Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (I) - Pages préliminaires

Astérisque, tome 278 (2002), p. I-XII
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2002__278__R1_0>

ASTÉRISQUE 278

COHOMOLOGIES p-ADIQUES ET APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES (I)

édité par
Pierre Berthelot
Jean-Marc Fontaine
Luc Illusie
Kazuya Kato
Michael Rapoport

Société Mathématique de France 2002
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

P. Berthelot
IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.
E-mail : `Pierre.Berthelot@univ-rennes1.fr`
Url : `http://www.maths.univ-rennes1.fr/~berthelo/`

J.-M. Fontaine
Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.
E-mail : `fontaine@math.u-psud.fr`

L. Illusie
Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.
E-mail : `illusie@math.u-psud.fr`

K. Kato
Department of mathematics, faculty of science, Kyoto university, Kyoto, 606-8502, Japon.
E-mail : `kazuya@kusm.kyoto-u.ac.jp`

M. Rapoport
Universität zu Köln, Mathematisches Institut, Weyertal 86-90, 50931 Köln, Allemagne.
E-mail : `rapoport@math.uni-koeln.de`
Url : `http://www.mi.uni-koeln.de`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F85, 14F30, 14F40, 14H10, 14L05, 22E50.

Mots clefs. — Courbe hyperbolique, champ de modules, uniformisation fuchsienne, uniformisation de Bers, p-adique, théorie de Serre-Tate, relèvement canonique, représentation galoisienne, action extérieure de Galois, groupe de Teichmüller, espace symétrique p-adique, transformée intégrale, résidu, représentation p-adique, groupe p-divisible, cristaux, modules de Cartier, biextension.

COHOMOLOGIES p-ADIQUES ET APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES (I)

édité par Pierre Berthelot, Jean-Marc Fontaine, Luc Illusie, Kazuya Kato, Michael Rapoport

Résumé. — Ce volume est le premier d'une série de trois consacrés aux méthodes p-adiques en géométrie arithmétique. Les thèmes abordés dans ce volume touchent à la théorie des groupes formels et de leurs déformations, au programme de Langlands p-adique, et à la géométrie hyperbolique p-adique.

Abstract **(p-adic cohomologies and arithmetic applications (I))**

This volume is the first of three dealing with p-adic methods in arithmetic geometry. The themes appearing in this volume include the theory of formal groups and their deformations, the p-adic Langlands program, and the p-adic hyperbolic geometry.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Dans cet article, nous présentons une théorie concernant *l'uniformisation et les espaces de modules des courbes hyperboliques p-adiques.* D'une part, cette théorie étend aux places non archimédiennes les uniformisations de Fuchs et Bers et les espaces de modules des courbes hyperboliques complexes. Pour cette raison, nous désignerons souvent cette théorie sous le nom de *théorie de Teichmüller p-adique.* D'autre part, cette théorie peut être vue comme un analogue hyperbolique de la théorie de Serre-Tate pour les variétés abéliennes ordinaires et leurs espaces de modules.

L'objet au centre de la théorie de Teichmüller p-adique est le *champ des modules des « nilcurves ».* Ce champ est un recouvrement plat du champ des modules de courbes hyperboliques en caractéristique p. Il paramètre les courbes hyperboliques munies de « données auxiliaires d'uniformisation en caractéristique p ». La géométrie de ce champ de modules peut *s'analyser de manière combinatoire* au voisinage de l'infini. D'autre part, une analyse globale de sa géométrie mène à *une démonstration de l'irréductibilité du champ des modules de courbes hyperboliques via des méthodes de caractéristique p.* Diverses parties de ce champ des « nilcurves » admettent des *relèvements canoniques* au-dessus desquels on obtient *des coordonnées canoniques et des représentations galoisiennes canoniques.* Ces coordonnées canoniques sont l'analogue, pour les courbes hyperboliques, des coordonnées canoniques dans la théorie de Serre-Tate et l'analogue p-adique des coordonnées de Bers dans la théorie de Teichmüller. De plus, les représentations galoisiennes qui apparaissent éclairent d'un jour nouveau l'action extérieure du groupe de Galois d'un corps local sur le complété profini du groupe de Teichmüller.

Nous faisons une étude détaillée de certaines représentations continues naturelles de $G = \mathrm{GL}(n, K)$ dans les espaces vectoriels localement convexes sur un corps non archimédien localement compact de caractéristique 0. Nous construisons des applications "transformées intégrales" entre des sous-quotients de la duale d'une représentation "holomorphe" provenant d'un espace symétrique p-adique, et des représentations "de la série principale" construites à partir de fonctions localement analytiques sur G. Nous caractérisons l'image de chacune de nos transformées intégrales comme un espace de fonctions sur G jouissant de certaines propriétés par rapport aux transformations et vérifiant un système d'équations aux dérivées partielles de type hypergéométrique.

Ce travail constitue une généralisation d'un travail de Morita, qui a étudié ce genre de représentations pour le groupe $\mathrm{SL}(2, K)$. Notre travail étend également celui de Schneider-Stuhler sur la cohomologie de de Rham des espaces symétriques p-adiques. Nous le voyons comme faisant partie d'un programme général visant à développer la théorie de ce type de représentations.

Nous proposons une nouvelle théorie de Dieudonné qui associe à un groupe formel p-divisible X sur un anneau p-adique excellent R un objet d'algèbre linéaire appelé « display ». A partir du « display » on peut exhiber des équations structurelles pour le module de Cartier de X et retrouver son cristal de Grothendieck-Messing. Nous donnons des applications à la théorie des déformations des groupes formels p-divisibles.

ABSTRACTS

In this article, we survey a theory, developed by the author, concerning the *uniformization of p-adic hyperbolic curves and their moduli.* On the one hand, this theory generalizes the Fuchsian and Bers uniformizations of complex hyperbolic curves and their moduli to nonarchimedean places. It is for this reason that we shall often refer to this theory as *p-adic Teichmüller theory*, for short. On the other hand, this theory may be regarded as a fairly precise hyperbolic analogue of the Serre-Tate theory of ordinary abelian varieties and their moduli.

The central object of p-adic Teichmüller theory is the *moduli stack of nilcurves.* This moduli stack forms a finite flat covering of the moduli stack of hyperbolic curves in positive characteristic. It parametrizes hyperbolic curves equipped with auxiliary "uniformization data in positive characteristic." The geometry of this moduli stack may be *analyzed combinatorially* locally near infinity. On the other hand, a global analysis of its geometry gives rise to a *proof of the irreducibility of the moduli stack of hyperbolic curves using positive characteristic methods.* Various portions of this stack of nilcurves admit *canonical p-adic liftings*, over which one obtains *canonical coordinates and canonical p-adic Galois representations.* These canonical coordinates form the analogue for hyperbolic curves of the canonical coordinates of Serre-Tate theory and the p-adic analogue of the Bers coordinates of Teichmüller theory. Moreover, the resulting Galois representations shed new light on the outer action of the Galois group of a local field on the profinite completion of the Teichmüller group.

p-adic boundary values

We study in detail certain natural continuous representations of $G = GL_n(K)$ in locally convex vector spaces over a locally compact, non-archimedean field K of characteristic zero. We construct boundary value maps, or integral transforms, between subquotients of the dual of a "holomorphic" representation coming from a p-adic symmetric space, and "principal series" representations constructed from locally analytic functions on G. We characterize the image of each of our integral transforms as a space of functions on G having certain transformation properties and satisfying a system of partial differential equations of hypergeometric type.

This work generalizes earlier work of Morita, who studied this type of representation of the group $SL_2(K)$. It also extends the work of Schneider-Stuhler on the De Rham cohomology of p-adic symmetric spaces. We view this work as part of a general program of developing the theory of such representations.

The Display of a Formal p-Divisible Group

We give a new Dieudonné theory which associates to a formal p-divisible group X over an excellent p-adic ring R an object of linear algebra called a display. On the display one can read off the structural equations for the Cartier module of X, and find the crystal of Grothendieck-Messing. We give applications to deformations of formal p-divisible groups.

INTRODUCTION

Un semestre spécial, consacré aux cohomologies p-adiques et à leurs applications arithmétiques, a eu lieu, du 17 février au 11 juillet 1997, dans le cadre du centre Émile Borel, situé à Paris dans les locaux de l'institut Henri Poincaré.

Les principaux thèmes abordés ont été :

- les théorèmes de comparaison entre différentes cohomologies p-adiques des variétés algébriques sur les corps locaux, les représentations p-adiques du groupe de Galois absolu d'un tel corps,
- les groupes p-divisibles et la théorie de Dieudonné cristalline, la cohomologie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, les équations différentielles p-adiques,
- l'uniformisation p-adique, l'étude des espaces symétriques p-adiques, des courbes hyperboliques p-adiques, de la cohomologie des variétés de Shimura,
- la géométrie et la cohomologie logarithmiques,
- les fonctions L p-adiques, leurs relations avec les systèmes d'Euler, en particulier dans le cas des formes modulaires.

Les activités structurées ont consisté en

a) Douze cours :

- P. Berthelot (Rennes) : *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques*,
- C. Breuil (CNRS, Orsay) : *Cohomologie log cristalline et cohomologie étale de torsion* (Cours Peccot du Collège de France),
- G. Christol (Paris VI) : *Equations différentielles p-adiques*,
- G. Faltings (MPI, Bonn) : *Almost étale extensions*,
- J.-M. Fontaine (Orsay) : *Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques*,
- L. Illusie (Orsay) et A. Ogus (Berkeley) : *Géométrie logarithmique*,
- K. Kato (Tokyo) : *Euler systems and p-adic L-functions*,
- W. Messing (Minneapolis) : *Topologie et cohomologie syntomiques et log syntomiques*,

– S. Mochizuki (RIMS, Kyoto) : *The Ordinary and Generalized Ordinary Moduli of Hyperbolic Curves*,
– M. Rapoport (Cologne) : *Aspects p-adiques des variétés de Shimura*,
– P. Schneider (Münster) : *Analysis on p-adic symmetric spaces*,
– T. Zink (Bielefeld) : *Cartier theory and its connection to crystalline Dieudonné theory*.

b) Un séminaire avec un ou deux exposés chaque semaine.

c) Deux colloques :
– *Problèmes de coefficients en cohomologie cristalline et en cohomologie rigide*, du 28 au 30 avril,
– *Arithmétique des fonctions L et méthodes p-adiques*, du 30 juin au 4 juillet.

d) Un groupe de travail sur *le théorème de comparaison de Tsuji*, du 20 au 29 mai.

Les organisateurs ont demandé à tous ceux qui avaient fait un cours de le rédiger ou de nous faire parvenir un texte sur un sujet voisin. Nous avons également invité Takeshi Tsuji à écrire un résumé de sa démonstration, maintenant publiée[(1)], de la *conjecture* C_{st}.

Nous tenons à remercier les auteurs non seulement pour leur contribution mais aussi pour leur patience ; nous espérons qu'ils voudront bien nous excuser du retard avec lequel ces volumes paraissent.

Les articles ont été examinés par des rapporteurs que nous remercions pour leur aide aussi désintéressée qu'utile.

Enfin, nous pensons que tous ceux qui ont participé à ce semestre seront d'accord avec nous pour saluer l'atmosphère agréable dans laquelle il s'est déroulé. Nous remercions chaleureusement Joseph Oesterlé, alors directeur du Centre Émile Borel, son équipe et tout le personnel de l'Institut Henri Poincaré pour leur gentillesse, leur compétence, leur efficacité et leur dévouement. Ils se joindront sûrement à nous pour accorder une mention spéciale à Madame Nocton, notre bibliothécaire — tous les mathématiciens qui ont travaillé à Paris la connaissent et savent combien son rôle a été précieux ; et une autre à notre secrétaire — Florence Damay — qui a quitté le Centre Émile Borel juste à la fin de notre semestre ; elle en fut la cheville ouvrière mais aussi le sourire, avec une formidable aptitude à comprendre et résoudre les problèmes extra-mathématiques rencontrés par les très nombreux participants.

Les éditeurs

[(1)] *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. math. **137** (1999), 233–411