt}(X, (1-\delta)D + b_\delta B)$ contient x_1, et toutes ses composantes passant par x_1 sont contenues dans V. Après une perturbation de D arbitrairement petite, on arrive donc, avec toujours un seuil > 1 en x_2, à un lieu non klt qui est

- soit de dimension $< d$ en x_1, auquel cas on a gagné (on évite même ainsi le troisième pas) ;
- soit égal à V, donc irréductible, au voisinage de x_1.

(12) La méthode est identique, mais la rédaction plus lourde, si le seuil est 1 en x_1 *et* en x_2.

3.3. Troisième pas : diminuer la dimension du lieu non klt

Supposons donc construits un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif $D_d \sim t_d A$ et une variété V de dimension d tels que V est la seule composante irréductible de $\operatorname{Nklt}(X, D_d)$ passant par x_1 (elle peut ou non contenir x_2). Comme dans le premier pas, on peut choisir, pour $v_d = d\sqrt[d]{2/\operatorname{vol}(A|_V)} + \varepsilon$ et $m \gg 0$, un diviseur $G_V \in |[mv_d]A|_V|$ tel que $\operatorname{mult}_{x_1} G_V \geqslant md$ [(13)]. Le théorème d'annulation de Serre permet de remonter G_V en un diviseur G de X.

Fixons un rationnel $\delta \in \,]0,1[$. De nouveau, pour $G \in |[mv_d]A|$ général relevant G_V, le $\mathbf{Q}$-diviseur $(1-\delta)D_d + uG$ est klt hors de V au voisinage de x_1 pour tout rationnel $u \in \,]0,1[$, mais est de seuil > 1 en x_2 pour tout δ assez petit.

Un calcul local montre que le $\mathbf{Q}$-diviseur $(1-\delta)D_d + \frac{1}{m}G$ n'est pas klt en x_1 pour tout δ assez petit. Posons

$$u_\delta = \inf\{u \in \mathbf{Q}^+ \mid (1-\delta)D_d + u\tfrac{1}{m}G \text{ n'est pas klt en } x_1\} \leqslant 1.$$

C'est un rationnel, et le $\mathbf{Q}$-diviseur effectif

$$D_{d-1} = (1-\delta)D_d + u_\delta \frac{1}{m} G \sim ((1-\delta)t_d + u_\delta \frac{[mv_d]}{m})A$$

est alors de seuil 1 en x_1 et > 1 en x_2 pour tout δ assez petit. *Au voisinage de* x_1, il est klt hors du support de G_V, donc son lieu non klt est non vide de dimension $< d$. En outre, on a bien $D_{d-1} \sim t_{d-1}A$, avec $t_{d-1} \leqslant t_d + v_d$.

Au bout du compte, on arrive à un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif $D_0 \sim t_0 A$ dont le lieu non klt contient x_1 comme point isolé et x_2, et

$$t_0 \leqslant \sum_{d=1}^{n} (v_d + \varepsilon) \leqslant \sum_{d=1}^{n} \Big(d\sqrt[d]{2/\operatorname{vol}(A|_{V_d})} + 2\varepsilon \Big)$$

où V_d est une sous-variété de X de dimension d. Dès que A est divisible par un entier m, comme $\operatorname{vol}(A|_{V_d}) = A^d \cdot V_d \geqslant m^d$, le membre de droite de cette inégalité est

$$\leqslant \sum_{d=1}^{n} \frac{d}{m} \Big(\sqrt[d]{2} + 2\varepsilon \Big) \leqslant \sum_{d=1}^{n} \frac{d}{m} \Big(\Big(1 + \frac{1}{d}\Big) + 2\varepsilon \Big)$$

qui est < 1 lorsque $m \geqslant \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Ceci termine la preuve du th. 3.1. □

(13) Cela ne marche en fait que si x_1 est lisse sur V. Dans le cas contraire, il faut faire cette construction pour une suite de points lisses de V convergeant vers x_1 et passer à la limite (voir [**13**], 10.4.C pour plus de détails).

4. UN THÉORÈME DU TYPE ANGEHRN ET SIU DANS LE CAS GRAND

Nous allons examiner comment modifier la démonstration précédente lorsque le diviseur A n'est plus que grand.

Le premier pas 3.1 ne nécessite aucun changement, mais $\mathrm{vol}(A)$ n'est plus nécessairement égal à A^n.

4.1. Lieux de base stable et augmenté

Pour le deuxième pas 3.2, nous avons utilisé le fait qu'un élément général de $|mA|$ contenant V, pour $m \gg 0$, est lisse hors de V (théorème de Bertini). En général, il faut aussi être hors du lieu de base (*cf.* note 4) de ce système linéaire. Il suffit donc de supposer que x_1 et x_2 sont hors du *lieu de base stable* de A, défini comme suit.

Soit L un diviseur de Cartier sur une variété X. Le *lieu de base stable* de L est

$$\mathbf{B}(L) = \bigcap_{m \in \mathbf{N}^*} \mathrm{Base}(|mL|) = \bigcap_{m \in \mathbf{N}^*} \bigcap_{M \in |mL|} M$$

muni de la structure réduite. On définit aussi le *lieu de base augmenté* de L par [14]

$$\mathbf{B}_+(L) = \mathbf{B}(mL - H) \supset \mathbf{B}(L) \tag{4}$$

où H est un diviseur ample sur X et m est un entier assez grand. Il est indépendant des choix de H et de m ([**13**], Lemma 10.3.1). Le diviseur L est ample si et seulement si $\mathbf{B}_+(L) = \varnothing$; il est grand si et seulement si $\mathbf{B}_+(L) \neq X$, auquel cas $X - \mathbf{B}_+(L)$ est le plus grand ouvert de X sur lequel L est ample.

4.2. Volumes restreints

Le problème pour le troisième pas 3.3 est de relever à X le diviseur G_V de grande multiplicité en le point x_1 de V.

À la suite de [**22**], puis [**20**] et [**7**], nous sommes amenés à poser les définitions suivantes. Si L est un diviseur de Cartier sur une variété projective X et si V est une sous-variété de X, on pose, en suivant les notations de [**7**],

$$H^0(X|V, L) = \mathrm{Im}\big(H^0(X, L) \longrightarrow H^0(V, L|_V)\big)$$

et l'on note $h^0(X|V, L)$ la dimension de cet espace. On appelle

$$\mathrm{vol}_{X|V}(L) = \limsup_{m \to +\infty} \frac{h^0(X|V, mL)}{m^d/d!},$$

où d est la dimension de V, le *volume de L restreint à V* (c'est en fait une limite et, lorsque $V = X$, c'est le volume « usuel » de L). Il est bien sûr inférieur à $\mathrm{vol}(L|_V)$.

(14) Il est noté X_L^c dans [**20**].

Avec ces définitions, la démonstration du troisième pas 3.3 fonctionne en remplaçant $\mathrm{vol}(A|_V)$ par $\mathrm{vol}_{X|V}(A)$: si on suppose

$$\sum_{d=1}^{n} d\sqrt[d]{2/\operatorname{vol}_{X|V_d}(A)} < 1\,,$$

on arrive comme dans le cas ample à un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif $D_0 \sim t_0 A$, avec $t_0 < 1$, dont le lieu non klt contient x_1 comme point isolé et x_2. Écrivons $A = A' + E$, avec A' et E respectivement ample et effectif, et x_1 et x_2 hors du support de E (*cf.* (4)). Le th. 2.1 entraîne $H^1(X, \mathscr{I}_{D_0+(1-t_0)E}(K_X + A)) = 0$ et on termine comme précédemment puisque les lieux non klt de D_0 et de $D_0 + (1 - t_0)E$ coïncident hors du support de E. On a ainsi montré le résultat suivant ([**20**], Proposition 5.3 ; *cf.* aussi [**7**], Theorem 2.20).

Théorème 4.1. — *Soit X une variété projective lisse de dimension n, soit A un diviseur grand sur X et soient x_1 et x_2 des points distincts de $X - \mathbf{B}_+(A)$. On suppose qu'il existe $c_1, \ldots, c_n > 0$ tels que, pour toute sous-variété V de X passant par x_1 ou x_2, on ait*

$$\operatorname{vol}_{X|V}(A) \geqslant 2c_d^d\,, \qquad \text{où} \quad d = \dim(V) > 0.$$

Si $\sum_{d=1}^{n} \frac{d}{c_d} < 1$, l'application rationnelle $\varphi_{|K_X+A|}$ est définie en x_1 et en x_2 et $\varphi_{|K_X+A|}(x_1) \neq \varphi_{|K_X+A|}(x_2)$.

Dans la pratique, tout le problème est d'arriver à estimer ces volumes restreints.

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 0.1

On a vu que le th. 0.1 en dimension n entraîne une minoration uniforme du volume d'un diviseur canonique d'une variété projective lisse de type général de dimension n (cor. 1.1). En suivant Tsuji, nous allons démontrer ce théorème par récurrence sur n, mais en prenant comme hypothèse seulement la conclusion de ce corollaire en dimension $< n$. Nous supposons donc qu'il existe une constante $v > 0$ telle que $\mathrm{vol}(K_V) \geqslant v$ pour toute variété projective de type général V de dimension $< n$, et montrons dans un premier temps que cela entraîne l'injectivité générique de $\varphi_{|mK_X|}$ pour toute variété projective de type général X de dimension n et tout entier m plus grand qu'une borne dépendant linéairement de v et de $\mathrm{vol}(K_X)^{-1/n}$.

Théorème 5.1. — *Soit n un entier > 0. Supposons qu'il existe une constante $v > 0$ telle que $\mathrm{vol}(K_V) \geqslant v$ pour toute variété projective de type général V de dimension $< n$.*

Il existe des constantes a_n et b_n telles que, pour toute variété projective lisse de type général X de dimension n, l'application rationnelle $\varphi_{|mK_X|}$ soit génériquement injective pour tout entier $m > a_n + b_n \operatorname{vol}(K_X)^{-1/n}$.

PREUVE — Soient x_1 et x_2 deux points très généraux de X. Nous suivons le schéma de la preuve des th. 3.1 et 4.1. Lors du premier pas, on construit un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif $D_{n-1} \sim t_{n-1}K_X$, avec $t_{n-1} \leqslant n2^{1/n} \operatorname{vol}(K_X)^{-1/n} + \varepsilon$. Aucun changement pour le second pas. Pour le troisième pas, nous avons un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif $D_d \sim t_d K_X$, de seuil 1 en x_1 et > 1 en x_2, dont le lieu non klt a une unique composante irréductible V, de dimension d, passant par x_1, et il nous faut une borne inférieure sur le volume restreint $\operatorname{vol}_{X|V}(K_X)$.

Comme x_1 est très général, V est de type général [15], et l'estimation voulue est fournie par le résultat suivant ([**20**], Theorem 4.5), qui est central dans la preuve de Takayama et qui fournit la minoration sur les volumes restreints requise pour appliquer la méthode de démonstration du th. 4.1 ; on remarquera (c'est crucial !) en examinant la preuve de ce théorème que cette minoration n'est nécessaire que pour les sous-variétés V du type de celles qui interviennent dans l'énoncé du théorème ci-dessous.

THÉORÈME 5.2 (Takayama). — *Soit X une variété projective lisse et soit V une sous-variété de X. Soit L un diviseur sur X et soit $L \sim A + E$ une décomposition où A est un $\mathbf{Q}$-diviseur ample et E est un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif tel que V soit une composante irréductible de* $\operatorname{Nklt}(X, E)$ *de seuil général* 1. *On a*

$$\operatorname{vol}_{X|V}(K_X + L) \geqslant \operatorname{vol}(K_V).$$

Nous remettons la démonstration de ce résultat au § 6 et montrons comment terminer la démonstration du th. 5.1.

Écrivons (lemme de Kodaira) $K_X \sim A + E$, où A et E sont des $\mathbf{Q}$-diviseurs respectivement ample et effectif, et posons $t = [t_d] + 1 - t_d > 0$. Comme x_1 et x_2 sont généraux, ils ne sont pas dans le support de E, de sorte que V est encore une composante irréductible de seuil général 1 de $\operatorname{Nklt}(X, D_d + tE)$. Le th. 5.2, appliqué au diviseur $L = ([t_d] + 1)K_X \sim tA + (D_d + tE)$, entraîne

$$([t_d] + 2)^d \operatorname{vol}_{X|V}(K_X) = \operatorname{vol}_{X|V}(K_X + ([t_d] + 1)K_X) \geqslant \operatorname{vol}(K_V) \geqslant v.$$

Pour diminuer la dimension de $\operatorname{Nklt}(X, D_d)$, on ajoute à D un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif équivalent à

$$\Big(d\sqrt[d]{2/\operatorname{vol}_{X|V}(K_X)} + \varepsilon\Big)K_X \leqslant \big(d(2/v)^{1/d}(t_d + 2) + \varepsilon\big)K_X$$

[15] Toute sous-variété de X qui passe par un point très général de X est de type général. En d'autres termes, la réunion des sous-variétés de X qui ne sont pas de type général est contenue dans une réunion dénombrable de sous-variétés propres de X.

pour obtenir un diviseur $D_{d-1} \sim t_{d-1}K_X$ avec

$$t_{d-1} \leqslant t_d + d(2/v)^{1/d}(t_d + 2) + \varepsilon.$$

On arrive au final à un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif $D_0 \sim t_0 K_X$ dont le lieu non klt contient x_1 comme point isolé et x_2, avec

$$t_0 < a_n + b'_n t_{n-1} \leqslant a_n + b'_n n 2^{1/n} \operatorname{vol}(K_X)^{-1/n}$$

où a_n et b'_n sont des constantes (que l'on pourrait calculer) ne dépendant que de n et de v. On conclut la démonstration du th. 5.1 en raisonnant comme au § 4.2. □

Il n'est maintenant pas difficile de conclure la preuve du th. 0.1. Soit X une variété projective lisse de type général de dimension n. Par le th. 5.1, le morphisme $\varphi_{|mK_X|}$ est birationnel sur son image pour $m \geqslant m_X = [1 + a_n + b_n \operatorname{vol}(K_X)^{-1/n}]$.

Si $\operatorname{vol}(K_X) \geqslant 1$, on a terminé.

Supposons donc $\operatorname{vol}(K_X) < 1$. La variété X est birationnellement isomorphe à une sous-variété d'un espace projectif (que l'on peut après projection supposer être $\mathbf{P}^{2n+1}$) qui, par (1), est de degré

$$\begin{aligned}
&\leqslant m_X^n \operatorname{vol}(K_X)\\
&\leqslant (1 + a_n + b_n \operatorname{vol}(K_X)^{-1/n})^n \operatorname{vol}(K_X)\\
&\leqslant ((1 + a_n) \operatorname{vol}(K_X)^{1/n} + b_n)^n\\
&\leqslant (1 + a_n + b_n)^n
\end{aligned}$$

nombre qui ne dépend que de n et de v. Ces variétés sont paramétrées par une variété algébrique (schéma de Chow). Il n'est pas très difficile d'en déduire, en utilisant la semi-continuité supérieure des plurigenres, que le volume de leur diviseur canonique est minoré par une constante strictement positive ([**20**], Lemma 6.1). On a donc démontré le th. 0.1. □

6. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.2

Cette démonstration est très technique. Nous allons essayer d'en présenter les étapes et les idées principales.

6.1. Cas où V est une hypersurface de X

Dans ce cas, l'hypothèse du th. 5.2 dit simplement que V apparaît avec multiplicité 1 dans E. Soit $\mu : X' \to X$ une log-résolution de E. On écrit $\mu^* E = V' + F$

où V' est le transformé strict (lisse) de V et F est un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif. Il s'agit de comparer d'un côté

$$h^0(X', m(K_{X'} + \mu^* L)) = h^0(X', m(K_{X'} + V' + \mu^* A + F))$$

et de l'autre $h^0(V', mK_{V'})$. Cela se fait à l'aide d'un théorème d'extension de sections d'un type initié par Siu en 1998 dans sa démonstration de l'invariance des plurigenres par déformation ([**18**], [**19**]) et qui a depuis eu une nombreuse descendance[16].

THÉORÈME 6.1 (Takayama). — *Soit X une variété complexe projective lisse et soit H une hypersurface irréductible lisse de X. Soit $L \sim A + E$ un diviseur sur X où A est un $\mathbf{Q}$-diviseur nef et grand tel que $H \not\subset \mathbf{B}_+(A)$ et E est un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif dont le support ne contient pas H et tel que la paire $(H, E|_H)$ soit klt. Alors la restriction*

$$H^0(X, m(K_X + H + L)) \longrightarrow H^0(H, m(K_H + L|_H))$$

est surjective pour tout entier $m \geqslant 0$.

Avant de démontrer ce théorème, montrons qu'il est suffisant pour notre propos. On travaille sur X', avec l'hypersurface $H = V'$, et on aimerait appliquer le th. 6.1 au diviseur $\mu^* L - V' \sim \mu^* A + F$; le $\mathbf{Q}$-diviseur $\mu^* A$ est bien nef et grand et $V' \not\subset \mathbf{B}_+(\mu^* A)$, mais la paire $(V', F|_{V'})$ n'a pas de raison d'être klt, puisqu'il faudrait pour cela que tous les coefficients de $F|_{V'}$ soient < 1 (ex. 2.2). Le théorème s'applique en revanche au diviseur $\mu^* L - V' - [F] \sim \mu^* A + \{F\}$ et entraîne la surjectivité de la restriction

$$H^0(X', m(K_{X'} + V' + \mu^* A + \{F\})) \twoheadrightarrow H^0(V', m(K_{V'} + (\mu^* A + \{F\})|_{V'})) \tag{5}$$

pour tout entier $m \geqslant 0$. Soit m_0 un entier > 0 tel $m_0(\mu^* A + \{F\})$ soit un diviseur (entier effectif). L'espace vectoriel de gauche dans (5) est contenu dans $H^0(X', m(K_{X'} + \mu^* L))$, tandis que, dès que m est divisible par m_0, l'espace vectoriel de droite dans (5) contient $H^0(V', mK_{V'})$. On a donc bien

$$h^0(V, mK_V) = h^0(V', mK_{V'}) \leqslant h^0(X', m(K_{X'} + \mu^* L)) = h^0(X, m(K_X + L))$$

pour tout entier positif m divisible par m_0, ce qui démontre le th. 5.2 dans le cas où V est de codimension 1.

PREUVE DU TH. 6.1 — Commençons par énoncer quelques résultats complémentaires sur les idéaux multiplicateurs.

[16] Le th. 6.1 est [**20**], Theorem 4.1. Des versions plus générales, avec des démonstrations analytiques, sont données dans [**15**], [**5**] et [**24**].

6.1.1. *Idéal multiplicateur d'un système linéaire.* — Si D est un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif et $|T|$ un système linéaire sur une variété lisse X, on définit un faisceau d'idéaux $\mathscr{I}_{D;|T|} \subset \mathscr{O}_X$ de la façon suivante : si $\mu : X' \to X$ est une modification telle que $\mu^*|T| = |M| + F$, où $|M|$ est sans point base et $\operatorname{Exc}(\mu) + F + \mu^*D$ est un diviseur à croisements normaux simples, on pose ([**13**], § 9.3.G)

$$\mathscr{I}_{D;|T|} = \mu_*\mathscr{O}_{X'}(K_{X'/X} - [\mu^*D] - F).$$

Notons que si la paire (X, D) est klt, le diviseur $K_{X'/X} - [\mu^*D]$ est effectif, donc $\mathscr{I}_{D;|T|}$ contient l'idéal $\mathfrak{b}(|T|) = \mu_*\mathscr{O}_{X'}(-F)$ définissant le lieu de base de $|T|$ [17].

6.1.2. *Restriction des idéaux multiplicateurs.* — On garde les hypothèses et les notations précédentes. Soit H une hypersurface lisse de X non contenue dans $\operatorname{Base}(|V|) \cup \operatorname{Supp}(D)$. L'idéal multiplicateur $\mathscr{I}_{D|_H;|V||_H}$ est contenu dans l'image $\mathscr{I}_{D;|V|}|_H$ de $\mathscr{I}_{D;|V|}$ dans $\mathscr{O}_H$ ([**13**], Theorem 9.5.5). Plus précisément, il existe un faisceau d'idéaux $\operatorname{adj}_{H,D;|V|} \subset \mathscr{I}_{D;|V|}$ dit *idéal adjoint* ([**13**], Definition 9.3.47) et une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_{D;|V|}(-H) \longrightarrow \operatorname{adj}_{H,D;|V|} \longrightarrow \mathscr{I}_{D|_H;|V||_H} \longrightarrow 0. \tag{6}$$

En particulier, si $|V|$ est vide, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_D(-H) \longrightarrow \operatorname{adj}_{H,D;\varnothing} \longrightarrow \mathscr{I}_{D|_H} \longrightarrow 0. \tag{7}$$

Passons maintenant à la preuve proprement dite du th. 6.1. On peut supposer A ample [18]. Notons n la dimension de X. On choisit un diviseur effectif très ample B sur X dont le support ne contient pas H. Soit ℓ un entier suffisamment grand pour que $A - \frac{m-1}{\ell m}nB$ soit ample et que la paire $(H, \frac{m-1}{\ell m}nB|_H + E|_H)$ soit klt (utiliser (2)).

Soit s un élément de $H^0(H, m(K_H + L|_H))$ et soit S son diviseur. Pour chaque entier $r > 0$, on pose $\mathscr{I}_r = \mathscr{I}_{\frac{r-1}{m}S + E|_H} \subset \mathscr{O}_H$. Comme la paire $(H, E|_H)$ est klt, on a

$$\mathscr{I}_{\ell m} \supset \mathscr{I}_{\ell m+1} = \mathscr{I}_{\ell S + E|_H} = \mathscr{I}_{E|_H}(-\ell S) = \mathscr{O}_H(-\ell S).$$

La section s^ℓ est donc nulle le long de $\mathscr{I}_{\ell m}$. Soit b un élément de $H^0(H, B|_H)$ de diviseur $B|_H$. Par le lemme 6.2 ci-dessous, le produit $s^\ell b^n$ se remonte en $t \in H^0(X, m\ell(K_X + H + L) + nB)$. Posons

$$N = (m-1)(K_X + H + L) + L \qquad \text{et} \qquad P = \frac{m-1}{\ell m}\operatorname{div}(t) + E.$$

---

[17] *Cf.* note 4. Le lien avec les idéaux multiplicateurs définis dans le § 2.1 est le suivant : on a $\mathscr{I}_D = \mathscr{I}_{D;\varnothing}$ et, si m est un entier > 1 et $D_1, \dots, D_m$ des diviseurs généraux dans $|T|$, on a $\mathscr{I}_{D;|M|} = \mathscr{I}_{D + \frac{1}{m}(D_1 + \cdots + D_m)}$ ([**13**], Proposition 9.2.26).

[18] Écrivons $A = A' + E'$, où A' et E' sont des $\mathbf{Q}$-diviseurs respectivement ample et effectif avec $\operatorname{Supp}(E') \not\supset H$, puis $L \sim (1-\varepsilon)A + \varepsilon A' + \varepsilon E' + E$. Pour $\varepsilon \in]0, 1]$, le $\mathbf{Q}$-diviseur $(1-\varepsilon)A + \varepsilon A'$ est ample, le $\mathbf{Q}$-diviseur $\varepsilon E' + E$ est effectif et son support ne contient pas H, et la paire $(H, \varepsilon E'|_H + E|_H)$ est klt pour $\varepsilon \ll 1$ par (2).

On a
$$N-P\sim L-\frac{m-1}{\ell m}nB-E\sim A-\frac{m-1}{\ell m}nB.$$
C'est donc un **Q**-diviseur ample sur X et le th. 2.1 entraîne $H^1(X,\mathscr{I}_P(K_X+N))=0$. Comme $K_X+N=m(K_X+H+L)-H$, la suite exacte (7) pour $D=P$, tensorisée par $\mathscr{O}_X(m(K_X+N+H))$, fournit une surjection

$$H^0(X,\operatorname{adj}_{H,P;\varnothing}(m(K_X+H+L)))\twoheadrightarrow H^0(H,\mathscr{I}_{P|_H}(m(K_X+H+L))).\tag{8}$$

On a d'autre part
$$P|_H=\frac{m-1}{\ell m}(\ell S+nB|_H)+E|_H\leqslant\frac{m-1}{\ell m}nB|_H+E|_H+S$$
de sorte que
$$\mathscr{I}_{P|_H}\supset\mathscr{I}_{\frac{m-1}{\ell m}nB|_H+E|_H+S}=\mathscr{I}_{\frac{m-1}{\ell m}nB|_H+E|_H}(-S)=\mathscr{O}_H(-S)$$
puisque la paire $(H,\frac{m-1}{\ell m}nB|_H+E|_H)$ est klt. La section s est ainsi nulle le long de $\mathscr{I}_{P|_H}$, donc par (8) se relève à X. Ceci montre le th. 6.1, sous réserve du lemme suivant.

□

LEMME 6.2. — *Pour chaque entier $r>0$, l'image de la restriction*
$$H^0(X,r(K_X+H+L)+nB)\longrightarrow H^0(H,r(K_H+L|_H)+nB|_H)$$
contient les sections nulles le long de $\mathscr{I}_r$.

PREUVE — On procède par récurrence sur r. Pour $r=1$, on invoque la suite exacte (7) pour $D=E$ et le fait que $L+nB-E\sim A+nB$ étant ample, $H^1(X,\mathscr{I}_E(K_X+L+nB))$ est nul (th. 2.1) d'où une surjection
$$H^0(X,\operatorname{adj}_{H,E;\varnothing}(K_X+H+L+nB))\twoheadrightarrow H^0(H,\mathscr{I}_1(K_H+L|_H+nB|_H)).$$
Passons maintenant de r à $r+1$. On a tout d'abord
$$\mathscr{I}_r(r(K_H+L|_H)+nB|_H)=\mathscr{I}_r(K_H+(r-1)(K_H+L|_H)+L|_H+nB|_H).$$
Comme
$$(r-1)(K_H+L|_H)+L|_H-\Big(\frac{r-1}{m}S+E|_H\Big)\sim A|_H$$
est ample, le faisceau $\mathscr{I}_r(r(K_H+L|_H)+nB|_H)$ est engendré par ses sections globales ([**13**], Proposition 9.4.26). Si $|T|\subset|r(K_X+H+L)+nB|$ est le système linéaire des sections nulles sur $\mathscr{I}_r$, on en déduit, avec l'hypothèse de récurrence, $\mathscr{I}_r=\mathfrak{b}(|T||_H)$. D'autre part, $\mathfrak{b}(|T||_H)\subset\mathscr{I}_{E|_H;|T||_H}$ puisque $E|_H$ est klt. On utilise alors la suite exacte
$$0\longrightarrow\mathscr{I}_{E;|T|}(-H)\longrightarrow\operatorname{adj}_{E,H;|T|}\longrightarrow\mathscr{I}_{E|_H;|T||_H}\longrightarrow 0$$

(*cf.* (6)). Comme $L - E$ est ample, le th. 2.1 entraîne

$$H^1(X, \mathscr{I}_{E;|T|}(K_X + r(K_X + H + L) + nB + L)) = 0.$$

On a donc une surjection

$$\begin{aligned} H^0(X, \operatorname{adj}_{E,H;|T|}((r+1)(K_X + H + L) + nB)) \\ \twoheadrightarrow H^0(H, \mathscr{I}_{E|_H;|T||_H}((r+1)(K_H + L|_H) + nB|_H)). \end{aligned}$$

L'image de la restriction

$$H^0(X, (r+1)(K_X + H + L) + nB) \longrightarrow H^0(H, (r+1)(K_H + L|_H) + nB|_H)$$

contient donc les sections nulles le long de $\mathscr{I}_{E|_H;|T||_H}$ donc *a fortiori* les sections nulles le long de $\mathscr{I}_r$, donc celles nulles le long de $\mathscr{I}_{r+1} \subset \mathscr{I}_r$. □

6.2. Cas où V est de codimension $\geqslant 2$

Il n'est pas difficile de voir que l'on peut supposer V lisse. Soit $\mu : X' \to X$ une log-résolution de E. On écrit

$$\mu^* E - K_{X'/X} = \sum_F a_F F$$

où le $\mathbf{Q}$-diviseur de droite est à croisements normaux simples. Dire que V est une composante irréductible de $\operatorname{Nklt}(X, E)$ de seuil général 1 signifie que

- si $V \subsetneq \mu(F)$, alors $a_F < 1$;
- si $V = \mu(F)$, alors $a_F \leqslant 1$, avec égalité pour au moins un F.

Un procédé (un peu technique, mais court) dit de « concentration », dû à Kawamata et Shokurov ([**11**], § 3-1 ; [**20**], Lemma 4.8) permet de trouver une nouvelle décomposition $L \equiv_{\mathbf{Q}} A + E$ satisfaisant aux conditions du théorème pour laquelle on a $V = \mu(F)$ et $a_F = 1$ pour un *unique* F, que l'on note V' (19). On a ainsi un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} V' & \hookrightarrow & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ V & \hookrightarrow & X \end{array}$$

où toutes les variétés sont lisses. Posons alors $G = \sum_{F \neq V'} a_F F$. Si on écrit $[G] = G_1 - G_2$, avec G_1 et G_2 effectifs sans composante commune, on a ainsi

- G_2 est μ-exceptionnel ;
- $\mu(\operatorname{Supp}(G_1))$ ne contient pas V.

(19) Avec la terminologie de [**8**], V est un *centre log-canonique exceptionnel* de la paire (X, E).

Cela entraîne que, pour tout entier $m > 0$,
(9)
$\mu_*\mathscr{O}_{X'}(-m[G])$ est un faisceau d'idéaux sur X de cosupport ne contenant pas V,

de sorte que

$$\begin{aligned}
(10)\qquad H^0(X, m(K_X + L)) &\supset H^0(X, \mu_*\mathscr{O}_{X'}(-m[G])(m(K_X + L))) \\
&\simeq H^0(X', m(\mu^*(K_X + A + E) - [G])) \\
(11)\qquad &\simeq H^0(X', m(K_{X'} + V' + \{G\} + \mu^*A)).
\end{aligned}$$

Puisque la paire $(V', \{G\}|_{V'})$ est klt [20], le th. 6.1 appliqué au diviseur (entier)

$$L' = \mu^*L - K_{X'/X} - V' - [G] \equiv_{\mathbf{Q}} \{G\} + \mu^*A$$

sur X' et à l'hypersurface lisse $V' \subset X'$ entraîne que l'espace (11) s'envoie surjectivement, par restriction à V', sur $H^0(V', m(K_{V'} + L'|_{V'}))$. Comme le cosupport de $\mu_*\mathscr{O}_{X'}(-[G])$ ne contient pas V, l'injection (10) se restreint aussi en une injection

$$(12)\qquad H^0(V', m(K_{V'} + L'|_{V'})) \hookrightarrow H^0(X|V, m(K_X + L))$$

et il ne nous reste plus qu'à comparer l'espace vectoriel de gauche avec $H^0(V, mK_V)$.

Pour ce faire, nous allons appliquer une amélioration due à Campana ([**4**], Theorem 4.13) d'un résultat de positivité d'images directes de Viehweg ([**25**]) au morphisme $f : V' \to V$ et au diviseur $D = \{G\}|_{V'}$ [21].

THÉORÈME 6.3 (Campana). — *Soit $f : V' \to V$ un morphisme à fibres connexes* [22] *entre variétés projectives lisses et soit D un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif sur V' dont la restriction à une fibre générale de f est à croisements normaux simples et à coefficients $\leqslant 1$. Le faisceau $f_*\mathscr{O}_{V'}(m(K_{V'/V} + D))$ est faiblement positif pour tout entier positif m tel que mD soit entier.*

La faible positivité d'un faisceau cohérent sans torsion $\mathscr{E}$ sur une variété projective V est une notion assez subtile introduite par Viehweg ([**25**] ; [**26**], Definitions 2.11 et 2.13) : elle signifie que, si V_0 est le plus grand ouvert de V sur lequel $\mathscr{E}$ est localement libre, il existe un ouvert dense U de V_0 tel que, pour tout diviseur ample H sur V

---

[20] Car le diviseur $\{G\} + V'$ est à croisements normaux simples, et les coefficients de $\{G\}$ sont dans $[0, 1[$; *cf.* ex. 2.2.

[21] Takayama utilise un résultat de positivité de Kawamata dont l'énoncé est plus technique et la démonstration difficile à suivre dans [**10**]. La méthode suivie ici m'a été indiquée par Druel, Păun et Campana. Le résultat de Campana est aussi utilisé dans [**8**] (Lemma 2.9 ; attention, Hacon et M^{c}Kernan disent « $K_X + \Delta$ est log canonique » lorsqu'ils veulent dire « la paire (X, Δ) est log canonique »).

[22] On se ramène facilement, en suivant par exemple les arguments de 6.2.1, au cas où la fibration f est « préparée » (c'est-à-dire que f est lisse hors d'un diviseur à croisements normaux simples de V dont l'image inverse est contenue dans un diviseur à croisements normaux simples de V').

et tout entier $a > 0$, il existe un entier $b > 0$ tel que le faisceau $(\mathrm{Sym}^{ab}\,\mathscr{E}|_{V_0})(bH|_{V_0})$ soit engendré sur U par ses sections globales sur V_0. Lorsque $U = V$, c'est équivalent à dire que $\mathscr{E}$ est un faisceau localement libre nef sur V.

On note m_0 un entier > 0 tel que le diviseur $m_0\{G\}$ soit entier. Vérifions que, dans notre situation, les fibres de f sont connexes et $\mathscr{E}_{m_0}$ est non nul.

LEMME 6.4 (Kawamata). — *Pour tout entier $m > 0$ divisible par m_0, le faisceau $\mathscr{E}_m = f_*\mathscr{O}_{V'}(m(K_{V'/V} + D))$ est de rang 1 sur V et les fibres de f sont connexes.*

PREUVE — On a

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_m &\simeq f_*\mathscr{O}_{V'}(m(K_{X'} + V' + G - [G])|_{V'})(-mK_V)\\ &\simeq f_*\mathscr{O}_{V'}(-m[G]|_{V'})(m((K_X + E)|_V - K_V)).\end{aligned}$$

Par (9), $\mu_*\mathscr{O}_{X'}(-m[G])$ est un faisceau d'idéaux sur X dont le cosupport ne contient pas V, donc $f_*\mathscr{O}_{V'}(-m[G]|_{V'})$ est de rang au moins 1. Ce faisceau est contenu dans $f_*\mathscr{O}_{V'}(-[G]|_{V'})$ et on a une suite exacte

$$\mu_*\mathscr{O}_{X'}(-[G]) \longrightarrow f_*\mathscr{O}_{V'}(-[G]|_{V'}) \longrightarrow R^1\mu_*\mathscr{O}_{X'}(-[G] - V').$$

Comme $-[G] - V' \sim K_{X'/X} - [\mu^*(E)]$, le groupe de droite est nul par un théorème d'annulation qui se déduit facilement du th. 2.1 ([**13**], Theorem 9.4.1), de sorte que $f_*\mathscr{O}_{V'}(-[G]|_{V'})$, donc aussi $f_*\mathscr{O}_{V'}(-m[G]|_{V'})$, est de rang au plus, donc exactement 1.

Il en est donc de même du faisceau localement libre $f_*\mathscr{O}_{V'}$, qui est ainsi isomorphe à $\mathscr{O}_V$. Les fibres de f sont alors connexes par le théorème principal de Zariski, ce qui termine la démonstration du lemme. □

On veut déduire de la faible positivité de $\mathscr{E}_m$ qu'un multiple positif convenable de $K_{V'/V} + \{G\}|_{V'} + f^*A|_V$ est linéairement équivalent à un diviseur effectif (je remercie Viehweg de m'avoir expliqué l'argument qui suit).

6.2.1. — Un résultat d'aplatissement de Raynaud ([**16**]) et le théorème d'Hironaka permettent de construire un diagramme

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{V}' & \xrightarrow{\tau'} & V'\\ {\scriptstyle\widetilde{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f}\\ \widetilde{V} & \xrightarrow{\tau} & V\end{array}$$

où τ' et τ sont des modifications vérifiant $\widetilde{f}(\mathrm{Exc}(\tau')) \subset \mathrm{Exc}(\tau)$ et

(13) toute hypersurface $S' \subset \widetilde{V}'$ dont l'image par $\widetilde{f}$ est de codimension $\geqslant 2$ dans $\widetilde{V}$ est τ'-exceptionnelle[(23)].

Posons $\widetilde{D} = \tau'^* D + \widetilde{f}^* K_{\widetilde{V}/V'}$, de sorte que

$$K_{\widetilde{V}'/\widetilde{V}} + \widetilde{D} \equiv_{\mathbf{Q}} K_{\widetilde{V}'/V'} + \tau'^*(K_{V'/V} + D).$$

Si m est un entier > 0 divisible par m_0, le faisceau $\widetilde{\mathscr{E}}_m = \widetilde{f}_* \mathscr{O}_{\widetilde{V}'}(m(K_{\widetilde{V}'/\widetilde{V}} + \widetilde{D}))$ est faiblement positif (th. 6.3), et comme

$$\tau_* \widetilde{\mathscr{E}}_m \simeq f_* \mathscr{O}_{V'}(m(K_{V'} + D)) \simeq \mathscr{E}_m$$

il est non nul (lemme 6.4).

Soit H un diviseur ample sur $\widetilde{V}$, soit m_1 un entier > 0 divisible par m_0 tel que $m_1 A$ soit un diviseur entier vérifiant $\tau^* m_1 A|_V \geqslant H$ et soit $\widetilde{U} \subset \widetilde{V}$ le plus grand ouvert sur lequel le faisceau $\widetilde{\mathscr{E}}_{m_1}$ est localement libre. Ce faisceau étant faiblement positif et non nul, $(\mathrm{Sym}^b(\widetilde{\mathscr{E}}_{m_1}))(bH)|_{\widetilde{U}}$ a en particulier une section non nulle pour un entier $b > 0$ convenable. On en déduit

$$\begin{aligned} 0 &\neq H^0(\widetilde{U}, \widetilde{f}_* \mathscr{O}_{\widetilde{V}'}(bm_1(K_{\widetilde{V}'/\widetilde{V}} + \widetilde{D}))(bm_1 \tau^* A|_V)) \\ &\simeq H^0(\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{U}), bm_1(K_{\widetilde{V}'/\widetilde{V}} + \widetilde{D} + \widetilde{f}^* \tau^* A_{\widetilde{V}})) \\ &\simeq H^0(\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{U}), bm_1 \tau'^*(K_{V'/V} + D + f^* A|_V)). \end{aligned}$$

Comme le complémentaire de $\widetilde{U}$ dans $\widetilde{V}$ est de codimension au moins 2, la partie de codimension 1 du complémentaire de $\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{U})$ dans $\widetilde{V}'$ est τ'-exceptionnelle par (13). On en déduit

$$H^0(V', bm_1(K_{V'/V} + D + f^* A|_V)) \neq 0.$$

Comme $L'|_{V'} \equiv_{\mathbf{Q}} D + f^* A|_V$, on obtient, pour tout entier $m > 0$, par multiplication, une injection

$$H^0(V, mbm_1 K_V) \hookrightarrow H^0(V', mbm_1(K_{V'} + L'|_{V'})).$$

Ceci, combiné avec l'inclusion (12) et le fait que les volumes restreints sont des limites, termine la démonstration du th. 5.2. □

RÉFÉRENCES

[1] U. Angehrn & Y.-T. Siu – Effective freeness and point separation for adjoint bundles, *Invent. Math.* **122** (1995), p. 291–308.

[2] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon & J. McKernan – Existence of minimal models for varieties of log general type, prépublication électronique arXiv:math.AG/0610203.

(23) *Cf.* [**25**], Lemma 7.3 et [**20**], Lemma 4.14. On peut aussi, si l'on veut, supposer que la fibration $\widetilde{f}$ est « préparée » au sens de la note 22 ([**20**], Notation 4.16).

[3] E. Bombieri – Canonical models of surfaces of general type, *Publ. Math. I.H.É.S.* **42** (1973), p. 171–219.

[4] F. Campana – Orbifolds, special varieties and classification theory, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **54** (2004), p. 499–630.

[5] B. Claudon – Invariance for multiples of the twisted canonical bundle, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **57** (2007), p. 289–300.

[6] J.-P. Demailly – L^2 vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory, in *Transcendental methods in algebraic geometry (Cetraro, 1994)*, Lecture Notes in Math., vol. 1646, Springer, 1996, p. 1–97.

[7] L. Ein, R. Lazarsfeld, M. Mustaţă, M. Nakayame & M. Popa – Restricted volumes and base loci of linear series, prépublication électronique arXiv:math.AG/0607221.

[8] C. Hacon & J. McKernan – Boundedness of pluricanonical maps of varieties of general type, *Invent. Math.* **166** (2006), p. 1–25.

[9] A. R. Iano-Fletcher – Working with weighted complete intersections, in *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 281, Cambridge Univ. Press, 2000, p. 101–173.

[10] Y. Kawamata – Subadjunction of log canonical divisors. II, *Amer. J. Math.* **120** (1998), p. 893–899.

[11] Y. Kawamata, K. Matsuda & K. Matsuki – Introduction to the minimal model problem, in *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, North-Holland, 1987, p. 283–360.

[12] J. Kollár – Singularities of pairs, in *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., 1997, p. 221–287.

[13] R. Lazarsfeld – *Positivity in algebraic geometry. II*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 49, Springer-Verlag, Heidelberg, 2004.

[14] K. Maehara – A finiteness property of varieties of general type, *Math. Ann.* **262** (1983), p. 101–123.

[15] M. Păun – Siu's invariance of plurigenera : a one-tower proof, à paraître dans *J. Diff. Geom.*

[16] M. Raynaud – Flat modules in algebraic geometry, *Compositio Math.* **24** (1972), p. 11–31.

[17] Y.-T. Siu – A general non-vanishing theorem and an analytic proof of the finite generation of the canonical ring, prépublication électronique arXiv:math.AG/0610740.

[18] ———, Invariance of plurigenera, *Invent. Math.* **134** (1998), p. 661–673.

[19] ———, Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type, in *Complex geometry (Göttingen, 2000)*, Springer, 2002, p. 223–277.

[20] S. Takayama – Pluricanonical systems on algebraic varieties of general type, *Invent. Math.* **165** (2006), p. 551–587.

[21] H. Tsuji – Pluricanonical systems of projective 3-folds, prépublication électronique arXiv:math.AG/0204096.

[22] ———, Pluricanonical systems of projective varieties of general type, prépublication électronique arXiv:math.AG/9909021.

[23] ———, Pluricanonical systems of projective varieties of general type ii, prépublication électronique arXiv:math.AG/0409318.

[24] D. Varolin – A Takayama-type extension theorem, prépublication électronique arXiv:math.CV/0607323.

[25] E. Viehweg – Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension for certain fibre spaces, in *Algebraic varieties and analytic varieties (Tokyo, 1981)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 1, North-Holland, 1983, p. 329–353.

[26] ———, *Quasi-projective moduli for polarized manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 30, Springer, 1995.

Olivier DEBARRE

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
E-mail : debarre@math.u-strasbg.fr