Astérisque

FELIPE CANO
ROBERT MOUSSU
FERNANDO SANZ

# Pinceaux de courbes intégrales d'un champ de vecteurs analytique

*Astérisque*, tome 297 (2004), p. 1-34
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__297__1_0>

*Astérisque*
**297**, 2004, p. 1–34

# PINCEAUX DE COURBES INTÉGRALES D'UN CHAMP DE VECTEURS ANALYTIQUE

*par*

Felipe Cano, Robert Moussu & Fernando Sanz

***Résumé.*** — Soit $\gamma_0$ une courbe intégrale d'un champ de vecteurs analytique $X$ dans une variété réelle de dimension trois. Supposons que $\gamma_0$ ait un seul point limite et qu'elle possède des tangentes itérées. Le pinceau intégral $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ est l'ensemble des courbes intégrales de $X$ qui ont les mêmes tangentes itérées (orientées) que $\gamma_0$. Nous montrons que les courbes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ sont, soit deux à deux sous-analytiquement séparables, soit deux à deux asymptotiquement enlacées. Dans ce dernier cas, $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ possède un axe formel qui est divergent si et seulement si les courbes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ sont non oscillantes.

***Abstract* (Integral pencils of trajectories of an analytic vector field).** — Let $\gamma_0$ be an integral curve of an analytic vector field $X$ in a real three dimensional manifold. Suppose that $\gamma_0$ has a single limit point and that it has all iterated tangents. The integral pencil $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ is the set of all integral curves of $X$ having the same (oriented) iterated tangents as $\gamma_0$. We prove that two arbitrary curves in $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ are either subanalytically separated or asymptotically linked. In this last case, $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ has a formal axis which is divergent if and only if the curves of $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ are not oscillatory.

## 0. Introduction

Soit $X$ un champ de vecteurs analytique sur une variété $M$ de dimension trois et soit $\gamma_0$ une courbe intégrale de $X$ dont l'ensemble $\omega$-limite, $\omega(\gamma_0)$, est un point singulier $p$ de $X$. Nous nous intéresserons à la question suivante. Comment, d'un point de vue analytique, $\gamma_0$ peut-elle tendre vers $p$? Cette question n'est pertinente que si $\gamma_0$ possède une tangente en $p$. En effet, soit $\pi_1 : M_1 \to M_0$ l'éclatement de centre $p_0$ et soit $\gamma_1$ le relevé de $\gamma$ par $\pi_1$. Son ensemble $\omega$-limite, $\omega(\gamma_1)$, est contenu dans le diviseur exceptionnel de $\pi_1$ qui est identifié à $\mathbb{RP}(2)$. La courbe $\gamma_0$ a une tangente en $p_0$ de direction $p_1$ si et seulement si $\omega(\gamma_1) = p_1$. Si ce n'est pas le cas, l'étude de $\gamma_1$ au voisinage de $p_1$ est un problème de dynamique globale. Ce n'est plus

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — Primary 34C08; Secondary 34C10, 37D30, 32B20, 32S50.
***Mots clefs.*** — Champ de vecteurs, EDO, éclatement, oscillation, variété invariante.

un problème local de géométrie analytique. Pour cette raison nous nous intéressons seulement aux courbes $\gamma_0$ qui possèdent des *tangentes itérées* $\mathrm{TI}(\gamma_0) = \{p_n\}$, c'est-à-dire, à celles pour lesquelles il existe une suite infinie d'éclatements ponctuels

$$M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \cdots \longleftarrow M_{n-1} \xleftarrow{\pi_n} M_n \cdots$$

de centres les points $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, \ldots$, telle que $p_n = \omega(\gamma_n)$ où $\gamma_n$ est le relevé de $\gamma_{n-1}$ par $\pi_n$. La droite tangente à $\gamma_{n-1}$ en $p_{n-1}$ est naturellement orientée par $\gamma_{n-1}$. Nous notons $p_n^+$ le point correspondant de $\mathbb{S}^2$ et $\mathrm{TI}^+(\gamma_0) = \{p_n^+\}$ la suite des *tangentes itérées orientées* de $\gamma_0$. L'ensemble $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ des courbes $\gamma$ telles que $\mathrm{TI}^+(\gamma) = \mathrm{TI}^+(\gamma_0)$ est le *pinceau intégral* de $\gamma_0$ pour $X$. Si $\widehat{\Gamma}$ est une courbe formelle en $p_0$, nous notons encore $\mathrm{TI}(\widehat{\Gamma})$ sa suite de points infiniment proches au sens de [**2**]. Si $\mathrm{TI}(\widehat{\Gamma}) = \mathrm{TI}(\gamma_0)$ nous dirons que $\widehat{\Gamma}$ est *l'axe de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ ou que $\gamma_0$ a un *contact plat* avec $\widehat{\Gamma}$.

S'il existe une surface analytique qui ne contient pas $\gamma_0$ et qui coupe $\gamma_0$ selon une infinité de points, on dit que $\gamma_0$ est *oscillante*. Dans ce cas, le théorème suivant décrit les propriétés du pinceau $\mathrm{PI}(\gamma_0)$.

***Théorème du spiralement axial*** **([7])**. — *Si $\gamma_0$ est oscillante et possède des tangentes itérées,* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *possède un axe $\Gamma$ convergent $X$-invariant et $\gamma_0$ « spirale » autour de $\Gamma$. De plus, si $\Gamma$ n'est pas contenu dans* $\operatorname{Sing} X$ *le lieu singulier de $X$, toutes les courbes de* $\mathrm{PI}(\gamma_0) \setminus \Gamma$ *sont oscillantes et spiralent autour de $\Gamma$.*

Si la courbe $\gamma_0$ n'est pas oscillante, elle possède des tangentes itérées. Le but de ce travail est l'étude des pinceaux $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ constitués de courbes non oscillantes. Ces objets ne sont pas rares. D'après le théorème précédent, c'est le cas si $\gamma_0$ est non oscillante et n'a pas un contact plat avec $\operatorname{Sing} X$.

***Théorème I***. — *Si les courbes de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *sont non oscillantes on a l'une des propriétés suivantes :*

s) *Deux courbes distinctes, quelconques, de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *sont sous-analytiquement séparables.*

e) *Deux courbes distinctes, quelconques, de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *sont asymptotiquement enlacées.*

*De plus, ces propriétés ne peuvent pas être satisfaites simultanément.*

Dans le cas s) nous dirons que $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ est un *pinceau intégral séparé*. Dans le cas e) nous dirons que $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ est un *pinceau intégral enlacé*. La structure de tels pinceaux est décrite dans le théorème II ci-dessous. Avant de l'énoncer, définissons brièvement les concepts qui apparaissent dans le théorème précédent. Soient $\gamma$, $\gamma'$ deux courbes intégrales de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ et soient $|\gamma|$, $|\gamma'|$ leurs images. On dit que $\gamma$, $\gamma'$ sont « distinctes » si $|\gamma|$, $|\gamma'|$ ne sont pas contenues dans une même orbite du flot de $X$, que $\gamma$, $\gamma'$ sont *sous-analytiquement séparables* s'il existe une application $f$ bornée, non constante, sous-analytique sur un voisinage de $|\gamma| \cup |\gamma'|$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que le nombre de points de $f(|\gamma|) \cap f(|\gamma'|)$ est fini. Des coordonnées $w = (x, y, z)$ centrées en $p$ sont dites $z$-positives pour $\gamma$ si $|\gamma| \subset \{z > 0\}$ et si $\gamma$ coupe transversalement les plans $z =$

constante. On peut alors reparamétrer $|\gamma|$ par $z$. Ce que nous écrivons $z \mapsto \gamma(z) = (x(z), y(z), z)$, $z > 0$. Deux courbes $\gamma$, $\gamma'$ sont *asymptotiquement enlacées* s'il existe des coordonnées $w$, $z$-positives pour $\gamma$, $\gamma'$, telles que la courbe $z \mapsto (\gamma(z) - \gamma'(z))$ dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \equiv \mathbb{R}^2$ spirale autour de 0. Ce concept est indépendant des coordonnées choisies pour le définir lorsque $\gamma$, $\gamma'$ sont non oscillantes.

***Théorème II***. — *Soit* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *un pinceau intégral enlacé de courbes non oscillantes.*

(1) $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *possède un axe formel* $\widehat{\Gamma}$ *non convergent transcendant ; c'est-à-dire qu'il n'existe pas de surface analytique qui contienne* $\widehat{\Gamma}$.

(2) *Si* $V$ *est un voisinage de* $p$, *il existe un ouvert sous-analytique connexe* $U \subset V$ *positivement invariant par le flot de* $X$ *tel qu'une courbe intégrale* $\gamma$ *de* $X$ *appartient à* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *si et seulement si* $|\gamma| \cap U \neq \varnothing$.

Un pinceau enlacé de courbes non oscillantes est $X$-irréductible au sens suivant. Un ouvert $U$ comme dans le théorème II n'est pas la réunion de deux ensembles sous-analytiques non vides, disjoints, positivement invariants par le flot de $X$. En effet, sinon, $U$ contiendrait un sous-ensemble sous-analytique $A$ positivement invariant par le flot de $X$ de dimension inférieure ou égale à deux. L'axe formel $\widehat{\Gamma}$ de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ serait contenu dans $A$, ce qui contredirait l'assertion 1 du théorème II.

Supposons que $\gamma_0$ soit une courbe oscillante qui possède des tangentes itérées et que $\gamma_0$ n'a pas un contact plat avec une courbe contenue dans $\mathrm{Sing}\,X$. D'après le théorème du spiralement axial, toutes les courbes de $\mathrm{PI}(\gamma_0) \setminus \Gamma$ sont oscillantes et spiralent autour d'un axe $\Gamma$. Une des composantes connexes de $\Gamma \setminus \{p\}$, notée $\Gamma^+$ est une courbe intégrale de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$. Deux courbes quelconques, distinctes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ sont asymptotiquement enlacées et il existe encore $U$, un ouvert $X$-invariant comme dans le théorème II [**7**]. Mais dans ce cas, $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ n'est pas $X$-irréductible puisque $U = (U \setminus \Gamma^+) \cup \Gamma^+$.

***Exemple* (L'équation d'Euler)**. — Dans $\mathbb{C}^2$ muni des coordonnées $(u, v)$ l'équation différentielle

$$(E_\varepsilon) \qquad \frac{du}{dt} = -u + \varepsilon v, \quad \frac{dv}{dt} = -v^2 \quad \text{avec } \varepsilon = 0, 1$$

définit un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}_\varepsilon$ dont $v = 0$ est une séparatrice. Le plongement $j_\omega$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^2$ défini par $j_\omega(u, z) = (u, \omega z)$ avec $\omega = \exp(-i\alpha)$ où $\alpha$ est réel, $|\alpha| < \pi/2$ est transverse à $\mathcal{F}_\varepsilon$. L'image inverse $\mathcal{F}_{\varepsilon,\omega}$ de $\mathcal{F}_\varepsilon$ par $j_\omega$ est un feuilletage en courbes réelles. Sa description permet de mieux comprendre la géométrie de $\mathcal{F}_\varepsilon$ du « côté noeud-col » [**23**]. En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ via l'écriture $u = x + iy = (x, y)$, les feuilles de $\mathcal{F}_{\varepsilon,\omega}$ sont les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$(E_{\varepsilon,\omega}) \qquad \frac{dx}{dt} = -\cos\alpha x + \sin\alpha y + \varepsilon z, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin\alpha x - \cos\alpha y, \quad \frac{dz}{dt} = -z^2.$$

Le plan $z = 0$ est la variété stable de $E_{\varepsilon,\omega}$. Les courbes intégrales $\gamma$ de $E_{\varepsilon,\omega}$ contenues dans $z > 0$ sont transverses aux plans $z =$constante. Ce sont des graphes $\gamma(z) =$

$(u(z), z)$, $z > 0$ de fonctions $u(z)$ solutions de

$$z^2 \frac{du}{dz} = \frac{u}{\omega} - \varepsilon z, \quad \text{avec } u(z) = x(z) + iy(z),\ z > 0.$$

Si $\varepsilon = 0$, on a $u(z) = c\exp(-1/\omega z)$, $c \in \mathbb{C}$ L'ensemble des $|\gamma| \subset \{z > 0\}$ est un pinceau intégral $P_0$ d'axe $\Gamma = \{u = 0\}$. Si $\omega = 1$, elles sont non oscillantes et $P_0$ est séparé. Si $\omega \neq 1$, les courbes de $P_0 \setminus \Gamma$ sont oscillantes, elles spiralent autour de $\Gamma$. Si $\varepsilon = 1$, l'ensemble des $|\gamma| \subset \{z > 0\}$ est un pinceau intégral $P_1$ d'axe formel

$$\widehat{\Gamma}_\omega(z) = (\widehat{x}(z), \widehat{y}(x), z) \equiv (\widehat{u}(z), z), \quad \text{avec } \widehat{u}(z) = \sum_{n\geqslant 1}(n-1)!\,\omega^{n-1}\,z^n.$$

Soient $\gamma$, $\gamma'$, distinctes, appartenant à $P_1$, $\gamma(z) = (u(z), z)$, $\gamma'(z) = (u'(z), z)$. Alors on a $(u(z) - u'(z)) = c\exp(-1/\omega z)$, $c \in \mathbb{C}$. Si $\omega = 1$, $P_1$ est un pinceau séparé de courbes non oscillantes. Si $\omega \neq 1$, $P_1$ est un pinceau enlacé de courbes non oscillantes.

Les concepts oscillation, tangentes itérées, enlacement asymptotique, séparation sont définis de façon précise dans le chapitre suivant. Par des arguments classiques de géométrie analytique réelle nous montrons qu'ils sont stables par des morphismes permis. Ce sont des composés d'éclatements de points, de courbes lisses et de ramifications au-dessus de surfaces lisses. Ainsi, d'après le « théorème d'uniformisation polarisée » de [**6**], il suffit de démontrer les théorèmes I et II lorsque la partie linéaire $DX(p)$ n'est pas nilpotente. Il est alors nécessaire de distinguer différents cas selon la nature du spectre de $DX(p)$. Cette démarche nécessite encore quelques définitions : pinceau final hyperbolique, pinceau final de type I, pinceau final de type II.

Les chapitres 2, 3, 4 sont consacrés aux démonstrations des théorèmes I (sans l'alternative) et II pour les pinceaux hyperboliques, finaux de type I, finaux de type II, respectivement. Enfin, dans le chapitre 5, nous montrons l'alternative du théorème I et nous prouvons que l'étude des pinceaux intégraux se ramène à celui des pinceaux finaux.

Ce travail doit beaucoup à une question de F. Dumortier et à des conversations avec J.-M. Lion. Nous les remercions vivement.

## 1. Enlacement asymptotique et pinceau intégral

Dans toute cette partie, $X$ désigne un champ de vecteurs analytique sur une variété $M$ de dimension trois et $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, $t \geqslant 0$ une courbe intégrale non constante de $X$ dont l'ensemble $\omega$-limite noté $p = \omega(\gamma)$ est un point singulier de $X$. Dans un premier paragraphe nous rappelons quelques concepts définis dans [**7**] : tangentes itérées, courbes oscillantes, spiralement axial. Dans le paragraphe suivant nous étudions les propriétés « individuelles » d'une courbe $\gamma$ non oscillante. Nous montrons essentiellement que la non oscillation est une propriété stable par des *morphismes admissibles*. Ce sont des composés d'éclatements de points, de courbes et des ramifications. Le concept d'enlacement asymptotique de deux courbes intégrales est défini dans le paragraphe trois. Après avoir constaté qu'il est indépendant des coordonnées choisies pour le définir, pour des courbes non oscillantes, nous montrons qu'il est stable par morphismes admissibles. Dans le dernier paragraphe, nous donnons la définition de pinceau intégral et précisons quelques propriétés d'un tel objet. Nous étudions la stabilité de ce concept par transformation admissible.

**1.1. Tangentes itérées et oscillation.** — Nous reprenons les notations de l'introduction, $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, $t \geqslant 0$ est une courbe intégrale de $X$ sur $M$ telle que $\omega(\gamma) = p$. Soit $\pi_1 : M_1 \to M$ l'éclatement de centre $p$. Il existe une unique courbe $\gamma_1$ dans $M_1$ telle que $\pi_1 \circ \gamma_1 = \gamma$. C'est une courbe intégrale du champ de vecteurs $X_1$ sur $M_1$ défini par $\pi_{1*}(X_1) = X$. On dit que $\gamma_1$, $X_1$ sont les relevés de $\gamma$, $X$ par $\pi_1$. L'ensemble $\omega$-limite, $\omega(\gamma_1)$, de $\gamma_1$ est contenu dans le diviseur exceptionnel $\pi_1^{-1}(p)$ qui est identifié au projectif réel $\mathbb{RP}(2)$. Dire que $\omega(\gamma_1)$ est un point $p_1$ de $\mathbb{RP}(2)$ signifie que $\gamma$ possède une tangente en $p$ dans la direction $p_1$. Si c'est le cas, à la courbe $\gamma$ correspond une des demies droites $p_1^+ \in \mathbb{S}^2$ associées à $p_1 \in \mathbb{RP}(2)$. Le point $p_1^+$ est la *tangente orientée* en $p$ à $\gamma$. Nous dirons que $\gamma$ possède des *tangentes itérées* si l'on peut construire une suite infinie

$$M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \cdots \longleftarrow M_{n-1} \xleftarrow{\pi_n} M_n \cdots, \quad \text{avec } M_0 = M,\ p_0 = p,$$

d'éclatements ponctuels $\pi_n$, $n \geqslant 1$, de centre le point $p_{n-1}$ de $M_{n-1}$, telle que $p_n$ soit l'ensemble $\omega$-limite du relevé $\gamma_n = \pi_n^{-1} \circ \gamma_{n-1}$ de $\gamma_{n-1}$ par $\pi_n$. Si c'est le cas nous dirons que $\mathrm{TI}(\gamma) = \{p_n\}$ est la *suite des tangentes itérées* de $\gamma$ et que $\mathrm{TI}^+(\gamma) = \{p_n^+\}$ est la suite des *tangentes itérées orientées* de $\gamma$.

Soit $\widehat{\Gamma}$ une courbe formelle au point $p$ et $\pi_1 : M_1 \to M$ l'éclatement de centre $p$. Il existe un unique point $p_1 \in \pi_1^{-1}(p)$ et une courbe formelle $\widehat{\Gamma}_1$ en $p_1$, le *transformé strict* de $\widehat{\Gamma}$, telle que $\pi_1 \circ \widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}$. Par une induction évidente, on construit une suite infinie de points $\mathrm{TI}(\widehat{\Gamma}) = \{p_n\}$ associés à $\widehat{\Gamma}$. C'est *la suite de points infiniment proches* de $\widehat{\Gamma}$ au sens de [**2**]. Si $\mathrm{TI}(\widehat{\Gamma}) = \mathrm{TI}(\gamma)$ nous dirons que $\gamma$ a un *contact plat* avec $\widehat{\Gamma}$. Lorsque $\gamma$ a un contact avec une courbe $\Gamma$ analytique, la courbe $\Gamma$ est $X$-invariante ([**7**]). Plus généralement supposons que $\gamma$ ait un contact plat avec une courbe formelle $\widehat{\Gamma}$ et soit $\widehat{\Gamma}(z) = (\widehat{x}(z), \widehat{y}(z), z)$ le développement de Puiseux de $\widehat{\Gamma}$ dans des coordonnées $w = (x, y, z)$ centrées en $p$. Si $|\gamma|$ possède un paramétrage $z \mapsto \gamma(z) = (x(z), y(z), z)$ on peut montrer que $\widehat{\Gamma}(z)$ est un développement asymptotique de $\gamma(z)$. Cette assertion est prouvée dans [**6**] lorsque $\gamma$ est non oscillante. Nous ne l'utiliserons que dans ce cadre.

Soit $S$ une surface analytique dans $M$. On dit que $\gamma$ est *$S$-oscillante* si $|\gamma| \not\subset S$ et $\gamma$ coupe $S$ selon un nombre infini de points. La courbe $\gamma$ est *non oscillante* si, pour toute surface analytique $S$ dans $M$, $\gamma$ n'est pas $S$-oscillante. En dimension deux, une courbe qui possède des tangentes itérées est toujours non oscillante. Cette dichotomie oscillant-tangentes itérées n'est plus vraie en dimension trois. On a alors le théorème suivant du spiralement axial [**7**] :

***Théorème 1.1***. — *La courbe $\gamma$ est oscillante et possède des tangentes itérées si et seulement si $\gamma$ spirale autour d'une demie branche analytique $\Gamma^+$.*

Le concept de spiralement axial est assez intuitif. Au lieu de rappeler sa définition rappelons sa propriété caractéristique : *$\gamma$ spirale autour de $\Gamma^+$ si et seulement si $\gamma$ a un contact plat avec $\Gamma^+$ et $\gamma$ est $S$-oscillante pour toute surface analytique $S$ contenant $\Gamma^+$.* On en déduit que le spiralement axial est stable par éclatement (et effondrement) ponctuel.

**1.2. Courbes non oscillantes et transformations admissibles.** — Nous conservons les notations $M$, $X$, $\gamma$, $\omega(\gamma) = p$ et nous supposons que $\gamma$ est non oscillante. Dans [**7**] nous avons montré que si $\gamma$ est non oscillante, alors $\gamma$ possède des tangentes itérées $\mathrm{TI}(\gamma)$. Nous allons déduire du théorème de spiralement axial la stabilité de la non-oscillation par éclatement ponctuel :

***Lemme 1.2***. — *Soit $\gamma$ non oscillante. Alors son relevé $\gamma_1$ par l'éclatement de centre $\omega(\gamma) = p$ est une courbe non oscillante.*

*Démonstration*. — Supposons que $\gamma_1$ soit oscillante. C'est une courbe intégrale du champ de vecteurs $X_1$ relevé de $X$ par $\pi_1$ qui est oscillante et qui possède des tangentes itérées (comme $\gamma$). Ainsi $\gamma_1$ spirale autour d'un axe $\Gamma_1^+$. Le spiralement axial étant stable par éclatement de point, la courbe $\gamma$ est $S$-oscillante pour toute surface analytique $S$ contenant $\pi_1(\Gamma_1^+)$. □

Soit $Y$ un germe de courbe analytique lisse dans $M$ passant par $p$ qui ne rencontre pas $|\gamma|$. Quitte à localiser en $p$, on définit l'éclatement $\pi_1 : M_1 \to M$ de centre $Y$. Il existe une unique courbe $\gamma_1$, le relevé de $\gamma$ par $\pi_1$, telle que $\pi_1 \circ \gamma_1 = \gamma$. Nous dirons que $\pi_1$ est un éclatement de *courbe lisse $\gamma$-admissible*. Si $Y$ n'est pas $X$-invariant, on ne peut pas en général « relever » $X$ en un champ de vecteurs analytique sur $M_1$. Cependant, il existe une fonction analytique $g$, strictement positive sur $|\gamma|$ et un champ de vecteurs $X_1$ analytique sur $M_1$ avec $\pi_{1*}(X_1) = gX$ tels que $|\gamma_1|$ soit l'image d'une courbe intégrale de $X_1$. Nous dirons encore que cette courbe est un relevé de $\gamma$ par $\pi_1$ et nous la noterons toujours $\gamma_1$. Cette ambiguïté est sans importance, l'objet de ce travail étant l'étude des propriétés des images $|\gamma|$ des courbes intégrales $\gamma$ de $X$.

***Lemme 1.3***. — *Si $\gamma$ est non oscillante, le relevé $\gamma_1$ de $\gamma$ par l'éclatement $\pi_1 : M_1 \to M$ d'une courbe $Y$ lisse $\gamma$-admissible est aussi une courbe non oscillante.*

*Démonstration*. — Montrons tout d'abord que $\gamma_1$ possède des tangentes itérées. Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe une suite finie d'éclatements ponctuels (vide si $\#\omega(\gamma_1) > 1$) $\pi_{k+1} : M_{k+1} \to M_k$, pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$, de centres des points $p_k$, telle que $\omega(\gamma_k) = p_k$ avec $\pi_k \circ \gamma_k = \gamma_{k-1}$ pour $k = 2, 3, \ldots, n$ et telle que $\#\omega(\gamma_n) > 1$.

On peut choisir des coordonnées en $p$, $p_n$ telles que le composé $\pi = \pi_n \circ \pi_{n-1} \circ \cdots \circ \pi_1$ ait une écriture polynomiale. Un argument élémentaire de connexité (voir [**7**] page 288) permet de construire une surface analytique $S_n$ dans $M_n$, d'équation polynomiale, telle que $\gamma_n$ soit $S_n$-oscillante. D'après le théorème de Tarski ([**34**]), $\pi(S_n)$ est contenu dans une surface algébrique $S$ pour les coordonnées choisies et la courbe $\gamma$ est $S$-oscillante. Montrons que $\gamma_1$ est non oscillante. Si ce n'est pas le cas, $\gamma_1$ spirale autour d'un axe $\Gamma_1^+$. Son image $\gamma$ spirale autour de $\pi(\Gamma_1^+)$. C'est une courbe oscillante. □

Un morphisme analytique $\pi_1 : M_1 \to M$ est une *$q$-ramification* en $p_1$ s'il existe des coordonnées $w_1 = (x_1, y_1, z_1)$ centrées en $p_1$, des coordonnées $w = (x, y, z)$ centrées en $p = \pi_1(p_1)$ telles que $\pi_1(x_1, y_1, z_1) = (x_1, y_1, z_1^q) = (x, y, z)$. Nous dirons que $\pi_1$ est *une ramification $\gamma$-admissible* si $|\gamma| \subset \{z > 0\}$. Si c'est le cas, il existe une unique courbe $\gamma_1$ telle que $\pi_1 \circ \gamma_1 = \gamma$ et $|\gamma_1| \subset \{z_1 > 0\}$. C'est une courbe intégrale du champ de vecteurs $X_1$ sur $M_1$ telle que $\pi_{1*}(X_1) = X$. Nous dirons encore que $\gamma_1$, $X_1$ sont les relevés de $\gamma$, $X$ par $\pi_1$. Un argument (comme dans le lemme 2) montre que $\gamma_1$ est non oscillante si et seulement si $\gamma$ est non oscillante.

L'éclatement ponctuel de centre $p$, les éclatements de courbes lisses $\gamma$-admissibles, les ramifications $\gamma$-admissibles sont appelés des *morphismes $\gamma$-admissibles élémentaires.* Pour les définir, nous sommes amenés à localiser. Nous les écrirons, avec la notation germifiée, $\pi_1 : (M_1, \gamma_1, p_1) \to (M, \gamma, p)$ où $\omega(\gamma_1) = p_1$, $\pi_1 \circ \gamma_1 = \gamma$. Un *morphisme $\gamma$-admissible* $\pi$ est un composé de morphismes $\gamma$-admissibles élémentaires. Nous l'écrirons encore $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{\gamma}, \widetilde{p}) \to (M, \gamma, p)$, où $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ et $\omega(\widetilde{\gamma}) = \widetilde{p}$. On peut résumer les définitions et les résultats de ce paragraphe avec la proposition suivante.

***Proposition 1.4.*** — *Soient $\gamma$ une courbe intégrale non-oscillante de $X$ et $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{\gamma}, \widetilde{p}) \to (M, \gamma, p)$ un morphisme $\gamma$-admissible. Alors, le relevé $\widetilde{\gamma}$ de $\gamma$ est non oscillant et c'est une courbe intégrale d'un champ vecteurs analytique $\widetilde{X}$ sur $\widetilde{M}$.*

Le corollaire suivant est une conséquence du théorème de [**14**] de rectilineairization des ensembles sous-analytiques, du théorème du spiralement axial et de la proposition précédente.

***Corollaire 1.5* (Non-oscillation sous-analytique).** — *Si $\gamma$ est une courbe intégrale non oscillante de $X$ et $Z$ un ensemble sous-analytique de $M$ alors $|\gamma| \cap Z$ est un ensemble fini si $|\gamma| \not\subset Z$.*

**1.3. Enlacement asymptotique.** — Ce concept repose sur la notion intuitive de courbe plane qui spirale autour d'un point que nous allons préciser. Soit $v : ]0, z_0] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ une courbe analytique telle que $0 = \lim_{z\to 0} v(z)$. Dans des coordonnées $u = (x, y)$ on écrit :

$$v(z) = (\alpha(z), \quad \beta(z)) = (\rho(z)\cos\theta(z), \quad \rho(z)\sin\theta(z))$$

où $\rho = \|v\|$ et $\theta(z)$ est une fonction analytique sur $]0, z_0]$. On dit que $v$ *spirale autour de* 0 si $\lim_{z\to 0} |\theta(z)| = \infty$. La fonction $\beta(z)$ étant analytique, la courbe $v$ coupe le demi axe $\Delta = \mathbb{R}_{>0} \times \{0\}$ selon une suite de points isolés $v(z_n)$ avec $z_n < z_{n-1}$. L'indice d'intersection $i(n)$ de $v$ et $\Delta$ en $z_n$ prend ses valeurs dans $\{1, -1, 0\}$ selon la règle : $i(n) = 1$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\beta(z) < 0$ pour $z_n - \varepsilon < z < z_n$ et $\beta(z) > 0$ pour $z_n < z < z_n + \varepsilon$, $i(n) = -1$ si $\beta(z) > 0$ pour $z_n - \varepsilon < z < z_n$ et $\beta(z) < 0$ pour $z_n < z < z_n + \varepsilon$, $i(n) = 0$ dans les autres cas. On a clairement l'équivalence : $v$ spirale autour de 0 si et seulement si $\lim_{n\to\infty} |I(n)| = \infty$ où $I(n) = \sum_{k=1}^{n} i(n)$. Avec cette caractérisation du spiralement, la démonstration de l'assertion suivante est un exercice élémentaire.

***Assertion***. — *Le concept de spiralement de $v$ autour de 0 est indépendant des coordonnées (analytiques) choisies pour le définir.*

Nous reprenons les notations des paragraphes précédents : $X$ est un champ de vecteurs sur $M$, $\gamma$ une courbe intégrale de $X$ avec $\omega(\gamma) = p$. Nous dirons que des coordonnées $w = (x, y, z) = (u, z)$ centrées en $p$ sont *$z$-positives* pour $\gamma$ si $|\gamma| \subset \{z > 0\}$ et si $\gamma$ coupe transversalement les plans $z$=constante. Si c'est le cas, on peut paramétrer $\gamma$ par $z$. Ce que nous écrirons $\gamma(z) = (x(z), y(z), z) = (u(z), z)$ avec $z > 0$. Fixons des coordonnées $w = (x, y, z) = (u, z)$ centrées en $p$.

***Définition 1.6***. — Soient $\gamma$, $\gamma'$ deux courbes intégrales distinctes de $X$ avec $\omega(\gamma) = \omega(\gamma') = p$. Fixons des coordonnées $w = (x, y, z) = (u, z)$ centrées en $p$. Nous dirons que $\gamma$, $\gamma'$ sont *$w$-asymptotiquement enlacées* si les coordonnées $w$ sont $z$-positives pour $\gamma$, $\gamma'$ et si la courbe $z \mapsto v(z) = u(z) - u'(z)$, avec $\gamma(z) = (u(z), z)$, $\gamma'(z) = (u'(z), z)$, spirale autour de 0.

D'après l'assertion précédente on a :

***Lemme 1.7***. — *Soient $w = (x, y, z)$, $w' = (x', y', z)$ des coordonnées centrées en $p$. Les courbes $\gamma$, $\gamma'$ sont $w$-asymptotiquement enlacées si et seulement si $\gamma$, $\gamma'$ sont $w'$-asymptotiquement enlacées.*

Soit $S_w(\gamma)$ la surface réglée, à bord $|\gamma|$, image dans la carte $w$ de l'application

$$(s, z) \longmapsto (x(z) + s, y(z), z) \quad \text{avec } z > 0,\ s \geqslant 0.$$

Les points d'intersection de $\gamma'$ avec $S_w(\gamma)$ correspondent au points d'intersection de la courbe $z \mapsto v(z)$ avec $\Delta = \mathbb{R}_{>0} \times \{0\}$. Ce sont les points $\gamma'(z_n) = (x'(z_n), 0, z_n)$ avec $x'(z_n) > 0$, $z_n < z_{n-1}$, où $\{z_n\}$ est la suite définie plus haut pour la courbe $v$. L'indice d'intersection de $\gamma'$ avec $S_w(\gamma)$ en $\gamma'(z_n)$ est encore $i(n)$ et $I(n) = I^w_{\gamma,\gamma'}(n)$ est l'indice d'intersection de $\gamma'|_{]z_0, z_{n+1}[}$ avec $S_w(\gamma)$. Il est clair que $\gamma, \gamma'$ sont $w$-asymptotiquement enlacées si et seulement si $\lim_{n\to\infty} |I^w_{\gamma,\gamma'}(n)| = \infty$.

***Lemme 1.8***. — *Soient $w = (x, y, z)$ des coordonnées centrées en $p$, $z$-positives et $y$-positives pour $\gamma$, $\gamma'$. Alors les courbes $\gamma$, $\gamma'$ sont $w = (x, y, z)$-asymptotiquement enlacées si et seulement si $\gamma$, $\gamma'$ sont $w' = (x, z, y)$-asymptotiquement enlacées.*

*Démonstration*. — La première partie du lemme est une conséquence de la définition de $I^w_{\gamma,\gamma'}(n)$. La seconde partie résulte de l'égalité $S_w(\gamma) = S_{w'}(\gamma)$. □

***Lemme 1.9***. — *Soit $\gamma$ une courbe intégrale non oscillante de $X$ et soient $w = (x, y, z)$ des coordonnées centrées en $p = w(\gamma)$ telles que $|\gamma| \not\subset \{z = 0\}$. Quitte à restreindre le domaine de définition de $\gamma$ et à changer $z$ en $-z$ ces coordonnées sont $z$-positives pour $\gamma$.*

*Démonstration*. — Soient $X = a\,\partial/\partial x + b\,\partial/\partial y + c\,\partial/\partial z$ et $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ les écritures de $X$ et $\gamma$ dans la carte $w$. Puisque $\gamma$ est non oscillante les fonctions $z(t) = z(\gamma(t))$ et $c(\gamma(t)) = dz(t)/dt$ ne s'annulent qu'un nombre fini de fois. □

***Proposition 1.10***. — *Soient $\gamma$, $\gamma'$ deux courbes intégrales non oscillantes de $X$ et soient $w = (x, y, z)$, $w' = (x', y', z')$ des coordonnées centrées en $p = \omega(\gamma) = \omega(\gamma')$ qui sont $z$-positives, $z'$-positives pour $\gamma$, $\gamma'$. Les courbes $\gamma$, $\gamma'$ sont $w$-asymptotiquement enlacées si et seulement si $\gamma$, $\gamma'$ sont $w'$-asymptotiquement enlacées.*

*Démonstration*. — D'après le lemme 1.9 on peut supposer que les coordonnées $w' = (x', y', z')$ sont $x'$, $y'$, $z'$-positives pour $\gamma$, $\gamma'$. La matrice jacobienne $D_w w'(0)$ étant inversible, le vecteur $\partial w'/\partial z(0)$ n'est pas nul. Quitte à permuter les positions de $x', y', z'$ dans $w'$ on peut supposer que $\partial z'/\partial z(0) \neq 0$. Cette permutation est encore légitime d'après le lemme 1.8. Cette dernière propriété du couple $w$, $w'$ implique que $w'' = (x', y', z)$ sont des coordonnées centrées en $p$. D'après le lemme 1.7, $\gamma$, $\gamma'$ sont $w$-asymptotiquement enlacées si et seulement si $\gamma$, $\gamma'$ sont $w''$-asymptotiquement enlacées. D'après le lemme 1.8, $\gamma$, $\gamma'$ sont $w'' = (x', y', z)$-asymptotiquement enlacées si et seulement si $\gamma$, $\gamma'$ sont $(x', z, y')$-asymptotiquement enlacées. D'après le lemme 1.7, $\gamma$, $\gamma'$ sont $(x', z, y')$-asymptotiquement enlacées si et seulement si $\gamma$, $\gamma'$ sont $(x', z', y')$-asymptotiquement enlacées. On conclut en appliquant le lemme 1.8 au couple $(x', z', y')$, $(x', y', z') = w'$ □

La proposition précédente et l'abondance de coordonnées $z$-positives pour $\gamma$, $\gamma'$, donnée par le lemme 1.9, justifient la définition suivante :

***Définition 1.11***. — Soient $\gamma$, $\gamma'$ deux courbes intégrales non oscillantes de $X$ telles que $w(\gamma) = w(\gamma') = p$. Nous dirons que $\gamma$, $\gamma'$ sont *asymptotiquement enlacées* s'il existe des coordonnées $w = (x, y, z)$ telles que $\gamma$, $\gamma'$ soient $w$-asymptotiquement enlacées.

On peut aussi montrer que l'enlacement asymptotique de deux courbes intégrales oscillantes qui possèdent des tangentes itérées est indépendant des coordonnées $z$-positives choisies pour le définir. Mais dans ce cas, on n'a plus le lemme 1.9 « d'abondance » de coordonnées $z$-positives et la démonstration est plus difficile. Nous n'aurons pas à utiliser ce résultat dans ce travail qui porte, essentiellement, sur les courbes non oscillantes.

***Proposition 1.12***. — *Soient $\gamma$, $\gamma'$ deux courbes intégrales de $X$ non oscillantes asymptotiquement enlaceés telles que $p = \omega(\gamma) = \omega(\gamma')$ et soit $H$ un germe de surface analytique lisse en $p$. Alors, $|\gamma|$, $|\gamma'|$ sont contenues dans la même composante connexe de $M \setminus H$.*

*Démonstration*. — Il suffit de choisir des coordonnées $w = (x, y, z)$ telles que $H = \{y = 0\}$ et qui sont $z$-positives pour $\gamma$, $\gamma'$. □

En particulier, dans les conditions de la proposition 1.12, $\gamma$ n'est pas contenue dans $H$ et toute courbe analytique lisse ou surface analytique lisse est un centre $\gamma$ ou $\gamma'$-admissible d'éclatement ou de ramification. La proposition suivante montre la stabilité de l'enlacement asymptotique par des morphismes admissibles :

***Proposition 1.13***. — *Soient $\gamma$, $\gamma'$ deux courbes intégrales de $X$ non oscillantes telles que $p = \omega(\gamma) = \omega(\gamma')$. Supposons que $\gamma$, $\gamma'$ sont asymptotiquement enlacées. Alors un morphisme de germes d'espaces analytiques $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{p}) \to (M, p)$ est $\gamma$-admissible si et seulement s'il est $\gamma'$-admissible. En particulier $\mathrm{TI}(\gamma) = \mathrm{TI}(\gamma')$. Les relevés $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\gamma}'$ de $\gamma$, $\gamma'$ par un morphisme admissible pour $\gamma, \gamma'$ sont asymptotiquement enlacés. Réciproquement, si $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{p}) \to (M, p)$ est admissible pour $\gamma, \gamma'$ et les relevés $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\gamma}'$ de $\gamma$, $\gamma'$ par $\pi$ sont asymptotiquement enlacés, alors $\gamma$, $\gamma'$ sont asymptotiquement enlacées.*

*Démonstration*. — D'après la proposition 1.12, si $\gamma, \gamma'$ sont asymptotiquement enlacées, toute courbe analytique lisse ou surface analytique lisse est un centre admissible d'éclatement ou de ramification pour $\gamma, \gamma'$. Par récurrence, il suffit de considérer le cas où $\pi : \widetilde{M} \to M$ est un morphisme admissible élémentaire : soit l'éclatement du point $p$, soit l'éclatement d'une courbe analytique lisse $Y$ passant par $p$, soit une $q$-ramification. Montrons tout d'abord que si $\widetilde{p} = \omega(\widetilde{\gamma})$, $\widetilde{p}' = \omega(\widetilde{\gamma}')$ alors $\widetilde{p} = \widetilde{p}'$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Soient $w = (x, y, z)$ des coordonnées $z$-positives pour $\gamma, \gamma'$ centrées en $p$ choisies de telle manière qu'il existe des coordonnées $\widetilde{w} = (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^3$ centrées en $\widetilde{p}$ avec $\widetilde{p}' \in \widetilde{U}$ telles que

$$\begin{aligned}
&\pi(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = (\widetilde{z}\widetilde{x}, \widetilde{z}\widetilde{y}, \widetilde{z}) \text{ si } \pi \text{ est l'éclatement de centre } p\,;\\
&\pi(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = (\widetilde{x}\widetilde{y}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) \quad \text{si } \pi \text{ est l'éclatement de centre } Y = \{x = y = 0\}\,;\\
&\pi(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}^q) \quad \text{si } \pi \text{ est une ramification.}
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, il existe un plan affine $\widetilde{H}$ dans la carte $\widetilde{w}$ tel que $\widetilde{p}, \widetilde{p}'$ appartiennent à deux composantes connexes distinctes de $\widetilde{U} \setminus \widetilde{H}$ et tel que $H = \pi(\widetilde{H})$ soit contenue dans une surface lisse. Les courbes $|\gamma|, |\gamma'|$ appartiennent à deux composantes distinctes de $\pi(\widetilde{U}) \setminus H$. D'après la proposition précédente, elles ne sont pas asymptotiquement enlacées. On peut supposer que $\widetilde{p} = \widetilde{p}'$. Les coordonnées $\widetilde{w}$ sont $\widetilde{z}$-positives pour $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}'$ et on a

$$\pi(S_{\widetilde{w}}(\widetilde{\gamma})) = S_w(\gamma) \quad \text{et} \quad \pi(S_{\widetilde{w}}(\widetilde{\gamma}) \cap |\widetilde{\gamma}'|) = S_w(\gamma) \cap |\gamma'|.$$

D'après le paragraphe précédent, les courbes $\gamma, \gamma'$ sont asymptotiquement enlacées si et seulement si $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}'$ le sont. □

**1.4. Pinceau intégral.** — Soit $\gamma$ une courbe intégrale de $X$ qui possède des tangentes itérées avec $\omega(\gamma) = p$.

***Définition 1.14.*** — Le *pinceau intégral* $\mathrm{PI}(\gamma)$ est l'ensemble des courbes intégrales $\gamma'$ de $X$ telles que $\mathrm{TI}^+(\gamma) = \mathrm{TI}^+(\gamma')$. Nous dirons que :

(1) le pinceau $\mathrm{PI}(\gamma)$ est *un pinceau intégral asymptotiquement enlacé* s'il existe des coordonnées $w$ centrées en $p$ telles que deux courbes quelconques distinctes de $\mathrm{PI}(\gamma)$ sont $w$-asymptotiquement enlacées ;

(2) le pinceau $\mathrm{PI}(\gamma)$ *est un pinceau intégral séparé* si tout couple $\gamma$, $\gamma'$ de $\mathrm{PI}(\gamma)$ est *séparable*, c'est-à-dire, s'il existe une application sous-analytique bornée non constante $f$ d'un voisinage de $|\gamma| \cup |\gamma'|$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathrm{card}(f(|\gamma|) \cap f(|\gamma'|)) < \infty$.

Lorsqu'il existe une courbe formelle $\widehat{\Gamma}$ telle que $\mathrm{TI}(\widehat{\Gamma}) = \mathrm{TI}(\gamma)$ nous dirons que $\widehat{\Gamma}$ est *l'axe* du pinceau intégral $\mathrm{PI}(\gamma)$. Par exemple, si $\gamma$ est oscillante, $\mathrm{PI}(\gamma)$ est un pinceau d'axe $\Gamma$ convergent d'après le théorème du spiralement axial. De plus, si $\Gamma \not\subset \mathrm{Sing}\, X$, l'une des demi-courbes $\Gamma^+ \subset \Gamma$ appartient à $\mathrm{PI}(\gamma)$ et, en précisant le théorème 2 de [**7**], on peut montrer que $\mathrm{PI}(\gamma)$ est un pinceau asymptotiquement enlacé et qu'il n'est pas séparé. D'autre part, il existe des pinceaux intégraux qui ne possèdent pas d'axe. C'est le cas de $\mathrm{PI}(\gamma)$ où $\gamma$ est une courbe intégrale de $X = -x\,\partial/\partial x - \lambda y\,\partial/\partial y - \mu z\,\partial/\partial z$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$ et $(1, \lambda, \mu)$ sont rationellement indépendants et $|\gamma| \not\subset \{xyz = 0\}$.

Dans la suite de ce paragraphe nous supposons que toutes les courbes de $\mathrm{PI}(\gamma)$ sont non oscillantes. C'est par exemple le cas si $\mathrm{PI}(\gamma)$ ne possède pas un axe convergent. D'après la proposition 1.10, la définition de pinceau enlacé composé de courbes non oscillantes est intrinsèque, elle est indépendante des coordonnées $w$ choisies.

Le concept de pinceau intégral n'est pas en général stable par morphisme admissible. Illustrons ceci par un exemple. Considérons $X = -x\,\partial/\partial x - y\,\partial/\partial y - z^2\,\partial/\partial z$. Le plan $z = 0$ est $X$-invariant et les courbes intégrales de $X$ situées dans $z > 0$ s'écrivent $\gamma_{a,b}(z) = (a\exp(-1/z),\, b\exp(-1/z),\, z)$. Ce sont les courbes d'un pinceau intégral $\mathrm{PI}(\gamma_{a_0,b_0})$ d'axe $\Gamma = \{x = y = 0\}$. L'éclatement $\pi_1$ de centre $x = y = 0$ est $\gamma$-admissible pour toute $\gamma_{a,b}$ avec $a^2 + b^2 \neq 0$. Soit $\gamma_{a,b;1}$ le relevé de $\gamma_{a,b}$ par $\pi_1$. Alors $\mathrm{PI}(\gamma_{a,b;1}) = \{\gamma_{a',b',1} \mid [a:b] = [a':b'] \in \mathbb{RP}(1)\}$. L'image inverse de $\mathrm{PI}(\gamma_{a_0,b_0})$ est une union infinie de pinceaux intégraux.

Soit $\widehat{\Gamma}$ une courbe formelle en $p \in M$. On dit que $\widehat{\Gamma}$ est (*sous-analytiquement*) *transcendante* si $\widehat{\Gamma}$ n'est pas contenue dans une surface sous-analytique ; c'est-à-dire, $\mathrm{TI}(\widehat{\Gamma})$ n'est pas un suite de points infiniment proches d'une surface sous-analytique. Soit $\widehat{\Gamma}(z) = (\widehat{x}(z), \widehat{y}(z), z)$ une paramétrisation de Puiseux de $\widehat{\Gamma}$. La courbe $\widehat{\Gamma}$ est transcendante si et seulement si pour tout germe non nul de fonction analytique $f$ en $p \in M$ la série $f(\widehat{x}(z), \widehat{y}(z), z)$ est non nulle et cette propriété est stable par éclatements de centre lisse. La proposition suivante montre que les pinceaux d'axe formel transcendant sont stables par des morphismes admissibles :

***Proposition 1.15***. — *Soit* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *un pinceau intégral de* $X$ *d'axe formel transcendant* $\widehat{\Gamma}$ *et soit* $\pi : (M', p') \to (M, p)$ *un morphisme local composé d'éclatements de centre lisse ou de ramifications tel que* $\widetilde{p}$ *appartient au transformé strict* $\widehat{\Gamma}'$ *de* $\widehat{\Gamma}$ *par* $\pi$. *Alors* $\pi$ *est admissible pour tout courbe* $\gamma \in \mathrm{PI}(\gamma_0)$ *et l'ensemble* $\pi^{-1}(\mathrm{PI}(\gamma_0))$ *des relevés des courbes de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *par* $\pi$ *est un pinceau intégral d'axe formel* $\widehat{\Gamma}'$. *Réciproquement, si* $\pi : (M', \gamma_0', p') \to (M, \gamma_0, p)$ *est un morphisme admissible tel que le pinceau intégral* $\mathrm{PI}(\gamma_0')$ *a un axe formel transcendant* $\widehat{\Gamma}'$, *alors,* $\widehat{\Gamma} = \pi(\widehat{\Gamma}')$ *est un axe transcendant du pinceau* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$.

*Démonstration*. — C'est une conséquence de la caractérisation suivante du contact plat entre $\gamma_0$ et $\widehat{\Gamma}$ ([**6**]) : si $\widehat{\Gamma}(z) = (\widehat{x}(z), \widehat{y}(z), z)$ est une paramétrisation de Puiseux de $\widehat{\Gamma}$ et $\gamma_0(z) = (x(z), y(z), z)$ est la paramétrization de la courbe $\gamma_0$ par $z$, alors $\mathrm{TI}(\widehat{\Gamma}) = \mathrm{TI}(\gamma_0)$ si et seulement si $\widehat{\Gamma}(z)$ est le développement asymptotique de $\gamma_0(z)$. Notons que toutes les courbes du pinceau $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ sont non oscillantes d'après le théorème de spiralement axial puisque $\widehat{\Gamma}$ est non convergente. □

Le lemme suivant nous sera utile pour définir certains types de pinceaux intégraux finaux.

***Lemme 1.16***. — *Soit* $\gamma$ *une courbe intégrale de* $X$ *qui possède une tangente en* $\omega(\gamma) = p$. *Cette tangente est une direction propre de* $DX(p)$ *de valeur propre* $\lambda(\gamma)$.

*Démonstration*. — Ce lemme est déjà prouvé dans [**7**] lorsque $\gamma$ a un contact plat avec une courbe analytique. L'argument utilisé se généralise de la façon suivante. Soit $\pi_1 : M_1 \mapsto M$ l'éclatement de centre $p$ et $\gamma_1$, $X_1$ les relevés de $\gamma$, $X$ par $\pi_1$. Un point $p$ de $\pi_1^{-1}(p) \equiv \mathbb{RP}(2)$ est un point singulier de $X_1$ si et seulement si $p$ est une direction propre de $DX(p)$. □

***Définition 1.17***. — Soit $\gamma$ une courbe intégrale de $X$ qui possède des tangentes itérées. On dit que $\mathrm{PI}(\gamma)$ est *hyperbolique* si $\lambda(\gamma) \neq 0$ et que $\mathrm{PI}(\gamma)$ est *final de type I* si $\lambda(\gamma) = 0$, $DX(p)$ est diagonalisable et de rang 1.

Dans les deux parties suivantes nous montrerons que les pinceaux hyperboliques et finaux de type I sont des pinceaux séparés de courbes non oscillantes. Dans la partie 4, nous définirons et étudierons les pinceaux finaux de type II. Ils ont un axe formel, ils peuvent être séparés, enlacés, ou posséder des courbes oscillantes. Enfin dans une dernière partie, nous montrerons que ces résultats impliquent les théorèmes I et II de l'introduction via des morphismes admissibles.

## 2. Pinceau intégral hyperbolique

L'objet de cette partie est de démontrer que les pinceaux hyperboliques sont séparés. Dans la suite, $X$ désigne un champ de vecteurs analytique sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^3$ et $\gamma_0 : t \mapsto \gamma_0(t)$ une courbe fixée de $X$ avec $\lambda(\gamma_0) \neq 0$. Pour des raisons évidentes de dynamique, $\lambda(\gamma_0) < 0$.

***Théorème 2.1***. — *Un pinceau intégral hyperbolique de $X$ est séparé. Plus précisément, supposons que $\gamma_0$ possède des tangentes itérées et que la valeur propre $\lambda(\gamma_0)$ de $DX(0)$ correspondant à la tangente en 0 à $\gamma_0$ soit strictement négative. Alors $\gamma_0$ est non oscillante ainsi que toutes les courbes $\gamma$ de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$. Deux courbes distinctes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ peuvent être séparées par une submersion analytique d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^2$.*

En fait, nous allons démontrer sous les mêmes hypothèses et avec les mêmes notations le résultat suivant :

***Proposition 2.2***. — *Pour tout $\gamma \in \mathrm{PI}(\gamma_0)$, le germe en 0 de $|\gamma|$ est un germe de courbe pfaffienne.*

Avant de rappeler la définition d'un germe de courbe pfaffienne, notons que cette proposition implique le théorème. Tout d'abord « les propriétés de finitude » des sous-ensembles pfaffiens [**18, 25**] impliquent que toutes les courbes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ sont non oscillantes. D'autre part, d'après [**21**] il existe une structure o-minimale, la famille des $T^\infty$-pfaffiens, qui contient les sous-ensembles pfaffiens de $\mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que deux courbes distinctes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ peuvent être séparées par une projection linéaire dans des coordonnées fixées.

Soit $\gamma : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}^3$ avec $\omega(\gamma) = 0$ une immersion analytique, injective et soient $\omega_1$, $\omega_2$ deux 1-formes analytiques sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^3$ avec $\omega_1$ intégrable (c'est-à-dire $\omega_1 \wedge d\omega_1 \equiv 0$). Le germe de $|\gamma|$ en 0 est un *germe de courbe* $\{\omega_1, \omega_2\}$*-pfaffien* si l'équation de pfaff $\omega_1 = 0$ possède une *variété intégrale de Rolle* $R_1$ et si la restriction à $R_1$ de $\omega_2$ possède une courbe intégrale de Rolle $R_2$ telle que pour $t$ assez grand $\gamma(t)$ appartient à $R_2$. Rappelons que si $\omega = 0$ est une équation de Pfaff intégrable, analytique sur une variété $M$ et $R$ une variété intégrale (lisse) de $\omega = 0$, on dit que $R$ est de Rolle si toute courbe analytique transverse au feuilletage défini par $\omega = 0$ coupe $R$ en un point au plus.

La démonstration de la proposition 2.2 repose sur le concept de variété stable. Rappelons brièvement sa définition et ses propriétés classiques ([**28, 9, 12**]). Soit $Y$ un champ de vecteurs analytique sur un voisinage $V$ de 0 dans $\mathbb{R}^m$ dont 0 est un point singulier. Notons $\Lambda^s = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell\}$ le sous-ensemble du spectre de $DY(0)$ constitué des valeurs propres de partie réelle strictement négative. Soit $E^s$ le sous-espace de $T_0\,\mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^m$ invariant par $DY(0)$ qui lui correspond.

***Théorème 2.3* (Variété stable).** — *Il existe une unique sous-variété analytique lisse $W^s$ de dimension $\ell$ qui possède les trois propriétés suivantes :*

(i) *La variété $W^s$ contient $0$ et $E^s$ est son espace tangent en $0$.*

(ii) *La variété $W^s$ est positivement invariante par le flot du champ $Y$.*

(iii) *Soit $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, $t \geqslant 0$ une courbe intégrale de $X$, avec $\omega(\gamma) = 0$, qui possède une tangente en $0$ appartenant à $E^s$. Alors le germe de $|\gamma|$ est contenue dans $W^s$.*

La propriété (iii) est moins classique que les deux précédentes (voir [**31**]).

*Démonstration de la proposition 2.2.* — Nous reprenons les notations, hypothèses du théorème : $X$ est un champ de vecteurs analytique sur un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^3$, $\gamma_0$ une courbe intégrale de $X$ avec $\omega(\gamma_0) = 0$ qui possède des tangentes itérées, la valeur propre $\lambda(\gamma_0)$ est strictement négative et $\{\lambda(\gamma_0), \lambda_0', \lambda_0''\}$ est le spectre de $DX(0)$. Par définition de $W^s$, les courbes $\gamma$ de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ sont contenues dans $W^s$. Distinguons les cas suivants :

Si $\dim W^s = 1$, la variété $W^s$ est une courbe analytique lisse. Le pinceau $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ ne contient que $\gamma_0$. Son image $|\gamma_0|$ est une composante connexe de $W^s \setminus \{0\}$. C'est une demie branche analytique.

Si $\dim W^s = 2$, puisque nous nous intéressons aux germes en $0$ des courbes $\gamma$ de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$, nous pouvons supposer que $X$ est analytique sur $\mathbb{R}^3$ et que $W^s$ est le plan $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Les courbes $\gamma$ de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ sont des courbes intégrales de $X' = X|_{W^s}$ et elles ont une tangente en $0$. D'après [**18**] ou [**7**] page 298, leur germe en $0$ est pfaffien.

Si $\dim W^s = 3$ et $\lambda_0'$, $\lambda_0'' < 0$, nous reprenons un argument de [**19**]. Le point $0$ est une singularité dans le domaine de Poincaré de $X$. D'après le théorème de Poincaré-Dulac ([**9**] ou [**1**], page 179), il existe des coordonnées analytiques $w = (x, y, z)$ centrées en $0$ telles que $X$ s'écrive, modulo une unité multiplicative,

$$X = -x\,\frac{\partial}{\partial x} + f(x, y)\,\frac{\partial}{\partial y} + g(x, y, z)\,\frac{\partial}{\partial z}$$

où $f \in \mathbb{R}[x, y]$, $g \in \mathbb{R}[x, y, z]$. Les courbes intégrales de $X$ sont des courbes intégrales du système : $\omega_1 = xdy - f(x, y, )dx = 0$, $\omega_2 = f(x, y)dz - g(x, y, z)dy = 0$. L'équation $\omega_1$ est intégrable. Soit $R_1(\gamma)$ la variété intégrale de $\omega_1 = 0$ qui contient une courbe intégrale fixée $\gamma \in \mathrm{PI}(\gamma_0)$. C'est un cylindre $|\gamma_1| \times \mathbb{R}$ où $\gamma_1$ est une courbe intégrale du champ de vecteurs $X' = X|_{\mathbb{R}^2}$. Compte tenu de l'écriture de $X'$, la courbe $\gamma_1$ possède une tangente en $0$ et $|\gamma_1|$ est une courbe pfaffienne. Le cylindre $|\gamma_1| \times \mathbb{R} = R_1(\gamma)$ est une variété de Rolle. La courbe $|\gamma|$ est une courbe intégrale de $\omega_2|_{R_1(\gamma)} = 0$. Elle possède une tangente en $0$. C'est une courbe de Rolle, elle est pfaffienne ([**18**]).

Si $\dim W^s = 3$ et $\lambda_0' = \overline{\lambda_0''} = \alpha_0 + i\beta_0$, $\alpha_0 < 0$, $\beta_0 \neq 0$, nous allons nous ramener au cas $\dim W^s = 1$. Soit $n$ le plus petit entier tel que $n > \alpha_0/\lambda(\gamma_0)$ et soit

$$M_0 = \mathbb{R}^3 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \cdots \longleftarrow M_{n-1} \xleftarrow{\pi_n} M_n$$

la suite de $n$ éclatements ponctuels de centres respectifs $p_0 = 0$, $p_1$, $p_2, \ldots, p_{n-1}$ où $\mathrm{TI}(\gamma_0) = \{p_k\}$. Pour $k = 1, 2, \ldots, n$ soient $\gamma_k$, $X_k$ les relevés par $\pi_k$ de $\gamma_{k-1}$, $X_k$, avec $X_0 = X$. D'après le lemme 1.16, on sait que la tangente en $p_k$ à $\gamma_k$ est une direction propre de $DX_k(p_k)$ de valeur propre réelle $\lambda(\gamma_k)$. Soit $\Lambda_k = \{\lambda(\gamma_k), \lambda'_k, \lambda''_k\}$ le spectre de $DX_k(p_k)$. On a $\Lambda_k = \{\lambda(\gamma_{k-1}), \lambda'_{k-1} - \lambda(\gamma_{k-1}), \lambda''_{k-1} - \lambda(\gamma_{k-1})\}$, pour $k \geqslant 2$. On en déduit que $\lambda'_n = \lambda_0 - n\lambda(\gamma_0) = (\alpha_0 - n\lambda(\gamma_0)) + i\beta_0$. La partie réelle de $\lambda'_n$ est strictement positive. La variété stable de $X_n$ en $p_n$ est de dimension 1. Ainsi $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ est constitué de $\gamma_0$ qui est une demie branche analytique. □

## 3. Pinceau intégral central de type I

Soit $X$ un champ de vecteurs analytique sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^3$ et soit $\gamma_0$ une courbe intégrale de $X$, possèdant des tangentes itérées et telle que $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ est un pinceau intégral final de type I. C'est à dire que l'endomorphisme $DX(0)$ est diagonalisable de rang 1, de spectre $\{0, 0, \lambda\}$ avec $\lambda \neq 0$ et $\lambda(\gamma_0) = 0$. Soient $E_0$ le noyau de $DX(p)$ et $E_1$ le sous-espace propre de $DX(0)$ correspondant à $\lambda$. D'après [**12**], il existe une unique courbe analytique lisse $W^h$ tangente en 0 à $E_1$ qui est invariante par le flot de $X$. Dans toute la suite nous fixons des coordonnées analytiques sur $\mathbb{R}^3$

$$w = (x, y, z) = (u, z) \quad \text{avec } W^h = \{u = 0\},\ E_0 = \{z = 0\}.$$

***Théorème 3.1***. — *Les courbes de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *sont non oscillantes et*

(i) *Si* $\lambda > 0$, *les courbes de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *sont contenues dans une surface* $X$*-invariante de classe* $C^1$ *qui est un graphe au-dessus de* $\{z = 0\}$. *Elles sont séparées par la projection* $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.

(ii) *Si* $\lambda < 0$, *toute courbe* $\gamma$ *de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *est contenue dans une surface* $L(\gamma)$ *de classe* $C^1$ *et* $X-$*invariante (appelée lamelle) qui possède la propriété suivante. Deux courbes distinctes* $\gamma$, $\gamma'$ *de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *sont séparées par la projection* $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ *si* $L(\gamma) \neq L(\gamma')$ *et elles sont séparées par la projection linéaire de* $L(\gamma)$ *sur le plan contenant l'axe* $u = 0$ *et la tangente en* 0 *à* $\gamma_0$ *si* $L(\gamma) = L(\gamma')$.

Désignons par $A^c$ (comme attracteur central) l'ensemble des courbes intégrales $\gamma$ de $X$ dont 0 est l'ensemble $\omega$-limite et telles que $|\gamma| \not\subset \{u = 0\}$. D'après [**29**], une courbe $\gamma \in A^c$ possède des tangentes itérées si elle possède une tangente en 0. Ainsi nous pouvons remplacer l'hypothèse « $\gamma_0$ possède des tangentes itérées » par « $\gamma_0$ possède une tangente en 0 ». De plus, on peut montrer, en précisant des arguments et des résultats de [**10, 29**], que toutes les courbes de $A^c$ possèdent une tangente en 0 dès que cette propriété est vraie pour l'une d'entre elles. Dans ce cas, $A^c$ est une union disjointe de pinceaux intégraux. Ceci sort du cadre de notre étude et sera l'objet d'une publication ultérieure.

Dans le paragraphe 1, nous démontrons que les courbes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ sont non oscillantes et le point (i) du théorème 3.1. La démonstration du point (ii) est essentiellement une conséquence d'un *« théorème de la variété centrale »* relativement bien connu des spécialistes [**15, 8, 26**]. Nous l'énonçons dans le deuxième paragraphe sous la forme que nous a enseignée F. Takens. Nous en déduisons le concept de lamelle et prouvons (ii).

**3.1. Variété centrale.** — Nous reprenons les hypothèses et notations de l'introduction pour $X$, $w=(x,y,z)$. Un calcul classique montre qu'il existe une unique série formelle $\widehat{\psi}$ de $\mathbb{R}[[x,y]]$, telle que

$$\widehat{\psi}(0)=0,\quad D\widehat{\psi}(0)=0,\quad L_X(z-\widehat{\psi}(x,y))\in(z-\widehat{\psi}(x,y))\mathbb{R}[[x,y]].$$

La surface formelle $\widehat{W^c}=\{z-\widehat{\psi}(x,y)=0\}$ est $X$-invariante et nous l'appelerons *variété centrale formelle* de $X$. En général, elle n'est pas convergente. Cependant, pour tout $k\geqslant 1$, elle peut s'incarner dans « une » surface de classe $C^k$, $W^c_k$, invariante par le flot de $X$, tangente en 0 au plan $z=0$. C'est une *variété centrale* de $X$ en 0. Plus précisément, $k\geqslant 1$ étant fixé, il existe une fonction $\psi_k$ de classe $C^k$ sur un voisinage $V_k$ de $0\in\mathbb{R}^2$ telle que $\psi_k$ et $\widehat{\psi}$ ont les mêmes jets d'ordre $k$ en 0 et la surface $z-\psi_k(x,y)=0$ est $X-$invariante. En général, il n'y a pas unicité des variétés centrales pour un $k$ fixé ni de variété centrale de classe $C^\infty$ [**32**].

Montrons que les courbes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ sont non oscillantes. Cette assertion étant déjà prouvée dans [**29**], nous allons en donner l'esquisse d'une démonstration qui s'appuie sur d'autres arguments. Supposons qu'une courbe $\gamma$ de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ soit oscillante. D'après le thèoréme 1.1, la courbe $\gamma$ spirale autour d'une demie branche analytique $\Gamma^+$ en 0 qui est $X$-invariante. Distinguons deux cas. Si $\Gamma^+$ n'est pas contenue dans le lieu singulier de $X$, d'après [**7**], c'est l'axe d'un tourbillon de $X$ et toutes les courbes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)\smallsetminus\Gamma^+$ sont oscillantes. Quitte à effectuer un nombre fini d'éclatements ponctuels, on peut supposer ([**7**]) que $DX(0)$ est de rang 2. Ce qui contredit l'hypothèse initiale. Supposons que $\Gamma^+$ soit contenue dans le lieu singulier de $X$. Quitte à changer $X$ en $-X$, on peut supposer que la valeur propre $\lambda=\lambda_0$ de $DX(0)$ est strictement négative. En tout point $p$ de $\Gamma^+$ voisin de 0, le spectre de $DX(p)$ est du type $\{0,\lambda'_p,\lambda_p\}$ avec $\lambda_p\neq 0$ et $|\lambda'_p|$ petit par rapport à $|\lambda_p|$. D'après une version à paramètre du théorème d'Hadamard [**12**] (voir par exemple [**24**]), en tout $p\in\Gamma^+$ assez voisin de 0, il existe une courbe lisse, analytique, invariante par $X$ et passant par $p$ tangente à la direction propre correspondante à $\lambda_p$. L'union $S$ de ces courbes est une surface analytique qui contient $\Gamma^+$. Elle est invariante par le flot de $X$ par construction. D'après la propriété caractéristique du spiralement axial décrite dans 1.1, $\gamma$ coupe $S$ une infinité de fois et n'est pas contenue dans $S$, ce qui est incompatible avec « $S$ est $X$-invariante ».

Prouvons maintenant la partie (i) du théorème 3.1. Soit $W^c_1$ une variété centrale de classe $C^1$ de $X$ au point 0. Quitte à restreindre l'ouvert $U$ de définition de $X$, on peut supposer que $W^c_1$ est le graphe d'une fonction de classe $C^1$, $\psi_1:u\mapsto\psi_1(u)$ où

$u$ appartient à un voisinage $V$ de 0 dans $\mathbb{R}^2$. Dans la carte (de classe $C^1$) $w' = (u, z')$ avec $z' = z - \psi_1(x, y)$ le champ $X$ s'écrit

$$X = a(w')\,\frac{\partial}{\partial x} + b(w')\,\frac{\partial}{\partial y} + \lambda z'(1 + c(w'))\,\frac{\partial}{\partial z},$$

où $a(0) = b(0) = c(0) = 0$. Quitte à restreindre $U$, on peut supposer que $|c(w')| < 1$. Soit $\gamma : t \mapsto (u(t),\ z'(t))$ une courbe intégrale quelconque de $X$ telle que $z'(0) \neq 0$. La fonction $t \mapsto |z'(t)|$ est strictement croissante et ainsi $\omega(\gamma) \neq 0$. Les courbes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ sont contenues dans $W_1^c$. La restriction à $W_1^c$ de la projection $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ est injective. Elle sépare les courbes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$.

**3.2. Partition en lamelles.** — Dans ce paragraphe nous prouvons la partie (ii) du théorème 3.1. Nous reprenons les hypothèses et notations précédentes : $X$ est un champ de vecteurs analytique sur un voisinage $U$ de 0 et l'endomorphisme $DX(0)$ est diagonalisable de spectre $\{0, 0, \lambda\}$, avec $\lambda < 0$. Quitte à effectuer un changement de temps, on peut supposer $\lambda = -1$. Les coordonnées $w = (x, y, z) = (u, z)$ sont fixées telles que $\operatorname{Ker} DX(0) = \{z = 0\}$ et $\{u = 0\}$ est la variété stable $W^s$ de $X$ en 0. Quitte à restreindre $U$ et à changer $z$ en $\mu z$ avec $\mu > 0$, on a :

***Théorème 3.2*** **([8, 15, 26])**. — *Il existe un voisinage $V$ de 0 dans $\mathbb{R}^2$ et un $C^2$-difféomorphisme $H : U \to V \times\, ]-1, 1[$, $H : w = (u, z) \mapsto \overline{w} = H(w) = (\overline{u}, \overline{z}) = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, tangent à l'identité en 0, qui applique l'axe $u = 0$ sur $\overline{u} = 0$ tel que*

$$\overline{X} = H_*(X) = \overline{X}_0(\overline{u}) - \overline{z}(1 + d(\overline{w}))\,\frac{\partial}{\partial \overline{z}},$$

*où $\overline{X}_0$ est un champ de vecteurs de classe $C^1$ sur $V$ vérifiant $\overline{X}_0(0) = 0$, $D\overline{X}_0(0) = 0$ et $d$ est une fonction continue sur $U$ nulle en 0.*

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni des deux normes euclidiennes canoniques associées aux coordonnées $w = (x, y, z)$, $\overline{w} = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ $\|w\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\|\overline{w}\|^2 = \overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2$. Le fait de les noter de la même façon simplifie l'écriture et n'apporte pas d'ambiguïté. Quitte à restreindre $U$, on peut supposer en outre que

$$\|DH(w)\| < 3/2 \quad \text{si } w \in U, \quad \|DH^{-1}(\overline{w})\| < 3/2, \quad |d(\overline{w})| < 1/2 \quad \text{si } \overline{w} \in H(U).$$

Dans la suite $\gamma : t \mapsto (u(t), z(t))$, $t \geqslant 0$, $u(t) \neq 0$ est une courbe intégrale de $X$ contenue dans $\mathrm{PI}(\gamma_0)$. Son image $\overline{\gamma} = H \circ \gamma : t \mapsto (\overline{u}(t), \overline{z}(t))$ est une courbe intégrale maximale de $\overline{X}$ telle que $\omega(\overline{\gamma}) = 0$. La composante horizontale $\overline{X}_0(\overline{u})$ de $\overline{X}(\overline{u}, \overline{z})$ étant indépendante de $\overline{z}$, la courbe $t \mapsto \overline{u}(t)$ est une courbe intégrale du champ de vecteurs $\overline{X}_0$. On désigne par $\overline{\gamma}^c$ ($c$ comme central) la courbe intégrale de $\overline{X}$ définie par

$$\overline{\gamma}^c : t \longmapsto \overline{\gamma}^c(t) = (\overline{u}(t), 0), \quad \frac{d}{dt}\,(\overline{u}(t)) = \overline{X}_0(\overline{u}(t)) \neq 0.$$

L'image inverse $L(\gamma)$ de $L(\overline{\gamma}) = |\overline{\gamma}^c| \times\, ]-1, 1[$ par $H$ est appelée *lamelle* de $\gamma$. L'image réciproque par $H$ de $V \times \{0\}$ est une variété centrale $W_1^c$ et $\gamma^c = H^{-1} \circ \overline{\gamma}^c$ est une courbe « accompagnatrice » de $\gamma$ au sens de [**29**]. A priori, $L(\gamma)$ dépend de $H$.

Mais, nous montrerons à la fin de ce chapitre que le germe de $L(\gamma)$ en 0 a un sens intrinsèque. Il est indépendant de $H$ et des coordonnées choisies pour définir $L(\gamma)$. La lamelle $L(\gamma)$ hérite, via $H^{-1}$, des propriétés différentiables des $L(\overline{\gamma})$. Plus précisément, on a l'énoncé suivant :

***Proposition 3.3* (Structure des lamelles).** — *La lamelle $L(\gamma)$ est une surface de classe $C^1$ invariante par le flot de $X$. Plus précisément $L(\gamma)$ est un ouvert d'une surface $S_\gamma$ de classe $C^1$ qui contient $U \cap \{u = 0\}$, tangente en 0 au plan contenant l'axe $u = 0$ et la tangente en 0 à $\gamma$. Le bord de $L(\gamma)$ dans $S_\gamma$ est l'intervalle $U \cap \{u = 0\}$.*

*Démonstration.* — La courbe $\gamma$ étant non oscillante, on vérifie que le germe de $|\gamma|$ en 0 est un graphe de classe $C^1$ sur sa tangente. Quitte à effectuer une rotation dans le plan $z = 0$, on peut supposer que la tangente orientée de $\gamma$ est le demi axe $\{y = z = 0, x > 0\}$. Nous notons encore $x \mapsto \gamma(x) = (x, y(x), z(x))$, $x > 0$ la paramétrisation de $|\gamma|$ par $x$. Il existe une immersion $\sigma$ de classe $C^1$ de $]-\alpha, \alpha[$ dans $\{y = z = 0, x \leqslant 0\} \cup |\gamma|$ qui prolonge $\gamma$. Son image $H \circ \sigma : x \mapsto (\overline{\sigma}^c(x), \overline{z}(x))$ est une courbe de classe $C^1$. L'ensemble $|\overline{\sigma}^c| \times ]-1, 1[$ est une surface de classe $C^1$ dès que $\alpha$ est assez petit. Son image inverse par $H$ est une surface $S_\gamma$ de classe $C^1$ qui possède les propriétés requises. □

***Corollaire 3.4* (Séparation de $\gamma, \gamma'$ si $L(\gamma) = L(\gamma')$).** — *Soit $\gamma'$ une courbe de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ contenue dans $L(\gamma)$ distincte de $\gamma$. La projection $(x, y, z) \mapsto (x, z)$ sépare $\gamma, \gamma'$.*

*Démonstration.* — D'après la proposition précédente, il existe un voisinage $U_\gamma$ de 0 tel que $S_\gamma \cap U_\gamma$ soit un graphe de classe $C^1$ sur son plan tangent en 0, le plan $y = 0$. En particulier $L(\gamma) \cap U_\gamma$ est un graphe sur un ouvert du demi plan $\{y = 0, x > 0\}$. La restriction à $L(\gamma) \cap U_\gamma$ de $(x, y, z) \mapsto (x, z)$ est injective. Elle sépare les courbes $|\gamma| \cap U_\gamma$, $|\gamma'| \cap U_\gamma$. □

Le lemme suivant est un des arguments de la caractérisation intrinsèque des lamelles. Il nous permettra aussi de minorer la distance entre deux courbes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ qui n'appartiennent pas à la même lamelle.

***Lemme 3.5*.** — *Soit $\gamma'$ une courbe intégrale de $X$ contenue dans la lamelle $L(\gamma)$. Il existe $t_0$ tel que pour $t$ assez grand $\gamma'(t + t_0) = \gamma(t) + \exp(-t/2)\, \varphi(t)$ où $\|\varphi\|$ est une fonction bornée.*

*Démonstration.* — Par définition de $L(\gamma)$, les images $|\overline{\gamma}|$, $|\overline{\gamma}'|$ de $\overline{\gamma} = H \circ \gamma$, $\overline{\gamma}' = H \circ \gamma'$ correspondent à la même orbite de $\overline{X}_0$. Il existe $t_0$ tel que pour $t \gg t_0$,

$$\overline{\gamma}(t) = (\overline{u}(t), \overline{z}(t)), \quad \overline{\gamma}'(t) = (\overline{u}(t - t_0), \overline{z}'(t))$$

avec $\frac{d\overline{u}}{dt}(t) = \overline{X}_0(u(t))$. Les fonctions $\overline{z}(t)$, $\overline{z}'(t)$ sont des solutions de

$$\frac{d\overline{z}}{dt} = -\overline{z}(1 + d(\overline{w})) < -\overline{z}/2 \quad \text{avec } \overline{z} > 0.$$

On en déduit que $\overline{z}(t) = \exp(-t/2)\overline{\varphi}(t)$, $\overline{z}'(t) = \exp(-t/2)\overline{\varphi}'(t)$ où $\|\overline{\varphi}\|$, $\|\overline{\varphi}'\|$ sont des fonctions bornées. Puisque $\|DH^{-1}(\overline{w})\| < 3/2$, on a la majoration

$$\|\gamma'(t+t_0) - \gamma(t)\| = \|H^{-1}(\overline{u}(t), \overline{z}'(t+t_0)) - H^{-1}(\overline{u}(t), \overline{z}(t))\| < \frac{3}{2}|\overline{z}'(t+t_0) - \overline{z}(t)|.$$

ceci démontre le lemme compte tenu de l'écriture de $\overline{z}(t)$, $\overline{z}'(t)$. □

***Proposition 3.6***. — *Deux courbes intégrales $\gamma$, $\gamma'$ distinctes qui n'appartiennent pas à la même lamelle sont séparées par la projection $(x,y,z) \mapsto (x,y)$. Plus précisément, si $\gamma(t) = (u(t), z(t))$, $\gamma'(t) = (u'(t), z'(t))$, alors quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $T$ et $K > 0$ tels que*

$$\|u'(t_1) - u(t)\| > K\exp(-\varepsilon t), \quad \textit{si } t_1 \geqslant t > T.$$

La démonstration de cette proposition repose sur le lemme suivant (certainement classique) qui minore la vitesse à laquelle se rapprochent deux courbes intégrales qui tendent vers le même point singulier dégénéré d'un champ de vecteurs.

***Lemme 3.7***. — *Soit $F$ une application de classe $C^1$ d'un voisinage $V$ de $0 \in \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $F(0) = 0$, $DF(0) = 0$ et soient $t \mapsto v(t)$, $t \mapsto v'(t)$ deux courbes intégrales de $dv/dt = F(v)$ dont $0$ est l'ensemble $\omega$-limite. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T$ tel que*

$$\|v'(t_1) - v(t)\| > \exp(-\varepsilon t)\,\|v'(T + t_1 - t) - v(T)\| \quad \textit{si } t_1 \geqslant t > T.$$

*Démonstration*. — Puisque $F$ est $C^1$ et $F(0) = 0$ on a

$$F(v') - F(v) = DF(v)(v' - v) + \|v' - v\|\varphi(v', v)$$

où $DF$, $\varphi$ sont continues et $DF(0) = 0$, $\varphi(0,0) = 0$. Soit $\eta > 0$ tel que $\|DF(v)\| < \varepsilon/2$ et $\|\varphi(v, v')\| < \varepsilon/2$ si $\|v\|$, $\|v'\| < \eta$. Il existe $T > 0$ tel que si $t > T$ alors $\|v(t)\|$, $\|v'(t)\| < \eta$. Fixons $t_0 \geqslant 0$. La fonction $\rho(t) = \|v'(t+t_0) - v(t)\|$ satisfait l'équation

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\rho(t)^2) = \big\langle v'(t+t_0) - v(t), F(v'(t+t_0)) - F(v(t))\big\rangle.$$

Pour $t > T$ on a $d\rho(t)^2/dt > -2\varepsilon\rho(t)^2$. Ainsi $\rho(t) > \exp(-\varepsilon t)\,\rho(T)$ si $t > T$, indépendemment de $t_0$. L'inégalité requise s'en déduit en prenant $t_0 = t_1 - t$. □

*Démonstration de la proposition 3.6*. — En reprenant les notations précédentes on pose

$$\overline{\gamma}(t) = H \circ \gamma(t) = (\overline{u}(t), \overline{z}(t)), \overline{\gamma}^c(t) = (\overline{u}(t), 0), \gamma^c(t) = H^{-1} \circ \overline{\gamma}^c(t) = (u^c(t), z^c(t)).$$

On définit de la même façon $\overline{\gamma}'(t)$, $\overline{\gamma}'^c(t)$, $\gamma'^c(t)$ et on écrit leurs composantes dans les coordonnées $w$, $\overline{w}$. Les courbes $\gamma^c$, $\gamma'^c$ appartiennent à la variété centrale $W_1^c$ qui est tangente en $0$ au plan $z = 0$. Puisque $\omega(\gamma^c) = \omega(\gamma'^c) = 0$, il existe $T > 0$ tel que

$$\frac{1}{2}\|\gamma'^c(t_1) - \gamma^c(t)\| < \|u'^c(t_1) - u^c(t))\| \quad \text{si } t_1 \geqslant t > T.$$

Puisque $\gamma^c$ appartient à la lamelle $L(\gamma)$, d'après le lemme 3.5, on peut choisir $T$ tel que

$$\|u^c(t) - u(t)\| \leqslant \|\gamma(t) - \gamma^c(t)\| < 1/2\, K_1 \exp(-t/2) \quad \text{si } t > T,$$

où $K_1$ est une constante positive. On a évidemment la même majoration (avec les mêmes $T$, $K_1$) pour le couple $u'^c$, $u'$. On en déduit, par l'inégalité triangulaire entre $u$, $u^c$, etc. que

$$1/2\, \|\gamma'^c(t_1) - \gamma^c(t)\| < \|u'(t_1) - u(t)\| + K_1 \exp(-t/2) \quad \text{si } t_1 \geqslant t > T.$$

Puisque $\|DH(w)\| < 3/2$, on a $\|\overline{u}' - \overline{u}\| \leqslant \|\overline{w} - \overline{w}'\| \leqslant 3/2\, \|w - w'\|$. En appliquant cette majoration à $w = \gamma^c(t)$, $w' = \gamma'^c(t_1)$, on obtient pour $T$ assez grand :

$$(*) \qquad \|\overline{u}'(t_1) - \overline{u}(t)\| \leqslant 3\|u'(t_1) - u(t)\| + 3K_1 \exp(-t/2) \quad \text{si } t_1 \geqslant t > T.$$

Fixons $\varepsilon < 1/2$ et appliquons le lemme 3.7 précédent aux solutions $\overline{u}(t)$, $\overline{u}'(t)$ de $d\overline{u}/dt = X_0(\overline{u})$. Puisque $\gamma$, $\gamma'$ n'appartiennent pas à la même lamelle, $\overline{u}(t) \neq \overline{u}'(t_1)$ pour $t, t_1 \geqslant 0$ et, en choisissant $T$ assez grand, il existe $K_2 > 0$ tel que

$$\|\overline{u}'(t_1) - \overline{u}(t)\| > K_2 \exp(-\varepsilon t) \quad \text{si } t_1 \geqslant t > T.$$

Cette inégalité avec $(*)$ prouve la minoration annoncée. □

***Corollaire 3.8***. — *La lamelle $L(\gamma)$ a un sens intrinsèque. Plus précisément $L(\gamma)$ est la réunion des courbes accompagnatrices $\gamma'$ de $\gamma$ au sens de* [**29**] *: il existe $T$, $K > 0$ et $t_0 > 0$ tels que $\|\gamma'(t + t_0) - \gamma(t)\| \leqslant K \exp(-t/2)$ si $t > T$.*

*Démonstration*. D'après le lemme 3.5, si $\gamma'$ est contenue dans $L(\gamma)$ cette majoration est vérifiée. D'après la proposition 3.6, elle ne peut pas l'être si $\gamma'$ n'est pas contenue dans $L(\gamma)$ puisque l'on aurait, pour $\varepsilon = 1/2$, la minoration

$$\exp(-t/2) \leqslant \|u'(t + t_0) - u(t)\| \leqslant \|\gamma'(t + t_0) - \gamma(t)\|$$

dès que $t$ serait assez grand pour tout $t_0 \geqslant 0$. □

## 4. Pinceau intégral final de type II

L'objet de cette section est l'étude d'un pinceau intégral $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ non hyperbolique de $X$ lorsque $DX(p)$ est de rang 2 et le germe de $X$ en $p$ vérifie des conditions algébriques « génériques ». Un tel pinceau sera appelé un pinceau final de type II. Le premier paragraphe est consacré à leur définition et à l'énoncé des résultats, les suivants à la démonstration de ces résultats. C'est le cas le plus riche, le pinceau $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ peut alors être séparé ou enlacé. Les courbes qui le constituent peuvent être oscillantes ou non oscillantes.

**4.1. Définition d'un pinceau final de type II.** — Dans toute cette partie $X$ désigne un champ de vecteurs analytique sur $\mathbb{R}^3$ qui s'écrit dans des coordonnées $w = (x, y, z) = (u, z)$

$$(*) \qquad X = L(u, z) - z^{q+1}\Big(\frac{\partial}{\partial z} + Y\Big), \quad L(u, z) = \sum_{i=0}^{q} z^i L_i(u)$$

où $q \geqslant 1$, les $L_i(u)$ sont des champs de vecteurs linéaires sur $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ avec rang $DL_0(0) = 2$ et $Y$ est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ tel que $Y(0)=0$, $dz(Y)=0$. Nous dirons que 0 est une singularité *préfinale (de type II) pour* $X$ et que les coordonnées $w = (u, z)$ sont *de bonnes coordonnées* pour $X$. Ces singularités ont été étudiées par P. Bonckaert, F. Dumortier dans le cadre $C^\infty$ ([**3**]). Le plan $z = 0$ est l'unique plan invariant par $X$ tangent à $z = 0$. Soit $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, $t \geqslant 0$ une courbe intégrale de $X$ telle que $z(0) \neq 0$. Quitte à changer $z$ en $-z$, on peut supposer $z(0) > 0$. Pour $t \geqslant 0$, on a $z(t) > 0$ et $z(t)$ est strictement décroissante. La courbe $\gamma$ est transverse aux plans $z =$ constante. Elle peut être reparamétrée par $z$, ce que nous écrirons $\gamma(z) = (x(z), y(z), z) = (u(z), z)$, $z > 0$. L'application $u(z)$ est solution de l'équation différentielle

$$(*_u) \qquad z^{q+1}\,\frac{du}{dz} = -\sum_{i=0}^{q} z^i L_i(u) + z^{q+1} Y(u, z).$$

Nous avons identifié les champs de vecteurs $L_i(u)$, $Y(u, z)$ et leur écriture dans la base $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$. La première partie du résultat suivant est classique ([**9**]) et sa démonstration est élémentaire. La deuxième partie est démontrée dans [**3**].

***Proposition 4.1***. — *Supposons que* 0 *soit une singularité préfinale de* $X$ *et que* $w = (x, y, z) = (u, z)$ *soient de bonnes coordonnées pour* $X$. *Il existe une unique courbe formelle lisse* $\widehat{\Gamma}$ *invariante par* $X$ *et tangente à l'axe* $u = 0$. *De plus, il existe une courbe intégrale* $\gamma_0$ *de* $X$ *avec* $\omega(\gamma_0) = 0$ *qui a un contact plat avec* $\widehat{\Gamma}$.

L'entier $q + 1$ qui apparaît dans $(*)$ est la multiplicité de la restriction de $X$ à $\widehat{\Gamma}$. C'est un invariant du germe de $X$ en 0. Un entier $r \geqslant q + 1$, étant fixé, on peut toujours choisir de bonnes coordonnées en 0 telles que $\widehat{\Gamma}$ soit tangente à l'ordre $r$ à $u = 0$.

*Ordre $\ell(X)$ de la Trace de $X$.* — Soient $w = (u, z)$, $w' = (u', z')$ de bonnes coordonnées pour $X$. Les plans $z = 0$, $z' = 0$ sont les mêmes. Un calcul élémentaire montre que $z = z'$ et que $u' = A_z(u) + z^{q+1}\,\varphi(u, z)$ avec $D_u\varphi(0, 0) \equiv 0$, $A_z \in GL(2, \mathbb{C}\{z\})$. Comparons les écritures de l'équation $(*_u)$ dans les coordonnées $w$, $w'$ :

$$z^{q+1}\,\frac{du}{dz} = -L_z(u) + z^{q+1}\,Y(u, z), \qquad z^{q+1}\,\frac{du'}{dz'} = -L'_z(u') + z^{q+1}\,Y'(u', z).$$

En considérant $L(u, z) = L_z(u)$, $L'(u', z) = L'_z(u')$ comme des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ à paramètre $z$, on montre que $L'_z = A_z \circ L_z \circ A_z^{-1}$(modulo $z^{q+1}$). La trace $T_X(z) = T(z)$ de l'endomorphisme $L_z(u)$ est un polynôme en $z$ de degré $\leqslant q$ qui est indépendant des bonnes coordonnées choisies. Si $T(z) \not\equiv 0$, nous l'écrivons $T(z) = z^{\ell} \operatorname{Trace} L_{\ell} + \cdots$ avec $\operatorname{Trace} L_{\ell} \neq 0$. Par définition, *l'ordre de la trace $T_X(z)$ de $X$* est l'entier $\ell(X)$ défini par $\ell(X) = \ell$ si $T(z) \not\equiv 0$, $\ell(X) = q$ si $T(z) \equiv 0$.

*Indice de radialité $k(X)$ de $X$.* — Notons $\wedge$ le produit extérieur de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $R(u) = x\,\partial/\partial x + y\,\partial/\partial y$ le champ radial de $\mathbb{R}^2$. Si $R(u) \wedge L_z(u) \not\equiv 0$ on a

$$R(u) \wedge L_z(u) = z^k(Q_k(u) + \cdots), \quad \text{avec } k \leqslant q,$$

où $Q_k(u)$ est une forme quadratique non nulle. Par définition *l'indice de radialité de $X$* est l'entier $k(X)$ défini par $k(X) = k$ si $R(u) \wedge L_z(u) \not\equiv 0$ et $k(X) = q + 1$ si $R(u) \wedge L_z(u) \equiv 0$. C'est un invariant analytique de $X$. En effet, on a $k(X) = k$ (avec éventuellement $k = q+1$) si et seulement si $R(u) \wedge L_i(u) = 0$ pour $i = 0, 1, \ldots, k-1$ et $R(u) \wedge L_k(u) \neq 0$. Si $w' = (u', z)$ sont aussi de bonnes coordonnées, en reprenant les notations et la formule $L'_z = A_z \circ L_z \circ A_z^{-1}$ (modulo $z^{q+1}$) du paragraphe précédent, on vérifie que si $R(u') \wedge L'_z(u') = z^{k'}(Q'_{k'}(u') + \cdots)$ on a $k = k'$ et $Q'_k = Q_k \circ A_0$. Si $k \leqslant q$ le *discriminant de la forme quadratique $Q_k$* est un invariant de $X$, on le note $\Delta_k(X) = \Delta_k$.

***Définition 4.2***. — Supposons que 0 soit une singularité préfinale de $X$. Nous dirons que 0 est une singularité *finale de type II* si $k(X) = q + 1$ ou si $k(X) \leqslant q$ et $\Delta_k(X) \neq 0$. De plus, si $\gamma_0$ est une courbe intégrale de $X$ comme dans la proposition 4.1, nous dirons que $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ est un pinceau *final de type II.*

Dans le chapitre 5, nous démontrerons que, modulo un morphisme admissible, l'étude des singularités préfinales se ramène à l'étude des singularités finales.

**4.2. Propriétés des pinceaux finaux de type II.** — Soit $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ un pinceau intégral final de type II de $X$ et soient $w = (x, y, z)$ des bonnes coordonnées pour $X$. Nous dirons que $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ est *$w$-enlacé* si deux courbes distinctes quelconques de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ sont $w$-asymptotiquement enlacées.

***Théorème 4.3***. — *Soit* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *un pinceau final de type II.*

(1) $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *est un pinceau $w$-enlacé si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$(e) \qquad \ell = \ell(X) < q, \quad \operatorname{Trace} L_{\ell} < 0, \quad k = k(X) \leqslant q, \quad \Delta_k(X) < 0.$$

(2) $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *est un pinceau séparé de courbes non oscillantes si une des quatre conditions de $(e)$ n'est pas satisfaite.*

D'après le paragraphe précédent, les conditions $(e)$ sont complètement déterminées par $L(u, z)$, la partie linéaire de $X$ en $u$. Ainsi, le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème.

***Corollaire 4.4***. — *La nature (séparé-enlacé) d'un pinceau intégral final* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *est déterminée par le jet d'ordre $q + 1$ du champ de vecteurs $X$.*

Il est possible, dans le cas (ii), de décrire plus précisément la « taille » et la « forme » de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$. Mais ceci sort un peu des objectifs de ce travail. D'autre part, certains travaux de J. Ecalle ([**11**], v. II) laissent à penser que les courbes intégrales d'un pinceau final possèdent des *développements transasymptotiques* et que ces développements les caractérisent. On peut alors se poser les questions : Ces développements sont-ils resommables-réels ?. Si oui, comment se traduit sur les développements transasymptotiques l'alternative pinceau enlacé - pinceau séparé ?.

***Théorème 4.5***. — *Supposons que* 0 *soit une singularité finale de type II de* $X$ *dans des coordonnées* $w = (u, z)$ *et que* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *soit* $w$*-enlacé d'axe formel* $\widehat{\Gamma}$. *Il existe un cylindre* $U = \{(u, z)/|u| < \eta,\ 0 < z < \varepsilon\}$ *positivement invariant par le flot de* $X$ *tel que* $\gamma$ *appartient à* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *si et seulement si* $|\gamma| \cap U \neq \varnothing$. *De plus on a l'alternative suivante :*

(1) *Si* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *contient une courbe oscillante, alors son axe* $\widehat{\Gamma} = \Gamma$ *est convergent et les courbes intégrales de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *distinctes de* $\Gamma$ *sont oscillantes.*

(2) *Les courbes de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *sont non oscillantes et alors son axe* $\widehat{\Gamma}$ *est divergent.*

Les démonstrations du théorème 4.3 et de la premier partie du théorème 4.5 sont l'objet des paragraphes 4.4 et 4.5. Quant à la démonstration de l'alternative du théorème 4.5, c'est une conséquence immédiate du théorème du spiralement axial.

***Proposition 4.6***. — *L'axe* $\widehat{\Gamma}$ *d'un pinceau intégral final enlacé de courbes non oscillantes n'est pas contenu dans une surface analytique.*

*Démonstration*. — Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe un élément irréductible $h$ de $\mathbb{R}\{x, y, z\}$ qui appartient à l'idéal de définition de $\widehat{\Gamma}$,

$$I(\widehat{\Gamma}) = \{\widehat{h} \in \mathbb{R}[[x, y, z]] \mid \widehat{h} \circ \widehat{\Gamma}\,(z) = \widehat{h}(\widehat{x}(z), \widehat{y}(z), z) \equiv 0\},$$

tel que $H = \{h = 0\}$ soit une surface analytique. La courbe $\widehat{\Gamma}$ étant (formellement) $X$-invariante, la dérivée de Lie $g = L_X h = dh(X)$ est aussi un élément de $I(\widehat{\Gamma}) \cap \mathbb{R}\{x, y, z\}$. Il est divisible par $h$ dans $\mathbb{R}\{x, y, z\}$. En effet, si ce n'était pas le cas, $\{h = g = 0\}$ serait un ensemble analytique de dimension un avec $h, g \in I(\widehat{\Gamma})$ et $\widehat{\Gamma}$ serait une courbe convergente. Ainsi, la restriction de $g$ à $H = \{h = 0\}$ est identiquement nulle et $H$ est une surface $X$-invariante. Soit $U$ l'ouvert $X$-invariant du théorème 4.5. Quitte à le restreindre, on peut supposer que $h$ est analytique sur $U$. Montrons que $H \cap U$ n'est pas vide. Supposons le contraire. On a par example $h(w) > 0$ pour $w = (x, y, z) \in U$. D'après l'inégalité de Łojasiewicz [**22**], il existe $C, \alpha > 0$ tels que

$$h(w) > C \operatorname{dist}(w, H)^{\alpha} > C z^{\alpha}, \quad \text{si } w \in U.$$

D'autre part, si $\gamma : z \mapsto (x(z), y(z), z)$, $z > 0$, est une courbe de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$, son développement asymptotique en 0 est $\widehat{\Gamma}(z)$. Toutes les dérivées de $h \circ \gamma(z)$ en 0 sont nulles, ce qui est incompatible avec l'inégalité ci-dessus. L'ensemble semi-analytique $H \cap U$ est de dimension 2. En effet, si ce n'est pas le cas, c'est une union finie de courbes analytiques lisses $|\gamma|$ avec $\gamma \in \mathrm{PI}(\gamma_0)$ et ces courbes ne sont pas enlacées. D'après le théorème de reduction de singularités (voir par example [**13**]), il existe un morphisme $\pi : M_1 \to M$ composé d'éclatements de points et de courbes tel que le transformé strict $H_1$ de $H$ soit à croisements normaux. Il existe une composante lisse $H_1'$ de $H_1$ telle que $\pi(H_1') \cap U$ soit une surface invariante par $X$. Soient $\gamma_1, \gamma_1'$ les relevés par $\pi$ de deux courbes $\gamma, \gamma' \in \mathrm{PI}(\gamma_0)$ qui vérifient $|\gamma|, |\gamma'| \subset \pi(H_1') \cap U$. D'après la proposition 1.13, $\gamma_1, \gamma_1'$ sont (comme $\gamma, \gamma'$) asymptotiquement enlacées. Mais ceci est impossible puisque $\gamma_1, \gamma_1'$ sont contenues dans la surface lisse $H_1'$. $\square$

**4.3. Equations de la dynamique « relative ».** — Dans toute la suite 0 est une singularité finale de type II d'un champ vecteurs $X$. Il s'écrit dans de bonnes coordonnées $w = (u, z) = (x, y, z)$

$$(*) \qquad X = \sum_{i=0}^{q} z^i L_i(u) - z^{q+1}\Big(\frac{\partial}{\partial z} + Y(u, z)\Big), \quad Y(0) = 0, \quad dz(Y) = 0.$$

On fixe une courbe intégrale $\gamma_0$ de $X$, $|\gamma_0| \subset \{z > 0\}$ qui a un contact plat avec la courbe formelle $\widehat{\Gamma}$ donnée par la proposition 4.1. On désigne par $\gamma$, $\gamma'$ deux courbes intégrales de $X$ contenues dans $\{z > 0\}$ avec $\omega(\gamma) = \omega(\gamma') = 0$. On les reparamétrise par $\gamma : z \mapsto (u(z), z)$, $\gamma' : z \mapsto (u'(z), z)$, où $u(z) = (x(z), y(z))$, $u'(z) = (x'(z), y'(z))$ sont des solutions de l'équation différentielle

$$(*_u) \qquad z^{q+1}\frac{du}{dz} = -\sum_{i=0}^{q} z^i\, L_k(u) + z^{q+1}\, Y(u, z).$$

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique $\langle\, ,\, \rangle$ et du « produit vectoriel » $\wedge$. Pour décrire le comportement analytique relatif de $\gamma$, $\gamma'$ au voisinage de 0 nous étudierons les fonctions

$$v : z \longmapsto v(z) = u(z) - u'(z), \quad \rho : z \longmapsto \rho(z) = \|v(z)\|,$$
$$e : z \longmapsto \frac{v(z)}{\rho(z)}, \quad \theta : z \longmapsto \theta(z) \quad \text{avec } \exp 2i\pi\theta(z) = e(z).$$

Elles sont reliées par les relations différentielles suivantes :

$$(*_v) \qquad z^{q+1}\frac{d}{dz}\, v(z) = -\sum_{i=0}^{q} z^i\, L_i(v(z)) + z^{q+1}(Y(u(z), z) - Y(u'(z), z))$$

$$(*_\rho) \qquad z^{q+1}\frac{1}{\rho(z)}\frac{d}{dz}\rho(z) = -\sum_{i=0}^{q} z^i\big\langle L_i(e(z)),\ e(z)\big\rangle + z^q\, O(z).$$

$$(*_\theta) \qquad z^{q+1}\frac{d}{dz}\,\theta(z) = -\sum_{i=0}^{q} z^i(L_i(e(z)) \wedge e(z)) + z^q\, O(z).$$

L'indice de radialité $k = k(X)$ est déterminé par la formule

$$R(u) \wedge \sum_{i=0}^{q} z^i L_i(u) = z^k (Q_k(u) + \|u\|^2 O(z))$$

où $Q_k(u)$ est une forme quadratique dont le discriminant $\Delta_k$ est non nul si $k \leqslant q$. Ainsi $(*_\theta)$ s'écrit encore

$$(*_\theta) \qquad z^{q+1} \frac{d}{dz} \theta(z) = -z^k (Q_k(e(z)) + O(z)).$$

Rappelons que l'indice $\ell(X) = \ell$ de la trace de $X$ est défini par $T_X(z) = \operatorname{Trace} L_z = z^\ell(\operatorname{Trace} L_\ell + O(z))$ si $\operatorname{Trace} L_\ell \neq 0$ et $\ell < q$.

***Lemme 4.7***. — *Si $k > 0$ ou si $k = 0$ et $\Delta_0 < 0$ on peut écrire $(*_\rho)$ sous la forme*

$$(*_\rho) \qquad \frac{1}{\rho(z)} \frac{d}{dz} \rho(z) = -z^{\ell-q-1}(\operatorname{Trace} L_\ell + O(z)).$$

*Démonstration*. — Si $k > 0$, alors $\ell = 0$, $L_0(u) = (\operatorname{Trace} L_0)u$ et la formule $(*_\rho)$ est vraie. Si $k = 0$ et $\Delta_0 < 0$ les valeurs propres de $L_0$ ne sont pas réelles. Un argument de F. Takens [**33**] montre que l'on peut choisir une base de $\mathbb{R}^2$ telle que les matrices $A_i$ des $L_i$ s'écrivent dans cette base comme

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & -\beta_i \\ \beta_i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } 0 \leqslant i < \ell, \qquad A_\ell = \begin{pmatrix} \alpha_\ell & -\beta_\ell \\ \beta_\ell & \alpha_\ell \end{pmatrix},$$

avec $\alpha_\ell \neq 0$. La formule $(*_\rho)$ s'en déduit immédiatement. □

**4.4. Pinceau final séparé.** — Il s'agit de démontrer que si l'une des quatre conditions (c) ($\ell = \ell(X) < q$, $\operatorname{Trace} L_\ell < 0$, $k = k(X) \leqslant q$, $\Delta_k < 0$) n'est pas satisfaite, alors $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ est séparé. Pour le démontrer, nous distinguons deux cas.

***Assertion 1***. — *Si $\ell = q$ ou si $\ell < q$ avec* $\operatorname{Trace} L_\ell > 0$ *et $\Delta_0 < 0$ si $k = 0$ alors* $\mathrm{PI}(\gamma_0) = \{\gamma_0\}$ *et $\gamma_0$ est non oscillante.*

Remarquons tout d'abord que la condition $l = q$ implique $k \geqslant q$. Supposons que $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ possède une courbe $\gamma'$ distincte de $\gamma_0$. Avec les notations de 4.3, étudions le couple $\gamma = \gamma_0, \gamma'$. Posons $v(z) = u(z) - u'(z)$. La fonction $\rho(z) = \|v(z)\|$ vérifie $(*_\rho)$. Dans le cas $\ell < q$ et $\operatorname{Trace} L_\ell > 0$, la fonction $\rho(z)$ ne peut pas tendre vers 0 avec $z$, c'est-à-dire que $\omega(\gamma') \neq 0$. Supposons $\ell = q$, on a alors

$$\rho(z)^{-1} \frac{d}{dz} \rho(z) = -z^{-1}(\operatorname{Trace} L_\ell + O(z))$$

Si $\operatorname{Trace} L_\ell \geqslant 0$, on vérifie que $\rho(z)$ ne tends pas vers 0 avec $z$. Si $\operatorname{Trace} L_\ell < 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $d\rho(z)/dz > \alpha z^{-1} \rho(z)$. Par intégration on obtient, pour $z$ assez petit, $\rho(z) > cz^\alpha$ avec $c > 0$. Ceci est incompatible avec $\gamma_0$, $\gamma'$ ont un contact plat avec $\widehat{\Gamma}$. Enfin, d'après le théorème du spiralement axial, $\gamma_0$ est non oscillante.

***Assertion 2***. — *Si $k = q+1$ ou si $k \leqslant q$ avec $\Delta_k > 0$, deux courbes distinctes $\gamma$, $\gamma'$ de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ peuvent être séparées par une projection linéaire. De plus, les courbes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ sont non oscillantes.*

Signalons que la première partie de cette assertion est vraie si $\theta(z)$ possède une limite $\theta_0$ lorsque $z$ tend vers 0. En effet, on peut supposer $\theta_0 = 0$, c'est-à-dire $\lim_{z\to 0} e(z) = (1,0)$. Dans les coordonnées $u = (x,y)$, on a aussi $\lim_{z\to 0}(x(z) - x'(z))/|x(z) - x'(z)| = 1$. La projection $(x,y,z) \mapsto (x,z)$ sépare $\gamma$, $\gamma'$. Pour démontrer que $\theta$ tend vers une limite finie nous allons travailler avec $(*_\theta)$. Distinguons les deux cas de l'énoncé. Si $k \geqslant q+1$, c'est-à-dire $0 = e(z) \wedge L_i(e(z))$ pour $0 \leqslant i \leqslant q$, on déduit de $(*_\theta)$ que la dérivée $d\theta(z)/dz$ est bornée et, par intégration, que $\theta(z)$ tend vers une limite si $z$ tend vers 0. Supposons maintenant que $k \leqslant q$ et $\Delta_k > 0$. L'endomorphsime $L_k$ possède deux valeurs propres réelles distinctes $\lambda, \mu$. Choisissons des coordonnées $u = (x,y)$ telles que les axes $(y=0)$, $(x=0)$ soient les directions propres correspondantes. Dans ces coordonnées on a

$$e(z) = (\cos\theta(z), \sin\theta(z)), \quad Q_k(e(z)) = (\lambda - \mu)\sin\theta(z)\cos\theta(z).$$

La relation $(*_\theta)$ s'écrit, avec $r = q+1-k$, $a = 1/2(\mu - \lambda)$,

$$az^r \frac{d}{dz}\theta(z) = \sin 2\theta(z) + O(z).$$

On peut toujours supposer $a > 0$ quitte à changer l'orientation. En reprenant un joli argument élémentaire de Hu ([**16**]) montrons que $\theta(z)$ tend vers une limite $\theta_0 = 0$ (mod $\pi/2$). La dérivée $d\theta(z)/dz$ étant du signe de $\sin 2\theta(z) + O(z)$, un réel $\varepsilon > 0$ étant fixé, il existe $z_0(\varepsilon) = z_0$, $b(\varepsilon) = b > 0$ tels que

$$b < (-1)^n \frac{d}{dz}\theta(z) \quad \text{si } z \leqslant z_0 \quad \text{et} \quad n\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leqslant \theta(z) \leqslant (n+1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

La fonction $\theta(z)$ est strictement croissante sur $\theta^{-1}(]n\pi/2 + \varepsilon, (n+1)\pi/2 - \varepsilon[)$. On peut supposer que $z_0$ appartient à un de ces intervalles, par exemple avec $n = 0$. Il existe $z_1(\varepsilon) = z_1 < z_0$ tel que $\theta(z_1) = \pi/2 - \varepsilon$. Puisque la valeur $\pi/2 + \varepsilon$ ne peut être franchie par $\theta(z)$ qu'en décroissant on a $\pi/2 - \varepsilon \leqslant \theta(z) \leqslant \pi/2 + \varepsilon$ si $0 < z < z_1(\varepsilon)$.

Il reste à démontrer que les courbes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ sont non oscillantes. Supposons qu'il existe $\gamma \in \mathrm{PI}(\gamma_0)$ oscillante. D'après le théorème du spiralement axial, l'axe du pinceau est une courbe lisse analytique $\Gamma$. Soient $w = (x,y,z) = (u,z)$ de bonnes coordonnées telles que $\Gamma = \{u = 0\}$. Les courbes $\Gamma^+ = \Gamma \cap \{z > 0\}$ et $\gamma$ ne sont pas séparées par une projection linéaire sur un plan contenant $\Gamma$. Ce qui contredit la première partie de l'assertion.

**4.5. Pinceau final enlacé.** — Nous supposons que les quatre conditions $(e)$ sont réalisées. Elles s'écrivent encore

$(e_\rho)$ $\mathrm{Trace}(L_z) = z^\ell(\mathrm{Trace}(L_\ell) + O(z))$ avec $\ell < q$ et $\mathrm{Trace}(L_\ell) < 0$,

$(e_\theta)$ $L_z(e(z)) \wedge e(z) = z^k(Q_k(e(z)) + O(z))$ avec $k \leqslant q$ et le discriminant $\Delta_k$ de $Q_k(u)$ est strictement négatif.

Pour achever la démonstration des théorèmes 4.3 et 4.5 nous démontrons les trois assertions suivantes.

***Assertion 1***. — *Toute courbe intégrale $\gamma'$ de $X$ avec $\omega(\gamma') = 0$, $|\gamma'| \subset \{z > 0\}$ appartient à* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$.

Appliquons $(*_\rho)$ au couple $\gamma = \gamma_0$, $\gamma'$. Si $\rho(z) = \|v(z)\| = \|u(z) - u'(z)\|$, pour $z$ assez petit on a, compte tenu de l'hypothèse $(e_\rho)$,

$$z^{q+1} \frac{1}{\rho(z)} \frac{d}{dz} \rho(z) = -z^\ell(\operatorname{Trace} L_\ell + O(z)).$$

Fixons $\beta$ avec $0 < \beta < -\operatorname{Trace} L_\ell$. Il existe $z_0 > 0$ tel que pour $0 < z < z_0$,

$$\frac{1}{\rho(z)} \frac{d}{dz} \rho(z) > \frac{\beta}{z^r} \quad \text{avec } r = q + 1 - \ell \geqslant 2.$$

On en déduit, par intégration, qu'il existe des constantes $c$, $c' > 0$ telles que

$$0 < \rho(z) < c \exp\Big(-\frac{c'}{z^{r-1}}\Big) \quad \text{si } 0 < z < z_0.$$

Les courbes $z \mapsto \gamma'(z)$, $z \mapsto \gamma_0(z)$ ont un contact plat en 0. Cette propriété est conservée par éclatements de points et donc $\mathrm{TI}(\gamma') = \mathrm{TI}(\gamma_0)$.

***Assertion 2***. — *Deux courbes distinctes de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *sont asymptotiquement enlacées.*

Appliquons $(*_\theta)$ à une couple $\gamma$, $\gamma'$ de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$. On a

$$z^{q+1} \frac{d}{dz}\theta(z) = -z^k(Q_k(e(z)) + O(z))$$

Compte tenu de l'hypothèse $(e_\theta)$, nous pouvons supposer que $Q_k(u)$ est définie positive, quitte à changer l'orientation de $\mathbb{R}^2$. Il existe $\alpha > 0$ et $z_0 > 0$ tels que pour $0 < z < z_0$ on a

$$\frac{d}{dz} \theta(z) < -\frac{\alpha}{z^r} \quad \text{avec } r = q + 1 - k > 0.$$

Il existe des constantes $c$, $c' > 0$ telles que

$$\theta(z) > \frac{c}{z^{r-1}} + c' \text{ si } r > 1 \quad \text{ou} \quad \theta(z) > c \operatorname{Log} 1/z + c' \text{ si } r = 1.$$

***Assertion 3***. — *Il existe $\varepsilon$, $\eta > 0$ tels que $C = C_{\varepsilon,\eta} = \{(u, z) \mid \|u\| \leqslant \eta,\ 0 < z \leqslant \eta\}$ soit $X$-positivement invariant et toute courbe $\gamma$ qui coupe $C$ appartient à* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$.

Soit $\gamma : z \mapsto (u(z), z)$ une courbe intégrale de $X$ contenue dans $z > 0$. Pour établir une relation différentielle sur $r(z) = \|u(z)\|$, prenons le produit $< u, (*_u) >$ avec

$$(*_u) \qquad z^{q+1} \frac{du}{dz} = -\sum_{i=0}^{q} z^i\, L_i(u) + z^{q+1}\, Y(u, z).$$

On obtient, compte tenu de l'hypothèse $(e_\rho)$,

$$(*_r) \qquad z^{q+1} r\, \frac{dr(z)}{dz} = -z^\ell r^2(\operatorname{Trace} L_\ell + O(z)) + z^{q+1}\langle u, Y(u, z)\rangle.$$

Puisque $Y(0)=0$, on peut écrire $Y(u,z)=z\,Y_0(z)+\|u\|\,Y_1(u,z)$ où $Y_0$, $Y_1$ sont des applications bornées au voisinage de 0. La relation $(*_r)$ s'écrit, avec $s=q+1-\ell\geqslant 2$,

$$\frac{dr(z)}{dz}=-\frac{r}{z^s}(\operatorname{Trace}L_\ell+O(z))+zO(z,u).$$

Puisque $\operatorname{Trace}L_\ell<0$, il existe $\varepsilon$, $\eta$ tels que la dérivée $dr(z)/dz$ est strictement positive pour $0<z<\varepsilon$ et $r=\|u\|=\eta$. Ainsi $C_{\varepsilon,\eta}$ est $X$-positivement invariant. De plus, la fonction $r(z)$ est strictement croissante sur une région de la forme $r>cz^{s+1}$, avec $c>0$. Ainsi, $\lim_{z\to 0}r(z)=0$ s'il existe $z_0$ tel que $(u(z_0),z_0)$ appartienne à $C_{\varepsilon,\eta}$. D'autre part, en écrivant $\gamma_0(z)=(u_0(z),z)$, $\rho(z)=\|u(z)-u_0(z)\|$, on a

$$(*_\rho)\qquad \frac{d\rho}{dz}=\frac{\rho(z)}{z^s}(-\operatorname{Trace}L_\ell+O(z)).$$

Ainsi $\rho(z)$ est une fonction plate en $z=0$ puisque $s\geqslant 2$. La courbe $\gamma$ a un contact plat avec $\widehat{\Gamma}$. Elle appartient à $\mathrm{PI}(\gamma_0)$.

## 5. Le cas général

Soient $X$ un champ de vecteurs analytique sur $M$, $\gamma_0$ une courbe intégrale non oscillante de $X$ avec $\omega(\gamma_0)=p$ et $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ son pinceau intégral. Nous allons démontrer les deux théorèmes énoncés dans l'introduction :

***Théorème I***. — *Si les courbes de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *sont non oscillantes on a l'une des propriétés suivantes :*

s) *Deux courbes distinctes, quelconques, de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *sont sous-analytiquement séparées.*

e) *Deux courbes distinctes, quelconques, de* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *sont asymptotiquement enlacées.*

*De plus, ces propriétés ne peuvent pas être satisfaites simultanément.*

***Théorème II***. — *Soit* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *est un pinceau intégral enlacé de courbes non oscillantes.*

(1) $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *possède un axe formel* $\widehat{\Gamma}$ *non convergent, transcendant ; c'est-à-dire, il n'existe pas de surface analytique qui contienne* $\widehat{\Gamma}$.

(2) *Si* $V$ *est un voisinage de* $p_0$, *il existe un ouvert sous-analytique* $U\subset V$ *positivement invariant par le flot de* $X$ *tel qu'une courbe intégrale* $\gamma$ *de* $X$ *appartient à* $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ *si et seulement si* $|\gamma|\cap U\neq\varnothing$.

Pour démontrer ces théorèmes nous allons tout d'abord montrer que si $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ n'est pas séparé (par exemple il existe $\gamma_1\in\mathrm{PI}(\gamma_0)$ distincte de $\gamma_0$ non séparable de $\gamma_0$), alors les trois assertions suivantes sont vraies :

(i) Il existe une courbe formelle $\widehat{\Gamma}$ transcendante telle que $\mathrm{TI}(\gamma_0)=\mathrm{TI}(\widehat{\Gamma})$.

(ii) Deux courbes distinctes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ sont asymptotiquement enlacées.

(iii) Pour tout voisinage $V$ de $p\in M$, il existe un ouvert sous-analytique connexe $U$ positivement invariant par $X$ tel que $\gamma\in\mathrm{PI}(\gamma_0)$ si et seulement si $|\gamma|\cap U\neq\varnothing$.

Leurs démonstrations reposent sur la proposition suivante :

***Proposition 5.1***. — *Supposons que $\gamma_0, \gamma_1$ soient non séparables. Alors il existe un morphisme admissible $\pi : (M', \gamma_0', p') \to (M, \gamma_0, p)$ tel que $\mathrm{PI}(\gamma_0')$ soit un pinceau final de type II.*

Enfin, l'alternative de théorème I est une conséquence de la proposition suivante :

***Proposition 5.2***. — *Soient $\gamma_0$, $\gamma_1$ deux courbes non oscillantes asymptotiquement enlacées. Si $f$ est une application sous-analytique bornée d'un voisinage $U$ de $|\gamma_0| \cup |\gamma_1|$ dans $\mathbb{R}^2$, alors* $\mathrm{card}(f|\gamma_0| \cap f|\gamma_1|) = \infty$.

**5.1. La proposition 5.1 implique (i), (ii), (iii).** — Supposons que la proposition 5.1 soit vraie et que $\gamma_0, \gamma_1$ ne soient pas séparables. Le relevé $\gamma_1' = \pi^{-1}(\gamma_1)$ appartient à $\mathrm{PI}(\gamma_0')$ et de plus $\gamma_0'$ et $\gamma_1'$ ne sont pas séparables. Les conditions (e) du théorème 4.3 sont satisfaites en $p'$ pour $\mathrm{PI}(\gamma_0')$. En particulier, il existe une courbe formelle $\widehat{\Gamma}'$ de $(M', p')$ analytiquement transcendante et telle que $\mathrm{TI}(\gamma_0') = \mathrm{TI}(\widehat{\Gamma}')$ d'après la proposition 4.6. Soit $\widehat{\Gamma}$ la projection de $\widehat{\Gamma}'$ par $\pi$. En utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration de la proposition 1.15 on montre que $\mathrm{TI}(\gamma_1) = \mathrm{TI}(\gamma_0) = \mathrm{TI}(\widehat{\Gamma})$. Il est clair que $\widehat{\Gamma}$ est analytiquement transcendante. Pour montrer que $\widehat{\Gamma}$ est sous-analytiquement transcendante, il suffit de montrer que son relevé $\sigma^{-1}(\widehat{\Gamma})$ par un morphisme $\sigma : (\widetilde{M}, \widetilde{p}) \to (M, p)$ est aussi analytiquement transcendant. Les relevés $\widetilde{\gamma}_0$, $\widetilde{\gamma}_1$ de $\gamma_0$, $\gamma_1$ par $\sigma$ sont toujours non séparables. L'argument précédent montre l'existence d'un axe $\widetilde{\Gamma}$ analytiquement transcendant pour $\mathrm{PI}(\widetilde{\gamma}_1)$. Par projection, $\mathrm{TI}(\gamma_1) = \mathrm{TI}(\sigma(\widetilde{\Gamma}))$ et ainsi $\widetilde{\Gamma} = \sigma^{-1}(\widehat{\Gamma})$. Ceci prouve l'assertion (i).

Montrons l'assertion (ii). Soient $\gamma_2, \gamma_3$ deux courbes distinctes de $\mathrm{PI}(\gamma_0)$. D'après la proposition 1.15, le morphisme $\pi$ est admissible pour $\gamma_2$ et $\gamma_3$. Leurs relevés $\gamma_2'$, $\gamma_3'$ appartiennent au pinceau $\mathrm{PI}(\gamma_0')$. Puisque les courbes $\gamma_0'$, $\gamma_1'$ ne sont pas séparables, d'après le théorème 4.3, le pinceau $\mathrm{PI}(\gamma_0')$ est un pinceau final de type II enlacé. Ceci prouve que $\gamma_2$ et $\gamma_3$ sont asymptotiquement enlacées, d'après la proposition 1.13. Ceci prouve (ii).

Montrons l'assertion (iii). Si $V$ est un voisinage de $p \in M$, $V' = \pi^{-1}(V)$ est un voisinage de $p' \in M'$. D'après le théorème 4.5, il existe un ouvert sous-analytique $U' \subset V'$ tel que $\gamma' \in \mathrm{PI}(\gamma_0')$ si et seulement si $|\gamma'| \cap U' \neq \varnothing$. La projection $U = \pi(U')$ possède la même propriété relativement au pinceau $\mathrm{PI}(\gamma_0)$, d'après la proposition 1.15. □

**5.2. Démonstration de la proposition 5.1.** — Le résultat suivant de [**6**] nous permet de supposer que $p$ est une singularité élémentaire du champ de vecteurs $X$, c'est-à-dire, que $DX(p)$ n'est pas nilpotente.

***Théorème 5.3* (Uniformisation $\gamma_0$-polarisé)**. — *Soit $\gamma_0$ une courbe intégrale non oscillante d'un champ de vecteurs $X$ analytique sur un voisinage de $p \in M$. Il existe un morphisme admissible $\pi : (M', \gamma_0', p') \to (M, \gamma_0, p)$ et un champ de vecteurs $X'$ analytique sur un voisinage de $p'$ tels que $p'$ soit une singularité élémentaire de $X'$ et $\gamma_0'$ une courbe intégrale de $X'$.*

D'après le théorème 2.1, nous pouvons supposer que $\lambda(\gamma_0) = 0$. Sinon $\gamma_0$ et $\gamma_1$ seraient séparables. On a alors deux possibilités pour le spectre de $DX(p)$. Dans le premier cas, le spectre de $DX(p)$ s'écrit $\{0, 0, \lambda\}$ avec $\lambda \neq 0$. Quitte à effectuer un éclatement local de centre $p$, on peut supposer que $DX(p)$ est diagonalisable de rang 1. Alors, $\gamma_0$ appartient à un pinceau final de type I. D'après le théorème 3.1, $\gamma_0$ et $\gamma_1$ sont séparables, ce qui est impossible. Dans le deuxième cas, le spectre de $DX(p)$ s'écrit $\{0, \lambda, \lambda'\}$ avec $\lambda, \lambda' \neq 0$. Montrons d'abord qu'on peut se ramener au cas d'une singularité préfinale avec le lemme suivant :

***Lemme 5.4***. — *Il existe un morphisme $\gamma_0$-admissible $\pi : (M', \gamma_0', p') \to (M, \gamma_0, p)$ tel que $\gamma_0'$ soit une courbe intégrale d'un champ vecteurs $X'$ tel que $p' = \omega(\gamma_0')$ est une singularité préfinale de type II.*

*Démonstration*. — Soient $w = (x, y, z) = (u, z)$ des coordonnées centrées en $p$ telles que Ker $DX(p) = \{u = 0\}$. Il existe (comme dans la proposition 4.1, voir [**3**]) une unique courbe formelle (ou analytique) $\widehat{\Gamma}$ lisse, tangente à $\{u = 0\}$, invariante par $X$ qui vérifie aussi que $\mathrm{TI}(\widehat{\Gamma}) = \mathrm{TI}(\gamma_0)$. De plus, quitte à éclater le point $p$, on peut supposer que le plan $\{z = 0\}$ est $X$-invariant. Montrons tout d'abord que $\widehat{\Gamma}$ n'est pas contenue dans le lieu singulier $\operatorname{Sing} X$ de $X$. En effet, si $\widehat{\Gamma} \subset \operatorname{Sing} X$, on peut choisir les coordonnées $w$ telles que $\{u = 0\} = \widehat{\Gamma}$. Si les valeurs propres $\lambda$, $\lambda'$ de $DX(p)$ ne sont pas imaginaires, la courbe $\widehat{\Gamma}$ est une variété centrale de $X$ en $p$. D'après le théorème de la variété centrale (voir [**15, 26**]), la dynamique du flot de $X$ est topologiquement conjuguée à la dynamique du champ $X|_{\{z=0\}}$. Les courbes intégrales de $X$ dont $p$ est le point $\omega$-limite sont contenues en $\{z = 0\}$. En particulier, la courbe $\gamma_0$, ce qui n'est pas possible puisque $\lambda(\gamma_0) = 0$. Si $\lambda = \overline{\lambda'} = ia$, $a \in \mathbb{R}^*$, considérons $\sigma : \widetilde{M} \to M$ l'éclatement de l'axe $\{u = 0\}$. Sa fibre $D_0 = \sigma^{-1}(p)$ est un cercle invariant par le relevé $\widetilde{X}$ de $X$. Il possède une application premier retour de Poincaré non triviale. Ainsi, toute courbe $\gamma$ telle que $\omega(\gamma) = p$ est une courbe oscillante. Ceci est impossible puisque $\gamma_0$ est non oscillante.

La multiplicité de la restriction de $X$ à la courbe invariante $\widehat{\Gamma} \not\subset \operatorname{Sing} X_0$ est un entier $q + 1$ avec $q \geqslant 1$, puisque $\widehat{\Gamma}$ est tangente au noyau de $DX(p)$. Choissisons des coordonnées $w = (x, y, z) = (u, z)$ avec $|\gamma_0| \subset \{z > 0\}$ telles que $\widehat{\Gamma}$ soit tangente à l'ordre au moins $2q + 1$ avec $\{u = 0\}$. Un calcul élémentaire montre que, modulo une unité multiplicative, $X$ s'écrit dans ces coordonnées sous la forme

$$(*_0) \qquad X = \sum_{i=0}^{\infty} z^i L_i(u) + Y_0(u, z) - z^{q+1} \frac{\partial}{\partial z}.$$

où les $L_i(u)$ sont des champs de vecteurs linéaires sur $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ avec $DL_0(0)$ de rang 2 et $Y_0$ est un champ de vecteurs qui vérifie

$$Y_0(0) = 0, \quad dz(Y_0) = 0, \quad Y_0(0, z) = O(z^{2q+1}), \quad D_u\, Y_0(0, z) \equiv 0.$$

Soit $\pi : (M', p') \to (M, p)$ le morphisme composé des éclatements des $q+1$ premiers points infiniment proches de $\widehat{\Gamma}$ et soient $(u', z)$ des coordonnées en $p'$ telles que $\pi(u', z) = (z^{q+1}u', z)$. On vérifie aisément que le transformé $X' = \pi^*(X)$ s'écrit sous la forme

$$(*) \qquad X' = L_z(u') - z^{q+1}\Big(\frac{\partial}{\partial z} + Y\Big), \quad L_z(u') = \sum_{i=0}^{q} z^i L_i(u')$$

avec $DL_0(0)$ de rang 2, $dz(Y) = 0$, $Y(0) = 0$. Ceci montre que $p'$ est une singularité préfinale de type II. □

Le lemme suivant achève la démonstration de la proposition 5.1 (voir aussi [**30**]) :

***Lemme 5.5***. — *Supposons que $p$ est une singularité préfinale du champ de vecteurs $X$ avec $\lambda(\gamma_0) = 0$. Il existe un morphisme admissible $\pi : (M', \gamma_0', p') \to (M, \gamma_0, p)$ tel que* $\mathrm{PI}(\gamma_0')$ *soit un pinceau final de type II.*

*Démonstration*. — D'après le lemme précédent, $\gamma_0$ a un contact plat avec une courbe $X$-invariante $\widehat{\Gamma}$ qui n'est pas contenue dans le lieu singulier de $X$. Soient $w = (x, y, z) = (u, z)$ de bonnes coordonnées pour $X$ telles que $|\gamma_0| \subset \{z > 0\}$. Écrivons $X$ sous la forme $(*)$ dans ces coordonnées. Notons $q+1$ la multiplicité de la restriction de $X$ à $\widehat{\Gamma}$ et $k = k(X)$ l'indice de radialité de $X$. Par définition, $k \leqslant q+1$. Si $k = q+1$, $\mathrm{PI}(\gamma_0)$ est un pinceau final de type II. Supposons que $k \leqslant q$. Si $R(u)$ est le champ radial de $\mathbb{R}^2$, l'entier $k$ est défini par

$$R(u) \wedge L_z(u) = z^k(Q_k(u) + O(z)), \quad k \leqslant q,$$

où $Q_k(u)$ est une forme quadratique non nulle. Notons $\Delta_k$ le discriminant de $Q_k$. Nous allons montrer qu'il existe un morphisme $\gamma_0$-admissible $\pi : (M', p') \to (M, p)$ tel que $p'$ soit une singularité préfinale du relevé $X'$ de $X$ et tel que le discriminant $\Delta_k'$ correspondant à $X'$ soit non nul. Supposons que $\Delta_k = 0$. Posons

$$L_i(x, y) = (a_i x + b_i y)\frac{\partial}{\partial x} + (c_i x + d_i y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, q.$$

Les conditions précédentes sur $L_0, L_1, \dots, L_{k-1}$ se traduisent par les égalités $a_i = d_i$, $b_i = c_i = 0$ pour $i = 0, 1, 2, \dots k-1$ avec $a_0 \neq 0$. De plus, la condition $\Delta_k = 0$ signifie que $DL_k(0)$ a une valeur propre double et n'est pas diagonalisable. On peut choisir $u = (x, y)$ tel que $a_k = d_k$, $b_k = 1$, $c_k = 0$. La droite $\{y = z = 0\}$ est invariante par $X$ et $L_k(u)$. L'éclatement de cette droite est un morphisme admissible $\sigma : (\widetilde{M}, \widetilde{\gamma}_1, \widetilde{p}) \to (M, \gamma_1, p)$. Soit $\widetilde{X}$ le relevé de $X$ par $\pi$ et soient $\widetilde{w} = (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = (\widetilde{u}, \widetilde{z})$ des coordonnées centrées en $\widetilde{p}$ telles que $\sigma(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = (\widetilde{x}, \widetilde{x}\widetilde{y}, \widetilde{z})$. Le champ $\widetilde{X}$ s'écrit sous la forme

$$\widetilde{X} = \sum_{i}^{q} \widetilde{z}^i \widetilde{L}_i(\widetilde{u}) - \widetilde{z}^{q+1}\Big(\frac{\partial}{\partial \widetilde{z}} + \widetilde{Y}(\widetilde{u}, \widetilde{z})\Big)$$

où $\widetilde{a}_i = \widetilde{d}_i = a_i$, $\widetilde{b}_i = b_{i-1}$, $\widetilde{c}_i = c_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, q-1$, $\widetilde{a}_q = a_q$, $\widetilde{d}_q = d_q + 1$, $\widetilde{c}_q = c_{q-1}$. Si $q - k = 0$, $R(\widetilde{u}) \wedge \widetilde{L}_z(\widetilde{z}) = \widetilde{z}^q \widetilde{Q}_q(\widetilde{u})$. Le discriminant $\widetilde{\Delta}_q$ de $\widetilde{Q}_q(\widetilde{u})$ est égal à 1. Si $q - k > 0$ et $c_{k+1} = 0$ on a $\widetilde{L}_i(\widetilde{u}) = L_i(u)$ pour $i < k - 1$ et $\widetilde{L}_k(u') = a_k R(u')$. Dans cette situation, l'indice de radialité $\widetilde{k}$ de $\widetilde{X}$ satisfait $\widetilde{k} > k$ et on se ramène au cas précédent par une induction élémentaire sur $q - k$. Si $q - k > 0$ et $c_{k+1} \neq 0$, effectuons tout d'abord une 2-ramification $T$ au-dessus du plan $z = 0$. C'est une transformation admissible $T : (\underline{M}, \underline{p}) \mapsto (M, p)$. La droite $\{\underline{y} = \underline{z} = 0\}$ est invariante par $\underline{X}$. Soit $\sigma$ l'éclatement de centre cette droite. La composition $\pi = \sigma \circ T : (M', \gamma_0', p') \to (M, \gamma_0, p)$ est un morphisme admissible. Soient $w' = (u', z') = (x', y', z')$ des coordonnées centrées en $p' = \omega(\gamma_0')$ telles que $\pi(x', y', z') = (x', y'z', z'^2)$. Dans ces coordonnées le relevé $X'$ de $X$ s'écrit

$$X' = \sum_{i=0}^{q} z'^i L_i'(u') - z'^{q'+1}\Big(1/2\,\frac{\partial}{\partial z} + Y'(u', z')\Big)$$

avec $q' = 2q - 1$, $Y'$ possédant les propriétés habituelles. Un petit calcul montre que, pour $i < 2k - 1$, $L_i' \equiv 0$ si $i$ est impair et $L_i' = L_j$ si $i = 2j$, que $L_{2k}' = a_k I_2$ et $L_{2k+1}' = y\,\partial/\partial x + c_{k+1} x\,\partial/\partial y$. L'indice de radialité de $X'$ est égal à $k' = 2k + 1$. Le discriminant $\Delta_{k'}'$ correspondant est $4c_{k+1} \neq 0$. $\square$

**5.3. Démonstration de la proposition 5.2.** — Soient $\gamma_0, \gamma_1$ et $f = (f_1, f_2) \to \mathbb{R}^2$ comme dans l'enoncé de la proposition 5.2. Les courbes $\gamma_0, \gamma_1$ étant non oscillantes et enlacées, on peut supposer que $f_1, f_2$ sont analytiques sur un voisinage $U$ de $p$. Cette affirmation est une conséquence d'un résultat de [**27**]. Elle peut être aussi montrée en utilisant le théorème de préparation de [**20**].

D'après le théorème II, les courbes $\gamma_0, \gamma_1$ ont un contact plat avec une courbe formelle $\widehat{\Gamma}$ transcendante. Quitte à effectuer une suite d'éclatements de points ou de courbes lisses on peut choisir des coordonnées $w = (x, y, z)$ centrées en $p$ telles que (voir [**2, 13**]) :

(1) Les courbes $\gamma_0, \gamma_1$ sont $z$-positives.

(2) La courbe $\widehat{\Gamma}$ est lisse transverse à $\{z = 0\}$.

(3) Pour $i = 1, 2$, la fonction $f_i$ s'écrit dans $w$ sous la forme

$$f_i(x, y, z) = x^{p_i} y^{q_i} z^{r_i} U_i(x, y, z), \quad \text{avec } U_i(0) \neq 0.$$

Puisque les séries formelles $f_i \circ \widehat{\Gamma}$ ne sont pas nulles, on peut supposer que $p_i = q_i = 0$ pour $i = 1, 2$. En remplaçant la coordonnée $z$ par $z(U_1)^{1/r_1}$, on peut supposer que $f_1(x, y, z) = z^{r_1}$. Les applications $f$ et $(x, y, z) \mapsto (z, f_2(x, y, z))$ ayant les mêmes fibres dans $\{z > 0\}$, on peut supposer que

$$f_1(x, y, z) = z \quad \text{et} \quad f_2(x, y, z) = z^{r_2} U_2(x, y, z).$$

Si le rang générique de $f$ est égal à 1, les images de $|\gamma_0|$, $|\gamma_1|$ sont confondues. La proposition est alors vraie. Supposons que $f$ est de rang générique 2. La courbe $\widehat{\Gamma}'$ n'est pas contenue dans l'ensemble analytique $\{\partial f_2/\partial x = \partial f_2/\partial y = 0\}$. Quitte à effectuer des éclatements de points on peut supposer que $\frac{\partial f_2}{\partial y} \neq 0$ sur $\{z > 0\}$. Soient $\gamma_j(z) = (x_j(x), y_j(z), z)$, $j = 0, 1$ les paramétrisations de $|\gamma_0|$, $|\gamma_1|$ par $z > 0$. Pour chaque $z_0 > 0$, la courbe

$$C_{z_0} = \{(x, y, z_0) \mid f_2(x, y, z) = f_2(\gamma_0(z_0))\}$$

partage le plan $\{z = z_0\}$ en deux composantes connexes $U^+_{z_0}$, $U^-_{z_0}$ telles que

$$\{(x, y, z_0) \mid x = x_0(z_0), y > y_0(z_0)\} \subset U^+_{z_0},$$
$$\{(x, y, z_0) \mid x = x_0(z_0), y < y_0(z_0)\} \subset U^-_{z_0}.$$

Puisque $\gamma_0, \gamma_1$ sont enlacées, il existe deux suites $(z_n^+)$, $(z_n^-)$ qui tendent vers 0 telles que $y_0(z_n^+) > y_1(z_n^+)$ et $x_0(z_n^+) = x_1(z_n^+)$, $y_0(z_n^-) < y_1(z_n^-)$ et $x_0(z_n^-) = x_1(z_n^-)$. Par continuité, il existe une suite $(z_n)$ qui tend vers 0 telle que $\gamma_1(z_n)$ appartient à $C_{z_n}$. Ainsi, les points $\gamma_0(z_n)$ et $\gamma_1(z_n)$ sont dans une même fibre de $f$. □

## Références


[1] V.I. Arnold – *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Éditions Mir, Paris, 1980.

[2] J.M. Aroca, H. Hironaka & J.L. Vicente – *Desingularization Theorems*, Mem. Mat. Inst. Jorge Juan, C.S.I.C., Madrid, 1977.

[3] P. Bonckaert & F. Dumortier – « Smooth invariant curves for germs of vector fields in $\mathbb{R}^3$ whose linear part generates rotations », *J. Differential Equations* **62** (1986), p. 95–116.

[4] É. Borel – « Mémoire sur les séries divergentes », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **3** (1899), no. 16, p. 521–568.

[5] F. Cano – *Desingularization strategies for three-dimensional vector fields*, Lect. Notes in Math., vol. 1259, Springer-Verlag, 1987.

[6] F. Cano, R. Moussu & J.-P. Rolin – « Non-oscillating integral curves and valuations », *J. reine angew. Math.*, to appear.

[7] F. Cano, R. Moussu & F. Sanz – « Oscillation, spiralement, tourbillonnement », *Comment. Math. Helv.* **75** (2000), no. 2, p. 284–318.

[8] M. Chaperon – « Some results on stable manifolds », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001), no. 2, p. 119–124.

[9] H. Dulac – « Solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage des valeurs singulières », *Bull. Soc. math. France* **40** (1912), p. 324–392.

[10] F. Dumortier – « Singularites of vector fields on the plane », *J. Differential Equations* **23** (1977), p. 53–106.

[11] J. Écalle – *Les fonctions résurgentes*, Prépublications, Université d'Orsay, 1985.

[12] J. Hadamard – « Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations differentielles », *Bull. Soc. math. France* **29** (1901), p. 224–228.

[13] H. Hironaka – « Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero », *Ann. of Math.* **79** (1964), p. 109–306.

[14] ______, *Introduction to real analytic sets and real analytic maps*, Instituto Matematico « L. Tonelli », Pisa, 1973.

[15] M. Hirsch, C. Pugh & M. Shub – *Invariant manifolds*, Lect. Notes in Math., vol. 583, Springer Verlag, New York, 1977.

[16] X.L. Hu – « Sur la structure des champs de gradients de fonctions analytiques réelles », Thèse, Univ. Paris VII, 1992.

[17] A. Kelley – « The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds », *J. Differential Equations* **3** (1967), p. 556–570.

[18] A.G. Khovanskii – *Fewnomials*, Trans. of Math. monographs, vol. 88, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[19] J.-M. Lion, R. Moussu & F. Sanz – « Champs de vecteurs analytiques et champs de gradients », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **22** (2002), p. 525–534.

[20] J.-M. Lion & J.-P. Rolin – « Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **47** (1997), p. 859–884.

[21] ______, « Volumes, feuilles de Rolle de feuilletages analytiques et théorème de Wilkie », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **7** (1998), no. 1, p. 93–112.

[22] S. Łojasiewicz – « Sur la séparation régulière », in *Geometry Seminars (Bologna, 1985)*, Univ. Stud. Bologna, 1986, p. 119–121.

[23] J. Martinet & J.-P. Ramis – « Problèmes de modules pour les équations différentielles non linéaires du premier ordre », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **55** (1982), p. 63–164.

[24] R. Moussu – « Sur la dynamique des gradients. Existence de variétés invariantes », *Math. Ann.* **307** (1997), p. 445–460.

[25] R. Moussu & C. Roche – « Théorie de Hovanskii et problème de Dulac », *Invent. Math.* **105** (1991), p. 431–441.

[26] J. Palis & F. Takens – « Topological equivalence of normally hyperbolic dynamical systems », *Topology* **16** (1977), p. 335–345.

[27] A. Parusinski – « Lipschitz stratification of subanalytic sets », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4e *série* **27** (1994), p. 661–696.

[28] H. Poincaré – « Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle », *Journ. de Math.* **3** (1881), no. 7, p. 251–296 & 375–422.

[29] F. Sanz – « Non oscillating solutions of analytic gradient vector fields », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **48** (1998), no. 4, p. 1045–1067.

[30] ______, « Balanced coordinates for spiraling dynamics », in *Qualitative Theory of Dyn. Sys. (Lleida, 2002)*, vol. 3, 2002, p. 91–100.

[31] M. Shub – *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Astérisque, vol. 56, Société Mathématique de France, Paris, 1978.

[32] S.J. van Strien – « Center manifolds are not $\mathcal{C}^\infty$ », *Math. Z.* **166** (1979), p. 143–145.

[33] F. Takens – « Singularities of vector fields », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **43** (1974), p. 48–100.

[34] A. Tarski – *A Decision Method For Elementary Algebra and Geometry*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951.

---

F. Cano, Universidad de Valladolid, Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Facultad de ciencias, 47005 Valladolid (Spain) • *E-mail :* `fcano@agt.uva.es`

R. Moussu, Université de la Bourgogne, Laboratoire de Topologie, U.M.R. 5584 du C.N.R.S., B.P. 47870, 21078 Dijon Cedex (France) • *E-mail :* `rmoussu@u-bourgogne.fr`

F. Sanz, Universidad de Valladolid, Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Facultad de ciencias, 47005 Valladolid (Spain) • *E-mail :* `fsanz@agt.uva.es`