Jean-Loup Waldspurger

**Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés**

*Astérisque*, tome 269 (2001)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2001__269__1_0>

ASTÉRISQUE 269

# INTÉGRALES ORBITALES NILPOTENTES ET ENDOSCOPIE POUR LES GROUPES CLASSIQUES NON RAMIFIÉS

Jean-Loup Waldspurger

Société Mathématique de France 2001

*J.-L. Waldspurger*
UMR 7586 du CNRS, Mathématiques, Université de Paris 7, 2 Place Jussieu, F-75251 Paris cedex 05.
*E-mail :* waldspur@math.jussieu.fr
*Url :* http://www.math.jussieu.fr/~waldspur

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 22E35, 11F70, 20G40, 20G25.
***Mots clefs.*** — Intégrales orbitales nilpotentes, stabilité, endoscopie, transfert.

# INTÉGRALES ORBITALES NILPOTENTES ET ENDOSCOPIE POUR LES GROUPES CLASSIQUES NON RAMIFIÉS

**Jean-Loup Waldspurger**

***Résumé.*** — Soit $\mathbf{G}$ un groupe classique non ramifié sur un corps local $p$-adique, $p$ étant supposé « grand ». Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$. Notons $\mathcal{D}_{\mathrm{nil}}^{G}$ l'espace des distributions invariantes sur $\mathfrak{g}(F)$ à support nilpotent. Notons $\mathcal{D}^{G,\mathrm{st}}$ l'espace des distributions stablement invariantes sur $\mathfrak{g}(F)$. On calcule explicitement $\mathcal{D}_{\mathrm{nil}}^{G} \cap \mathcal{D}^{G,\mathrm{st}}$. Soit $\mathbf{H}$ un groupe endoscopique elliptique et non ramifié de $\mathbf{G}$. Pour tout $D \in \mathcal{D}_{\mathrm{nil}}^{H} \cap \mathcal{D}^{H,\mathrm{st}}$, on calcule explicitement un élément de $\mathcal{D}_{\mathrm{nil}}^{G}$ qui est un transfert de $D$. L'article contient quelques résultats annexes tels que le calcul de la constante de proportionnalité entre une « fonction de Lusztig » et sa transformée de Fourier, ou le calcul du facteur de transfert pour les groupes classiques.

***Abstract*** **(Nilpotent orbital integrals and endoscopy for unramified classical groups)**

Let $\mathbf{G}$ be an unramified classical group over a $p$-adic local field $F$, where $p$ is big enough. Let $\mathfrak{g}$ be the Lie algebra of $\mathbf{G}$. Let $\mathcal{D}_{\mathrm{nil}}^{G}$ be the space of invariant distributions on $\mathfrak{g}(F)$, with support included in the nilpotent set. Let $\mathcal{D}^{G,\mathrm{st}}$ be the space of stably invariant distributions on $\mathfrak{g}(F)$. We describe explicitely $\mathcal{D}_{\mathrm{nil}}^{G} \cap \mathcal{D}^{G,\mathrm{st}}$. Let $\mathbf{H}$ be an elliptic unramified endoscopic group of $\mathbf{G}$. For all $D \in \mathcal{D}_{\mathrm{nil}}^{H} \cap \mathcal{D}^{H,\mathrm{st}}$, we describe an element of $\mathcal{D}_{\mathrm{nil}}^{G}$ that is a transfer of $D$. The paper contain also related results : a "Lusztig function" is equal to its Fourier transform up to a scalar and we describe the scalar ; we describe also the transfer factor for classical groups.

# TABLE DES MATIÈRES


**Introduction** .......... 1

**I. Définitions générales** .......... 15

**II. Fonctions de Green** .......... 29

**III. Une base de** $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$ .......... 49

**IV. Stabilité** .......... 69

**V. Transformées de Fourier des fonctions de Lusztig** .......... 93

**VI. Démonstration de la proposition IV.3 dans le cas symplectique** .......... 119

**VII. Démonstration de la proposition IV.3 dans le cas orthogonal** .......... 183

**VIII. Correspondance de Springer** .......... 243

**IX. Distributions stables à support nilpotent** .......... 277

**X. Facteurs de transfert** .......... 309

**XI. Induction endoscopique d'orbites nilpotentes** .......... 323

**XII. Transfert d'intégrales orbitales nilpotentes** .......... 393

**Index des notations** .......... 443

**Bibliographie** .......... 447

# INTRODUCTION

Soient $p$ un nombre premier et $F$ une extension finie de $Q_p$. On utilisera dans cette introduction quelques notations standard qui seront définies dans le corps de l'article. Si $\boldsymbol{U}$ est une variété algébrique définie sur $F$, on pose $U = \boldsymbol{U}(F)$.

Soient $\boldsymbol{G}$ un groupe algébrique défini sur $F$, réductif, connexe et quasi-déployé et $\boldsymbol{g}$ son algèbre de Lie. Notons $C_c^\infty(g)$ l'espace des fonctions sur $g$, à valeurs complexes, localement constantes et à support compact, et $\mathcal{D}^G$ l'espace des distributions invariantes sur $g$, *i.e.* des formes linéaires sur $C_c^\infty(g)$ qui sont invariantes par l'action adjointe de tout élément de $G$. Pour $X \in g$, on définit son orbite :

$$\mathcal{O}(X) = \{\mathrm{Ad}(x)X; x \in G\}$$

que l'on munit d'une mesure invariante par adjonction. L'intégrale orbitale associée est la distribution $\phi^G(X, \cdot)$ définie par :

$$\phi^G(X, f) = \int_{\mathcal{O}(X)} f(X')\, dX'$$

pour toute $f \in C_c^\infty(g)$. Cette intégrale orbitale appartient à $\mathcal{D}^G$.

Notons $\boldsymbol{g}_{\mathrm{reg}}$ le sous-ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\boldsymbol{g}$. Alors $\mathcal{D}^G$ n'est autre que la clôture dans $C_c^\infty(g)^*$, pour la topologie faible, du sous-espace engendré par $\{\phi^G(X, \cdot); X \in g_{\mathrm{reg}}\}$.

Soit $X \in g_{\mathrm{reg}}$. L'orbite $\mathcal{O}(X)$ n'est pas en général l'ensemble des points sur $F$ d'une variété algébrique. Un tel ensemble est l'orbite stable :

$$\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X) = \{X' \in g; \exists\, x \in \boldsymbol{G}(\overline{F}), \mathrm{Ad}(x)X = X'\}.$$

Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{E}(X)$ de l'ensemble des orbites contenues dans cette orbite stable. On a donc la décomposition en union disjointe :

$$\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X) = \bigcup_{X' \in \mathcal{E}(X)} \mathcal{O}(X'). \tag{1}$$

On sait que $\mathcal{E}(X)$ est un ensemble fini. On définit l'intégrale orbitale stable $\phi^{G,\mathrm{st}}(X,\cdot)$ par l'égalité

$$\phi^{G,\mathrm{st}}(X,\cdot) = \sum_{X' \in \mathcal{E}(X)} \phi^G(X',\cdot).$$

Les mesures doivent être convenablement normalisées. On note $\mathcal{D}^{G,\mathrm{st}}$ la clôture dans $C_c^\infty(g)^*$, pour la topologie faible, du sous-espace engendré par $\{\phi^{G,\mathrm{st}}(X,\cdot); X \in g_{\mathrm{reg}}\}$.

Plus généralement, on définit la notion de groupe endoscopique de $\boldsymbol{G}$ (*cf.* [Lan], [Ko] et ci-dessous X.1). Un tel groupe $\boldsymbol{H}$ est algébrique, défini sur $F$, réductif, connexe et quasi-déployé. Sa dimension est inférieure ou égale à celle de $\boldsymbol{G}$ mais son rang est égal à celui de $\boldsymbol{G}$. Soit $\boldsymbol{H}$ un tel groupe. Langlands et Shelstad ont défini :

- un sous-ensemble $\boldsymbol{h}_{G-\mathrm{reg}}$ de $\boldsymbol{h}_{\mathrm{reg}}$ qui est un ouvert de Zariski dense dans $\boldsymbol{h}$ ;
- une correspondance entre orbites stables dans $h_{G-\mathrm{reg}}$ et orbites stables dans $g_{\mathrm{reg}}$ ;
- une application

$$\Delta_{G,H} : h_{G-\mathrm{reg}} \times g_{\mathrm{reg}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle que, pour $(Y,X) \in h_{G-\mathrm{reg}} \times g_{\mathrm{reg}}$, on ait :

- $\Delta_{G,H}(Y,X) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{O}^{\mathrm{st}}(Y)$ et $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X)$ se correspondent ;
- si $Y' \in \mathcal{O}^{\mathrm{st}}(Y)$ et $X' \in \mathcal{O}(X)$, $\Delta_{G,H}(Y',X') = \Delta_{G,H}(Y,X)$.

Pour $Y \in h_{G-\mathrm{reg}}$ et $f \in C_c^\infty(g)$, on pose

$$\phi^{G,H}(Y,f) = \sum_{X' \in \mathcal{E}(X)} \Delta_{G,H}(Y,X')\phi^G(X',f).$$

Soient $f \in C_c^\infty(g)$ et $f^H \in C_c^\infty(h)$. On dit que $f^H$ est un transfert de $f$ si et seulement si pour tout $Y \in h_{G-\mathrm{reg}}$, on a l'égalité :

$$\phi^{G,H}(Y,f) = \phi^{H,\mathrm{st}}(Y,f^H).$$

Dualement, soient $D^H \in \mathcal{D}^H$ et $D \in \mathcal{D}^G$. On dit que $D$ est un transfert de $D^H$ si et seulement si pour toutes $f \in C_c^\infty(g)$ et $f^H \in C_c^\infty(h)$ telles que $f^H$ soit un transfert de $f$, on a l'égalité

$$D(f) = D^H(f^H).$$

***Remarque***. — Cette égalité implique $D^H(f^H) = 0$ pour toute $f^H$ telles que l'on ait $\phi^{H,\mathrm{st}}(Y,f^H) = 0$ pour tout $Y \in h_{G-\mathrm{reg}}$, *i.e.* $D^H$ est stablement invariante.

La théorie de l'endoscopie très succintement introduite ci-dessus est apparue pour la première fois dans [LL] et a été développée par Langlands dans [Lan]. Ces auteurs travaillent sur les groupes et non sur les algèbres de Lie comme nous nous bornons à le faire. Le but ultime de cette théorie est d'établir des correspondances entre représentations automorphes sur des groupes $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{G}$ quand $\boldsymbol{H}$ est un groupe endoscopique de $\boldsymbol{G}$.

Pour les distributions à support semi-simple régulier, les notions de stabilité et de transfert sont sans mystère. Elles deviennent plus obscures au voisinage des points singuliers. Notons $\mathcal{D}^G_{\text{nil}}$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{D}^G$ à support nilpotent. Nous nous assignons dans cet article deux buts :

$$(2)\qquad \begin{cases} \bullet\ \text{décrire l'espace } \mathcal{D}^G_{\text{nil}} \cap \mathcal{D}^{G,\text{st}}\,; \\ \bullet\ \boldsymbol{H} \text{ étant un groupe endoscopique de } \boldsymbol{G}, \text{ décrire un transfert} \\ \quad \mathcal{D}^H_{\text{nil}} \cap \mathcal{D}^{H,\text{st}} \to \mathcal{D}^G_{\text{nil}}. \end{cases}$$

Nous restreindrons considérablement la généralité de la situation en supposant :

• $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{H}$ classiques et non ramifiés ;

• $p$ grand relativement à la dimension de $\boldsymbol{G}$.

Décrivons donc le contenu de l'article et nos résultats. Soit $V$ un espace vectoriel de dimension finie sur $F$, resp. sur l'extension quadratique non ramifiée $E$ de $F$, muni d'une forme bilinéaire non dégénérée $q_V$ antisymétrique ou symétrique, resp. d'une forme sesquilinéaire non dégénérée $q_V$ hermitienne. On suppose que $V$ possède un réseau autodual (*cf.* I.3). On note $d$ la dimension de $V$ et on suppose $p \geqslant 3d+1$. On note $\boldsymbol{G}$ la composante neutre du groupe d'isométries de $(V, q_V)$ et on réalise $\boldsymbol{g}$ comme sous-algèbre de $\boldsymbol{g\ell}(V)$.

On introduit la notion de réseau presque autodual de $V$ ; c'est un réseau $L \subset V$ tel que, en notant $\widetilde{L}$ son dual, on ait :

$$\widetilde{L} \supset L \supset \mathfrak{p}_F \widetilde{L}$$

*cf.* I.3. Le stabilisateur $k(L)$ d'un tel réseau dans $g$ est une sous-algèbre parahorique maximale de $g$. Notons $g_{\text{ent}}$ la réunion de ces ensembles $k(L)$ quand $L$ parcourt l'ensemble des réseaux presque autoduaux de $V$. C'est l'ensemble des éléments « entiers » de $g$. Notons $\mathcal{D}^G_{\text{ent}}$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{D}^G$ à support dans $g_{\text{ent}}$. D'autre part, notons $\mathcal{H}$ le sous-espace de $C_c^\infty(g)$ engendré par les fonctions invariantes par une sous-algèbre d'Iwahori de $g$ (*cf.* I.9) et notons

$$\text{res}_{\mathcal{H}} : C_c^\infty(g)^* \longrightarrow \mathcal{H}^*$$

la restriction naturelle. L'intérêt de ces notions est le suivant :

• $\mathcal{D}^G_{\text{ent}}$, qui contient $\mathcal{D}^G_{\text{nil}}$, est par certains côtés plus accessible que $\mathcal{D}^G_{\text{nil}}$ car il est la clôture de l'espace engendré par $\{\phi^G(X,\cdot);\, X \in g_{\text{reg}} \cap g_{\text{ent}}\}$ ;

• il approche $\mathcal{D}^G_{\text{nil}}$ car :

$$(3)\qquad \text{la restriction de } \text{res}_{\mathcal{H}} \text{ à } \mathcal{D}^G_{\text{nil}} \text{ est un isomorphisme de } \mathcal{D}^G_{\text{nil}} \text{ sur } \text{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^G_{\text{ent}})$$

([W1] et ci-dessous, théorème I.9).

On commence par étudier $\mathcal{D}^G_{\text{ent}}$. Si $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots)$ est une partition (*cf.* I.6), on note $c(\boldsymbol{\mu})$ le nombre de termes non nuls de $\boldsymbol{\mu}$ ; pour tout entier $i \geqslant 1$, $c_i(\boldsymbol{\mu})$ le nombre de termes de $\boldsymbol{\mu}$ égaux à $i$ ; $S(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{j\geqslant 1} \mu_j$.

Supposons $(V, q_V)$ du cas « unitaire ». Notons $\Theta(V)$ l'ensemble des triplets de partitions $(\boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')$ tels que :

• $2S(\boldsymbol{\mu}^0) + S(\boldsymbol{\mu}') + S(\boldsymbol{\mu}'') = d$ ;

• $c(\boldsymbol{\mu}'')$ est pair et tous les termes non nuls de $\boldsymbol{\mu}'$ et $\boldsymbol{\mu}''$ sont impairs.
L'ensemble $\Theta(V)$ paramétrise les classes de conjugaison par $G$ de sous-tores maximaux non ramifiés de $\boldsymbol{G}$ (*cf.* I.8). Soit $\theta \in \Theta(V)$. Choisissons un tel tore $\boldsymbol{T}$ paramétrisé par $\theta$. Il a une structure canonique sur $\mathfrak{o}_F$. Fixons un élément $X_T$ de $\boldsymbol{t}(\mathfrak{o}_F)$ dont la réduction dans $(\boldsymbol{t} \times \mathbb{F}_q)(\mathbb{F}_q)$ soit « régulière » (*cf.* I.8). La distribution $\phi^G(X_T, \cdot)$ appartient à $\mathcal{D}^G_{\text{ent}}$ et on montre que sa restriction $\text{res}_{\mathcal{H}}(\phi^G(X_T, \cdot))$ est indépendante des choix de $\boldsymbol{T}$ et $X_T$ (corollaire III.5). Notons $\phi^{\mathcal{H}}_\theta$ cette restriction. Le corollaire III.10 montre que :

$$(4) \qquad (\phi^{\mathcal{H}}_\theta)_{\theta \in \Theta(V)} \text{ est une base de } \text{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^G_{\text{ent}}).$$

Supposons maintenant $(V, q_V)$ symplectique ou orthogonal. Dans cette introduction, on se limitera au cas où $(V, q_V)$ est orthogonal impair. On note $\Theta(V)$ l'ensemble des quintuplets $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}')$ où :

• $k', k'' \in \mathbb{N}$, $k'$ est impair, $k''$ est pair ;
• $k'^2 + k''^2 + 2(S(\boldsymbol{\mu}^0) + S(\boldsymbol{\mu}') + S(\boldsymbol{\mu}'')) = d$ ;
• si $k'' = 0$, $c(\boldsymbol{\mu}'')$ est pair.

Notons $\Theta_{\max}(V)$ le sous-ensemble de ces quintuplets pour lesquels $k' = 1$ et $k'' = 0$. L'ensemble $\Theta_{\max}(V)$ paramétrise encore les classes de conjugaison par $G$ de sous-tores maximaux non ramifiés de $\boldsymbol{G}$. Pour $\theta \in \Theta_{\max}(V)$, on peut définir comme ci-dessus $\phi^{\mathcal{H}}_\theta \in \text{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^G_{\text{ent}})$. Malheureusement, ces distributions sont insuffisantes pour engendrer $\text{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^G_{\text{ent}})$ de même que, sur un corps fini, les fonctions de Green associées à des tores maximaux n'engendrent pas l'espace des fonctions invariantes à support nilpotent. On doit généraliser la définition de $\phi^{\mathcal{H}}_\theta$ à tout $\theta \in \Theta(V)$. Traitons le cas où $\theta = (k', 0, \varnothing, \varnothing, \varnothing)$ avec $k'^2 = d$. Soit $L$ un réseau autodual de $V$. L'espace $\ell' = L/\mathfrak{p}_F L$ est de dimension $d$ sur $\mathbb{F}_q$ et est muni d'une forme quadratique non dégénérée. Notons $g(\ell')$ l'analogue de $g$ quand $V$ et $F$ sont remplacés par $\ell'$ et $\mathbb{F}_q$. Sous l'hypothèse faite ($d = k'^2$), Lusztig a défini une fonction ${}^o\!f$ sur $g(\ell')$, non nulle, à support nilpotent, égale à une constante près à sa transformée de Fourier $\widehat{{}^o\!f}$ (*cf.* [Lu1] et ci-dessous I.4, II.1 et II.5). Il y a une projection naturelle :

$$k(L) \longrightarrow g(\ell')$$

qui permet de remonter ${}^o\!f$ en une fonction sur $k(L)$ puis de l'étendre par 0 hors de $k(L)$ en une fonction sur $g$. Pour $f \in C^\infty_c(g)$, posons :

$$(5) \qquad \phi_\theta(f) = c_\theta \int_G \int_g f(x^{-1}Yx)\, {}^o\!f(Y)\, dY\, dx,$$

où $c_\theta$ est une certaine constante. L'intégrale double n'est pas absolument convergente mais, grâce à la cuspidalité de ${}^o\!f$, l'expression ci-dessus est convergente dans l'ordre indiqué (*cf.* III.2). Cela définit un élément $\phi_\theta$ de $\mathcal{D}^G_{\text{ent}}$ dont on note $\phi^{\mathcal{H}}_\theta$ la restriction à $\mathcal{H}$. Pour $\theta \in \Theta(V)$ quelconque, la définition est un mixage des définitions des deux cas extrêmes évoqués ci-dessus. Ces définitions étant posées, (4) reste vrai.

Revenons au cas unitaire. Notons $\Xi(V)$ l'ensemble des couples $(\boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$ de partitions tels que

• $2S(\boldsymbol{\mu}^0) + S(\boldsymbol{\mu}^1) = d$ ;
• tous les termes non nuls de $\boldsymbol{\mu}^1$ sont impairs
(*cf.* IV.6). L'ensemble $\Xi(V)$ paramétrise les classes de conjugaison stable de sous-tores maximaux non ramifiés de $\boldsymbol{G}$ (*cf.* [Lan], p. 31 pour cette notion). On a une application naturelle surjective :

$$\begin{aligned} \Theta(V) &\longrightarrow \Xi(V) \\ (\boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'') &\longmapsto (\boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}' \cup \boldsymbol{\mu}'') \end{aligned} \tag{6}$$

ou encore : à une classe de conjugaison par $G$ de sous-tores maximaux non ramifiés de $G$, on associe la classe de conjugaison stable la contenant. Soit $\xi \in \Xi(V)$. Choisissons $\theta \in \Theta(V)$, d'image $\xi$, et associons à $\theta$ un tore $\boldsymbol{T}$ et un élément $X_T$ comme ci-dessus. Introduisons l'ensemble $\mathcal{E}(X_T)$ (*cf.* (1)). Il est muni d'une structure de groupe et l'on a une application naturelle

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X_T) &\longrightarrow \Theta(V) \\ X' &\longmapsto \theta(\xi, X') \end{aligned} \tag{7}$$

qui à $X' \in \mathcal{E}(X_T)$ associe la classe de conjugaison par $G$ du tore maximal $\boldsymbol{T}_{X'}$, centralisateur de $X'$ dans $\boldsymbol{G}$. Son image est la fibre de l'application (6) au-dessus de $\xi$. Notons $\mathcal{K}(\xi)$ le groupe dual de $\mathcal{E}(X_T)$. Pour $\kappa \in \mathcal{K}(\xi)$, posons

$$\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa} = \sum_{X' \in \mathcal{E}(X_T)} \kappa(X')\, \phi^{\mathcal{H}}_{\theta(\xi,X')}$$

*cf.* IV.9. On déduit immédiatement de (4) que la famille $(\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa})_{\xi\in\Xi(V),\kappa\in\mathcal{K}(\xi)}$ engendre $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^G_{\mathrm{ent}})$. En général, cette famille n'est pas linéairement indépendante car l'application (7) n'est pas injective. Remarquons que la définition ci-dessus s'écrit aussi :

$$\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa} = \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\phi^{\kappa}(X_T, \cdot)),$$

où

$$\phi^{\kappa}(X_T, \cdot) = \sum_{X' \in \mathcal{E}(X_T)} \kappa(X')\, \phi^G(X', \cdot).$$

En particulier, pour $\kappa = 1$, $\phi^1(X_T, \cdot) = \phi^{G,\mathrm{st}}(X_T, \cdot)$ et $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,1} \in \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^{G,\mathrm{st}})$. Ces considérations rendent naturel le résultat suivant :

• la famille $(\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,1})_{\xi\in\Xi(V)}$ est une base de $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^G_{\mathrm{ent}}) \cap \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^{G,\mathrm{st}})$. C'est ce que l'on démontre en IV.13. L'argument principal consiste à prouver : soient $\xi \in \Xi(V)$ et $\kappa \in \mathcal{K}(\xi)$, supposons $\kappa \neq 1$, alors $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa} \notin \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^{G,\mathrm{st}})$. Pour cela, on introduit la transformée de Fourier $\widehat{\phi^{\kappa}}(X_T, \cdot)$. C'est une distribution localement intégrable donc définie par une fonction $\varphi$. La transformation de Fourier conserve $\mathcal{D}^{G,\mathrm{st}}$ (*cf.* [W2] et ci-dessous IV.5). Si $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa}$ appartenait à $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^{G,\mathrm{st}})$, alors la restriction de $\varphi$ à l'ensemble $\mathfrak{g}_{\mathrm{tn}}$ des éléments topologiquement nilpotents de $\mathfrak{g}$ serait constante sur les classes de conjugaison stable dans $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{tn}}$. En utilisant le fait que $\kappa \neq 1$, on montre que ce n'est pas le cas.

Supposons maintenant $(V, q_V)$ orthogonal impair. Notons $\Xi(V)$ l'ensemble des quadruplets $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$ où :

- $k', k'' \in \mathbb{N}$, $k'$ est impair, $k''$ est pair ;
- $k'^2 + k''^2 + 2(S(\boldsymbol{\mu}^0) + S(\boldsymbol{\mu}^1)) = d$.

On a encore une application surjective de $\Theta(V)$ sur $\Xi(V)$. Pour $\xi \in \Xi(V)$, on peut définir un groupe $\mathcal{K}(\xi)$ et un élément $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa}$ de $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^G_{\mathrm{ent}})$. On veut déterminer lesquelles de ces distributions appartiennent à $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^{G,\mathrm{st}})$. Pour les $\xi$ tels que, avec la notation ci-dessus, $k' = 1$ et $k'' = 0$, le problème se résout comme dans le cas unitaire. Mais supposons $\xi = (k', 0, \varnothing, \varnothing)$ avec $k'^2 = d$. La question est de savoir si la distribution $\phi_\theta$ définie par (5) est stable. Cela ne se lit pas sur cette définition (5). On est forcé d'introduire une autre distribution $D_\theta \in \mathcal{D}^G_{\mathrm{ent}}$ (*cf.* IV.2). Celle-ci est par définition combinaison linéaire d'intégrales orbitales $\phi^G(X', \cdot)$ pour des éléments $X'$ tels que, en notant $\boldsymbol{T}_{X'}$ leur centralisateur dans $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{T}_{X'}$ soit un sous-tore maximal totalement ramifié de $\boldsymbol{G}$. Le fait que les fonctions de Lusztig (notée ${}^o\!f$ ci-dessus) soient liées à de tels tores est réminiscent de [KL], § 9. On montre ensuite que $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D_\theta) = \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\phi_\theta)$ (proposition IV.3). Maintenant, on peut appréhender les propriétés de stabilité de ces distributions. Le résultat est le suivant. Notons $\Xi^{\mathrm{st}}(V)$ le sous ensemble des $\xi = (k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1) \in \Xi(V)$ tels que $|k' - k''| = 1$. Alors

(8) la famille $(\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,1})_{\xi \in \Xi^{\mathrm{st}}(V)}$ est une base de $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^G_{\mathrm{ent}}) \cap \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^{G,\mathrm{st}})$.

Pour unifier les notations, on pose $\Xi^{\mathrm{st}}(V) = \Xi(V)$ dans le cas unitaire. Dans les deux cas, d'après (3), l'application $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}$ définit une injection

$$\mathcal{D}^G_{\mathrm{nil}} \cap \mathcal{D}^{G,\mathrm{st}} \longrightarrow \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^G_{\mathrm{ent}}) \cap \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^{G,\mathrm{st}}).$$

Un argument simple utilisant l'homogénéité des intégrales orbitales nilpotentes (*cf.* lemme IV.15) prouve que cette application est un isomorphisme (théorème IV.16). On déduit des deux résultats précédents le calcul de la dimension de $\mathcal{D}^G_{\mathrm{nil}} \cap \mathcal{D}^{G,\mathrm{st}}$. Soit $L$ un réseau auto-dual de $V$. Comme on l'a dit, l'espace $\ell' = L/\mathfrak{p}_F L$ est muni d'une forme de même type que $q_V$. Notons $\boldsymbol{G}(\ell')$ le groupe analogue à $\boldsymbol{G}$ relatif à cet espace et $\mathrm{Unip}(V)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles unipotentes de $G(\ell')$. On montre alors que $\Xi^{\mathrm{st}}(V)$ et $\mathrm{Unip}(V)$ ont même nombre d'éléments. D'où le théorème IV.16 :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}^G_{\mathrm{nil}} \cap \mathcal{D}^{G,\mathrm{st}}) = |\,\mathrm{Unip}(V)|.$$

La démonstration de la proposition IV.3 évoquée ci-dessus est élémentaire mais longue (oui, mais vraiment longue...). Elle occupe les chapitres VI et VII. Tentons d'en expliquer le principe dans le cas simple où $(V, q_V)$ est symplectique et $d = 2$. Alors $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{SL}_2$. Avec les notations introduites avant (5), on peut supposer $k(L) = \boldsymbol{s\ell}_2(\mathfrak{o}_F)$ et $g(\ell') = \boldsymbol{s\ell}_2(\mathbb{F}_q)$. Notons $\varpi_F$ une uniformisante de $F$ et $\nu$ un élément de $\mathbb{F}_q^\times$ qui n'est pas un carré ou un relèvement dans $\mathfrak{o}_F^\times$ d'un tel élément. En négligeant un certain nombre de constantes, on a

$$^{o}f = e\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] - e\left[\begin{pmatrix} 0 & \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

où, par exemple, $e\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$ désigne la fonction caractéristique dans $\boldsymbol{s\ell}_2(\mathbb{F}_q)$ de la classe de conjugaison de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ par $\boldsymbol{SL}_2(\mathbb{F}_q)$. On définit $\phi_\theta$ par la formule (5). Pour $\alpha, \beta \in F^\times$, posons

$$X_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \omega_F\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Définissons

$$D_\theta = \phi^G(X_{1,1}, \cdot) - \phi^G(X_{\nu^{-1},\nu}, \cdot) + \phi^G(X_{1,\nu}, \cdot) - \phi^G(X_{\nu,1}, \cdot). \tag{9}$$

Remarquons que $X_{1,1}$ et $X_{\nu^{-1},\nu}$ sont stablement conjugués, de même que $X_{1,\nu}$ et $X_{\nu,1}$. Notons $K = \boldsymbol{SL}_2(\mathfrak{o}_F)$ et $B$ son sous-groupe d'Iwahori triangulaire supérieur usuel. Soit $\psi$ un caractère continu de $F$ de conducteur $\mathfrak{p}_F$. Pour $Z \in g$, posons :

- pour tout $X \in g$, $I(Z, X) = \int_B \psi \cdot \mathrm{trace}(Zx^{-1}Xx)\, dx$ ;
- $I(Z) = I(Z, X_{1,1}) - I(Z, X_{\nu^{-1},\nu}) + I(Z, X_{1,\nu}) - I(Z, X_{\nu,1})$.

On veut prouver que :

$$\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\phi_\theta) = \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D_\theta).$$

Un argument de transformation de Fourier montre qu'il suffit de prouver les deux propriétés suivantes :

(10)
- pour tout $Z \in g_{\mathrm{ent}}$, $I(Z) \neq 0 \Longrightarrow Z \in \boldsymbol{s\ell}_2(\mathfrak{o}_F)$;
- pour tout $Z \in \boldsymbol{s\ell}_2(\mathfrak{o}_F)$, $\displaystyle\int_K I(x^{-1}Zx)\, dx = \widehat{^{o}f}(Z)$.

Cette deuxième propriété est facile. La première se démontre en deux étapes. D'abord on utilise une méthode standard, celle qui prouve que des facteurs $\varepsilon$ sont égaux à des sommes de Gauss. Posons

$$b = \left\{\begin{pmatrix} u & v \\ w & -u \end{pmatrix} ;\ u, v \in \mathfrak{o}_F, w \in \mathfrak{p}_F\right\},\quad b_1 = \left\{\begin{pmatrix} u & v \\ w & -u \end{pmatrix} ;\ v \in \mathfrak{o}_F, u, w \in \mathfrak{p}_F,\right\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, posons :

$$b_n = \begin{cases} \omega_F^{n/2} b, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \omega_F^{(n-1)/2} b_1, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Soit $n$ un entier $\geqslant 1$. Notons $B_n$ l'image dans $G$ de $b_n$ par l'exponentielle et définissons $I_n(Z)$ en remplaçant $B$ par $B_n$ dans la définition de $I(Z)$. On montre que :

- si $Z \in g_{\mathrm{ent}} \cap b_{-n-1}$ et $I_n(Z) \neq 0$, alors $Z \in b_{-n}$.

On en déduit par récurrence la relation :

- si $Z \in g_{\mathrm{ent}}$ et $I(Z) \neq 0$, alors $Z \in b_{-1}$.

La deuxième étape utilise plus spécifiquement les propriétés de la combinaison linéaire (9), elles-mêmes liées aux propriétés de la fonction ${}^{o}f$. Soit $Z \in g_{\text{ent}} \cap b_{-1}$ tel que $I(Z) \mp 0$. On veut prouver que $Z \in \boldsymbol{sl}_2(\mathfrak{o}_F)$. Ecrivons $Z = \begin{pmatrix} u & v \\ w & -u \end{pmatrix}$. Puisque $Z \in b_{-1}$, on a déjà $u, w \in \mathfrak{o}_F$ et $v \in \mathfrak{p}_F^{-1}$. Supposons $v_F(v) = -1$. Puisque $Z \in g_{\text{ent}}$, on a $\det(Z) \in \mathfrak{o}_F$, donc $w \in \mathfrak{p}_F$. Le calcul montre alors que pour tout $x \in B$, on a les égalités :

$$\begin{aligned} \operatorname{trace}(Zx^{-1}X_{1,1}x) &\equiv \operatorname{trace}(Zx^{-1}X_{\nu,1}x) \bmod \mathfrak{p}_F, \\ \operatorname{trace}(Zx^{-1}X_{\nu^{-1},\nu}x) &\equiv \operatorname{trace}(Zx^{-1}X_{1,\nu}x) \bmod \mathfrak{p}_F. \end{aligned}$$

D'où $I(Z) = 0$ contrairement à l'hypothèse. Cette contradiction prouve que $v \in \mathfrak{o}_F$, donc $Z \in \boldsymbol{sl}_2(\mathfrak{o}_F)$. Cela achève la preuve de (10).

Les propriétés utilisées de la fonction ${}^{o}f$ sont démontrées au chapitre V par des méthodes élémentaires d'algèbre linéaire. Au passage, on y calcule la constante ${}^{o}\gamma$ telle que $\widehat{{}^{o}f} = {}^{o}\gamma\, {}^{o}f$ (proposition V.8). Un résultat analogue, sous des hypothèses sensiblement différentes des nôtres, se trouve dans un récent article de Geck ([G]).

Supposons de nouveau que $(V, q_V)$ est unitaire. Notons $W$ le groupe de Weyl de type $A_{d-1}$ (groupe des permutations d'un ensemble à $d$ éléments). Les classes de conjugaison dans $W$ paramétrisent les classes de conjugaison stable de sous-tores maximaux non ramifiés de $\boldsymbol{G}$ (*cf.* IX.6). D'un point de vue combinatoire, les classes de conjugaison dans $W$ sont paramétrisées par l'ensemble $\mathcal{P}(d)$ des partitions de $d$ et on définit une bijection de $\Xi(V)$ sur $\mathcal{P}(d)$ par :

$$(\boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1) \longmapsto (2\boldsymbol{\mu}^0) \cup \boldsymbol{\mu}^1 .$$

Cela permet de définir une application

$$\begin{aligned} W &\longrightarrow \Xi(V) \\ w &\longmapsto \xi_w . \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{R}(W)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles de $W$. Pour $\rho \in \mathcal{R}(W)$, posons

$$\phi_\rho^{st,\mathcal{H}} = |W|^{-1} \sum_{w \in W} \operatorname{trace} \cdot \rho(w)\, \phi^{\mathcal{H}}_{\xi_w,1} \tag{11}$$

*cf.* IX.8. Il serait plus naturel d'introduire l'action du Frobenius dans ces définitions, notre groupe étant ici non déployé. C'est ce que nous ferons dans l'article. Comme le Frobenius agit sur $W$ par un automorphisme intérieur, on peut l'éliminer comme on le fait dans cette introduction en modifiant légèrement les définitions. Il résulte de (8) que la famille $(\phi_\rho^{st,\mathcal{H}})_{\rho \in \mathcal{R}(W)}$ est une base de $\operatorname{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^G_{\text{ent}}) \cap \operatorname{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^{G,\text{st}})$.

Rappelons que $\mathcal{R}(W)$ est en bijection naturelle avec $\mathcal{P}(d)$ (*cf.* VIII.2). Rappelons d'autre part la classification de l'ensemble $\operatorname{Nil}(V)$ des classes de conjugaison par $G$ nilpotentes dans $g$ (*cf.* I.6). Sur la clôture algébrique $\overline{F}$, ces classes sont paramétrisées par $\mathcal{P}(d)$. Soit $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(d)$. Notons $Q(\boldsymbol{\mu})$ l'ensemble des familles $(q_i)_{i \geqslant 1}$ telles que, pour tout entier $i \geqslant 1$, $q_i$ est une classe d'équivalence de forme hermitienne non dégénérée de dimension $c_i(\boldsymbol{\mu})$ et de plus :

(12) $$\bigoplus_{\substack{i\geqslant 1,\\ i \text{ impair}}} q_i \text{ a même noyau anisotrope que } q_V.$$

Alors $Q(\boldsymbol{\mu})$ classifie les classes de conjugaison par $G$ dans $g$ contenues dans la classe de conjugaison par $\boldsymbol{G}(\overline{F})$ dans $\boldsymbol{g}(\overline{F})$ paramétrisée par $\boldsymbol{\mu}$. On identifie $\mathrm{Nil}(V)$ à l'ensemble des données $(\boldsymbol{\mu},(q_i))$ où $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(d)$ et $(q_i) \in Q(\boldsymbol{\mu})$. Pour toute telles données, notons $\dim(\boldsymbol{\mu})$ la dimension de la classe de conjugaison qu'elles paramétrisent, $\phi^G_{\boldsymbol{\mu},(q_i)}$ l'intégrale orbitale sur cette classe (*cf.* I.6) et définissons $\gamma(\boldsymbol{\mu},(q_i))$ de la façon suivante : pour tout entier $i \geqslant 1$, posons

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, & \text{si } \bigoplus_{\ell\geqslant i} q_\ell \text{ est quasi-déployée,}\\ -1, & \text{sinon;}\end{cases}$$

alors :

(13) $$\gamma(\boldsymbol{\mu},(q_i)) = (-1)^{(d^2-d-\dim(\boldsymbol{\mu}))/2}\prod_{i\geqslant 1}\gamma_i.$$

Soient $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(d)$ et $\rho \in \mathcal{R}(W)$ la représentation associée. D'après (3), il existe une unique fonction $\Gamma_{\boldsymbol{\lambda}} : \mathrm{Nil}(V) \to \mathbb{C}$ telle que

(14) $$\phi^{st,\mathcal{H}}_\rho = \mathrm{res}_{\mathcal{H}}\left[\sum_{(\boldsymbol{\mu},(q_i))\in \mathrm{Nil}(V)} \Gamma_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\mu},(q_i))\,\phi^G_{\boldsymbol{\mu},(q_i)}\right].$$

On démontre les propriétés suivantes :
- soit $(\boldsymbol{\mu},(q_i)) \in \mathrm{Nil}(V)$ tel que $\Gamma_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\mu},(q_i)) \neq 0$ ; alors $\boldsymbol{\mu} \leqslant \boldsymbol{\lambda}$ ;
- pour toute famille $(q_i) \in Q(\boldsymbol{\lambda})$, $\Gamma_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda},(q_i)) = \gamma(\boldsymbol{\lambda},(q_i))$

(proposition IX.9 et lemme IX.13). Pour ce faire, on calcule les deux membres de (14) appliqués à certaines fonctions appartenant à $\mathcal{H}$. Ces fonctions ont été introduites par Barbasch et Moy ([BM]). Le calcul utilise les caractères de Gelfand-Graev généralisés des groupes finis obtenus par réduction des sous-groupes parahoriques de $\boldsymbol{G}$. On rappelle au chapitre VIII la théorie concernant ces caractères, notamment leurs liens avec la correspondance de Springer (*cf.* [Kaw2] et [Lu5]). Posons

$$\phi^G_{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{(q_i)\in Q(\boldsymbol{\lambda})} \gamma(\boldsymbol{\lambda},(q_i))\,\phi^G_{\boldsymbol{\lambda},(q_i)}.$$

Grâce au lemme IV.15 déjà évoqué, toutes les composantes homogènes de l'expression entre crochets du membre de droite de (14) sont des distributions stablement invariantes. En particulier la composante de plus haut degré, qui n'est autre que $\phi^G_{\boldsymbol{\lambda}}$. On a donc $\phi^G_{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathcal{D}^G_{\mathrm{nil}} \cap \mathcal{D}^{G,\mathrm{st}}$. On vérifie que la famille $(\phi^G_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}(d)}$ est linéairement indépendante (lemme IX.14). Grâce au calcul déjà effectué de la dimension de $\mathcal{D}^G_{\mathrm{nil}} \cap \mathcal{D}^{G,\mathrm{st}}$, on en déduit le théorème IX.15 :

(15) $$(\phi^G_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}(d)} \text{ est une base de } \mathcal{D}^G_{\text{nil}} \cap \mathcal{D}^{G,\text{st}}.$$

Supposons maintenant $(V, q_V)$ orthogonal impair. Le principe des constructions est le même, mais la combinatoire est plus compliquée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $W_n$ le groupe de Weyl de type $C_n$ (*cf.* II.3). On établit cette fois une application :

$$\begin{aligned} \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N},\\ k(k+1)\leqslant(d-1)/2}} W_{(d-1)/2-k(k+1)} &\longrightarrow \Xi^{\text{st}}(V) \\ w &\longmapsto \xi_w \end{aligned}$$

qui devient bijective si l'on remplace les groupes de Weyl par leurs ensembles de classes de conjugaison (*cf.* IX.6). Posons

$$\mathcal{R}^{\text{st}}(V) = \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N},\\ k(k+1)\leqslant(d-1)/2}} \mathcal{R}(W_{(d-1)/2-k(k+1)}).$$

Pour tout $\rho \in \mathcal{R}^{\text{st}}(V)$, on définit $\phi^{st,\mathcal{H}}_\rho$ : dans la formule (11), on remplace $W$ par $W_{(d-1)/2-k(k+1)}$, où $k$ est tel que $\rho \in \mathcal{R}(W_{(d-1)/2-k(k+1)})$. La famille $(\phi^{st,\mathcal{H}}_\rho)_{\rho\in\mathcal{R}^{\text{st}}(V)}$ est une base de $\text{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^G_{\text{ent}}) \cap \text{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^{G,\text{st}})$.

Notons $\mathcal{P}(V)$ l'ensemble des partitions orthogonales de $d$, *i.e.* des $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(d)$ telles que $c_i(\boldsymbol{\lambda})$ soit pair pour tout entier $i$ pair $\geqslant 2$. Pour $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(V)$, on dit que $\boldsymbol{\lambda}$ est spéciale si ${}^t\boldsymbol{\lambda}$ appartient aussi à $\mathcal{P}(V)$ (*cf.* VIII.18). Soit $\boldsymbol{\lambda}$ une telle partition spéciale. Posons

(16) $$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\lambda}) &= \{i \in \mathbb{N}; i \text{ est impair et } c_i(\boldsymbol{\lambda}) \neq 0\}, \\ a_{\text{imp}}(\boldsymbol{\lambda}) &= \{i \in \mathbb{N}; i \text{ et } c_i(\boldsymbol{\lambda}) \text{ sont impairs}\}. \end{aligned}$$

Numérotons les éléments de $a_{\text{imp}}(\boldsymbol{\lambda})$ : $i_1 > \cdots > i_m$. Appelons intervalle un sous-ensemble de $a(\boldsymbol{\lambda})$ de l'une des formes suivantes :

- $\{i\}$ où $i \in a(\boldsymbol{\lambda})$ est tel qu'il existe $\ell \in \{1, \dots, (m+1)/2\}$ avec $i_{2\ell-1} > i > i_{2\ell}$ ;
- $\{i \in a(\boldsymbol{\lambda}) ; i_{2\ell} \geqslant i \geqslant i_{2\ell+1}\}$ pour $\ell \in \{0, \dots, (m-1)/2\}$ ;

par convention $i_0 = \infty$, $i_{m+1} = 0$, *cf.* VIII.18. Notons $\text{Int}(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble de ces intervalles et $\Delta_{\boldsymbol{\lambda},\max}$, resp. $\Delta_{\boldsymbol{\lambda},\min}$, son plus grand, resp. petit, élément.

Notons $\mathcal{I}^{\text{st}}(V)$ l'ensemble des triplets $(\boldsymbol{\lambda}, \tau, \delta)$ où :

- $\boldsymbol{\lambda}$ est une partition spéciale dans $\mathcal{P}(V)$ ;
- $\tau, \delta \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\text{Int}(\boldsymbol{\lambda})}$ ;
- $\tau(\Delta_{\boldsymbol{\lambda},\max}) = \delta(\Delta_{\boldsymbol{\lambda},\min}) = 0$.

Lusztig a défini une bijection :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{\text{st}}(V) &\longrightarrow \mathcal{R}^{\text{st}}(V) \\ \iota &\longmapsto \rho_\iota, \end{aligned}$$

*cf.* [Lu7] et ci-dessous VIII.18, VIII.19 et IX.10.

D'autre part les classes de conjugaison par $\boldsymbol{G}(\overline{F})$ dans $\boldsymbol{g}(\overline{F})$, nilpotentes, sont paramétrisées par $\mathcal{P}(V)$. Pour $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(V)$, notons $Q(\boldsymbol{\mu})$ l'ensemble des familles $(q_i)_{i\geqslant 1, i \text{ impair}}$ telles que pour tout entier $i \geqslant 1$, impair, $q_i$ soit une classe d'équivalence de forme quadratique non dégénérée de dimension $c_i(\boldsymbol{\mu})$ et, de plus, (12) soit vérifié. Comme dans le cas unitaire, on identifie l'ensemble $\mathrm{Nil}(V)$ des classes de conjugaison par $G$ dans $g$, nilpotentes, à l'ensemble des données $(\boldsymbol{\mu}, (q_i))$ où $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(V)$ et $(q_i) \in Q(\boldsymbol{\mu})$.

Toute forme quadratique $q$ non dégénérée peut s'écrire sous la forme :

$$a_1 x_1^2 + \cdots + a_{d'} x_{d'}^2 + \omega_F b_1 y_1^2 + \cdots + \omega_F b_{d''} y_{d''}^2$$

avec des $a_j$ et $b_j$ dans $\mathfrak{o}_F{}^{\times}$. On pose

$$\eta'(q) = (-1)^{[d'/2]} \prod_{j=1}^{d'} a_j \bmod \mathfrak{o}_F^{\times 2},$$

$$\eta''(q) = (-1)^{[d''/2]} \prod_{j=1}^{d''} b_j \bmod \mathfrak{o}_F^{\times 2},$$

$$d''(q) = d'' \bmod 2\mathbb{Z}.$$

Ces termes sont uniquement déterminés.

Soit $\iota = (\boldsymbol{\lambda}, \tau, \delta) \in \mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$. Pour $(q_i) \in Q(\boldsymbol{\lambda})$, posons :

- pour tout $\Delta \in \mathrm{Int}(\boldsymbol{\lambda})$,

$$q_\Delta = \bigoplus_{i\in\Delta} q_i, \quad q_{\geqslant\Delta} = \bigoplus_{\Delta'\in\mathrm{Int}(\boldsymbol{\lambda}), \Delta'\geqslant\Delta} q_{\Delta'};$$

- s'il existe $\Delta \in \mathrm{Int}(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $d''(q_{\geqslant\Delta}) \neq \delta(\Delta)$,

$$\gamma_\iota(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) = 0;$$

- si pour tout $\Delta \in \mathrm{Int}(\boldsymbol{\lambda})$, on a $d''(q_{\geqslant\Delta}) = \delta(\Delta)$,

$$\gamma_\iota(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) = \prod_{\Delta\in\mathrm{Int}(\boldsymbol{\lambda})} \mathrm{sgn}(\eta'(q_\Delta)\eta''(q_\Delta))^{\tau(\Delta)}.$$

On a un développement analogue à (14) :

$$\phi_{\rho_\iota}^{st,\mathcal{H}} = \mathrm{res}_{\mathcal{H}} \left[ \sum_{(\boldsymbol{\mu},(q_i))\in\mathrm{Nil}(V)} \Gamma_\iota(\boldsymbol{\mu}, (q_i)) \phi^G_{\boldsymbol{\mu},(q_i)} \right].$$

On démontre les propriétés suivantes :

- soit $(\boldsymbol{\mu}, (q_i)) \in \mathrm{Nil}(V)$ tel que $\Gamma_\iota(\boldsymbol{\mu}, (q_i)) \neq 0$ ; alors $\boldsymbol{\mu} \leqslant \boldsymbol{\lambda}$ ;
- il existe $C(\iota) \in \mathbb{C}^\times$, explicite, tel que pour toute famille $(q_i) \in Q(\boldsymbol{\lambda})$, on ait l'égalité $\Gamma_\iota(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) = C(\iota)\gamma_\iota(\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$

(proposition IX.12 et lemme IX.13). La démonstration utilise des propriétés combinatoires concernant notamment la représentation de Springer généralisée, qui sont rappelées ou démontrées aux chapitres VIII et XI.

Posons

$$\phi_\iota^G = \sum_{(q_i)\in Q(\boldsymbol{\lambda})} \gamma_\iota(\boldsymbol{\lambda},(q_i))\,\phi^G_{\boldsymbol{\lambda},(q_i)}.$$

On obtient comme dans le cas unitaire le théorème IX.15 :

$$(\phi_\iota^G)_{\iota\in\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)} \text{ est une base de } \mathcal{D}^G_{\mathrm{nil}}\cap\mathcal{D}^{G,\mathrm{st}}.$$

Remarquons que pour tout $\iota\in\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$, $\phi_\iota^G$ est portée par des classes de conjugaison paramétrisées par des partitions spéciales. Pour les groupes ici considérés, cela résout une conjecture de Assem et Kottwitz ([A1]).

On se tourne ensuite vers le problème du transfert (voir [A2] pour des conjectures sur ce problème). En X.1, on introduit les groupes endoscopiques elliptiques de $\boldsymbol{G}$. Fixons un tel groupe $\boldsymbol{H}$. Il est de la forme $\boldsymbol{G}_1\times\boldsymbol{G}_2$ où, pour $n\in\{1,2\}$, $\boldsymbol{G}_n$ est la composante neutre du groupe d'isométries d'un couple $(V_n,q_{V_n})$ dont on suppose qu'il vérifie des hypothèses similaires à celles que vérifie $(V,q_V)$. On calcule explicitement le facteur de transfert $\Delta_{G,H}$ (proposition X.8).

Supposons $(V,q_V)$ unitaire. Pour $n\in\{1,2\}$, $(V_n,q_{V_n})$ est aussi unitaire. On affecte d'un indice $n$ les objets relatifs à cet espace et d'un exposant $H$ les objets relatifs à $\boldsymbol{H}$. Soient $\boldsymbol{\lambda}_1\in\mathcal{P}(d_1)$, $\boldsymbol{\lambda}_2\in\mathcal{P}(d_2)$ et $\rho_1\in\mathcal{R}(W_1)$, $\rho_2\in\mathcal{R}(W_2)$ les représentations associées. On sait définir $\phi^{st,\mathcal{H}_1}_{\rho_1}\otimes\phi^{st,\mathcal{H}_2}_{\rho_2}\in\mathrm{res}_{\mathcal{H}^H}(\mathcal{D}^H_{\mathrm{ent}})\cap\mathrm{res}_{\mathcal{H}^H}(\mathcal{D}^{H,\mathrm{st}})$. On a un développement :

$$(17)\quad \phi^{st,\mathcal{H}_1}_{\rho_1}\otimes\phi^{st,\mathcal{H}_2}_{\rho_2} = \mathrm{res}_{\mathcal{H}^H}\Bigg[\sum_{(\boldsymbol{\mu}_1,(q_{1,i}))\in\mathrm{Nil}(V_1)}\ \sum_{(\boldsymbol{\mu}_2,(q_{2,i}))\in\mathrm{Nil}(V_2)} \Gamma_{\boldsymbol{\lambda}_1}(\boldsymbol{\mu}_1,(q_{1,i})) \cdot\Gamma_{\boldsymbol{\lambda}_2}(\boldsymbol{\mu}_2,(q_{2,i}))\phi^{G_1}_{\mu_1,(q_{1,i})}\otimes\phi^{G_2}_{\mu_2,(q_{2,i})}\Bigg].$$

D'autre part, $\phi^{st,\mathcal{H}_1}_{\rho_1}\otimes\phi^{st,\mathcal{H}_2}_{\rho_2}$ est par définition combinaison linéaire de restrictions à $\mathcal{H}^H$ de distributions de la forme

$$\phi^{G_1,\mathrm{st}}(X_{T_1},\cdot)\otimes\phi^{G_2,\mathrm{st}}(X_{T_2},\cdot),$$

*cf.* (11). Un transfert à $\mathcal{D}^G$ de cette dernière distribution est

$$\phi^{G,H}(X_{T_1}\oplus X_{T_2},\cdot),$$

où $X_{T_1}\oplus X_{T_2}\in g_1\oplus g_2 = h$. On en déduit facilement la définition d'un élément $\phi^{\mathcal{H}}[\rho_1,\rho_2]$ de $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^G_{\mathrm{ent}})$ qui, en un sens convenable, est un transfert de $\phi^{st,\mathcal{H}_1}_{\rho_1}\otimes\phi^{st,\mathcal{H}_2}_{\rho_2}$. On a un développement :

$$(18)\qquad \phi^{\mathcal{H}}[\rho_1,\rho_2] = \mathrm{res}_{\mathcal{H}}\Bigg[\sum_{(\boldsymbol{\mu},(q_i))\in\mathrm{Nil}(V)} \Gamma_{\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2}(\boldsymbol{\mu},(q_i))\,\phi^G_{\boldsymbol{\mu},(q_i)}\Bigg].$$

Posons $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2$ (*cf.* I.5). Pour une famille $(q_i)\in Q(\boldsymbol{\lambda})$, posons :

- pour tout entier $i\geqslant 1$, $\ell(i)=\sum_{k\geqslant i} c_k(\boldsymbol{\lambda})$ et $s(i)=\lambda_{2,\ell(i)}$ ;

• $\gamma_{\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2}(\boldsymbol{\lambda},(q_i)) = \gamma(\boldsymbol{\lambda},(q_i))\prod_{i\geqslant 1}(-1)^{s(i)\,d''(q_i)}$,
où $\gamma(\boldsymbol{\lambda},(q_i))$ est défini par (13).

On démontre :

• soit $(\boldsymbol{\mu},(q_i)) \in \mathrm{Nil}(V)$ tel que $\Gamma_{\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2}(\boldsymbol{\mu},(q_i)) \neq 0$ ; alors $\boldsymbol{\mu} \leqslant \boldsymbol{\lambda}$ ;

• pour toute famille $(q_i) \in Q(\boldsymbol{\lambda})$, $\Gamma_{\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2}(\boldsymbol{\lambda},(q_i)) = \gamma_{\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2}(\boldsymbol{\lambda},(q_i))$
(proposition XII.6). Posons :

$$\phi^G_{\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2} = \sum_{(q_i)\in Q(\boldsymbol{\lambda})} \gamma_{\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2}(\boldsymbol{\lambda},(q_i))\,\phi^G_{\boldsymbol{\lambda},(q_i)}.$$

Comparons les développements (17) et (18). Parce que $\phi^{\mathcal{H}}[\rho_1,\rho_2]$ est un transfert de $\phi^{st,\mathcal{H}_1}_{\rho_1}\otimes\phi^{st,\mathcal{H}_2}_{\rho_2}$, le lemme XII.8, similaire au lemme IV.15 dont on a déjà parlé, montre que pour tout $i\in\mathbb{Z}$, la composante homogène de degré $i+\dim(\boldsymbol{g})-\dim(\boldsymbol{h})$ de l'expression entre crochets de (18) est un transfert de la composante homogène de degré $i$ de l'expression entre crochets de (17). Cela vaut en particulier pour les termes de plus hauts degrés. On en déduit le théorème XII.9 :

$$\phi^G_{\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2} \text{ est un transfert de } \phi^{G_1}_{\boldsymbol{\lambda}_1}\otimes\phi^{G_2}_{\boldsymbol{\lambda}_2}.$$

Grâce à (15), ce résultat permet de décrire un transfert de tout élément de $\mathcal{D}^H_{\mathrm{nil}}\cap\mathcal{D}^{H,\mathrm{st}}$.

Supposons maintenant $(V,q_V)$ orthogonal impair. Pour $n\in\{1,2\}$, $(V_n,q_{V_n})$ l'est aussi. Soient $\iota_1\in\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V_1)$, $\iota_2\in\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V_2)$. On construit encore un transfert $\phi^{\mathcal{H}}[\rho_{\iota_1},\rho_{\iota_2}]\in \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^G_{\mathrm{ent}})$ de $\phi^{st,\mathcal{H}_1}_{\rho_{\iota_1}}\otimes\phi^{st,\mathcal{H}_2}_{\rho_{\iota_2}}$. On a un développement :

$$\phi^{\mathcal{H}}[\rho_{i_1},\rho_{\iota_2}] = \mathrm{res}_{\mathcal{H}}\left[\sum_{(\boldsymbol{\mu},(q_i))\in\mathrm{Nil}(V)} \Gamma_{\iota_1,\iota_2}(\boldsymbol{\mu},(q_i))\,\phi^G_{\boldsymbol{\mu},(q_i)}\right].$$

On construit $\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}(V)$ et, pour une famille $(q_i)\in Q(\boldsymbol{\lambda})$, un entier $\gamma_{\iota_1,\iota_2}(\boldsymbol{\lambda},(q_i))\in\mathbb{Z}$ et l'on montre :

$$\text{(19)}\qquad \text{soit } (\boldsymbol{\mu},(q_i))\in\mathrm{Nil}(V) \text{ tel que } \Gamma_{\iota_1,\iota_2}(\boldsymbol{\mu},(q_i))\neq 0;\ \text{alors } \boldsymbol{\mu}\leqslant\boldsymbol{\lambda};$$

$$\text{(20)}\qquad \begin{array}{l}\text{il existe } C(\iota_1,\iota_2)\in\mathbb{C}^\times,\ \text{explicite, tel que pour toute famille}\\ (q_i)\in Q(\boldsymbol{\lambda}),\ \text{on ait l'égalité } \Gamma_{\iota_1,\iota_2}(\boldsymbol{\lambda},(q_i)) = C(\iota_1,\iota_2)\gamma_{\iota_1,\iota_2}(\boldsymbol{\lambda},(q_i))\end{array}$$

(proposition XII.7). Posons :

$$\phi^G_{\iota_1,\iota_2} = \sum_{(q_i)\in Q(\boldsymbol{\lambda})} \gamma_{\iota_1,\iota_2}(\boldsymbol{\lambda},(q_i))\,\phi^G_{\boldsymbol{\lambda},(q_i)}.$$

Comme précédemment, on obtient :

$$\phi^G_{\iota_1,\iota_2} \text{ est un transfert de } \phi^{G_1}_{\iota_1}\otimes\phi^{G_2}_{\iota_2}$$

(théorème XII.9). La démonstration des relations (19) et (20) utilise beaucoup de propriétés combinatoires de la correspondance de Springer généralisée. Un outil essentiel est la proposition XI.29. Revenons simplement sur les définitions de la partition $\boldsymbol{\lambda}$ (*cf.* [H]) et de la fonction $\gamma_{\iota_1,\iota_2}$. Pour $n \in \{1,2\}$, écrivons $\iota_n = (\boldsymbol{\lambda}_n, \tau_n, \delta_n)$. Posons :

$$J^+ = \Big\{j \geqslant 1;\ j \text{ est pair, } \lambda_{1,j} \text{ et } \lambda_{2,j} \text{ sont impairs, } \lambda_{1,j-1} + \lambda_{2,j-1} > \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}\Big\};$$

$$J^- = \Big\{j \geqslant 1;\ j \text{ est impair, } \lambda_{1,j} \text{ et } \lambda_{2,j} \text{ sont impairs, } \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j} > \lambda_{1,j+1} + \lambda_{2,j+1}\Big\}.$$

Alors, pour tout entier $j \geqslant 1$, $\lambda_j$ est défini par

$$\lambda_j = \begin{cases} \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}\,, & \text{si } j \notin J^+ \cup J^-\,, \\ \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j} + 1\,, & \text{si } j \in J^+\,, \\ \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j} - 1\,, & \text{si } j \in J^-\,, \end{cases}$$

(*cf.* XI.7). On définit un ensemble d'intervalles $\mathrm{Int}(\boldsymbol{\lambda})$ (*cf.* XI.11). L'ensemble $a(\boldsymbol{\lambda})$ défini par (16) est union disjointe de ces intervalles. Attention : l'ensemble $\mathrm{Int}(\boldsymbol{\lambda})$ ne dépend pas seulement de $\boldsymbol{\lambda}$ mais bel et bien des deux partitions $\boldsymbol{\lambda}_1$ et $\boldsymbol{\lambda}_2$.

On définit également quatre éléments $\tau^+, \tau^-, \delta^+, \delta^-$ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathrm{Int}(\boldsymbol{\lambda})}$ et un signe $\zeta = +$ ou $-$ (*cf.* XI.21 et XII.7). Les propriétés combinatoires des objets $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathrm{Int}(\boldsymbol{\lambda})$, $\tau^+, \tau^-, \delta^+, \delta^-$ sont étudiées au chapitre XI. La fonction $\gamma_{\iota_1,\iota_2}$ est alors définie de la façon suivante. Soit $(q_i) \in Q(\boldsymbol{\lambda})$. On pose :

- s'il existe $\Delta \in \mathrm{Int}(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $d''(q_{\geqslant\Delta}) \neq \delta^{-\zeta}(\Delta)$,
$$\gamma_{\iota_i,\iota_2}(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) = 0;$$
- si $d''(q_{\geqslant\Delta}) = \delta^{-\zeta}(\Delta)$ pour tout $\Delta \in \mathrm{Int}(\boldsymbol{\lambda})$,
$$\gamma_{\iota_1,\iota_2}(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) = c(\iota_1, \iota_2) \prod_{\Delta \in \mathrm{Int}(\boldsymbol{\lambda})} \mathrm{sgn}(\eta'(q_\Delta))^{\tau^{\zeta}(\Delta)}\, \mathrm{sgn}(\eta''(q_\Delta))^{\tau^{-\zeta}(\Delta)},$$

où $c(\iota_1, \iota_2)$ est un élément explicite de $\{\pm 1\}$ (*cf.* XII.7).

Soyons réalistes. Dans nos 450 pages de calculs, il serait bien étonnant qu'il ne se soit pas glissé quelques erreurs. Il est plus prudent de considérer les formules ci-dessus comme des approximations des formules exactes. À cette réserve près, nos résultats résolvent les problèmes posés ci-dessus en (2) pour les groupes classiques non ramifiés, sous l'hypothèse que $p$ est grand.

Je remercie l'Université Paris 7 pour l'aide sonnante et trébuchante qu'elle a apportée à la frappe de ce manuscrit. Celle-ci a été effectuée par Mme Bardot. Elle a réalisé là un travail colossal et de qualité exceptionnelle. Je l'en remercie vivement.

# CHAPITRE I

# DÉFINITIONS GÉNÉRALES

**I.1.** Soient $p$ un nombre premier impair et $F$ une extension finie du corps $\mathbb{Q}_p$. On note $\mathfrak{o}_F$ l'anneau des entiers de $F$, $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal, $q$ le nombre d'éléments de $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$. Avec les notations usuelles, $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F = \mathbb{F}_q$. On fixe une uniformisante $\varpi_F$ de $\mathfrak{p}_F$, on note $v_F : F^\times \to \mathbb{Z}$ la valuation telle que $v_F(\varpi_F) = 1$. On fixe une clôture algébrique $\overline{F}$ de $F$, on note $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ le groupe de Galois de l'extension $\overline{F}/F$. Quand nous introduirons des extensions finies de $F$, nous utiliserons pour elles des notations analogues. On note $\mathfrak{o}_F^{\times 2}$, resp. $\mathbb{F}_q^{\times 2}$, le sous-groupe des carrés dans $\mathfrak{o}_F^\times$, resp. $\mathbb{F}_q^\times$. Le groupe $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times 2} = \mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times 2}$ a deux éléments que nous noterons 1 et $\nu$. On identifiera souvent $\nu$ à un représentant dans $\mathfrak{o}_F^\times$ ou $\mathbb{F}_q^\times$.

Les variétés algébriques définies sur $F$ seront notées par des lettres grasses. Si $\boldsymbol{U}$ est une telle variété, on posera $U = \boldsymbol{U}(F)$. Si $\boldsymbol{U}$ est connexe, on identifiera parfois $\boldsymbol{U}$ à son groupe des points sur $\overline{F}$ (« $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\overline{F})$ »). Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe algébrique défini sur $F$. On note $\boldsymbol{\mathfrak{g}}$ son algèbre de Lie. Supposons $\boldsymbol{G}$ réductif et connexe. On note $\mathrm{Lévi}(\boldsymbol{G})$ l'ensemble des sous-groupes de Lévi des sous-groupes paraboliques de $\boldsymbol{G}$. Pour $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Lévi}(\boldsymbol{G})$, on note $\mathrm{Par}(\boldsymbol{M})$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de $\boldsymbol{G}$ de Lévi $\boldsymbol{M}$. Si $\boldsymbol{P}$ est un sous-groupe parabolique de $\boldsymbol{G}$, on note $\boldsymbol{U_P}$ son radical unipotent. On note $\mathrm{Lévi}_F(\boldsymbol{G})$ et, si $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Lévi}(\boldsymbol{G})$, $\mathrm{Par}_F(\boldsymbol{M})$, les sous-ensembles des éléments définis sur $F$ de $\mathrm{Lévi}(\boldsymbol{G})$, resp. $\mathrm{Par}(\boldsymbol{M})$. Remarquons que $\mathrm{Par}_F(\boldsymbol{M})$ peut être vide même si $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Lévi}_F(\boldsymbol{G})$.

Soit $V$ un espace vectoriel sur $F$, de dimension finie. On note $\mathrm{End}_F(V)$ l'algèbre des endomorphismes $F$-linéaires de $V$ et $GL_F(V)$ son groupe des automorphismes. Ce sont les groupes de points sur $F$ de groupes algébriques que nous noterons $\mathbf{End}_F(V)$ et $\boldsymbol{GL}_F(V)$. On supprimera l'indice $F$ quand il n'y aura pas de doute sur le corps de base.

Dans certains paragraphes, nous étudierons des objets définis non pas sur $F$, mais sur $\mathbb{F}_q$. On utilisera des notations analogues, en remplaçant $F$ par $\mathbb{F}_q$.

Si $G$ est un groupe qui opère sur un ensemble $A$ et si $B \subset A$, on note $Z_G(B)$ le centralisateur de $B$ dans $G$, $N_G(B)$ son normalisateur et $W_G(B) = N_G(B)/Z_G(B)$. Si $B = \{b\}$, on note simplement $Z_G(b)$, etc. La plupart du temps, $A$ sera égal à $G$ ou à son algèbre de Lie $g$, l'action de $G$ étant la conjugaison ou l'action adjointe. Si $A$ est une algèbre de Lie et si $B$ et $C$ sont des sous-ensembles de $A$, on pose $Z_C(B) = \{X \in C; \forall Y \in B, [X,Y] = 0\}$.

**I.2.** On considère l'une des trois situations suivantes :

• cas symplectique : $V$ est un espace vectoriel sur $F$, de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire antisymétrique et non dégénérée $q_V$ ;

• cas orthogonal : $V$ est un espace vectoriel sur $F$, de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée $q_V$ ;

• cas unitaire : notons $E$ l'extension quadratique non ramifiée de $F$ ; $V$ est un espace vectoriel sur $E$, de dimension finie, muni d'une forme sesquilinéaire hermitienne et non dégénérée $q_V$ ; précisons que $q_V$ est linéaire en la deuxième variable.

On note $d$ la dimension de $V$, sur $F$ dans les deux premiers cas, sur $E$ dans le cas unitaire. On suppose

$$p \geqslant 3d + 1.$$

Le cas orthogonal se subdivise en deux sous-cas, les cas pair et impair selon la parité de $d$. Quand $(V, q_V)$ est orthogonal, $q_V$ est déployée et $d$ est divisible par 4, certains phénomènes apparaîssent : certaines orbites se dédoublent, certaines représentations en général réductibles deviennent irréductibles, etc. Nous appellerons exceptionnels les objets vérifiant ces propriétés.

On note $\boldsymbol{G}$ la composante neutre du groupe d'automorphismes de $(V, q_V)$. Dans le cas orthogonal, on note $\boldsymbol{O}$ le groupe d'automorphismes tout entier. On identifie $\boldsymbol{g}$ à une sous-algèbre de $\mathbf{End}_F(V)$.

Si besoin est, on précisera les notations en écrivant $d(V)$, $\boldsymbol{G}(V)$, etc. au lieu de $d$, $\boldsymbol{G}$, etc. De même, quand nous aurons introduit des objets relatifs au groupe $\boldsymbol{G}$, on précisera si besoin est la notation en les affectant d'un exposant $G$.

Une partie de nos notations et résultats s'étendent aux groupes linéaires $\boldsymbol{GL}(n)$ ou $\mathrm{Res}_{E/F}\,\boldsymbol{GL}(n)$. Nous les utiliserons pour ces groupes sans plus de commentaire.

**I.3.** Soit $L \subset V$. On dit que $L$ est un réseau si c'est un $\mathfrak{o}_F$-module (resp. $\mathfrak{o}_E$-module dans le cas unitaire) de type fini, engendrant $V$ sur $F$ (resp. $E$). Dans ce cas, on définit son dual $\widetilde{L}$ par :

$$\widetilde{L} = \left\{v \in V; \forall w \in L, q_V(v,w) \in \mathfrak{o}_F \;\; (\text{resp. } \mathfrak{o}_E)\right\}.$$

On supposera souvent que $V$ possède un réseau autodual, *i.e.* qu'il existe un réseau $L \subset V$ tel que $\widetilde{L} = L$. Nos résultats ne seront valables que dans ce cas mais, les démonstrations faisant intervenir des sous-espaces ne vérifiant pas cette hypothèse, nous ne l'imposerons pas dès maintenant.

Un réseau $L$ est dit presque autodual si

$$\widetilde{L} \supset L \supset \mathfrak{p}_F \widetilde{L}.$$

Dans ce cas, $L$ détermine deux espaces sur $\mathbb{F}_q$ (resp. $\mathbb{F}_{q^2}$ dans le cas unitaire) :

$$\ell' = L/\mathfrak{p}_F \widetilde{L}, \quad \ell'' = \widetilde{L}/L.$$

Ils sont munis de formes du même type que $q_V$, à valeurs dans $\mathbb{F}_q$ (resp. $\mathbb{F}_{q^2}$), définies par

$$q_{\ell'}(\overline{v}, \overline{w}) = \overline{q_V(v,w)} \text{ pour } v, w \in L,$$
$$q_{\ell''}(\overline{v}, \overline{w}) = \overline{\omega_F q_V(v,w)}, \text{ pour } v, w \in \widetilde{L},$$

les $^-$ désignant des projections évidentes.

Dans les cas orthogonal et unitaire, les noyaux anisotropes de $q_{\ell'}$ et $q_{\ell''}$ ne dépendent pas de $L$. Ces noyaux et la dimension $d$ déterminent la classe d'isomorphie de $q_V$. Rappelons que la classe d'isomorphie d'un couple $(V', q_{V'})$ du cas orthogonal, défini sur $\mathbb{F}_q$, est déterminé par les données :

$$d(V') \in \mathbb{N}, \quad \eta(q_{V'}) \in \mathbb{F}_q^\times / \mathbb{F}_q^{\times 2},$$

où $\eta(q_{V'})$ est l'image dans $\mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times 2}$ de $(-1)^{[d(V')/2]} \det(q_{V'})$ ($[\cdot]$ est la partie entière). Par convention, $\eta(q_{V'}) = 1$ si $d(V') = 0$. De même, la classe d'isomorphie d'un couple $(V', q_{V'})$ du cas unitaire, défini sur $\mathbb{F}_q$ (*i.e.* $V'$ est un espace sur $\mathbb{F}_{q^2}$), est déterminée par $d(V')$.

Dans le cas orthogonal, la classe d'isomorphie de $(V, q_V)$ est donc déterminée par $d$ et par les données

$$(d', d'', \eta', \eta'') \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times 2})^2$$

ainsi définies : on choisit un réseau presque autodual $L$ de $V$, on note $\eta' = \eta(q_{\ell'})$, $\eta'' = \eta(q_{\ell''})$ et $d'$, resp. $d''$, la réduction dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de $d(\ell')$, resp. $d(\ell'')$. Ces données sont soumises à la condition $d' + d'' \equiv d \bmod 2\mathbb{Z}$.

Dans le cas unitaire, la classe d'isomorphie de $(V, q_V)$ est déterminée par $d$ et par les données

$$(d', d'') \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

définies comme dans le cas orthogonal et soumises à la même condition.

Soit $L$ un réseau presque autodual de $V$. On note $K(L)$, resp. $k(L)$, le stabilisateur de $L$ dans $G$, resp. $g$. On pose

$$K(L)^1 = \{x \in K(L); (x-1)(\widetilde{L}) \subset L, (x-1)(L) \subset \mathfrak{p}_F \widetilde{L}\},$$
$$k(L)^1 = \{X \in k(L); X(\widetilde{L}) \subset L, X(L) \subset \mathfrak{p}_F \widetilde{L}\}.$$

On a l'égalité

$$k(L)/k(L)^1 = g(\ell') \times g(\ell'').$$

Dans les cas symplectique ou unitaire, on a l'égalité

$$K(L)/K(L)^1 = G(\ell') \times G(\ell'').$$

Il en est de même dans le cas orthogonal si $d(\ell')d(\ell'')=0$. Si $d(\ell')d(\ell'')\neq 0$, on a

$$K(L)/K(L)^1=\{(x',x'')\in O(\ell')\times O(\ell'');\det(x')\det(x'')=1\}.$$

En tout cas, on note $K(L)^0$ l'image réciproque de $G(\ell')\times G(\ell'')$ dans $K(L)$ et $\boldsymbol{G}(L)=\boldsymbol{G}(\ell')\times\boldsymbol{G}(\ell''),\boldsymbol{g}(L)=\boldsymbol{g}(\ell')\times\boldsymbol{g}(\ell'')$.

On appelle chaîne de réseaux une suite de réseaux $\mathcal{L}=(L_i)_{i=0,\dots,r,}$ non vide telle que

$$\widetilde{L}_0\supset L_0\supsetneq L_1\supsetneq\cdots\supsetneq L_r\supset\mathfrak{p}_F\widetilde{L}_r.$$

On pose

$$K(\mathcal{L})=\bigcap_{i=0}^r K(L_i),\quad k(\mathcal{L})=\bigcap_{i=0}^r k(L_i),$$

$$K(\mathcal{L})^1=\{x\in K(\mathcal{L});(x-1)(L_i)\subset L_{i+1}\text{ pour tout }i=-1,\dots,r\},$$
$$k(\mathcal{L})^1=\{X\in k(\mathcal{L});X(L_i)\subset L_{i+1}\text{ pour tout }i=-1,\dots,r\},$$

où l'on a posé $L_{-1}=\widetilde{L}_0$, $L_{r+1}=\mathfrak{p}_F\widetilde{L}_r$. Pour tout $i=1,\dots,r$, notons $d_i$ la dimension de $L_{i-1}/L_i$ sur $\mathbb{F}_q$ (ou $\mathbb{F}_{q^2}$ dans le cas unitaire). Posons

$$\boldsymbol{G}(\mathcal{L})=\boldsymbol{G}(\ell'_r)\times\boldsymbol{G}(\ell''_0)\times\prod_{i=1}^r\boldsymbol{GL}(d_i)$$

(on remplace $\boldsymbol{GL}(d_i)$ par $\operatorname{Res}_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}\boldsymbol{GL}(d_i)$ dans le cas unitaire). Alors

$$K(\mathcal{L})/K(\mathcal{L})^1=G(\mathcal{L}),$$

sauf si $(V,q_V)$ est orthogonal et $d(\ell'_r)d(\ell''_0)\neq 0$. Dans ce dernier cas, $G(\mathcal{L})$ est un sous groupe d'indice 2 de $K(\mathcal{L})/K(\mathcal{L})^1$. En tout cas, on note $K(\mathcal{L})^0$ l'image réciproque de $G(\mathcal{L})$ dans $K(\mathcal{L})$.

**I.4.** Pour tout espace topologique $A$, on note $C_c^\infty(A)$ l'espace des fonctions $f:A\to\mathbb{C}$, localement constantes et à support compact. On supprimera parfois l'indice $c$ si $A$ est compact, l'exposant $\infty$ si $A$ est discret.

On définit une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $q_g$ sur $g$ par

$$q_g(X,Y)=\operatorname{trace}(XY)$$

($XY$ est un élément de $\operatorname{End}_F(V)$). Fixons un caractère $\psi:F\to\mathbb{C}^\times$, continu et de conducteur $\mathfrak{p}_F$. Pour $f\in C_c^\infty(g)$, on définit sa transformée de Fourier $\hat{f}\in C_c^\infty(g)$ par

$$\hat{f}(X)=\int_g f(Y)\psi\circ q_g(X,Y)\,dY.$$

La mesure sur $g$ est autoduale, *i.e.* telle que $\hat{\hat{f}}(X)=f(-X)$ pour tous $f,X$. Plus généralement, si $a\subset g$ est un sous-espace sur lequel la restriction de $q_g$ est non dégénérée, on définit une mesure autoduale sur $a$ et une transformation de Fourier dans $C_c^\infty(a)$.

Il existe un voisinage $U_g$ de 0 dans $g$ et un voisinage $U_G$ de 1 dans $G$, tous deux invariants par conjugaison par $G$, tels que l'application

$$\begin{aligned} E^G : U_g &\longrightarrow U_G \\ X &\longmapsto (1+X/2)(1-X/2)^{-1} \end{aligned}$$

soit définie et bijective. On munit $G$ de la mesure de Haar telle que, quitte à restreindre ces voisinages, $E^G$ préserve les mesures. Plus généralement, si $\boldsymbol{H}$ est un sous-groupe de $\boldsymbol{G}$ tel que la restriction de $q_g$ à $h$ soit non dégénérée, on définit de façon analogue une mesure de Haar sur $H$.

Soit $X \in g$. Posons

$$\mathcal{O}(X) = \{xXx^{-1}; x \in G\}.$$

La variété analytique $\mathcal{O}(X)$ est symplectique. En effet, pour $Y \in \mathcal{O}(X)$, l'espace tangent à $\mathcal{O}(X)$ au point $Y$ s'identifie à $g/Z_g(Y)$, qui est muni de la forme symplectique :

$$(Z, Z') \longmapsto q_g(Y, [Z, Z']).$$

On munit ces espaces tangents de mesures autoduales. La collection de ces mesures définit une mesure sur $\mathcal{O}(X)$, invariante par conjugaison. Cette construction sera utilisée dans le cas où $X$ est nilpotent.

**I.5.** On appelle suite finie d'entiers $\geqslant 0$ une suite $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j\geqslant 1}$ indexée par les entiers $\geqslant 1$, telle que $\lambda_j \in \mathbb{N}$ pour tout $j$ et $\lambda_j = 0$ pour tout $j$ assez grand. Pour une telle suite, on définit les termes suivants :

- pour tout entier $j \geqslant 1$,

$$\lambda_{\geqslant j} = \sum_{j'\geqslant j} \lambda_{j'}, \quad \lambda_{\leqslant j} = \sum_{j';1\leqslant j'\leqslant j} \lambda_{j'}, \quad \lambda_{>j} = \sum_{j'>j} \lambda_{j'}, \quad \lambda_{<j} = \sum_{j';1\leqslant j'<j} \lambda_{j'};$$

- $S(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j\geqslant 1} \lambda_j$ ;
- pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $S_\ell(\boldsymbol{\lambda})$ est la somme des $\ell$ plus grands termes de $\boldsymbol{\lambda}$ ;
- pour tout entier $i \geqslant 1$, $c_i(\boldsymbol{\lambda})$ est le nombre de $j \geqslant 1$ tels que $\lambda_j = i$ ;
- $c(\boldsymbol{\lambda})$ est le nombre de $j \geqslant 1$ tels que $\lambda_j \neq 0$.

Si $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$ sont deux suites finies d'entiers $\geqslant 0$, on définit la suite $\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu}$ par

$$(\lambda + \mu)_j = \lambda_j + \mu_j$$

pour tout $j \geqslant 1$.

On appelle partition une suite finie d'entiers $\geqslant 0$ décroissante, *i.e.* une partition $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j\geqslant 1}$ vérifie :

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots$$

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}$ telle que $S(\boldsymbol{\lambda}) = n$. Pour $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}$, on note $\boldsymbol{\lambda} \cup \boldsymbol{\mu}$ l'unique partition telle que

$$c_i(\boldsymbol{\lambda} \cup \boldsymbol{\mu}) = c_i(\boldsymbol{\lambda}) + c_i(\boldsymbol{\mu})$$

pour tout $i \geqslant 1$. On introduit les ordres suivants :

• $\boldsymbol{\lambda} \succ \boldsymbol{\mu}$ si $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu}$ ou si, en notant $j$ le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que $\lambda_j \neq \mu_j$, on a $\lambda_j > \mu_j$ ;

• $\boldsymbol{\lambda} \geqslant \boldsymbol{\mu}$ si $\lambda_{\leqslant j} \geqslant \mu_{\leqslant j}$ pour tout $j \geqslant 1$.

On note $\varnothing$ la partition dont tous les termes sont nuls. À toute suite finie $\boldsymbol{\lambda}$ d'entiers $\geqslant 0$, on associe l'unique partition $p(\boldsymbol{\lambda})$ qui a les mêmes termes non nuls que $\boldsymbol{\lambda}$, rangés dans l'ordre décroissant.

On utilisera parfois les variations suivantes :

• considérer des suites finies dont les termes sont non plus des entiers, mais des nombres réels ;

• considérer des suites indicées par un ensemble fini $\{1, \dots, n\}$ ; en particulier, on identifiera parfois une suite finie $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_j)_{j \geqslant 1}$ à la suite $(\lambda_j)_{j=1,\dots,n}$ pourvu que $n$ soit $\geqslant c(\boldsymbol{\lambda})$.

Parfois aussi, on utilisera le langage des ensembles à multiplicités. Un tel objet est un ensemble, disons $A$, muni d'une fonction $m : A \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ : pour $a \in A$, $m(a)$ est la « multiplicité » de $A$. Si $A$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, on peut identifier l'ensemble avec multiplicités à une suite décroissante d'entiers indicée par $\{1, \dots, M\}$ où

$$M = \sum_{a \in A} m(a).$$

On définit la réunion de deux ensembles à multiplicités $(A, m)$ et $(A', m')$ : c'est l'ensemble à multiplicités $(A'', m'')$ où $A'' = A \cup A'$ et, pour $a \in A''$,

$$m''(a) = \begin{cases} m(a), & \text{si } a \notin A' \\ m'(a), & \text{si } a \notin A \\ m(a) + m'(a), & \text{si } a \in A \cap A'. \end{cases}$$

**I.6.** On note $\mathcal{P}(V)$ l'ensemble des $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(d)$ telles que :

• dans le cas symplectique, pour tout entier impair $i \geqslant 1$, $c_i(\boldsymbol{\lambda})$ est pair ;

• dans le cas orthogonal, pour tout entier pair $i \geqslant 2$, $c_i(\boldsymbol{\lambda})$ est pair ;

• pas de condition dans le cas unitaire.

Notons $\mathrm{Nil}_I(V)$ l'ensemble des familles $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$ où $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(V)$ et

• dans le cas symplectique, pour tout entier pair $i \geqslant 2$, $q_i$ est une classe de forme quadratique non dégénérée de dimension $c_i(\boldsymbol{\lambda})$ ; il n'y a pas de donnée $q_i$ pour $i$ impair ;

• dans le cas orthogonal, pour tout entier impair $i \geqslant 1$, $q_i$ est une classe de forme quadratique non dégénérée de dimension $c_i(\boldsymbol{\lambda})$ ; il n'y a pas de donnée $q_i$ pour $i$ pair ; on impose la condition :

$$\bigoplus_{i \text{ impair}} q_i \sim_a q_V,$$

où $\sim_a$ signifie que les deux membres ont même noyau anisotrope ;

• dans le cas unitaire, pour tout entier $i \geqslant 1$, $q_i$ est une classe de forme hermitienne non dégénérée de dimension $c_i(\boldsymbol{\lambda})$ ; on impose la condition :

$$\bigoplus_{i \text{ impair}} q_i \sim_a q_V \,.$$

On dit que $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$ est exceptionnelle si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) • $(V, q_V)$ est orthogonal, $d$ est divisible par 4 et $q_V$ est déployée;

• tous les termes de $\boldsymbol{\lambda}$ sont pairs (en fait, il n'y a donc pas de données $q_i$).

On note $\mathrm{Nil}(V)$ l'ensemble dont les éléments sont :

• les $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) \in \mathrm{Nil}_I(V)$ non exceptionnelles ;

• les triplets $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i), \varepsilon)$ où $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) \in \mathrm{Nil}_I(V)$ est exceptionnelle et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

On a $\mathrm{Nil}(V) = \mathrm{Nil}_I(V)$ si (1) n'est pas vérifié.

Notons $\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}$ le sous-ensemble des éléments nilpotents de $\boldsymbol{g}$ et $g_{\mathrm{nil}}/G$ l'ensemble des orbites dans $g_{\mathrm{nil}}$ pour la conjugaison par $G$. Il est bien connu que $\mathrm{Nil}(V)$ paramétrise cet ensemble d'orbites. Précisons cette paramétrisation. Soit $X \in g_{\mathrm{nil}}$. On lui associe une partition $\boldsymbol{\lambda}$ de $d$ : pour tout entier $i \geqslant 1$, $c_i(\boldsymbol{\lambda})$ est le nombre de blocs de Jordan de $X$ de longueur $i$. Pour tout entier $i \geqslant 1$, posons :

$$V_i = \mathrm{Ker}(X^i)/[\mathrm{Ker}(X^{i-1}) + X(\mathrm{Ker}(X^{i+1}))] \,.$$

Dans le cas symplectique, resp. orthogonal, on définit une forme quadratique $\widetilde{q}_i$ sur $\mathrm{Ker}(X^i)$, pour tout $i$ pair, resp. impair, par :

$$\widetilde{q}_i(v, v') = (-1)^{[(i-1)/2]} q_V(X^{i-1}(v), v') \,.$$

Elle passe au quotient et définit sur $V_i$ une forme non dégénérée $q_i$.

Dans le cas unitaire, on fixe une fois pour toutes $\zeta \in \mathfrak{o}_E^\times$ tel que $\mathrm{trace}_{E/F}(\zeta) = 0$, on définit $\widetilde{q}_i$ sur $\mathrm{Ker}(X^i)$ par :

$$\widetilde{q}_i(v, v') = \begin{cases} (-1)^{(i-1)/2} q_V(X^{i-1}(v), v'), & \text{si } i \text{ est impair}, \\ \zeta(-1)^{i/2-1} q_V(X^{i-1}(v), v'), & \text{si } i \text{ est pair}. \end{cases}$$

On en déduit une forme hermitienne non dégénérée $q_i$ sur $V_i$.

Notons

$$\Lambda_I : g_{\mathrm{nil}} \longrightarrow \mathrm{Nil}_I(V)$$

l'application qui à $X$ associe la famille $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$. Elle se factorise par la projection $g_{\mathrm{nil}} \to g_{\mathrm{nil}}/G$, on note encore $\Lambda_I$ l'application déduite :

$$\Lambda_I : g_{\mathrm{nil}}/G \longrightarrow \mathrm{Nil}_I(\nu) \,.$$

Si (1) n'est pas vérifié, c'est une bijection. Si (1) est vérifié, c'est une surjection dont les fibres ont 1, resp. 2, éléments au-dessus des éléments non exceptionnels resp. exceptionnels, de $\mathrm{Nil}_I(V)$. Considérons un élément exceptionnel $(\boldsymbol{\lambda}, \varnothing)$ de $\mathrm{Nil}_I(V)$. On distingue les éléments de la fibre de la façon suivante. Fixons une fois pour toutes deux décompositions

$$V = V^+ \oplus \widehat{V}^+, \quad V = V^- \oplus \widehat{V}^-$$

en sous-espace lagrangiens, de sorte qu'il existe $x \in O$, de déterminant $-1$, tel que $V^- = x(V^+)$, $\widehat{V}^- = x(\widehat{V}^+)$. Il y a un seul élément $\mathcal{O}^+$, resp. $\mathcal{O}^-$, de la fibre tel qu'il existe $X \in \mathcal{O}^+$, resp. $\mathcal{O}^-$, respectant la décomposition $V = V^+ \oplus \widehat{V}^+$, resp. $V = V^- \oplus \widehat{V}^-$. En associant à $\mathcal{O}^+$, resp. $\mathcal{O}^-$, l'élément $(\boldsymbol{\lambda}, \varnothing, 1)$, resp. $(\boldsymbol{\lambda}, \varnothing, -1)$, de $\mathrm{Nil}(V)$, on obtient une bijection de $g_{\mathrm{nil}}/G$ sur $\mathrm{Nil}(V)$.

En tout cas, nous noterons

$$\Lambda : g_{\mathrm{nil}}/G \longrightarrow \mathrm{Nil}(V)$$

la bijection construite ci-dessus, ou sa composée avec la projection $g_{\mathrm{nil}} \to g_{\mathrm{nil}}/G$.

Pour $\mathcal{O} \in g_{\mathrm{nil}}/G$, on définit une forme linéaire $\phi_{\mathcal{O}}$ sur $C_c^\infty(g)$ par

$$\phi_{\mathcal{O}}(f) = \int_{\mathcal{O}} f(X)\, dX\,,$$

où $dX$ est la mesure définie en I.4.

**I.7.** On note $\boldsymbol{g}_{\mathrm{reg}}$ l'ensemble des éléments semi-simples et réguliers de $\boldsymbol{g}$. Soit $X \in g_{\mathrm{reg}}$, posons $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{Z_G}(X)$. On définit une forme linéaire $\phi(X, \cdot)$ sur $C_c^\infty(g)$ par :

$$\phi(X, f) = \int_{T \backslash G} f(x^{-1} X x)\, dx$$

les mesures sur $G$ et $T$ sont celles définies en I.4.

Nous allons décrire les orbites de $g_{\mathrm{reg}}$ pour la conjugaison par $G$. Considérons d'abord le cas symplectique. Donnons-nous les objets suivants :

• un ensemble fini $I$ ;

• pour tout $i \in I$, une extension finie $F_i^\#$ de $F$ et une $F_i^\#$-algèbre commutative $F_i$ de dimension 2 sur $F_i^\#$ ;

• pour tout $i \in I$, $a_i \in F_i^\times$ et $c_i \in F_i^\times$.

Pour tout $i \in I$, notons $\tau_i$ l'unique automorphisme non trivial de $F_i/F_i^\#$. On suppose :

$$\text{pour tout } i \in I\,,\ a_i \text{ engendre } F_i \text{ sur } F\,, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\text{pour tous } i, j \in I\,,\ \text{avec } i \neq j\,,\ \text{il n'existe pas d'isomorphisme} \\ &F-\text{linéaire de } F_i \text{ sur } F_j \text{ envoyant } a_i \text{ sur } a_j\,; \end{aligned} \tag{2}$$

$$\text{pour tout } i \in I\,,\ \tau_i(a_i) = -a_i\,,\ \tau_i(c_i) = -c_i\,; \tag{3}$$

$$d = \sum_{i \in I} [F_i : F]\,. \tag{4}$$

D'après (1), $a_i$ détermine $F_i$ et $F_i^\#$. Posons :

$$W = \bigoplus_{i \in I} F_i$$

et définissons une forme symplectique $q_W$ sur $W$ par

$$q_W\Big(\sum_{i\in I} w_i, \sum_{i\in I} w'_i\Big) = \sum_{i\in I}[F_i : F]^{-1}\,\mathrm{trace}_{F_i/F}(\tau_i(w_i)w'_i c_i). \tag{5}$$

Notons $X_W$ l'élément de $\mathrm{End}_F(W)$ défini par

$$X_W\Big(\sum_{i\in I} w_i\Big) = \sum_{i\in I} a_i w_i. \tag{6}$$

Alors $X_W \in g(W)$. Fixons un isomorphisme de $(W, q_W)$ sur $(V, q_V)$. Alors $X_W$ s'identifie à un élément $X \in g$, qui est semi-simple et régulier. Son orbite $\mathcal{O}(X)$ ne dépend pas de l'isomorphisme choisi. Notons-la $\mathcal{O}(I, (a_i), (c_i))$. Toute orbite dans $g_{\mathrm{reg}}$ est obtenue par une telle construction.

Pour tout $i \in I$, notons $\mathrm{sgn}_{F_i/F_i^\#}$ le caractère quadratique de $F_i^{\#\times}$ associé à l'algèbre $F_i$. Notons $I^*$ l'ensemble des $i \in I$ tels que $F_i$ soit un corps, *i.e.* tels que $\mathrm{sgn}_{F_i/F_i^\#} \neq 1$. Pour $Y \in g_{\mathrm{reg}}$, on pose

$$\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(Y) = \{Z \in g;\, \exists\, x \in \boldsymbol{G}(\overline{F}),\ Z = xYx^{-1}\}.$$

Posons $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(I, (a_i), (c_i)) = \mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X)$.

Considérons maintenant deux familles $(I, (a_i), (c_i))$ et $(I', (a'_i), (c'_i))$ vérifiant les conditions ci-dessus. Alors $\mathcal{O}(I, (a_i), (c_i)) = \mathcal{O}(I', (a'_i), (c'_i))$ si et seulement s'il existe

- une bijection $\phi : I \to I'$ ;
- pour tout $i \in I$, un isomorphisme $F$-linéaire $\sigma_i : F'_{\phi(i)} \to F_i$ de sorte que :

$$\text{pour tout } i \in I,\ \ \sigma_i(a'_{\phi(i)}) = a_i; \tag{7}$$

$$\text{pour tout } i \in I,\ \ \mathrm{sgn}_{F_i/F_i^\#}(c_i\sigma_i(c'_{\phi(i)})^{-1}) = 1. \tag{8}$$

On a l'égalité $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(I, (a_i), (c_i)) = \mathcal{O}^{\mathrm{st}}(I', (a'_i), (c'_i))$ si et seulement s'il existe des objets $\phi$ et $\sigma_i$ de sorte que (7) soit vérifiée. On en déduit que l'ensemble des classes de conjugaison par $G$ contenues dans $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(I, (a_i), (c_i))$ est en bijection avec $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^*}$.

***Remarque***. — Les données $c_i$ pour $i \in I - I^*$ ne sont pas significatives. On pourra aussi bien les oublier.

Considérons le cas orthogonal impair. Donnons-nous encore des objets $I$, $a_i$, $c_i$, $F_i$ et $F_i^\#$, vérifiant les conditions (1) et (2) et :

$$\text{pour tout } i \in I,\ \ \tau_i(a_i) = -a_i,\ \ \tau_i(c_i) = c_i, \tag{9}$$

$$d - 1 = \sum_{i\in I}[F_i : F]. \tag{10}$$

On construit $W$ comme dans le cas symplectique et on définit une forme bilinéaire symétrique $q_W$ sur $W$ par la formule (5). Supposons qu'il existe un espace orthogonal $(W_0, q_0)$ de dimension 1 sur $F$ tel que $(W_0 \oplus W, q_0 \oplus q_W)$ soit isomorphe à $(V, q_V)$. La classe de $(W_0, q_0)$ est alors uniquement déterminée. On construit un élément $X_W$

de $\mathrm{End}_F(W_0 \oplus W)$ : il agit dans $W$ par la formule (6) et par 0 dans $W_0$. On a $X_W \in g(W_0 \oplus W)$ et l'on en déduit un élément $X$ de $g$ dont l'orbite ne dépend pas des choix. On note cette orbite $\mathcal{O}(I,(a_i),(c_i))$. Toute orbite dans $g_{\mathrm{reg}}$ est obtenue par une telle construction. S'il n'existe pas d'espace $(W_0, q_0)$ comme ci-dessus, nous dirons que $\mathcal{O}(I,(a_i),(c_i))$ n'existe pas.

Considérons deux familles $(I,(a_i),(c_i))$ et $(I',(a'_i),(c'_i))$ vérifiant les conditions ci-dessus. Supposons que les orbites correspondantes existent. Alors les égalités $\mathcal{O}(I,(a_i),(c_i)) = \mathcal{O}(I',(a'_i),(c'_i))$ ou $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(I,(a_i),(c_i)) = \mathcal{O}^{\mathrm{st}}(I',(a'_i),(c'_i))$ sont équivalentes aux mêmes conditions que dans le cas symplectique.

Supposons seulement que $\mathcal{O}(I,(a_i),(c_i))$ existe et qu'il existe des objets $\phi, \sigma_i$ comme ci-dessus, vérifiant (7). Alors $\mathcal{O}(I',(a'_i),(c'_i))$ existe si et seulement si

$$\prod_{i\in I} \mathrm{sgn}_{F_i/F_i^{\#}}(c_i\sigma_i(c'_{\phi(i)})^{-1}) = 1. \tag{11}$$

Pour tout ensemble fini $J$, posons

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^J = \Big\{(e_j)_{j\in J} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J\,;\, \sum_{j\in J} e_j = 0\Big\}.$$

Alors l'ensemble des classes de conjugaison par $G$ contenues dans $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(I,(a_i),(c_i))$ est en bijection avec $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^{I^*}$.

Considérons maintenant le cas orthogonal pair. Donnons-nous encore des objets $I$, $a_i$, $c_i$, $F_i$ et $F_i^{\#}$, vérifiant les conditions (1), (2), (4) et (9). On construit $(W, q_W)$ comme dans le cas orthogonal impair et on définit $X_W \in g(W)$ par la formule (6). Supposons que $(W, q_W)$ soit isomorphe à $(V, q_V)$. En fixant un isomorphisme, on en déduit un élément $X$ de $g_{\mathrm{reg}}$. Il y a deux différences avec les cas précédents :

- on n'obtient pas par cette construction tout élément de $g_{\mathrm{reg}}$ mais seulement ceux qui n'ont pas de valeur propre nulle ;
- l'orbite $\mathcal{O}(X)$ dépend du choix de l'isomorphisme.

En faisant varier l'isomorphisme, on obtient deux orbites distinctes, qui sont conjuguées par $O$. Notons ces deux orbites $\mathcal{O}^+(I,(a_i),(c_i))$ et $\mathcal{O}^-(I,(a_i),(c_i))$, et leur réunion $\mathcal{O}(I,(a_i),(c_i))$. De même on note $\mathcal{O}^{+,\mathrm{st}}(I,(a_i),(c_i))$, etc. Avec ces notations, les résultats du cas orthogonal impair restent valables. Remarquons que

$$\mathcal{O}^+(I,(a_i),(c_i)) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}^-(I,(a_i),(c_i))$$

ne sont pas stablement conjuguées. On en déduit encore que l'ensemble des classes de conjugaison par $G$ contenues, par exemple, dans $\mathcal{O}^{+,\mathrm{st}}(I,(a_i),(c_i))$ est en bijection avec $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^{I^*}$.

On n'aura besoin de distinguer les deux orbites que pour des données exceptionnelles, c'est-à-dire vérifiant :

- $q_V$ est déployée et 4 divise $d$ ;
- $I^* = \varnothing$ et $[F_i^{\#}; F]$ est pair pour tout $i \in I$.

Dans ce cas, on caractérise l'orbite $\mathcal{O}^+(I,(a_i),(c_i))$ par la propriété : il existe $X \in \mathcal{O}^+(I,(a_i),(c_i))$ qui stabilise la décomposition $V = V^+ \oplus \widehat{V}^+$ de I.6.

Considérons enfin le cas unitaire. Donnons-nous les objets suivants :

• un ensemble fini $I$ ;

• pour tout $i \in I$, une extension $F_i^\#$ de $F$ ; on pose $F_i = F_i^\# \otimes_F E$ ;

• pour tout $i \in I$, $a_i \in F_i^\times$ et $c_i \in F_i^\times$.

Notons $\tau_E$ l'unique élément non trivial de $\mathrm{Gal}(E/F)$ et, pour tout $i \in I$, $\tau_i$ l'automorphisme $\mathrm{id} \otimes \tau_E$ de $F_i$. On suppose :

• pour tout $i \in I$, $a_i$ engendre $F_i$ sur $E$ ;

• pour tous $i, j \in I$, avec $i \neq j$, il n'existe pas d'isomorphisme $E$-linéaire de $F_i$ sur $F_j$ envoyant $a_i$ sur $a_j$ ;

• pour tout $i \in I$, $\tau_i(a_i) = -a_i$, $\tau_i(c_i) = c_i$ ;

• $d = \sum\limits_{i \in I} [F_i : E]$.

On pose

$$W = \bigoplus_{i \in I} F_i \,.$$

C'est un espace vectoriel sur $E$. On définit une forme hermitienne $q_W$ sur $W$ par la formule

$$q_W\Big(\sum_{i\in I} w_i, \sum_{i\in I} w_i'\Big) = \sum_{i\in I} [F_i : E]^{-1}\, \mathrm{trace}_{F_i/E}(\tau_i(w_i) w_i' c_i)\,.$$

On définit un élément $X_W$ de $\mathfrak{g}(W)$ par la formule (6). Supposons $(W, q_W)$ isomorphe à $(V, q_V)$. En fixant un isomorphisme, on identifie $X_W$ à un élément $X$ de $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ dont on note $\mathcal{O}(I,(a_i),(c_i))$ la classe de conjugaison par $G$. Elle ne dépend pas du choix de l'isomorphisme et toute orbite dans $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ est obtenue par une telle construction.

Considérons deux familles $(I,(a_i),(c_i))$ et $(I',(a_i'),(c_i'))$, supposons que les orbites correspondantes existent. Alors $\mathcal{O}(I,(a_i),(c_i)) = \mathcal{O}(I',(a_i'),(c_i'))$ si et seulement s'il existe :

• une bijection $\phi : I \to I'$ ;

• pour tout $i \in I$, un isomorphisme $E$-linéaire $\sigma_i : F'_{\phi(i)} \to F_i$, de sorte que les conditions (7) et (8) soient satisfaites. De même $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(I,(a_i),(c_i)) = \mathcal{O}^{\mathrm{st}}(I,(a_i),(c_i))$ si et seulement s'il existe des objets $\phi, \sigma_i$ comme ci-dessus de sorte que (7) soit satisfaite. Supposons seulement que $\mathcal{O}(I,(a_i),(c_i))$ existe et qu'il existe des objets $\phi, \sigma_i$ vérifiant (7). Alors $\mathcal{O}(I',(a_i'),(c_i'))$ existe si et seulement si (11) est vérifié. L'ensemble des classes de conjugaison par $G$ dans $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(I,(a_i),(c_i))$ est en bijection avec $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^{I^*}$, où $I^*$ est l'ensemble des $i \in I$ tels que $F_i$ soit un corps.

**I.8.** Notons $\Theta_{\max,I}(V)$ l'ensemble des triplets de partitions $(\boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')$ vérifiant les conditions suivantes :

• dans le cas symplectique, $S(\boldsymbol{\mu}^0) + S(\boldsymbol{\mu}') + S(\boldsymbol{\mu}'') = d/2$ ;

• dans le cas orthogonal impair, $S(\boldsymbol{\mu}^0) + S(\boldsymbol{\mu}') + S(\boldsymbol{\mu}'') = (d-1)/2$ ; si $d' = 0$, $\nu^{c(\boldsymbol{\lambda}')} = \eta'$ ; si $d'' = 0$, $\nu^{c(\boldsymbol{\lambda}'')} = \eta''$ ;

• dans le cas orthogonal pair, $S(\boldsymbol{\mu}^0)+S(\boldsymbol{\mu}')+S(\boldsymbol{\mu}'') = d/2$, $\nu^{c(\boldsymbol{\lambda}')} = \eta'$, $\nu^{c(\boldsymbol{\lambda}'')} = \eta''$ ;

• dans le cas unitaire, $2S(\boldsymbol{\mu}^0) + S(\boldsymbol{\mu}') + S(\boldsymbol{\mu}'') = d$, les termes non nuls de $\boldsymbol{\mu}'$ et $\boldsymbol{\mu}''$ sont impairs, $d' \equiv S(\boldsymbol{\mu}') \bmod 2\mathbb{Z}$, $d'' \equiv S(\boldsymbol{\mu}'') \bmod 2\mathbb{Z}$.

On dit que $(\boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')$ est exceptionnel si

• $(V, q_V)$ est orthogonal pair, $q_V$ est déployée et $d$ est divisible par 4,

• $\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu}'' = \varnothing$ et tous les termes de $\boldsymbol{\mu}^0$ sont pairs.

On note $\Theta_{\max}(V)$ l'ensemble dont les éléments sont

• les $(\boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'') \in \Theta_{\max,I}(V)$ non exceptionnels ;

• les quadruplets $(\boldsymbol{\mu}^0, \varnothing, \varnothing, \varepsilon)$, où $(\boldsymbol{\mu}^0, \varnothing, \varnothing) \in \Theta_{\max,I}(V)$ est exceptionnel et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

Notons $\mathcal{T}_{\max}$ l'ensemble des sous-tores maximaux de $\boldsymbol{G}$, définis sur $F$ et non ramifiés, *i.e.* déployés sur une extension non ramifiée de $F$, et $\mathcal{T}_{\max}/G$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G$ dans $\mathcal{T}_{\max}$. Nous allons définir une bijection :

$$\Lambda_{\mathcal{T}} : \mathcal{T}_{\max}/G \longrightarrow \Theta_{\max}(V).$$

Soit $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}_{\max}$. Fixons $X \in t$, régulier dans $g$ et tel que, si $(V, q_V)$ est orthogonal pair, $X$ n'ait pas 0 pour valeur propre. Considérons des données $(I, (a_i), (c_i))$ telles que $X \in \mathcal{O}(I, (a_i), (c_i))$, *cf.* I.7. Pour tout entier $n \geqslant 1$, notons $F^{(n)}$ l'extension non ramifiée de $F$ de degré $n$. Puisque $\boldsymbol{T}$ est non ramifié, pour tout $i \in I$, il existe un unique entier $n(i)$ tel que

$$F_i^{\#} = F^{(n(i))}.$$

Notons $I'$, resp. $I''$, l'ensemble des $i \in I^*$ tels que $v_{F_i}(c_i)$ est pair, resp. impair. On définit un triplet $(\boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')$ de la façon suivante : $\boldsymbol{\mu}'$, resp. $\boldsymbol{\mu}''$, est la partition qui a les mêmes termes non nuls que la famille $(n(i))_{i \in I'}$, resp. $(n(i))_{i \in I''}$ ; si $(V, q_V)$ est symplectique ou orthogonal, resp. unitaire, $\boldsymbol{\mu}^0$ est la partition qui a les mêmes termes non nuls que la famille $(n(i))_{i \in I - I^*}$, resp. $(n(i)/2)_{i \in I - I^*}$. Si les données $(I, (a_i), (c_i))$ ne sont pas exceptionnelles, on associe à $\boldsymbol{T}$ le triplet $(\boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')$. Si les données sont exceptionnelles, alors $(\boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')$ est aussi exceptionnel et on associe à $\boldsymbol{T}$ le quadruplet $(\boldsymbol{\mu}^0, \varnothing, \varnothing, \varepsilon)$ où $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ est tel que $X \in \mathcal{O}^{\varepsilon}(I, (a_i), (c_i))$ (en identifiant 1 au signe $+$ et $-1$ au signe $-$).

On vérifie que l'application ainsi définie associe à $\boldsymbol{T}$ un élément de $\Theta_{\max}(V)$. Elle ne dépend pas du choix de $X$. Elle se factorise par la projection

$$\mathcal{T}_{\max} \longrightarrow \mathcal{T}_{\max}/G$$

et définit ainsi l'application $\Lambda_{\mathcal{T}}$ cherchée, qui est bijective. On notera aussi $\Lambda_{\mathcal{T}}$ la composée de cette bijection et de la projection ci-dessus.

Soit $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}_{\max}$, $X \in t$ et $(I, (a_i), (c_i))$ comme ci-dessus. Pour $i \in I$, on définit l'anneau des entiers $\mathfrak{o}_{F_i}$, puis l'algèbre résiduelle $\overline{F}_i = \mathfrak{o}_{F_i} \otimes \mathbb{F}_q$. Supposons que $a_i \in \mathfrak{o}_{F_i}$ pour tout $i \in I$. Notons $\overline{a}_i$ la réduction de $a_i$ dans $\overline{F}_i$. Supposons $\overline{a}_i \neq 0$ pour tout $i \in I$ et que les données $\overline{a}_i$ et $\overline{F}_i$ vérifient des conditions de régularité analogues à I.7 (1) et (2). On dira alors que $X$ est entier et de réduction régulière. En vertu de notre hypothèse $p \geqslant 3d+1$ ($q \geqslant d+1$ suffirait), pour tout $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}_{\max}$, il existe $X \in t$, entier et de réduction régulière.

**I.9.** On suppose dans ce paragraphe que $V$ possède un réseau autodual. Notons $d_{is}$ la dimension d'un sous-espace totalement isotrope de $V$, maximal. Considérons l'ensemble des chaînes de réseaux maximales de $V$. Hors du cas particulier suivant, il forme une seule classe de conjugaison par $G$. Le cas particulier est : $(V, q_V)$ est orthogonal pair et $q_V$ est déployée. Dans ce cas, l'ensemble se décompose en deux classes de conjugaison que nous n'aurons besoin de distinguer que si de plus $d$ est divisible par 4. Dans ce cas, on appellera classe positive, resp. négative, celle qui contient une chaîne $\mathcal{L} = (L_i)_{i=0,\dots,d/2}$ telle que

$$L_0 = L_0 \cap V^+ \oplus L_0 \cap \widehat{V}^+, \quad L_{d/2} = L_0 \cap V^+ \oplus \mathfrak{p}_F(L_0 \cap \widehat{V}^+),$$

resp.

$$L_0 = L_0 \cap V^- \oplus L_0 \cap \widehat{V}^-, \quad L_{d/2} = L_0 \cap V^- \oplus \mathfrak{p}_F(L_0 \cap \widehat{V}^-).$$

Remarquons qu'en tout cas, une chaîne de réseau maximale s'écrit $\mathcal{L} = (L_i)_{i=0,\dots,d_{is}}$ avec $L_0 = \widetilde{L}_0$.

Fixons une telle chaîne de réseau maximale $\mathcal{L}$. Posons

$$B = K(\mathcal{L}), \ \ b = k(\mathcal{L}), \ \ B^1 = K(\mathcal{L})^1, \ \ b^1 = k(\mathcal{L})^1.$$

Remarquons qu'y compris dans le cas particulier précédent, les classes de conjugaison par $G$ de ces ensembles ne dépend pas du choix de $\mathcal{L}$.

Si $k$ est un sous-groupe ouvert compact de $g$ et $u$ un sous-ensemble ouvert de $g$, stable par $k$, on a des inclusions

$$C_c(u/k) \subset C_c^\infty(u) \subset C_c^\infty(g)$$

(on prolonge les fonctions par 0 hors de $u$). On définit les sous-espaces de $C_c^\infty(g)$ suivants :

$$\mathcal{H} = \sum_{x \in G} C_c(g/xbx^{-1}), \qquad \mathcal{H}_0 = \sum_{i=0}^{d_{is}} C(k(L_i)/b).$$

Notons $\widehat{\mathcal{H}}$ et $\widehat{\mathcal{H}}_0$ les images de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_0$ par transformation de Fourier. Remarquons que pour tout réseau presque autodual $L$ de $V$, on a

(1) $$k(L)^1 = \{X \in g; \forall\, Y \in k(L), q_g(X,Y) \in \mathfrak{p}_F\}.$$

Idem

$$b^1 = \{X \in g; \forall\, Y \in b, q_g(X,Y) \in \mathfrak{p}_F\}.$$

On en déduit :

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{i=0}^{d_{is}} C(b^1/k(L_i)^1)$$

et, en notant $g_{\mathrm{tn}} = \cup_{x\in G} x b^1 x^{-1}$,

$$\widehat{\mathcal{H}} = C_c^\infty(g_{\mathrm{tn}}).$$

L'ensemble $g_{\rm tn}$ est l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents de $g$, *i.e.* des $X \in g$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty} (X^n) = 0$.

Notons $g_{\rm ent}$ l'ensemble des éléments entiers de $g$, *i.e.* des $X \in g$ dont toutes les valeurs propres dans $\overline{F}$ sont entières. On a

$$g_{\rm ent} = \bigcup_{x\in G} \bigcup_{i=0}^{d_{is}} x\, k(L_i)\, x^{-1} .$$

Notons $C_c^\infty(g)^*$ le dual algébrique de $C_c^\infty(g)$. On appelle distribution un élément de $C_c^\infty(g)^*$. Notons $\mathcal{D}$ le sous-espace des distributions invariantes par conjugaison par $G$, $\mathcal{D}_{\rm ent}$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{D}$ à support entier et $\mathcal{D}_{\rm nil}$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{D}_{\rm ent}$ à support nilpotent. L'espace $\mathcal{D}_{\rm nil}$ a pour base

$$\{\phi_{\mathcal{O}}\, ;\, \mathcal{O} \in g_{\rm nil}/G\} .$$

Notons ${\rm res}_{\mathcal{H}}$ et ${\rm res}_{\mathcal{H}_0}$ les applications de restriction

$$\begin{aligned} {\rm res}_{\mathcal{H}} \ &: C_c^\infty(g)^* \longrightarrow \mathcal{H}^* , \\ {\rm res}_{\mathcal{H}_0} \ &: C_c^\infty(g)^* \longrightarrow {\mathcal{H}_0}^* \end{aligned}$$

***Théorème***

(i) *Pour tout* $D \in \mathcal{D}_{\rm ent}$, ${\rm res}_{\mathcal{H}}(D) = 0$ *si et seulement si* ${\rm res}_{\mathcal{H}_0}(D) = 0$.

(ii) *La restriction à* $\mathcal{D}_{\rm nil}$ *de l'application* ${\rm res}_{\mathcal{H}}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}_{\rm nil}$ *sur* ${\rm res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\rm ent})$.

*Cf.* [W1], Théorème I.3.

Si $u$ est sous-ensemble ouvert de $g$ et $D \in C_c^\infty(g)^*$, on dit que $D$ est localement intégrable sur $u$ s'il existe une fonction $\varphi_D : u \to \mathbb{C}$, localement intégrable, telle que pour tout $f \in C_c^\infty(u)$,

$$D(f) = \int_u \varphi_D(X) f(X)\, dX .$$

Si $D \in C_c^\infty(g)^*$, on définit sa transformée de Fourier $\widehat{D}$ par la formule $\widehat{D}(f) = D(\widehat{f})$. Une conséquence du théorème est que pour tout $D \in \mathcal{D}_{\rm ent}$, $\widehat{D}$ est localement intégrable sur $g_{\rm tn}$ et la fonction $\varphi_{\widehat{D}}$ est localement constante sur $g_{\rm tn} \cap g_{\rm reg}$. Plus généralement, ces propriétés sont vraies pour tout $D \in C_c^\infty(g)^*$ telle que ${\rm res}_{\mathcal{H}}(D) \in {\rm res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\rm ent})$.

# CHAPITRE II

# FONCTIONS DE GREEN

**II.1.** Dans tout le chapitre II, le corps de base est $\mathbb{F}_q$. On considère un couple $(V, q_V)$ comme en I.2, à ceci près que $V$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$, ou $\mathbb{F}_{q^2}$ dans le cas unitaire.

La restriction à $\mathfrak{o}_F$ du caractère $\psi$ fixé en I.4 s'identifie à un caractère de $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$, c'est-à-dire de $\mathbb{F}_q$, que l'on note encore $\psi$. En définissant la forme $q_g$ comme en I.4, pour $f \in C(g)$, on définit sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ par

$$\widehat{f}(X) = q^{-\dim(\boldsymbol{g})/2} \sum_{Y \in g} \psi \circ q_g(X, Y) f(Y).$$

Il n'est pas usuel dans la théorie des groupes finis d'introduire le facteur $q^{-\dim(\boldsymbol{g})/2}$ mais cela facilite le passage entre les situations sur $F$ et celles sur $\mathbb{F}_q$. Ce facteur nous conduira à modifier en conséquence les résultats de la théorie des groupes finis auxquels nous nous référerons.

On classifie comme en I.6 les orbites nilpotentes de $g$. Dans le cas unitaire, on peut d'ailleurs identifier $\mathrm{Nil}(V)$ et $\mathcal{P}(d)$. Pour $X \in g$, on note $e[X]$ la fonction caractéristique de l'orbite $\mathcal{O}(X)$. Pour $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i), \varepsilon)$ dans $\mathrm{Nil}(V)$, on note $e[\boldsymbol{\lambda}, (q_i)]$ ou $e[\boldsymbol{\lambda}, (q_i), \varepsilon]$ la fonction caractéristique de l'orbite correspondante.

Pour $f, f' \in C(g)$, posons

$$(f, f')_g = |G|^{-1} \sum_{X \in g} \overline{f}(X) f'(X).$$

Soient $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Lévi}_{\mathbb{F}_q}(\boldsymbol{G})$ et $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Par}_{\mathbb{F}_q}(\boldsymbol{M})$. Pour $f \in C(g)$ et $f' \in C(m)$, on définit des fonctions $f_P \in C(m)$ et $\mathrm{ind}_P^G(f') \in C(g)$ par les formules :

$$f_P(Y) = |G|^{-1} |U_P|^{-1} \sum_{x, N} f(x^{-1}(Y + N)x),$$

$$\mathrm{ind}_P^G(f')(X) = |P|^{-1} \sum_{x, N, Z} f'(Z),$$

pour $Y \in m$ et $X \in g$, où l'on somme sur

$$(x, N) \in G \times u_P,$$

resp. $(x, N, Z) \in G \times u_P \times m$ tels que $X = x(Z + N)x^{-1}$. On a l'égalité :

$$(f_P, f')_m = (f, \mathrm{ind}_P^G(f'))_g. \tag{1}$$

On note $C^G(g)$ le sous-espace des éléments de $C(g)$ invariants par conjugaison par $G$. Plus généralement, si $a \subset g$ est un sous-ensemble invariant par conjugaison par $G$, on note $C^G(a)$ le sous-espace des éléments de $C(a)$ invariants par conjugaison.

Fixons un nombre premier $\ell \neq p$. On peut identifier $\mathbb{C}$ à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ à fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Soit $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Lévi}_{\mathbb{F}_q}(\boldsymbol{G})$. Lusztig a défini une application d'induction

$$R_M^G : C^M(M) \longrightarrow C^G(G),$$

(*cf.* [Lu2], 1.7 et 8.14), où l'on adapte au cas des groupes les notations introduites ci-dessus. Notons $\boldsymbol{G}_{un}$ la variété des éléments unipotents de $\boldsymbol{G}$. La restriction à $g_{\mathrm{nil}}$ de l'application $E^G$ de I.4 définit une bijection de $g_{\mathrm{nil}}$ sur $G_{un}$ qui entrelace les actions de $G$ par conjugaison. Il existe une unique application, que l'on notera encore

$$R_M^G : C^M(m_{\mathrm{nil}}) \longrightarrow C^G(g_{\mathrm{nil}})$$

telle que le diagramme ci-dessous soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} C^M(m_{\mathrm{nil}}) & \xrightarrow{R_M^G} & C^G(g_{\mathrm{nil}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^M(M) & \xrightarrow{R_M^G} & C^G(G) \end{array}$$

les inclusions verticales se déduisant des application $E^M$ et $E^G$. Si $\mathrm{Par}_{\mathbb{F}_q}(\boldsymbol{M}) \neq \varnothing$, $R_M^G$ est la restriction de l'application $\mathrm{ind}_P^G$ pour n'importe quel $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Par}_{\mathbb{F}_q}(\boldsymbol{M})$.

Pour $f \in C^G(g)$, on dit que $f$ est cuspidale si $f_P = 0$ pour tout sous-groupe parabolique $\boldsymbol{P}$ de $\boldsymbol{G}$, propre et défini sur $\mathbb{F}_q$. On note $C_{\mathrm{cusp}}^G(g)$ l'espace des fonctions cuspidales. Plus généralement, si $a \subset g$ est un sous-ensemble invariant par conjugaison par $G$, on pose

$$C_{\mathrm{cusp}}^G(a) = C^G(a) \cap C_{\mathrm{cusp}}^G(g).$$

**II.2.** On note $\mathcal{I}_0(V)$ l'ensemble des entiers $k \in \mathbb{N}$ vérifiant les conditions suivantes :
- si $(V, q_V)$ est symplectique, $k(k+1) \leqslant d$;
- si $(V, q_V)$ est orthogonal, $k^2 \leqslant d$ et $k \equiv d \bmod 2\mathbb{Z}$;
- si $(V, q_V)$ est unitaire, $k = 0$.

Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des sous-tores $\boldsymbol{T}$ de $\boldsymbol{G}$, définis sur $\mathbb{F}_q$ et vérifiant la condition suivante : il existe une décomposition orthogonale

$$V = V_0 \oplus V_1$$

telle que

• $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{G}(V_1) \subset \boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{T}$ est un sous-tore maximal de $\boldsymbol{G}(V_1)$ ;

• il existe $k \in \mathcal{I}_0(V)$ tel que

$$d(V_0) = \begin{cases} k(k+1), & \text{dans le cas symplectique,} \\ k^2, & \text{dans le cas orthogonal,} \\ k = 0, & \text{dans le cas unitaire.} \end{cases}$$

Pour $k \in \mathcal{I}_0(V)$, on note $\mathcal{T}_k$ le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{T}$ tels que l'entier intervenant ci-dessus soit égal à $k$. Pour $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}$, avec les notations ci-dessus, on a

$$\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{G}(V_0) \times \boldsymbol{T}.$$

C'est un élément de $\text{Lévi}_{\mathbb{F}_q}(\boldsymbol{G})$.

On paramétrise comme en I.8 l'ensemble $\mathcal{T}/G$. Notons $\Theta_I(V)$ l'ensemble des triplets $(k, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$ où $k \in \mathcal{I}_0(V)$ et $\boldsymbol{\mu}^0$ et $\boldsymbol{\mu}^1$ sont des partitions, soumis aux conditions :

• si $(V, q_V)$ est symplectique, $k(k+1) + 2S(\boldsymbol{\mu}^0) + 2S(\boldsymbol{\mu}^1) = d$ ;

• si $(V, q_V)$ est orthogonal, $k^2 + 2S(\boldsymbol{\mu}^0) + 2S(\boldsymbol{\mu}^1) = d$ ; si de plus $k = 0$, $\eta(q_V) = \nu^{c(\boldsymbol{\mu}^1)}$ ;

• si $(V, q_V)$ est unitaire, $2S(\boldsymbol{\mu}^0) + S(\boldsymbol{\mu}^1) = d$ et tous les termes non nuls de $\boldsymbol{\mu}^1$ sont impairs.

On dit qu'un tel triplet est exceptionnel si

• $(V, q_V)$ est orthogonal, $d$ est divisible par 4 et $q_V$ est déployée ;

• $k = 0$, $\boldsymbol{\mu}^1 = \varnothing$ et tous les termes de $\boldsymbol{\mu}^0$ sont pairs.

On note $\Theta(V)$ l'ensemble dont les éléments sont :

• les éléments non exceptionnels de $\Theta_I(V)$ ;

• les quadruplets $(0, \boldsymbol{\mu}^0, \varnothing, \varepsilon)$, où $(0, \boldsymbol{\mu}^1, \varnothing)$ est un élément exceptionnel de $\Theta_I(V)$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

On définit alors une bijection $\Lambda_{\mathcal{T}} : \mathcal{T}/G \to \Theta(V)$.

***Remarque***. — Pour définir cette bijection dans le cas exceptionnel, on doit fixer deux décompositions de $V$ en sous-espaces lagrangiens comme en I.6. On reviendra plus loin sur ce choix (*cf.* II.9).

**II.3.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $W(A_{n-1})$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. On note $W(C_n)$ le groupe des permutations $w$ de l'ensemble $\{\pm 1, \ldots, \pm n\}$ telles que $w(-i) = -w(i)$ pour tout $i \in \{\pm 1, \ldots, \pm n\}$. On note $w_{CD}$ l'élément de $W(C_n)$ tel que

$$w_{CD}(i) = i \ \text{ pour } \ i = 1, \ldots, n-1$$
$$w_{CD}(n) = -n,$$

et $\text{sgn}_{CD}$ le caractère de $W(C_n)$ défini par

$$\text{sgn}_{CD}(w) = (-1)^{|\{i \in \{1,\ldots,n\}; w(i) \in \{-1,\ldots,-n\}\}|}.$$

On note $W(D_n)$ le noyau de $\text{sgn}_{CD}$. Sur chacun de ces groupes est défini le caractère signature usuel, que l'on note sgn.

Soit $k \in \mathcal{I}_0(V)$. Il existe $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}_k$ tel que $\mathrm{Par}_{\mathbb{F}_q}(\boldsymbol{Z_G}(\boldsymbol{T})) \neq \varnothing$. La classe de conjugaison de $\boldsymbol{T}$ par $G$ est uniquement déterminée. Fixons un tel tore, notons-le $\boldsymbol{T}(k)$. Posons

$$\boldsymbol{M}(k) = \boldsymbol{Z_G}(\boldsymbol{T}(k)), \quad W(k) = W_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}(k)).$$

Supposons $(V, q_V)$ symplectique, resp. orthogonal. Posons $n = (d - k(k+1))/2$, resp. $n = (d - k^2)/2$. Considérons l'ensemble des droites de $V \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$ qui sont propres pour l'action de $\boldsymbol{T}(k)$, de valeur propre associée non triviale. Il est formé de $2n$ droites isotropes, qui se regroupent naturellement par paires. Ecrivons-le $\{D_{\pm i}; i = 1, \ldots, n\}$, de sorte que pour tout $i$, $q_V$ établisse une dualité entre $D_i$ et $D_{-i}$. L'action naturelle de $W(k)$ sur cet ensemble de droites identifie $W(k)$ à un sous-groupe de $W(C_n)$. On obtient en fait un isomorphisme de $W(k)$ sur $W(C_n)$ sauf si $(V, q_V)$ est orthogonal pair et $k = 0$. Dans ce dernier cas, l'application précédente est un isomorphisme de $W(k)$ sur $W(D_n)$. Considérons le cas où $(V, q_V)$ est orthogonal pair déployé, $d$ est divisible par 4 et $k = 0$. On supposera alors que le sous-espace lagrangien de $V \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$ engendré par $\{D_i; i = i, \ldots, n\}$ est conjugué à $V^+ \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ par un élément de $G(\overline{\mathbb{F}}_q)$.

On note $\phi$ l'automorphisme de Frobenius de $\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q$. On en déduit un automorphisme de bon nombre d'objets, que l'on notera encore $\phi$ ; si besoin est on précisera par un indice l'objet auquel il s'applique. Par exemple le Frobenius définit un automorphisme $\phi$ ou $\phi_{W(k)}$ de $W(k)$. Il définit aussi une permutation de l'ensemble de droites ci-dessus, qui s'identifie à un élément de $W(C_n)$ que nous noterons cette fois $w_\phi$. On a $w_\phi = 1$ sauf si $(V, q_V)$ est orthogonal pair, $k = 0$ et $q_V$ n'est pas déployée. Dans ce dernier cas, quitte à modifier l'indexation de nos droites, on peut supposer que $w_\phi = w_{CD}$. Le plongement précédent de $W(k)$ dans $W(C_n)$ est tel que

$$\phi(w) = w_\phi^{-1} w w_\phi \tag{1}$$

pour tout $w \in W(k)$.

Supposons maintenant $(V, q_V)$ unitaire. Notons $\{D_i; i = 1, \ldots, d\}$ l'ensemble des droites de $V \otimes_{\mathbb{F}_{q^2}} \overline{\mathbb{F}}_q$ qui sont propres pour l'action de $\boldsymbol{T}(k)$. Le groupe $W(k)$ permute cet ensemble de droites et s'identifie ainsi à $W(A_{d-1})$. Notons ${}_\phi V$ l'espace $V$ muni de la structure de $\mathbb{F}_{q^2}$-espace définie par

$$(z, v) \longmapsto \phi(z) v$$

pour $v \in V$ et $z \in \mathbb{F}_{q^2}$. Notons $\{\Delta_i; i = 1, \ldots, d\}$ l'ensemble des droites de ${}_\phi V \otimes_{\mathbb{F}_{q^2}} \overline{\mathbb{F}}_q$ qui sont propres pour l'action de $\boldsymbol{T}(k)$. La forme $q_V$ met en dualité les espaces $V \otimes_{\mathbb{F}_{q^2}} \overline{\mathbb{F}}_q$ et ${}_\phi V \otimes_{\mathbb{F}_{q^2}} \overline{\mathbb{F}}_q$. On peut supposer que pour tout $i$, $D_i$ et $\Delta_i$ sont en dualité. Le Frobenius définit naturellement une bijection $\phi_V : V \otimes_{\mathbb{F}_{q^2}} \overline{\mathbb{F}}_q \to {}_\phi V \otimes_{\mathbb{F}_{q^2}} \overline{\mathbb{F}}_q$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, il existe un unique entier $w_\phi(i) \in \{1, \ldots, d\}$ tel que $\phi_V(D_i) = \Delta_{w_\phi(i)}$. Cela définit un élément $w_\phi$ de $W(A_{d-1})$. Quitte à modifier l'indexation de nos droites, on peut supposer que $w_\phi$ est l'élément de plus grande longueur de $W(A_{d-1})$, *i.e.*

$$w_\phi(i) = d + 1 - i$$

pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. On a encore la formule (1).

Revenons au cas général. Deux éléments $w, w' \in W(k)$ sont dits $\phi$-conjugués s'il existe $w'' \in W(k)$ tel que $w' = \phi(w'')^{-1} w w''$, ou encore $w_\phi w' = w''^{-1} w_\phi w w''$. On note $\mathcal{O}_\phi(w)$ la classe de $\phi$-conjugaison de $w$.

Soit $w \in W(k)$. Fixons $x \in \boldsymbol{G}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ tel que $\phi_G(x)^{-1} x \in N_{\boldsymbol{G}(\overline{\mathbb{F}}_q)}(\boldsymbol{M}(k))$ et l'image de cet élément dans $W(k)$ soit $w$. Posons $\boldsymbol{T}^w = x\boldsymbol{T}(k)x^{-1}$. Alors $\boldsymbol{T}^w \in \mathcal{T}_k$, sa classe de conjugaison par $G$ ne dépend pas du choix de $x$ et l'application $w \mapsto \boldsymbol{T}^w$ se quotiente en une bijection de l'ensemble des classes de $\phi$-conjugaison dans $W(k)$ sur l'ensemble $\mathcal{T}_k/G$.

On décrit la composée de cette application avec la bijection $\Lambda_{\mathcal{T}}$ de II.2 de la façon suivante. Supposons $(V, q_V)$ unitaire. Soit $w \in W(k) \simeq W(A_{d-1})$. On associe à $w_\phi w$ une partition $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(d)$ : $w_\phi w$ est produit de cycles de longueur $\mu_1, \mu_2$, etc. On note $\boldsymbol{\mu}^1$ la partition dont les termes non nuls sont les termes impairs de $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\mu}^0$ la partition dont les termes sont les termes pairs de $\boldsymbol{\mu}$, divisés par 2. L'application ci-dessus associe à $w$ le triplet $(0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$. Supposons $(V, q_V)$ symplectique ou orthogonal. Soit $w \in W(k) \subset W(C_n)$, où $n$ est comme ci-dessus. L'élément $w_\phi w$ de $W(C_n)$ a deux types d'orbites dans $\{\pm 1, \dots, \pm n\}$ :

- les orbites $J$ telles que pour tout $j \in J$, $-j \notin J$ ;
- les orbites $J$ telles que pour tout $j \in J$, $-j \in J$.

On note $\boldsymbol{\mu}^0$, resp. $\boldsymbol{\mu}^1$, la partition telle que, pour tout entier $i \geqslant 1$, $2c_i(\boldsymbol{\mu}^0)$, resp. $c_i(\boldsymbol{\mu}^1)$, est le nombre d'orbites du premier type, resp. du second, de nombre d'éléments $i$, resp. $2i$. Si $(k, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$ n'est pas exceptionnel, l'application ci-dessus associe à $w$ le triplet $(k, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$. Supposons $(k, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$ exceptionnel (donc $k = 0$, $n = d/2$, $\boldsymbol{\mu}^1 = \varnothing$, $w_\phi = 1$). Soit $J \subset \{\pm 1, \dots, \pm d/2\}$ un sous-ensemble à $d/2$ éléments, stable par $w$ et tel que

$$\{\pm 1, \dots, \pm d/2\} = J \cup (-J),$$

$-J$ étant défini de façon évidente. L'ensemble $J$ est ou n'est pas l'image de $\{1, \dots, d/2\}$ par un élément de $W(D_{d/2})$. On pose $\varepsilon = 1$ dans le premier cas, $\varepsilon = -1$ dans le second. L'application ci-dessus associe à $w$ le quadruplet $(0, \boldsymbol{\mu}^0, \varnothing, \varepsilon)$.

**II.4.** Supposons $(V, q_V)$ symplectique et qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $d = k(k+1)$. Posons

$${}^o\boldsymbol{\lambda} = (2k, 2k-2, \dots, 4, 2, 0, 0, 0, \dots).$$

On a ${}^o\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(V)$. Posons

$$a({}^o\boldsymbol{\lambda}) = \{i \in \mathbb{N};\, i \text{ pair},\ 2 \leqslant i \leqslant 2k\}.$$

Pour tout $i \in a({}^o\boldsymbol{\lambda})$, notons ${}^oq_i$ l'unique classe de forme quadratique sur $\mathbb{F}_q$ telle que $\eta({}^oq_i) = (-1)^{1+i/2}$. Fixons un élément ${}^oX \in \mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}$ tel que

$$\Lambda({}^oX) = ({}^o\boldsymbol{\lambda}, ({}^oq_i)).$$

Notons $\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}({}^oX)$ la classe de conjugaison par $\boldsymbol{G}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ de ${}^oX$, $\boldsymbol{Z_G}({}^oX)^0$ la composante neutre du centralisateur de ${}^oX$ dans $\boldsymbol{G}$ et

$$\overline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{G}}({}^oX) = \boldsymbol{Z_G}({}^oX)/\boldsymbol{Z_G}({}^oX)^0 .$$

Avec des notations évidentes, on a :

$$\overline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{G}}({}^oX) \simeq \prod_{i\in a({}^o\boldsymbol{\lambda})} \boldsymbol{O}({}^oq_i)/\boldsymbol{G}({}^oq_i) \simeq \{\pm 1\}^k .$$

Notons sgn le caractère non trivial de tout groupe à 2 éléments. Définissons le caractère ${}^o\mathrm{sgn}$ de $\overline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{G}}({}^oX)$ par :

$${}^o\mathrm{sgn}((x_i)_{i\in a({}^o\boldsymbol{\lambda})}) = \prod_{\substack{i\in a({}^o\boldsymbol{\lambda}),\\ i/2 \text{ impair}}} \mathrm{sgn}(x_i) .$$

L'application

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}/\boldsymbol{Z_G}({}^oX)^0 &\longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}({}^oX) \\ x &\longmapsto x\,{}^oX\,x^{-1} \end{aligned}$$

est un revêtement de groupe $\boldsymbol{Z_G}({}^oX)$. Notons ${}^o\mathcal{E}$ le système local sur $\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}({}^oX)$, quotient de

$$\boldsymbol{G}/\boldsymbol{Z_G}({}^oX)^0 \times \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

par $\boldsymbol{Z_G}({}^oX)$ agissant naturellement sur le premier facteur et par ${}^o\mathrm{sgn}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. On prolonge ${}^o\mathcal{E}$ en un système local sur $\boldsymbol{g}$, nul hors de $\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}({}^oX)$.

Le faisceau ${}^o\mathcal{E}$ est muni d'une action de Frobenius. Pour $X \in g$, on note ${}^o\mathcal{E}_X$ la fibre de ${}^o\mathcal{E}$ au point $X$ et l'on pose

$${}^of(X) = \mathrm{trace}(\phi|{}^o\mathcal{E}_X) .$$

Cela définit une fonction ${}^of \in C^G(g)$.

Pour une famille $(q_i)_{i\in a({}^o\boldsymbol{\lambda})}$ telle que $({}^o\boldsymbol{\lambda},(q_i)) \in \mathrm{Nil}(V)$, posons

$${}^o\mathrm{sgn}((q_i)) = \prod_{\substack{i\in a({}^o\boldsymbol{\lambda}),\\ i/2\,\text{impair}}} \mathrm{sgn}\circ\eta(q_i) .$$

Alors

$$\text{(1)} \qquad {}^of = \sum_{(q_i);({}^o\boldsymbol{\lambda},(q_i))\in\mathrm{Nil}(V)} {}^o\mathrm{sgn}((q_i))\, e[{}^o\boldsymbol{\lambda},(q_i)] .$$

La fonction ${}^of$ est cuspidale et il existe ${}^o\gamma \in \mathbb{C}^\times$ tel que

$$\text{(2)} \qquad \widehat{{}^of} = {}^o\gamma\,{}^of$$

([Lu1] Corollaire 10). On a ${}^o\gamma^4 = 1$. Nous calculerons plus loin ce terme ${}^o\gamma$ (*cf.* V.8).

**II.5.** Supposons $(V, q_V)$ orthogonal et qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $d = k^2$. Posons

$$^o\boldsymbol{\lambda} = (2k-1, 2k-3, \dots, 3, 1, 0, \dots)$$

$$a(^o\boldsymbol{\lambda}) = \{i \in \mathbb{N};\, i \text{ impair et } 1 \leqslant i \leqslant 2k-1\}.$$

On a $^o\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(V)$. Pour tout $i \in a(^o\boldsymbol{\lambda})$, notons $^oq_i$ l'unique classe de forme quadratique sur $\mathbb{F}_q$ telle que

$$\eta(^oq_i) = \begin{cases} (-1)^{(i-1)/2+d}, & \text{si } i \neq 2k-1, \\ (-1)^{d-1}\eta(q_V), & \text{si } i = 2k-1. \end{cases}$$

Fixons un élément $^oX \in g_{\mathrm{nil}}$ tel que $\Lambda(^oX) = (^o\boldsymbol{\lambda}, (^oq_i))$. Avec les notations de II.4, on a maintenant

$$\overline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{G}}(^oX) = \Big\{(x_i)_{i \in a(^o\boldsymbol{\lambda})} \in \prod_{i \in a(^o\boldsymbol{\lambda})} \boldsymbol{O}(^oq_i)/\boldsymbol{G}(^oq_i);\, \prod_i \det(x_i) = 1\Big\} \simeq \{\pm 1\}^{k-1}.$$

Posons

$$^oJ = \{i \in a(^o\boldsymbol{\lambda});\, (i-1)/2 \equiv d \bmod 2\mathbb{Z}\}.$$

On définit un caractère $^o\mathrm{sgn}$ de $\overline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{G}}(^oX)$ par

$$^o\mathrm{sgn}((x_i)) = \prod_{i \in {^oJ}} \mathrm{sgn}(x_i).$$

On construit comme en II.4 un système local $^o\mathcal{E}$ sur $\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}(^oX)$, que l'on prolonge par 0 à $\boldsymbol{g}$ tout entier. Il est muni d'une action de Frobenius et l'on en déduit une fonction $^of \in C^G(g)$. Pour une famille $(q_i)_i \in a(^o\boldsymbol{\lambda})$ telle que $(^o\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) \in \mathrm{Nil}(V)$, posons

$$^o\mathrm{sgn}((q_i)) = \prod_{i \in {^oJ}} \mathrm{sgn} \circ \eta(q_i).$$

La fonction $^of$ vérifie les égalités (1) et (2) de II.4 et est cuspidale.

**II.6.** Soit $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}$ et

$$V = V_0 \oplus V_1$$

une décomposition associée à $\boldsymbol{T}$, *cf.* II.2. On définit une fonction $^Tf$ sur $g(V_0) \times t$ de la façon suivante. Notons $e_1[0]$ la fonction caractéristique de 0 dans $t$. Dans le cas unitaire, $V_0 = \{0\}$ et l'on pose $^Tf = e_1[0]$. Dans le cas symplectique ou orthogonal, $V_0$ est du type considéré en II.4 ou II.5, on note $^of$ la fonction sur $g(V_0)$ définie dans ces paragraphes et $^Tf = {^of} \otimes e_1[0]$ (bien sûr, si $d(V_0) \leqslant 1$, on a $g(V_0) = \{0\}$ et $^of$ est la fonction constante égale à 1). En tout cas, on définit une fonction $Q_T$ sur $g$ par la formule :

$$Q_T = R^G_{G(V_0) \times T}(^Tf).$$

Par définition, $Q_T \in C^G(g_{\mathrm{nil}})$ et $Q_T$ ne dépend que de la classe de conjugaison par $G$ de $\boldsymbol{T}$. Si l'on note cette classe $(\boldsymbol{T})$ et si l'on pose $\theta = \Lambda_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{T})$, on notera $Q_\theta = Q_{(T)} = Q_T$. De même, si $(\boldsymbol{T})$ est associée à la classe de $\phi$-conjugaison d'un élément $w$ d'un groupe $W(k)$, *cf.* II.3, on posera $Q_w = Q_{(T)}$.

On a besoin d'adapter ces définitions au cas d'un groupe linéaire $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{GL}(n)$, ou $\boldsymbol{G} = \mathrm{Res}_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q} \boldsymbol{GL}(n)$. On note dans ce cas $\mathcal{T}$ l'ensemble des sous-tores maximaux de $\boldsymbol{G}$ définis sur $\mathbb{F}_q$. Pour $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}$, on note ${}^T f$ la fonction caractéristique de 0 dans $t$ et on définit $Q_T$ comme ci-dessus.

**II.7.** Soit $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}$. Si $(V, q_V)$ est unitaire, on pose $\delta(G,T) = 0$. Si $(V, q_V)$ est symplectique ou orthogonal, on pose

$$\delta(G,T) = \dim(\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}({}^oX)) - \dim(\boldsymbol{g}(V_0))$$

avec les notations de II.6, ou ${}^oX$ est l'élément de $g(V_0)$ fixé en II.4 ou II.5. On a dans ce cas

$$\delta(G,T) = \begin{cases} -k(k+1)(2k+1)/6, & \text{dans le cas symplectique,} \\ -k(k-1)(k+1)/3, & \text{dans le cas orthogonal.} \end{cases}$$

On a les égalités :

$$(1) \qquad \begin{cases} \bullet & \text{pour } \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}' \in \mathcal{T}, \text{ non conjugués par } G, \ (Q_T, Q_{T'})_g = 0; \\ \bullet & \text{pour } \boldsymbol{T} \in \mathcal{T}, (Q_T, Q_T)_g = |W_G(T)|\,|T|^{-1} q^{\delta(G,T)}; \end{cases}$$

*cf.* [Lu2], Théorème 1.14 et [Lu3], Corollaire 9.11.

Soient $\boldsymbol{M} \in \mathrm{Lévi}_{\mathbb{F}_q}(\boldsymbol{G})$ et $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Par}_{\mathbb{F}_q}(\boldsymbol{M})$. Il existe un sous-espace non dégénéré $V'$ de $V$ et des entiers $\lambda_1, \ldots, \lambda_r > 0$ tels que

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{G}(V') \times \prod_{i=1}^{r} \boldsymbol{G}_i,$$

où $\boldsymbol{G}_i = \boldsymbol{GL}(\lambda_i)$ dans le cas symplectique ou orthogonal, $\boldsymbol{G}_i = \mathrm{Res}_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q} \boldsymbol{GL}(\lambda_i)$ dans le cas unitaire. Soient $\boldsymbol{T}' \in \mathcal{T}^{G(V')}$ et, pour tout $i = 1, \ldots, r$, $\boldsymbol{T}_i \in \mathcal{T}^{G_i}$. Posons

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}' \times \prod_{i=1}^{r} \boldsymbol{T}_i.$$

Alors $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}^G$ et on a l'égalité

$$(2) \qquad Q_T^G = \mathrm{ind}_P^G \left( Q_{T'}^{G(V')} \otimes \left( \bigotimes_{i=1}^{r} Q_{T_i}^{G_i} \right) \right).$$

Cela résulte de la transitivité de l'induction : si $\boldsymbol{L} \in \mathrm{Lévi}_{\mathbb{F}_q}(\boldsymbol{M})$,

$$\mathrm{ind}_P^G \circ R_L^M = R_L^G.$$

On a la propriété

$$(3) \qquad \{Q_{(T)}; (\boldsymbol{T}) \in \mathcal{T}/G\} \text{ est une base de } C^G(g_{\mathrm{nil}}).$$

*Cf.* [Lu2], Théorème 1.14, [Lu3], Lemme 25.4 et (1) ci-dessus.

Si $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}$, disons que $\boldsymbol{T}$ est anisotrope s'il n'existe pas de sous-groupe parabolique $\boldsymbol{P}$ de $\boldsymbol{G}$, propre et défini sur $\mathbb{F}_q$, tel que $\boldsymbol{Z_G}(\boldsymbol{T}) \subset \boldsymbol{P}$. Notons $\mathcal{T}^a$ l'ensemble des éléments anisotropes de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^a/G$ l'ensemble de leurs classes de conjugaison par $G$. Alors

(4) $$\{Q_{(T)}; (\boldsymbol{T}) \in \mathcal{T}^a/G\} \text{ est une base de } C^G_{\mathrm{cusp}}(g_{\mathrm{nil}}).$$

*Démonstration.* — Soit $f \in C^G(g_{\mathrm{nil}})$. Soient $\boldsymbol{M} \in \text{Lévi}_{\mathbb{F}_q}(\boldsymbol{G})$ et $\boldsymbol{P} \in \text{Par}_{\mathbb{F}_q}(\boldsymbol{M})$. D'après II.1 (1) et (3) ci-dessus appliqué à $\boldsymbol{M}$, pour que $f_P = 0$, il faut et il suffit que pour tout $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}^M$, on ait
$$(f, \mathrm{ind}_P^G(Q_T^M))_g = 0.$$
Grâce à (2), on en déduit que $f \in C^G_{\mathrm{cusp}}(g_{\mathrm{nil}})$ si et seulement si
$$(f, Q_T)_g = 0$$
pour tout $T \in \mathcal{T} - \mathcal{T}^a$. On conclut en appliquant (1) et (3). □

**II.8.** Soit $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}$ et
$$V = V_0 \oplus V_1$$
une décomposition de $V$ comme en II.2, relative à $\boldsymbol{T}$. Posons
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Z_G}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{G}(V_0) \times \boldsymbol{T}$$
et
$$\boldsymbol{t}_r = \{X \in \boldsymbol{t}; \boldsymbol{Z_G}(X) = \boldsymbol{M}\}.$$
Soit $X \in t_r$. On définit une fonction ${}^Tf[X]$ sur $m$ de la façon suivante. Notons $e_1[X]$ la fonction caractéristique de $\{X\}$ dans $t$. Si $(V, q_V)$ est unitaire, on pose ${}^Tf[X] = e_1[X]$. Sinon, on introduit la fonction ${}^{o}\!f$ sur $g(V_0)$ (*cf.* II.6) et l'on pose ${}^Tf[X] = {}^{o}\!f \otimes e_1[X]$. On prolonge ${}^Tf[X]$ à $g$ par $O$ hors de $m$. On définit une fonction ${}^T\varphi[X]$ sur $g$ par la formule
$${}^T\varphi[X](Y) = |Z_G(T)|^{-1} \sum_{x \in G} {}^Tf[X](x^{-1}Yx).$$

***Proposition.*** — *Pour tout $Y \in g_{\mathrm{nil}}$, on a l'égalité :*
$$\widehat{{}^T\varphi[X]}(Y) = \widehat{Q}_T(Y).$$

***Remarque.*** — Cette proposition se trouve implicitement dans [Lu1], qui prouve que les deux fonctions ci-dessus sur $g_{\mathrm{nil}}$ sont proportionnelles, mais leur égalité n'y est pas affirmée. Si $\boldsymbol{T}$ est un sous-tore maximal de $\boldsymbol{G}$, la proposition est un théorème de Kazhdan ([Kaz], Théorème 3).

*Démonstration.* — Rappelons quelques définitions géométriques. Pour toute variété $\boldsymbol{S}$ définie sur $\mathbb{F}_q$, on note $D^b_c(\boldsymbol{S})$ la catégorie dérivée des faisceaux $\ell$-adiques sur $\boldsymbol{S}$ et $\mathcal{M}(\boldsymbol{S})$ la sous-catégorie des faisceaux pervers. Si $\boldsymbol{S}$ est munie d'une action d'un groupe algébrique $\boldsymbol{H}$, on note $\mathcal{M}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{S})$ la catégorie des faisceaux pervers $\boldsymbol{H}$-équivariants. Si $\boldsymbol{S}'$ est une sous-variété localement fermée de $\boldsymbol{S}$ et $A \in D^b_c(\boldsymbol{S})$, on note $A|_{\boldsymbol{S}'} \in D^b_c(\boldsymbol{S}')$ la restriction de $A$ à $\boldsymbol{S}'$. Si $\boldsymbol{S}'$ est une sous-variété lisse irréductible localement fermée de $\boldsymbol{S}$ et $\mathcal{E}$ un système local irréductible sur $\boldsymbol{S}'$, il existe un unique faisceau pervers irréductible $\mathcal{E}^{\#}$ sur $\boldsymbol{S}$, à support dans la clôture $\overline{\boldsymbol{S}}'$, tel que $(\mathcal{E}^{\#})|_{\boldsymbol{S}'} = \mathcal{E}[\dim(\boldsymbol{S}')]$. Cette construction s'étend aux systèmes locaux semi-simples.

Pour tout sous-ensemble $S$ d'un produit $S_1 \times \cdots \times S_n$ et pour toute famille d'entiers $(i_j)_{j=1,\ldots,k}$ telle que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, on note $p^S_{i_1,\ldots,i_k}$ la restriction à $S$ de la projection de $S_1 \times \cdots \times S_n$ sur $S_{i_1} \times \cdots \times S_{i_k}$.

Soient $\boldsymbol{S}$ une variété définie sur $\overline{\mathbb{F}_q}$ et $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel de dimension finie sur $\overline{\mathbb{F}_q}$, muni d'une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée $q$. On définit une transformation de Fourier $\mathcal{F}$ dans $D^b_c(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{E})$ de la façon suivante (*cf.* [Lau], Définition 1.2.1.1). Considérons le faisceau $\mathcal{S}^{\boldsymbol{E}}$ sur $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}$ :

$$\mathcal{S}^{\boldsymbol{E}} = \Big\{(Y, Z, z, \lambda) \in \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \times \overline{\mathbb{F}_q} \times \overline{\mathbb{Q}_\ell};\ z^q - z = q(Y, Z)\Big\}.$$

Le groupe $\mathbb{F}_q$ agit sur $\mathcal{S}^{\boldsymbol{E}}$ par

$$u(Y, Z, z, \lambda) = (Y, Z, z + u, \lambda\psi(-u))$$

pour $u \in \mathbb{F}_q$ (rappelons que l'on a identifié $\psi$ à un caractère à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell^\times}$). On note $\mathcal{S}^{\boldsymbol{E}}_\psi$ le quotient de $\mathcal{S}^{\boldsymbol{E}}$ par cette action. Pour $B \in D^b_c(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{E})$, on pose

$$\mathcal{F}(B) = p_{13}^{\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}}\Big(p_{12}^{\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E},*}(B)[\dim(\boldsymbol{E})] \otimes p_{23}^{\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E},*}(\mathcal{S}^{\boldsymbol{E}}_\psi)\Big).$$

La transformation $\mathcal{F}$ conserve $\mathcal{M}(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{E})$. Si $\boldsymbol{H}$ est un sous-groupe algébrique du groupe orthogonal de $q$, $\mathcal{F}$ conserve $\mathcal{M}_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{E})$.

Munissons $\boldsymbol{m}$, resp. $\boldsymbol{g}$, de l'action par conjugaison de $\boldsymbol{M}$, resp. $\boldsymbol{G}$. Si $\boldsymbol{S}$ est une variété définie sur $\overline{\mathbb{F}_q}$, $A \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{m})$ et $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Par}(\boldsymbol{M})$, on définit un complexe $\boldsymbol{G}$-équivariant $\mathrm{ind}^G_P(A) \in D^b_c(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{g})$ de la façon suivante (*cf.* [Lu3], § .4). On a l'égalité $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{u_P}$, on note $\delta_m$ et $\delta_u$ les projections de $\boldsymbol{p}$ sur $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{u_P}$. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \boldsymbol{\mathcal{W}} = \big\{(s, Y, x) \in \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{G};\ x^{-1}Yx \in \boldsymbol{p}\big\} \\
 & \swarrow^{\delta} & \downarrow \pi \\
\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{m} & & \boldsymbol{\mathcal{V}} = \big\{(s, Y, x\boldsymbol{P}) \in \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{G}/\boldsymbol{P};\ x^{-1}Yx \in \boldsymbol{p}\big\} \\
 & & \downarrow p_{12}^{\boldsymbol{\mathcal{V}}} \\
 & & \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{g}
\end{array}$$

où $\pi$ est la projection naturelle et $\delta(s, Y, x) = (s, \delta_m(x^{-1}Yx))$. Il existe un unique faisceau $A^{\boldsymbol{\mathcal{V}}} \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{V}})$ tel que

$$\pi^*(A^{\boldsymbol{\mathcal{V}}})[\dim(\boldsymbol{p})] = \delta^*(A)[\dim(\boldsymbol{g}) + \dim(\boldsymbol{u_P})].$$

On pose

$$\mathrm{ind}^G_P(A) = p^{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{12!}(A^{\boldsymbol{\mathcal{V}}}).$$

Posons $\boldsymbol{m}_r = \boldsymbol{g}(V_0) \times \boldsymbol{t}_r$. Soient $\boldsymbol{S}$ une variété définie sur $\overline{\mathbb{F}_q}$ et $\boldsymbol{\Sigma} \subset \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{m}_r$ une sous-variété lisse, irréductible, localement fermée et invariante par conjugaison par

$\boldsymbol{M}$. On suppose que si $(s,Y) \in \boldsymbol{\Sigma}$, si $x \in \boldsymbol{G}$ et si $(s, xYx^{-1}) \in \boldsymbol{\Sigma}$, alors $x \in N_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T})$. Soit $\mathcal{E}$ un système local sur $\boldsymbol{\Sigma}$, irréductible et $\boldsymbol{M}$-équivariant. Pour $w \in W_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T})$, posons

$$w\boldsymbol{\Sigma}w^{-1} = \{(s, wYw^{-1});\ (s,Y) \in \boldsymbol{\Sigma}\}.$$

Notons $W(\boldsymbol{\Sigma})$ le sous-groupe des $w \in W_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T})$ tels que $w\boldsymbol{\Sigma}w^{-1} \cap \boldsymbol{\Sigma}$ soit dense dans $\boldsymbol{\Sigma}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_r$ la sous-variété des $(s,Y) \in \bigcap_{w \in W(\boldsymbol{\Sigma})} w\boldsymbol{\Sigma}w^{-1}$ vérifiant la condition :

$$(w \in W_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T}) \text{ et } (s,Y) \in w\boldsymbol{\Sigma}w^{-1}) \Longrightarrow w \in W(\boldsymbol{\Sigma}).$$

Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}} = \big\{(s,Y,x) \in \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{G};\ (s, x^{-1}Yx) \in \boldsymbol{\Sigma}_r\big\} \arrow[dl, "\widetilde{\delta}"'] \arrow[d, "\widetilde{\pi}"] \\
\boldsymbol{\Sigma}_r & \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}} = \big\{(s,Y,x\boldsymbol{M}) \in \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{G}/\boldsymbol{M};\ (s, x^{-1}Yx) \in \boldsymbol{\Sigma}_r\big\} \arrow[d, "p_{12}^{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}}"] \\
 & \boldsymbol{\mathcal{Y}} = \big\{(s,Y) \in \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{g};\ \exists x \in \boldsymbol{G},\ (s, x^{-1}Yx) \in \boldsymbol{\Sigma}_r\big\}
\end{tikzcd}$$

où $\widetilde{\pi}$ est la projection naturelle et $\widetilde{\delta}(s,Y,z) = (s, x^{-1}Yx)$. Il existe un unique système local irréductible $\mathcal{E}^{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}}$ sur $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}$ tel que

$$\widetilde{\pi}^*(\mathcal{E}^{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}}) = \widetilde{\delta}^*(\mathcal{E}|_{\boldsymbol{\Sigma}_r}).$$

Puisque $p_{12}^{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}}$ est un revêtement de groupe $W(\boldsymbol{\Sigma})$, $p_{12*}^{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}}(\mathcal{E}^{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}})$ est un système local semi-simple sur $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$. Or $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ est une sous-variété lisse irréductible de $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{g}$, localement fermée. On définit un faisceau pervers $\mathrm{ind}_M^G(\mathcal{E}^{\#})$ sur $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{g}$ par

$$\mathrm{ind}_M^G(\mathcal{E}^{\#}) = (p_{12*}^{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}}(\mathcal{E}^{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}}))^{\#}.$$

Sous ces hypothèses, on a :

(1) pour tout $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Par}(\boldsymbol{M})$, le complexe $\mathrm{ind}_P^G(\mathcal{E}^{\#})$ est à support dans la clôture $\overline{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}$ de $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ et il existe un isomorphisme canonique

$$\mathrm{ind}_P^G(\mathcal{E}^{\#})|_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \simeq \mathrm{ind}_M^G(\mathcal{E}^{\#})|_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}.$$

En effet, posons $A = \mathcal{E}^{\#}$ et

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_{\boldsymbol{\Sigma}_r} = \Big\{(s,Y,x\boldsymbol{P}) \in \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{G}/\boldsymbol{P};\ x^{-1}Yx \in \boldsymbol{p} \text{ et } (s, \delta_m(x^{-1}Yx)) \in \boldsymbol{\Sigma}_r\Big\}.$$

L'application

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}} &\longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{V}}_{\boldsymbol{\Sigma}_r} \\ (s,Y,x\boldsymbol{M}) &\longmapsto (s,Y,x\boldsymbol{P}) \end{aligned}$$

est bijective. On voit que $A^{\boldsymbol{\mathcal{V}}}$ est à support dans la clôture de $\boldsymbol{\mathcal{V}}_{\boldsymbol{\Sigma}_r}$ et que sa restriction à $\boldsymbol{\mathcal{V}}_{\boldsymbol{\Sigma}_r}$ s'identifie à $\mathcal{E}^{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}}[\dim(\boldsymbol{\mathcal{Y}})]$ par la bijection ci-dessus. Cela entraîne l'assertion (1).

Pour $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Par}(\boldsymbol{M})$, notons $\pi_P : \boldsymbol{U_P} \to \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}_q})$ la projection sur un point et $K_P = \pi_{P!}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$. On identifie $K_P$ à un complexe constant sur n'importe quelle base. On va montrer :

(2) pour toute variété $\boldsymbol{S}$ définie sur $\overline{\mathbb{F}_q}$, tout $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Par}(\boldsymbol{M})$ et tout $A \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{m})$, il existe un isomorphisme canonique

$$\mathcal{F} \circ \mathrm{ind}_P^G(A) \xrightarrow{\sim} K_P \otimes (\mathrm{ind}_P^G \circ \mathcal{F}(A)[\dim(\boldsymbol{g}) - \dim(\boldsymbol{m})]\,.$$

La variété $\boldsymbol{S}$ ne jouant guère de rôle, on suppose $\boldsymbol{S}$ réduite à un point. Soient donc $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Par}(\boldsymbol{M})$ et $A \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{m})$. La description suivante de $\mathcal{F} \circ \mathrm{ind}_P^G(A)$ résulte des définitions. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& & \boldsymbol{\mathcal{W}}' = \big\{(Y,Z,x) \in \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{G}\,;\, x^{-1}Yx \in \boldsymbol{p}\big\} \arrow[dll, "\delta'"'] \arrow[d, "\pi'"] & \\
\boldsymbol{m} & & \boldsymbol{\mathcal{V}}' = \big\{(Y,Z,x\boldsymbol{P}) \in \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{G}/\boldsymbol{P}\,;\, x^{-1}Yx \in \boldsymbol{p}\big\} \arrow[dl, "p_2^{\boldsymbol{\mathcal{V}}'}"'] \arrow[dr, "p_{12}^{\boldsymbol{\mathcal{V}}'}"] & \\
& \boldsymbol{g} & & \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{g}
\end{tikzcd}$$

où $\pi'$ est la projection naturelle et $\delta'(Y,Z,x) = \delta_m(x^{-1}Yx)$. Il existe un unique $A^{\boldsymbol{\mathcal{V}}'} \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{V}}')$ tel que

$$\pi'^*(A^{\boldsymbol{\mathcal{V}}'})[\dim(\boldsymbol{p})] = \delta'^*(A)[2\dim(\boldsymbol{g}) + \dim(\boldsymbol{u_P})]\,.$$

On a alors :

(3)
$$\mathcal{F} \circ \mathrm{ind}_P^G(A) = p_{2!}^{\boldsymbol{\mathcal{V}}'}\big(A^{\boldsymbol{\mathcal{V}}'} \otimes p_{12}^{\boldsymbol{\mathcal{V}}',*}(\mathcal{S}_\psi^{\boldsymbol{g}})\big)\,.$$

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{g} & \boldsymbol{\mathcal{X}} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{u_P} \times \boldsymbol{g} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[dl, "p_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}}}"'] \arrow[d, "p_{13}^{\boldsymbol{\mathcal{X}}}"] & \boldsymbol{\mathcal{W}}' \arrow[l, "\theta'"'] \arrow[r, "\pi'"] \arrow[dd, "p_{23}^{\boldsymbol{\mathcal{W}}'}"] & \boldsymbol{\mathcal{V}}' \arrow[dr, "p_2^{\boldsymbol{\mathcal{V}}'}"] \arrow[dd, "p_{23}^{\boldsymbol{\mathcal{V}}'}"] & \\
\boldsymbol{m} & \boldsymbol{\mathcal{Z}} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{g} \arrow[l, "p_1^{\boldsymbol{\mathcal{Z}}}"] \arrow[d, "p_2^{\boldsymbol{\mathcal{Z}}}"] & & & \boldsymbol{g} \\
& \boldsymbol{g} & \boldsymbol{\mathcal{W}}'' = \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{G} \arrow[l, "\theta''"'] \arrow[r, "\pi''"] & \boldsymbol{\mathcal{V}}'' = \boldsymbol{g} \times \boldsymbol{G}/\boldsymbol{P} \arrow[ur, "p_1^{\boldsymbol{\mathcal{V}}''}"'] &
\end{tikzcd}$$

où $\pi''$ est la projection naturelle et

$$\begin{aligned}
\sigma(Y,N,Z) &= (Y+N, Z),\\
\theta'(Y,Z,x) &= (\delta_m(x^{-1}Yx), \delta_u(x^{-1}Yx), x^{-1}Zx)\,,\\
\theta''(Z,x) &= x^{-1}Zx\,.
\end{aligned}$$

Définissons des complexes $B$ sur $\boldsymbol{\mathcal{V}}''$ et $C$ sur $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ par

$$B = p_{23!}^{\boldsymbol{\mathcal{V}}'}(A^{\boldsymbol{\mathcal{V}}'} \otimes p_{12}^{\boldsymbol{\mathcal{V}}',*}(\mathcal{S}_\psi^{\boldsymbol{g}})),$$
$$C = p_1^{\boldsymbol{\mathcal{X}},*}(A)[\dim(\boldsymbol{g}) + \dim(\boldsymbol{u_p})] \otimes \sigma^*(\mathcal{S}_\psi^{\boldsymbol{g}}).$$

On a les égalités :

$$\mathcal{F} \circ \mathrm{ind}_P^G(A) = p_{1!}^{\boldsymbol{\mathcal{V}}''}(B), \tag{4}$$

$$\pi''^*(B)[\dim(\boldsymbol{p})] = \theta''^* \circ p_{2!}^{\boldsymbol{\mathcal{Z}}} \circ p_{13!}^{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(C)[\dim(\boldsymbol{g})]. \tag{5}$$

La première résulte de (3), la seconde des égalités :

$$\pi''^*(B)[\dim(\boldsymbol{p})] = p_{23!}^{\boldsymbol{\mathcal{W}}'}\left(\delta'^*(A)[2\dim(\boldsymbol{g}) + \dim(\boldsymbol{u_P})] \otimes p_{12}^{\boldsymbol{\mathcal{W}}',*}(\mathcal{S}_\psi^{\boldsymbol{g}})\right),$$

$$\delta'^*(A)[2\dim(\boldsymbol{g}) + \dim(\boldsymbol{u_P})] \otimes p_{12}^{\boldsymbol{\mathcal{W}}',*}(\mathcal{S}_\psi^{\boldsymbol{g}}) = \theta'^*(C)[\dim(g)].$$

Montrons que

(6) $p_{2!}^{\boldsymbol{\mathcal{Z}}} \circ p_{13!}^{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(C)$ est à support dans $\boldsymbol{p}$; sa restriction à $\boldsymbol{p}$ est isomorphe à $K_P \otimes (\delta_m^* \circ \mathcal{F}(A)[3\dim(\boldsymbol{u_P})])$.

On a l'égalité

$$p_{13!}^{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(C) = p_1^{\boldsymbol{\mathcal{Z}},*}(A)[\dim(\boldsymbol{g})] \otimes p_{13!}^{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \circ r^*(\mathcal{S}_\psi^{\boldsymbol{g}})[\dim(\boldsymbol{u_P})].$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\mathcal{Z}} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{g} \arrow[d, "p_2^{\boldsymbol{\mathcal{Z}}}"] & \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p} \arrow[l] \arrow[r, "\check{\delta}"] \arrow[d, "p_2^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{p}}"] & \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{m} \arrow[d, "p_2^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}}"] \\
\boldsymbol{g} & \boldsymbol{p} \arrow[l] \arrow[r, "\delta_m"] & \boldsymbol{m}
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales de gauche sont les injections naturelles et

$$\check{\delta}(Y, Z) = (Y, \delta_m(Z)).$$

D'après [Spr], Lemme 3.5, $p_{13!}^{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \circ \sigma^*(\mathcal{S}_\psi^{\boldsymbol{g}})$ est à support dans $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$. et sa restriction à $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$ est isomorphe à $K_P \otimes \check{\delta}^*(\mathcal{S}_\psi^{\boldsymbol{m}})$. Donc $p_{13!}^{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(C)$ est à support dans $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$ et sa restriction à $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$ est isomorphe à

$$K_P \otimes \check{\delta}^*(p_1^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m},*}(A)[\dim(\boldsymbol{m})] \otimes \mathcal{S}_\psi^{\boldsymbol{m}})[3\dim(\boldsymbol{u_P})].$$

Puis $p_{12!}^{\boldsymbol{\mathcal{Z}}} \circ p_{13!}^{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$ est à support dans $\boldsymbol{p}$. Sa restriction à $\boldsymbol{p}$ est isomorphe à

$$K_P \otimes \delta_m^* \circ p_{2!}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}}(p_1^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m},*})(A)[\dim(\boldsymbol{m})] \otimes \mathcal{S}_\psi^{\boldsymbol{m}})[3\dim(\boldsymbol{u_P})],$$

*i.e.* à

$$K_P \otimes \delta_m^* \circ \mathcal{F}(A)[3\dim(\boldsymbol{u_P})].$$

Cela démontre (6).

Remarquons que $\boldsymbol{\mathcal{W}} = \theta''^{-1}(\boldsymbol{p})$ et que, sur $\boldsymbol{\mathcal{W}}$, on a l'égalité $\delta_m \circ \theta'' = \delta$. Il résulte alors de (5) et (6) que $\pi''^*(B)[\dim(\boldsymbol{p})]$ est à support dans $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ et que sa restriction à $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ est isomorphe à

$$K_P \otimes \delta^* \circ \mathcal{F}(A))[\dim(\boldsymbol{g}) + 3\dim(\boldsymbol{u_P})].$$

Donc $B$ est supporté par $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ et sa restriction à $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ est isomorphe à

$$K_P \otimes \mathcal{F}(A)^{\boldsymbol{\mathcal{V}}}[2\dim(\boldsymbol{u_P})].$$

Grâce à (4), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \circ \operatorname{ind}_P^G(a) &= K_P \otimes p_{1!}^{\boldsymbol{\mathcal{V}}}(\mathcal{F}(A)^{\boldsymbol{\mathcal{V}}})[2\dim(\boldsymbol{u_P})],\\ &= K_P \otimes \operatorname{ind}_P^G \circ \mathcal{F}(A)[2\dim(\boldsymbol{u_P})].\end{aligned}$$

Cela démontre (2).

Si $(V, q_V)$ est unitaire, $\boldsymbol{T}$ est un sous-tore maximal de $\boldsymbol{G}$ et, comme on l'a dit, la proposition est un théorème de Kazhdan. On suppose désormais $(V, q_V)$ symplectique ou orthogonal. En fait, la suite de la démonstration s'adapterait aisément au cas unitaire.

Posons

$$\boldsymbol{\Sigma}(A) = \left\{(Z, Y_0 + Z); Z \in \boldsymbol{t}_r, Y_0 \in \boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}({}^oX)\right\} \subset \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{m}_r,$$

où ${}^oX$ est l'élément de $g(V_0)$ fixé en II.4 ou II.5 et $\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}({}^oX)$ son orbite géométrique dans $\boldsymbol{g}(V_0)$. Notons ${}^o\mathcal{E}$ le système local sur $\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}({}^oX)$ défini dans ces paragraphes et $\mathcal{A}$ le système local sur $\boldsymbol{\Sigma}(A)$, image réciproque de ${}^o\mathcal{E}$ par la projection naturelle de $\boldsymbol{\Sigma}(A)$ sur $\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}({}^oX)$. Posons $A = \mathcal{A}^{\#}$. On définit le faisceau $\operatorname{ind}_M^G(A)$ sur $\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{g}$.

Posons

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}(B) &= \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}({}^oX) \times \boldsymbol{t}_r \subset \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{m}_r,\\ \mathcal{B} &= p_{13}^{\boldsymbol{\Sigma}(B),*}(\mathcal{S}_\psi^{\boldsymbol{t}}) \otimes p_2^{\boldsymbol{\Sigma}(B),*}({}^o\mathcal{E}),\\ B &= \mathcal{B}^{\#}.\end{aligned}$$

On définit le faisceau $\operatorname{ind}_M^G(B)$ sur $\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{g}$.

On note $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(A)$, $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}(A)$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}(A)$, $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}(A)}$, resp. $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}}(B)$, etc. les objets utilisés dans la construction de ces faisceaux. Notons ${}^od$ la dimension de $\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}({}^oX)$. En utilisant le fait que les deux faisceaux ${}^o\mathcal{E}[{}^od]$ et $\mathcal{F}({}^o\mathcal{E}[{}^od])$ sont isomorphes (*cf.* [Lu1], Théorème 5(b)), on voit que

(7) les faisceaux $\mathcal{F}(A)$ et $B$ sont isomorphes.

Démontrons maintenant :

(8) pour tout $\boldsymbol{P} \in \operatorname{Par}(\boldsymbol{M})$, on a des isomorphismes

$$\operatorname{ind}_P^G(A) \simeq \operatorname{ind}_M^G(A), \quad \operatorname{ind}_P^G(B) \simeq \operatorname{ind}_M^G(B);$$

tous ces complexes sont des faisceaux pervers irréductibles.

Pour tout complexe $C$ sur $\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{m}$, resp. $\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{g}$, et tout $Z\in\boldsymbol{t}$, notons $C_Z$ la restriction de $C$ à $\{Z\}\times\boldsymbol{m}$, resp. $\{Z\}\times\boldsymbol{g}$, que l'on identifie à un complexe sur $\boldsymbol{m}$, resp. $\boldsymbol{g}$. On note désormais $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ les variétés définies précédemment relatives à une variété $\boldsymbol{S}$ réduite à un point. Les variétés relatives à une variété $\boldsymbol{S}$ quelconque ne sont autres que $\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{\mathcal{W}}$ et $\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{\mathcal{V}}$.

Fixons $\boldsymbol{P}\in\mathrm{Par}(\boldsymbol{M})$. Montrons d'abord que $\mathrm{ind}_P^G(B)\simeq\mathrm{ind}_M^G(B)$. Le raisonnement est identique à celui de [Lu4], Proposition 4.5 : compte tenu de (1), il suffit de prouver que $\mathrm{ind}_P^G(B)$ vérifie la propriété qui caractérise le prolongement intermédiaire, à savoir : pour tout entier $i>-\dim(\boldsymbol{\mathcal{Y}}(B))$, on a

$$\dim(\operatorname{supp}\mathcal{H}^i(\mathrm{ind}_P^G(B)))<-i.$$

Pour tout entier $i$, posons :

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^i=\big\{(Z,Y)\in\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{g};\,H^i((p_{12}^{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\mathcal{V}}})^{-1}(Z,Y),\,B^{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\mathcal{V}}})\neq\{0\}\big\}.$$

On doit montrer que pour tout $i>-\dim(\boldsymbol{\mathcal{Y}}(B))$, $\dim(\boldsymbol{\mathcal{X}}^i)<-i$. Pour tout $Z\in\boldsymbol{t}$, posons

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^i(Z)=\big\{Y\in\boldsymbol{g};\,H^i((p_1^{\boldsymbol{\mathcal{V}}})^{-1}(Y),\ \ B_Z[-\dim(\boldsymbol{t})]^{\boldsymbol{\mathcal{V}}})\neq\{0\}\big\}.$$

D'après la preuve de la proposition 4.5 de [Lu4], pour tout $Z\in\boldsymbol{t}$ et tout $i>-\dim(\boldsymbol{g})+\dim(\boldsymbol{g}(V_0))-{}^o\!d$, on a $\dim(\boldsymbol{\mathcal{X}}^i(Z))<-i$. D'autre part, pour $(Z,Y)\in\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{g}$, on a un isomorphisme

$$B^{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\mathcal{V}}}|_{(p_{12}^{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{\mathcal{V}}})^{-1}(Z,Y)}\simeq B_Z[-\dim(\boldsymbol{t})]^{\boldsymbol{\mathcal{V}}}|_{(p_1^{\boldsymbol{\mathcal{V}}})^{-1}(Y)}[\dim(\boldsymbol{t})].$$

On en déduit que pour tout entier $i$ et tout $Z\in\boldsymbol{t}$, la fibre de $\boldsymbol{\mathcal{X}}^i$ au-dessus de $Z$ s'identifie à $\boldsymbol{\mathcal{X}}^{i+\dim(\boldsymbol{t})}(Z)$. Pour $i>-\dim(\boldsymbol{g})+\dim(\boldsymbol{g}(V_0))-{}^o\!d-\dim(\boldsymbol{t})$, cette fibre est donc de dimension $<-i-\dim(\boldsymbol{t})$ et $\boldsymbol{\mathcal{X}}^i$ lui-même est de dimension $<-i$. Comme $\dim(\boldsymbol{\mathcal{Y}}(B))=\dim(\boldsymbol{g})-\dim(\boldsymbol{g}(V_0))+{}^o\!d+\dim(\boldsymbol{t})$, c'est l'assertion que l'on voulait démontrer. D'où l'isomorphisme $\mathrm{ind}_P^G(B)\simeq\mathrm{ind}_M^G(B)$.

Par définition, $\mathrm{ind}_M^G(B)$ est un faisceau pervers semi-simple. Son algèbre d'endomorphismes est la même que celle de $p_{12*}^{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}(B)}(\widetilde{\mathcal{B}})$. La dimension de celle-ci est le nombre de $w\in W_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T})$ tels que $w^*(\widetilde{\mathcal{B}})\simeq\widetilde{\mathcal{B}}$, où $W_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T})$ agit sur $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}(B)$ par $w(Z,Y,x\boldsymbol{M})=(Z,Y,xw^{-1}\boldsymbol{M})$. On voit que seul $w=1$ fixe $\widetilde{\mathcal{B}}$. Donc $\mathrm{ind}_M^G(B)$ est irréductible.

Il résulte de (2), (7), de l'isomorphisme

$$K_P\simeq\overline{\mathbb{Q}}_\ell[-2\dim(\boldsymbol{u_P})], \tag{9}$$

et de ce que l'on vient de démontrer, que $\mathrm{ind}_P^G(A)$ est un faisceau pervers irréductible. Mais alors l'isomorphisme

$$\mathrm{ind}_P^G(A)|_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}(A)}\simeq\mathrm{ind}_M^G(A)|_{\boldsymbol{\mathcal{Y}}(A)}$$

défini en (1) se prolonge automatiquement à tout $\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{g}$. Cela achève la preuve de (8).

Notons $\mathcal{C}$ le système local sur $\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}({}^oX)\times\boldsymbol{t}$ :

$$\mathcal{C}=p_1^{\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}({}^oX)\times\boldsymbol{t},*}({}^o\mathcal{E}),$$

et $C = \mathcal{C}^{\#} \in \mathcal{M}(\boldsymbol{m})$. On a d'ailleurs $C = B_0[-\dim(\boldsymbol{t})]$. On construit le faisceau $\mathrm{ind}_M^G(C)$ et on note $\widetilde{\mathcal{W}}(C), \widetilde{\mathcal{V}}(C), \mathcal{Y}(C), \widetilde{\mathcal{C}}$ les objets utilisés dans sa construction.

Le système local ${}^o\mathcal{E}$ est muni d'une action de Frobenius. On en déduit de telles actions sur les faisceaux $A, B, C$, $\mathrm{ind}_M^G(A)$, $\mathcal{F} \circ \mathrm{ind}_M^G(A)$, etc. que l'on note toutes $\phi$. On a :

(10)le complexe $\mathrm{ind}_M^G(A)_0$ est à support dans $\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}$ et il existe un isomorphisme

$$\mathrm{ind}_M^G(A)_0|_{\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}} \simeq \mathrm{ind}_M^G(C)|_{\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}}$$

qui entrelace les actions de Frobenius.

Notons $\boldsymbol{S}$ la variété affine qui paramétrise les classes de conjugaison semi-simples dans $\boldsymbol{g}$ et $\zeta : \boldsymbol{g} \to \boldsymbol{S}$ l'application naturelle. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{W}}(A) \arrow[rr, "\xi_1"] \arrow[d] & & \widetilde{\mathcal{W}}(C) \arrow[d] \\
\widetilde{\mathcal{V}}(A) \arrow[rr, "\xi_2"] \arrow[d] & & \widetilde{\mathcal{V}}(C) \arrow[d] \\
\mathcal{Y}(A) \arrow[rr, "\xi_3"] \arrow[d] & & \mathcal{Y}(C) \arrow[d] \\
\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{g} \arrow[dr, "\zeta_1"] & & \boldsymbol{g} \arrow[dl, "\zeta_2"'] \\
& \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{g} &
\end{tikzcd}$$

où les applications $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ sont les oublis de la première variable dans $\boldsymbol{t}$, $\zeta_1(Z,Y)) = (\zeta(Z), Y)$ et $\zeta_2(Y) = (\zeta(Y), Y)$. Posons

$$\mathcal{Y} = \left\{(s,Y) \in \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{g}\,;\, s = \zeta(Y) \ \text{ et } \ \exists\, x \in \boldsymbol{G},\, x^{-1}Yx \in \mathcal{O}^{\mathrm{alg}}({}^oX) \times \boldsymbol{t}_r\right\}.$$

Notons $\overline{\mathcal{Y}}$ sa clôture dans $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{g}$. Il est clair que $\zeta_{1!} \circ \mathrm{ind}_M^G(A)$ et $\zeta_{2!} \circ \mathrm{ind}_M^G(C)$ sont à support dans $\overline{\mathcal{Y}}$. On vérifie que $\xi_1$ et $\xi_2$ sont des isomorphismes et que $\xi_3$ est un revêtement de groupe $W_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T})$. Les systèmes locaux $\widetilde{\mathcal{A}}$ sur $\widetilde{\mathcal{V}}(A)$ et $\widetilde{\mathcal{C}}$ sur $\widetilde{\mathcal{V}}(C)$ s'identifient par l'isomorphisme $\xi_2$. On en déduit un isomorphisme entre les restrictions à $\mathcal{Y}$ des complexes $\zeta_1! \circ \mathrm{ind}_M^G(A)$ et $\zeta_{2!} \circ \mathrm{ind}_M^G(C)$. Soit $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Par}(\boldsymbol{M})$. D'après (8) et [Lu4], Proposition 4.5, on a des isomorphismes

$$\zeta_{1!} \circ \mathrm{ind}_M^G(A) \simeq \zeta_{1!} \circ \mathrm{ind}_P^G(A)$$
$$\zeta_{2!} \circ \mathrm{ind}_M^G(C) \simeq \zeta_{2!} \circ \mathrm{ind}_P^G(C).$$

D'où un isomorphisme entre les restrictions à $\mathcal{Y}$ des complexes $\zeta_{1!} \circ \mathrm{ind}_P^G(A)$ et $\zeta_{2!} \circ \mathrm{ind}_P^G(A)$. Grâce à [Lu4] 6.6.1, cet isomorphisme s'étend en un isomorphisme au dessus de $\overline{\mathcal{Y}}$. Donc notre isomorphisme s'étend en un isomorphisme

$$\gamma : \zeta_{1!} \circ \mathrm{ind}_M^G(A) \xrightarrow{\sim} \zeta_{2!} \circ \mathrm{ind}_M^G(C).$$

Comme $\zeta_2$ est une immersion fermée, il existe un automorphisme $\tau$ de $\mathrm{ind}_M^G(C)$ tel que

$$\gamma \circ \phi = \tau \circ \phi \circ \gamma,$$

où l'on note encore $\tau$ l'automorphisme de $\zeta_{2!} \circ \mathrm{ind}_M^G(C)$ déduit du précédent. Mais il résulte de la construction que $\gamma \circ \phi = \phi \circ \gamma$ au-dessus de $\mathcal{Y}$. Donc $\tau = 1$ et $\gamma$ entrelace les Frobenius.

La restriction de $\zeta_{1!} \circ \mathrm{ind}_M^G(A)$ à $(\{0\} \times \boldsymbol{g}) \cap \overline{\mathcal{Y}}$ s'identifie à $\mathrm{ind}_M^G(A)_0|_{\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}}$ et celle de $\zeta_{2!} \circ \mathrm{ind}_M^G(C)$ s'identifie à $\mathrm{ind}_M^G(C)|_{\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}}$. D'où l'assertion (10).

On a

(11) il existe un isomorphisme $\mathrm{ind}_M^G(B)|_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}} \xrightarrow{\sim} p_2^{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}},*}(\mathrm{ind}_M^G(C)|_{\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}})[\dim(\boldsymbol{t})]$

qui entrelace les actions de Frobenius.

En effet, la restriction du faisceau $\mathcal{S}_\psi^{\boldsymbol{t}}$ à $\boldsymbol{t} \times \{0\}$ est triviale. On en déduit un isomorphisme

$$B|_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{m}_{\mathrm{nil}}} \simeq p_2^{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{m},*}\big(B|_{\{0\}\times\boldsymbol{m}_{\mathrm{nil}}}\big) \simeq p_2^{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{m},*}\big(C|_{\boldsymbol{m}_{\mathrm{nil}}}\big)[\dim(\boldsymbol{t})].$$

Soit $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Par}(\boldsymbol{M})$. On déduit de cet isomorphisme un isomorphisme

$$\mathrm{ind}_P^G(B)_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}} \simeq p_2^{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}},*}\big(\mathrm{ind}_P^G(C)|_{\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}}\big)[\dim(\boldsymbol{t})].$$

Notons $\gamma_P$ le composé des isomorphismes

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}_M^G(B)|_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}} \simeq \mathrm{ind}_P^G(B)|_{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}} &\simeq p_2^{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}},*}\big(\mathrm{ind}_P^G(C)|_{\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}}\big)[\dim(\boldsymbol{t})]\\ &\simeq p_2^{\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}},*}\big(\mathrm{ind}_M^G(C)|_{\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}}\big)[\dim(\boldsymbol{t})].\end{aligned}$$

En fait, $\gamma_P$ ne dépend pas du choix de $\boldsymbol{P}$. En effet, pour $\boldsymbol{P}' \in \mathrm{Par}(\boldsymbol{M})$, on a $\gamma_P = \gamma_{P'}$ si et seulement si les restrictions de $\gamma_P$ et $\gamma_{P'}$ au-dessus de $\{0\} \times \boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}$ sont égales. Or ces restrictions sont toutes deux égales à la restriction à $\{0\} \times \boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}$ de l'isomorphisme évident

$$\mathrm{ind}_M^G(B)_0 \simeq \mathrm{ind}_M^G(C)[\dim(\boldsymbol{t})].$$

D'où l'assertion. Mais il résulte des constructions que l'on a l'égalité

$$\phi \circ \gamma_P = \gamma_{\phi(P)} \circ \phi.$$

D'où (11).

Pour toute variété $\boldsymbol{S}$ définie sur $\mathbb{F}_q$ et tout complexe $E \in D_c^b(\boldsymbol{S})$ muni d'une action de Frobenius $\phi$, notons $e[E]$ la fonction sur $S(= \boldsymbol{S}(\mathbb{F}_q))$ définie par

$$e[E](s) = \mathrm{trace}(\phi | E_{|\{s\}})$$

pour tout $s \in S$. On a :

(12) pour tout $Y \in g_{\mathrm{nil}}$, $e[\mathrm{ind}_M^G(C)](Y) = (-1)^{{}^{o}\!d+\dim(\boldsymbol{t})} Q_T(Y)$.

*Via* l'application $E^{G(V_0)}$ définie en I.4, identifions ${}^o\mathcal{E}$ à un système local ${}^o\mathcal{E}^{G(V_0)}$ défini sur une sous-variété de $\boldsymbol{G}(V_0)_{un}$, définissons un système local $\mathcal{C}^M$ sur une sous-variété de $\boldsymbol{M}$ par $\mathcal{C}^M = p_1^{\boldsymbol{G}(V_0)\times\boldsymbol{T},*}({}^o\mathcal{E}^{G(V_0)})$ et posons $C^M = \mathcal{C}^M[{}^od + \dim(\boldsymbol{t})]$. On peut définir le faisceau $\mathrm{ind}_M^G(C^M)$ sur $\boldsymbol{G}$ et sa fonction caractéristique $e[\mathrm{ind}_M^G(C^M)]$ sur $G$. D'après notre définition de $Q_T$ et le théorème 1.14 de [Lu2], on a l'égalité

$$e[\mathrm{ind}_M^G(C^M)](E^G(Y)) = (-1)^{{}^od+\dim(\boldsymbol{t})}Q_T(Y)$$

pour tout $Y \in g_{\mathrm{nil}}$. D'autre part, il existe des ouverts de Zariski $\boldsymbol{g}'$ de $\boldsymbol{g}$, resp. $\boldsymbol{G}'$ de $\boldsymbol{G}$, invariants par conjugaison par $\boldsymbol{G}$, contenant $\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}$, resp. $\boldsymbol{G}_{un}$, de sorte que $E^G$ définisse une bijection $\boldsymbol{G}$-équivariante de $\boldsymbol{g}'$ sur $\boldsymbol{G}'$. Il résulte des définitions que

$$e[\mathrm{ind}_M^G(C)](Y) = e[\mathrm{ind}_M^G(C^M)](E^G(Y))$$

pour tout $Y \in g'$. L'égalité (12) résulte des deux égalités ci-dessus.

On a :

(13) pour tout $Y \in g$, $e[\mathcal{F} \circ \mathrm{ind}_M^G(A)](0, Y) = (-1)^{{}^od+\dim(\boldsymbol{t})+\dim(\boldsymbol{g})}q^{\dim(\boldsymbol{g})/2}\widehat{Q}_T(Y)$.

Pour tout $Z \in t$, posons

$$e_Z = e[\mathrm{ind}_M^G(A)_Z].$$

D'après [Lau], Théorème 1.2.1.2, on a l'égalité

$$e[\mathcal{F} \circ \mathrm{ind}_M^G(A)](Z, Y) = (-1)^{\dim(\boldsymbol{g})}q^{\dim(\boldsymbol{g})/2}\widehat{e}_Z(Y) \tag{14}$$

pour tous $Z \in t$, $Y \in g$. En appliquant cette égalité à $Z = 0$ et en utilisant (10) et (12), on obtient (13).

Rappelons que l'on a fixé un point $X \in t_r$. On a

(15)

pour tout $Y \in g$, $e[\mathcal{F} \circ \mathrm{ind}_M^G(A)](X, Y) = (-1)^{{}^od+\dim(\boldsymbol{t})+\dim(\boldsymbol{g})}q^{\dim(\boldsymbol{g})/2}\widehat{T\varphi[X]}(Y)$.

On a un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}/(\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{G}(V_0)}({}^oX) \times \boldsymbol{T}) &\xrightarrow{\sim} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}(A) \cap (\{X\} \times \boldsymbol{g}) \\ x &\longmapsto (X, x({}^oX + X)x^{-1}, x\boldsymbol{M}) \end{aligned}$$

et la restriction de $\widetilde{\mathcal{A}}$ à $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}(A) \cap (\{X\} \times \boldsymbol{g})$ s'identifie au système local quotient de

$$\boldsymbol{G}/(\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{G}(V_0)}({}^oX)^0 \times \boldsymbol{T}) \times \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

par l'action de $\overline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{G}(V_0)}({}^oX)$ définie en II.4 ou II.5. En tenant compte des décalages, on en déduit l'égalité

$$e_X = (-1)^{{}^od+\dim(\boldsymbol{t})}{}^T\varphi[X].$$

Alors (15) se déduit de (14) pour $Z = X$.

Démontrons maintenant la proposition. D'après (2), (7), (8) et (9), il existe un isomorphisme

$$\gamma : \mathcal{F} \circ \mathrm{ind}_M^G(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_M^G(B).$$

Puisque ces faisceaux sont irréductibles, il existe $c \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ tel que

$$\gamma \circ \phi = c\phi \circ \gamma.$$

On a alors l'égalité :

$$e[\mathcal{F} \circ \mathrm{ind}_M^G(A)](Z, Y) = ce[\mathrm{ind}_M^G(B)](Z, Y)$$

pour tous $Z \in t$, $Y \in g$. D'après (11) et (12), on a :

$$e[\mathrm{ind}_M^G(B)](Z, Y) = (-1)^{{}^\circ d} Q_T(Y)$$

pour tout $Y \in g_{\mathrm{nil}}$. En comparant avec les égalités (13) et (15), on en déduit les égalités :

$$(16) \qquad \begin{aligned} &(-1)^{\dim(\boldsymbol{t})+\dim(\boldsymbol{g})} q^{\dim(\boldsymbol{g})/2} \widehat{Q}_T(Y) = cQ_T(Y), \\ &(-1)^{\dim(\boldsymbol{t})+\dim(\boldsymbol{g})} q^{\dim(\boldsymbol{g})/2} \widehat{T_\varphi[X]}(Y) = cQ_T(Y), \end{aligned}$$

pour tout $Y \in g_{\mathrm{nil}}$. D'où l'égalité de l'énoncé. □

**II.9.** Soit $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}$. D'après l'égalité (16) du paragraphe précédent, les fonctions $\widehat{Q}_T|_{g_{\mathrm{nil}}}$ et $Q_T$ sont proportionnelles. On note $\gamma(\boldsymbol{T})$ la constante telle que

$$\widehat{Q}_T|_{g_{\mathrm{nil}}} = q^{-\dim(\boldsymbol{T})/2} \gamma(\boldsymbol{T}) Q_T.$$

Elle ne dépend que de la classe de conjugaison par $G$ de $\boldsymbol{T}$. Si $\Lambda_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{T}) = \theta \in \Theta(V)$, on posera $\gamma(\theta) = \gamma(\boldsymbol{T})$.

Soient $k \in \mathcal{I}_0(V)$ tel que $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}_k$ et $w \in W(k)$ tel que $\boldsymbol{T}$ soit paramétrisé par la classe de $\phi$-conjugaison de $w$. On pose $\gamma_{\mathrm{norm}}(\boldsymbol{T}) = \mathrm{sgn}(w)\gamma(\boldsymbol{T})$. Les propriétés et définitions ci-dessus valent pour un groupe linéaire $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{GL}(n)$. Dans ce cas, en utilisant [Lu5], proposition 7.2 et égalité 6.15(a), on voit que $\gamma_{\mathrm{norm}}(\boldsymbol{T}) = 1$. En utilisant l'égalité II.7 (2), on montre alors que pour notre groupe $\boldsymbol{G}$, $\gamma_{\mathrm{norm}}(\boldsymbol{T})$ ne dépend que de la partie « anisotrope » de $\boldsymbol{T}$. Précisément, soit $\theta \in \Theta(V)$, notons $\theta = (k, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$ ou $(k, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1, \varepsilon)$. Soit $(V', q_{V'})$ un espace du même type de $(V, q_V)$ tel que $q_{V'}$ et $q_V$ aient même noyau anisotrope et $\theta' = (k, \boldsymbol{\mu}^1) \in \Theta(V')$. Alors $\gamma_{\mathrm{norm}}(\theta) = \gamma_{norm}(\theta')$, avec la convention $\gamma_{\mathrm{norm}}(\theta') = 1$ si $V' = \{0\}$.

**II.10.** Les définitions et résultats des paragraphes précédents s'adaptent au cas où $\boldsymbol{G}$ est produit direct de deux groupes $\boldsymbol{G}', \boldsymbol{G}''$ chacun du type considéré précédemment. Revenons au cas considéré en I.2 d'un couple $(V, q_V)$ définie sur $F$. Soit $L$ un réseau presque autodual de $V$. On appliquera les définitions et résultats précédents au groupe $\boldsymbol{G}(L)$ défini en I.3.

Supposons $(V, q_V)$ orthogonal, $\mathrm{q}_V$ déployée et $d$ divisible par 4. Alors $(\ell', q_{\ell'})$ et $(\ell'', q_{\ell''})$ sont orthogonaux pairs et $q_{\ell'}$ et $q_{\ell''}$ sont déployées. Supposons de plus $d(\ell')$ et $d(\ell'')$ divisibles par 4. On doit choisir des décompositions en sous-espaces lagrangiens

$$\ell' = \ell'^{+} \oplus \widehat{\ell}'^{+}, \quad \ell'' = \ell''^{+} \oplus \widehat{\ell}''^{+}.$$

Pour cela, fixons $x \in G$ tel que

$$L = (L \cap x(V^+)) \oplus (L \cap x(\widehat{V}^+)).$$

Un tel élément existe et l'on a aussi

$$\widetilde{L} = (\widetilde{L} \cap x(V^+)) \oplus (\widetilde{L} \cap x(\widehat{V}^+)).$$

On définit alors $\ell'^+$, resp. $\widehat{\ell'}^+$, $\ell''^+$, $\widehat{\ell''}^+$ comme les images dans $\ell'$, resp. $\ell'$, $\ell''$, $\ell''$, de $L \cap x(V^+)$, resp. $L \cap x(\widehat{V}^+)$, $\widetilde{L} \cap x(V^+)$, $\widetilde{L} \cap x(\widehat{V}^+)$. La classe de conjugaison par $G(L)$ du quadruplet $(\ell'^+, \widehat{\ell'}^+, \ell''^+, \widehat{\ell''}^+)$ ne dépend pas de l'élément $x$ choisi.

# CHAPITRE III

## UNE BASE DE $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$

**III.1.** On revient comme en I.2 à un couple $(V, q_V)$ défini sur $F$. On suppose dans tout le chapitre III que $V$ possède un réseau autodual.

On note $\mathcal{I}_0(V)$ l'ensemble des couples $(k', k'')$ d'entiers $\geqslant 0$ tels que

- dans le cas symplectique, $k'(k'+1) + k''(k''+1) \leqslant d$ ;
- dans le cas orthogonal impair, $k'$ est impair, $k''$ est pair et $k'^2 + k''^2 \leqslant d$ ;
- dans le cas orthogonal pair, $k'$ et $k''$ sont pairs et $k'^2 + k''^2 \leqslant d$ ;
- dans le cas unitaire, $k' = k'' = 0$.

On note $\Theta_I(V)$ l'ensemble des quintuplets $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')$ où $(k', k'') \in \mathcal{I}_0(V)$ et $\boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}''$ sont des partitions vérifiant les conditions :

- dans le cas symplectique, $k'(k'+1) + k''(k''+1) + 2(S(\boldsymbol{\mu}^0) + S(\boldsymbol{\mu}') + S(\boldsymbol{\mu}'')) = d$ ;
- dans le cas orthogonal, $k'^2 + k''^2 + 2(S(\boldsymbol{\mu}^0) + S(\boldsymbol{\mu}') + S(\boldsymbol{\mu}'')) = d$ ; si $k'' = 0$, $c(\boldsymbol{\mu}'')$ est pair ; si $k' = 0$, $\nu^{c(\boldsymbol{\mu}')} = \eta'$ (*cf.* I.3 pour la définition de $\eta'$) ;
- dans le cas unitaire, $2S(\boldsymbol{\mu}^0) + S(\boldsymbol{\mu}') + S(\boldsymbol{\mu}'') = d$, $c(\boldsymbol{\mu}'')$ est pair et tous les termes non nuls de $\boldsymbol{\mu}'$ et $\boldsymbol{\mu}''$ sont impairs.

On dit que $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')$ est exceptionnel si

- $(V, q_V)$ est orthogonal, $q_V$ est déployée et $d$ est divisible par 4 ;
- $k' = k'' = 0$, $\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu}'' = \varnothing$ et tous les termes de $\boldsymbol{\mu}^0$ sont pairs.

On note $\Theta(V)$ l'ensemble dont les éléments sont :

- les éléments non exceptionnels de $\Theta_I(V)$ ;
- les 6-uplets $(0, 0, \boldsymbol{\mu}^0, \varnothing, \varnothing, \varepsilon)$, où $(0, 0, \boldsymbol{\mu}^0, \varnothing, \varnothing)$ est un élément exceptionnel de $\Theta_I(V)$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

Soit $\theta = (k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')$ ou $\theta = (k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'', \varepsilon)$ un élément de $\Theta(V)$. On lui associe :

- une décomposition orthogonale
$$V = V_0 \oplus V_1 ;$$
- un réseau presque autodual $R \subset V_0$ ;
- un sous-tore maximal $\boldsymbol{T}$ de $\boldsymbol{G}(V_1)$, défini sur $F$ et non ramifié ;

de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

• $\Lambda_T^{\boldsymbol{G}(V_1)}(\boldsymbol{T}) = (\boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')$ ou $(\boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'', \varepsilon_1) \in \Theta_{\max}(V_1)$ ; si de plus $\theta$ est exceptionnel, $\varepsilon_1 = \varepsilon$ ;

• dans le cas symplectique, $d(r') = k'(k'+1)$, $d(r'') = k''(k''+1)$ ;

• dans le cas orthogonal, $d(r') = k'^2$, $d(r'') = k''^2$ ;

• dans le cas unitaire $V_0 = R = \{0\}$.

De telles données sont uniques à conjugaison près par $G$.

**III.2.** Soit $\theta \in \Theta(V)$. Fixons des objets $V_0, V_1, R, \boldsymbol{T}$ comme ci-dessus et un élément $X_T$ de $t$, entier et de réduction régulière (*cf.* I.8).

Notons $K(R)$, $K(R)^1$, resp. $k(R)$, $k(R)^1$, les sous-ensembles de $G(V_0)$, resp. $g(V_0)$ définis en I.3 et introduisons le groupe $\boldsymbol{G}(R)$ et son algèbre de Lie $\boldsymbol{g}(R)$, définis sur $\mathbb{F}_q$. On a les égalités :

$$k(R)/k(R)^1 = g(R) = g(r') \times g(r'').$$

Si $(V, q_V)$ est unitaire, on note ${}^o\!f$ la fonction constante égale à 1 sur $g(R) = \{0\}$. Si $(V, q_V)$ est symplectique ou orthogonal, on a défini en II.4 ou II.5 des fonctions sur $g(r')$, resp. $g(r'')$, que nous noterons ${}^o\!f'$, ${}^o\!f''$. On note ${}^o\!f$ la fonction ${}^o\!f' \otimes {}^o\!f''$ sur $g(R)$. En tout cas, on identifie ${}^o\!f$ à une fonction sur $g(V_0)$ *via* le plongement

$$C(g(R)) = C(k(R)/k(R)^1) \subset C_c^\infty(g(V_0)).$$

Pour $f \in C_c^\infty(g)$ et $x \in G$, posons

$$c(f, x) = \int_{g(V_0)} f(x^{-1}(Y + X_T)x)\, {}^o\!f(Y)\, dY.$$

***Lemme.*** — *Soit $f \in C_c^\infty(g)$. La fonction $c(f, \cdot)$ est invariante à droite par un sous-groupe ouvert de $G$ et invariante à gauche par $T$. L'image de son support dans $T \setminus G$ est compacte.*

*Démonstration.* — Les deux premières assertions sont claires. La troisième l'est si $\boldsymbol{g}(V_0) = \{0\}$. Supposons $\boldsymbol{g}(V_0) \neq \{0\}$, notons $\Gamma$ le support de $c(f, \cdot)$. Montrons d'abord :

(1) l'image de $\Gamma$ dans $(G(V_0) \times T) \setminus G$ est compacte.

Rappelons que tout $X \in g_{\mathrm{ent}}$ se décompose de façon unique en une somme $X = X_s + X_n$ où $X_s$ et $X_n$ commutent, $X_n \in g_{\mathrm{tn}}$ et il existe une infinité d'entiers $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$X_s = X_s^{p^m}.$$

Posons

$$\Gamma_0 = \{X_s ; X \in \mathrm{Supp}(f) \cap g_{\mathrm{ent}}\}.$$

Puisque $\mathrm{Supp}(f)$ est compact, on vérifie que $\Gamma_0$ l'est aussi. Soit $x \in \Gamma$. On a :

$$x^{-1}(\mathrm{Supp}({}^o\!f) + X_T)x \cap \mathrm{Supp}(f) \neq \varnothing.$$

Puisque ${}^{o}f'$ et ${}^{o}f''$ sont à support dans les éléments nilpotents de $\mathrm{g}(r')$ et $\mathrm{g}(r'')$, on a $\mathrm{Supp}({}^{o}f) + X_T \subset g_{\mathrm{ent}}$ et $X_s = X_{T,s}$ pour tout $X \in \mathrm{Supp}({}^{o}f) + X_T$. On en déduit :

(2) $$x^{-1} X_{T,s} x \cap \Gamma_0 \neq \varnothing .$$

Mais puisque $X_T$ est entier de réduction régulière, $X_{T,s}$ l'est aussi. *A fortiori*

$$\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{G}}(X_{T,s}) = \boldsymbol{G}(V_0) \times \boldsymbol{T} .$$

D'après [HCvD], Lemme 25, la relation (2) implique la propriété (1).

Pour démontrer le lemme, il suffit grâce à (1) de prouver que si $C$ est un sous-ensemble compact de $G$, l'ensemble

$$\{y \in G(V_1) ; \exists\, x \in C,\, c(f, yx) \neq 0\}$$

est relativement compact dans $G(V_1)$. D'après l'invariance à droite de $c(f, \cdot)$ par un sous-groupe ouvert, on peut supposer $C$ réduit à un point, puis, quitte à conjuguer $f$, C= $\{1\}$. Cela nous ramène à démontrer le lemme dans le cas $V = V_0$, $V_1 = \{0\}$, ce que l'on suppose désormais.

Fixons un sous-tore $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{G}$, défini et déployé sur $F$, maximal pour ces propriétés, tel que le point fixe de $K(R)$ dans l'immeuble de Bruhat-Tits de $\boldsymbol{G}$ appartienne à l'appartement associé à $\boldsymbol{A}$. Notons

- $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{A})$,
- $\Sigma$ l'ensemble des racines de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{g}$,
- pour tout $\alpha \in \Sigma$, $\boldsymbol{u}_\alpha \subset \boldsymbol{g}$ le sous-espace radiciel associé.

Il existe

- des sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbres $s$ et $s^1$ de $z$ telles que
$$\mathfrak{p}_F s \subset s^1 \subset s ,$$
- pour tout $\alpha \in \Sigma$, des réseaux $v_\alpha$ et $v_\alpha^1$ de $u_\alpha$ tels que
$$\mathfrak{p}_F v_\alpha \subset v_\alpha^1 \subset v_\alpha ,$$

de sorte que

$$k(R) = s \oplus \Big( \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} v_\alpha \Big), \quad k(R)^1 = s^1 \oplus \Big( \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} v_\alpha^1 \Big).$$

Posons $\overline{s} = s/s^1$ et, pour tout $\alpha \in \Sigma$, $\overline{v}_\alpha = v_\alpha / v_\alpha^1$. Notons $\overline{\Sigma} = \{\alpha \in \Sigma ; \overline{v}_\alpha \neq \{0\}\}$. On a l'égalité

$$g(R) = \overline{s} \oplus \Big( \bigoplus_{\alpha \in \overline{\Sigma}} \overline{v}_\alpha \Big).$$

Le tore $\boldsymbol{A}$ a une structure naturelle sur $\mathfrak{o}_F$. Sa fibre spéciale $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathbb{F}_q$ est un sous-tore déployé maximal de $\boldsymbol{G}(R)$ et $\overline{\Sigma}$ est l'ensemble des racines de $\overline{\boldsymbol{A}}$ dans $\boldsymbol{g}(R)$.

Notons $X^*(\boldsymbol{A})$ le groupe des caractères de $\boldsymbol{A}$. L'ensemble $\Sigma$ engendre le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $X^*(\boldsymbol{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. On vérifie que

(3) $$\overline{\Sigma} \text{ engendre } X^*(\boldsymbol{A}) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}.$$

***Remarque***. — Dans le cas orthogonal, cela serait faux si $r'$ ou $r''$ était un espace isotrope de dimension 2. Mais les hypothèses $d(r') = k'^2$, $d(r'') = k''^2$ interdisent une telle situation.

Il résulte de la décomposition de Bruhat-Tits qu'il existe un sous-ensemble compact $C$ de $G$ tel que

$$G = K(R)AC.$$

Fixons un tel $C$. La fonction ${}^\circ f$ est par construction invariante par conjugaison par $K(R)^0$ (*cf.* I.3). On vérifie qu'elle l'est même par $K(R)$. La fonction $c(f,\cdot)$ est donc invariante à gauche par $K(R)$ et il nous suffit de prouver :

(4) l'ensemble des $a \in A$ tels que $c(f,\cdot)$ est non nulle sur $aC$ est compact.

Pour $x \in G$, définissons une fonction $f_x$ sur $g$ par

$$f_x(Y) = \begin{cases} 0, & \text{si } Y \notin k(R), \\ \displaystyle\int_{k(R)^1} f(x^{-1}(Y+Y')x)\,dY', & \text{si } Y \in k(R). \end{cases}$$

Cette fonction appartient à $C(k(R)/k(R)^1)$. Identifions $f_x$ et ${}^\circ f$ à des fonctions sur $g(R)$. On a alors l'égalité

$$c(f,x) = c \sum_{Y \in g(R)} f_x(Y)\, {}^\circ f(Y), \tag{5}$$

où $c$ est un rapport de mesures, donc une constante $> 0$. Fixons un entier $N \geqslant 1$ tel que pour tout $x \in C$, la fonction $f \circ \mathrm{Ad}(x^{-1})$ soit à support dans $\mathfrak{p}_F^{-N} k(R)$ et invariante par $\mathfrak{p}_F^N k(R)$. Soient $a \in A$ et $x \in aC$. Par construction, la fonction $f_x$ est à support dans $p(a)$ et est invariante par $u(a)$, où

$$p(a) = \left[(\mathfrak{p}_F^{-N} ak(R)a^{-1} \cap k(R)) + k(R)^1\right]/k(R)^1,$$
$$u(a) = \left[(\mathfrak{p}_F^{N} ak(R)a^{-1} \cap k(R)) + k(R)^1\right]/k(R)^1.$$

On va montrer :

(6) il existe un sous-ensemble compact $C_A \subset A$ tel que, si $a \in A - C_A$, il existe un sous-groupe parabolique $\boldsymbol{P}$ de $\boldsymbol{G}(R)$, propre et défini sur $\mathbb{F}_q$, tel que

$$p(a) \subset p, \quad u(a) \supset u_P.$$

La fonction ${}^\circ f$ étant cuspidale, il résulte de la formule (5) que $c(f,\cdot)$ est nulle sur $aC$ si $a \in A - C_A$. Cela démontre (4) et le lemme.

Il reste à prouver (6). Pour tout $a \in A$ et tout $\alpha \in \Sigma$, posons $n_\alpha(a) = v_F \circ \alpha(a)$. Pour tout ensemble de racines positives $\Sigma^+ \subset \Sigma$, posons

$$A(\Sigma^+) = \left\{a \in A; \forall\, \alpha \in \Sigma^+, n_\alpha(a) \geqslant 0\right\}.$$

Quand on fait varier $\Sigma^+$, les ensembles $A(\Sigma^+)$ forment un recouvrement fini de $A$. On peut donc fixer $\Sigma^+$ et remplacer dans l'assertion (6) $A$ par $A(\Sigma^+)$. Fixons donc

$\Sigma^+$. L'ensemble $\overline{\Sigma} \cap \Sigma^+$ est un ensemble de racines positives pour $\overline{\Sigma}$. Notons $\overline{\Delta}$ son sous-ensemble de racines simples. On a :

(7) soit $a \in A(\Sigma^+)$; supposons $\sup\{n_\alpha(a); \alpha \in \overline{\Delta}\} \geqslant N+1$; alors la conclusion de (6) est vérifiée.

Soient $a \in A(\Sigma^+)$ et $\beta \in \overline{\Delta}$ tels que $n_\beta(a) \geqslant N+1$. Posons

$$\overline{\Sigma}(\beta) = \{\alpha \in \overline{\Sigma}; \exists \gamma \in \overline{\Sigma} \cap \Sigma^+, \alpha = \beta + \gamma\}.$$

Il existe un sous-groupe parabolique $\boldsymbol{P}$ de $\boldsymbol{G}(R)$, propre et défini sur $\mathbb{F}_q$, tel que

$$p = \overline{s} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \overline{\Sigma} - \overline{\Sigma}(\beta)} \overline{v}_\alpha, \quad u_P = \bigoplus_{\alpha \in \overline{\Sigma}(\beta)} \overline{v}_{-\alpha}.$$

D'autre part

$$a k(R) a^{-1} = s \oplus \Big( \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{p}_F^{n_\alpha(a)} v_\alpha \Big),$$

d'où

$$p(a) = \overline{s} \oplus \Big( \bigoplus_{\alpha \in \overline{\Sigma}; n_\alpha(a) \leqslant N} \overline{v}_\alpha \Big), \quad u(a) = \bigoplus_{\alpha \in \overline{\Sigma}; n_\alpha(a) \leqslant -N} \overline{v}_\alpha .$$

Mais, par définition, pour $\alpha \in \overline{\Sigma}(\beta)$, on a $n_\alpha(a) \geqslant N+1$. On déduit des égalités ci-dessus les inclusions

$$p(a) \subset p, \quad u_P \subset u(a),$$

ce qui démontre (7).

Il existe un entier $N_1 \geqslant 0$ tel que, pour $a \in A(\Sigma^+)$,

$$\sup\{n_\alpha(a); \alpha \in \overline{\Sigma} \cap \Sigma^+\} \geqslant N_1 \Longrightarrow \sup\{n_\alpha(a); \alpha \in \overline{\Delta}\} \geqslant N+1 .$$

Fixons un tel $N_1$. Grâce à (3), il existe un entier $N_2 > 0$ tel que, pour $a \in A(\Sigma^+)$,

$$\sup\{n_\alpha(a); \alpha \in \Sigma^+\} \geqslant N_2 \Longrightarrow \sup\{n_\alpha(a); \alpha \in \overline{\Sigma} \cap \Sigma^+\} \geqslant N_1 .$$

La conclusion de (6) est donc vérifiée pour $a \in A(\Sigma^+)$ tel que $\sup\{n_\alpha(a); \alpha \in \Sigma^+\} \geqslant N_2$. Comme l'ensemble des $a \in A(\Sigma^+)$ ne vérifiant pas cette inégalité est compact, cela achève la preuve de (6) et du lemme. □

On définit un élément $\phi_\theta(X_T, \cdot)$ de $C_c^\infty(g)^*$ par

(8) $$\phi_\theta(X_T, f) = |G(R)|^{-1} |g(R)|^{1/2} \int_{T\backslash G} \int_{g(V_0)} f(x^{-1}(Y + X_T)x)\, {}^o\!f(Y)\, dY\, dx$$

pour toute $f \in C_c^\infty(g)$. C'est un élément de $\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}$.

***Remarque***. — Si $d(V_0) \leqslant 1$, en particulier si $(V, q_V)$ est unitaire, $\phi_\theta(X_T, \cdot)$ n'est autre que l'intégrale orbitale $\phi(X_T, \cdot)$.

**III.3.** On conserve les mêmes hypothèses. Fixons des données $(I,(a_i),(c_i))$ comme en I.7, relatives à l'espace $V_1$, telles que $X_T \in \mathcal{O}(I,(a_i),(c_i))$. Identifions $V_1$ à

$$\bigoplus_{i\in I} F_i$$

de sorte que $X_T$ s'identifie à l'élément construit en I.7. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des réseaux de $V$ de la forme

$$R \oplus \Big(\bigoplus_{i\in I} R_i\Big)$$

où, pour tout $i \in I$, $R_i$ est un $\mathfrak{o}_{F_i}$-réseau de $F_i$ presque autodual.

Soit $L$ un réseau presque autodual de $V$ et $f \in C(k(L)/k(L)^1)$. Supposons

$$\int_{g(V_0)} f(Y + X_T)\,{}^{o}\!f(Y)\,dY \neq 0.$$

***Lemme***. — *Sous ces hypothèses, $L \in \mathcal{S}$.*

*Démonstration.* — D'après l'hypothèse, il existe $Y \in \mathrm{Supp}({}^{o}\!f)$ tel que $Y+X_T \in k(L)$. On a remarqué dans la preuve du lemme précédent que

$$(Y + X_T)_s = X_{T,s}\,.$$

En particulier, $X_{T,s}$ est limite d'une sous-suite de $((Y+X_T)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc $X_{T,s} \in k(L)$. Mais $X_{T,s}$ est un élément de $t$, entier et de réduction régulière. Un raisonnement élémentaire d'algèbre linéaire prouve que les seuls réseaux de $V$ stables par $X_{T,s}$ sont de la forme

$$L_0 \oplus \Big(\bigoplus_{i\in I} R_i\Big)$$

où $L_0$ est un réseau de $V_0$ et, pour tout $i \in I$, $R_i$ est un $\mathfrak{o}_{F_i}$-réseau de $F_i$. Ecrivons $L$ sous cette forme. On a

$$\widetilde{L} = \widetilde{L}_0 \oplus \Big(\bigoplus_{i\in I} \widetilde{R}_i\Big).$$

Puisque $L$ est presque autodual, $L_0$ l'est aussi ainsi que chaque réseau $R_i$. Il reste à prouver que $L_0 = R$. La fonction sur $g(V_0)$ : $Y \to f(Y + X_T)$ appartient à $C(k(L_0)/k(L_0)^1)$. Cela nous ramène à démontrer le lemme dans le cas $V_1 = \{0\}$, $V = V_0$, $L = L_0$, ce que l'on suppose désormais.

Définissons $f_R \in C_c^\infty(g)$ par

$$f_R(Y) = \begin{cases} 0, \ \text{si } Y \notin k(R), \\ \displaystyle\int_{k(R)^1} f(Y+Y')\,dY', \ \text{si } Y \in k(R). \end{cases}$$

Cette fonction appartient à $C(k(R)/k(R)^1)$ et on l'identifie à une fonction sur $g(R)$. On a l'égalité

$$\int_g f(Y)\,{}^{o}\!f(Y)\,dY = c \sum_{Y\in g(R)} f_R(Y)\,{}^{o}\!f(Y),$$

où $c$ est une constante $> 0$. Par hypothèse, le membre de gauche est non nul. La cuspidalité de ${}^of$ entraîne donc :

(1) il n'existe pas de sous-groupe parabolique $\boldsymbol{P}$ de $\boldsymbol{G}(R)$, propre et défini sur $\mathbb{F}_q$, tel que la fonction $f_R$ soit à support dans $p$ et invariante par $u_P$.

Posons

$$p(L) = (k(L) \cap k(R) + k(R)^1)/k(R)^1,$$
$$u(L) = (k(L)^1 \cap k(R) + k(R)^1)/k(R)^1.$$

Par construction, $f_R$ est à support dans $p(L)$ et invariante par $u(L)$. Considérons le sous-espace de $r'$ :

$$b = (L \cap R + \mathfrak{p}_F \widetilde{R})/\mathfrak{p}_F \widetilde{R}.$$

Son annulateur pour la forme $q_{r'}$ est

$$b^\perp = (\mathfrak{p}_F \widetilde{L} \cap R + \mathfrak{p}_F \widetilde{R})/\mathfrak{p}_F \widetilde{R}.$$

On a $b^\perp \subset b$, donc $b^\perp$ est totalement isotrope. Soit $\boldsymbol{P}$ le stabilisateur de $b$ dans $\boldsymbol{G}(R)$. C'est un sous-groupe parabolique de $\boldsymbol{G}(R)$, défini sur $\mathbb{F}_q$. Il est clair que $p(L)$ stabilise $b$, donc

$$p(L) \subset p. \tag{2}$$

En vertu de I.9 (1), on a

$$u(L) = \{Y \in g(R) ; \forall Z \in p(L), \mathrm{trace}(YZ) = 0\}.$$

D'autre part,

$$u_P = \{Y \in g(R) ; \forall Z \in p, \mathrm{trace}(YZ) = 0\}.$$

On déduit de (2) l'inclusion

$$u_P \subset u(L).$$

Mais alors, d'après (1), $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{G}(R)$. Puisque $\boldsymbol{P}$ stabilise le sous-espace totalement isotrope $b^\perp$, on a $b^\perp = \{0\}$ et $b = r'$.

***Remarque***. — Cette déduction ne serait pas correcte si $(r', q_{r'})$ était orthogonal, avec $q_{r'}$ déployée et $d(r') = 2$. On a déjà dit que ce cas était exclu.

Puisque $b = r'$, on a

$$R = L \cap R + \mathfrak{p}_F \widetilde{R}.$$

Un argument similaire démontre l'égalité

$$\widetilde{R} = \widetilde{L} \cap \widetilde{R} + R.$$

On a alors

$$R = L \cap R + \mathfrak{p}_F \widetilde{R} = L \cap R + \mathfrak{p}_F(\widetilde{L} \cap \widetilde{R}) + \mathfrak{p}_F R = L \cap R + \mathfrak{p}_F R,$$
$$\widetilde{R} = \widetilde{L} \cap \widetilde{R} + \mathfrak{p}_F R = \widetilde{L} \cap \widetilde{R} + L \cap R + \mathfrak{p}_F \widetilde{R} = \widetilde{L} \cap \widetilde{R} + \mathfrak{p}_F \widetilde{R}.$$

Grâce au lemme de Nakayama, on en déduit

$$R = L \cap R, \quad \widetilde{R} = \widetilde{L} \cap \widetilde{R},$$

*i.e.*

$$R \subset L, \quad \widetilde{R} \subset \widetilde{L},$$

et finalement $R = L$. □

**III.4.** Soient toujours $\theta = (k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')$ ou $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'', \varepsilon)$ un élément de $\Theta(V)$, $V_0, V_1, R, T$ et $X_T$ comme en III.1 et III.2. Soit de plus $L$ un réseau presque autodual de $V$. Notons $\Theta(\theta, L)$ l'ensemble des couples $(\theta', \theta'') \in \Theta(\ell') \times \Theta(\ell'')$ (*cf.* II.2) tels que

$$\theta' = (k', \boldsymbol{\mu}^{0\prime}, \boldsymbol{\mu}') \text{ ou } \theta' = (k', \boldsymbol{\mu}^{0\prime}, \boldsymbol{\mu}', \varepsilon'),$$
$$\theta'' = (k'', \boldsymbol{\mu}^{0\prime\prime}, \boldsymbol{\mu}'') \text{ ou } \theta'' = (k'', \boldsymbol{\mu}^{0\prime\prime}, \boldsymbol{\mu}'', \varepsilon''),$$
$$\boldsymbol{\mu}^{0\prime} \cup \boldsymbol{\mu}^{0\prime\prime} = \boldsymbol{\mu}^0,$$
$$\text{si } \theta \text{ est exceptionnel, } \varepsilon = \varepsilon'\varepsilon''.$$

Pour deux partitions $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}$, posons

$$[\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}] = \prod_{i \geqslant 1} \frac{c_i(\boldsymbol{\lambda} \cup \boldsymbol{\nu})!}{c_i(\boldsymbol{\lambda})!\, c_i(\boldsymbol{\nu})!}.$$

Pour $(\theta', \theta'') \in \Theta(\theta, L)$ comme ci-dessus, on pose

$$[\theta', \theta'']^0 = [\boldsymbol{\mu}^{0\prime}, \boldsymbol{\mu}^{0\prime\prime}],$$

$$\eta(\theta', \theta'') = \begin{cases} 2, \text{ si } (V, q_V) \text{ est orthogonal, } \ell' \neq \{0\},\ \ell'' \neq \{0\} \text{ et ni } \theta', \\ \qquad\qquad \text{ni } \theta'' \text{ ne sont exceptionnels}, \\ 1, \text{ sinon}. \end{cases}$$

Posons enfin

$$m(L) = |G(L)|\,|g(L)|^{-1/2}.$$

***Proposition***. — *Soit $f \in \mathcal{H} \cap C(k(L)/k(L)^1)$. On a l'égalité*

$$\phi_\theta(X_T, f) = q^{\dim(\boldsymbol{T})/2} m(L) \sum_{(\theta', \theta'') \in \Theta(\theta, L)} \eta(\theta', \theta'')[\theta', \theta'']^0 (Q_{\theta'} \otimes Q_{\theta''}, f)_{g(L)}.$$

***Remarque***. — On identifie $f$ à une fonction sur $g(L)$ pour définir le dernier terme.

*Démonstration.* — Considérons la formule III.2 (8). Soit $x \in G$. La fonction $f \circ \mathrm{Ad}(x^{-1})$ appartient à $C(k(x(L))/k(x(L))^1)$. Utilisons les définitions et résultats du paragraphe précédent. Pour que l'intégrale intérieure du membre de droite de III.2 (8) soit non nulle, il faut que $x(L) \in \mathcal{S}$. Notons $\mathcal{S}(L)$ l'ensemble des réseaux $S \in \mathcal{S}$ qui sont conjugués à $L$ par un élément de $G$. Le groupe $T$ agit sur $\mathcal{S}(L)$. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{S}_T(L)$ du quotient $T \setminus \mathcal{S}(L)$ et, pour tout $S \in \mathcal{S}_T(L)$, fixons $x^S \in G$

tel que $x^S(L) = S$. Dans la formule III.2 (8), on peut remplacer l'intégrale sur $T \setminus G$ par l'intégrale sur

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}_T(L)} T \setminus \{x \in G; x(L) \in TS\}$$

*i.e.* par

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}_T(L)} T \setminus TK(S)x^S.$$

Pour tout $S \in \mathcal{S}_T(L)$, posons $f^S = f \circ \mathrm{Ad}(x^S)^{-1}$ et

$$\phi^S = \int_{T\setminus TK(S)} \int_{g(V_0)} f^S(x^{-1}(Y + X_T)x)\, {}^o\!f(Y)\, dY\, dx.$$

On obtient :

$$(1) \qquad \phi_\theta(X_T, f) = |G(R)|^{-1} |g(R)|^{1/2} \sum_{S \in \mathcal{S}_T(L)} \phi^S.$$

Fixons $S \in \mathcal{S}_T(L)$. La fonction $f^S$ appartient à $C(k(S)/k(S)^1)$. Identifions-la à une fonction sur $g(S)$, identifions de même ${}^o\!f$ à une fonction sur $g(R) \subset g(S)$. Notons $X_T^S$ l'image de $X_T$ dans $g(S)$ et $\boldsymbol{T}^S$ la composante neutre du centre du commutant de $X_T^S$ dans $\boldsymbol{G}(S)$. Remarquons que le groupe $K(S)$ agit naturellement par conjugaison sur $g(S)$. On a l'égalité :

$$\begin{aligned}\phi^S = \mathrm{mes}(T \setminus TK(S))[K(S) : K(S)^1]^{-1} \cdot \mathrm{mes}(k(R)^1)\\ \cdot \sum_{x \in K(S)/K(S)^0} \sum_{y \in G(S)} \sum_{Y \in g(R)} f^S(xy^{-1}(Y + X_T^S)yx^{-1})\, {}^o\!f(Y).\end{aligned}$$

La double somme en $y$ et $Y$ n'est autre que

$$\sum_{Z \in g(S)} f^S \circ \mathrm{Ad}(x)(Z) \sum_{y \in G(S)} {}^{T^S}\!f[X_T^S](y^{-1}Zy)$$

(*cf.* II.8), ou encore, en remarquant que ${}^{T^S}\!f[X_T^S]$ est à valeurs réelles :

$$|Z_{G(S)}(T^S)|\,|G(S)|\big({}^{T^S}\!\varphi[X_T^S], f^S \circ \mathrm{Ad}(x)\big)_{g(S)}.$$

On a l'égalité

$$\big({}^{T^S}\!\varphi[X_T^S], f^S \circ \mathrm{Ad}(x)\big)_{g(S)} = \Big(\widehat{{}^{T^S}\!\varphi[X_T^S]}, \widehat{f^S} \circ \mathrm{Ad}(x)\Big)_{g(S)}.$$

Puisque $f \in \mathcal{H}$, $\widehat{f^S}$, vue comme fonction sur $g(S)$, est à support nilpotent. On peut appliquer la proposition II.8 au calcul du membre de droite de l'égalité ci-dessus. On obtient

$$\Big(\widehat{{}^{T^S}\!\varphi[X_T^S]}, \widehat{f^S} \circ \mathrm{Ad}(x)\big)_{g(S)} = \big(\widehat{Q}_{T^S}, \widehat{f^S} \circ \mathrm{Ad}(x)\big)_{g(S)} = \big(Q_{T^S}, f^S \circ \mathrm{Ad}(x)\big)_{g(S)}.$$

D'où l'égalité :

$$\phi^S = \mathrm{mes}(T \setminus TK(S))[K(S) : K(S)^1]^{-1} \,\mathrm{mes}(k(R)^1)\,|Z_{G(S)}(T^S)|\,|G(S)| \cdot \sum_{x \in K(S)^0 \backslash K(S)} \left(Q_{T^S}, f^S \circ \mathrm{Ad}(x)\right)_{g(S)}.$$

D'après notre choix de mesures,

$$\mathrm{mes}(k(R))\,\mathrm{mes}(k(R)^1) = 1,$$

d'où

$$\mathrm{mes}(k(R)^1) = |g(R)|^{-1/2}.$$

On a

$$\mathrm{mes}(T \setminus TK(S)) = \mathrm{mes}(K(S))\,\mathrm{mes}(T \cap K(S))^{-1},$$
$$\mathrm{mes}(K(S)) = (K(S) : K(S)^1)\,\mathrm{mes}(K(S)^1),$$
$$\mathrm{mes}(K(S)^1) = \mathrm{mes}(k(S)^1),$$

et, comme ci-dessus,

$$\mathrm{mes}(k(S)^1) = |g(S)|^{-1/2}.$$

On a

$$\mathrm{mes}(T \cap K(S)) = [T \cap K(S) : T \cap K(S)^1]\,\mathrm{mes}(T \cap K(S)^1).$$

Or

$$T \cap K(S)/T \cap K(S)^1 \simeq T^S$$

et

$$\mathrm{mes}(T \cap K(S)^1) = \mathrm{mes}(t \cap k(S)^1) = |t^S|^{-1/2} = q^{-\dim(\boldsymbol{T})/2}.$$

On a aussi

$$Z_{G(S)}(T^S) = G(R) \times T^S.$$

Enfin, $\mathrm{Ad}(x^S)$ définit un isomorphisme de $\boldsymbol{G}(L)$ sur $\boldsymbol{G}(S)$. D'où les égalités :

$$|G(S)| = |G(L)|, \quad |g(S)| = |g(L)|.$$

Posons

$$\boldsymbol{T}_S = \mathrm{Ad}(x^S)^{-1}(\boldsymbol{T}^S).$$

Alors

$$\sum_{x \in K(S)/K(S)^0} (Q_{T^S}, f^S \circ \mathrm{Ad}(x))_{g(S)} = \sum_{x \in K(L)/K(L)^0} (Q_{T_S}, f \circ \mathrm{Ad}(x))_{g(L)}.$$

On obtient l'égalité :

$$(2) \qquad \phi^S = |G(R)|\,|g(R)|^{-1/2} q^{\dim(\boldsymbol{T})/2} m(L) \sum_{x \in K(L)/K(L)^0} \left(Q_{T_S}, f \circ \mathrm{Ad}(x)\right)_{g(L)}.$$

Etudions l'ensemble $\mathcal{S}$, en utilisant les notations de III.3. Pour $i \in I^*$, on peut supposer $v_{F_i}(c_i) \in \{0, 1\}$. Notons $I'$, resp. $I''$, l'ensemble des $i \in I^*$ tels que $v_{F_i}(c_i) = 0$, resp.

$v_{F_i}(c_i) = 1$. L'espace $F_i$ n'admet qu'un seul $\mathfrak{o}_{F_i}$-réseau presque autodual, à savoir $\mathfrak{o}_{F_i}$ et on a

$$\widetilde{\mathfrak{o}}_{F_i} = \begin{cases} \mathfrak{o}_{F_i}, & \text{si } i \in I', \\ \mathfrak{p}_F^{-1}\mathfrak{o}_{F_i}, & \text{si } i \in I''. \end{cases}$$

Remarquons que $\boldsymbol{\mu}'$ resp. $\boldsymbol{\mu}''$, n'est autre que l'ensemble avec multiplicités :

$$\left\{\dim_F(F_i)/2; i \in I'\right\}, \text{ resp. } \left\{\dim_F(F_i)/2; i \in I''\right\}.$$

Soit maintenant $i \in I^* - I$. Avec les notations de I.7, on peut identifier $F_i$ à $F_i^{\#} \oplus F_i^{\#}$ et supposer que $c_i$ s'identifie à $(1,1)$ ou $(1,-1)$. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, posons

$$S_i(a,b) = \mathfrak{p}_F^a \mathfrak{o}_{F_i^{\#}} \oplus \mathfrak{p}_F^b \mathfrak{o}_{F_i^{\#}}.$$

Ce sont des $\mathfrak{o}_{F_i}$-réseaux et tout $\mathfrak{o}_{F_i}$-réseau est de cette forme. On a

$$S_i(a,b)^{\sim} = S_i(-b,-a).$$

Un réseau $S_i(a,b)$ est donc presque autodual si et seulement si $a+b \in \{0,1\}$. On a

$$S_i(a,b)^{\sim} = \begin{cases} S_i(a,b), & \text{si } a+b=0, \\ \mathfrak{p}_F^{-1} S_i(a,b), & \text{si } a+b=1. \end{cases}$$

Remarquons que $\boldsymbol{\mu}^0$ n'est autre que l'ensemble avec multiplicités :

$$\{\dim_F(F_i^{\#}); i \in I - I^*\}, \text{ dans le cas orthogonal ou symplectique},$$
$$\{\dim_E(F_i^{\#}); i \in I - I^*\}, \text{ dans le cas unitaire}.$$

Identifions $I - I^*$ à $\{1, \dots, c(\boldsymbol{\mu}^0)\}$ de sorte que $\mu_i^0 = \dim_F(F_i^{\#})$ ou $\dim_E(F_i^{\#})$ pour tout $i \in \{1, \dots, c(\boldsymbol{\mu}^0)\}$.

L'action du tore $T$ se décrit ainsi : si $i \in I^*$, $T$ fixe le réseau $\mathfrak{o}_{F_i}$ ; si $i \in I - I^*$, l'orbite de $S_i(a,b)$ est $\{S_i(a+c, b-c); c \in \mathbb{Z}\}$. Pour tout sous-ensemble $J \subset \{1, \dots, c(\boldsymbol{\mu}^0)\}$, posons :

$$S(J) = R \oplus \Big(\bigoplus_{i\in J} S_i(0,0)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i\in\{1,\dots,c(\boldsymbol{\mu}^0)\}-J} S_i(0,1)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i\in I^*} \mathfrak{o}_{F_i}\Big).$$

Posons

$$\mathcal{S}_T = \left\{S(J); J \subset \{1, \dots, c(\boldsymbol{\mu}^0)\}\right\}.$$

Alors $\mathcal{S}_T$ est un ensemble de représentants des orbites de l'action de $T$ dans $\mathcal{S}$. Pour tout $i \in I$, posons $f_i = \mathfrak{o}_{F_i}/\mathfrak{p}_F\mathfrak{o}_{F_i}$. Il résulte des calculs ci-dessus que pour tout $J \subset \{1, \dots, c(\boldsymbol{\mu}^0)\}$,

$$s'(J) = r' \oplus \Big(\bigoplus_{i\in J\cup I'} f_i\Big),$$
$$s''(J) = r'' \oplus \Big(\bigoplus_{i\in(\{1,\dots,c(\boldsymbol{\mu}^0)\}-J)\cup I''} f_i\Big).$$

En notant $\boldsymbol{\mu}^0(J)'$, resp. $\boldsymbol{\mu}^0(J)''$, la partition dont les termes non nuls sont les $\mu_i^0$ pour $i \in J$, resp. $i \in \{1, \ldots, c(\boldsymbol{\mu}^0)\} - J$, on a les égalités :

$$\begin{aligned} d(s'(J)) &= d(r') + 2S(\boldsymbol{\mu}^0(J)') + \alpha S(\boldsymbol{\mu}'), \\ d(s''(J)) &= d(r'') + 2S(\boldsymbol{\mu}^0(J)'') + \alpha S(\boldsymbol{\mu}''), \end{aligned}$$

où $\alpha = 2$ dans les cas symplectique ou orthogonal et $\alpha = 1$ dans le cas unitaire (on s'excuse pour la double signification du symbole $S$). Notons $\mathcal{J}$ l'ensemble des $J \subset \{1, \ldots, c(\boldsymbol{\mu}^0)\}$ tels que $d(s'(J)) = d(\ell')$, $d(s''(J)) = d(\ell'')$. On peut alors choisir pour ensemble $\mathcal{S}_T(L)$ l'ensemble

$$\{S(J); J \in \mathcal{J}\}.$$

Soit $J \in \mathcal{J}$. Posons $\Lambda_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{T}_{S(J)}) = (\theta', \theta'')$. Il résulte des égalités ci-dessus que

$$\begin{aligned} \theta' &= (k', \boldsymbol{\mu}^0(J)', \boldsymbol{\mu}') \qquad \text{ou } (k', \boldsymbol{\mu}^0(J)', \boldsymbol{\mu}', \varepsilon'), \\ \theta'' &= (k'', \boldsymbol{\mu}^0(J)'', \boldsymbol{\mu}'') \qquad \text{ou } (k'', \boldsymbol{\mu}^0(J)'', \boldsymbol{\mu}'', \varepsilon''). \end{aligned}$$

Quand $\theta'$ et $\theta''$ sont tous deux exceptionnels, il résulte de II.10 que $\varepsilon'\varepsilon'' = \varepsilon$. Autrement dit, $(\theta', \theta'') \in \Theta(\theta, L)$. Pour tout $(\theta', \theta'') \in \Theta(\theta, L)$, notons $\mathcal{J}(\theta', \theta'')$ l'ensemble des $J \in \mathcal{J}$ tels que $\Lambda_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{T}_{S(J)}) = (\theta', \theta'')$. Il résulte de cette discussion et de (1) et (2) que

$$(3) \quad \phi_\theta(X_T, f) = q^{\dim(\boldsymbol{T})/2} m(L) \cdot \sum_{(\theta', \theta'') \in \Theta(\theta, L)} |\mathcal{J}(\theta', \theta'')| \sum_{x \in K(L)/K(L)^0} (Q_{\theta'} \otimes Q_{\theta''}, f \circ \mathrm{Ad}(x))_{\mathfrak{g}(L)}.$$

Supposons $(V, q_V)$ symplectique ou unitaire. Alors $K(L) = K(L)^0$. Soit $(\theta', \theta'') \in \Theta(\theta, L)$. Ecrivons

$$\theta' = (k', \boldsymbol{\mu}^{0\prime}, \boldsymbol{\mu}'), \ \ \theta'' = (k'', \boldsymbol{\mu}^{0\prime\prime}, \boldsymbol{\mu}'').$$

Alors $\mathcal{J}(\theta', \theta'')$ est l'ensemble des $J \subset \{1, \ldots, c(\boldsymbol{\mu}^0)\}$ tels que $\boldsymbol{\mu}^0(J)' = \boldsymbol{\mu}^{0\prime}$, $\boldsymbol{\mu}^0(J)'' = \boldsymbol{\mu}^{0\prime\prime}$. On calcule :

$$|\mathcal{J}(\theta', \theta'')| = [\theta', \theta'']^0$$

et la formule (3) devient celle de l'énoncé.

Supposons $(V, q_V)$ orthogonal. Si $d(\ell')d(\ell'') = 0$, $K(L) = K(L)^0$ et le calcul est le même que précédemment. Supposons $d(\ell')d(\ell'') \neq 0$. Alors $K(L)^0$ est d'indice 2 dans $K(L)$. Pour $\theta' \in \Theta(\ell')$, posons

$$-\theta' = \begin{cases} \theta', & \text{si } \theta' \text{ n'est pas exceptionnel}, \\ (0, \boldsymbol{\mu}^{0\prime}, \varnothing, -\varepsilon'), & \text{si } \theta' = (0, \boldsymbol{\mu}^{0\prime}, \varnothing, \varepsilon') \text{ est exceptionnel}. \end{cases}$$

Si $x$ est un élément de $K(L) - K(L)^0$, et $(\theta', \theta'') \in \Theta(\ell') \times \Theta(\ell'')$, on a l'égalité

$$(Q_{\theta'} \otimes Q_{\theta''}) \circ \mathrm{Ad}(x) = Q_{-\theta'} \otimes Q_{-\theta''}.$$

Remarquons que $(\theta',\theta'') \mapsto (-\theta',-\theta'')$ conserve $\Theta(\theta,L)$. La double somme de l'expression (3) est égale à :

$$\sum_{(\theta',\theta'')\in\Theta(\theta,L)} \big(|\mathcal{J}(\theta',\theta'')| + |\mathcal{J}(-\theta',-\theta'')|\big)(Q_{\theta'}\otimes Q_{\theta''}, f)_{g(L)}.$$

Soit $(\theta',\theta'') \in \Theta(\theta,L)$. Comme précédemment, le nombre de $J \in \mathcal{J}$ tels que l'on ait $\Lambda_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{T}_{S(J)}) \in \{(\theta',\theta''),(-\theta',-\theta'')\}$ est égal à $[\theta',\theta'']^0$. D'où l'égalité :

$$|\mathcal{J}(\theta',\theta'')| + |\mathcal{J}(-\theta',-\theta'')| = \begin{cases} [\theta',\theta'']^0, & \text{si } (\theta',\theta'') \neq (-\theta',-\theta''), \\ 2[\theta',\theta'']^0, & \text{si } (\theta',\theta'') = (-\theta',-\theta''). \end{cases}$$

Mais $(\theta',\theta'') = (-\theta',-\theta'')$ si et seulement si ni $\theta'$, ni $\theta''$ ne sont exceptionnels. On obtient alors la formule de l'énoncé. □

**III.5.** Le seul choix qui influe sur la définition de $\phi_\theta(X_T,\cdot)$ est celui de $X_T$.

***Corollaire.*** — *Le terme* $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\phi_\theta(X_T,\cdot))$ *est indépendant du choix de* $X_T$.

*Démonstration.* — Le membre de droite de l'égalité de l'énoncé précédent est indépendant de ce choix. Il en est donc de même de la restriction de $\phi_\theta(X_T,\cdot)$ à $C((k(L)/b)$ pour tout $L \in \mathcal{L}$ (*cf.* I.9), donc de $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\phi(X_T,\cdot))$. Il reste à appliquer le théorème I.9 (i). □

On note $\phi_\theta^{\mathcal{H}}$ la restriction à $\mathcal{H}$ de $\phi_\theta(X_T,\cdot)$ pour n'importe quel choix de $X_T$.

**III.6.** Soit toujours $\theta = (k',k'',\boldsymbol{\mu}^0,\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\mu}'')$ ou $(k',k'',\boldsymbol{\mu}^0,\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\mu}'',\varepsilon)$ un élément de $\Theta(V)$. On note $\mathcal{G}(\theta)$ l'ensemble des triplets $(L,\theta',\theta'')$ tels que

- $L$ est un réseau presque autodual de $V$ ;
- $(\theta',\theta'') \in \Theta(\theta,L)$.

Soit $\Gamma = (L,\theta',\theta'') \in \mathcal{G}(\theta)$. On sait définir la fonction $m(L)^{-1}Q_{\theta'}\otimes Q_{\theta''}$ sur $g(L)$. En utilisant le plongement

$$C(g(L)) = C(k(L)/k(L)^1) \hookrightarrow C_c^\infty(g),$$

on l'identifie à une fonction sur $g$ que l'on note $Q_\Gamma$.

Notons $\mathrm{Ann}(\mathcal{D})$ l'annulateur de $\mathcal{D}$ dans $C_c^\infty(g)$.

***Lemme.*** — *Soient* $\Gamma_1,\Gamma_2 \in \mathcal{G}(\theta)$. *Alors les images dans* $C_c^\infty(g)/\mathrm{Ann}(\mathcal{D})$ *de* $Q_{\Gamma_1}$ *et* $Q_{\Gamma_2}$ *sont égales.*

*Démonstration.* — On utilisera la remarque suivante. Soient $\mathcal{R} = (R_i)_{i=0,\dots,r}$, $\mathcal{R}' = (R'_i)_{i=0,\dots,r'}$ deux chaînes de réseaux telles que $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$. Alors $k(\mathcal{R}') \subset k(\mathcal{R})$. Il existe $\boldsymbol{M} \in \mathrm{L\acute{e}vi}_{\mathbb{F}_q}(\boldsymbol{G}(\mathcal{R}))$ et $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Par}_{\mathbb{F}_q}(\boldsymbol{M})$ tels que l'image de $k(\mathcal{R}')$, resp. $k(\mathcal{R}')^1$, dans $g(\mathcal{R})$ soit égale à $P$, resp. $u_P$. D'où un isomorphisme $g(\mathcal{R}') \simeq m$. Soit $f' \in C(g(\mathcal{R}'))$. Identifions $f'$ à une fonction sur $m$ et définissons une fonction $f$ sur $g(\mathcal{R})$ par $f = \mathrm{ind}_P^{G(\mathcal{R})}(f')$. Identifions $f$ et $f'$ à des éléments de $C_c^\infty(g)$. Posons

$$m(\mathcal{R}) = |G(\mathcal{R})|\,|g(\mathcal{R})|^{-1/2}$$

et définissons de même $m(\mathcal{R}')$. Alors

(1) les images dans $C_c^\infty(g)/\operatorname{Ann}(\mathcal{D})$ de $m(\mathcal{R})^{-1}f$ et $m(\mathcal{R}')^{-1}f'$ sont égales.

Soit $\Gamma = (L, \theta', \theta'') \in \mathcal{G}(\theta)$. Ecrivons $\theta' = (k', \boldsymbol{\mu}^{0\prime}, \mu')$ ou $(k', \boldsymbol{\mu}^{0\prime}, \boldsymbol{\mu}', \varepsilon')$. Il existe un sous-groupe parabolique $\boldsymbol{P}'$ de $\boldsymbol{G}(\ell')$ et un sous-groupe de Lévi $\boldsymbol{M}'$ de $\boldsymbol{P}'$, tous deux définis sur $\mathbb{F}_q$, tels que :

$$\boldsymbol{M}' \simeq \boldsymbol{G}(\ell'_0) \begin{cases} \prod_{j=1}^{c(\boldsymbol{\mu}^{0\prime})} \boldsymbol{GL}(\mu^{0\prime}{}_j), & \text{si } (V, q_V) \text{ est symplectique ou orthogonal,} \\ \prod_{j=1}^{c(\boldsymbol{\mu}^{0\prime})} \operatorname{Res}_{\mathbb{F}_q^2/\mathbb{F}_q} \boldsymbol{GL}(\mu^{0\prime}{}_j), & \text{si } (V, q_V) \text{ est unitaire} \end{cases}$$

où $\ell'_0$ est un sous-espace non dégénéré de $\ell'$, de même noyau anisotrope ;

• pour tout $j \in \{1, \ldots, c(\boldsymbol{\mu}^{0\prime})\}$, notons $Q'_j$ la fonction de Green sur $g\ell(\mu^{0\prime}{}_j)$ (ou $\operatorname{Res}_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q} g\ell(\mu^{0\prime}{}_j)$) associée à l'unique classe de conjugaison de sous-tores elliptiques maximaux ; notons $Q'_0$ la fonction de Green sur $g(\ell'_0)$ associée à $(k', \boldsymbol{\mu}')$, qui appartient à $\Theta(\ell'_0)$ ; alors (*cf.* II.7 (2)) :

$$Q_{\theta'} = \operatorname{ind}_{P'}^{G(\ell')} \Big( \bigotimes_{j=0}^{c(\boldsymbol{\mu}^{0\prime})} Q'_j \Big).$$

Fixons un tel couple $(\boldsymbol{M}', \boldsymbol{P}')$. Associons de même à $\theta''$ un couple $(\boldsymbol{M}'', \boldsymbol{P}'')$. Posons $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}' \times \boldsymbol{P}''$. Soit $\mathcal{R} = (R_i)_{i=0,\ldots,r}$ l'unique chaîne de réseaux telle que $L \in \mathcal{R}$ et l'image de $k(\mathcal{R})$ dans $g(L)$ soit égale à $p$. Avec des notations évidentes, on a un isomorphisme

$$g(\mathcal{R}) \simeq g(\ell'_0) \times g(\ell''_0) \times \Big( \prod_{j=1}^{c(\boldsymbol{\mu}^{0\prime})} g\ell(\mu^{0\prime}{}_j) \Big) \times \Big( \prod_{j=1}^{c(\boldsymbol{\mu}^{0\prime\prime})} g\ell(\mu^{0\prime\prime}{}_j) \Big)$$

(remplacer $g\ell$ par $\operatorname{Res}_{\mathbb{F}_q^2/\mathbb{F}_q} g\ell$ dans le cas unitaire). Définissons une fonction $Q_{\mathcal{R}}$ sur $g(\mathcal{R})$ par

$$Q_{\mathcal{R}} = Q'_0 \otimes Q''_0 \otimes \Big( \bigotimes_{j=1}^{c(\boldsymbol{\mu}^{0\prime})} Q'_j \Big) \otimes \Big( \bigotimes_{j=1}^{c(\boldsymbol{\mu}^{0\prime\prime})} Q''_j \Big).$$

En identifiant $Q_{\mathcal{R}}$ à une fonction sur $g$, il résulte de (1) que les images de $Q_\Gamma$ et $m(\mathcal{R})^{-1}Q_{\mathcal{R}}$ dans $C_c^\infty(g)/\operatorname{Ann}(\mathcal{D})$ sont égales. Posons $S = R_0$, notons $\boldsymbol{P}_S$ le sous-groupe parabolique de $\boldsymbol{G}(S)$, défini sur $\mathbb{F}_q$, tel que l'image de $k(\mathcal{R})$ dans $g(S)$ soit égale à $p_S$ et définissons une fonction $Q_S$ sur $g(S)$ par

$$Q_S = \operatorname{ind}_{P_S}^{G(S)}(Q_{\mathcal{R}}).$$

En identifiant $Q_S$ à une fonction sur $g$, pour la même raison que ci-dessus, les images de $m(S)^{-1}Q_S$ et $m(\mathcal{R})^{-1}Q_{\mathcal{R}}$ dans $C_c^\infty(g)/\operatorname{Ann}(\mathcal{D})$ sont égales, donc aussi celles de $Q_\Gamma$ et $m(S)^{-1}Q_S$. Il résulte de la construction et de II.7 (2) que :

(2) $d(s'')$ ne dépend que de $k''$ et $\boldsymbol{\mu}''$ ;

• $Q_S = Q_{s'} \otimes Q_{s''}$, où $Q_{s''}$ est une fonction de Green sur $g(s'')$ associée à $(k'', \boldsymbol{\mu}'') \in \Theta(s'')$ et $Q_{s'}$ est une fonction de Green sur $g(s')$ associée à un élément $(k', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}')$ ou $(k', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \delta)$ de $\Theta(s')$.

D'après (2), la classe de conjugaison par $G$ de $S$ ne dépend que de $\theta$. Puisque conjuguer une fonction par un élément de $G$ ne change pas son image dans $C_c^\infty(g)/\operatorname{Ann}(\mathcal{D})$, on peut considérer que $S$ ne dépend que de $\theta$. Si $(V, q_V)$ est symplectique ou orthogonal impair ou unitaire, on voit alors que $m(S)^{-1}Q_S$ est entièrement déterminée par $\theta$. L'image de $Q_\Gamma$ dans $C_c^\infty(g)/\operatorname{Ann}(\mathcal{D})$ ne dépend donc que de $\theta$, d'où le lemme.

Supposons $(V, q_V)$ orthogonal pair. Si $(k', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}')$ n'est pas un élément exceptionnel de $\Theta_I(s')$, $Q_{s'}$ est associée à $(k', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}')$ et le même raisonnement s'applique. Supposons $(k', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}')$ exceptionnel, *i.e.* $k' = 0$, $\boldsymbol{\mu}' = \varnothing$ et tous les termes de $\boldsymbol{\mu}^0$ sont pairs. Supposons aussi $s' \neq \{0\}$ (sinon $Q_{s'}$ est évidemment bien déterminée). Si $\theta$ n'est pas exceptionnel, alors $s'' \neq \{0\}$. Dans ce cas $K(S)^0$ est d'indice 2 dans $K(S)$. Un élément de $K(S) - K(S)^0$ conjugue $Q_S$ en $Q_{s'}^- \otimes Q_{s''}$, où $Q_{s'}^-$ est associée à l'élément $(0, \boldsymbol{\mu}^0, \varnothing, -\delta)$ de $\Theta(s')$. Donc l'image de $Q_S$ dans $C_c^\infty(g)/\operatorname{Ann}(\mathcal{D})$ ne dépend pas de $\delta$ et on conclut comme précédemment. Supposons $\theta$ exceptionnel. Dans ce cas, il résulte de la définition de $\Theta(\theta, L)$ (*cf.* III.5) que l'on peut raffiner la chaîne $\mathcal{R}$ en une chaîne de réseaux maximale de classe positive si $\varepsilon = 1$, négative si $\varepsilon = -1$ (*cf.* I.9). D'après les choix effectués en II.10, on a alors $\delta = \varepsilon$ et $Q_S$ ne dépend encore que de $\theta$. □

**III.7.** Pour tout $\theta \in \Theta(V)$, on fixe un élément $\Gamma$ de $\mathcal{G}(\theta)$, dont le choix aura peu d'importance et on pose $Q_\theta = Q_\Gamma$. Par construction, $Q_\theta$ est à support topologiquement nilpotent donc $\widehat{Q}_\theta \in \mathcal{H}$.

Notons $\operatorname{Ann}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$ l'annulateur de $\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}$ dans $\mathcal{H}$ et

$$\mathrm{res}_{\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}/\operatorname{Ann}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$$

la projection naturelle.

***Lemme.*** — *L'ensemble* $\{\mathrm{res}_{\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}}(\widehat{Q}_\theta); \theta \in \Theta(V)\}$ *engendre* $\mathcal{H}/\operatorname{Ann}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$ *linéairement.*

*Démonstration.* — Pour tout $L \in \mathcal{L}$ et tout $X \in b^1$ (*cf.* I.9), notons $\varphi[L, X]$ la fonction caractéristique de $X + k(L)^1$ dans $g$. D'après le théorème I.9 (i), l'ensemble

$$\{\, \mathrm{res}_{\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}}(\widehat{\varphi[L, X]}); L \in \mathcal{L}, X \in b^1 \}$$

engendre $\mathcal{H}/\operatorname{Ann}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$. Il suffit donc de prouver que pour tous $L, X$, l'image de $\varphi[L, X]$ dans $C_c^\infty(g)/\operatorname{Ann}(\mathcal{D})$ appartient à l'espace engendré par les images de $Q_\theta$, pour $\theta \in \Theta(V)$. Fixons donc $L \in \mathcal{L}$ et $X \in b^1$, identifions $\varphi[L, X]$ à une fonction sur $g(\ell') \times g(\ell'')$. C'est la fonction caractéristique d'un élément $X' \oplus X''$, où $X'$, resp. $X''$, est un élément nilpotent de $g(\ell') \times g(\ell'')$. Introduisons la fonction $e[X'] \otimes e[X'']$ (*cf.* II.1). Quand on l'identifie à un élément de $C_c^\infty(g)$, son image dans $C_c^\infty(g)/\operatorname{Ann}(\mathcal{D})$ est un multiple non nul de celle de $\varphi[L, X]$. D'autre part, elle appartient à l'espace engendré par $\{Q_{\theta'} \otimes Q_{\theta''}; \theta' \in \Theta(\ell'), \theta'' \in \Theta(\ell'')\}$ d'après II.7 (3). Mais il est clair que si $\theta' \in \Theta(\ell')$ et $\theta'' \in \Theta(\ell'')$, il existe un unique $\theta \in \Theta(V)$ tel que $(L, \theta', \theta'') \in \mathcal{G}(\theta)$. La fonction $Q_{\theta'} \otimes Q_{\theta''}$, identifiée à une fonction sur $g$, a même image dans $C_c^\infty(g)/\operatorname{Ann}(\mathcal{D})$ que $m(L)Q_\theta$. Cela achève la démonstration. □

**III.8.** Pour $\iota_0 = (k', k'') \in \mathcal{I}_0(V)$ (*cf.* III.1), on pose

$$\delta(\iota_0) = \begin{cases} -\big[k'(k'+1)(2k'+1) + k''(k''+1)(2k''+1)\big]/6, & \text{dans le cas symplectique,} \\ -\big[k'(k'-1)(k'+1) + k''(k''-1)(k''+1)\big]/3, & \text{dans le cas orthogonal,} \\ 0, & \text{dans le cas unitaire.} \end{cases}$$

Soit $\theta = (k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')$ ou $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'', \varepsilon)$ un élément de $\Theta(V)$. On pose

$$\delta(\theta) = \delta(k', k'').$$

Soit $(L, \theta', \theta'') \in \mathcal{G}(\theta)$. On a défini en II.9 les termes $\gamma(\theta')$ et $\gamma(\theta'')$. On pose

$$\gamma(\theta) = \gamma(\theta')\gamma(\theta'').$$

Ce terme ne dépend pas du choix de $(L, \theta', \theta'')$. Pour toute partition $\boldsymbol{\lambda}$, posons

$$\Pi_q(\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{j=1}^{c(\boldsymbol{\lambda})} (q^{\lambda_j} - 1), \quad Z(\boldsymbol{\lambda}) = \Big(\prod_{j=1}^{c(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_j\Big)\Big(\prod_{i\geqslant 1} c_i(\boldsymbol{\lambda})!\Big).$$

On définit les termes suivants :

$$\Pi(\theta) = \begin{cases} \Pi_q(\boldsymbol{\mu}^0)\Pi_{q^2}(\boldsymbol{\mu}')\Pi_q(\boldsymbol{\mu}')^{-1}\Pi_{q^2}(\boldsymbol{\mu}'')\Pi_q(\boldsymbol{\mu}'')^{-1}, & \text{dans le cas symplectique} \\ & \text{ou orthogonal} \\ \Pi_{q^2}(\boldsymbol{\mu}^0)\Pi_{q^2}(\boldsymbol{\mu}')\Pi_q(\boldsymbol{\mu}')^{-1}\Pi_{q^2}(\boldsymbol{\mu}'')\Pi_q(\boldsymbol{\mu}'')^{-1}, & \text{dans le cas unitaire;} \end{cases}$$

$$Z(\theta) = Z(\boldsymbol{\mu}^0)Z(\boldsymbol{\mu}')Z(\boldsymbol{\mu}'');$$

$n_k(\theta)$ le nombre de termes non nuls du couple $(k', k'')$ ;

$$c(\theta) = \begin{cases} c(\boldsymbol{\mu}^0) + c(\boldsymbol{\mu}') + c(\boldsymbol{\mu}''), \text{ dans le cas symplectique,} \\ c(\boldsymbol{\mu}^0) + c(\boldsymbol{\mu}') + c(\boldsymbol{\mu}'') + n_k(\theta) - 1, \text{ dans le cas orthogonal, si } \theta \\ \qquad\qquad \text{n'est pas exceptionnel,} \\ c(\boldsymbol{\mu}^0), \text{ dans le cas unitaire ou, dans le cas orthogonal, si } \theta \text{ est exceptionnel.} \end{cases}$$

Remarquons que l'élément $\phi_\theta^{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}^*$ est dans l'image de $\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}$ et définit donc une forme linéaire sur $\mathcal{H}/\operatorname{Ann}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$.

***Proposition.*** — *Soient $\theta, \tau \in \Theta(V)$. On a l'égalité*

$$\phi_\theta^{\mathcal{H}} \circ \mathrm{res}_{\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}}(\widehat{Q}_\tau) = \begin{cases} 0, & si\ \tau \neq \theta, \\ \gamma(\theta)\Pi(\theta)^{-1}Z(\theta)2^{c(\theta)}q^{\delta(\theta)}, & si\ \tau = \theta. \end{cases}$$

*Démonstration.* — Fixons $\boldsymbol{T}$ et $X_T$ comme en III.1 et III.2, relatifs à $\theta$ et $\Gamma = (L, \tau', \tau'') \in \mathcal{G}(\tau)$. On a l'égalité

$$\phi_\theta^{\mathcal{H}} \circ \mathrm{res}_{\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}}(\widehat{Q}_\tau) = \phi_\theta(X_T, \widehat{Q}_\Gamma),$$

que l'on calcule grâce à la proposition III.4 :

$$\phi_\theta(X_T, \widehat{Q}_\Gamma) = q^{\dim(\boldsymbol{T})/2} m(L) \sum_{(\theta', \theta'') \in \Theta(\theta, L)} \eta(\theta', \theta'')[\theta', \theta'']^0 (Q_{\theta'} \otimes Q_{\theta''}, \widehat{Q}_\Gamma)_{g(L)}$$

Soit $\overline{\boldsymbol{T}}$ un élément de $\mathcal{T}^{\boldsymbol{G}(L)}$ tel que $\Lambda_{\mathcal{T}}^{\boldsymbol{G}(L)}(\overline{\boldsymbol{T}}) = (\tau', \tau'')$. La fonction $\widehat{Q}_\Gamma$ est égale à $m(L)^{-1} \widehat{Q}_{\tau'} \otimes \widehat{Q}_{\tau''}$ mais, puisque $Q_{\theta'} \otimes Q_{\theta''}$ est à support nilpotent pour tout $(\theta', \theta'') \in \Theta(\theta, L)$, on peut remplacer dans la formule ci-dessus $\widehat{Q}_\Gamma$ par

$$m(L)^{-1} q^{-\dim(\overline{\boldsymbol{T}})/2} \gamma(\tau) Q_{\tau'} \otimes Q_{\tau''},$$

*cf.* II.9. D'après II.7 (1), pour $(\theta', \theta'') \in \Theta(\theta, L)$, le produit scalaire

$$(Q_{\theta'} \otimes Q_{\theta''}, Q_{\tau'} \otimes Q_{\tau''})_{g(L)}$$

est nul sauf si $(\theta', \theta'') = (\tau', \tau'')$. Cette condition impose l'égalité $\tau = \theta$, donc

$$\phi_\theta^{\mathcal{H}} \circ \mathrm{res}_{\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}}(\widehat{Q}_\tau) = 0$$

si $\tau \neq \theta$. Supposons $\tau = \theta$. Alors :

$$\phi_\theta^{\mathcal{H}} \circ \mathrm{res}_{\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}}(\widehat{Q}_\tau) = q^{\dim(\boldsymbol{T})/2 - \dim(\overline{\boldsymbol{T}})/2} \gamma(\theta) \eta(\tau', \tau'')[\tau', \tau'']^0 (Q_{\tau'} \otimes Q_{\tau''}, Q_{\tau'} \otimes Q_{\tau''})_{g(L)}.$$

Grâce à II.7 (1), on a

$$(Q_{\tau'} \otimes Q_{\tau''}, Q_{\tau'} \otimes Q_{\tau''})_{g(L)} = |W_{G(L)}(\overline{T})| \, |\overline{T}|^{-1} q^{\delta(G(L), \overline{T})}.$$

On a bien sûr $\dim(\boldsymbol{T}) = \dim(\overline{\boldsymbol{T}})$, on calcule :

$$\delta(G(L), \overline{T}) = \delta(\theta),$$
$$|\overline{T}| = \Pi(\theta).$$

Pour obtenir la formule de l'énoncé, il reste à démontrer l'égalité :

$$\eta(\tau', \tau'')[\tau', \tau'']^0 |W_{G(L)}(\overline{T})| = Z(\theta) 2^{c(\theta)}.$$

Elle résulte du lemme du paragraphe suivant et d'un calcul cas par cas. □

**III.9.** Revenons le temps d'un lemme au cas d'un couple $(V, q_V)$ défini sur $\mathbb{F}_q$. Soient $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}$, $\theta = \Lambda_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{T})$. Ecrivons $\theta = (k, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$ ou $(k, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1, \varepsilon)$.

***Lemme.*** — *On a l'égalité*

$$|W_G(T)| = \begin{cases} Z(\boldsymbol{\mu}^0) Z(\boldsymbol{\mu}^1) 2^{c(\boldsymbol{\mu}^0) + c(\boldsymbol{\mu}^1)}, & \text{dans le cas symplectique, et, dans le cas} \\ & \text{orthogonal, si } k \neq 0 \text{ ou si } \theta \text{ est exceptionnel;} \\ Z(\boldsymbol{\mu}^0) Z(\boldsymbol{\mu}^1) 2^{c(\boldsymbol{\mu}^0) + c(\boldsymbol{\mu}^1) - 1}, & \text{dans le cas orthogonal, si } k = 0 \\ & \text{et } \theta \text{ n'est pas exceptionnel;} \\ Z(\boldsymbol{\mu}^0) Z(\boldsymbol{\mu}^1) 2^{c(\boldsymbol{\mu}^0)}, & \text{dans le cas unitaire.} \end{cases}$$

*Démonstration.* — Reprenons les notations de II.3. Soit $w \in W(k)$ tel que $\boldsymbol{T}$ soit conjugué à $\boldsymbol{T}^{w}$ par un élément de $G$. On peut supposer $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{w}$. Soit $x \in \boldsymbol{G}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ tel que $\boldsymbol{T}^{w} = x\boldsymbol{T}(k)x^{-1}$. L'application $\mathrm{Ad}(x)$ définit un isomorphisme de $W(k)$ sur $W_{\overline{G}}(\boldsymbol{T}^{w})$. Le corps de base étant fini, $W_G(T)$ n'est autre que le sous-groupe des éléments de $W_{\overline{G}}(\boldsymbol{T}^{w})$ fixes par $\phi$. Il s'identifie au groupe des $u \in W(k)$ tels que $\phi(xux^{-1}) = xux^{-1}$, qui n'est autre que le commutant de $w_\phi w$ dans $W(k)$.

Supposons $(V, q_V)$ unitaire. Identifions $W(k)$ à $W(A_{d-1})$, soit $\boldsymbol{\mu}$ la partition telle que $w_\phi w$ soit produit de cycles de longueurs $\mu_1, \mu_2$, etc. Il est élémentaire que le nombre d'éléments du commutant de $w_\phi w$ dans $W(A_{d-1})$ est

$$\prod_{i\geqslant 1} i^{c_i(\boldsymbol{\mu})} c_i(\boldsymbol{\mu})!.$$

Si $i$ est impair, $c_i(\boldsymbol{\mu}) = c_i(\boldsymbol{\mu}^1)$. Si $i$ est pair, $c_i(\boldsymbol{\mu}) = c_{i/2}(\boldsymbol{\mu}^0)$. On obtient la formule de l'énoncé.

Supposons $(V, q_V)$ symplectique, ou $(V, q_V)$ orthogonal et $k \neq 0$. Alors $W(k)$ s'identifie à un groupe $W(C_n)$. Rappelons que $w_\phi w$ a deux types d'orbites dans $\{\pm 1, \dots, \pm n\}$ : les orbites $J$ telles que $J \cap (-J) = \varnothing$ ; les orbites $J$ telles que $J = -J$. Et, pour tout $i \geqslant 1$, il y a $2c_i(\boldsymbol{\mu}^0)$ orbites du premier type et de longueur $i$ et $c_i(\boldsymbol{\mu}^1)$ orbites du second type et de longueur $2i$. Ici encore, le calcul du nombre d'éléments du commutant est élémentaire. On obtient la formule de l'énoncé.

Supposons $(V, q_V)$ orthogonal et $k = 0$. Alors $W(k)$ s'identifie à un groupe $W(D_n)$. Notons $Z_C$, resp. $Z_D$ le commutant de $w_\phi w$ dans $W(C_n)$, resp. $W(D_n)$. On cherche à calculer $|Z_D|$. Le calcul précédent détermine $|Z_C|$. On a

$$|Z_D| = \begin{cases} |Z_C|, & \text{si } Z_C \subset W(D_n), \\ |Z_C|/2, & \text{si } Z_C \not\subset W(D_n). \end{cases}$$

On doit déterminer si $Z_C$ est ou n'est pas inclus dans $W(D_n)$. Si $\boldsymbol{\mu}^1 \neq \varnothing$, soit $J$ une orbite du deuxième type. On peut supposer que $J = \{\pm 1, \dots, \pm \ell\}$ et que, pour $j = 1, \dots, \ell$,

$$w_\phi w(j) = \begin{cases} j+1, & \text{si } j \neq \ell, \\ -1, & \text{si } j = \ell. \end{cases}$$

L'élément $u$, égal à $w_\phi w$ sur $J$ et à l'identité sur $\{\pm 1, \dots, \pm n\} - J$, commute à $w_\phi w$ et $\mathrm{sgn}_{CD}(u) = -1$. Donc $Z_C \not\subset W(D_n)$. Supposons $\boldsymbol{\mu}^1 = \varnothing$. Le groupe $Z_C$ est engendré par des éléments $u$ de l'un des trois types suivants :

• soient $J, J'$ deux orbites de mêmes longueurs telles que $J' \neq J$, $J' \neq -J$ ; on peut supposer $J = \{1, \dots, \ell\}$, $J' = \{\ell+1, \dots, 2\ell\}$ et que, pour $j = 1, \dots, 2\ell$

$$w_\phi w(j) = \begin{cases} j+1, & \text{si } j \neq \ell, 2\ell, \\ 1, & \text{si } j = \ell, \\ \ell+1, & \text{si } j = 2\ell; \end{cases}$$

alors, pour $j = 1, \dots, n$,

$$u(\pm j) = \begin{cases} \pm(j+\ell), & \text{si } j = 1, \dots, \ell, \\ \pm(j-\ell), & \text{si } j = \ell+1, \dots, 2\ell, \\ \pm j, & \text{si } j = 2\ell+1, \dots, n; \end{cases}$$

• soient $J$ une orbite et $\ell \in \mathbb{Z}$ ; l'élément $u$ est égal à $(w_\phi w)^\ell$ sur $J \cup -J$ et à l'identité sur $\{\pm 1, \dots, \pm n\} - (J \cup (-J))$ ;

• soit $J$ une orbite ; on peut supposer $J = \{1, \dots, \ell\}$ ; alors, pour $j = 1, \dots, n$,

$$u(\pm j) = \begin{cases} \mp j, & \text{si } j = 1, \dots, \ell, \\ \pm j, & \text{si } j = \ell+1, \dots, n. \end{cases}$$

On vérifie que les éléments des deux premiers types appartiennent à $W(D_n)$. Un élément du troisième type appartient à $W(D_n)$ si et seulement si $|J|$ est pair.

Finalement $Z_C \subset W(D_n)$ si et seulement si $\boldsymbol{\mu}^1 = \varnothing$ et tous les termes de $\boldsymbol{\mu}^0$ sont pairs, *i.e.* si et seulement si $\theta$ est exceptionnel. Cela achève la démonstration. □

**III.10.** Revenons à la situation de III.1.

***Corollaire***

(i) *La famille* $(\mathrm{res}_{\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}}(\widehat{Q}_\theta))_{\theta \in \Theta(V)}$ *est une base de* $\mathcal{H}/\operatorname{Ann}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$.

(ii) *La famille* $(\phi_\theta^{\mathcal{H}})_{\theta \in \Theta(V)}$ *est une base de* $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$.

*Démonstration.* — L'indépendance linéaire de ces familles résulte de la proposition III.8.

Le (i) résulte alors du lemme III.7. Puisque $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$ est le dual de $\mathcal{H}/\operatorname{Ann}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$, le (ii) résulte de (i) et de la proposition III.8. □

# CHAPITRE IV

# STABILITÉ

**IV.1.** On suppose dans tout le chapitre IV que $V$ possède un réseau autodual.

Supposons $(V, q_V)$ symplectique, soit $\theta = (k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'') \in \Theta(V)$. Fixons $V_0, V_1$, $\boldsymbol{T}$ et $X_T$ comme en III.1 et III.2. Posons

$$J = \{1, \dots, \sup(k', k'')\}.$$

Pour tout $j \in J$, fixons un système de représentants $\Gamma_j$ de $\mathfrak{o}_F^\times / \mathfrak{o}_F^{\times 2}$ dans $\mathfrak{o}_F^\times$. Posons

$$\Gamma = \prod_{j \in J} \Gamma_j .$$

Pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $j \in J$, on notera sans plus de commentaire $\gamma_j$ la composante de $\gamma$ dans $\Gamma_j$. On adopte le même principe pour tout ensemble égal à un produit d'ensembles indicés par $J$.

Rappelons que l'on note sgn l'unique caractère non trivial de $\mathfrak{o}_F^\times / \mathfrak{o}_F^{\times 2}$. Pour tout $j \in J$, on l'identifie à une fonction sur $\Gamma_j$. On définit une fonction $\sigma$ sur $\Gamma$ par la formule suivante, pour $\gamma \in \Gamma$ :

$$\sigma(\gamma) = \prod_{j=|k'-k''|+1}^{\sup(k',k'')} \operatorname{sgn}\left((-1)^{k'-k''} \gamma_j\right)^{j-k'+k''} .$$

Pour $j \in J$ et $\delta \in \mathfrak{o}_F^\times$, fixons $a[\delta]_j \in \overline{F}$ tel que :

$$\begin{aligned} a[\delta]_j^{2j} &= \omega_F \delta, & \text{si } j \leqslant |k' - k''|, \\ a[\delta]_j^{2(2j-|k'-k''|)} &= \omega_F \delta, & \text{si } j > |k' - k''|. \end{aligned}$$

Notons $F_{\delta,j}$ l'extension de $F$ engendrée par $a[\delta]_j$, $F_{\delta,j}^{\#}$ son sous-corps d'indice 2 engendré par $a[\delta]_j^2$, $\mathfrak{p}_{\delta,j}$ l'idéal maximal de l'anneau des entiers de $F_{\delta,j}$ et

$$\mathcal{Y}[\delta]_j = \left\{ Y \in \mathfrak{p}_{\delta,j}^2 ; \operatorname{trace}_{F_{\delta,j}/F_{\delta,j}^{\#}}(Y) = 0 \right\}.$$

Pour $\gamma \in \Gamma$, posons :

$$A(\gamma) = \prod_{j\in J}(a[\gamma_j]_j + \mathcal{Y}[\gamma_j]_j).$$

On a

$$A(\gamma) \subset \prod_{j\in J}\{Y \in F_{\gamma_j,j}\,;\, \mathrm{trace}_{F_{\gamma_j,j}/F^{\#}_{\gamma_j,j}}(Y) = 0\}$$

On munit ce dernier groupe de la mesure de Haar pour laquelle $\mathrm{mes}(A(\gamma)) = 1$, et $A(\gamma)$ de la mesure déduite.

Posons $\mathcal{E} = (\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times 2})^J$. On définit un caractère $\kappa_0$ de $\mathcal{E}$ par la formule suivante, pour $e \in \mathcal{E}$ :

$$\kappa_0(e) = \Big(\prod_{j=1}^{|k'-k''|}\mathrm{sgn}(e_j)^j\Big)\Big(\prod_{j=|k'-k''|+1}^{\sup(k',k'')}\mathrm{sgn}(e_j)^{k'-k''}\Big).$$

Pour $\gamma \in \Gamma$, $a \in A(\gamma)$ et $e \in \mathcal{E}$, définissons $c[a,e] = (c[a,e]_j)_{j\in J} \in \overline{F}^{\times J}$ de la façon suivante. On identifie $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times 2}$ à un système de représentants dans $\mathfrak{o}_F^\times$.

Pour $j \in J$, on pose

$$c[a,e]_j = \begin{cases} a_j\,e_j\,, & \text{si } k' \geqslant k''\,,\\ (-1)^j\,a_j\,\gamma_j\,e_j\,, & \text{si } k' < k'' \text{ et } j \leqslant k''-k'\,,\\ (-1)^{k''-k'}\,a_j\,\gamma_j\,e_j\,, & \text{si } k' < k'' \text{ et } j \geqslant k''-k'+1\,.\end{cases}$$

Les données $(J,(a_j),(c[a,e]_j)_j)$ vérifient les conditions de I.7 pour l'espace $V_0$ et déterminent une classe de conjugaison par $G(V_0)$ dans $g(V_0)$. Fixons un élément $X[a,e]$ de cette classe, posons $X_T[a,e] = X[a,e] + X_T \in g$.

Si $\mathcal{X}$ est un ensemble compact muni d'une mesure et $D : \mathcal{X} \to \mathcal{D}$ une application telle que, pour toute $f \in C_c^\infty(g)$, l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &\longrightarrow \mathbb{C}\\ x &\longmapsto D(x)(f)\end{aligned}$$

soit localement constante, on définit $\int_{\mathcal{X}} D(x)\,dx \in \mathcal{D}$ par la formule évidente

$$\Big(\int_{\mathcal{X}} D(x)\,dx\Big)(f) = \int_{\mathcal{X}} D(x)(f)\,dx.$$

Cela étant, on définit un élément $D_\theta[\Gamma, X_T]$ de $\mathcal{D}$ par la formule :

$$D_\theta[\Gamma, X_T] = 2^{-\sup(k',k'')}q^{\delta(\theta)}\sum_{\gamma\in\Gamma}\sigma(\gamma)\int_{A(\gamma)}\sum_{e\in\mathcal{E}}\kappa_0(e)\,\phi(X_T[a,e],\cdot)\,da.$$

Cette distribution appartient à $\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}$.

**IV.2.** Supposons $(V, q_V)$ orthogonal. Soit $\theta = (k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'') \in \Theta(V)$. On suppose que $\theta$ n'est pas exceptionnel. Fixons $V_0, V_1, \boldsymbol{T}$ et $X_T$ comme en IV.1 et III.2. Posons

$$J = \begin{cases} \{1, \dots, \sup(k', k'')\}, & \text{si } d \text{ est pair}, \\ \{2, \dots, \sup(k', k'')\}, & \text{si } d \text{ est impair}, \end{cases}$$

$$\widehat{J} = \Big\{ j \in J\,;\, j \leqslant |k' - k''|,\ j \equiv d \bmod 2\mathbb{Z} \Big\}.$$

Pour tout $j \in J$ tel que $j \leqslant |k' - k''|$, fixons un système de représentants $\Gamma_j$ de $\mathfrak{o}_F^\times/(1 + \mathfrak{p}_F)$ dans $\mathfrak{o}_F^\times$. Pour tout $j \in \{|k' - k''| + 1, \dots, \sup(k', k'')\}$, fixons un système de représentants $\Gamma_j$ de $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times 2}$ dans $\mathfrak{o}_F^\times$. Notons $\Gamma$ le sous-ensemble de $\prod_{j \in J} \Gamma_j$ formé des $\gamma$ tels que :

- pour tout $j \in \widehat{J}$, $\gamma_{j-1} \not\equiv \gamma_j \bmod (1 + \mathfrak{p}_F)$ ;
- si $d$ est pair, $\prod_{j \in J} \gamma_j \equiv \eta' \nu^{c(\boldsymbol{\mu}') + c(\boldsymbol{\mu}'')} \bmod \mathfrak{o}_F^{\times 2}$.

Avec les mêmes conventions qu'en IV.1, on définit une fonction $\sigma$ sur $\Gamma$ par la formule suivante, pour $\gamma \in \Gamma$ :

$$\sigma(\gamma) = \Big[ \prod_{j \in \widehat{J}} (q - 2 + \operatorname{sgn}(\gamma_{j-1}\gamma_j)) \operatorname{sgn}(\gamma_{j-1}\gamma_j(\gamma_{j-1} - \gamma_j)) \Big] \Big[ \prod_{\substack{j = |k' - k''| + 1 \\ j \equiv d + 1 \bmod 2\mathbb{Z}}}^{\sup(k', k'')} \operatorname{sgn}(-\gamma_j) \Big].$$

Pour $j \in J$ et $\delta \in \mathfrak{o}_F^\times$, fixons $a[\delta]_j \in \overline{F}$ tel que

$$\begin{aligned} a[\delta]_j^{2j-2} &= \omega_F \delta, \ \text{ si } j \leqslant |k' - k''| \ \text{ et } \ j \equiv d \bmod 2\mathbb{Z}, \\ a[\delta]_j^{2j} &= \omega_F \delta, \ \text{ si } j \leqslant |k' - k''| \ \text{ et } \ j \equiv d + 1 \bmod 2\mathbb{Z}, \\ a[\delta]_j^{2(2j - |k' - k''| - 1)} &= \omega_F \delta, \ \text{ si } j \geqslant |k' - k''| + 1. \end{aligned}$$

On définit comme en IV.1 une extension $F_{\delta,j}$ de $F$ et un sous-ensemble $\mathcal{Y}[\delta]_j$. Puis, pour $\gamma \in \Gamma$, on définit un ensemble $A(\gamma)$ muni d'une mesure de masse totale 1.

Notons $\mathcal{E}$ le sous-groupe de $(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times 2})^J$ formé des $e$ tels que

- pour tout $j \in \widehat{J}$, $e_{j-1} = e_j$,
- $\prod_{j = |k' - k''| + 1}^{\sup(k', k'')} e_j = 1$.

On définit un caractère $\kappa_0$ de $\mathcal{E}$ par :

$$\kappa_0(e) = \prod_{j \in \widehat{J}} \operatorname{sgn}(e_j),$$

pour tout $e \in \mathcal{E}$.

Pour $\gamma \in \Gamma$, $a \in A(\gamma)$ et $e \in \mathcal{E}$, définissons $c[a, e] = (c[a, e]_j)_{j \in J} \in \overline{F}^{\times J}$ de la façon suivante. On identifie $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times 2}$ à un système de représentants dans $\mathfrak{o}_F^\times$. Pour $j \in J$, on pose

$$c[a,e]_j = \begin{cases} (-1)^j \gamma_j e_j\,, & \text{si } k' \geqslant k'' \text{ et } j \neq k',\\ (-1)^d \nu^{c(\boldsymbol{\mu}'')} \gamma_{k'} e_{k'} & \text{si } k' \geqslant k'' \text{ et } j = k',\\ (-1)^{j+1} e_j\,, & \text{si } k'' > k' \text{ et } j \neq k''\\ (-1)^{d+1} \eta' \nu^{c(\boldsymbol{\mu}')} e_{k''}\,, & \text{si } k'' > k' \text{ et } j = k''. \end{cases}$$

Les données $(J, (a_j), (c[a,e]_j))$ vérifient les conditions de I.7 pour l'espace $V_0$. Si $d$ est impair, elles déterminent une classe de conjugaison par $G(V_0)$ dans $g(V_0)$. On fixe un élément $X[a,e]$ de cette classe et on pose $X_T[a,e] = X[a,e] + X_T$. Si $d$ est pair, les données définissent deux classes de conjugaison dans $g(V_0)$. On fixe des éléments $X^+[a,e]$ et $X^-[a,e]$ dans chacune de ces classes. Pour $\varepsilon = \pm$, on pose $X_T^\varepsilon[a,e] = X^\varepsilon[a,e] + X_T$ et on définit une distribution $\phi(X_T[a,e],\cdot)$ par

$$\phi(X_T[a,e],\cdot) = \phi(X_T^+[a,e],\cdot) + \phi(X_T^-[a,e],\cdot).$$

On définit un élément $D_\theta[\Gamma, X_T]$ de $\mathcal{D}$ par l'égalité :

$$D_\theta[\Gamma, X_T] = \\ \alpha 2^\beta ((q-1)^2(q-3))^{-[|k'-k''|/2]} q^{\delta(\theta)} \sum_{\gamma\in\Gamma} \sigma(\gamma) \int_{A(\gamma)} \sum_{e\in\mathcal{E}} \kappa_0(e)\phi(X_T[a,e],\cdot)\, da,$$

où

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{si } d \text{ est pair},\\ \operatorname{sgn}(-1)^{(k'-1)/2}, & \text{si } d \text{ est impair et } k' > k'',\\ \operatorname{sgn}\left[(-1)^{k''/2-1} \eta' \nu^{c(\boldsymbol{\mu}')+c(\boldsymbol{\mu}'')}\right], & \text{si } d \text{ est impair et } k'' > k', \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 - \inf(k', k''), & \text{si } k'k'' \neq 0,\\ 0, & \text{si } k'k'' = 0 \text{ et } (k',k'') \neq (0,0),\\ -1, & \text{si } (k',k'') = (0,0). \end{cases}$$

La distribution $D_\theta[\Gamma, X_T]$ appartient à $\mathcal{D}_{\text{ent}}$.

**IV.3.** Plaçons-nous dans l'une des situations étudiées en IV.1 ou IV.2. On démontrera la proposition suivante aux chapitres VI et VII.

***Proposition***. — *On a l'égalité* $\phi_\theta^{\mathcal{H}} = \operatorname{res}_{\mathcal{H}}(D_\theta[\Gamma, X_T])$.

**IV.4.** Posons

$$\mathcal{M} = \left\{\boldsymbol{M} \in \text{Lévi}_F(\boldsymbol{G}); \text{Par}_F(\boldsymbol{M}) \neq \varnothing\right\}.$$

C'est l'ensemble des sous-groupes de Lévi définis sur $F$ de sous-groupes paraboliques de $\boldsymbol{G}$ définis sur $F$. On note $\mathcal{M}/G$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G$ dans $\mathcal{M}$ et, pour $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$, $(\boldsymbol{M})$ sa classe de conjugaison. On munit $\mathcal{M}/G$ de la relation d'ordre suivante : pour $(\boldsymbol{M}_1), (\boldsymbol{M}_2) \in \mathcal{M}/G$, $(\boldsymbol{M}_1) \subset (\boldsymbol{M}_2)$ si et seulement s'il existe $\boldsymbol{M}'_2 \in (\boldsymbol{M}_2)$ et $\boldsymbol{M}'_2 \in (\boldsymbol{M}_2)$ tels que $\boldsymbol{M}'_1 \subset \boldsymbol{M}'_2$.

On note $g_{\text{ell}}$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers $X \in g$ tels que $\boldsymbol{Z_G}(X)$ soit un sous-tore elliptique de $\boldsymbol{G}$, c'est-à-dire que le plus grand sous-tore déployé de $\boldsymbol{Z_G}(X)$ soit central dans $\boldsymbol{G}$ (cette définition vaut pour tout groupe réductif connexe $\boldsymbol{G}$ défini sur $F$). Si $X \in g_{\text{reg}}$, il existe un unique Lévi $\boldsymbol{M}_X \in \mathcal{M}$ tel que $X \in m_{X,\text{ell}}$.

Soit $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$. Fixons $\boldsymbol{P} \in \text{Par}_F(\boldsymbol{M})$ et un sous-groupe compact maximal spécial $K$ de $G$, dont le point fixe dans l'immeuble de Bruhat-Tits de $G$ appartienne à l'appartement associé à un sous-tore déployé maximal de $\boldsymbol{M}$. Il existe une unique mesure de Haar sur $U_P$ telle que, pour toute $f \in C_c^\infty(G)$,

$$\int_G f(x)\,dx = \int_{M\times U_P\times K} f(muk)\,dk\,du\,dm.$$

On munit $U_P$ de cette mesure de Haar et $u_P$ de la mesure telle que l'exponentielle préserve les mesures d'un voisinage de 0 dans $u_P$ dans un voisinage de 1 dans $U_P$. Pour $f \in C_c^\infty(g)$ et $X \in m$, posons

$$f^P(X) = \int_{u_P\times K} f(k^{-1}(X+Y)k)\,dk\,dY.$$

La fonction $f^P$ appartient à $C_c^\infty(m)$. Elle dépend des choix de $\boldsymbol{P}$ et $K$ mais ses intégrales orbitales n'en dépendent pas. En effet, pour $X \in m \cap g_{\text{reg}}$, posons

$$\Delta_{G,M}(X) = |\det(\text{ad}(X)|g/m)|_F^{1/2}.$$

On a l'égalité

$$\phi^M(X, f^P) = \Delta_{G,M}(X)\phi^G(X, f),$$

où, conformément à nos conventions, $\phi^M(X,\cdot)$ et $\phi^G(X,\cdot)$ sont les intégrales orbitales relatives aux groupes $M$ et $G$. Il en résulte que si $D \in \mathcal{D}^M$, $D(f^P)$ ne dépend pas des choix de $\boldsymbol{P}$ et $K$. On définit une application :

$$\text{ind}_M^G : \mathcal{D}^M \longrightarrow \mathcal{D}^G$$

par la formule :

$$(\text{ind}_M^G(D))(f) = D(f^P)$$

pour tous $D \in \mathcal{D}^M$, $f \in C_c^\infty(g)$.

On vérifie que $(\widehat{f})^P = \widehat{f^P}$ pour tout $f \in C_c^\infty(g)$. D'où l'égalité

$$\text{ind}_M^G(\widehat{D}) = \widehat{\text{ind}_M^G(D)}$$

pour tout $D \in \mathcal{D}^M$.

Soient $\mathcal{V}$ un sous-ensemble ouvert et fermé de $m$, stable par conjugaison par $N_G(M)$, et $\mathcal{V}^G$ un sous-ensemble ouvert et fermé de $g$, stable par conjugaison par $G$ et tel que $\mathcal{V}^G \cap m \subset \mathcal{V}$. Pour $X \in \mathcal{V}^G$, posons

$$C(X) = \{x \in G; x^{-1}Xx \in \mathcal{V}\}.$$

Soit $D \in \mathcal{D}^M$, supposons $D$ localement intégrable sur $\mathcal{V}$. Notons $D^G$ la distribution $\mathrm{ind}_M^G(D)$. Alors $D^G$ est localement intégrable sur $\mathcal{V}^G$. Notons $\varphi_D$ et $\varphi_{D^G}$ les fonctions sur $\mathcal{V}$, resp. $\mathcal{V}^G$, associées à $D$, resp. $D^G$ (*cf.* I.9). Pour $X \in \mathcal{V}^G \cap g_{\mathrm{reg}}$, on a l'égalité

(1) $$\varphi_{D^G}(X) = \sum_{x \in C(X)/M} \Delta_{G,M}(x^{-1}Xx)^{-1}\varphi_D(x^{-1}Xx).$$

**IV.5.** La théorie des groupes endoscopiques est développée dans [Lan] et [Ko], § 7. Nous utiliserons les notations de [W2]. Soient $(\boldsymbol{H}, s, \xi)$ des données endoscopiques pour $\boldsymbol{G}$ (remarquons que $\boldsymbol{G}$ est quasi-déployé). On définit un sous-ensemble $h_{G-\mathrm{reg}}$ de $h$. On fixe un facteur de transfert

$$\Delta_{G,H} : h_{G-\mathrm{reg}} \times g_{\mathrm{reg}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

incluant le facteur $\Delta_{IV}$ de Langlands et Shelstad (*cf.* [LS], § 3.6, 3.7). Pour $f \in C_c^\infty(g)$ et $Y \in h_{G-\mathrm{reg}}$, on pose

$$\phi^{G,H}(Y, f) = \sum_X \Delta_{G,H}(Y, X)\phi^G(X, f),$$

où $X$ parcourt $g_{\mathrm{reg}}$ modulo conjugaison par $G$. Notons $C_c^\infty(g)^{H-\mathrm{inst}}$ le sous-espace des $f \in C_c^\infty(g)$ telles que $\phi^{G,H}(Y, f) = 0$ pour tout $Y \in h_{G-\mathrm{reg}}$. Notons $\mathcal{D}^{G,H}$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{D}^G$ qui annulent $C_c^\infty(g)^{H-\mathrm{inst}}$.

Soit $X \in g_{\mathrm{reg}}$. On a défini en I.7 la classe de conjugaison stable $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X)$. Notons $\mathcal{E}(X)$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G$ contenues dans $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X)$. On peut munir $\mathcal{E}(X)$ d'une structure de groupe pour laquelle l'élément neutre est $\mathcal{O}(X)$. Notons $\mathcal{K}(X)$ le groupe dual de $\mathcal{E}(X)$. Il s'identifie à un ensemble de fonctions sur $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X)$ invariantes par conjugaison par $G$. Soit $Y \in h_{G-\mathrm{reg}}$, supposons $\Delta_{G,H}(Y, X) \neq 0$. Alors le support de la fonction $\Delta_{G,H}(Y, \cdot)$ est $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X)$ et il existe un unique $\kappa^Y \in \mathcal{K}(X)$ tel que

$$\Delta_{G,H}(Y, Z) = \Delta_{G,H}(Y, X)\kappa^Y(Z)$$

pour tout $Z \in \mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X)$. On note $\mathcal{K}^{G,H}(X)$ l'ensemble des $\kappa^Y$ quand $Y$ parcourt $\{Y \in h_{G-\mathrm{reg}}; \Delta_{G,H}(Y, X) \neq 0\}$.

Soient $D \in \mathcal{D}^G$ et $\mathcal{V}$ un sous-ensemble ouvert de $g$. Supposons

- si $X \in \mathcal{V} \cap g_{\mathrm{reg}}$, alors $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X) \subset \mathcal{V}$ ;
- $D$ est localement intégrable sur $\mathcal{V}$ ;
- $D \in \mathcal{D}^{G,H}$.

Soit $\varphi_D$ la fonction sur $\mathcal{V}$ associée à $D$. Supposons pour simplifier que $\varphi_D$ est localement constante sur $\mathcal{V} \cap g_{\mathrm{reg}}$. Alors :

(1) pour tout $X \in \mathcal{V} \cap g_{\mathrm{reg}}$, la restriction de $\varphi_D$ à $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X)$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{K}^{G,H}(X)$.

Considérons d'autres données endoscopiques $(\boldsymbol{H}', s', \xi')$ que l'on suppose non isomorphes à $(\boldsymbol{H}, s, \xi)$. Alors :

(2) $$\text{pour tout } X \in g_{\text{ell}}, \ \mathcal{K}^{G,H}(X) \cap \mathcal{K}^{G,H'}(X) = \varnothing.$$

On a prouvé en [W3] le résultat suivant :

(3) $$\text{soit } D \in \mathcal{D}^{G,H}; \text{ alors } \widehat{D} \in \mathcal{D}^{G,H}.$$

Dans le cas où $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}$, ce qui détermine $s$ et $\xi$, on pose simplement $C_c^\infty(g)^{\text{inst}} = C_c^\infty(g)^{H-\text{inst}}$, $\mathcal{D}^{\text{st}} = \mathcal{D}^{G,H}$ et, pour $X \in g_{\text{reg}}$, $\phi^{\text{st}}(X, \cdot) = \phi^{G,H}(X, \cdot)$ et $\mathcal{K}^{\text{st}}(X) = \mathcal{K}^{G,H}(X)$. Remarquons que $\mathcal{K}^{\text{st}}(X) = \{1\}$.

**IV.6.** On note $\Xi_I(V)$ l'ensemble des quadruplets $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$ où $(k', k'') \in \mathcal{I}_0(V)$ et $\boldsymbol{\mu}^0$ et $\boldsymbol{\mu}^1$ sont des partitions, soumis aux conditions suivantes :

- dans le cas symplectique, $k'(k'+1) + k''(k''+1) + 2S(\boldsymbol{\mu}^0) + 2S(\boldsymbol{\mu}^1) = d$;
- dans le cas orthogonal, $k'^2 + k''^2 + 2S(\boldsymbol{\mu}^0) + 2S(\boldsymbol{\mu}^1) = d$; si $k' = 0$ et $\eta' = \nu$, alors $c(\boldsymbol{\mu}^1) \geqslant 1$; si $k' = k'' = 0$, alors $\eta' = \nu^{c(\boldsymbol{\mu}^1)}$;
- dans le cas unitaire, $2S(\boldsymbol{\mu}^0) + S(\boldsymbol{\mu}^1) = d$ et tous les termes non nuls de $\boldsymbol{\mu}^1$ sont impairs. On dit que $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$ est exceptionnel si
- $(V, q_V)$ est orthogonal pair, $q_V$ est déployée et $d$ est divisible par 4 ;
- $k' = k'' = 0$, $\boldsymbol{\mu}^1 = \varnothing$ et tous les termes de $\boldsymbol{\mu}^0$ sont pairs.

On note $\Xi(V)$ l'ensemble dont les éléments sont :

- les éléments non exceptionnels de $\Xi_I(V)$ ;
- les quintuplets $(0, 0, \boldsymbol{\mu}^0, \varnothing, \varepsilon)$, où $(0, 0, \boldsymbol{\mu}^0, \varnothing)$ est un élément exceptionnel de $\Xi_I(V)$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

On définit une application
$$\Theta(V) \longrightarrow \Xi(V)$$
en associant à un élément $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')$, resp. $(0, 0, \boldsymbol{\mu}^0, \varnothing, \varnothing, \varepsilon)$, de $\Theta(V)$ l'élément $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}' \cup \boldsymbol{\mu}'')$, resp. $(0, 0, \boldsymbol{\mu}^0, \varnothing, \varepsilon)$ de $\Xi(V)$. Cette application est surjective. Pour $\xi \in \Xi(V)$, on note $\Theta(V, \xi)$ sa fibre au-dessus de $\xi$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, posons
$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^n = \Big\{(e_j)_{j=1,\ldots,n} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n ; \sum_{j=1}^n e_j = 0\Big\}$$
$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_1^n = \Big\{(e_j)_{j=1,\ldots,n} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n ; \sum_{j=1}^n e_j = 1\Big\}.$$

Soit $\xi = (k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$ ou $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1, \varepsilon)$ un élément de $\Xi(V)$. On définit un ensemble $\mathcal{E}(\xi)$ de la façon suivante :

- si $(V, q_V)$ est symplectique, $\mathcal{E}(\xi) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{c(\boldsymbol{\mu}^1)}$ ;
- si $(V, q_V)$ est orthogonal, on distingue trois cas :
  - si $k'k'' \neq 0$, $\mathcal{E}(\xi) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{c(\boldsymbol{\mu}^1)}$ ;
  - si $k' = 0$ et $\eta' = \nu^{c(\boldsymbol{\mu}^1)+1}$, $\mathcal{E}(\xi) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_1^{c(\boldsymbol{\mu}^1)}$ ;

• si $k'k'' = 0$ et $(k', \eta') \neq (0, \nu^{c(\boldsymbol{\mu}^1)+1})$, $\mathcal{E}(\xi) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^{c(\boldsymbol{\mu}^1)}$ ;

• si $(V, q_V)$ est unitaire $\mathcal{E}(\xi) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^{c(\boldsymbol{\mu}^1)}$.

On définit une application

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\xi) &\longrightarrow \Theta(V)\\ e &\longmapsto \theta(\xi, e)\end{aligned}$$

de la façon suivante : si $\xi$ est exceptionnel, $\mathcal{E}(\xi) = \{0\}$ et l'on pose

$$\theta(\xi, 0) = (0, 0, \boldsymbol{\mu}^0, \varnothing, \varnothing, \varepsilon).$$

Sinon, soit $e \in \mathcal{E}(\xi)$. Notons $\boldsymbol{\mu}'(e)$, resp. $\boldsymbol{\mu}''(e)$, la partition dont les termes non nuls sont les $\mu_j^1$ pour $j \in \{1, \ldots, c(\boldsymbol{\mu}^1)\}$ tel que $e_j = 0$, resp. $e_j = 1$. On pose

$$\theta(\xi, e) = (k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}'(e), \boldsymbol{\mu}''(e)).$$

Cette application a pour image $\Theta(V, \xi)$.

Soient $\boldsymbol{\lambda}$ une partition et $\kappa \in \{\pm 1\}^{c(\boldsymbol{\lambda})}$. Pour tout entier $i \geqslant 1$, on pose

$$c_i(\boldsymbol{\lambda}, \kappa) = \left|\{j = 1, \ldots, c(\boldsymbol{\lambda})\,;\, \lambda_j = i \text{ et } \kappa_j = -1\}\right|.$$

Pour $\xi$ comme ci-dessus, on pose

$$\mathcal{K}(\xi) = \{\pm 1\}^{c(\boldsymbol{\mu}^1)}.$$

Si $\kappa = (\kappa_j)_{j=1,\ldots,c(\boldsymbol{\mu}^1)}$, on pose $-\kappa = (-\kappa_j)_{j=1,\ldots,c(\boldsymbol{\mu}^1)}$. On définit deux relations d'équivalence $\approx$ et $\sim$ dans $\mathcal{K}(\xi)$ de la façon suivante. Pour $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}(\xi)$, $\kappa \approx \kappa'$ si et seulement si $c_i(\boldsymbol{\mu}^1, \kappa) = c_i(\boldsymbol{\mu}^1, \kappa')$ pour tout entier $i \geqslant 1$. Si $(V, q_V)$ est symplectique ou si $(V, q_V)$ est orthogonal et $k'k'' \neq 0$, les deux relations $\sim$ et $\approx$ coïncident. Si $(V, q_V)$ est unitaire ou si $(V, q_V)$ est orthogonal et $k'k'' = 0$, la relation $\sim$ est engendrée par $\approx$ et par la relation $\kappa \sim -\kappa$ pour tout $\kappa \in \mathcal{K}(\xi)$.

Hors du cas particulier ci-dessous, on note $\overline{\mathcal{K}}(\xi)$ l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\sim$. Le cas particulier est celui où sont vérifiées les conditions : $(V, q_V)$ est orthogonal, $k' = 0$, $\eta' = \nu^{c(\boldsymbol{\mu}^1)+1}$ et $c_i(\boldsymbol{\mu}^1)$ est pair pour tout entier $i \geqslant 1$. Dans ce cas, l'ensemble des $\kappa \in \mathcal{K}(\xi)$ tels que $c_i(\boldsymbol{\mu}^1, \kappa) = c_i(\boldsymbol{\mu}^1)/2$ pour tout entier $i \geqslant 1$ forme une classe d'équivalence que l'on note $\overline{\kappa}^0$. On note $\overline{\mathcal{K}}(\xi)$ l'ensemble des classes d'équivalence, pour la relation $\sim$, distinctes de $\overline{\kappa}^0$.

***IV.7. Lemme.*** — *Pour tout $\xi \in \Xi(V)$, les ensembles $\overline{\mathcal{K}}(\xi)$ et $\Theta(V, \xi)$ ont même nombre d'éléments.*

*Démonstration.* — Ecrivons $\xi = (k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$ ou $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1, \varepsilon)$. Si $\boldsymbol{\mu}^1 = \varnothing$, $\overline{\mathcal{K}}(\xi)$ et $\Theta(V, \xi)$ ont tous deux un seul élément (remarquons que l'on n'est pas dans le cas particulier de la fin du paragraphe précédent car les hypothèses : $(V, q_V)$ orthogonal, $k' = 0$, $\eta' = \nu^{c(\boldsymbol{\mu}^1)+1}$ et $c(\boldsymbol{\mu}^1) = 0$ contredisent la définition de $\Xi(V)$). Supposons $\boldsymbol{\mu}^1 \neq \varnothing$.

Introduisons les différents cas suivants :

(1) $(V, q_V)$ est symplectique ou $(V, q_V)$ est orthogonal et $k'k'' \neq 0$ ;

(2) $(V, q_V)$ est unitaire, ou $(V, q_V)$ est orthogonal, $k'k'' = 0$ et $(k', \eta') \neq (0, \nu^{c(\boldsymbol{\mu}^1)+1})$ ;

(3) $(V, q_V)$ est orthogonal, $k' = 0$, $\eta' = \nu^{c(\boldsymbol{\mu}^1)+1}$ et il existe un entier $i \geqslant 1$ tel que $c_i(\boldsymbol{\mu}^1)$ soit impair ;

(4) $(V, q_V)$ est orthogonal, $k' = 0$, $\eta' = \nu^{c(\boldsymbol{\mu}^1)+1}$ et $c_i(\boldsymbol{\mu}^1)$ est pair pour tout entier $i \geqslant 1$.

Si $\boldsymbol{n} = (n_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite finie d'entiers $\geqslant 0$, notons

• $L(\boldsymbol{n})$ l'ensemble des suites finies $\boldsymbol{\ell} = (\ell_i)_{i\geqslant 1}$ d'entiers $\geqslant 0$ telles que

$$0 \leqslant \ell_i \leqslant n_i$$

pour tout $i \geqslant 1$ ;

• $L_{\text{pair}}(\boldsymbol{n})$, resp. $L_{\text{imp}}(\boldsymbol{n})$, le sous-ensemble des suites $\boldsymbol{\ell} \in L(\boldsymbol{n})$ telles que $S(\boldsymbol{\ell})$ est pair, resp. impair.

• $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence dans $L(\boldsymbol{n})$ ainsi définie : pour $\boldsymbol{\ell} = (\ell_i)_{i\geqslant 1}$, $(\boldsymbol{\ell}') = (\ell'_i)_{i\geqslant 1}$ deux éléments de $L(\boldsymbol{n})$, alors $\boldsymbol{\ell}\mathcal{R}\boldsymbol{\ell}'$ si et seulement si $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}'$ ou $\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\ell}' = \boldsymbol{n}$ ;

• $L_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{n})$ l'ensemble des classes d'équivalence ;

• si $n_i$ est pair pour tout $i \geqslant 1$, posons $\boldsymbol{\ell}^0 = (n_i/2)_{i\geqslant 1}$ et $L^0_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{n})$ l'ensemble des classes d'équivalence distinctes de $\{\boldsymbol{\ell}^0\}$.

On démontre par récurrence sur $c(\boldsymbol{n})$ les égalités

$$|L_{\text{pair}}(\boldsymbol{n})| = \begin{cases} |L(\boldsymbol{n})|/2, & \text{si l'un des } n_i \text{ est impair,} \\ (|L(\boldsymbol{n})| + 1)/2, & \text{si tous les } n_i \text{ sont pairs,} \end{cases} \tag{5}$$

$$|L_{\text{imp}}(\boldsymbol{n})| = \begin{cases} |L(\boldsymbol{n})|/2, & \text{si l'un des } n_i \text{ est impair,} \\ (|L(\boldsymbol{n})| - 1)/2, & \text{si tous les } n_i \text{ sont pairs.} \end{cases} \tag{6}$$

Les classes d'équivalence dans $L(\boldsymbol{n})$ ont deux éléments, sauf la classe $\{\boldsymbol{\ell}^0\}$ quand elle existe. D'où les égalités :

(7) si l'un des $n_i$ est impair, $|L_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{n})| = |L(\boldsymbol{n})|/2$ ;

(8) si tous les $n_i$ sont pairs, $|L_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{n})| = (|L(\boldsymbol{n})| + 1)/2$, $|L^0_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{n})| = (|L(\boldsymbol{n})| - 1)/2$.

Introduisons la suite $\boldsymbol{n}$ définie par $n_i = c_i(\boldsymbol{\mu}^1)$ pour tout entier $i \geqslant 1$. L'application qui à $\kappa \in \mathcal{K}(\xi)$ associe $\boldsymbol{\ell}$ définie par $\ell_i = c_i(\boldsymbol{\mu}^1, \kappa)$ pour tout entier $i \geqslant 1$ se quotiente en une bijection de $\overline{\mathcal{K}}(\xi)$ sur $L(\boldsymbol{n})$ dans le cas (1), sur $L_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{n})$ dans les cas (2) et (3), sur $L^0_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{n})$ dans le cas (4). D'où l'égalité :

$$|\overline{\mathcal{K}}(\xi)| = \begin{cases} |L(\boldsymbol{n})| & \text{dans le cas (1),} \\ |L_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{n})| & \text{dans les cas (2) et (3),} \\ |L^0_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{n})| & \text{dans le cas (4).} \end{cases} \tag{9}$$

D'autre part $\Theta(V, \xi)$ est l'ensemble des quintuplets $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')$ tels que

• $\boldsymbol{\mu}' \cup \boldsymbol{\mu}'' = \boldsymbol{\mu}^1$ ;

• dans le cas (2), $c(\boldsymbol{\mu}'')$ est pair ;

• dans les cas (3) et (4), $c(\boldsymbol{\mu}'')$ est impair.

L'application qui à un tel quintuplet associe $\boldsymbol{\ell}$ définie par $\ell_i = c_i(\boldsymbol{\mu}'')$ pour tout entier $i \geqslant 1$ est une bijection de $\Theta(V,\xi)$ sur $L(\boldsymbol{n})$ dans le cas (1), sur $L_{\text{pair}}(\boldsymbol{n})$ dans le cas (2), sur $L_{\text{imp}}(\boldsymbol{n})$ dans les cas (3) et (4). D'où l'égalité

$$|\Theta(V,\xi)| = \begin{cases} |L(\boldsymbol{n})| & \text{dans le cas (1),} \\ |L_{\text{pair}}(\boldsymbol{n})| & \text{dans le cas (2),} \\ |L_{\text{imp}}(\boldsymbol{n})| & \text{dans les cas (3) et (4).} \end{cases} \tag{10}$$

Le lemme résulte des égalités (9) et (10), grâce aux égalités (5), (6), (7) et (8). □

**IV.8.** Pour une partition $\boldsymbol{\lambda}$ et un élément $\kappa$ de $\{\pm 1\}^{c(\boldsymbol{\lambda})}$, on définit un polynôme $P(\boldsymbol{\lambda},\kappa)$ par

$$P(\boldsymbol{\lambda},\kappa) = \prod_{i\geqslant 1}\Big((1-T_i)^{c_i(\boldsymbol{\lambda},\kappa)}(1+T_i)^{c_i(\boldsymbol{\lambda})-c_i(\boldsymbol{\lambda},\kappa)}\Big).$$

Soient $\xi = (k',k'',\boldsymbol{\mu}^0,\boldsymbol{\mu}^1)$ ou $(k',k'',\boldsymbol{\mu}^0,\boldsymbol{\mu}^1,\varepsilon)$ un élément de $\Xi(V)$, $\theta = (k',k'',\boldsymbol{\mu}^0,\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\mu}'')$ ou $(k',k'',\boldsymbol{\mu}^0,\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\mu}'',\varepsilon)$ un élément de $\Theta(V,\xi)$ et $\kappa \in \mathcal{K}(\xi)$. Remarquons que $\mathcal{E}(\xi)$ est inclus dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{c(\boldsymbol{\mu}^1)}$ qui est le groupe dual de $\mathcal{K}(\xi)$. Posons

$$S(\theta,\kappa) = \sum_{e\in\mathcal{E}(\xi);\theta(\xi,e)=\theta} \kappa(e).$$

***Lemme***. — *Soient $\xi,\theta$ et $\kappa$ comme ci-dessus. Alors $S(\theta,\kappa)$ est égal au coefficient du monôme*

$$\prod_{i\geqslant 1} T_i^{c_i(\boldsymbol{\mu}'')}$$

*dans le polynôme $P(\boldsymbol{\mu}^1,\kappa)$.*

*Démonstration*. — Pour tout entier $i \geqslant 1$, notons $I_i$ l'ensemble des $j \in \{1,\ldots,c(\boldsymbol{\mu}^1)\}$ tels que $\mu^1_j = i$ et, pour $e \in \mathcal{E}(\xi)$, notons $I_i(e)$ l'ensemble des $j \in I_i$ tels que $e_j = 1$. L'application

$$e \longmapsto (I_i(e))_{i\geqslant 1}$$

est une bijection de l'ensemble $\{e \in \mathcal{E}(\xi); \theta(\xi,e) = \theta\}$ sur l'ensemble des familles $(J_i)_{i\geqslant 1}$ telles que, pour tout entier i$\geqslant$ 1, $J_i$ est un sous ensemble de $I_i$ à $c_i(\boldsymbol{\mu}'')$ éléments.

On a les égalités

$$\begin{aligned} S(\theta,\kappa) &= \sum_{e\in\mathcal{E}(\xi);\theta(\xi,e)=\theta} \prod_{j=1}^{c(\boldsymbol{\mu}^1)} \kappa_j^{e_j} \\ &= \sum_{e\in\mathcal{E}(\xi);\theta(\xi,e)=\theta} \prod_{i\geqslant 1} \prod_{j\in I_i(e)} \kappa_j \\ &= \prod_{i\geqslant 1} \sum_{J_i\subset I_i;|J_i|=c_i(\boldsymbol{\mu}'')} \prod_{j\in J_i} \kappa_j. \end{aligned}$$

C'est le coefficient de

$$\prod_{i\geqslant 1} T_i^{c_i(\boldsymbol{\mu}'')}$$

dans le polynôme

$$\prod_{i\geqslant 1}\ \prod_{j\in I_i}(1+\kappa_j T_i).$$

Mais ce dernier n'est autre que $P(\boldsymbol{\mu}^1,\kappa)$. □

**IV.9.** Pour $\xi\in\Xi(V)$ et $\kappa\in\mathcal{K}(\xi)$, posons

$$\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa}=\sum_{e\in\mathcal{E}(\xi)}\kappa(e)\,\phi^{\mathcal{H}}_{\theta(\xi,e)}.$$

C'est un élément de $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$.

***Lemme.*** — *Soient $\xi=(k',k'',\boldsymbol{\mu}^0,\boldsymbol{\mu}^1)$ ou $(k',k'',\boldsymbol{\mu}^0,\boldsymbol{\mu}^1,\varepsilon)$ un élément de $\Xi(V)$ et $\kappa,\kappa'\in\mathcal{K}(\xi)$. Supposons $\kappa\sim\kappa'$. Alors*

(i) *hors du cas particulier du (ii) ci-dessous, $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa}=\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa'}$ ;*

(ii) *supposons $(V,q_V)$ orthogonal, $k'=0$ et $\eta'=\nu^{c(\boldsymbol{\mu}^1)+1}$. Alors $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa}=\pm\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa'}$. Plus précisément, $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa}=\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa'}$ si $\kappa\approx\kappa'$ et $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,-\kappa}=-\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa}$. Supposons de plus $c_i(\boldsymbol{\mu}^1)$ pair pour tout entier $i\geqslant 1$ et $\kappa\in\overline{\kappa}^0$. Alors $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa}=0$.*

*Démonstration.* — Avec les notations du paragraphe précédent, on a l'égalité :

$$\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa}=\sum_{\theta\in\Theta(V,\xi)}S(\theta,\kappa)\,\phi^{\mathcal{H}}_{\theta}$$

et une égalité analogue pour $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa'}$. Si $\kappa\approx\kappa'$, les polynômes $P(\boldsymbol{\mu}^1,\kappa)$ et $P(\boldsymbol{\mu}^1,\kappa')$ sont égaux. Grâce au lemme IV.8, on a l'égalité $S(\theta,\kappa)=S(\theta,\kappa')$ pour tout $\theta\in\Theta(V,\xi)$, donc $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa}=\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa'}$. Supposons $(V,q_V)$ unitaire ou $(V,q_V)$ orthogonal et $k'k''=0$. Alors $P(\boldsymbol{\lambda},-\kappa)$ se déduit de $P(\boldsymbol{\lambda},\kappa)$ par changement de chaque variable $T_i$ en $-T_i$. Soit $\theta=(k',k'',\boldsymbol{\mu}^0,\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\mu}'')$ ou $(k',k'',\boldsymbol{\mu}^0,\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\mu}'',\varepsilon)$ un élément de $\Theta(V,\xi)$. Hors du cas particulier du (ii), $c(\boldsymbol{\mu}'')$ est pair et le monôme

$$\prod_{i\geqslant 1} T_i^{c_i(\boldsymbol{\mu}'')}$$

est de degré total pair. Grâce au lemme IV.8, on a encore l'égalité $S(\theta,\kappa)=S(\theta-\kappa)$, puis $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa}=\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,-\kappa}$. Dans le cas particulier du (ii), pour $\theta$ comme ci-dessus, $c(\boldsymbol{\mu}'')$ est impair, d'où $S(\theta,-\kappa)=-S(\theta,\kappa)$, puis $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,-\kappa}=-\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa}$. Supposons les hypothèses du (ii) vérifiées, $c_i(\boldsymbol{\mu}^1)$ pair pour tout entier $i\geqslant 1$ et $\kappa\in\overline{\kappa}^0$. Alors $-\kappa\approx\kappa$. Les égalités déjà démontrées impliquent $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa}=0$. □

**IV.10.** Pour $\xi \in \Xi(V)$ et $\overline{\kappa} \in \overline{\mathcal{K}}(\xi)$, on fixe arbitrairement un élément $\kappa \in \overline{\kappa}$, et l'on pose

$$\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\overline{\kappa}} = \phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa}.$$

Remarquons que le choix de $\kappa$ n'influe que sous les hypothèses de (ii) du lemme précédent et que dans ce cas, il n'influe que par un signe.

***Lemme***

(i) *Pour tout $\xi \in \Xi(V)$, la famille $(\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\overline{\kappa}})_{\overline{\kappa}\in\overline{\mathcal{K}}(\xi)}$ est une base du sous-espace de* $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$ *engendré par $\{\phi^{\mathcal{H}}_{\theta}; \theta \in \Theta(V,\xi)\}$.*

(ii) *La famille $(\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\overline{\kappa}})_{\xi\in\Xi(V),\overline{\kappa}\in\overline{\mathcal{K}}(\xi)}$ est une base de* $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$.

*Démonstration.* — Soit $\xi \in \Xi(V)$. Notons $\mathcal{V}(\xi)$ le sous-espace de $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$ engendré par $\{\phi^{\mathcal{H}}_{\theta}; \theta \in \Theta(V,\xi)\}$. Par transformation de Fourier sur le groupe $\mathcal{K}(\xi)$, $\mathcal{V}(\xi)$ est aussi engendré par $\{\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa}; \kappa \in \mathcal{K}(\xi)\}$. Grâce au lemme IV.9, cet ensemble engendre le même espace que la famille $(\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\overline{\kappa}})_{\overline{\kappa}\in\overline{\mathcal{K}}(\xi)}$. D'autre part, d'après le corollaire III.10, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}(\xi)) = |\Theta(V,\xi)|$. Grâce au lemme IV.7, on a donc l'égalité $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{V}(\xi)) = |\overline{\mathcal{K}}(\xi)|$, qui démontre (i).

Le (ii) résulte de (i) et du corollaire III.10. □

**IV.11.** Pour tous $\xi \in \Xi(V)$ et $\overline{\kappa} \in \overline{\mathcal{K}}(\xi)$, on définit $Q_{\xi,\overline{\kappa}}$ : c'est l'unique combinaison linéaire des $Q_\theta$ pour $\theta \in \Theta(V,\xi)$ telle que pour tous $\xi' \in \Xi(V)$ et $\overline{\kappa}' \in \overline{\mathcal{K}}(\xi')$, on ait l'égalité

$$\phi^{\mathcal{H}}_{\xi',\overline{\kappa}'} \circ \mathrm{res}_{\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}}(\widehat{Q}_{\xi,\overline{\kappa}}) = \begin{cases} 0, & \text{si } (\xi',\overline{\kappa}') \neq (\xi,\overline{\kappa}), \\ 1, & \text{si } (\xi',\overline{\kappa}') = (\xi,\overline{\kappa}). \end{cases}$$

Cette définition est loisible d'après le lemme précédent et la proposition III.8.

Pour tout élément $\xi = (k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$ ou $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1, \varepsilon)$ de $\Xi(V)$, on fixe un Lévi $\boldsymbol{M}_\xi \in \mathcal{M}$ (*cf.* IV.4) tel que

$$\boldsymbol{M}_\xi = \begin{cases} \boldsymbol{G}(V_\xi) \times \prod_{j=1}^{c(\boldsymbol{\mu}^0)} \boldsymbol{GL}(\mu^0_j), & \text{dans les cas symplectique ou orthogonal}, \\ \boldsymbol{G}(V_\xi) \times \prod_{j=1}^{c(\boldsymbol{\mu}^0)} \mathrm{Res}_{E/F}\, \boldsymbol{GL}(\mu^0_j), & \text{dans le cas unitaire}, \end{cases}$$

où $V_\xi$ est un sous-espace non dégénéré de $V$ tel que $q_{V_\xi}$ et $q_V$ aient même noyau anisotrope. Si $\xi$ est exceptionnel, on suppose que $\boldsymbol{M}_\xi$ stabilise la décomposition en lagrangiens $V = V^\varepsilon \oplus \widehat{V}^\varepsilon$ fixée en I.6.

***Lemme***. — *Soient $\xi \in \Xi(V)$, $\overline{\kappa} \in \overline{\mathcal{K}}(\xi)$ et $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$. Supposons $\phi(X, Q_{\xi,\overline{\kappa}}) \neq 0$. Alors $(\boldsymbol{M}_\xi) \subset (\boldsymbol{M}_X)$ cf. IV.4 pour les notations.*

*Démonstration.* — D'après l'hypothèse et la définition de $Q_{\xi,\overline{\kappa}}$, il existe $\theta \in \Theta(V,\xi)$ tel que $\phi(X, Q_\theta) \neq 0$. Fixons un tel $\theta$ et $\Gamma = (L, \theta', \theta'') \in \mathcal{G}(\theta)$ (*cf.* III.6). On peut supposer $Q_\theta = Q_\Gamma$. Reprenons les notations introduites dans la démonstration du lemme III.2, où $R$ est remplacé par $L$. On introduit donc un sous-tore $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{G}$, défini et déployé sur $F$, maximal pour ces propriétés, tel que le point fixe de $K(L)$ dans l'immeuble de Bruhat-Tits de $\boldsymbol{G}$ appartienne à l'appartement associé à $\boldsymbol{A}$ ; les ensembles $\boldsymbol{Z}$ et $\Sigma$ ; des sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbres $s$ et $s^1$ de $z$ ; pour tout $\alpha \in \Sigma$, un sous-espace $\boldsymbol{u}_\alpha \subset \boldsymbol{g}$ et des réseaux $v_\alpha$ et $v_\alpha^1$ de $u_\alpha$ ; l'ensemble $\overline{\Sigma}$ et des $\mathbb{F}_q$-espaces $\overline{s}$ et $\overline{v}_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Sigma$ ; on a alors les égalités

$$k(L) = s \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha\in\Sigma} v_\alpha\Big), \quad k(L)^1 = s^1 \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha\in\Sigma} v_\alpha^1\Big),$$

$$g(L) = \overline{s} \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha\in\overline{\Sigma}} \overline{v}_\alpha\Big).$$

Quitte à conjuguer $X$, on peut supposer $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{M}_X$. Soient $\boldsymbol{P} \in \mathrm{Par}_F(\boldsymbol{M}_X)$ et $W$ un ensemble de représentants des doubles classes $P \backslash G/K(L)^0$ tel que $W \subset N_G(A)$. Pour $f \in C_c^\infty(g)$ et $w \in W$, définissons $f_w \in C_c^\infty(m_X)$ par

$$f_w(Y) = \int_{K(L)^0 \times u_P} f(k^{-1}w^{-1}(Y+Z)wk)\, dZ\, dk$$

pour tout $Y \in m_X$. Il existe une famille $(c(w))_{w\in W}$ de nombres réels $> 0$ telle que pour tout $f \in C_c^\infty(g)$,

$$\phi(X,f) = \sum_{w\in W} c(w)\, \phi^{M_X}(X, f_w).$$

En particulier il existe $w \in W$ tel que $\phi^{M_X}(X, Q_{\Gamma,w}) \neq 0$. Quitte à remplacer $X$ et $\boldsymbol{P}$ par $w^{-1}Xw$ et $w^{-1}\boldsymbol{P}w$, on peut supposer $w = 1$. Alors

$$Q_{\Gamma,1} \neq 0.$$

Notons $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ et $\Sigma_3$ les sous-ensembles de $\Sigma$ tels que

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{z} \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha\in\Sigma_1} \boldsymbol{u}_\alpha\Big),$$

$$\boldsymbol{m}_X = \boldsymbol{z} \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha\in\Sigma_2} \boldsymbol{u}_\alpha\Big),$$

$$\boldsymbol{u}_P = \bigoplus_{\alpha\in\Sigma_3} \boldsymbol{u}_\alpha.$$

Pour $j = 1,2,3$, posons $\overline{\Sigma}_j = \overline{\Sigma} \cap \Sigma_j$. Alors

$$(p \cap k(L) + k(L)^1)/k(L)^1 = \overline{s} \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha\in\overline{\Sigma}_1} \overline{v}_\alpha\Big), \tag{1}$$

$$(m_X \cap k(L) + k(L)^1)/k(L)^1 = \overline{s} \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha\in\overline{\Sigma}_2} \overline{v}_\alpha\Big), \tag{2}$$

$$(3) \qquad (u_P \cap k(L) + k(L)^1)/k(L)^1 = \bigoplus_{\alpha \in \overline{\Sigma}_3} \overline{v}_\alpha .$$

Les ensembles $\overline{\Sigma}_j$, pour $j = 1, 2, 3$, vérifient les propriétés suivantes :
- si $\alpha, \beta \in \overline{\Sigma}_1$ et $\alpha + \beta \in \overline{\Sigma}$, alors $\alpha + \beta \in \overline{\Sigma}_1$ ;
- $\overline{\Sigma} = \overline{\Sigma}_1 \cup (-\overline{\Sigma}_1)$ ;
- $\overline{\Sigma}_2 = \overline{\Sigma}_1 \cap (-\overline{\Sigma}_1)$,
- $\overline{\Sigma}_3 = \overline{\Sigma}_1 - \overline{\Sigma}_2$.

Il en résulte qu'il existe un sous-groupe parabolique $\overline{\boldsymbol{P}}$ de $\boldsymbol{G}(L)$ et un sous-groupe de Lévi $\overline{\boldsymbol{M}}_X$ de $\overline{\boldsymbol{P}}$, tous deux définis sur $\mathbb{F}_q$, tels que les ensembles (1), resp. (2), (3), soient égaux à $\overline{P}$, resp. $\overline{m}_X$, $\overline{u}_P$. La fonction $Q_\Gamma$ est invariante par conjugaison par $K(L)^0$. Il résulte de la définition de $Q_{\Gamma,1}$ et des égalités (1), (2) et (3) que $Q_{\Gamma,1}$ est à support dans $m_X \cap k(L)$, invariante par $m_X \cap k(L)^1$ et, si l'on identifie $Q_\Gamma$ et $Q_{\Gamma,1}$ à des fonctions sur $g(L)$, resp. $\overline{m}_X$, $Q_{\Gamma,1}$ est proportionnel à $(Q_\Gamma)_{\overline{P}}$ (*cf.* II.1). On a donc

$$(Q_\Gamma)_{\overline{P}} \neq 0 .$$

Posons $\xi = (k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$ ou $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1, \varepsilon)$. Il résulte de la relation précédente, de la définition de $\Theta(V, \xi)$, des relations II.7 (2) et II.7 (4) et des propriétés usuelles du foncteur induction qu'il existe $\overline{\boldsymbol{M}}_\xi \in \text{Lévi}_{\mathbb{F}_q}(\boldsymbol{G}(L))$ tel que

$$(4) \qquad \overline{\boldsymbol{M}}_\xi \simeq \boldsymbol{G}(V'_\xi) \times \boldsymbol{G}(V''_\xi) \times \prod_{j=1}^{c(\boldsymbol{\mu}^0)} \boldsymbol{GL}(\mu_j^0)$$

(remplacer $\boldsymbol{GL}$ par $\text{Res}_{\mathbb{F}_q^2/\mathbb{F}_q} \boldsymbol{GL}$ dans le cas unitaire) où $V'_\xi$, resp. $V''_\xi$, est un sous-espace non dégénéré de $\ell'$, resp. $\ell''$, tel que $q_{V'_\xi}$, resp. $q_{V''_\xi}$, ait même noyau anisotrope que $q_{\ell'}$, resp. $q_{\ell''}$ ;

(5) si $V'_\xi \neq \{0\}$, resp. $V''_\xi \neq \{0\}$, alors $\mathcal{T}^{a,\boldsymbol{G}(V'_\xi)} \neq \varnothing$, resp. $\mathcal{T}^{a,\boldsymbol{G}(V''_\xi)} \neq \varnothing$;

(6) $\overline{s} \subset \overline{m}_\xi \subset \overline{m}$;

(7) si $\xi$ est exceptionnel et $\varepsilon = 1$, resp. $-1$, il existe, resp. il n'existe pas de $x \in G(L)$ tel que $x\overline{m}_\xi x^{-1}$ stabilise le sous-espace $\ell'^+ \oplus \ell''^+$ fixé en II.10.

Notons $\overline{\Sigma}_\xi$ le sous-ensemble de $\overline{\Sigma}$ tel que :

$$\overline{m}_\xi = \overline{s} \oplus \Big( \bigoplus_{\alpha \in \overline{\Sigma}_\xi} \overline{v}_\alpha \Big).$$

Notons $\boldsymbol{a}_\xi$ le sous-espace des $Y \in \boldsymbol{a}$ tels que $\alpha(Y) = 0$ pour tout $\alpha \in \overline{\Sigma}_\xi$ et posons

$$\boldsymbol{M}'_\xi = \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{a}_\xi).$$

Grâce à (4) et (7), on vérifie que $\boldsymbol{M}'_\xi$ est conjugué à $\boldsymbol{M}_\xi$ par un élément de $G$.

***Remarque***. — Cela serait faux si $V'_\xi$ ou $V''_\xi$ était orthogonal, isotrope et de dimension 2. Mais ce cas est exclu d'après (5).

D'après (6), on a $\overline{\Sigma}_\xi \subset \overline{\Sigma}_2 \subset \Sigma_2$. Donc $\boldsymbol{Z_a}(\boldsymbol{m}_X) \subset \boldsymbol{a}_\xi$, puis

$$\boldsymbol{M}'_\xi \subset \boldsymbol{Z_G}(\boldsymbol{Z_a}(\boldsymbol{m}_X)) = \boldsymbol{M}_X .$$

Cela achève la démonstration. □

**IV.12.** Si $(V, q_V)$ est unitaire, on pose $\mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V) = \mathcal{I}_0(V)$ et $\Xi^{\mathrm{st}}(V) = \Xi(V)$. Si $(V, q_V)$ est symplectique ou orthogonal, on note $\mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V)$ l'ensemble des $(k', k'') \in \mathcal{I}_0(V)$ tels que

- $k' = k''$, si $(V, q_V)$ est symplectique ou orthogonal pair,
- $|k' - k''| = 1$, si $(V, q_V)$ est orthogonal impair.

On note $\Xi^{\mathrm{st}}(V)$ l'ensemble des éléments $\xi$ de $\Xi(V)$ tels que l'élément de $\mathcal{I}_0(V)$ figurant dans les données $\xi$ appartienne à $\mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V)$.

Pour tout $\xi \in \Xi(V)$, on note $\overline{1}$ la classe dans $\overline{\mathcal{K}}(\xi)$ de l'élément neutre de $\mathcal{K}(\xi)$.

***Remarque.*** — Dans le cas particulier où l'on a défini la classe $\overline{\kappa}^0$, on vérifie que $1 \notin \overline{\kappa}^0$.

***Lemme.*** — *Soient $\xi \in \Xi(V)$ et $\overline{\kappa} \in \overline{\mathcal{K}}(\xi)$.*

(i) *Si $\xi \in \Xi^{\mathrm{st}}(V)$ et $\overline{\kappa} = \overline{1}$, $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\overline{\kappa}} \in \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^{\mathrm{st}} \cap \mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$.*

(ii) *Si $\xi \notin \Xi^{\mathrm{st}}(V)$ ou $\overline{\kappa} \neq \overline{1}$, il existe une famille de données endoscopiques $(\boldsymbol{H}_n, s_n, \xi_n)_{n=1,\dots,N}$ de $\boldsymbol{M}_\xi$ et une distribution $D$ telles que*

- *$D \in \sum_{n=1}^{N} (\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}^{M_\xi} \cap \mathcal{D}^{M_\xi, H_n})$ ;*
- *$\boldsymbol{H}_n \neq \boldsymbol{M}_\xi$ pour tout $n = 1, \dots, N$ ;*
- *$D$ est invariante par $N_G(M_\xi)$ ;*
- *$\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\overline{\kappa}} = \mathrm{res}_{\mathcal{H}} \circ \mathrm{ind}^G_{M_\xi}(D)$.*

***Remarque.*** — Il y a un conflit de notations : $\xi_n$ ne désigne pas un élément d'un ensemble $\Xi$. Mais ces $\xi_n$ n'interviennent que de façon minimaliste.

*Démonstration.* — Ecrivons $\xi = (k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$ ou $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1, \varepsilon)$. Commençons d'abord par traiter le cas où l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$(1) \qquad \begin{cases} \bullet \quad k' = k'' = 0; \\ \bullet \quad (V, q_V) \text{ est orthogonal impair et } (k', k'') = (1, 0). \end{cases}$$

Supposons de plus que $(V, q_V)$ n'est pas orthogonal pair.

Fixons $e^0 \in \mathcal{E}(\xi)$, associons à $\theta(\xi, e^0)$ un sous-tore $\boldsymbol{T}$ de $\boldsymbol{G}$ et un élément $X_T \in t$ comme en III.1 et III.2. D'après l'hypothèse ci-dessus, $\boldsymbol{T}$ est un sous-tore maximal de $\boldsymbol{G}$. Introduisons des données $(I, (a_i), (c_i))$ de sorte que $X_T \in \mathcal{O}(I, (a_i), (c_i))$ (*cf.* I.7). Identifions $I^*$ à $\{1, \dots, c(\boldsymbol{\mu}^1)\}$ de sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, c(\boldsymbol{\mu}^1)\}$,

$$[F_i : F] = 2\mu_i^1 .$$

Pour tous $e \in \mathcal{E}(\xi)$ et $i \in I$, fixons $c(e)_i \in c_i F_i^{\# \times}$ tel que :

$$c(e)_i = c_i , \ \text{ si } i \notin I^* ,$$

$$\mathrm{sgn}_{F_i/F_i^\#}(c(e)_i c_i^{-1}) = (-1)^{e_i - e_i^0}.$$

Les données $(I,(a_i),(c(e)_i))$ paramétrisent une classe de conjugaison dans $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$. Fixons un élément $X_T^e$ de cette classe. Alors $X_T^e$ est un élément associé comme en III.2 à $\theta(\xi,e)$. L'application

$$e \longmapsto X_T^e$$

est une bijection de $\mathcal{E}(\xi)$ sur le groupe $\mathcal{E}(X_T)$ des classes de conjugaison par $G$ contenues dans $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X_T)$. Identifions ainsi $\mathcal{E}(\xi)$ à $\mathcal{E}(X_T)$. Soit $\kappa \in \overline{\kappa}$ l'élément fixé en IV.10.

Définissons une fonction $\widetilde{\kappa}$ sur $\mathcal{E}(X_T)$ par

$$\widetilde{\kappa}(e) = \kappa(e)\kappa(e^0)^{-1}$$

pour tout $e \in \mathcal{E}(X_T)$. Alors $\widetilde{\kappa}$ appartient au groupe dual $\mathcal{K}(X_T)$ de $\mathcal{E}(X_T)$. Posons

$$\phi^{\widetilde{\kappa}}(X_T,\cdot) = \sum_{e\in\mathcal{E}(X_T)} \widetilde{\kappa}(e)\phi(X_T^e,\cdot).$$

Par définition,

$$\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\overline{\kappa}} = \kappa(e^0)\,\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\phi^{\widetilde{\kappa}}(X_T,\cdot)).$$

Remarquons que d'après (1), $\xi \in \Xi^{\mathrm{st}}(V)$. D'autre part $\widetilde{\kappa} = 1$ si et seulement si $\overline{\kappa} = \overline{1}$. Si $\overline{\kappa} = \overline{1}$, $\phi^{\widetilde{\kappa}}(X_T,\cdot) = \phi^{\mathrm{st}}(X,\cdot)$. C'est un élément de $\mathcal{D}^{\mathrm{st}}\cap\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}$. Cela démontre le (i) de l'énoncé sous nos hypothèses. Supposons $\overline{\kappa} \neq \overline{1}$. On peut supposer que $X_T^e \in \mathfrak{m}_\xi$ pour tout $e \in \mathcal{E}(\xi)$. Remarquons que l'application naturelle $\mathcal{E}^{M_\xi}(X_T) \to \mathcal{E}^G(X_T)$ est un isomorphisme. D'autre part, il résulte de la définition de l'induction que

$$\phi^G(X,\cdot) = \Delta_{G,M_\xi}(X)^{-1}\,\mathrm{ind}_{M_\xi}^G(\phi^{M_\xi}(X,\cdot))$$

pour tout $X \in \mathfrak{m}_\xi \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$. Enfin, pour tout $e \in \mathcal{E}(\xi)$, $X_T^e$ est entier et de réduction régulière, d'où $\Delta_{G,M_\xi}(X_T^e) = 1$. On obtient alors l'égalité :

$$\phi^{\widetilde{\kappa}}(X_T,\cdot) = \mathrm{ind}_{M_\xi}^G(\phi^{M_\xi,\widetilde{\kappa}}(X_T,\cdot)).$$

Soit $(\boldsymbol{H},s,\xi)$ des données endoscopiques pour le groupe $\boldsymbol{M}_\xi$ telle que $\widetilde{\kappa} \in \mathcal{K}^{M_\xi,H}(X_T)$ (*cf.* IV.5 ; on s'excuse pour la double utilisation de la lettre $\xi$). Puisque $X_T$ est elliptique dans $\mathfrak{m}_\xi$, cette donnée est unique et, puisque $\widetilde{\kappa} \neq 1$, on a $\boldsymbol{H} \neq \boldsymbol{M}_\xi$ (*cf.* IV.5 (2)). Identifions $W_G(M_\xi)$ à un ensemble de représentants dans $G$. Pour tout $D \in \mathcal{D}^{M_\xi}$ et $w \in W_G(M_\xi)$, on a l'égalité

$$\mathrm{ind}_{M_\xi}^G(D\circ\mathrm{Ad}(w)) = \mathrm{ind}_{M_\xi}^G(D).$$

Posons

$$D = \kappa(e^0)|W_G(M_\xi)|^{-1}\sum_{w\in W_G(M_\xi)} \phi^{M_\xi,\widetilde{\kappa}}(X_T,\cdot)\circ\mathrm{Ad}(w).$$

On a alors l'égalité

$$\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\overline{\kappa}} = \mathrm{res}_{\mathcal{H}}\circ\mathrm{ind}_{M_\xi}^G(D).$$

Pour tout $w \in W_G(M_\xi)$, il existe des données endoscopiques $(\boldsymbol{H}_w,s_w,\xi_w)$ de $\boldsymbol{M}_\xi$ telles que

$$\phi^{M_\xi,\widetilde{\kappa}}(X_T,\cdot)\circ\mathrm{Ad}(w) \in \mathcal{D}^{M_\xi}_{\mathrm{ent}} \cap \mathcal{D}^{M_\xi,H_w}.$$

Ces données sont obtenues par transport de structure à partir de $(\boldsymbol{H}, s, \xi)$. Donc $\boldsymbol{H}_w \neq \boldsymbol{M}_\xi$. Toutes les conditions du (ii) de l'énoncé sont vérifiées.

Supposons que $(V, q_V)$ est orthogonal pair et $k' = k'' = 0$. Le seul point à préciser dans la démonstration ci-dessus est le suivant. L'élément $X_T$ étant fixé, pour $e \in \mathcal{E}(\xi)$, une seule des deux classes de conjugaison $\mathcal{O}^+(I, (a_i), (c(e)_i))$ et $\mathcal{O}^-(I, (a_i), (c(e)_i))$ est incluse dans $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X_T)$. On choisit $X_T^e$ dans cette classe. Le reste de la démonstration est sans changement.

Passons au cas où aucune des hypothèses (1) n'est vérifiée. En particulier $(V, q_V)$ n'est pas unitaire. Pour tout $e \in \mathcal{E}(\xi)$, fixons une décomposition $V = V_0^e \oplus V_1^e$ comme en III.1, relative à $\theta(\xi, e)$. On peut supposer $V_0^e \subset V_\xi$ (*cf.* IV.11). Fixons $e^0 \in \mathcal{E}(\xi)$, associons à $\theta(\xi, e^0)$ un sous-tore $\boldsymbol{T}$ de $G(V_1^{e^0})$ et un élément $X_T \in t$ comme en III.1 et III.2. Introduisons des données $(I, (a_i), (c_i))$ de sorte que $X_T$ appartienne à la classe de conjugaison par $G(V_1^e)$ dans $g(V_1^e)$ paramétrisée par $(I, (a_i), (c_i))$ (ou à l'une des deux classes dans le cas orthogonal pair). Pour $e \in \mathcal{E}(\xi)$ et $i \in I$, définissons $c(e)_i$ comme précédemment. Alors les données $(I, (a_i), (c(e)_i))$ paramétrisent une (ou deux) classes de conjugaison dans $g(V_1^e)$. Fixons $X_T^e$ dans cette classe. Introduisons des objets $J, \Gamma, \sigma, \mathcal{E}, \kappa_0, A(\gamma)$ comme en IV.1 ou IV.2, relatifs à $\theta(\xi, e)$. Remarquons que l'on peut supposer ces objets indépendants de $e$. On le suppose.

Supposons $(V, q_V)$ symplectique. Pour $\gamma \in \Gamma$ et $a \in A(\gamma)$, posons

$$X[a] = X_T^{e^0}[a, 1]$$

(*cf.* IV.1 ; on a noté 1 l'élément neutre de $\mathcal{E}$). Il résulte de I.7 et des définitions que l'application

$$(e', e) \longmapsto \mathcal{O}(X_T^e[a, e'])$$

est une bijection de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}(\xi)$ sur le groupe des classes $\mathcal{E}(X[a])$. Identifions ces deux ensembles. Soit $\kappa \in \overline{\kappa}$ l'élément fixé en IV.10, définissons une fonction $\kappa[a]$ sur $\mathcal{E}(X[a])$ par

$$\kappa[a](e', e) = \kappa(e^0)^{-1}\kappa_0(e')\kappa(e).$$

Alors $\kappa[a] \in \mathcal{K}(X[a])$. On définit comme précédemment la distribution $\phi^{\kappa[a]}(X[a], \cdot)$. Les définitions et la proposition IV.3 impliquent l'existence d'une constante $c \neq 0$ telle que

$$\phi_{\xi,\overline{\kappa}}^{\mathcal{H}} = \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D),$$

où

$$D = c\sum_{\gamma\in\Gamma}\Gamma(\gamma)\int_{A(\gamma)}\phi^{\kappa[a]}(X[a], \cdot)\,da.$$

Remarquons que pour tous $\gamma \in \Gamma$, $a \in A(\gamma)$, $e' \in \mathcal{E}$, $e \in \mathcal{E}(\xi)$, on peut supposer $X_T^e[a, e'] \in m_\xi$. D'autre part, pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $a \in A(\gamma)$, $\kappa[a] = 1$ si et seulement si $\xi \in \Xi^{\mathrm{st}}(V)$ et $\overline{\kappa} = \overline{1}$. On termine la démonstration comme précédemment.

Supposons $(\mathrm{V}, q_V)$ orthogonal impair. Soient $\gamma \in \Gamma$ et $a \in A(\gamma)$. Posons encore

$$X[a] = X_T^{e^0}[a, 1].$$

On a deux familles $a = (a_i)_{i\in J} \in A(\gamma)$ et $(a_i)_{i\in I}$ figurant dans les données $(I,(a_i),(c_i))$. On suppose $I$ et $J$ disjoints. On pose $\widetilde{I} = J \cup I$ et on définit la famille $\widetilde{a} = (\widetilde{a}_i)_{i\in\widetilde{I}}$, réunion des deux précédentes. Remarquons qu'à tout $i \in \widetilde{I}$ est associée une $F$-algèbre $F_i = F[\widetilde{a}_i]$ et une sous-algèbre $F_i^{\#}$ d'indice 2. On définit une famille $(\widetilde{c}_i)_{i\in\widetilde{I}}$ par

$$\widetilde{c}_i = \begin{cases} c[a,1]_i\,, & \text{si } i \in J\,, \\ c_i\,, & \text{si } i \in I\,. \end{cases}$$

Alors $X[a]$ appartient à $\mathcal{O}(\widetilde{I},(\widetilde{a}_i),(\widetilde{c}_i))$. On a $\widetilde{I}^* = J \cup I^*$. Posons

$$\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^{I^*}\,.$$

Alors $\mathcal{E}(X[a])$ est naturellement isomorphe à $\widetilde{\mathcal{E}}$ (*cf.* I.7). On identifie ces deux ensembles. Notons $\widetilde{\mathcal{F}}$ le sous-groupe des $\widetilde{e} \in \widetilde{\mathcal{E}}$ tels que pour tout $i \in J$, $i$ impair et $i \leqslant |k'-k''|$, on ait $\widetilde{e}_{i-1} = \widetilde{e}_i$.

Comme précédemment, on peut identifier $I^*$ à $\{1,\ldots,c(\boldsymbol{\mu}^1)\}$ et $\mathcal{E}(\xi)$ à un sous-ensemble de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^*}$. Pour $e' \in \mathcal{E}$ et $e \in \mathcal{E}(\xi)$, définissons $\widetilde{e} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^*}$ par

$$\widetilde{e}_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i \in J \text{ et } \operatorname{sgn}(e'_i) = 1\,, \\ 1, & \text{si } i \in J \text{ et } \operatorname{sgn}(e'_i) = -1 \\ e_i - e_i^0\,, & \text{si } i \in I^*\,. \end{cases}$$

L'élément $X_T^{e}[a,e']$ appartient à la classe dans $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(X[a])$ paramétrisée par $\widetilde{e}$. L'application $(e',e) \mapsto \widetilde{e}$ est une bijection de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}(\xi)$ sur $\widetilde{\mathcal{F}}$. Identifions ces deux ensembles. Soit $\kappa \in \overline{\kappa}$ l'élément fixé en IV.10, définissons une fonction $\kappa_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ sur $\widetilde{\mathcal{F}}$ par

$$\kappa_{\widetilde{\mathcal{F}}}(e',e) = \kappa(e^0)^{-1}\kappa_0(e')\kappa(e)$$

pour tous $e' \in \mathcal{E}$, $e \in \mathcal{E}(\xi)$. Alors $\kappa_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ est un caractère de $\widetilde{\mathcal{F}}$. Notons $\mathcal{K}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{K}(X[a])$ dont la restriction à $\widetilde{\mathcal{F}}$ est égale à $\kappa_{\widetilde{\mathcal{F}}}$.

Définissons une distribution $D(a) \in \mathcal{D}$ par

$$D(a) = \sum_{(e',e)\in\mathcal{E}\times\mathcal{E}(\xi)} \kappa_{\widetilde{\mathcal{F}}}(e',e)\,\phi(X_T^{e}[a,e'],\cdot)\,.$$

D'après les descriptions ci-dessus, on a l'égalité :

$$D(a) = |\mathcal{K}_{\widetilde{\mathcal{F}}}|^{-1} \sum_{\widetilde{\kappa}\in\mathcal{K}_{\widetilde{\mathcal{F}}}} \phi^{\widetilde{\kappa}}(X[a],\cdot)\,.$$

Comme dans le cas symplectique, il existe $c \neq 0$ tel que

$$\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\overline{\kappa}} = \operatorname{res}_{\mathcal{H}}(D)\,,$$

où

$$D = c\sum_{\gamma\in\Gamma}\sigma(\gamma)\int_{A(\gamma)} D(a)\,da\,.$$

On a l'égalité :

$$D = c|\mathcal{K}_{\widetilde{\mathcal{F}}}|^{-1} \sum_{\gamma\in\Gamma} \Gamma(\gamma) \int_{A(\gamma)} \sum_{\widetilde{\kappa}\in\mathcal{K}_{\widetilde{\mathcal{F}}}} \phi^{\widetilde{\kappa}}(X[a],\cdot)\, da.$$

Supposons $\xi \in \Xi^{\mathrm{st}}(V)$ et $\overline{\kappa} = \overline{1}$. Alors $\widetilde{\mathcal{F}} = \widetilde{\mathcal{E}}$, $\kappa_{\widetilde{\mathcal{F}}} = 1$, donc $\mathcal{K}_{\widetilde{\mathcal{F}}} = \{1\}$. Si au contraire $\xi \notin \Xi^{\mathrm{st}}(V)$ ou $\overline{\kappa} \neq \overline{1}$, alors $\kappa_{\widetilde{\mathcal{F}}} \neq 1$, donc, pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $a \in A(\gamma)$ l'élément neutre de $\mathcal{K}(X[a])$ n'appartient pas à $\mathcal{K}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$. On termine la démonstration comme précédemment.

Supposons $(V, q_V)$ orthogonal pair. La première relation de (1) n'étant pas vérifiée, $\xi$ n'est pas exceptionnel. Soient $\gamma \in \Gamma$ et $a \in A(\gamma)$. Pour $e' \in \mathcal{E}$ et $e \in \mathcal{E}(\xi)$, on introduit comme en IV.2 des éléments $X_T^{e,+}[a,e']$ et $X_T^{e,-}[a,e']$. On peut choisir les signes de sorte que les éléments $X_T^{e,+}[a,e']$, resp. $X_T^{e,-}[a,e']$, appartiennent à une même classe de conjugaison stable quand $(e', e)$ décrit $\mathcal{E} \times \mathcal{E}(\xi)$. La démonstration est alors analogue à celle du cas orthogonal impair : il suffit d'y remplacer toutes les distributions $\phi(X_T^e[a,e'],\cdot)$ par $\phi(X_T^{e,+}[a,e'],\cdot) + \phi(X_T^{e,-}[a,e'],\cdot)$. □

***IV.13. Théorème***. — *La famille* $(\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\overline{1}})_{\xi\in\Xi^{\mathrm{st}}(V)}$ *est une base de* $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^{\mathrm{st}}) \cap \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$.

*Démonstration*. — Notons $\mathcal{X}$ l'ensemble des couples $(\xi, \overline{\kappa})$ tels que $\xi \in \Xi(V)$ et $\overline{\kappa} \in \overline{\mathcal{K}}(\xi)$ tels que $\xi \notin \Xi^{\mathrm{st}}(V)$ ou $\overline{\kappa} \neq \overline{1}$. D'après les lemmes IV.10 (ii) et IV.12 (i), il s'agit de prouver l'assertion suivante :

(1) soit $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{st}}$ et, pour tout $(\xi, \overline{\kappa}) \in \mathcal{X}$, soit $c(\xi, \overline{\kappa}) \in \mathbb{C}$. Supposons que $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D) = \sum_{(\xi,\overline{\kappa})\in\mathcal{X}} c(\xi,\overline{\kappa})\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\overline{\kappa}}$. Alors $c(\xi, \overline{\kappa}) = 0$ pour tout $(\xi, \overline{\kappa}) \in \mathcal{X}$.

Soient donc $D$ et des coefficients $c(\xi, \overline{\kappa})$ vérifiant l'hypothèse ci-dessus. Posons

$$\mathcal{Y} = \{(\xi,\overline{\kappa}) \in \mathcal{X};\, c(\xi,\overline{\kappa}) \neq 0\}.$$

Puisque $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D) \in \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$, la distribution $\widehat{D}$ est localement intégrable sur $\mathfrak{g}_{\mathrm{tn}}$. Notons $\varphi_{\widehat{D}}$ la fonction sur $\mathfrak{g}_{\mathrm{tn}}$ associée à $\widehat{D}$. Elle est localement constante sur $\mathfrak{g}_{\mathrm{tn}} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ (*cf.* I.9). Montrons que

(2) si $(\xi, \overline{\kappa}) \in \mathcal{Y}$, il existe $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{tn}} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ tel que $\varphi_{\widehat{D}}(X) \neq 0$ et $(\boldsymbol{M}_\xi) \subset (\boldsymbol{M}_X)$.

Soit $(\xi, \overline{\kappa}) \in \mathcal{Y}$, utilisons la fonction $Q_{\xi,\overline{\kappa}}$ de IV.11. Puisque $\widehat{Q}_{\xi,\overline{\kappa}} \in \mathcal{H}$, on a les égalités

$$\begin{aligned} D(\widehat{Q}_{\xi,\overline{\kappa}}) &= \sum_{(\xi',\overline{\kappa}')\in\mathcal{X}} c(\xi',\overline{\kappa}')\,\phi^{\mathcal{H}}_{\xi',\overline{\kappa}'} \circ \mathrm{res}_{\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}}(\widehat{Q}_{\xi,\overline{\kappa}}) \\ &= c(\xi,\overline{\kappa}). \end{aligned}$$

Donc $D(\widehat{Q}_{\xi,\overline{\kappa}}) \neq 0$. D'autre part, on a les égalités :

$$D(\widehat{Q}_{\xi,\overline{\kappa}}) = \widehat{D}(Q_{\xi,\overline{\kappa}}) = \int_{\mathfrak{g}_{\mathrm{tn}}} Q_{\xi,\overline{\kappa}}(X)\varphi_{\widehat{D}}(X)\, dX.$$

Puisque $\varphi_{\widehat{D}}$ est invariante par conjugaison par $G$, la non-nullité de cette intégrale implique l'existence de $X \in g_{\text{tn}} \cap g_{\text{reg}}$ tel que $\varphi_{\widehat{D}}(X) \neq 0$ et $\phi(X, Q_{\xi,\overline{\kappa}}) \neq 0$. L'assertion (2) résulte du lemme IV.11.

Pour tout $(\xi, \overline{\kappa}) \in \mathcal{Y}$, appliquons-lui le lemme IV.12 (ii). On en déduit une distribution que nous noterons $D_{\xi,\overline{\kappa}} \in \mathcal{D}_{\text{ent}}^{M_\xi}$. Notons $\varphi_{\xi,\overline{\kappa}}$ la fonction sur $m_{\xi,\text{tn}}$ associée à la distribution $\widehat{D}_{\xi,\overline{\kappa}}$ qui est localement intégrable sur $m_{\xi,\text{tn}}$. Pour tout $X \in g$, posons

$$C(X, \xi) = \{x \in G; x^{-1} X x \in m_\xi\}.$$

D'après IV.4 (1), pour tout $X \in g_{\text{tn}} \cap g_{\text{reg}}$, on a l'égalité

$$(3) \qquad \varphi_{\widehat{D}}(X) = \sum_{(\xi,\overline{\kappa}) \in \mathcal{Y}} c(\xi, \overline{\kappa}) \sum_{x \in C(X,\xi)/M_\xi} \Delta_{G,M_\xi}(x^{-1} X x)^{-1} \varphi_{\xi,\overline{\kappa}}(x^{-1} X x).$$

Montrons que :

(4) si $X \in g_{\text{tn}} \cap g_{reg}$ vérifie $\varphi_{\widehat{D}}(X) \neq 0$, alors il existe $(\xi, \overline{\kappa}) \in \mathcal{Y}$ tel que

$$(\boldsymbol{M}_X) \subset (\boldsymbol{M}_\xi) \text{ et } (\boldsymbol{M}_X) \neq (\boldsymbol{M}_\xi).$$

Soit $X \in g_{\text{tn}} \cap g_{\text{reg}}$. L'homomorphisme naturel $\mathcal{E}^{M_X}(X) \to \mathcal{E}^G(X)$ est bijectif. Identifions ces deux groupes, notons-les $\mathcal{E}(X)$. Identifions $\mathcal{E}(X)$ à un ensemble de représentants dans $m_X$. Remarquons que pour tout $Y \in \mathcal{E}(X)$, $Y$ est elliptique dans $m_X$, donc $\boldsymbol{M}_Y = \boldsymbol{M}_X$. D'autre part, si $Z \in g_{\text{reg}}$ et $(\xi, \overline{\kappa}) \in \mathcal{Y}$ vérifient $C(Z, \xi) \neq \varnothing$, on a $(\boldsymbol{M}_Z) \subset (\boldsymbol{M}_\xi)$. Posons

$$\mathcal{Z} = \{(\xi, \overline{\kappa}) \in \mathcal{Y}; (\boldsymbol{M}_X) \subset (\boldsymbol{M}_\xi)\}.$$

Pour $Y \in \mathcal{E}(X)$, l'égalité (3) devient :

$$\varphi_{\widehat{D}}(Y) = \sum_{(\xi,\overline{\kappa}) \in \mathcal{Z}} c(\xi, \overline{\kappa}) \sum_{x \in C(Y,\xi)/M_\xi} \Delta_{G,M_\xi}(x^{-1} Y x)^{-1} \varphi_{\xi,\overline{\kappa}}(x^{-1} Y x).$$

Si $\mathcal{Z} = \varnothing$, $\varphi_{\widehat{D}}$ est nul sur $\mathcal{E}(X)$, *a fortiori* $\varphi_{\widehat{D}}(X) = 0$. Supposons $\mathcal{Z} \neq \varnothing$ et $(\boldsymbol{M}_X) = (\boldsymbol{M}_\xi)$ pour tout $(\xi, \overline{\kappa}) \in \mathcal{Z}$. Quitte à conjuguer $\boldsymbol{M}_\xi$, on peut supposer $\boldsymbol{M}_X = \boldsymbol{M}_\xi$ pour tout $(\xi, \overline{\kappa}) \in \mathcal{Z}$. Soit $Y \in \mathcal{E}(X)$. Puisque $Y$ est elliptique dans $m_X$, on a :

$$C(Y, \xi) = N_G(M_\xi),$$

et, pour tout $x \in N_G(M_\xi)$,

$$\Delta_{G,M_\xi}(x^{-1} Y x) = \Delta_{G,M_\xi}(Y) = \Delta_{G,M_X}(X).$$

Pour tout $(\xi, \overline{\kappa})$, la distribution $D_{\xi,\overline{\kappa}}$ est invariante par $N_G(M_\xi)$ donc $\varphi_{\xi,\overline{\kappa}}$ l'est aussi. On obtient :

$$\varphi_{\widehat{D}}(Y) = |W_G(M_X)| \Delta_{G,M_X}(X)^{-1} \sum_{(\xi,\overline{\kappa}) \in \mathcal{Z}} c(\xi, \overline{\kappa}) \varphi_{\xi,\overline{\kappa}}(Y).$$

Considérons les deux membres de cette égalité comme des fonctions sur $\mathcal{E}(X)$. Puisque $D \in \mathcal{D}^{\text{st}}$, il résulte de IV.5 (1) et (3) que le membre de gauche est constant. Les propriétés des distributions $D_{\xi,\overline{\kappa}}$ (*cf.* lemme IV.12 (ii)) et les relations IV.5 (1), (2) et (3) entraînent que le membre de droite est combinaison linéaire de caractères de

$\mathcal{E}(X)$ tous non constants. Alors les deux membres de l'égalité ci-dessus sont nuls. *A fortiori* $\varphi_{\widehat{D}}(X) = 0$. Cela démontre (4).

Démontrons maintenant (1). Si $\mathcal{Y} \neq \varnothing$, fixons $(\xi, \overline{\kappa}) \in \mathcal{Y}$ tel que $M_\xi$ soit de dimension maximale. L'application successive de (2) et (4) conduit à une contradiction. Donc $\mathcal{Y} = \varnothing$, ce qui démontre (1) et le théorème. □

**IV.14.** Soit $L$ un réseau autodual de $V$. Notons $\mathrm{Unip}(V)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles unipotentes de $G(L)$ ([C], p. 379). Puisque $G$ agit transitivement sur l'ensemble des réseaux autoduaux de $V$, cet ensemble est essentiellement indépendant de $L$.

***Lemme***. — *Les ensembles* $\Xi^{\mathrm{st}}(V)$ *et* $\mathrm{Unip}(V)$ *ont même nombre d'éléments.*

*Démonstration.* — Supposons $(V, q_V)$ unitaire. Alors $\Xi^{\mathrm{st}}(V) = \Xi(V)$. L'ensemble $\Xi(V)$ est en bijection avec $\mathcal{P}(d)$ : à $\xi = (0, 0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$, on associe la partition dont les termes non nuls sont, à l'ordre près :

$$2\mu_1^0, \ldots, 2\mu^0_{c(\boldsymbol{\mu}^0)}, \mu_1^1, \ldots, \mu^1_{c(\boldsymbol{\mu}^1)}.$$

Donc $|\Xi^{\mathrm{st}}(V)| = |\mathcal{P}(d)|$. Or $|\mathrm{Unip}(V)| = |\mathcal{P}(d)|$ ([C], p. 465).

Pour tout entier $n \geqslant 1$, notons

- $w_C(n)$ le nombre de classes de conjugaison dans le groupe $W(C_n)$ ;
- $w_D(n)$ le nombre de classes de conjugaison dans le groupe $W(D_n)$ ;
- $w_D^-(n)$ le nombre de classes de conjugaison par $W(D_n)$ dans l'ensemble $W(C_n) - W(D_n)$.

Il résulte de II.3 que :

(1) $w_C(n)$ est égal au nombre de couples de partitions $(\boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$ tels que $S(\boldsymbol{\mu}^0) + S(\boldsymbol{\mu}^1) = n$ ;

- $w_D(n)$ est égal au nombre d'éléments de l'ensemble avec multiplicités formé des couples de partitions $(\boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$ tels que $S(\boldsymbol{\mu}^0) + S(\boldsymbol{\mu}^1) = n$ et $c(\boldsymbol{\mu}^1)$ est pair, la multiplicité d'un tel couple étant 2 si $\boldsymbol{\mu}^1 = \varnothing$ et tous les termes de $\boldsymbol{\mu}^0$ sont pairs, 1 sinon ;
- $w_D^-(n)$ est égal au nombre de couples de partitions $(\boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1)$ tels que $S(\boldsymbol{\mu}^0) + S(\boldsymbol{\mu}^1) = n$ et $c(\boldsymbol{\mu}^1)$ est impair.

On pose formellement $w_C(0) = 1$ et $w_C(n) = 0$ pour tout entier $n < 0$. L'égalité (1) reste vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Posons

$$\mathcal{X} = \big\{(k', k'') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ k' \text{ impair},\ k'' \text{ pair},\ |k' - k''| = 1\big\}.$$

Par définition de $\Xi^{\mathrm{st}}(V)$, on a les égalités :

$$|\Xi^{\mathrm{st}}(V)| = \begin{cases} \sum_{k\in\mathbb{N}} w_C(d/2 - k(k+1)), & \text{si } (V, q_V) \text{ est symplectique,} \\ \sum_{(k',k'')\in\mathcal{X}} w_C([d - (k'^2 + k''^2)]/2), & \text{si } (V, q_V) \text{ est orthogonal impair,} \\ w_D(d/2) + \sum_{k\geqslant 2, k \text{ pair}} w_C(d/2 - k^2), & \text{si } (V, q_V) \text{ est orthogonal pair} \\ & \text{et } q_V \text{ est déployée,} \\ w_D^-(d/2) + \sum_{k\geqslant 2, k \text{ pair}} w_C(d/2 - k^2), & \text{si } (V, q_V) \text{ est orthogonal pair} \\ & \text{et } q_V \text{ n'est pas déployée.} \end{cases}$$

Le nombre d'éléments de $\mathrm{Unip}(V)$ est calculé dans [C], p. 467, 472, et 476. Dans les cas $(V, q_V)$ symplectique ou $(V, q_V)$ orthogonal pair et $q_V$ déployée, ce nombre est donné par la formule ci-dessus. Dans le cas orthogonal impair, l'application

$$(k', k'') \longmapsto h = \inf(k', k'')$$

est une bijection de $\mathcal{X}$ sur $\mathbb{N}$ et l'on a

$$(d - (k'^2 + k''^2))/2 = (d-1)/2 - h^2 - h.$$

Alors

$$|\Xi^{\mathrm{st}}(V)| = \sum_{k\in\mathbb{N}} w((d-1)/2 - h^2 - h),$$

et l'on retrouve la formule de [C], p. 467. Supposons $(V, q_V)$ orthogonal pair et $q_V$ non déployée. D'après [C], p. 476, on a l'égalité

$$|\,\mathrm{Unip}(V)| = \sum_{k\geqslant 1, k \text{ impair}} w_C(d/2 - k^2).$$

On doit donc prouver l'égalité :

$$-w_D^-(d/2) = \sum_{k\geqslant 1} (-1)^k w_C(d/2 - k^2). \tag{2}$$

Définissons les séries formelles

$$P(T) = \prod_{i\geqslant 1} (1 - T^i)^{-1}, \quad Q(T) = \prod_{i\geqslant 1} (1 + T^i)^{-1}.$$

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient de $T^n$ dans $P(T)$, resp. $(P(T) - Q(T))/2$, est égal au nombre de partitions de $n$, resp. au nombre de partitions $\boldsymbol{\mu}$ de $n$ telles que $c(\boldsymbol{\mu})$ soit impair. On en déduit que $w_C(n)$, resp. $w_D^-(n)$, est le coefficient de $T^n$ dans $P(T)^2$, resp. $P(T)(P(T) - Q(T))/2$. Posons

$$S(T) = \sum_{k\geqslant 1} (-1)^k T^{k^2}.$$

Alors le membre de gauche, resp. droite, de l'égalité (2) à démontrer est le coefficient de $T^{d/2}$ dans $P(T)(Q(T) - P(T))/2$, resp. $P(T)^2 S(T)$. Il suffit de prouver que

$$S(T) = (Q(T)\,P(T)^{-1} - 1)/2.$$

Or cela résulte d'une identité de Jacobi ([HW], 19.8.1). □

**IV.15.** Pour $f \in C_c^\infty(g)$ et $z \in F^\times$, définissons $f^z \in C_c^\infty(g)$ par

$$f^z(X) = f(zX)$$

pour tout $X \in g$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, notons $\mathcal{D}[n]$ le sous-espace des $D \in \mathcal{D}$ telles que

$$D(f^{z^2}) = |z|_F^{-n} D(f)$$

pour tous $f \in C_c^\infty(g)$ et $z \in F^\times$.

***Lemme***. — *Soient $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{st}}$ et $(D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{D}$. On suppose*
- *$D_n \in \mathcal{D}[n]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ ;*
- *$D_n = 0$ si $|n|$ est assez grand;*
- *$\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D_n)$.*

*Alors $D_n \in \mathcal{D}^{\mathrm{st}}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

*Démonstration*. — Soit $f \in C_c^\infty(g)^{\mathrm{inst}}$ (*cf.* IV.5). Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in F^\times$ tel que $v_F(z) \geqslant N$, on ait $f^{z^2} \in C_c(g/b) \subset \mathcal{H}$. Pour tout tel $z$, on a donc

$$D(f^{z^2}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} D_n(f^{z^2}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |z|_F^{-n} D_n(f).$$

Il est clair que $f^{z^2} \in C_c^\infty(g)^{\mathrm{inst}}$. Donc $D(f^{z^2}) = 0$. La nullité du nombre de droite de l'égalité ci-dessus pour tout $z \in F^\times$ tel que $v_F(z) \geqslant N$ implique $D_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Cela achève la démonstration. □

***IV.16. Théorème***. — *La dimension de l'espace complexe $\mathcal{D}_{\mathrm{nil}} \cap \mathcal{D}^{\mathrm{st}}$ est égale au nombre d'éléments de* $\mathrm{Unip}(V)$.

*Démonstration*. — D'après le théorème IV.13 et le lemme IV.14, on a l'égalité :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^{\mathrm{st}}) \cap \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})) = |\,\mathrm{Unip}(V)|.$$

Puisque $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}$ est injectif sur $\mathcal{D}_{\mathrm{nil}}$ (théorème I.9 (ii)), on a l'égalité :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}_{\mathrm{nil}} \cap \mathcal{D}^{\mathrm{st}}) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{nil}} \cap \mathcal{D}^{\mathrm{st}})).$$

Il suffit donc de prouver l'égalité

(1) $$\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{nil}} \cap \mathcal{D}^{\mathrm{st}}) = \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^{\mathrm{st}}) \cap \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}).$$

Evidemment, le membre de gauche est inclus dans celui de droite. Il est bien connu que pour tout $\mathcal{O} \in g_{\mathrm{nil}}/G$, l'intégrale orbitale $\phi_{\mathcal{O}}$ appartient à $\mathcal{D}[\dim(\mathcal{O})]$ (il s'agit de la dimension de $\mathcal{O}$ comme variété analytique sur $F$, égale à la dimension algébrique de sa clôture de Zariski). Donc

$$\mathcal{D}_{\mathrm{nil}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_{\mathrm{nil}} \cap \mathcal{D}[n].$$

Soit $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{st}}$, supposons $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D) \in \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$. Alors $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D) \in \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{nil}})$ (théorème I.9 (ii)). Il existe donc une famille $(D_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, presque nulle, telle que $D_n \in \mathcal{D}_{\mathrm{nil}} \cap D[n]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et

$$\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D_n).$$

D'après le lemme IV.15, on a $D_n \in \mathcal{D}^{\mathrm{st}}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a donc

$$\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D) \in \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{nil}} \cap \mathcal{D}^{\mathrm{st}}).$$

Cela démontre que le membre de droite de l'égalité (1) est inclus dans le membre de gauche. Cela achève la démonstration. $\square$

# CHAPITRE V

# TRANSFORMÉES DE FOURIER DES FONCTIONS DE LUSZTIG

**V.1.** Soit $W$ un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{F}_q$. On note $\mathcal{Q}(W)$ l'espace des formes quadratiques sur $W$, que l'on identifie à des formes bilinéaires symétriques par l'égalité « $Q(w) = Q(w,w)$ » pour tous $Q \in \mathcal{Q}(W)$, $w \in W$. On note $W^*$ le dual de $W$, $\langle\, ,\rangle$ le produit bilinéaire naturel sur $W^* \times W$ et $\mathrm{Sym}(W, W^*)$ l'espace des homomorphismes auto-adjoints de $W$ dans $W^*$. On a des bijections réciproques

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Q}(W) & \longrightarrow & \mathrm{Sym}(W,W^*) & \longrightarrow & \mathcal{Q}(W) \\ Q & \longmapsto & X_Q \qquad X & \longmapsto & Q_X \end{array}$$

où, par exemple, $Q_X(w) = \langle X(w), w\rangle$ pour tout $w \in W$. Si $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}(W)$, on pose $\mathrm{Ker}(Q) = \mathrm{Ker}(X_Q)$. Si $Q$ est non dégénérée, on définit $Q^* \in \mathcal{Q}(W^*)$ par $X_{Q^*} = X_Q^{-1}$.

On définit une fonction sgn sur $\mathbb{F}_q$ par

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{F}_q^{\times 2}, \\ -1, & \text{si } x \in \mathbb{F}_q^{\times} - \mathbb{F}_q^{\times 2}. \end{cases}$$

Soit $Q \in \mathcal{Q}(W)$. On pose

$$\mathrm{sgn}(Q) = \mathrm{sgn}(\det(Q)),$$

où $\det(Q)$ est calculé dans une base quelconque de $W$. Par convention $\mathrm{sgn}(Q) = 1$ si $W = \{0\}$. Si $W'$ est un sous-espace de $W$, on note $Q|_{W'}$ la restriction de $Q$ à $W'$ et $A(W')$, ou plus précisément $A(W^*|W')$, l'annulateur de $W'$ dans $W^*$. Si $Q$ est non dégénérée, on a l'égalité :

$$\mathrm{sgn}(Q^*|_{A(W')}) = \mathrm{sgn}(Q)\,\mathrm{sgn}(Q|_{W'}). \tag{1}$$

Si $W'$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{F}_q$ et $X \in \mathrm{Hom}(W', W)$, on définit une forme quadratique $Q[X]$ sur $W'$ par

$$Q[X](w') = Q(X(w'))$$

pour tout $w' \in W'$.

**V.2. Lemme.** — *Soient $W$ un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{F}_q$, $Q$ une forme quadratique non dégénérée sur $W$, $w$ un élément de $W$. On a l'égalité :*

$$\sum_{v\in W} \operatorname{sgn}\circ Q(v)\,\psi\circ Q(w,v) = q\operatorname{sgn}(Q)\operatorname{sgn}Q(w).$$

*Démonstration.* — Notons $S(w)$ le membre de gauche de cette égalité. Remplaçons dans sa définition $v$ par $yv$ où $y\in\mathbb{F}_q^\times$ puis moyennons sur $y\in\mathbb{F}_q^\times$. En se rappelant que pour $x\in\mathbb{F}_q$, on a l'égalité

$$\sum_{y\in\mathbb{F}_q^\times}\psi(xy) = \begin{cases} q-1, & \text{si } x=0,\\ -1, & \text{si } x\neq 0,\end{cases}$$

on obtient :

$$S(w) = -(q-1)^{-1}\Big(\sum_{v\in W}\operatorname{sgn}\circ Q(v)\Big) + q(q-1)^{-1}\Big(\sum_{v\in W'}\operatorname{sgn}\circ Q(v)\Big), \tag{1}$$

où $W'$ est l'orthogonal de $w$. On vérifie que la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{F}_q^\times \longrightarrow \mathbb{N}\\ x\longmapsto |\{v\in W; Q(v)=x\}|\end{cases} \tag{2}$$

est constante, de valeur $q-\operatorname{sgn}(-1)\operatorname{sgn}(Q)$.

La première somme du membre de droite de (1) est donc nulle. Si $w=0$, il en est de même de la deuxième somme. Supposons $w\neq 0$. Si $Q(w)=0$, on a $W'=\mathbb{F}_q w$ et $Q(v)=0$ pour tout $v\in W'$. D'où $S(w)=0$. Si $Q(w)\neq 0$, soit $w'$ un élément non nul de $W'$. La deuxième somme du membre de droite de (1) vaut $(q-1)\operatorname{sgn}\circ Q(w')$. Mais

$$\det(Q)\equiv Q(w)Q(w') \bmod \mathbb{F}_q^{\times 2},$$

d'où le résultat. □

**V.3. Lemme.** — *Soient $h$ un entier $\geqslant 1$, $Z$ un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$ de dimension $h+1$, $Q$ une forme quadratique non dégénéreé sur $Z$, $W$ un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$ de dimension $h$,*

$$\{0\} = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_{h-1} \subsetneq W_h = W$$

*un drapeau complet de sous-espaces de $W$ et enfin $Y\in\operatorname{Hom}(W^*,Z^*)$. On a l'égalité :*

$$\sum_{X\in\operatorname{Hom}(W,Z)}\Big[\prod_{i=1}^{h}\operatorname{sgn}(Q[X]|_{W_i})\Big]\psi\circ\operatorname{trace}(Y^*X)$$
$$= q^{h(h+1)/2}\operatorname{sgn}(Q)^h\prod_{i=0}^{h-1}\operatorname{sgn}(Q^*[Y]|_{A(W_i)}).$$

*Démonstration.* — Soient $\ell \in \{0, \ldots, h\}$ et $X_\ell \in \mathrm{Hom}(W_\ell, Z)$. Posons

$$S(X_\ell) = \sum_{\substack{X \in \mathrm{Hom}(W,Z);\\ X|_{W_\ell} = X_\ell}} \left[\prod_{i=1}^{h} \mathrm{sgn}(Q[X]|_{W_i})\,\psi \circ \mathrm{trace}(Y^* X)\right].$$

On va prouver :

(1)

$$S(X_\ell) = \begin{cases} 0, \text{ si } Y^* X_\ell(W_\ell) \not\subset W_\ell\,; \\ q^{(h-\ell)(h+\ell+1)/2}\,\mathrm{sgn}(Q)^{h-\ell}\left[\prod_{i=\ell}^{h-1} \mathrm{sgn}(Q^*[Y]|_{A(W_i)})\right]\left[\prod_{i=1}^{\ell} \mathrm{sgn}(Q[X_\ell]|_{W_i})\right] \\ \qquad \cdot\, \psi \circ \mathrm{trace}(Y^* X_\ell), \text{ si } Y^* X_\ell(W_\ell) \subset W_\ell. \end{cases}$$

On démontre cette assertion par récurrence descendante sur $\ell$. Pour $\ell = h$, c'est trivial. Supposons $\ell < h$ et l'assertion démontrée en $\ell + 1$. On a l'égalité :

$$S(X_\ell) = \sum_{\substack{X_{\ell+1} \in \mathrm{Hom}(W_{\ell+1}, Z)\\ X_{\ell+1|W_\ell} = X_\ell}} S(X_{\ell+1}).$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence et en remarquant que

$$Q[X_{\ell+1}]|_{W_i} = Q[X_\ell]|_{W_i}$$

pour tout $X_{\ell+1} \in \mathrm{Hom}(W_{\ell+1}, Z)$ tel que $X_{\ell+1|W_\ell} = X_\ell$ et tout $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, on obtient :

$$S(X_\ell) = c \sum_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{sgn}(Q[X])\,\psi \circ \mathrm{trace}(Y^* X),$$

où

$$c = q^{(h-\ell-1)(h+\ell+2)/2}\,\mathrm{sgn}(Q)^{h-\ell-1}\left[\prod_{i=\ell+1}^{h-1} \mathrm{sgn}(Q^*[Y]|_{A(W_i)})\right]\left[\prod_{i=1}^{\ell} \mathrm{sgn}(Q[X_\ell]|_{W_i})\right],$$

$$\mathcal{X} = \Big\{X \in \mathrm{Hom}(W_{\ell+1}, Z);\, X|_{W_\ell} = X_\ell \text{ et } Y^* X(W_{\ell+1}) \subset W_{\ell+1}\Big\}.$$

Grâce à cette égalité, les deux membres de la formule (1) sont nuls dans les cas suivants :

- si $Q^*[Y]|_{A(W_{\ell+1})}$ est dégénérée (ce qui implique $\ell + 1 < h$) car $\mathrm{sgn}(Q^*[Y]|_{A(W_{\ell+1})}) = 0$ ;
- $Q[X_\ell]$ est dégénérée (ce qui implique $\ell > 0$) car $\mathrm{sgn}(Q[X_\ell]|_{W_\ell}) = 0$ ;
- si $Y^* X_\ell(W_\ell) \not\subset W_{\ell+1}$ car $\mathcal{X} = \varnothing$ et $Y^* X_\ell(W_\ell) \not\subset W_\ell$.

Supposons désormais $Q^*[Y]|_{A(W_{\ell+1})}$ non dégénérée, *a fortiori* $Y|_{A(W_{\ell+1})}$ injectif, $Q[X_\ell]$ non dégénérée, *a fortiori* $X_\ell$ injectif, et $Y^* X_\ell(W_\ell) \subset W_{\ell+1}$. Notons $Z'$ l'annulateur de $Y(A(W_{\ell+1}))$ dans $Z$ et $U = X_\ell(W_\ell)$. L'espace $Z'$ est de dimension $\ell + 2$ et est non dégénéré car $Y(A(W_{\ell+1}))$ l'est. L'espace $U$ est de dimension $\ell$ et est non dégénéré. Pour $z \in Z$, on a $z \in Z'$ si et seulement si $Y^*(z) \in W_{\ell+1}$. Donc $U \subset Z'$ et $\mathcal{X}$ s'identifie à $\{X \in \mathrm{Hom}(W_{\ell+1}, Z'); X|_{W_\ell} = X_\ell\}$. Notons $V$ l'orthogonal de $U$ dans $Z'$, fixons des éléments $e \in W_{\ell+1} - W_\ell$ et $e^* \in A(W_\ell) - A(W_{\ell+1})$ tels que $\langle e^*, e\rangle = 1$ et $e^*$ soit orthogonal à $A(W_{\ell+1})$ pour la forme $Q^*[Y]|_{A(W_\ell)}$. Cette dernière condition est loisible puisque $Q^*[Y]|_{A(W_{\ell+1})}$ est non dégénérée. Pour $u \in U$ et $v \in V$, définissons $X_{u,v} \in \mathrm{Hom}(W_{\ell+1}, Z')$ par :

$$X_{u,v}|_{W_\ell} = X_\ell, \quad X_{u,v}(e) = u + v.$$

On a les égalités :

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(Q[X_{u,v}]) &= \mathrm{sgn}(Q|_U)\,\mathrm{sgn}\circ Q(v)\\ \mathrm{trace}(Y^*X_{u,v}) &= \mathrm{trace}(Y^*X_{0,v}) + \langle e^*, Y^*(u)\rangle.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\mathcal{X} = \{X_{u,v}\,;\, u \in U, v \in V\}.$$

D'où l'égalité :

$$(2)\quad S(X_\ell) = c\,\mathrm{sgn}(Q|_U)\Big(\sum_{u\in U}\psi(\langle e^*, Y^*(u)\rangle)\Big)\Big(\sum_{v\in V}\mathrm{sgn}\circ Q(v)\,\psi\circ\mathrm{trace}(Y^*X_{0,v})\Big).$$

Si $Y^*X_\ell(W_\ell) \not\subset W_\ell$, la forme linéaire $u \mapsto \langle e^*, Y^*(u)\rangle$ sur $U$ est non nulle et la première somme ci-dessus est nulle. Alors les deux membres de la formule (1) sont nuls. Supposons $Y^*X_\ell(W_\ell) \subset W_\ell$. La première somme ci-dessus est égale à $q^\ell$. Pour $v \in V$, on a l'égalité :

$$\mathrm{trace}(Y^*X_{0,v}) = \mathrm{trace}(Y^*X_\ell) + \langle e^*, Y^*(v)\rangle.$$

Notons $v_0$ l'élément de $V$ tel que $Q(v_0, v) = \langle e^*, Y^*(v)\rangle$ pour tout $v \in V$. La deuxième somme du membre de droite de (2) se calcule grâce au lemme V.2. On obtient

$$S(X_\ell) = c\,q^{\ell+1}\,\mathrm{sgn}(Q|_U)\,\mathrm{sgn}(Q|_V)\,\mathrm{sgn}\circ Q(v_0)\,\psi\circ\mathrm{trace}(Y^*X_\ell).$$

Par définition de $e^*$, $Y(e^*)$ est orthogonal à $Y(A(W_{\ell+1}))$ pour la forme $Q^*$, donc $X_Q^{-1}Y(e^*) \in Z'$. Puisque $Y^*(U) = Y^*X_\ell(W_\ell) \subset W_\ell$, $e^*$ annule $Y^*(U)$, $Y(e^*)$ annule $U$ et $X_Q^{-1}Y(e^*)$ est orthogonal à $U$. Donc $X_Q^{-1}Y(e^*) \in V$. Pour $v \in V$, on a

$$\langle e^*, Y^*(v)\rangle = Q(X_Q^{-1}Y(e^*), v).$$

Donc $v_0 = X_Q^{-1}Y(e^*)$. Alors

$$\mathrm{sgn}\circ Q(v_0) = \mathrm{sgn}\circ Q^*(Y(e^*)) = \mathrm{sgn}(Q^*[Y]|_{A(W_\ell)})\,\mathrm{sgn}(Q^*[Y]|_{A(W_{\ell+1})}).$$

Enfin

$$\mathrm{sgn}(Q|_U)\,\mathrm{sgn}(Q|_V) = \mathrm{sgn}(Q|_{Z'}).$$

En appliquant la formule (1) de V.1, on obtient

$$S(X_\ell) = cq^{\ell+1}\,\mathrm{sgn}(Q)\,\mathrm{sgn}(Q^*[Y]|_{A(W_\ell)})\,\psi\circ\mathrm{trace}(Y^*X_\ell).$$

C'est l'égalité (1) qui est ainsi démontrée.

Pour $\ell = 0$, l'égalité (1) est celle de l'énoncé. □

**V.4.** Posons
$$\varepsilon(\psi) = q^{-1/2} \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \operatorname{sgn}(x)\psi(x).$$

***Lemme***. — *Soient $h$ un entier $\geqslant 1$, $W$ un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$ de dimension $h$,*
$$\{0\} = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_{h-1} \subsetneq W_h = W$$
*un drapeau complet de sous-espaces de $W$ et enfin $Y \in \operatorname{Sym}(W^*, W)$. On a l'égalité :*
$$\sum_{X \in \operatorname{Sym}(W,W^*)} \left[\prod_{i=1}^{h} \operatorname{sgn}(Q_X|_{W_i})\right] \psi \circ \operatorname{trace}(YX) = \\ (q^{1/2}\varepsilon(\psi))^{h(h+1)/2} \prod_{i=0}^{h-1} \operatorname{sgn}(Q_Y|_{A(W_i)}).$$

*Démonstration*. — Soit $\ell \in \{0, \dots, h\}$. Si $Q_Y|_{A(W_\ell)}$ est non dégénérée, l'orthogonal de $A(W_\ell)$ dans $W^*$ pour $Q_Y$, qui n'est autre que $Y^{-1}(W_\ell)$, s'identifie à $W_\ell^*$. On notera dans ce cas $Q'_\ell$ la forme quadratique sur $W_\ell^*$ déduite par cette identification de $Q_Y|_{Y^{-1}(W_\ell)}$ et $Y_\ell \in \operatorname{Sym}(W_\ell^*, W_\ell)$ l'élément qui lui correspond. Pour $Q_\ell \in \mathcal{Q}(W_\ell)$, posons :
$$S(Q_\ell) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}(W); Q|_{W_\ell} = Q_\ell} \left[\prod_{i=1}^{h} \operatorname{sgn}(Q|_{W_i})\right] \psi \circ \operatorname{trace}(YX_Q).$$
On va prouver

(1)
$$S(Q_\ell) = \begin{cases} 0, \text{ si } Q_Y|_{A(W_\ell)} \text{ est dégénérée,} \\ (q^{1/2}\varepsilon(\psi))^{(h-\ell)(h+\ell+1)/2} \left[\prod_{i=1}^{\ell} \operatorname{sgn}(Q_\ell|_{W_i})\right] \left[\prod_{i=\ell+1}^{h-1} \operatorname{sgn}(Q_Y|_{A(W_i)})\right] \\ \operatorname{sgn}(Q_Y|_{A(W_\ell)})^{\ell+1} \psi \circ \operatorname{trace}(Y_\ell X_{Q_\ell}), \text{ si } Q_Y|_{A(W_\ell)} \text{ est non dégénérée.} \end{cases}$$

On démontre cette assertion par récurrence descendante sur $\ell$. Pour $\ell = h$, la formule est triviale. Supposons $\ell < h$ et l'assertion démontrée en $\ell + 1$. On a l'égalité :
$$S(Q_\ell) = \sum_{Q_{\ell+1} \in \mathcal{X}} S(Q_{\ell+1}),$$
où
$$\mathcal{X} = \left\{Q_{\ell+1} \in \mathcal{Q}(W_{\ell+1});\, Q_{\ell+1}|_{W_\ell} = Q_\ell\right\}.$$
En appliquant l'hypothèse de récurrence et en remarquant que
$$Q_{\ell+1}|_{W_i} = Q_\ell|_{W_i}$$
pour tout $Q_{\ell+1} \in \mathcal{X}$ et tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, on obtient
$$S(Q_\ell) = \begin{cases} 0, \text{ si } Q_Y|_{A(W_{\ell+1})} \text{ est dégénérée,} \\ c \sum_{Q \in \mathcal{X}} \operatorname{sgn}(Q)\psi \circ \operatorname{trace}(Y_{\ell+1}X_Q), \text{ si } Q_Y|_{A(W_{\ell+1})} \text{ est non dégénérée,} \end{cases}$$

où

$$c = (q^{1/2}\varepsilon(\psi))^{(h-\ell-1)(h+\ell+2)/2}\left[\prod_{i=1}^{\ell}\operatorname{sgn}(Q_\ell|_{W_i})\right]\left[\prod_{i=\ell+2}^{h-1}\operatorname{sgn}(Q_Y|_{A(W_i)})\right] \cdot \operatorname{sgn}(Q_Y|_{A(W_{\ell+1})})^{\ell+2}.$$

Grâce à cette égalité, les deux membres de la formule (1) sont nuls dans les cas suivants :

- si $Q_Y|_{A(W_{\ell+1})}$ est dégénérée (ce qui implique $\ell+1 < h$), car $\operatorname{sgn}(Q_Y|_{A(W_{\ell+1})}) = 0$ ;
- si $Q_Y|_{A(W_{\ell+1})}$ est non dégénérée et $Q_\ell$ est dégénérée (ce qui implique $\ell > 0$), car $\operatorname{sgn}(Q_\ell) = 0$ et $c = 0$.

Supposons désormais $Q_Y|_{A(W_{\ell+1})}$ et $Q_\ell$ non dégénérées. Fixons un élément non nul $e^*$ de $A(W^*_{\ell+1}|W_\ell)$, posons

$$\mathcal{E} = \left\{e \in W_{\ell+1}\,;\, \langle e^*, e\rangle = 1\right\}.$$

Pour tout $e \in \mathcal{E}$, la projection $W^*_{\ell+1} \to W^*_\ell$ se restreint en un isomorphisme :

$$A(W^*_{\ell+1}|\mathbb{F}_q e) \longrightarrow W^*_\ell .$$

On note $X_e \in \operatorname{Hom}(W_\ell, W^*_{\ell+1})$ le composé de $X_{Q_\ell}$ et de l'inverse de cet isomorphisme. Pour $e \in \mathcal{E}$ et $x \in \mathbb{F}_q$, on définit $X_{e,x} \in \operatorname{Hom}(W_{\ell+1}, W^*_{\ell+1})$ par

$$X_{e,x}|_{W_\ell} = X_e\,,$$
$$X_{e,x}(e) = x e^* .$$

On vérifie que $X_{e,x} \in \operatorname{Sym}(W_{\ell+1}, W^*_{\ell+1})$ et $Q_{X_{e,x}|W_\ell} = Q_\ell$. On a l'égalité

$$\operatorname{trace}(Y_{\ell+1} X_{e,x}) = \operatorname{trace}(Y_{\ell+1} X_{e,0}) + x Q'_{\ell+1}(e^*).$$

Le vecteur $e$ étant une base de l'orthogonal de $W_\ell$ pour la forme $Q_{X_{e,x}}$, on a l'égalité

$$\operatorname{sgn}(Q_{X_{e,x}}) = \operatorname{sgn}(Q_\ell)\operatorname{sgn}(x).$$

Enfin, l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \times \mathbb{F}_q &\longrightarrow \mathcal{X}\\ (e,x) &\longmapsto Q_{X_{e,x}}\end{aligned}$$

est bijective : son inverse associe à $Q$ le couple $(e,x)$, où $e$ est l'unique élément de $\mathcal{E}$ orthogonal à $W_\ell$ pour la forme $Q$ et $x = Q(e)$. On obtient :

$$S(Q_\ell) = c \operatorname{sgn}(Q_\ell) S_1 S_2,$$

où

$$S_1 = \sum_{x\in\mathbb{F}_q}\operatorname{sgn}(x)\psi(x Q'_{\ell+1}(e^*)), \qquad S_2 = \sum_{e\in\mathcal{E}}\psi\circ\operatorname{trace}(Y_{\ell+1}X_{e,0}).$$

On a l'égalité

$$S_1 = \operatorname{sgn}\circ Q'_{\ell+1}(e^*)\, q^{1/2}\varepsilon(\psi).$$

Si l'on identifie $W^*_{\ell+1}$ à $Y^{-1}(W_{\ell+1})$, $e^*$ s'identifie à un vecteur engendrant l'orthogonal de $A(W_{\ell+1})$ dans $A(W_\ell)$ pour la forme $Q_Y$ et on a l'égalité $Q'_{\ell+1}(e^*) = Q_Y(e^*)$. D'où l'égalité :

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{sgn} \circ Q'_{\ell+1}(e^*) = \operatorname{sgn}(Q_Y|_{A(W_\ell)}) \operatorname{sgn}(Q_Y|_{A(W_{\ell+1})}).$$

Si $Q_Y|_{A(W_\ell)}$ est dégénérée, $S_1 = 0$ et les deux membres de la formule (1) sont nuls. Supposons $Q_Y|_{A(W_\ell)}$ non dégénérée. Alors $Q'_{\ell+1}(e^*) \neq 0$. Cela implique que $Y^{-1}_{\ell+1}(W_\ell)$ est un hyperplan de $W^*_{\ell+1}$ supplémentaire de $A(W^*_{\ell+1}|W_\ell)$ Notons $e$ l'unique élément de $\mathcal{E}$ qui annule $Y^{-1}_{\ell+1}(W_\ell)$ et identifions $Y^{-1}_{\ell+1}(W_\ell)$ à $W^*_\ell$. On vérifie que, pour $w^* \in W^*_\ell$ et $x \in \mathbb{F}_q$, on a l'égalité :

$$Y_{\ell+1}(w^* + xe^*) = Y_\ell(w^*) + xQ'_{\ell+1}(e^*)e.$$

On a l'égalité $\mathcal{E} = W_\ell + e$. Pour $w \in W_\ell$, on a :

$$A(W^*_{\ell+1}|\mathbb{F}_q(w+e)) = \{w^* - \langle w^*, w\rangle e^*;\ w^* \in W^*_\ell\}.$$

On en déduit les égalités :

$$\begin{aligned} X_{w+e,0}(w') &= X_{Q_\ell}(w') - Q_\ell(w', w)e^*, \quad \text{pour tout } w' \in W_\ell, \\ X_{w+e,0}(e) &= -X_{Q_\ell}(w) + Q_\ell(w)e^*. \end{aligned}$$

D'où l'égalité :

$$\operatorname{trace}(Y_{\ell+1}X_{w+e,0}) = \operatorname{trace}(Y_\ell X_{Q_\ell}) + Q'_{\ell+1}(e^*)Q_\ell(w).$$

Alors :

$$S_2 = \psi \circ \operatorname{trace}(Y_\ell X_{Q_\ell}) \sum_{w \in W_\ell} \psi(Q'_{\ell+1}(e^*)Q_\ell(w)).$$

Pour tout $y \in \mathbb{F}_q^\times$, on vérifie l'égalité :

$$\text{(3)} \qquad \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \psi(yx^2) = \operatorname{sgn}(y)q^{1/2}\varepsilon(\psi).$$

En diagonalisant la forme $Q_\ell$, on en déduit l'égalité :

$$\sum_{w \in W_\ell} \psi(Q'_{\ell+1}(e^*)Q_\ell(w)) = (\operatorname{sgn} \circ Q'_{\ell+1}(e^*)q^{1/2}\varepsilon(\psi))^\ell \operatorname{sgn}(Q_\ell).$$

D'où l'égalité

$$S(Q_\ell) = c\big[\operatorname{sgn} \circ Q'_{\ell+1}(e^*)q^{1/2}\varepsilon(\psi)\big]^{\ell+1}\psi \circ \operatorname{trace}(Y_\ell X_{Q_\ell}).$$

En reportant la définition de $c$ et en utilisant l'égalité (2), on obtient la formule (1). Cela démontre cette formule (1). Pour $\ell = 0$, elle n'est autre que celle de l'énoncé. □

**V.5.** Soient $k$ un entier $\geqslant 1$, $\mathcal{W} = (W_i)_{i=1,\dots,k}$ une famille d'espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_q$ telle que $\dim_{\mathbb{F}_q}(W_i) = i$ pour tout $i = 1,\dots,k$, $Q$ une forme quadratique non dégénérée sur $W_k$. Posons

$$U_{\text{orth}}(\mathcal{W}) = \bigoplus_{i=1}^{k-1} \operatorname{Hom}(W_i, W_{i+1}).$$

Pour $X = (X_i)_{i=1,\dots,k-1} \in U_{\text{orth}}(\mathcal{W})$, et pour $i \in \{1,\dots,k\}$, définissons la forme quadratique $Q[X]_i$ sur $W_i$ par $Q[X]_i = Q[X_{k-1},\dots,X_i]$. On définit une fonction $\phi_{\mathcal{W},Q}$ sur $U_{\text{orth}}(\mathcal{W})$ par

$$\phi_{\mathcal{W},Q}(X) = \prod_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}(Q[X]_i)$$

pour tout $X \in U_{\text{orth}}(\mathcal{W})$.

Posons $\mathcal{W}^* = (W_i^*)_{i=1,\dots,k}$, munissons $W_k^*$ de la forme $Q^*$. On définit de même l'espace $U_{\text{orth}}(\mathcal{W}^*)$ et la fonction $\phi_{\mathcal{W}^*,Q^*}$ sur $U_{\text{orth}}(\mathcal{W}^*)$. Pour $X \in U_{\text{orth}}(\mathcal{W})$ et $Y \in U_{\text{orth}}(\mathcal{W}^*)$, posons

$$\langle Y, X\rangle = \sum_{i=1}^{k-1} \operatorname{trace}(Y_i^* X_i).$$

Définissons une fonction $\widetilde{\phi}_{\mathcal{W},Q}$ sur $U_{\text{orth}}(\mathcal{W}^*)$ par

$$\widetilde{\phi}_{\mathcal{W},Q}(Y) = \sum_{X \in U_{\text{orth}}(\mathcal{W})} \phi_{\mathcal{W},Q}(X)\,\psi(\langle Y, X\rangle)$$

pour tout $Y \in U_{\text{orth}}(\mathcal{W}^*)$.

***Lemme***. — *On a l'égalité*

$$\widetilde{\phi}_{\mathcal{W},Q} = q^{(k^3-k)/6} \operatorname{sgn}(Q)^{k+1}\, \phi_{\mathcal{W}^*,Q^*}\,.$$

*Démonstration*. — Si $k = 1$, $U_{\text{orth}}(\mathcal{W}) = U_{\text{orth}}(\mathcal{W}^*) = \{0\}$ et $\phi_{\mathcal{W},Q}$ comme $\phi_{\mathcal{W}^*,Q^*}$ valent $\operatorname{sgn}(Q)$ en l'unique point 0. L'égalité ci-dessus est triviale. Supposons $k > 1$ et l'énoncé démontré pour toutes données $\mathcal{W}'$, $Q'$ relatives à l'entier $k-1$. Posons $\mathcal{W}' = (W_i)_{i=1,\dots,k-1}$ et

$$\mathcal{Z} = \big\{ Z \in \operatorname{Hom}(W_{k-1}, W_k);\, Q[Z] \text{ est non dégénéré} \big\}.$$

Pour tout $X \in U_{\text{orth}}(\mathcal{W})$, resp. $Y \in U_{\text{orth}}(\mathcal{W}^*)$, on définit $X' \in U_{\text{orth}}(\mathcal{W}')$, resp. $Y' \in U_{\text{orth}}(\mathcal{W}'^*)$, par $X' = (X_i)_{i=1,\dots,k-2}$, resp. $Y' = (Y_i)_{i=1,\dots,k-2}$. Remarquons que pour tout $X \in U_{\text{orth}}(\mathcal{W})$, on a l'égalité :

$$\phi_{\mathcal{W},Q}(X) = \begin{cases} 0, & \text{si } X_{k-1} \notin \mathcal{Z}, \\ \operatorname{sgn}(Q)\,\phi_{\mathcal{W}',Q[X_{k-1}]}(X'), & \text{si } X_{k-1} \in \mathcal{Z}. \end{cases}$$

Soit $Y \in U_{\text{orth}}(\mathcal{W}^*)$. On a alors l'égalité :

$$\widetilde{\phi}_{\mathcal{W},Q}(Y) = \operatorname{sgn}(Q) \sum_{Z \in \mathcal{Z}} \widetilde{\phi}_{\mathcal{W}',Q[Z]}(Y')\,\psi \circ \operatorname{trace}(Y_{k-1}^* Z).$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\widetilde{\phi}_{\mathcal{W},Q}(Y) = c \sum_{Z\in\mathcal{Z}} \operatorname{sgn}(Q[Z])^k \phi_{\mathcal{W}'^*,Q[Z]^*}(Y')\,\psi \circ \operatorname{trace}(Y_{k-1}^* Z),$$

où

$$c = \operatorname{sgn}(Q)\, q^{[(k-1)^3-(k-1)]/6}.$$

S'il existe $i \in \{1,\dots,k-2\}$ tel que $Y_i$ ne soit pas injective, $\phi_{\mathcal{W}'^*,Q[Z]^*}(Y') = 0$ pour tout $Z \in \mathcal{Z}$ et $\widetilde{\phi}_{\mathcal{W},Q}(Y) = 0$. On a aussi $\phi_{\mathcal{W}^*,Q^*}(Y) = 0$, d'où l'égalité cherchée. Supposons $Y_i$ injective pour tout $i \in \{1,\dots,k-2\}$. Posons $W' = W'_{k-1} = W_{k-1}$ et, pour tout $i \in \{0,\dots,k-2\}$, notons $W'_i$ l'annulateur dans $W'$ de l'image dans $W'^*$ de $Y_{k-2},\dots,Y_{k-1-i}$. Alors $(W'_i)_{i=0,\dots,k-1}$ est un drapeau complet de sous-espaces de $W'$. L'égalité suivante résulte de V.1 (1) et des définitions :

$$\operatorname{sgn}(Q[Z])^k \phi_{\mathcal{W}'^*,Q[Z]^*}(Y') = \prod_{i=1}^{k-1} \operatorname{sgn}(Q[Z]|_{W'_i})$$

pour tout $Z \in \mathcal{Z}$. D'où l'égalité :

$$\widetilde{\phi}_{\mathcal{W},Q}(Y) = c \sum_{Z\in\mathcal{Z}} \left[\prod_{i=1}^{k-1} \operatorname{sgn}(Q[Z]|_{W'_i})\right] \psi \circ \operatorname{trace}(Y_{k-1}^* Z).$$

On peut remplacer la sommation sur $\mathcal{Z}$ par une sommation sur $\operatorname{Hom}(W', W_k)$, les termes que l'on ajoute étant nuls. Alors la somme s'évalue grâce au lemme V.3. On obtient :

$$\widetilde{\phi}_{\mathcal{W},Q}(Y) = c\,\operatorname{sgn}(Q)^{k-1} q^{k(k-1)/2} \prod_{i=0}^{k-2} \operatorname{sgn}(Q^*[Y_{k-1}]|_{A(W'_i)}). \tag{1}$$

Pour $i \in \{0,\dots,k-2\}$, $A(W'_i)$ est l'image dans $\mathrm{W}_{k-1}^*$ de $Y_{k-2},\dots,Y_{k-1-i}$ et

$$\operatorname{sgn}(Q[Y_{k-1}]|_{A(W'_i)}) = \operatorname{sgn}(Q^*[Y]_{k-1-i}).$$

Le dernier produit du membre de droite de (1) est donc égal à $\operatorname{sgn}(Q^*)\phi_{\mathcal{W}^*,Q^*}(Y)$. Alors (1) n'est autre que l'égalité de l'énoncé. □

**V.6.** Soient $k$ un entier $\geqslant 1$, $\mathcal{W} = (W_i)_{i=1,\dots,k}$ une famille d'espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_q$ telle que $\dim_{\mathbb{F}_q}(W_i) = i$ pour tout $i = 1,\dots,k$. Posons

$$U_{\mathrm{symp}}(\mathcal{W}) = \left[\bigoplus_{i=1}^{k-1} \operatorname{Hom}(W_i, W_{i+1})\right] \oplus \operatorname{Sym}(W_k, W_k^*).$$

Pour $X = (X_i)_{i=1,\dots,k} \in U_{\mathrm{symp}}(\mathcal{W})$ et pour $i \in \{1,\dots,k\}$, définissons la forme quadratique $Q[X]_i$ sur $W_i$ par $Q[X]_i = Q_{X_k}[X_{k-1},\dots,X_i]$. On définit une fonction $\phi_{\mathcal{W}}$ sur $U_{\mathrm{symp}}(\mathcal{W})$ par

$$\phi_{\mathcal{W}}(X) = \prod_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}(Q[X]_i)$$

pour tout $X \in U_{\mathrm{symp}}(\mathcal{W})$.

Posons $\mathcal{W}^* = (W_i^*)_{i=1,\dots,k}$. On définit l'espace $U_{\text{symp}}(\mathcal{W}^*)$ et la fonction $\phi_{\mathcal{W}^*}$ sur $U_{\text{symp}}(\mathcal{W}^*)$. Pour $X \in U_{\text{symp}}(\mathcal{W})$ et $Y \in U_{\text{symp}}(\mathcal{W}^*)$, posons

$$\langle Y, X\rangle = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{trace}(Y_i^* X_i).$$

Définissons une fonction $\widetilde{\phi}_{\mathcal{W}}$ sur $U_{\text{symp}}(\mathcal{W}^*)$ par

$$\widetilde{\phi}_{\mathcal{W}}(Y) = \sum_{X \in U_{\text{symp}}(\mathcal{W})} \phi_{\mathcal{W}}(X)\psi(\langle Y, X\rangle)$$

pour tout $Y \in U_{\text{symp}}(\mathcal{W}^*)$.

***Lemme***. — *On a l'égalité*

$$\widetilde{\phi}_{\mathcal{W}} = q^{k(k+1)(2k+1)/12}\varepsilon(\psi)^{k(k+1)/2}\phi_{\mathcal{W}^*}.$$

*Démonstration.* — Pour $X \in U_{\text{symp}}(\mathcal{W})$, resp. $Y \in U_{\text{symp}}(\mathcal{W}^*)$, on définit $X' \in U_{\text{orth}}(\mathcal{W})$, resp. $Y' \in U_{\text{orth}}(\mathcal{W}^*)$, par $X' = (X_i)_{i=1,\dots,k-1}$, resp. $Y' = (Y_i)_{i=1,\dots,k-1}$. Posons

$$\mathcal{Z} = \{Z \in \operatorname{Sym}(W_k, W_k^*);\, Q_Z \text{ est non dégénérée}\}.$$

Pour tout $X \in U_{\text{symp}}(\mathcal{W})$, on a l'égalité

$$\phi_{\mathcal{W}}(X) = \begin{cases} 0, & \text{si } X_k \notin \mathcal{Z}, \\ \phi_{\mathcal{W},Q_{X_k}}(X'), & \text{si } X_k \in \mathcal{Z}, \end{cases}$$

où $\phi_{\mathcal{W},Q_{X_k}}$ est la fonction définie en V.5. Soit $Y \in U_{\text{symp}}(\mathcal{W}^*)$. On a alors l'égalité :

$$\widetilde{\phi}_{\mathcal{W}}(Y) = \sum_{Z \in \mathcal{Z}} \widetilde{\phi}_{\mathcal{W},Q_Z}(Y')\psi \circ \operatorname{trace}(Y_k Z).$$

En appliquant le lemme V.5, on obtient :

$$\widetilde{\phi}_{\mathcal{W}}(Y) = q^{(k^3-k)/6} \sum_{Z \in \mathcal{Z}} \operatorname{sgn}(Q_Z)^{k+1} \phi_{\mathcal{W}^*,Q_Z^*}(Y')\psi \circ \operatorname{trace}(Y_k Z).$$

La fin de la démonstration est analogue à celle du lemme V.5, en $y$ remplaçant l'usage du lemme V.3 par celui du lemme V.4. □

**V.7.** Soit $(V, q_V)$ un couple vérifiant les conditions de II.1, c'est-à-dire celles de I.2 avec $F$ remplacé par $\mathbb{F}_q$. Rappelons que l'on suppose $p \geqslant 3d+1$.

Soit $X \in \mathfrak{g}_{\text{nil}}$, $X \neq 0$. Choisissons $Y$ et $H$ dans $\mathfrak{g}$ tels que $(X, H, Y)$ forme un $\mathfrak{sl}_2$-triplet. On en déduit un homomorphisme

$$\rho : \boldsymbol{SL}_2 \longrightarrow \boldsymbol{G}$$

tel que, si $d\rho$ est l'homomorphisme dérivé, on ait :

$$d\rho\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = X, \quad d\rho\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = H, \quad d\rho\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = Y.$$

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, posons

$$\boldsymbol{g}(i) = \left\{ Z \in \boldsymbol{g}\,;\, \forall\, z \in \overline{\mathbb{F}}_q^{\times},\ \rho\left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1}\end{pmatrix}\right) Z \rho\left(\begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z\end{pmatrix}\right) = z^i Z \right\}.$$

On a l'égalité

$$\boldsymbol{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{g}(i).$$

Notons $\boldsymbol{P}$, resp. $\boldsymbol{M}$, les sous-groupes algébriques connexes de $\boldsymbol{G}$ d'algèbres de Lie $\oplus_{i\geqslant 0}\boldsymbol{g}(i)$, resp. $\boldsymbol{g}(0)$. Le groupe $\boldsymbol{P}$ est un sous-groupe parabolique de $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{M}$ est un sous-groupe de Lévi de $\boldsymbol{P}$. Ils sont tous deux définis sur $\mathbb{F}_q$. Posons

$$\boldsymbol{g}(2)^{\#} = \{x^{-1}Xx\ ;\ x \in \boldsymbol{M}\},\ \ \boldsymbol{g}(-2)^{\#} = \{x^{-1}Yx\ ;\ x \in \boldsymbol{M}\},$$

et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\boldsymbol{g}(\geqslant i) = \bigoplus_{j\geqslant i} \boldsymbol{g}(j).$$

Notons enfin $\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}(X)$ et $\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}(Y)$ les classes de conjugaison par $\boldsymbol{G}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ de $X$ et $Y$. On a les propriétés suivantes :

(1) $\boldsymbol{g}(2)^{\#}$, resp. $\boldsymbol{g}(-2)^{\#}$, est un ouvert de Zariski de $\boldsymbol{g}(2)$, resp. $\boldsymbol{g}(-2)$;

(2) $$\boldsymbol{Z_G}(X) \subset \boldsymbol{P};$$

(3) $$X + \boldsymbol{g}(\geqslant 3) = \{x^{-1}Xx\ ;\ x \in \boldsymbol{U_P}\};$$

(4) $$X + g(\geqslant 3) = \{x^{-1}Xx\ ;\ x \in U_P\};$$

(5) $$\boldsymbol{g}(2)^{\#} + \boldsymbol{g}(\geqslant 3) = \{x^{-1}Xx\ ;\ x \in \boldsymbol{P}\};$$

(6) $$g(2)^{\#} + g(\geqslant 3) = \mathcal{O}^{\mathrm{alg}}(X) \cap g(\geqslant 2);$$

(7) $$Y + \boldsymbol{g}(\geqslant -1) = \left\{x^{-1}Zx\ ;\ x \in \boldsymbol{U_P}, Z \in Y + \boldsymbol{Z_g}(X)\right\};$$

(8) $$Y + g(\geqslant -1) = \left\{x^{-1}Zx\ ;\ x \in U_P, Z \in Y + Z_g(X)\right\};$$

(9) $$(Y + \boldsymbol{Z_g}(X)) \cap \boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}(Y) = \{Y\};$$

(10) $$\left\{x \in \boldsymbol{G}; x^{-1}Yx \in \boldsymbol{g}(-2)^{\#} + \boldsymbol{g}(\geqslant -1)\right\} = \boldsymbol{Z_G}(Y)\boldsymbol{P};$$

(11) $$\left\{x \in G; x^{-1}Yx \in g(-2)^{\#} + g(\geqslant -1)\right\} = Z_G(Y)P.$$

Pour (1), (2) et (3), *cf.* [C], propositions 5.7.2, 5.7.1 (ii), 5.7.3. La preuve de (4) est analogue à celle de (3). L'assertion (5) résulte de (3). Pour (6), *cf.* [Kaw1], corollaire 1.4.6 (ii). Les preuves de (7) et (8) sont analogues à celles du lemme 2.2 de [Lu5]. D'après [Sl], §. 7.4, il existe un voisinage $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ de $Y$ dans $Y + \boldsymbol{Z_g}(X)$ tel que $\boldsymbol{\mathcal{V}} \cap \boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}(Y) = \{Y\}$. Rappelons que $zY \in \boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}(Y)$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{F}}_q^{\times}$. Soit $Z \in (Y + \boldsymbol{Z_g}(X)) \cap \boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}(Y)$. Pour tout $z \in \overline{\mathbb{F}}_q^{\times}$, posons

$$Z(z) = z^2 \rho\left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}\right) \; Z\rho\left(\begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}\right).$$

On a $Z(z) \in (Y + \boldsymbol{Z_g}(X)) \cap \boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}(Y)$. Quand $z$ « tend vers 0 », $Z(z)$ tend vers $Y$. L'ensemble des $z$ tels que $Z(z) \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ est donc un ouvert non vide. Pour $z$ dans cet ouvert, on a $Z(z) = Y$. Il en est donc de même pour tout $z$. En particulier pour $z = 1$. Donc $Z = Y$, ce qui démontre (9). Il résulte de (7) et (9) que

$$(\boldsymbol{g}(-2)^{\#} + \boldsymbol{g}(\geqslant -1)) \cap \boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}(Y) = \{x^{-1}Yx \; ; \; x \in \boldsymbol{P}\}.$$

L'assertion (10) en résulte. Notons $\overline{\boldsymbol{P}}$ le sous-groupe parabolique de $\boldsymbol{G}$ de Lévi $\boldsymbol{M}$ opposé à $\boldsymbol{P}$. Il résulte de (2) appliqué à $Y$ au lieu de $X$ que $\boldsymbol{Z_G}(Y) \subset \boldsymbol{Z_{U_{\overline{P}}}}(Y)\boldsymbol{M}$. Donc $\boldsymbol{Z_G}(Y)\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Z_{U_{\overline{P}}}}(Y)\boldsymbol{P}$. L'application produit $\boldsymbol{U_{\overline{P}}} \times \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{G}$ étant injective, (11) résulte de (10).

***Remarques***

(a) On a supposé $X \neq 0$. Dans le cas où $X = 0$, on associe à $X$ la graduation triviale de $\boldsymbol{g}$ : $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(0)$ ; et le sous-groupe parabolique $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{G}$.

(b) La théorie rappelée ci-dessus est algébrique. Elle reste valable si l'on remplace le corps de base $\mathbb{F}_q$ par $F$ (et $\overline{\mathbb{F}}_q$ par $\overline{F}$).

**V.8.** Soit $(V, q_V)$ un couple vérifiant les conditions de II.4 ou II.5. On a défini dans ces paragraphes une fonction ${}^o\!f$ sur $g$ et un nombre complexe ${}^o\!\gamma$ tel que

$$\widehat{{}^o\!f} = {}^o\!\gamma\, {}^o\!f.$$

***Proposition***. — *On a l'égalité*

$${}^o\!\gamma = \begin{cases} (\mathrm{sgn}(-1)\varepsilon(\psi))^{k(k+1)/2}, & \textit{dans le cas symplectique}, \\ 1, & \textit{dans le cas orthogonal impair}, \\ \mathrm{sgn}((-1)^{k/2}\eta(q_V)), & \textit{dans le cas orthogonal pair}. \end{cases}$$

*Démonstration*. — Les preuves étant similaires dans chaque cas, on traite seulement le cas symplectique. Soit ${}^o\!X$ l'élément de $g_{\mathrm{nil}}$ fixé en II.4, fixons ${}^o Y$ et ${}^o\!H$ dans $g$ tels que $({}^o\!X, {}^o\!H, {}^o Y)$ forme un $s\ell_2$-triplet. On déduit de ce $s\ell_2$-triplet une graduation de $\boldsymbol{g}$ et des sous-groupes $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{M}$ de $\boldsymbol{G}$ comme dans le paragraphe précédent. L'ensemble des valeurs propres de ${}^o\!H$ (agissant dans $V$) est $\{\pm(2i-1); i = 1, \ldots, k\}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, notons $W_i^+$, resp. $W_i^-$, le sous-espace propre de $V$ associé à la valeur propre $2k - 2i + 1$, resp. $-2k + 2i - 1$,

$$\mathcal{J}_i^+ : W_i^- \longrightarrow (W_i^+)^*, \;\text{ resp. }\; \mathcal{J}_i^- : W_i^+ \longrightarrow (W_i^-)^*$$

les isomorphismes tels que

$$\langle \mathcal{J}_i^+(w^-), w^+ \rangle = q_V(w^-, w^+), \;\text{ resp. }\; \langle \mathcal{J}_i^-(w^+), w^- \rangle = q_V(w^+, w^-)$$

pour tous $w^+ \in W_i^+$, $w^- \in W_i^-$. On a bien sûr $\mathcal{J}_i^+ = -(\mathcal{J}_i^-)^*$. Posons

$$\mathcal{W}^+ = (W_i^+)_{i=1,\dots,k}, \quad \mathcal{W}^- = (W_i^-)_{i=1,\dots,k}.$$

On définit une application

$$\rho^- : g(2) \longrightarrow U_{\mathrm{symp}}(\mathcal{W}^-)$$

de la façon suivante. Soit $X \in g(2)$. Pour $i \in \{1,\dots,k-1\}$, on a $X(W_i^-) \subset W_{i+1}^-$ et l'on note $X_i \in \mathrm{Hom}(W_i^-, W_{i+1}^-)$ l'élément que définit $X$. On a $X(W_k^-) \subset W_k^+$ et l'on note $X_k$ le composé de $\mathcal{J}_k^-$ et de l'élément de $\mathrm{Hom}(W_k^-, W_k^+)$ que définit $X$. On pose

$$\rho^-(X) = (X_i)_{i=1,\dots,k}.$$

L'application $\rho^-$ est un isomorphisme. Remarquons qu'avec les notations précédentes, pour $i \in \{2,\dots,k\}$, on a $X(W_i^+) \subset W_{i-1}^+$ et l'élément de $\mathrm{Hom}(W_i^+, W_{i-1}^+)$ ainsi défini est égal à $-(\mathcal{J}_{i-1}^-)^{-1} X_{i-1}^* \mathcal{J}_i^-$.

Soit $X \in g(2)^\#$. Posons $\Lambda(X) = ({}^o\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$. En se reportant aux définitions de I.6 et V.6, on vérifie que pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$, les formes quadratiques

$$Q[\rho^-(X)]_i \text{ et } q_{2k+2-2i} \oplus q_{2k+4-2i} \oplus \cdots \oplus q_{2k}$$

sont équivalentes ; puis que $\phi_{\mathcal{W}^-} \circ \rho^-(X) = {}^of(X)$. Cette égalité est d'ailleurs vraie pour tout $X \in g(2)$, les deux fonctions étant nulles sur $g(2) - g(2)^\#$.

En échangeant les signes $+$ et $-$, on définit un isomorphisme

$$\rho^+ : g(-2) \longrightarrow U_{\mathrm{symp}}(\mathcal{W}^+)$$

et on a l'égalité $\phi_{\mathcal{W}^+} \circ \rho^+(Y) = {}^of(Y)$ pour tout $Y \in g(-2)$. Pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$, identifions $\mathrm{W}_i^+$ à $(W_i^-)^*$ par l'isomorphisme $2^{i-k}\mathcal{J}_i^-$. On en déduit un isomorphisme $U_{\mathrm{symp}}(\mathcal{W}^+) \to U_{\mathrm{symp}}(\mathcal{W}^{-*})$, puis, par composition, un isomorphisme

$$\widetilde{\rho}^+ : g(-2) \longrightarrow U_{\mathrm{symp}}(\mathcal{W}^{-*}).$$

On a l'égalité $\phi_{\mathcal{W}^{-*}} \circ \widetilde{\rho}^+(Y) = {}^of(Y)$ pour tout $Y \in g(-2)$. On vérifie l'égalité

$$(1) \qquad q_g(Y,X) = -\langle \widetilde{\rho}^+(Y), \rho^-(X) \rangle$$

pour tous $X \in g(2)$, $Y \in g(-2)$, *cf.* V.6 pour la définition du membre de droite.

Grâce à V.7 (2) et (4), on a :

• la restriction de ${}^of$ à $g(2)^\# + g(\geqslant 3)$ est invariante par $g(\geqslant 3)$ ;

• pour tout $Z \in \mathcal{O}^{\mathrm{alg}}({}^oX)$, il existe $x \in G$ tel que $w^{-1}Zx \in g(2)^\# + g(\geqslant 3)$ ; l'image d'un tel $x$ dans $G/P$ est bien déterminée.

On en déduit l'égalité suivante, pour tout $Z \in g$ :

$$ {}^of(Z) = |P|^{-1} \sum_{x,X,X'} \phi_{\mathcal{W}^-} \circ \rho^-(X),$$

où l'on somme sur les $(x, X, X') \in G \times g(2) \times g(\geqslant 3)$ tels que $x(X + X')x^{-1} = Z$. D'où l'égalité :

$$\widehat{{}^{o}f}({}^{o}Y) = |P|^{-1} q^{-\dim(\boldsymbol{g})/2} \sum_{x,X,X'} \psi \circ q_g(x(X + X')x^{-1}, {}^{o}Y)\phi_{\mathcal{W}^-} \circ \rho^-(X),$$

où l'on somme sur $G \times g(2) \times g(\geqslant 3)$. La somme en $X' \in g(\geqslant 3)$ se calcule aisément, on obtient :

(2) $\widehat{{}^{o}f}({}^{o}Y) =$

$$|P|^{-1} q^{\dim(\boldsymbol{g}(\geqslant 3))-\dim(\boldsymbol{g})/2} \sum_{\substack{x\in G;\\ x^{-1}{}^{o}Yx\in g(\geqslant -2)}} \sum_{X\in g(2)} \psi \circ q_g(X, x^{-1}{}^{o}Yx)(2)\phi_{\mathcal{W}^-} \circ \rho^-(X).$$

Fixons $x \in G$ tel que $x^{-1}{}^{o}Y x \in g(\geqslant -2)$. Notons $Y$ la composante dans $g(-2)$ de $x^{-1}{}^{o}Y x$. Grâce à (1), la somme en $X$ du membre de droite de (2) est égale à

$$(3) \qquad \sum_{X\in U_{\mathrm{symp}}(\mathcal{W}^-)} \psi(-\langle\widetilde{\rho}^+(Y), X\rangle)\,\phi_{\mathcal{W}^-}(X).$$

Ce n'est autre que $\widetilde{\phi}_{\mathcal{W}^-} \circ \widetilde{\rho}^+(Y)$ (*cf.* V.6) à ceci près que dans la définition de cette dernière fonction, on doit remplacer le caractère $\psi$ par son conjugué $\overline{\psi}$. En tenant compte de l'égalité $\varepsilon(\overline{\psi}) = \mathrm{sgn}(-1)\varepsilon(\psi)$ et en appliquant le lemme V.6, on voit que l'expression (3) est égale à

$$q^{k(k+1)(2k+1)/12}\,(\mathrm{sgn}(-1)\,\varepsilon(\psi))^{k(k+1)/2}\,\phi_{\mathcal{W}^{-*}} \circ \widetilde{\rho}^+(Y),$$

ou encore à

$$(4) \qquad q^{k(k+1)(2k+1)/12}\,(\mathrm{sgn}(-1)\,\varepsilon(\psi))^{k(k+1)/2}\,{}^{o}f(Y).$$

En particulier, cette expression est nulle si $Y \notin g(-2)^{\#}$. On peut se limiter, dans le membre de droite de (2), à sommer sur les $x \in G$ tels que $x^{-1}\,{}^{o}Y x \in g(-2)^{\#} + g(\geqslant -1)$, *i.e.*, d'après V.7 (11), sur les $x \in Z_G({}^{o}Y)P$. Soient $z \in Z_G({}^{o}Y)$, $y \in M$, $u \in U_P$. Posons $x = zyu$. La composante dans $g(-2)$ de $x^{-1}\,{}^{o}Y x$ n'est autre que $y^{-1}\,{}^{o}Y y$. On a ${}^{o}f(y^{-1}\,{}^{o}Y y) = {}^{o}f({}^{o}Y)$, l'expression (4) est donc indépendante de $x \in Z_G({}^{o}Y)P$. On obtient alors l'égalité :

$$\widehat{{}^{o}f}({}^{o}Y) = |P|^{-1}\,|Z_G({}^{o}Y)P|\,q^{\dim(\boldsymbol{g}(\geqslant 3))-\dim(\boldsymbol{g})/2+k(k+1)(2k+1)/12}$$
$$(\mathrm{sgn}(-1)\,\varepsilon(\psi))^{k(k+1)/2}\,{}^{o}f({}^{o}Y).$$

Introduisons le sous-groupe parabolique $\overline{\boldsymbol{P}}$ de $\boldsymbol{G}$, de Lévi $\boldsymbol{M}$, opposé à $\boldsymbol{P}$. D'après V.7 (2) appliqué à ${}^{o}Y$, $Z_G({}^{o}Y) = Z_{U_{\overline{P}}}({}^{o}Y)Z_M({}^{o}Y)$. On vérifie que $\boldsymbol{Z_M}({}^{o}Y)$ est un groupe fini. On en déduit :

$$|Z_G({}^{o}Y)P| = |Z_{U_{\overline{P}}}({}^{o}Y)||P| = q^{\dim(\boldsymbol{Z_G}({}^{o}Y))}\,|P|.$$

On déduit de V.7 (2) et (5) appliqués à ${}^{o}Y$ l'égalité

$$\dim(\boldsymbol{Z_G}({}^{o}Y)) = \dim(\boldsymbol{g}(0))$$

(remarquons que $\boldsymbol{g}(i) = 0$ pour tout $i$ impair). Enfin on calcule :

$$\begin{aligned}\dim(\boldsymbol{g}(0)) + \dim(\boldsymbol{g}(\geqslant 3)) - \dim(\boldsymbol{g})/2 &= \dim(\boldsymbol{g}(0))/2 - \dim(\boldsymbol{g}(2)) \\ &= -k(k+1)(2k+1)/12.\end{aligned}$$

On obtient alors l'égalité :

$$\widehat{{}^{o}f}({}^{o}Y) = (\operatorname{sgn}(-1)\varepsilon(\psi))^{k(k+1)/2}\, {}^{o}f({}^{o}Y).$$

D'où l'égalité de l'énoncé. □

**V.9.** Si $W$ est un espace de dimension finie sur $\mathbb{F}_q$ et $Q \in \mathcal{Q}(W)$, on note dans ce paragraphe $\boldsymbol{G}(Q)$ la composante neutre du groupe d'automorphismes du couple $(W, Q)$. Si $Q$ est non dégénérée, c'est le groupe que l'on a noté $\boldsymbol{G}(W)$ ($W$ étant supposé muni de $Q$). Si $Q$ est dégénérée, c'est l'ensemble des $x \in \boldsymbol{GL}(W)$ tels que

- $x(\operatorname{Ker}(Q)) \subset \operatorname{Ker}(Q)$ ;
- si l'on munit $W/\operatorname{Ker}(Q)$ de la forme quadratique non dégénérée déduite de $Q$, l'automorphisme de $W/\operatorname{Ker}(Q)$ déduit de $x$ appartient à $\boldsymbol{G}(W/\operatorname{Ker}(Q))$.

Soient $k, \ell$ deux entiers tels que $1 \leqslant \ell \leqslant k$, $\mathcal{W} = (W_i)_{i=\ell,\dots,k}$ une famille d'espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_q$ telle que $\dim_{\mathbb{F}_q}(W_i) = i$ pour tout $i = \ell, \dots, k$, et $Q \in \mathcal{Q}(W_k)$. Posons

$$U(\mathcal{W}) = \bigoplus_{i=\ell}^{k-1} \operatorname{Hom}(W_i, W_{i+1}),$$

$$M_{\mathrm{orth}}(\mathcal{W}) = \Big(\prod_{i=\ell}^{k-1} GL(W_i)\Big) G(Q).$$

Pour $x \in M_{\mathrm{orth}}(\mathcal{W})$, on note ses composantes $x_i$, pour $i = \ell, \dots, k$. En particulier $x_k \in G(Q)$. Le groupe $M_{\mathrm{orth}}(\mathcal{W})$ agit naturellement sur $U(\mathcal{W})$ par une action notée $(x, X) \mapsto x \cdot X$.

Soit $X \in U(\mathcal{W})$. Pour $i \in \{\ell, \dots, k\}$, on définit comme en V.5 la forme quadratique $Q[X]_i$ sur $W_i$. On définit une suite $(V_i(X))_{i=1,\dots,2k-2\ell+1}$ de sous-espaces de $W_\ell$ par :

$$V_i(X) = \begin{cases} \operatorname{Ker}(X_{\ell+i-1}\cdots X_\ell), & \text{si } i = 1, \dots, k-\ell, \\ (X_{2k-\ell-i}\cdots X_\ell)^{-1}\operatorname{Ker}(Q[X]_{2k-\ell-i+1}), & \text{si } i = k-\ell+1, \dots, 2k-2\ell+1. \end{cases}$$

On a

$$\{0\} \subset V_1(X) \subset V_2(X) \subset \cdots \subset V_{2k-2\ell+1}(X) = \operatorname{Ker}(Q[X]_\ell).$$

***Lemme***. — *Soient $X \in U(\mathcal{W})$ et $\gamma \in G(Q[X]_\ell)$. Supposons que*

$$\gamma(V_i(X)) \subset V_i(X)$$

*pour tout $i = 1, \dots, 2k-2\ell+1$. Alors il existe $x \in M_{\mathrm{orth}}(\mathcal{W})$ tel que $x \cdot X = X$ et $x_\ell = \gamma$.*

*Démonstration.* — Montrons d'abord :

(1) soient $W'$ un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$ de dimension finie,
$$Q' \in \mathcal{Q}(W'), \;\; W \text{ un sous-espace de } W',$$
$$\{0\} \subset V_1' \subset \cdots \subset V_h' = \mathrm{Ker}(Q')$$

une suite de sous-espaces de $\mathrm{Ker}(Q')$ et $\delta \in G(Q'|W)$. Supposons que $\delta(V_i' \cap W) \subset V_i' \cap W$ pour tout $i = 1, \ldots, h$. Alors il existe $\gamma' \in G(Q')$ tel que $\gamma'(W) \subset W$, $\gamma'|_W = \delta$ et $\gamma'(V_i') \subset V_i'$ pour tout $i = 1, \ldots, h$.

Soient $A$ un supplémentaire de $W \cap \mathrm{Ker}(Q')$ dans $W$ et $B$ un supplémentaire de $W + \mathrm{Ker}(Q')$ dans $W'$. Notons $\delta_1$ l'élément de $GL(A)$ tel que

$$\delta(a) - \delta_1(a) \in W \cap \mathrm{Ker}(Q')$$

pour tout $a \in A$. C'est un élément de $G(Q'|_A)$. La restriction de $Q'$ à $A \oplus B$ est non dégénérée. Par le théorème de Witt (qui est valable pour les groupes spéciaux orthogonaux), il existe $\delta_2 \in G(Q'|_{A\oplus B})$ qui prolonge $\delta_1$. D'autre part, il est clair qu'il existe $\delta_3 \in GL(\mathrm{Ker}(Q'))$ tel que $\delta_3|_{W\cap \mathrm{Ker}(Q')} = \delta|_{W\cap\mathrm{Ker}(Q')}$ et $\delta_3(V_i') \subset V_i'$ pour tout $i = 1, \ldots, h$. On définit $\gamma' \in GL(W')$ par

$$\gamma'|_A = \delta|_A, \quad \gamma'|_B = \delta_2|_B, \quad \gamma'|_{\mathrm{Ker}(Q')} = \delta_3.$$

Cet élément répond à la question, ce qui démontre (1).

On démontre l'énoncé par récurrence sur $k - \ell$. Si $\ell = k$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $\ell < k$, soient $X$ et $\gamma$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Posons $W' = W_{\ell+1}$, $W = X_\ell(W_\ell)$, $Q' = Q[X]_{\ell+1}$. Puisque $\gamma$ conserve $\mathrm{Ker}(X_\ell)$, il existe un unique $\delta \in GL(W)$ tel que $\delta X_\ell = X_\ell\gamma$. On a $\delta \in G(Q'|_W)$. Posons $X' = (X_i)_{i=\ell+1,\ldots,k}$ et définissons comme précédemment la famille $(V_i(X'))_{i=1,\ldots,2k-2\ell-1}$ de sous-espaces de $W_{\ell+1}$. Posons $V_i' = V_i(X')$ pour tout $i$. On vérifie l'égalité

$$V_i' \cap W = X_\ell(V_{i+1}(X)),$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, 2k - 2\ell - 1\}$. On en déduit que $\delta(V_i' \cap W) \subset V_i' \cap W$ pour tout $i$. Les hypothèses de (1) sont donc vérifiées. Soit $\gamma'$ un élément en vérifiant la conclusion.

Puisque $\gamma'|_W = \delta$, on a $\gamma' X_\ell = X_\ell \gamma$. D'autre part, en posant $\mathcal{W}' = (W_i)_{i=\ell+1,\ldots,k}$, les données $\mathcal{W}'$, $X'$ et $\gamma'$ vérifient les hypothèses du lemme et on peut leur appliquer l'hypothèse de récurrence. Il existe donc $x' \in M_{\mathrm{orth}}(\mathcal{W}')$ tel que $x' \cdot X' = X'$ et $x'_{\ell+1} = \gamma'$. On définit $x = (x_i)_{i=\ell,\ldots,k}$ par

$$x_i = \begin{cases} x_i', & \text{si } i \in \{\ell+1, \ldots, k\}, \\ \gamma, & \text{si } i = \ell. \end{cases}$$

Ce terme $x$ répond à la question. □

**V.10.** Soient $k$ et $\mathcal{W}$ comme en V.6. On a défini l'espace $U_{\text{symp}}(\mathcal{W})$ dans ce paragraphe. Posons

$$M_{\text{symp}}(\mathcal{W}) = \prod_{i=1}^{k} GL(W_i).$$

Ce groupe agit naturellement sur $U_{\text{symp}}(\mathcal{W})$ par une action notée $(x, X) \mapsto x \cdot X$.

***Corollaire***. — *Soient $X \in U_{\text{symp}}(\mathcal{W})$ tel que $Q[X]_1 = 0$. Alors pour tout $z \in \mathbb{F}_q^\times$, il existe $x \in M_{\text{symp}}(\mathcal{W})$ tel que $x \cdot X = X$ et $x_1$ soit la multiplication par $z$.*

*Démonstration*. — Il suffit d'appliquer le lemme précédent à $\mathcal{W}$, $X' = (X_i)_{i=1,\ldots,k-1}$ et à l'homothétie $\gamma$ de $W_1$ de rapport $z$, $W_k$ étant muni de la forme $Q_{X_k}$. □

**V.11.** Soient $(V, q_V)$ un espace symplectique vérifiant les conditions de II.4 et ${}^oX \in g_{\text{nil}}$ l'élément fixé dans ce paragraphe. Complétons ${}^oX$ en un $s\ell_2$-triplet, dont on déduit une graduation de $\boldsymbol{g}$ et des sous-groupes $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{M}$ de $\boldsymbol{G}$ (*cf.* V.7). Remarquons que les espaces $g(2(2k-1))$ et $g(-2(2k-1))$ sont de dimension 1. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G$ contenues dans $\mathcal{O}^{\text{alg}}({}^oX)$. Il a $2^k$ éléments. Pour tout $e \in \mathcal{E}$, fixons $X_e \in e \cap g(2)^{\#}$, ainsi qu'il est loisible. Fixons aussi deux éléments non nuls $X_e^1$ et $X_e^2$ de $g(-2(2k-1))$ tels que, si $z \in \mathbb{F}_q^\times$ est tel que $X_e^1 = zX_e^2$, on ait $z \notin \mathbb{F}_q^{\times 2}$. On définit une fonction ${}^o\text{sgn}$ sur $\mathcal{E}$ de la façon suivante. Pour $e \in \mathcal{E}$, posons $\Lambda(X_e) = ({}^o\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$. Alors ${}^o\text{sgn}(e) = {}^o\text{sgn}((q_i))$ (*cf.* II.4). Pour $Y \in g$, posons

$$\phi(Y) = \sum_{e\in\mathcal{E}} \sum_{j=1,2} \sum_{x\in M} {}^o\text{sgn}(e)\psi \circ q_g(Y, x^{-1}(X_e + X_e^j)x).$$

***Lemme***. — *Soient $Y \in g(-2)$ et $Z \in g(2(2k-1))$. Supposons $Y^{2k-1} = 0$. Alors $\phi(Y + Z) = 0$.*

*Démonstration*. — Introduisons les suites d'espaces $\mathcal{W}^+$ et $\mathcal{W}^-$ et l'isomorphisme :

$$\rho^+ : g(-2) \longrightarrow U_{\text{symp}}(\mathcal{W}^+)$$

de la démonstration de la proposition V.8.

L'espace $g(2(2k-1))$ s'identifie à $\text{Hom}((W_1^+)^*, W_1^+)$ et $M$ s'identifie à $M_{\text{symp}}(\mathcal{W}^+)$ (*cf.* V.10) de telle sorte que l'action par conjugaison de $M$ sur $g(-2) \oplus g(2(2k-1))$ s'identifie à l'action naturelle de $M_{\text{symp}}(\mathcal{W}^+)$ sur $U_{\text{symp}}(\mathcal{W}^+) \oplus \text{Hom}((W_1^+)^*, W_1^+)$. La condition $Y^{2k-1} = 0$ est équivalente à $Q[\rho^+(Y)]_1 = 0$. Grâce au corollaire V.10, pour tout $z \in \mathbb{F}_q^\times$, il existe $x \in M$ tel que

$$xYx^{-1} = Y \text{ et } xZx^{-1} = z^2Z.$$

Puisque $\phi$ est évidemment invariante par conjugaison par $M$, on en déduit l'égalité

$$\phi(Y + Z) = \phi(Y + z^2Z)$$

pour tout $z \in \mathbb{F}_q^\times$. Puis :

$$(1) \qquad \begin{aligned}\phi(Y+Z) &= (q-1)^{-1} \sum_{z \in \mathbb{F}_q^\times} \phi(Y+z^2 Z) \\ &= (q-1)^{-1} \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{x \in M} {}^o\mathrm{sgn}(e)\, \psi \circ q_g(Y, x^{-1} X_e x)\, \phi_{e,x}\end{aligned}$$

où

$$\phi_{e,x} = \sum_{z \in \mathbb{F}_q^\times} \sum_{j=1,2} \psi \circ q_g(z^2 Z, x^{-1} X_e^j x).$$

Soient $e \in \mathcal{E}$ et $x \in M$. D'après la définition de $\mathrm{X}_e^1$ et $X_e^2$, quand $z$ décrit $\mathbb{F}_q^\times$ et $j$ décrit $\{1,2\}$, le terme $z^2 x^{-1} X_e^j x$ décrit l'ensemble $g(-2(2k-1)) - \{0\}$, chaque élément étant atteint deux fois. D'où l'égalité

$$\phi_{e,x} = 2 \sum_{\substack{X \in g(-2(2k-1)),\\ X \neq 0}} \psi \circ q_g(Z, X).$$

Ce terme est indépendant de $e$ et $x$. Notons-le $C$.

On a vu dans la démonstration de la proposition V.8 que pour $X \in g(2)$, on a les égalités suivantes :

- $\phi_{\mathcal{W}^-} \circ \rho^-(X) = 0$, si $X \notin \mathcal{O}^{\mathrm{alg}}({}^oX)$ ;
- $X \in \mathcal{O}^{\mathrm{alg}}({}^oX)$, soit $e \in \mathcal{E}$ tel que $X \in e$ ; alors $\phi_{\mathcal{W}^-} \circ \rho^-(X) = {}^o\mathrm{sgn}(e)$.

Pour $e \in \mathcal{E}$ et $X \in e \cap g(2)$, il existe $x \in M$ tel que $x^{-1} X_e x = X$. D'autre part le stabilisateur dans $M$ de $X_e$ a $2^k$ éléments. Les égalités précédentes se résument par la formule suivante :

$$\phi_{\mathcal{W}^-} \circ \rho^-(X) = 2^{-k} \sum_{\substack{(e,x) \in \mathcal{E} \times M;\\ x^{-1} X_e x = X}} {}^o\mathrm{sgn}(e),$$

pour tout $X \in g(2)$. Alors l'égalité (1) devient :

$$\phi(Y+Z) = C 2^k (q-1)^{-1} \sum_{X \in g(2)} \phi_{\mathcal{W}^-} \circ \rho^-(X) \psi \circ q_g(Y, X).$$

On a vu en V.8 que cette dernière somme était de la forme $C' \phi_{\mathcal{W}^+} \circ \rho^+(Y)$. Ce terme est nul car $Q[\rho^+(Y)]_1 = 0$. Cela achève la démonstration. □

**V.12.** Soient $k$ un entier $\geqslant 2$, $\mathcal{W} = (W_i)_{i=0,\dots,k}$ une famille d'espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_q$ telle que $\dim_{\mathbb{F}_q}(W_0) = 1$ et $\dim_{\mathbb{F}_q}(W_i) = i$ pour tout $i = 1, \dots, k$, et $Q$ une forme quadratique non dégénérée sur $W_k$. Posons

$$\mathcal{X}(\mathcal{W}) = \mathrm{Hom}(W_0, W_2) \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^{k-1} \mathrm{Hom}(W_i, W_{i+1}) \right).$$

Pour $X \in \mathcal{X}(\mathcal{W})$, on note ses composantes $X_i$, $i = 0, \dots, k-1$. En particulier $X_0 \in \mathrm{Hom}(W_0, W_2)$. Pour un tel élément et pour $i \in \{0, \dots, k\}$, on définit une forme quadratique $Q[X]_i$ sur $W_i$ par

$$Q[X]_i = Q[X_{k-1} \cdots X_i]\,, \quad \text{si } i \neq 0\,,$$
$$Q[X]_0 = Q[X_{k-1} \cdots X_2 X_0]\,.$$

On définit des fonction $\zeta_{\mathcal{W}}$ et $\xi_{\mathcal{W}}$ sur $\mathcal{X}(\mathcal{W})$ par les formules suivantes, pour $X \in \mathcal{X}(\mathcal{W})$ :

- s'il existe $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ tel que $Q[X]_i$ est dégénérée, ou si $X_0(W_0)+X_1(W_1) \neq W_2$, $\zeta_{\mathcal{W}}(X) = 0$ ;
- sinon

$$\zeta_{\mathcal{W}}(X) = \begin{cases} (q+1)(q-3)\,, & \text{si } Q[X]_2 \text{ est anisotrope et } \operatorname{sgn}(Q[X]_0) = \operatorname{sgn}(Q[X]_1)\,, \\ (q-1)(q-3)\,, & \text{si } Q[X]_2 \text{ est anisotrope et } \operatorname{sgn}(Q[X]_0) = -\operatorname{sgn}(Q[X]_1)\,, \\ (q-1)(q+1)\,, & \text{si } Q[X]_2 \text{ est isotrope et } \operatorname{sgn}(Q[X]_0) = \operatorname{sgn}(Q[X]_1)\,, \\ (q-3)(q+1)\,, & \text{si } Q[X]_2 \text{ est isotrope et } \operatorname{sgn}(Q[X]_0) = -\operatorname{sgn}(Q[X]_1)\,; \end{cases}$$

- $\xi_{\mathcal{W}}(X) = \zeta_{\mathcal{W}}(X) \prod_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}(Q[X]_i)$.

On pose $\mathcal{W}^* = (W_i^*)_{i=0,\ldots,k}$, on munit $W_k$ de la forme $\mathrm{Q}^*$ et on définit comme ci-dessus $\mathcal{X}(\mathcal{W}^*)$. Pour $X \in \mathcal{X}(\mathcal{W})$ et $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{W}^*)$, on pose

$$\langle Y, X\rangle = \sum_{i=0}^{k-1} \operatorname{trace}(Y_i^* X_i)\,.$$

On définit une fonction $\widetilde{\xi}_{\mathcal{W}}$ sur $\mathcal{X}(\mathcal{W}^*)$ par

$$\widetilde{\xi}_{\mathcal{W}}(Y) = \sum_{X \in \mathcal{X}(\mathcal{W})} \xi_{\mathcal{W}}(X)\,\psi(\langle Y, X\rangle)$$

pour tout $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{W}^*)$.

**V.13.** On considère les données du paragraphe précédent et on suppose $k = 2$. On a alors

$$\mathcal{X}(\mathcal{W}) = \operatorname{Hom}(W_0, W_2) \oplus \operatorname{Hom}(W_1, W_2)\,.$$

Pour $w_0 \in W_0$, $w_1 \in W_1$ et $v \in W_2$, posons

$$\mathcal{X}(w_0, w_1, v) = \{X \in \mathcal{X}(\mathcal{W})\,;\, X_0(w_0) + X_1(w_1) = v\}\,,$$
$$S(w_0, w_1, v) = \sum_{X \in \mathcal{X}(w_0, w_1, v)} \xi_{\mathcal{W}}(X)\,.$$

***Lemme***. — *Soient $w_0 \in W_0$, $w_1 \in W_1$ et $v \in W_2$. On a l'égalité*

$$S(w_0, w_1, v) = \begin{cases} 0, & si\ w_1 = 0\,, \\ (q-1)^2(q+1)(q-3)\operatorname{sgn}(Q)\operatorname{sgn} \circ Q(v)\,, & si\ w_0 = 0\ et\ w_1 \neq 0\,, \\ -(q-1)(q+1)(q-3)\operatorname{sgn}(Q)\, sgn \circ Q(v)\,, & si\ w_0 \neq 0\ et\ w_1 \neq 0\,. \end{cases}$$

*Démonstration.* — On pose $\varepsilon(Q) = \mathrm{sgn}(-1)\,\mathrm{sgn}(Q)$. On a $\varepsilon(Q) = 1$ si $Q$ est isotrope, $\varepsilon(Q) = -1$ si $Q$ est anisotrope. Notons $\mathcal{Y}$ le sous-ensemble des $(y, z) \in W_2 \times W_2$ tels que :

- $y$ et $z$ sont linéairement indépendants ;
- $Q(y) \neq 0$, $Q(z) \neq 0$.

Pour $a, b \in \mathbb{F}_q$, posons

$$\mathcal{Y}(a,b,v) = \{(y,z) \in \mathcal{Y};\ ay + bz = v\},$$

$$s(a,b,v) = \sum_{(y,z)\in\mathcal{Y}(a,b,v)} \mathrm{sgn} \circ Q(z).$$

On commence par prouver les égalités suivantes :

$$(1) \qquad s(a,b,v) = \begin{cases} 0, & \text{si } a = b = 0, \\ (q-1)(q-\varepsilon(Q)-1)\,\mathrm{sgn}\circ Q(v), & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0, \\ -\,(q-1)\,\mathrm{sgn}\circ Q(v), & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b = 0, \\ -\,(q-\varepsilon(Q)-2)\,\mathrm{sgn}\circ Q(v), & \text{si } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0. \end{cases}$$

Remarquons que pour $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_q^\times$, l'application $(y,z) \mapsto (\lambda y, \mu z)$ est une bijection de $\mathcal{Y}(\lambda a, \mu b, v)$ sur $\mathcal{Y}(a,b,v)$ et l'on a $\mathrm{sgn}\circ Q(\mu z) = \mathrm{sgn}\circ Q(z)$. On en déduit que

$$(2) \qquad s(a,b,v) = s(\lambda a, \mu b, v)$$

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_q^\times$.

Supposons $a = b = 0$. Si $v \neq 0$, $\mathcal{Y}(0,0,v) = \varnothing$ et $s(0,0,v) = 0$. Si $v = 0$, $\mathcal{Y}(0,0,0) = \mathcal{Y}$. Alors :

$$s(0,0,0) = \sum_{y\in W_2;Q(y)\neq 0}\ \sum_{z\in W_2-\mathbb{F}_q y} \mathrm{sgn}\circ Q(z)$$
$$\sum_{y\in W_2;Q(y)\neq 0} \Big[\Big(\sum_{z\in W_2} \mathrm{sgn}\circ Q(z)\Big) - (q-1)\,\mathrm{sgn}\circ Q(y)\Big].$$

Grâce à V.2 (2), la somme en $z$ est nulle. Il reste

$$s(0,0,0) = -(q-1)\sum_{y\in W_2} \mathrm{sgn}\circ Q(y)$$

qui est nulle pour la même raison.

Supposons $a = 0$ et $b \neq 0$. Grâce à (2), on peut supposer $b = 1$. Si $Q(v) = 0$, $\mathcal{Y}(0,1,v) = \varnothing$ et $s(0,1,v) = 0$. Supposons $Q(v) \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} s(0,1,v) &= \mathrm{sgn}\circ Q(v)\,|\{y \in W_2 - \mathbb{F}_q v;\ Q(y) \neq 0\}| \\ &= \mathrm{sgn}\circ Q(v)\big[|\{y \in W_2;\ Q(y) \neq 0\}| - (q-1)\big]. \end{aligned}$$

Le nombre de $y \in W_2$ tels que $Q(y) \neq 0$ se calcule grâce à V.2 (2) : il vaut $(q-1)(q-\varepsilon(Q))$. On en déduit la valeur de $s(0,1,v)$.

Supposons $a \neq 0$ et $b = 0$. On peut supposer $a = 1$. Si $Q(v) = 0$, $\mathcal{Y}(1,0,v) = \varnothing$ et $s(1,0,v) = 0$. Supposons $Q(v) \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} s(1,0,v) &= \sum_{z \in W_2 - \mathbb{F}_q v} \operatorname{sgn} \circ Q(z) \\ &= \Big(\sum_{z \in W_2} \operatorname{sgn} \circ Q(z)\Big) - (q-1) \operatorname{sgn} \circ Q(v). \end{aligned}$$

On a déjà dit que la somme en $z$ était nulle. D'où la valeur de $s(1,0,v)$.

Supposons $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Grâce à (2), on a

$$\begin{aligned} s(a,b,v) &= (q-1)^{-2} \sum_{a',b' \in \mathbb{F}_q^\times} s(a',b',v) \\ &= (q-1)^{-2} \Big[ \Big( \sum_{a',b' \in \mathbb{F}_q} s(a',b',v)\Big) - \Big(\sum_{b' \in \mathbb{F}_q^\times} s(0,b',v)\Big) \\ &\qquad - \Big(\sum_{a' \in \mathbb{F}_q^\times} s(a',0,v)\Big) - s(0,0,v)\Big]. \end{aligned} \tag{3}$$

Pour $(y,z) \in \mathcal{Y}$, il existe un unique couple $(a',b') \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ tel que $a'y + b'z = v$. *I.e.* $\mathcal{Y}$ est union disjointe des $\mathcal{Y}(a',b',v)$ pour $(a',b') \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$. On a déjà remarqué que $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(0,0,0)$. On en déduit que la première somme de l'expression (3) est égale à $s(0,0,0)$. Grâce à (2), tous les termes de l'expression (3) ont déjà été calculés. On en déduit la valeur de $s(a,b,v)$. Cela démontre (1).

Fixons des éléments non nuls $w_0' \in W_0$ et $w_1' \in W_1$. On suppose $w_0' = w_0$ si $w_0 \neq 0$ et $w_1' = w_1$, si $w_1 \neq 0$. Posons

$$(a,b) = \begin{cases} (0,0), & \text{si } w_0 = 0 \text{ et } w_1 = 0, \\ (1,0), & \text{si } w_0 \neq 0 \text{ et } w_1 = 0, \\ (0,1), & \text{si } w_0 = 0 \text{ et } w_1 \neq 0, \\ (1,1), & \text{si } w_0 \neq 0 \text{ et } w_1 \neq 0, \end{cases}$$

Identifions $\mathcal{X}(\mathcal{W})$ à $W_2 \times W_2$ par $X \mapsto (X_0(W_0'), X_1(W_1'))$ et $\xi_{\mathcal{W}}$ à une fonction sur $W_2 \times W_2$. Le support de $\xi_{\mathcal{W}}$ étant inclus dans $\mathcal{Y}$, on voit que

$$S(w_0,w_1,v) = \sum_{(y,z) \in \mathcal{Y}(a,b,v)} \xi_{\mathcal{W}}(y,z).$$

Pour $(y,z) \in \mathcal{Y}$, on a l'égalité :

$$\xi_{\mathcal{W}}(y,z) = (q-1+2\varepsilon(Q))(q-1-\varepsilon(Q) + \operatorname{sgn} \circ Q(y) \operatorname{sgn} \circ Q(z)) \operatorname{sgn} \circ Q(z) \operatorname{sgn}(Q).$$

D'où :

$$S(w_0,w_1,v) = (q-1+2\varepsilon(Q)) \operatorname{sgn}(Q) \big[(q-1-\varepsilon(Q))\, s(a,b,v) + s(b,a,v)\big].$$

En utilisant (1), le calcul conduit à l'égalité de l'énoncé. □

**V.14.** On conserve les hypothèses du paragraphe précédent. On note $(y, Y) \mapsto y.Y$ l'action naturelle du groupe $GL(W_2^*)$ sur $\mathcal{X}(\mathcal{W}^*)$. Si $w_2^*$ est un élément non nul de $W_2^*$, on note $B_1(w_2^*)$ le sous-groupe des $y \in GL(W_2^*)$ tels que $y$ stabilise la droite $\mathbb{F}_q w_2^*$ et induise l'identité sur $W_2^*/\mathbb{F}_q w_2^*$.

***Lemme.*** — *Soient $w_2^*$ un élément non nul de $W_2^*$ et $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{W}^*)$. Supposons $Y_0(W_0^*)+ Y_1(W_1^*) = W_2^*$. On a alors l'égalité :*

$$\sum_{y \in B_1(w_2^*)} \widetilde{\xi}_{\mathcal{W}}(y \cdot Y) =$$

$$\begin{cases} q(q-1)^2(q+1)(q-3)\operatorname{sgn}\circ Q^*(w_2^*), & \textit{si } w_2^* \in Y_0(W_0^*), \\ 0, & \textit{si } w_2^* \in Y_1(W_1^*), \\ -q(q-1)(q+1)(q-3)\operatorname{sgn}\circ Q^*(w_2^*), & \textit{si } w_2^* \notin Y_0(W_2^*) \cup Y_1(W_1^*). \end{cases}$$

*Démonstration.* — Pour $i = 0, 1$, fixons des éléments non nuls $w_i \in W_i$ et $w_i^* \in W_i^*$ tels que $\langle w_i^*, w_i \rangle = 1$. Comme dans la démonstration précédente, on identifie $\mathcal{X}(\mathcal{W})$ à $W_2 \times W_2$ par $X \mapsto (X_0(W_0), X_1(W_1))$, $\xi_{\mathcal{W}}$ à une fonction sur $W_2 \times W_2$ et l'on introduit le sous-ensemble $\mathcal{Y}$ de $W_2 \times W_2$. Complétons $w_2^*$ en une base $\{v_2^*, w_2^*\}$ de $W_2^*$. Le groupe $B_1(w_2^*)$ s'identifie au groupe des matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{F}_q, \mu \in \mathbb{F}_q^\times \right\}.$$

Ecrivons

$$Y_0(w_0^*) = av_2^* + bw_2^*, \quad Y_1(w_1^*) = cv_2^* + dw_2^*.$$

Pour

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \in B_1(w_2^*)$$

et $X = (v_0, v_1) \in W_2 \times W_2$, on calcule

$$\langle y \cdot Y, X \rangle = \langle v_2^*, av_0 + cv_1 \rangle + \lambda \langle w_2^*, av_0 + cv_1 \rangle + \mu \langle w_2^*, bv_0 + dv_1 \rangle.$$

Notons $S$ le membre de gauche de l'égalité de l'énoncé. On a l'égalité

$$S = \sum_{\mu \in \mathbb{F}_q^\times} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \sum_{(v_0, v_1) \in \mathcal{Y}} \xi_{\mathcal{W}}(v_0, v_1) \psi\big(\langle v_2^*, av_0 + cv_1 \rangle + \lambda \langle w_2^*, av_0 + cv_1 \rangle + \mu \langle w_2^*, bv_0 + dv_1 \rangle\big).$$

Pour tous $z \in \mathbb{F}_q^\times$ et $(v_0, v_1) \in \mathcal{Y}$, on a $(zv_0, zv_1) \in \mathcal{Y}$ et $\xi_{\mathcal{W}}(zv_0, zv_1) = \xi_{\mathcal{W}}(v_0, v_1)$. On remplace dans l'expression ci-dessus $(v_0, v_1)$ par $(zv_0, zv_1)$ puis on moyenne en $z$. Par un changement de variables évident, on obtient :

$$S = (q-1)^{-1} \sum_{z, \mu \in \mathbb{F}_q^\times} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \sum_{(v_0, v_1) \in \mathcal{Y}} \xi_{\mathcal{W}}(v_0, v_1) \psi\big(z \langle v_2^*, av_0 + cv_1 \rangle + \lambda \langle w_2^*, av_0 + cv_1 \rangle + \mu \langle w_2^*, bv_0 + dv_1 \rangle\big).$$

Posons

$$\mathcal{Y}' = \big\{(v_0, v_1) \in \mathcal{Y};\ \langle w_2^*, av_0 + cv_1\rangle = 0\big\}.$$

La somme en $\lambda$ se calcule aisément. On obtient :

(1) $$S = q(q-1)^{-1} \sum_{z,\mu\in\mathbb{F}_q^\times} \sum_{(v_0,v_1)\in\mathcal{Y}'} \xi_{\mathcal{W}}(v_0,v_1)\psi\big(z\langle v_2^*, av_0+cv_1\rangle + \mu\langle w_2^*, bv_0+dv_1\rangle\big).$$

Par hypothèse, la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est inversible. Pour $(v_0, v_1) \in \mathcal{Y}$, les vecteurs $v_0$ et $v_1$ sont linéairement indépendants. Si $(v_0, v_1) \in \mathcal{Y}'$, on a donc

$$\langle v_2^*, av_0 + cv_1\rangle \neq 0 \quad \text{et} \quad \langle w_2^*, bv_0 + dv_1\rangle \neq 0.$$

Les sommes en $z$ et $\mu$ de l'expression (1) valent toutes deux $-1$. D'où l'égalité

$$S = q(q-1)^{-1} \sum_{(v_0,v_1)\in\mathcal{Y}'} \xi_{\mathcal{W}}(v_0, v_1).$$

Notons $V_2$ l'annulateur de $w_2^*$ dans $W_2$. Avec les notations de V.13, $\mathcal{Y}'$ est union disjointe des $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}(aw_0, cw_1, v)$ quand $v$ décrit $V_2$. D'où l'égalité

$$S = q(q-1)^{-1} \sum_{v\in V_2} S(aw_0, cw_1, v).$$

Il reste à appliquer le lemme V.13 et la formule V.1 (1) pour obtenir l'égalité de l'énoncé. □

**V.15.** Soient $k$, $\mathcal{W}$ et $Q$ comme en V.12.

***Lemme.*** — *Soit $Y \in \mathcal{X}(\mathcal{W}^*)$. Supposons vérifiées les trois conditions suivantes :*
- *les espaces $Y_0(W_0^*)$ et $Y_1(W_1^*)$ sont orthogonaux pour la forme $Q^*[Y]_2$ ;*
- *$Q^*[Y]_0 = 0$ ou $Q^*[Y]_1 = 0$ ;*
- *$Y_0 \neq 0$.*

*Alors $\widetilde{\xi}_{\mathcal{W}}(Y) = 0$.*

*Démonstration.* — Posons $\mathcal{W}' = (W_i)_{i=2,\dots,k}$, définissons $U(\mathcal{W}')$ et $M_{\mathrm{orth}}(\mathcal{W}'^*)$ comme en V.9. Remarquons que $M_{\mathrm{orth}}(\mathcal{W}'^*)$ agit naturellement sur $\mathcal{X}(\mathcal{W})$ et $\mathcal{X}(\mathcal{W}^*)$. La fonction $\xi_{\mathcal{W}}$ et l'accouplement sur $\mathcal{X}(\mathcal{W}) \times \mathcal{X}(\mathcal{W}^*)$ sont invariants par cette action. Pour tout $y' \in M_{\mathrm{orth}}(\mathcal{W}'^*)$, on a donc l'égalité

(1) $$\widetilde{\xi}_{\mathcal{W}}(Y) = \widetilde{\xi}_{\mathcal{W}}(y' \cdot Y).$$

Pour $X' \in U(\mathcal{W}')$ et $i \in \{2, \dots, k\}$, on a défini la forme quadratique $Q[X']_i$ sur $W_i$. On pose

$$\xi'(X') = \prod_{i=3}^{k} \mathrm{sgn}(Q[X']_i).$$

Notons $\mathcal{U}(\mathcal{W}')$ le sous-ensemble des $X' \in U(\mathcal{W}')$ tels que $Q[X']_2$ soit non dégnéérée. Posons $\mathcal{W}'' = (W_0, W_1, W_2)$. Pour $X' \in \mathcal{U}(\mathcal{W}')$, munissons $W_2$ de la forme $Q[X']_2$. On définit comme en V.12 des fonctions sur $\mathcal{X}(\mathcal{W}'')$ et $\mathcal{X}(\mathcal{W}''^*)$ que nous noterons $\xi^{X'}_{\mathcal{W}''}$ et $\widetilde{\xi}^{X'}_{\mathcal{W}''}$.

On a les égalités :

$$\mathcal{X}(\mathcal{W}) = U(\mathcal{W}') \times \mathcal{X}(\mathcal{W}'')$$
$$\mathcal{X}(\mathcal{W}^*) = U(\mathcal{W}'^*) \times \mathcal{X}(\mathcal{W}''^*).$$

Pour $X \in \mathcal{X}(\mathcal{W})$, on note $X'$, resp. $X''$, sa composante dans $U(\mathcal{W}')$, resp. $\mathcal{X}(\mathcal{W}'')$. De même, on note $Y'$, resp. $Y''$, la composante de $Y$ dans $U(\mathcal{W}'^*)$, resp. $\mathcal{X}(\mathcal{W}''^*)$. Pour $X \in \mathcal{X}(\mathcal{W})$, on a l'égalité

$$\xi_{\mathcal{W}}(X) = \begin{cases} 0, & \text{si } X' \notin \mathcal{U}(\mathcal{W}'), \\ \xi'(X')\xi^{X'}_{\mathcal{W}''}(X''), & \text{si } X' \in \mathcal{U}(\mathcal{W}'), \end{cases}$$

et, avec des définitions évidentes :

$$\langle Y, X\rangle = \langle Y', X'\rangle + \langle Y'', X''\rangle.$$

On en déduit l'égalité

$$(2) \qquad \widetilde{\xi}_{\mathcal{W}}(Y) = \sum_{X' \in \mathcal{U}(\mathcal{W}')} \xi'(X')\psi(\langle Y', X'\rangle)\widetilde{\xi}^{X'}_{\mathcal{W}''}(Y'').$$

Supposons $Y_0(W_0^*) + Y_1(W_1^*) = W_2^*$. Les hypothèses de l'énoncé impliquent que $Q^*[Y]_2$ est dégénérée, *i.e.* $\mathrm{Ker}(Q^*[Y]_2) \neq \{0\}$. En appliquant le lemme V.9, on voit que l'on peut trouver un élément non nul $w_2^*$ de $\mathrm{Ker}(Q^*[Y]_2)$ tel que, en définissant le groupe $B_1(w_2^*)$ comme en V.14, on ait la propriété suivante : pour tout $y \in B_1(w_2^*)$ il existe $y' \in M_{\mathrm{orth}}(\mathcal{W}'^*)$ tel que $y' \cdot Y' = Y'$ et $y'_2 = y$. Fixons un tel $w_2^*$. Soit $y \in B_1(w_2^*)$ et $y'$ comme précédemment. On a une égalité analogue à (2) pour $\widetilde{\xi}_{\mathcal{W}}(y' \cdot Y)$. En utilisant (1), on obtient

$$\widetilde{\xi}_{\mathcal{W}}(Y) = \sum_{X' \in \mathcal{U}(\mathcal{W}')} \xi'(X')\psi(\langle Y', X'\rangle)\widetilde{\xi}^{X'}_{\mathcal{W}''}(y \cdot Y'').$$

Puis, en moyennant en $y$ :

$$\widetilde{\xi}_{\mathcal{W}}(Y) = |B_1(w_2^*)|^{-1} \sum_{X' \in \mathcal{U}(\mathcal{W}')} \xi'(X')\psi(\langle Y', X'\rangle) \sum_{y \in B_1(w_2^*)} \widetilde{\xi}^{X'}_{\mathcal{W}''}(y \cdot Y'').$$

Posons $\mathcal{V}'' = (W_1, W_2)$, définissons comme en V.5 $U_{\mathrm{orth}}(\mathcal{V}''^*)$ et, pour $X' \in \mathcal{U}(\mathcal{W}')$, une fonction $\widetilde{\phi}_{\mathcal{V}'', Q[X']_2}$ sur $U_{\mathrm{orth}}(\mathcal{V}''^*)$. Fixons $Z_1 \in \mathrm{Hom}(W_1^*, W_2^*) = U_{\mathrm{orth}}(\mathcal{V}''^*)$ tel que $Z_1(W_1^*) = \mathbb{F}_q w_2^*$. Grâce aux lemmes V.5 et V.14, il existe $c_1 \in \mathbb{Q}$ tel que, pour tout $X' \in \mathcal{U}(\mathcal{W}')$, on ait l'égalité

$$\sum_{y \in B_1(w_2^*)} \widetilde{\xi}^{X'}_{\mathcal{W}''}(y \cdot Y'') = c_1 \widetilde{\phi}_{\mathcal{V}'', Q[X']_2}(Z_1).$$

D'où l'égalité

$$\widetilde{\xi}_{\mathcal{W}}(Y) = c_1 \sum_{X' \in \mathcal{U}(\mathcal{W}')} \xi'(X')\,\psi(\langle Y', X'\rangle)\,\widetilde{\phi}_{\mathcal{V}'', Q[X']_2}(Z_1).$$

Posons $\mathcal{V} = (W_i)_{i=1,\ldots,k}$ et $Z = (Z_1, Y_2, \ldots, Y_{k-1}) \in U_{\mathrm{orth}}(\mathcal{V})$. Un calcul analogue à celui qui conduisit à l'égalité (2) conduit maintenant à l'égalité :

$$\widetilde{\xi}_{\mathcal{W}}(Y) = c_1\,\widetilde{\phi}_{\mathcal{V},Q}(Z).$$

Grâce au lemme V.5, il existe donc $c_2 \in \mathbb{Q}$ tel que

$$\widetilde{\xi}_{\mathcal{W}}(Y) = c_2\,\phi_{\mathcal{V}^*,Q^*}(Z).$$

Mais $w_2^* \in \operatorname{Ker}(Q^*[Y]_2)$ donc $Q^*[Z]_1 = 0$ puis $\widetilde{\xi}_{\mathcal{W}}(Y) = \phi_{\mathcal{V}^*,Q^*}(Z) = 0$.

Supposons maintenant $Y_0(W_0^*) + Y_1(W_1^*) \neq W_2^*$. Puisque $Y_0 \neq 0$, on a $Y_1(W_1^*) \subset Y_0(W_0^*)$. Pour $i = 0, 1$, fixons $w_i \in W_i$ et $w_i^* \in W_i^*$ tels que $\langle w_i^*, w_i\rangle = 1$. Soit $z \in \mathbb{F}_q$ tel que $Y_1(w_1^*) = z\; Y_0(w_0^*)$. Pour $X'' \in \mathcal{X}(\mathcal{W}'')$, on a l'égalité

$$\langle Y'', X''\rangle = \langle Y_0(w_0^*), X_0(w_0) + z X_1(w_1)\rangle.$$

Soit $X' \in \mathcal{U}(\mathcal{W}')$, munissons $W_2$ de la forme quadratique $Q[X']_2$. On a les égalités

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi}^{X'}_{\mathcal{W}''}(Y'') &= \sum_{X' \in \mathcal{X}(\mathcal{W}'')} \xi^{X'}_{\mathcal{W}''}(X'')\,\psi(\langle Y_0(w_0^*), X_0(w_0) + zX_1(w_1)\rangle)\\ &= \sum_{v \in W_2} S(w_0, zw_1, v)\,\psi(\langle Y_0(w_0^*), v\rangle),\end{aligned}$$

avec les notations de V.13. Utilisons le lemme V.13. Si $z = 0$, l'expression ci-dessus est nulle. Grâce à (2), $\widetilde{\xi}_{\mathcal{W}}(Y) = 0$. Supposons $z \neq 0$. Alors il existe $c_3 \in \mathbb{Q}$, indépendant de $X'$, tel que :

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi}^{X'}_{\mathcal{W}''}(Y'') &= c_3 \sum_{v \in W_2} \operatorname{sgn}(Q[X']_2)\,\operatorname{sgn}(Q[X']_2(v)\,\psi(\langle z^{-1}Y_1(w_1^*), v\rangle)\\ &= c_3\,\widetilde{\phi}_{\mathcal{V}'', Q[X']_2}(z^{-1}Y_1),\end{aligned}$$

$\mathcal{V}''$ étant défini comme précédemment. On en déduit encore l'existence de $c_4 \in \mathbb{Q}$ tel que

$$\widetilde{\xi}_{\mathcal{W}}(Y) = c_4\,\phi_{\mathcal{V}^*,Q^*}(Z),$$

où $Z = (z^{-1}Y_1, Y_2, \ldots, Y_{k-1}) \in U_{\mathrm{orth}}(\mathcal{V})$. L'hypothèse de l'énoncé implique $Q^*[Z]_1 = 0$ d'où $\widetilde{\xi}_{\mathcal{W}}(Y) = \phi_{\mathcal{V}^*,Q^*}(Z) = 0$. Cela achève la démonstration. □

**V.16.** Soient $(V, q_V)$ un espace orthogonal vérifiant les conditions de II.5 et ${}^oX$ l'élément de $g_{\mathrm{nil}}$ fixé dans ce paragraphe. Complétons ${}^oX$ en un $s\ell_2$-triplet $({}^oX, {}^oH, {}^oY)$. On en déduit une graduation de $\boldsymbol{g}$ (*cf.* V.7). L'ensemble des valeurs propres de ${}^oH$ (agissant dans $V$) est $\{\pm 2i; i = 0, \ldots, k-1\}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, notons $W_i^+$, resp. $W_i^-$, le sous-espace propre de $V$ associé à la valeur propre $2k - 2i$, resp. $2i - 2k$.

Posons $W_0^- = W_1^+$, $W_0^+ = W_1^-$, $\mathcal{W}^+ = (W_i^+)_{i=0,\ldots,k}$, $\mathcal{W}^- = (W_i^-)_{i=0,\ldots,k}$ et munissons $W_k^+$ et $W_k^-$ (qui sont d'ailleurs égaux) de la restriction de $q_V$. Comme dans la preuve de la proposition V.8, il existe des isomorphismes naturels

$$\rho^- : g(2) \oplus g(8-4k) \longrightarrow \mathcal{X}(\mathcal{W}^-),$$
$$\rho^+ : g(-2) \oplus g(4k-8) \longrightarrow \mathcal{X}(\mathcal{W}^+).$$

Pour $Y \in g$, posons

$$\phi(Y) = \sum_{X \in g(2) \oplus g(8-4k)} \xi_{\mathcal{W}^-} \circ \rho^-(X) \psi \circ q_g(Y, X).$$

***Lemme***. — *Soient $Y \in g(-2)$ et $Z \in g(4k-8)$. Supposons $Z \neq 0$ et $Y + Z$ nilpotent. Alors $\phi(Y+Z) = 0$.*

*Démonstration*. — Des raisonnements analogues à ceux de la démonstration de la proposition V.8 conduisent à l'égalité

$$\phi(Y+Z) = \widetilde{\xi}_{\mathcal{W}^{+*}} \circ \rho^+(Y+Z).$$

Posons $Y' = \rho^+(Y+Z)$, fixons $w^+ \in W_1^+$ et $w^- \in W_1^-$ tels que $q_V(w^+, w^-) = 1$. Remarquons que $(Y+Z)^{2k-2}$ conserve l'espace $W_1^+ \oplus W_1^-$. La matrice de la restriction de $(Y+Z)^{2k-2}$ à cet espace, calculée dans la base $\{w^+, w^-\}$, est égale à

$$\begin{bmatrix} q_V[Y']_2(Y_1'(w^+), Y_0'(w^-)) & q_V[Y']_2(Y_0'(w^-)) \\ \\ q_V[Y']_2(Y_1'(w^+)) & q_V[Y']_2(Y_1'(w^+), Y_0'(w^-)) \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est nilpotente par hypothèse. On en déduit que $Y'$ vérifie les deux premières hypothèses du lemme V.15. La troisième résulte de l'hypothèse $Z \neq 0$. Grâce à ce lemme, $\widetilde{\xi}_{\mathcal{W}^{+*}}(Y') = 0$. Cela achève la démonstration. □

# CHAPITRE VI

# DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION IV.3 DANS LE CAS SYMPLECTIQUE

**VI.1.** Soient $(V, q_V)$ un espace symplectique comme en I.2, $k', k'' \in \mathbb{N}$, supposons

$$d = k'(k'+1) + k''(k''+1) \text{ et } k' \geqslant k''.$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, k'\}$, posons

$$\ell(j) = \sup(0, j - k' + k'').$$

Fixons une base de $V$ :

$$\begin{gathered}\{v'(i,j)\,;\, j = 1, \dots, k',\, i = -j, \dots, j-1\} \\ \cup \{v''(i,j)\,;\, j = k' - k'' + 1, \dots, k',\, i = -\ell(j), \dots, \ell(j) - 1\}\end{gathered}$$

de sorte que les égalités ci-dessous soient vérifiées pour tous les couples $(i,j)$ et $(i',j')$ tels que les vecteurs correspondants soient définis :

$$q_V(v'(i,j), v''(i',j')) = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} q_V(v'(i,j), v'(i',j')) = 0 \\ q_V(v''(i,j), v''(i',j')) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{si } i + i' \neq -1 \text{ ou } j \neq j',$$

$$\left.\begin{aligned} q_V(v'(i,j'), v'(-1-i,j)) = 1 \\ q_V(v''(i,j), v''(-1-i,j)) = w_F^{-1} \end{aligned}\right\} \quad \text{si } i \geqslant 0.$$

Pour tout $i \in \{-k', \dots, k'-1\}$, resp. $i \in \{-k'', \dots, k''-1\}$, resp. $j \in \{1, \dots, k'\}$, on note $V'[i]$, resp. $V''[i]$, resp. $V(j)$, le sous-espace de $V$ engendré par

$$\begin{aligned} &\{v'(i,j)\,;\, j = 1, \dots, k',\, -j \leqslant i \leqslant j-1\}, \\ \text{resp.}\quad &\{v''(i,j)\,;\, j = k' - k'' + 1, \dots, k'',\, -\ell(j) \leqslant i \leqslant \ell(j) - 1\}, \\ \text{resp.}\quad &\{v'(i,j)\,;\, i = -j, \dots, j-1\} \cup \{v''(i,j)\,;\, i = -\ell(j), \dots, \ell(j) - 1\}. \end{aligned}$$

Dans les deux premiers cas, on note $L'[i]$, resp. $L''[i]$, le sous $\mathfrak{o}_F$-module de $V$ engendré par les mêmes éléments. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\begin{aligned} L'_i &= \Big(\bigoplus_{i'\geqslant i} L'[i']\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i'\leqslant i-1} \mathfrak{p}_F L'[i']\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i''} \mathfrak{p}_F L''[i'']\Big), \\ L''_i &= \Big(\bigoplus_{i'} L'[i']\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i''\geqslant i} L''[i'']\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i''\leqslant i-1} \mathfrak{p}_F L''[i'']\Big). \end{aligned}$$

On a les inclusions suivantes

$$\begin{aligned} \cdots = L''_{-k''-1} = L''_{-k''} \supset L''_{-k''+1} \supset \cdots \supset L''_{k''} = L''_{k''+1} = \cdots = L'_{-k'-1} \\ = L'_{-k'} \supset L'_{-k'+1} \supset \cdots \supset L'_{k'-1} \supset L'_{k'} = L'_{k'+1} = \cdots \end{aligned}$$

On a les égalités

$$L'_{k'} = \mathfrak{p}_F L''_{-k''}$$

et

$$\widetilde{L}'_i = \mathfrak{p}_F^{-1} L'_{-i}, \quad \widetilde{L}''_i = L''_{-i}$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

On pose $g\ell = \mathrm{End}(V)$ et, pour tous $j, j' \in \{1, \ldots, k'\}$, $g\ell(j', j) = \mathrm{Hom}(V(j), V(j'))$. On a l'égalité

$$g\ell = \bigoplus_{j,j'=1}^{k'} g\ell(j', j).$$

Pour $X \in g\ell$, on note $X^*$ l'élément de $g\ell$ tel que

$$q_V(X^*(v), v') = q_V(v, X(v'))$$

pour tous $v, v' \in V$. On appelle $X^*$ l'adjoint de $X$. Si $X \in g\ell(j', j)$, alors $X^* \in g\ell(j, j')$.

Pour tout sous-$\mathfrak{o}_F$-module $r$ de $g\ell$, resp. de $g\ell(j', j)$, on pose $r^* = \{X^*; X \in r\}$ et on note $\widetilde{r}$ l'ensemble des $X \in g\ell$, resp. $X \in g\ell(j, j')$, tels que

$$\mathrm{trace}(YX) \in \mathfrak{o}_F$$

pour tout $Y \in r$.

***Remarque***. — Pour $r \subset g\ell(j', j)$, cette définition donne des ensembles $\widetilde{r}$ différents selon que l'on considère $r$ comme un sous-ensemble de $g\ell(j', j)$ ou de $g\ell$. Quand on utilisera cette notation, le choix entre les deux définitions possibles sera clair selon le contexte.

On pose

$$\begin{aligned} h &= \{X \in g\ell; \forall i \in \mathbb{Z}, X(L'_i) \subset L'_i, X(L''_i) \subset L''_i\}, \\ h^1 &= \{X \in g\ell; \forall i \in \mathbb{Z}, X(L'_i) \subset L'_{i+1}, X(L''_i) \subset L''_{i+1}\}. \end{aligned}$$

Le groupe $G$ se plonge dans $g\ell$ par $G \subset GL(V) \subset g\ell$. On pose

$$H = G \cap h.$$

**VI.2.** Pour tout $j \in \{1, \dots, k'\}$, fixons un ensemble de représentants $\Gamma_j$ de $\mathfrak{o}_F^\times / \mathfrak{o}_F^{\times 2}$ dans $\mathfrak{o}_F^\times$. Posons

$$\Gamma = \prod_{j=1}^{k'} \Gamma_j .$$

Pour $\gamma \in \Gamma$, fixons une famille $(a_{\gamma,j})_{j=1,\dots,k'}$ d'éléments de $\overline{F}$ telle que, pour tout $j$,

$$a_{\gamma,j}^{2(j+\ell(j))} = \omega_F \gamma_j .$$

On note $F_{\gamma,j}$ l'extension de $F$ engendrée par $a_{\gamma,j}$, $F_{\gamma,j}^{\#}$ son sous-corps d'indice 2 engendré par $a_{\gamma,j}^2$, $\tau_{\gamma,j}$ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(F_{\gamma,j}/F_{\gamma,j}^{\#})$ et $\mathfrak{p}_{\gamma,j}$ l'idéal maximal de l'anneau des entiers de $F_{\gamma,j}$.

Posons $\mathcal{E} = (\mathfrak{o}_F^\times / \mathfrak{o}_F^{\times 2})^{k'}$. On identifie $\mathcal{E}$ à un ensemble de représentants dans $(\mathfrak{o}_F^\times)^{k'}$. Pour $\gamma \in \Gamma$ et $e \in \mathcal{E}$, posons

$$V(\gamma, e) = \bigoplus_{j=1}^{k'} F_{\gamma,j} ,$$

munissons $V(\gamma, e)$ de la forme symplectique $q_{V(\gamma,e)}$ ainsi définie :

$$q_{V(\gamma,e)}\Big(\bigoplus_j v_j, \bigoplus_j v'_j\Big) = \sum_{j=1}^{k'} [F_{\gamma,j} : F]^{-1} \operatorname{trace}_{F_{\gamma,j}/F}(\tau_{\gamma,j}(v_j) v'_j a_{\gamma,j} e_j) .$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, k'\}$, le corps $F_{\gamma,j}$ se plonge naturellement dans l'algèbre $g\ell(\gamma, e)$ des endomorphismes de $V(\gamma, e)$. On note $F(\gamma, e, j)$ son image ; $X(\gamma, e, j)$ celle de $a_{\gamma,j}$ ; pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{p}(\gamma, e, j)^i$ celle de $\mathfrak{p}_{\gamma,j}^i$ ; $A\ell(\gamma, e, j) = X(\gamma, e, j) + \mathfrak{p}(\gamma, e, j)^2$. On pose

$$F(\gamma, e) = \bigoplus_{j=1}^{k'} F(\gamma, e, j)$$

et on définit dans cette algèbre l'élément $X(\gamma, e)$ et les sous-ensembles $\mathfrak{p}(\gamma, e)^i$ et $A\ell(\gamma, e)$, sommes sur $j$ des précédents.

On définit un isomorphisme $\varphi_{\gamma,e} : V(\gamma, e) \to V$ par la formule suivante, pour tous $j \in \{1, \dots, k'\}$ et $i \in \{-j - 2\ell(j), \dots, j-1\}$ :

$$\varphi_{\gamma,e}(a_{\gamma,j}^i) = \begin{cases} v''(i + j + \ell(j), j), & \text{si } -j - 2\ell(j) \leqslant i \leqslant -j - \ell(j) - 1, \\ (-1)^i \gamma_j^{-1} e_j v''(i + j + \ell(j), j), & \text{si } -j - \ell(j) \leqslant i \leqslant -j - 1, \\ v'(i, j), & \text{si } -j \leqslant i \leqslant -1, \\ (-1)^i e_j v'(i, j), & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant j - 1. \end{cases}$$

Cet isomorphisme identifie $q_{V(\gamma,e)}$ à $q_V$. On identifie grâce à lui $g\ell(\gamma, e)$ à $g\ell$.

Soit $j \in \{1, \dots, k'\}$. Remarquons que $\varphi_{\gamma,e}(F_{\gamma,j}) = V(j)$. Posons

$$\alpha = e_j , \quad \beta = (-1)^{j+\ell(j)} \gamma_j^{-1} e_j , \quad \delta = (-1)^{j+1} \gamma_j e_j^{-1} .$$

Si $j \leqslant k' - k''$, la matrice de $X(\gamma, e, j)$ dans la base

$$v'(j-1, j), \dots, v'(-j, j)$$

de $V(j)$ est

$$
\begin{bmatrix}
0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & -1 & & & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \alpha & & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & 1 & & \vdots \\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & & & & & & \ddots & 1 \\
\omega_F\delta & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\tag{1}
$$

Si $j \geqslant k' - k'' + 1$, la matrice de $X(\gamma, e, j)$ dans la base

$$v'(j-1, j), \dots, v'(-j, j),\ \ v''(\ell(j) - 1, j), \dots, v''(-\ell(j), j)$$

de $V(j)$ est

$$
\begin{bmatrix}
0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & -1 & & & & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \alpha & & & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & 1 & & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & \ddots & 1 & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & \ddots & \delta & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & -1 & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & \ddots & -1 & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & \ddots & \beta & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \ddots & 1 & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & \ddots & 0 \\
0 & & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
\omega_F\delta & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\tag{2}
$$

On définit une fonction $\kappa : \Gamma \times \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ par

$$\kappa(\gamma, e) = \Big( \prod_{j=1}^{k'-k''} \operatorname{sgn}(e_j)^j \Big) \Big( \prod_{j=k'-k''+1}^{k'} \operatorname{sgn}(e_j)^{k'-k''} \operatorname{sgn}\Big( (-1)^{k'-k''} \gamma_j \Big)^{j-k'+k''} \Big).$$

Pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $e \in \mathcal{E}$, on pose $A(\gamma, e) = g \cap A\ell(\gamma, e)$ et $A(\gamma, e, j) = g \cap A\ell(\gamma, e, j)$ pour tout $j = 1, \dots, k'$. On munit $A(\gamma, e)$ de la restriction de la mesure de Haar sur $g \cap F(\gamma, e)$ telle que $\operatorname{mes}(A(\gamma, e)) = 1$.

**VI.3.** On définit une fonction $I : g \to \mathbb{C}$ par l'égalité

$$I(Z) = \int_H \sum_{(\gamma, e) \in \Gamma \times \mathcal{E}} \kappa(\gamma, e) \int_{A(\gamma, e)} \psi \circ q_g(Z, x^{-1} X x)\, dX\, dx$$

pour tout $Z \in g$.

***Proposition.*** — *Soit $Z \in g_{\mathrm{ent}}$. Supposons $I(Z) \neq 0$. Alors*

$$Z(L'_{-k'}) \subset L'_{-k'} \quad \textit{et} \quad Z(L''_{-k''}) \subset L''_{-k''}.$$

La démonstration occupe les paragraphes VI.4 à VI.24.

**VI.4.** Considérons les données suivantes :

- pour tous $j, j' \in \{1, \dots, k'\}$ avec $j' \geqslant j$, une suite $(r(j', j)_i)_{i \geqslant 1}$ de réseaux de $g\ell(j', j) \cap h^1$ ;
- pour tous $j, j' \in \{1, \dots, k'\}$ avec $j' \geqslant j$, un sous $\mathfrak{o}_F$-module $m(j', j)$ de $g\ell(j', j) \cap h^0$ ;
- un sous-ensemble $J \subset \{1, \dots, k'\}$ ;
- pour tout $j \in J$, un réseau $s(j)$ de $g\ell(j, j)$ ;
- un sous-groupe fermé $M$ de $H$.

On suppose vérifiées les conditions (H1) à (H11) suivantes.

(H1) Pour tout $j \in \{1, \dots, k'\}$ et tout $i \geqslant 1$, resp. pour tout $j \in \{1, \dots, k'\}$, resp. pour tout $j \in J$, le réseau $r(j, j)_i$, resp. $m(j, j)$, resp. $s(j)$ est stable par adjonction.

(H2) Pour tous $j, j' \in \{1, \dots, k'\}$ avec j' $\geqslant j$ et tout $i \geqslant 1$

$$r(j', j)_{i+1} \subset r(j', j)_i.$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, k'\}$, posons

$$A(j) = \bigcup_{(\gamma, e) \in \Gamma \times \mathcal{E}} A(\gamma, e, j).$$

(H3) Pour tous $j, j' \in \{1, \dots, k'\}$ avec $j' > j$ ou $j' = j \notin J$, et pour tout $i \geqslant 1$, l'ensemble $X' r(j', j)_i$ est indépendant de $X'$ pourvu que $X' \in A(j')$.

Sous ces hypothèses, on note cet ensemble $s(j', j)_i$. Pour $j \in J$ et $i \geqslant 1$, on pose

$$s(j, j)_i = s(j).$$

(H4) Pour tous $j, j' \in \{1, \ldots, k'\}$ avec $j' \geqslant j$, pour tout $i \geqslant 1$ et tout $X \in A(j)$,
$$r(j', j)_i X \subset s(j', j)_i .$$

(H5) Pour tout $j \in \{1, \ldots, k'\} - J$, tout $i \geqslant 1$ et tout $(\gamma, e) \in \Gamma \times \mathcal{E}$,
$$r(j, j)_i = \left[r(j, j)_i \cap F(\gamma, e, j)^{\sim}\right] \oplus \left[r(j, j)_i \cap F(\gamma, e, j)\right].$$

Pour tous $j, j' \in \{1, \ldots, k'\}$ avec $j' < j$ et pour tout $i \geqslant 1$, on pose
$$r(j', j)_i = r(j, j')_i^*, \quad s(j', j)_i = s(j, j')_i^*, \quad m(j', j) = m(j, j')^* .$$

(H6) Pour tous $j, j', j'' \in \{1, \ldots, k'\}$ tels que
• $j'' \geqslant j$, $j'' \geqslant j'$,
ou
• $j'' = j \in J$,
et pour tout $i \geqslant 1$,
$$r(j'', j')_i r(j', j)_i \subset r(j'', j)_{i+1} .$$

(H7) Pour tous $j, j', j'' \in \{1, \ldots, k'\}$ tels que
• $j' > j'' \geqslant j$,
ou
• $j' = j \in J$,
et pour tout $i \geqslant 1$,
$$r(j'', j')_i s(j', j)_i \subset s(j'', j)_{i+1} .$$

Pour tous $j, j' \in \{1, \ldots, k'\}$, posons
$$r(j', j)_\infty = \bigcap_{i \geqslant 1} r(j', j)_i , \quad s(j', j)_\infty = \bigcap_{i \geqslant 1} s(j', j)_i .$$

(H8) Pour tous $j, j', j'' \in \{1, \ldots, k'\}$,
$$r(j'', j')_1 m(j', j) \subset r(j'', j)_1 , \quad r(j'', j')_\infty m(j', j) \subset r(j'', j)_\infty .$$

(H9) Pour tous $j, j', j'' \in \{1, \ldots, k'\}$ tels que
$$j'' < j' \text{ ou } j' = j'' \in J,$$
$$s(j'', j')_1 m(j', j) \subset s(j'', j)_1 , \quad s(j'', j')_\infty m(j', j) \subset s(j'', j)_\infty .$$

(H10) L'une des conditions suivantes est vérifiée :
• pour tous $j, j' \in \{1, \ldots, k'\}$ avec $j' \geqslant j$, la suite $(r(j', j)_i)_{i \geqslant 1}$ est stationnaire ;
• pour tous $j, j' \in \{1, \ldots, k'\}$ avec $j' \geqslant j$, $s(j', j)_\infty = \{0\}$.

On pose
$$m = \bigoplus_{j, j' = 1}^{k'} m(j', j)$$

et, pour tout $i \geqslant 1$, ainsi que pour $i = \infty$,

$$r_i = \bigoplus_{j,j'=1}^{k'} r(j',j)_i, \quad s_i = \bigoplus_{j,j'=1}^{k'} s(j',j)_i.$$

(H11) $M \subset 1 + m$.

***Remarque***. — $m$ n'est pas l'algèbre de Lie de $M$ qui lui-même n'est pas l'ensemble des points sur $F$ d'un groupe algébrique.

***VI.5. Lemme***. — *Sous les hypothèses précédentes, les propriétés suivantes sont vérifiées pour tout $i \geqslant 1$ :*

(i) *$r_i$ et $s_i$ sont stables par adjonction ;*
(ii) $r_{i+1} \subset r_i$, $s_{i+1} \subset s_i$ ;
(iii) $r_i r_i \subset r_{i+1}$ ;
(iv) $r_i s_i \subset s_{i+1}$, $s_i r_i \subset s_{i+1}$ ;
(v) *pour tous $\gamma \in \Gamma$, $e \in \mathcal{E}$, $X \in A(\gamma, e)$, $X r_i \subset s_i$, $r_i X \subset s_i$ ;*
(vi) *pour tous $j, j' \in \{1, \ldots, k'\}$ avec $j \neq j'$, pour tous $\gamma \in \Gamma$, $e \in \mathcal{E}$, $X \in A(\gamma, e)$,*

$$s(j',j)_i = \mathrm{ad}(X) r(j',j)_i;$$

(vii) *pour tout $j \in \{1, \ldots, k'\}$, l'une des conditions suivantes est vérifiée :*
(a) *pour tous $\gamma \in \Gamma$, $e \in \mathcal{E}$, $X \in A(\gamma, e, j)$,*

$$r(j,j)_i = [r(j,j)_i \cap F(\gamma,e,j)^\sim] \oplus [r(j,j)_i \cap F(\gamma,e,j)],$$
$$s(j,j)_i = \mathrm{ad}(X)[r(j,j)_i \cap F(\gamma,e,j)^\sim] \oplus [s(j,j)_i \cap F(\gamma,e,j)],$$
$$s(j,j)_i \cap F(\gamma,e,j) \subset \mathfrak{p}(\gamma,e,j)^2,$$

(b) $s(j,j)_i = s(j,j)_{i+1}$ ;

(viii) *$r_\infty \cap g$ est ouvert dans $g$ ou $s_\infty \cap g = \{0\}$.*

(ix) *$M$ normalise $r_1$, $s_1$, $r_\infty$ et $s_\infty$.*

*Démonstration*. — Fixons $j, j', j'' \in \{1, \ldots, k'\}$, $i \geqslant 1$, $X \in A(j)$, $X' \in A(j)$, $X'' \in A(j'')$.

Il résulte des définitions et de (H1) que

$$r(j',j)_i^* = r(j,j')_i$$

et, si $j' \neq j$ ou $j' = j \in J$,

$$s(j',j)_i^* = s(j,j')_i.$$

Si $j = j' \notin J$, on a $s(j,j)_i = X r(j,j)_i$, donc $s(j,j)_i^* = r(j,j)_i X$. Grâce à (H4),

$$r(j,j)_i X \subset X r(j,j)_i.$$

Ces deux réseaux ayant même volume, ils sont égaux et $s(j,j)_i^* = X r(j,j)_i = s(j,j)_i$. Cela démontre (i).

Si $j' \geqslant j$, on a

$$r(j',j)_{i+1} \subset r(j',j)_i\,, \quad s(j',j)_{i+1} \subset s(j',j)_i$$

d'après (H2). Par adjonction, ces inclusions restent vraies si $j' < j$. D'où (ii).

Montrons que

$$r(j'',j')_i r(j',j)_i \subset r(j'',j)_{i+1}\,.$$

Par adjonction, on peut supposer $j'' \geqslant j$. Si $j'' \geqslant j'$ ou $j'' = j \in J$, l'inclusion résulte de (H6). Supposons $j' > j''$ et soit $j'' \neq j$, soit $j'' = j \notin J$. D'après la propriété adjointe de (H4), on a

$$X'' r(j'',j')_i r(j',j)_i \subset r(j'',j')_i X' r(j',j)_i = r(j'',j')_i s(j',j)_i\,.$$

Grâce à (H7), on obtient

$$X'' r(j'',j')_i r(j',j)_i \subset s(j'',j)_{i+1} = X'' r(j'',j)_{i+1}\,.$$

Il suffit de multiplier à gauche par $X''^{-1}$ pour conclure. Cela démontre (iii).

L'inclusion

$$X' r(j',j)_i \subset s(j',j)_i$$

résulte de (H4) ou de sa propriété adjointe selon les cas. Cela démontre (v).

Pour démontrer (iv), il suffit par adjonction de prouver que

$$r(j'',j')_i s(j',j)_i \subset s(j'',j)_{i+1}\,.$$

C'est vrai d'après (H7) si $j' > j'' \geqslant j$ ou $j' = j \in J$. Supposons $j' > j \geqslant j''$. On a

$$r(j'',j')_i s(j',j)_i = r(j'',j')_i X' r(j',j)_i = s(j'',j')_i r(j',j)_i\,.$$

On conclut grâce à la propriété adjointe de (H7). Supposons $j' < j$ ou $j' = j \notin J$. Alors :

$$r(j'',j')_i s(j',j)_i = r(j'',j')_i r(j',j)_i X \subset r(j'',j)_{i+1} X \subset s(j'',j)_{i+1}$$

d'après (iii) et (v). Supposons $j'' > j' > j$ ou $j < j' = j'' \notin J$. Alors

$$\begin{aligned} r(j'',j')_i s(j',j)_i = r(j'',j')_i X' r(j',j)_i &\subset X'' r(j'',j')_i r(j',j)_i \\ &\subset X'' r(j'',j)_{i+1} = s(j'',j)_{i+1}\,, \end{aligned}$$

d'après (H4) et (H6). Supposons enfin $j < j' = j'' \in J$. Alors :

$$r(j'',j')_i s(j',j)_i = r(j'',j')_i X' r(j',j)_i \subset s(j'',j')_i r(j',j)_i \subset s(j'',j)_{i+1}$$

d'après (H4) et la propriété adjointe de (H7). Cela démontre (iv).

Pour démontrer (vi), il suffit par adjonction de prouver que

$$s(j',j)_i = \{X'Y - YX\,;\, Y \in r(j',j)_i\}$$

si $j' > j$. D'après (H4), le membre de droite est inclus dans celui de gauche. Il suffit de prouver que ces deux réseaux ont même volume. Ces volumes sont les produits du volume de $r(j',j)_i$ et des valeurs absolues des déterminants des endomorphismes suivants de $g\ell(j',j)$ :

$$Y \longmapsto X'Y, \quad Y \longmapsto X'Y - YX.$$

Prolongeons la valuation $v_F$ de $F$ en une valuation $v_{\overline{F}} : \overline{F} \to \mathbb{Q}$. Notons

$$(x'_{n'})_{n'=1,\dots,2(j'+\ell(j'))}, \quad \text{resp.} \quad (x_n)_{n=1,\dots,2(j+\ell(j))},$$

les valeurs propres de $X'$, resp. $X$. Pour tous $n$, $n'$, on a $v_{\overline{F}}(x'_{n'}) = 1/2(j'+\ell(j'))$, $v_{\overline{F}}(x_n) = 1/2(j+\ell(j))$. Les valeurs propres du premier endomorphisme sont les $x'_{n'}$ intervenant chacune avec multiplicité $2(j+\ell(j))$. Celles du second sont les $x'_{n'} - x_n$, intervenant chacune avec multiplicité 1. La valeur absolue commune des déterminants est $q^{-2(j+\ell(j))}$. Cela démontre (vi).

Si $j \in J$, la propriété (vii)(b) est vérifiée. Supposons $j \in J$, soient $\gamma \in \Gamma$ et $e \in \mathcal{E}$ et supposons $X \in A(\gamma,e,j)$. La première égalité de (vii)(a) est vérifiée d'après (H5). On a aussi

$$s(j,j)_i = X[r(j,j)_i \cap F(\gamma,e,j)^{\sim}] \oplus X[r(j,j)_i \cap F(\gamma,e,j)].$$

On montre comme ci-dessus que

$$X[r(j,j)_i \cap F(\gamma,e,j)^{\sim}] = \mathrm{ad}(X)[r(j,j)_i \cap F(\gamma,e,j)^{\sim}].$$

En effet, avec les notations ci-dessus, les valeurs propres de $\mathrm{ad}(X)$ dans $F(\gamma,e,j)^{\sim}$ sont maintenant les $x_{n'} - x_n$ pour $n \neq n'$. Grâce à l'hypothèse $p \geqslant 3d+1$, l'extension $F_{\gamma,j}/F$ est modérément ramifiée donc $v_{\overline{F}}(x_{n'} - x_n) = 1/2(j+\ell(j))$ et on peut conclure.

D'autre part, puisque $r(j,j)_i \subset h^1$, on a

$$X[r(j,j)_i \cap F(\gamma,e,j)] \subset X[h^1 \cap F(\gamma,e,j)] = X\mathfrak{p}(\gamma,e,j) = \mathfrak{p}(\gamma,e,j)^2.$$

Alors (vii)(a) est vérifiée.

La propriété (viii) résulte de (H10).

Le groupe $M$ normalise $r_1$ et $r_\infty$ d'après (H11), (H8) et sa propriété adjointe. Toujours grâce à (H11) et en utilisant l'adjonction, pour prouver que $M$ normalise $s_1$ et $s_\infty$, il suffit de prouver :

$$s(j'',j')_1 m(j',j) \subset s(j'',j)_1, \quad s(j'',j')_\infty m(j',j) \subset s(j'',j)_\infty.$$

Si $j'' < j'$ ou $j' = j'' \in J$, cela résulte de (H9). Supposons $j' < j''$ ou $j' = j'' \notin J$. Alors

$$s(j'',j')_1 m(j',j) = X'' r(j'',j')_1 m(j',j) \subset X'' r(j'',j)_1 \subset s(j'',j)_1$$

d'après (H8) et (v). Cela démontre la première inclusion cherchée. *Idem* pour la seconde. Cela démontre (ix). □

**VI.6.** On conserve les hypothèses de VI.4 et on introduit l'application $E^G$ de I.4. Elle est définie sur $g_{\mathrm{tn}}$. Pour tout $i \geqslant 1$ et pour $i = \infty$, posons $R_i = E^G(r_i \cap g)$. D'après les (ii) et (iii) du lemme précédent, ces ensembles sont des sous-groupes compacts de $H$ ; d'après (ix), $M$ normalise $R_1$ et $R_\infty$. Pour $Z \in g$, posons

$$I_1(Z) = \int_{MR_1} \sum_{(\gamma,e)\in\Gamma\times\mathcal{E}} \kappa(\gamma,e) \int_{A(\gamma,e)} \psi \circ q_g(Z, x^{-1}Xx)\, dX\, dx\,.$$

Si $r_\infty \cap g$ est ouvert dans $g$, on définit $I_\infty(Z)$ en remplaçant $MR_1$ par $MR_\infty$ dans la formule ci-dessus.

***Lemme.*** — *Dans le cas où $r_\infty \cap g$ est ouvert dans $g$, on suppose vérifiée l'implication*

$$Z \in g_{\mathrm{ent}} \ \textit{et}\ I_\infty(Z) \neq 0 \Longrightarrow Z \in \mathfrak{p}_F \widetilde{s}_\infty \cap g\,.$$

*On a alors en tout cas l'implication :*

$$Z \in g_{\mathrm{ent}} \ \textit{et}\ I_1(Z) \neq 0 \Longrightarrow \mathfrak{p}_F \widetilde{s}_1 \cap g\,.$$

*Démonstration.* — Dans cette démonstration, les références aux assertions du lemme précédent sont notées simplement (i), ..., (ix). Soit $Z \in g_{\mathrm{ent}}$. Pour tout $i \geqslant 1$, posons

$$M_i = \{x \in MR_1 ; xZx^{-1} \in \mathfrak{p}_F \widetilde{s}_{i+1} \cap g, xZx^{-1} \notin \mathfrak{p}_F \widetilde{s}_i \cap g\}\,.$$

Posons aussi

$$M_0 = \{x \in MR_1 ; xZx^{-1} \in \mathfrak{p}_F \widetilde{s}_1 \cap g\},$$
$$M_{-1} = \{x \in MR_1 ; xZx^{-1} \notin \mathfrak{p}_F \widetilde{s}_\infty \cap g\}\,.$$

Ces ensembles sont ouverts et compacts et $MR_1$ est réunion disjointe des $M_i$ pour $i \geqslant -1$. Pour tout $i \geqslant -1$, on définit $J_i(Z)$ comme on a défini $I_1(Z)$, en remplaçant $MR_1$ par $M_i$. On a l'égalité

$$I_1(Z) = \sum_{i \geqslant -1} J_i(Z)\,.$$

Démontrons la relation :

(1) $$\text{pour tout } i \geqslant 1, \ J_i(Z) = 0\,.$$

Soit donc $i \geqslant 1$. D'après (i), (ii) et (iv), $M_i$ est stable par multiplication à gauche par $R_i$. Fixons un ensemble de représentants $M'_i$ de l'ensemble des classes $R_i \setminus M_i$. Pour $\gamma \in \Gamma$, $e \in \mathcal{E}$ et $y \in M'_i$, posons

(2) $$j(\gamma, e, y) = \int_{A(\gamma,e)} \int_{R_i} \psi \circ q_g(yZy^{-1}, x^{-1}Xx)\, dx\, dX\,.$$

On a l'égalité :

$$J_i(Z) = \sum_{(\gamma,e)\in\Gamma\times\mathcal{E}} \kappa(\gamma,e) \sum_{y \in M'_i} j(\gamma, e, y)\,.$$

Fixons $\gamma \in \Gamma$, $e \in \mathcal{E}$ et $y \in M_i'$. Pour $X \in A(\gamma, e)$, l'intégrale intérieure de (2) est égale à

(3) $$\int_{r_i \cap g} \psi \circ q_g(yZy^{-1}, E^G(-Y)X E^G(Y))\, dY.$$

Il résulte de (iv) et (v) que si $a$ et $b$ sont deux entiers $\geqslant 0$ tels que $a+b \geqslant 2$, alors $Y^a X Y^b \in s_{i+1}$ pour tout $Y \in r_i$. Puisque $yZy^{-1} \in \mathfrak{p}_F \widetilde{s}_{i+1}$, on a alors

$$\psi \circ \mathrm{trace}(yZy^{-1}Y^a X y^b) = 1.$$

Pour tout $Y \in r_i \cap g$, on a donc

$$\psi \circ q_g(yZy^{-1}, E(-Y)X E(Y)) = \psi \circ q_g(yZy^{-1}, X - [Y, X]).$$

L'intégrale (3) est nulle sauf si $yZy^{-1} \in \mathfrak{p}_F\ (\mathrm{ad}(X)(r_i \cap g))^{\sim}$. Dans ce cas, elle vaut $\mathrm{mes}(r_i \cap g)\psi \circ q_g(yZy^{-1}, X)$. Remarquons que

$$(\mathrm{ad}(X)(r_i \cap g))^{\sim} \cap g = (\mathrm{ad}(X)(r_i))^{\sim} \cap g.$$

Pour tous $j, j' \in \{1, \ldots, k'\}$, notons $(yZy^{-1})\ (j', j)$ la composante de $yZy^{-1}$ dans $g\ell(j', j)$. Puisque $yZy^{-1} \in \mathfrak{p}_F \widetilde{s}_{i+1}$, on déduit de (v), (vi) et (vii) que la condition $yZy^{-1} \in \mathfrak{p}_F(\mathrm{ad}(X)(r_i \cap g))^{\sim}$ est équivalente à la réunion des deux conditions :

(4) pour tous $j, j' \in \{1, \ldots, k'\}$ avec $j \neq j'$, $(yZy^{-1})(j', j) \in \mathfrak{p}_F\, s(j, j')_i^{\sim}$ ;

(5) pour tout $j \in \{1, \ldots, k'\}$ tel que (vii) (a) soit vérifiée,
$$(yZy^{-1})(j, j) \in \left[\mathfrak{p}_F\, s(j, j)_i^{\sim} \cap F(\gamma, e, j)^{\sim}\right] \oplus F(\gamma, e, j).$$

Si (4) ou (5) n'est pas vérifiée, $j(\gamma, e, y) = 0$. Supposons (4) et (5) vérifiées. Alors

$$j(\gamma, e, y) = \mathrm{mes}(r_i \cap g) \int_{A(\gamma, e)} \psi \circ q_g(yZy^{-1}, X)\, dX.$$

Cette intégrale est nulle sauf si $yZy^{-1} \in \mathfrak{p}_F(\mathfrak{p}(\gamma, e)^2 \cap g)^{\sim}$. Supposons cette condition vérifiée. Comme ci-dessus

$$(\mathfrak{p}(\gamma, e)^2 \cap g)^{\sim} \cap g = (\mathfrak{p}(\gamma, e)^2)^{\sim} \cap g.$$

En particulier, pour tout $j \in \{1, \ldots, k'\}$ tel que (vii) (a) soit vérifiée, on a

$$\begin{aligned}(yZy^{-1})(j, j) \in \mathfrak{p}_F(\mathfrak{p}(\gamma, e, j)^2)^{\sim} &\subset \mathfrak{p}_F(s(j, j)_i \cap F(\gamma, e, j))^{\sim} \\ &= F(\gamma, e, j)^{\sim} \oplus (\mathfrak{p}_F\, s(j, j)_i^{\sim} \cap F(\gamma, e, j)).\end{aligned}$$

D'après (5), on a alors $(yZy^{-1})(j, j) \in \mathfrak{p}_F\, s(j, j)_i^{\sim}$. Cette condition est aussi réalisée pour tout $j$ tel que (vii) (b) soit vérifiée. Alors, d'après (4), $yZy^{-1} \in \mathfrak{p}_F \widetilde{s}_i$. Cela contredit la définition de $M_i$. Cette contradiction prouve que $j(\gamma, e, y) = 0$. Cela étant vrai pour tous $\gamma, e, y$, cela démontre (1).

Si $s_\infty \cap g = \{0\}$, $M_{-1} = \varnothing$ et $J_{-1}(Z) = 0$. Si $s_\infty \cap g \neq \{0\}$, $r_\infty \cap g$ est ouvert dans $g$. Il résulte de (ii), (iv) et (ix) que $M_{-1}$ est stable par multiplication à gauche par

$MR_\infty$. Alors

$$J_{-1}(Z) = \sum_{y\in MR_\infty\backslash M_{-1}} I_\infty(yZy^{-1}).$$

D'après l'hypothèse de l'énoncé et la définition de $M_{-1}$, tous ces termes sont nuls et $J_{-1}(Z) = 0$.

Finalement $I_1(Z) = J_0(Z)$. Si $I_1(Z) \neq 0$, on a donc $M_0 \neq \varnothing$. Puisque $\widetilde{s}_1$ est stable par conjugaison par $MR_1$ d'après (ii), (iv) et (ix), cette non-vacuité implique $Z \in \mathfrak{p}_F\widetilde{s}_1$. Cela achève la démonstration. $\square$

**VI.7.** Pour $j \in \{1,\dots,k'\}$ et $n \in \{-j-2\ell(j),\dots,j-1\}$, posons

$$\mathfrak{p}_j^n = \begin{cases} L'_n \cap V(j), & \text{si } -j \leqslant n \leqslant j-1,\\ L''_{n+j+\ell(j)} \cap V(j), & \text{si } -j-2\ell(j) \leqslant n \leqslant -j-1.\end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, écrivons $n = a(2j+2\ell(j)) + b$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \{-j-2\ell(j),\dots,j-1\}$ et posons

$$\mathfrak{p}_j^n = \mathfrak{p}_F^a\mathfrak{p}_j^b.$$

Il est plus parlant de remarquer que pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $e \in \mathcal{E}$, on a l'égalité

$$\varphi_{\gamma,e}(\mathfrak{p}_{\gamma,j}^n) = \mathfrak{p}_j^n. \tag{1}$$

D'autre part,

$$\mathfrak{p}_F(\mathfrak{p}_j^n)^\sim \cap V(j) = \mathfrak{p}_j^{-n}. \tag{2}$$

Soient $j, j' \in \{1,\dots,k'\}$ et $i \in \mathbb{Z}$. On note $h(j',j)_i$ l'ensemble des $Y \in g\ell(j',j)$ vérifiant les conditions suivantes :

- si $j \leqslant j'$,

(3) $Y(\mathfrak{p}_j^n) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n+i+j+\ell(j)-j'-\ell(j')}$, pour tout $n$ tel que $-j-2\ell(j) \leqslant n \leqslant -j-1$,

(4) $Y(\mathfrak{p}_j^n) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n+i}$, pour tout $n$ tel que $-j \leqslant n \leqslant j-1$;

- si $j > j'$,

(5) $Y\big(\mathfrak{p}_j^{-n-i-j'-\ell(j')+j+\ell(j)}\big) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{-n}$, pour tout $n$ tel que $-j'-2\ell(j') \leqslant n \leqslant -j'-1$,

(6) $Y(\mathfrak{p}_j^{-n-i}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{-n}$, pour tout $n$ tel que $-j' \leqslant n \leqslant j'-1$.

Remarquons que si $j \leqslant j'$ et $Y \in h(j',j)_i$, on a en fait l'inclusion (3) pour tout $n \geqslant -j-2\ell(j)$. C'est clair si $n \leqslant -j-1$. Si $-j \leqslant n \leqslant j-1$, on utilise (4) et le fait que $j'+\ell(j') \geqslant j+\ell(j)$. Si $n \geqslant j$, écrivons $n = a(2j+2\ell(j)) + b$, avec $a \geqslant 1$, $-j-2\ell(j) \leqslant b \leqslant j-1$. Alors

$$Y(\mathfrak{p}_j^n) = Y(\mathfrak{p}_F^a\mathfrak{p}_j^b) \subset \mathfrak{p}_F^a\mathfrak{p}_{j'}^{b+i+j+\ell(j)-j'-\ell(j')} = \mathfrak{p}_{j'}^{a(2j'+2\ell(j'))+b+i+j+\ell(j)-j'-\ell(j')}$$

et $a(2j'+2\ell(j'))+b \geqslant n$. De même, on a l'inclusion (4) pour tout $n \geqslant -j$. Si $j > j'$, et $Y \in h(j',j)_i$, on a les inclusions (5) pour tout $n \geqslant -j'-2\ell(j')$ et (6) pour tout $n \geqslant -j'$.

Si $j = j'$, les relations (3) et (4) sont équivalentes à

$$Y(\mathfrak{p}_j^n) \subset \mathfrak{p}_j^{n+i} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Pour tous $j, j'$, il résulte de (2) que

$$h(j,j')_i = h(j',j)_i^* .$$

On pose

$$h_i = \bigoplus_{j,j'=1}^{k'} h(j',j)_i .$$

***Lemme***

(i) *Soient $j, j' \in \{1, \ldots, k'\}$ avec $j' \geqslant j$, $i \in \mathbb{Z}$, $X' \in A(j')$ et $X \in A(j)$. On a l'égalité*

$$X' h(j',j)_i = h(j',j)_{i+1} ,$$

*et l'inclusion*

$$h(j',j)_i X \subset h(j',j)_{i+1} .$$

(ii) *On a les égalités $h_0 = h$, $h_1 = h^1$.*

(iii) *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité $h_{1-i} = \mathfrak{p}_F \widetilde{h}_i$.*

(iv) *Pour tous $j \in \{1, \ldots, k'\}$, $i \in \mathbb{Z}$, $\gamma \in \Gamma$ et $e \in \mathcal{E}$, on a l'égalité*

$$h(j,j)_i = \left[h(j,j)_i \cap F(\gamma,e,j)^{\sim}\right] \oplus \mathfrak{p}(\gamma,e,j)^i .$$

*Démonstration.* — La première assertion de (i) résulte de l'égalité $X'\mathfrak{p}_{j'}^n = \mathfrak{p}_{j'}^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Sous les hypothèses de (i), pour $Y \in h(j',j)_i$, on a pour la même raison :

$$YX(\mathfrak{p}_j^{n-1}) = Y(\mathfrak{p}_j^n) \subset \begin{cases} \mathfrak{p}_{j'}^{n+i+j+\ell(j)-j'-\ell(j')}, & \text{pour tout } n \geqslant -j-2\ell(j), \\ \mathfrak{p}_{j'}^{n+i}, & \text{pour tout } n \geqslant -j . \end{cases}$$

*A fortiori*, $YX$ vérifie les relations (3) et (4) relatives à l'entier $i+1$. Cela démontre (i).

Le (ii) résulte des définitions.

Il est clair que $\mathfrak{p}_F \widetilde{h} = h^1$, *i.e.*, d'après (ii), $\mathfrak{p}_F \widetilde{h}_0 = h_1$. Soient $j, j' \in \{1, \ldots, k'\}$ avec $j' \geqslant j$, $i \in \mathbb{Z}$ et $X' \in A(j')$. D'après (i) et sa propriété adjointe, on a

$$\mathfrak{p}_F h(j',j)_i^{\sim} = \mathfrak{p}_F (X'^i h(j',j)_0)^{\sim} = \mathfrak{p}_F h(j',j)_0^{\sim} X'^{-i} = h(j,j')_1 X'^{-i} = h(j,j')_{1-i} .$$

*Idem* si $j' < j$. Cela démontre (iii).

Sous les hypothèses de (iv), il résulte des définitions que

$$h(j,j)_i \cap F(\gamma,e,j) = \mathfrak{p}(\gamma,e,j)^i .$$

Soit $Y \in h(j,j)_i$, écrivons $Y = Y_1 + Y_2$, avec $Y_1 \in F(\gamma,e,j)^{\sim}$ et $Y_2 \in F(\gamma,e,j)$. Soit $Z \in \mathfrak{p}(\gamma,e,j)^{1-i}$. D'après l'égalité ci-dessus, $Z \in h(j,j)_{1-i}$. Grâce à (iii), $Z \in$

$\mathfrak{p}_F h(j,j)_i^{\sim}$. Donc trace$(YZ) \in \mathfrak{p}_F$. Or trace$(YZ)$ = trace$(Y_2 Z)$. Donc trace$(Y_2 Z) \in \mathfrak{p}_F$ pour tout $Z \in \mathfrak{p}(\gamma, e, j)^{1-i}$. L'extension $F_{\gamma,j}/F$ étant modérément ramifiée ainsi qu'on l'a déjà dit, cela entraîne $Y_2 \in \mathfrak{p}(\gamma, e, j)^i$. Donc $Y_2 \in h(j,j)_i$ puis, par différence, $Y_1 \in h(j,j)_i$. Cela démontre (iv). □

**VI.8.** L'assertion (ii) du lemme précédent implique :

$$h_0 h_0 \subset h_0, \quad h_0 h_1 \subset h_1, \quad h_1 h_0 \subset h_1. \tag{1}$$

***Lemme.*** — *Soient $j, j', j'' \in \{1, \ldots, k'\}$ et $u, v \in \mathbb{N}$.*

(i) *Si $j' \leqslant \sup(j, j'')$, on a l'inclusion*

$$h(j'', j')_v h(j', j)_u \subset h(j'', j)_{u+v}.$$

(ii) *Supposons $j' > j'' \geqslant j$. Posons*

$$\begin{aligned} n_1 &= \sup(u + v + j'' + \ell(j'') - j' - \ell(j'), j'' - j + 1), \\ n_2 &= \sup(u + v + 2j'' + 2\ell(j'') - 2j' - 2\ell(j'), j'' + 2\ell(j'') - j + 1), \\ n_3 &= u + v, \\ n_4 &= 2j'' + 2\ell(j'') + 1, \\ N &= \inf(n_1, n_2, n_3, n_4). \end{aligned}$$

*Alors on a l'inclusion*

$$h(j'', j')_v h(j', j)_u \subset h(j'', j)_N.$$

*Démonstration.* — Soient $X \in A(j)$, $X' \in A(j')$, $X'' \in A(j'')$. Pour démontrer (i), on peut supposer par adjonction que $j'' \geqslant j$. Si $j' \geqslant j$, on a d'après (1) et le lemme VI.7 (i) :

$$\begin{aligned} h(j'', j')_v h(j', j)_u &= h(j'', j')_v X'^u h(j', j)_0 \subset h(j'', j')_{u+v} h(j', j)_0 \\ &= X''^{u+v} h(j'', j')_0 h(j', j)_0 \subset X''^{u+v} h(j'', j)_0 = h(j'', j)_{u+v}. \end{aligned}$$

Si $j' < j$, on a de même :

$$h(j'', j')_v h(j', j)_u = X''^v h(j'', j')_0 h(j', j)_0 X^u \subset X''^v h(j'', j)_0 X^u \subset h(j'', j)_{u+v}.$$

Cela démontre (i).

Supposons $j' > j'' \geqslant j$. On a comme ci-dessus :

$$h(j'', j')_v h(j', j)_u = h(j'', j')_0 X'^v h(j', j)_u = h(j'', j')_0 h(j', j)_{u+v},$$

ce qui nous ramène au cas $v = 0$, ce que l'on suppose désormais. Si $u = 0$, $N = 0$ ; si $u = 1$, $N = 1$ ; dans ces deux cas, (ii) résulte de (1). Si $u \geqslant 2j' + 2\ell(j') + 1$, on a $h(j', j)_u \subset \mathfrak{p}_F h(j', j)_1$. Grâce à (1),

$$h(j'', j')_0 h(j', j)_u \subset \mathfrak{p}_F h(j'', j)_1 = h(j'', j)_{2j''+2\ell(j'')+1} \subset h(j'', j)_{n_4} \subset h(j'', j)_N.$$

On suppose désormais $2 \leqslant u \leqslant 2j' + 2\ell(j')$.

Définissons une fonction $m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ de la façon suivante. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$m(n) = \begin{cases} -n - j'', & \text{si } \ell(j'') - j' - \ell(j') + 1 \leqslant n \leqslant -j'', \\ 0, & \text{si } -j'' + 1 \leqslant n \leqslant j'', \\ -n + j'', & \text{si } j'' + 1 \leqslant n \leqslant -\ell(j'') + j' + \ell(j'), \\ j'' + \ell(j'') - j' - \ell(j'), & \text{si } -\ell(j'') + j' + \ell(j') + 1 \leqslant n \leqslant \ell(j'') + j' + \ell(j'). \end{cases}$$

En général, on écrit $n = a(2j'+2\ell(j'))+b$, où $\ell(j'')-j'-\ell(j')+1 \leqslant b \leqslant \ell(j'')+j'+\ell(j')$ et $a \in \mathbb{Z}$ et on pose $m(n) = a(2j'' + 2\ell(j'') - 2j' - 2\ell(j')) + m(b)$.

En utilisant les relations VI.7 (5) et (6), on montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $Y' \in h(j'', j')_0$, on a l'inclusion

$$Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{n}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{m(n)+n}.$$

On vérifie que

(2) la fonction $m$ est décroissante.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, posons

$$\begin{aligned} m_1(n) &= \sup(-n - j'' - 2\ell(j''), j' + \ell(j') - j'' - \ell(j'')), \\ m_2(n) &= \sup(-n - j'', 0), \\ m_3(n) &= \sup(-n + j'', j'' + \ell(j'') - j' - \ell(j')), \\ m_4(n) &= \sup(-n + j'' + 2\ell(j''), 2j'' + 2\ell(j'') - 2j' - 2\ell(j')). \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} I_1 &= \{\ell(j'') - j' - \ell(j'), \dots, j'' + 2j' + 2\ell(j')\}, \\ I_2 &= \{j'' - 2j' - 2\ell(j'), \dots, \ell(j'') + j' + \ell(j')\}. \end{aligned}$$

On vérifie que pour tout $n \in I_1$, resp. $n \in I_2$, on a l'égalité

$$m(n) = \inf(m_2(n), m_3(n), m_4(n)), \quad \text{resp. } m(n) = \inf(m_1(n), m_2(n), m_3(n)).$$

Remarquons que $j - 1 + u \in I_1$. On a :

$$\begin{aligned} m_2(j - 1 + u) &= n_3 - u, \\ m_3(j - 1 + u) &= n_1 - u, \\ m_4(j - 1 + u) &= n_2 - u. \end{aligned}$$

On en déduit

(3) $$m(j - 1 + u) \geqslant N - u.$$

Soient $Y \in h(j', j)_u$, $Y' \in h(j'', j')_0$. Pour tout entier $n$ tel que $-j \leqslant n \leqslant j - 1$, on a

$$Y'Y(\mathfrak{p}_j^n) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{n+u}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{m(n+u)+n+u} \subset \mathfrak{p}_{j''}^{m(j-1+u)+n+u} \subset \mathfrak{p}_{j''}^{N+n},$$

grâce à (2) et (3). Si $j \leqslant k' - k''$, cela démontre que $Y'Y \in h(j'', j)_N$.

Supposons $j \geqslant k' - k'' + 1$. On a $\ell(j) - j' - \ell(j') - 1 + u \in I_2$. En utilisant l'égalité $\ell(j'') - \ell(j) = j'' - j$, on montre que :

$$\begin{aligned} m_1(\ell(j) - j' - \ell(j') - 1 + u) &= n_3 + j' + \ell(j') - j'' - \ell(j'') - u, \\ m_2(\ell(j) - j' - \ell(j') - 1 + u) &= n_1 + j' + \ell(j') - j'' - \ell(j'') - u, \\ m_3(\ell(j) - j' - \ell(j') - 1 + u) &\geqslant n_2 + j' + \ell(j') - j'' - \ell(j'') - u. \end{aligned}$$

On en déduit

$$m(\ell(j) - j' - \ell(j') - 1 + u) \geqslant N + j' + \ell(j') - j'' - \ell(j'') - u. \tag{4}$$

Pour tout entier $n$ tel que $-j - 2\ell(j) \leqslant n \leqslant -j - 1$, on a

$$\begin{aligned} Y'Y(\mathfrak{p}_j^n) \subset Y'\big(\mathfrak{p}_{j'}^{n+u+j+\ell(j)-j'-\ell(j')}\big) &\subset \mathfrak{p}_{j''}^{m(n+u+j+\ell(j)-j'-\ell(j'))+n+u+j+\ell(j)-j'-\ell(j')} \\ &\subset \mathfrak{p}_{j''}^{m(\ell(j)-j'-\ell(j')-1+u)+n+u+j+\ell(j)-j'-\ell(j')} \subset \mathfrak{p}_{j''}^{N+n+j+\ell(j)-j''-\ell(j'')}, \end{aligned}$$

grâce à (2) et (4). Cela démontre que $Y'Y \in h(j'', j)_N$, ce qui achève la démonstration. □

**VI.9.** Soient $j, j' \in \{1, \ldots, k'\}$ et $i \in \mathbb{Z}$. On note $h^{\#}(j', j)_i$ l'ensemble des $Y \in g\ell(j', j)$ vérifiant :

- si $j \leqslant j'$, les inclusions VI.7 (3) pour $-j - 2\ell(j) \leqslant n \leqslant -j - 2$ et VI.7 (4) pour $-j \leqslant n \leqslant j - 2$ ;
- si $j > j'$, les inclusions VI.7 (5) pour $-j' - 2\ell(j') \leqslant n \leqslant -j' - 2$ et VI.7 (6) pour $-j' \leqslant n \leqslant j' - 2$.

On a l'égalité $h^{\#}(j, j')_i = h^{\#}(j', j)_i^*$.

***Lemme***. — *Soient $j, j', j'' \in \{1, \ldots, k'\}$ et $u, v \in \mathbb{N}$. Supposons $j' > j'' \geqslant j$. Posons*

$$\begin{aligned} n_1 &= \sup(u + v + j'' + \ell(j'') - j' - \ell(j'), j'' - j + 2), \\ n_2 &= \sup(u + v + 2j'' + 2\ell(j'') - 2j' - 2\ell(j'), j'' + 2\ell(j'') - j + 2), \\ n_3 &= u + v, \\ n_4 &= 2j'' + 2\ell(j'') + 1, \\ N &= \inf(n_1, n_2, n_3, n_4). \end{aligned}$$

*Alors on a l'inclusion*

$$h(j'', j')_v h(j', j)_u \subset h^{\#}(j'', j)_N.$$

La démonstration est similaire à celle du lemme précédent. □

**VI.10.** Soient $j, j' \in \{1, \ldots, k'\}$. Notons $t(j', j)$ l'ensemble des $Y \in g\ell(j', j)$ vérifiant les inclusions

$$\begin{aligned} Y(\mathfrak{p}_j^{-j-1}) &\subset \mathfrak{p}_{j'}^{-j'}, & Y(\mathfrak{p}_j^{-j}) &\subset \mathfrak{p}_{j'}^{-j'+1}, \\ Y(\mathfrak{p}_j^{j-1}) &\subset \mathfrak{p}_{j'}^{j'}, & Y(\mathfrak{p}_j^{j}) &\subset \mathfrak{p}_{j'}^{j'+1}. \end{aligned}$$

Notons $\theta(j',j)$ l'ensemble des $Y \in g\ell(j',j)$ vérifiant les inclusions

$$Y(\mathfrak{p}_j^{-j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{-j'+1}, \quad Y(\mathfrak{p}_j^{j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{j'+1}.$$

On a les égalités

$$t(j,j') = t(j',j)^*, \quad \theta(j,j') = \theta(j',j)^*.$$

Supposons $j' \geqslant j$, soit $i$ un entier $\geqslant 0$. En utilisant les relations (3) et (4) de VI.7, on vérifie les propriétés suivantes :

(1) si $j \leqslant k' - k''$ et $i \geqslant j' + 2\ell(j') - j + 1$, ou si $j \geqslant k' - k'' + 1$ et $i \geqslant j' - j + 1$

$$h(j',j)_i \subset t(j',j), \quad h(j',j)_{i+1} \subset \theta(j',j);$$

(2) si $j \leqslant k' - k''$ et $0 \leqslant i \leqslant j' + 2\ell(j') - j + 1$, ou si $j \geqslant k' - k'' + 1$ et $0 \leqslant i \leqslant j' - j + 1$,

$$h(j',j)_i \cap t(j',j) = h^{\#}(j',j)_i \cap t(j',j),$$
$$h(j',j)_{i+1} \cap \theta(j',j) = h^{\#}(j',j)_{i+1} \cap \theta(j',j);$$

(3) si $j \leqslant k' - k''$ et $1 \leqslant i \leqslant j' + 2\ell(j') - j + 1$,

$$h(j',j)_i \cap t(j',j) = \left\{Y \in h^{\#}(j',j)_i \,;\, Y(\mathfrak{p}_j^{j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{j'+2\ell(j')}\right\},$$
$$h(j',j)_{i+1} \cap \theta(j',j) = \left\{Y \in h^{\#}(j',j)_{i+1} \,;\, Y(\mathfrak{p}_j^{j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{j'+2\ell(j')+1}\right\};$$

(4) si $j \geqslant k' - k'' + 1$ et $1 \leqslant i \leqslant j' - j + 1$,

$$h(j',j)_i \cap t(j',j) = \left\{Y \in h^{\#}(j',j)_i \,;\, Y(\mathfrak{p}_j^{j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{j'}, Y(\mathfrak{p}_j^{-j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{-j'}\right\}.$$

En particulier, la relation (1) implique

(5) $$\text{pour tout } j \in \{1, \dots, k'\}, \quad h(j,j)_1 \subset t(j,j).$$

On a aussi les inclusions immédiates :

(6) $$\text{pour tous } j, j', j'' \in \{1, \dots, k'\},$$
$$t(j'',j')t(j',j) \subset \theta(j'',j) \subset t(j'',j).$$

***Lemme***

(i) *Soient $j, j' \in \{1, \dots, k'\}$ avec $j' \geqslant j$, $i$ un entier $\geqslant 1$, $X \in A(j)$ et $X' \in A(j')$. On a l'égalité*

$$X'(h(j',j)_i \cap t(j',j)) = h(j',j)_{i+1} \cap \theta(j',j)$$

*et l'inclusion*

$$(h(j',j)_i \cap t(j',j))X \subset h(j',j)_{i+1} \cap \theta(j',j).$$

(ii) *Soient $j, j', j'' \in \{1, \dots, k'\}$ avec $j'' \geqslant j \geqslant j'$. On a les inclusions*

$$h(j'',j')_0 h(j',j)_1 \subset h(j'',j)_1 \cap t(j'',j),$$
$$h(j'',j')_1 h(j',j)_1 \subset h(j'',j)_2 \cap \theta(j'',j),$$
$$h(j'',j')_0 h(j',j)_2 \subset h(j'',j)_2 \cap \theta(j'',j).$$

(iii) *Soient $j, j', j'' \in \{1, \ldots, k'\}$ avec $j' > j'' \geqslant j$ et $u, v \in \mathbb{N}$. Si $j \leqslant k' - k''$, posons :*

$$n_1 = \sup(u + v + j'' + \ell(j'') - j' - \ell(j'), j'' - j + 2),$$
$$n_2 = u + v,$$
$$n_3 = j'' + 2\ell(j'') - j + 2,$$
$$N = \inf(n_1, n_2, n_3);$$

*si $j \geqslant k' - k'' + 1$, posons*

$$n_1 = u + v,$$
$$n_2 = j'' - j + 2,$$
$$N = \inf(n_1, n_2).$$

*Alors on a l'inclusion*

$$\big[h(j'', j')_v \cap t(j'', j')\big]\,\big[h(j', j)_u \cap t(j', j)\big] \subset h(j'', j)_N \cap \theta(j'', j).$$

*Démonstration.* — Pour tous $j, j'$ et tout $X \in A(j)$, on a l'inclusion

$$t(j', j)X \subset \theta(j', j).$$

La deuxième assertion de (i) résulte de cette inclusion et du lemme VI.7 (i). La première assertion de (i) résulte facilement du même lemme, de son analogue pour les réseaux $h^{\#}(j', j)_i$ et, selon les cas, des descriptions (1), (2), (3) ou (4).

Démontrons (ii). Soient $Y \in h(j', j)_1$, $Y' \in h(j'', j')_0$. On a $Y'Y \in h(j'', j)_1$ (*cf.* VI.8 (1)). Supposons $j \leqslant k' - k''$, donc aussi $j' \leqslant k' - k''$. Grâce à VI.7 (6) (qui est vérifiée même si $j = j'$), on a

$$Y(\mathfrak{p}_j^{j-1}) \subset Y(\mathfrak{p}_j^{j'-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{j'} = \mathfrak{p}_F\,\mathfrak{p}_{j'}^{-j'}.$$

Grâce à VI.7 (4), on en déduit :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_j^{j-1}) \subset \mathfrak{p}_F Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{-j'}) \subset \mathfrak{p}_F\,\mathfrak{p}_{j''}^{-j'} = \mathfrak{p}_{j''}^{2j''+2\ell(j'')-j'} \subset \mathfrak{p}_{j''}^{j''+2\ell(j'')}.$$

Grâce à (3), on en déduit que Y$'Y \in h(j'', j)_1 \cap t(j'', j)$.

Supposons $j \geqslant k'' - k' + 1$. On a de même :

$$Y(\mathfrak{p}_j^{j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{j'} = \mathfrak{p}_F\,\mathfrak{p}_{j'}^{-j'-2\ell(j')}.$$

Grâce à VI.7 (3), on en déduit

$$Y'Y(\mathfrak{p}_j^{j-1}) \subset \mathfrak{p}_F Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{-j'-2\ell(j')}) \subset \mathfrak{p}_F\,\mathfrak{p}_{j''}^{-\ell(j')-j''-\ell(j'')} = \mathfrak{p}_{j''}^{j''+\ell(j'')-\ell(j')} \subset \mathfrak{p}_{j''}^{j''}.$$

De même, grâce à VI.7 (5),

$$Y(\mathfrak{p}_j^{-j-1}) = \mathfrak{p}_F^{-1} Y(\mathfrak{p}_j^{j+2\ell(j)-1}) \subset \mathfrak{p}_F^{-1} Y(\mathfrak{p}_j^{j+\ell(j)+\ell(j')-1}) \subset \mathfrak{p}_F^{-1}\,\mathfrak{p}_{j'}^{j'+2\ell(j')} = \mathfrak{p}_{j'}^{-j'}.$$

Puis, grâce à VI.7 (4),

$$Y'Y(\mathfrak{p}_j^{-j-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{-j'}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{-j'} \subset \mathfrak{p}_{j''}^{-j''}.$$

Grâce à (4), on en déduit que $Y'Y \in h(j'',j)_1 \cap t(j'',j)$. Cela démontre la première inclusion de (i).

La deuxième, resp. troisième, inclusion s'en déduit en la multipliant à gauche, resp. à droite, par un élément de $A(j'')$, resp. $A(j)$, et en utilisant (i). Cela démontre (ii).

Si $N = 0$, l'inclusion (iii) résulte de (6) et VI.8 (1). Supposons $N \geqslant 1$. On vérifie que l'entier $N$ est inférieur ou égal à l'entier défini dans le lemme VI.9. Grâce à (6) et à ce lemme, on a :

$$\left[h(j'',j')_v \cap t(j'',j')\right]\left[h(j',j)_u \cap t(j',j)\right] \subset h^{\#}(j'',j)_N \cap \theta(j'',j).$$

La définition de $N$ permet d'appliquer la relation (2) au membre de droite. On obtient l'inclusion de l'énoncé. □

**VI.11.** Pour tout $j \in \{1,\ldots,k'\}$, posons

$$k^1(j) = \left\{Y \in g\ell(j,j) : Y(\mathfrak{p}_j^{-j-2\ell(j)}) \subset \mathfrak{p}_j^{-j},\, Y(\mathfrak{p}_j^{-j}) \subset \mathfrak{p}_j^{j}\right\}.$$

Si $j \leqslant k' - k''$, notons $b(j)$ l'ensemble des $Y \in g\ell(j,j)$ tels que :

$$\begin{aligned} &Y(v'(n,j)) = 0, \quad \text{pour tout entier } n \text{ tel que } \; -j \leqslant n \leqslant j-2, \\ &Y(v'(j-1,j)) \in \mathfrak{p}_j^{j}. \end{aligned}$$

Si $j \geqslant k' - k'' + 1$, notons $b(j)$ l'ensemble des $Y \in g\ell(j,j)$ vérifiant ces relations et de plus :

$$\begin{aligned} &Y(v''(n,j)) = 0, \quad \text{pour tout entier } n \text{ tel que } \; -\ell(j) \leqslant n \leqslant \ell(j)-2, \\ &Y(v''(\ell(j)-1,j)) \in \mathfrak{p}_j^{-j}. \end{aligned}$$

***Lemme***. — *Pour tout $j \in \{1,\ldots,k'\}$, on a les inclusions :*

$$b(j) \subset k^1(j) \subset h(j,j)_1,$$

*et les égalités*

$$h^{\#}(j,j)_2 = h(j,j)_2 + b(j) = h(j,j)_2 + k^1(j).$$

*Démonstration*. — Supposons $j \geqslant k' - k'' + 1$. Notons $V(j)_1$, resp. $V(j)_2$, le sous-espace de $V(j)$ engendré par

$$\{v'(n,j); -j \leqslant n \leqslant j-2\} \cup \{v''(n,j); \ell(j) \leqslant n \leqslant \ell(j)-2\},$$

resp.

$$\{v'(j-1,j), v''(\ell(j)-1,j)\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité

$$\mathfrak{p}_j^n = (\mathfrak{p}_j^n \cap V(j)_1) \oplus (\mathfrak{p}(j)^n \cap V(j)_2). \tag{1}$$

Soit $Y \in b(j)$. On a

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_j^{-j} \cap V(j)_2 &= \mathfrak{o}_F v'(j-1,j) \oplus \mathfrak{p}_F v''(\ell(j)-1,j), \\ \mathfrak{p}_j^{-j-2\ell(j)} \cap V(j)_2 &= \mathfrak{o}_F v'(j-1,j) \oplus \mathfrak{o}_F v''(\ell(j)-1,j). \end{aligned}$$

Il résulte de ces égalités et de (1) que $Y(\mathfrak{p}_j^{-j}) \subset \mathfrak{p}_j^j$ et $Y(\mathfrak{p}_j^{-j-2\ell(j)}) \subset \mathfrak{p}_j^{-j}$, *i.e.* $Y \in k^1(j)$, ce qui démontre la première inclusion de l'énoncé. La seconde est immédiate. On a aussi immédiatement l'inclusion

$$k^1(j) \subset h^{\#}(j,j)_2 .$$

D'après la première inclusion déjà démontrée, on a donc :

$$(2) \qquad h(j,j)_2 + b(j) \subset h(j,j)_2 + k^1(j) \subset h^{\#}(j,j)_2 .$$

Soit $Y \in h^{\#}(j,j)_2$. Décomposons $Y$ en $Y_1 + Y_2$, où $Y_1$ annule $V(j)_2$ et $Y_2$ annule $V(j)_1$. Il résulte de (1) que l'on a encore $Y_1, Y_2 \in h^{\#}(j,j)_2$. On remarque que :

$$\mathfrak{p}_j^{j-1} \cap V(j)_1 = \mathfrak{p}_j^{j} \cap V(j)_1, \quad \mathfrak{p}_j^{-j-1} \cap V(j)_1 = \mathfrak{p}_j^{-j} \cap V(j)_1 .$$

D'où

$$Y_1(\mathfrak{p}_j^{j-1}) = Y_1(\mathfrak{p}_j^{j}) \subset \mathfrak{p}_j^{j+2} \subset \mathfrak{p}_j^{j+1},$$
$$Y_1(\mathfrak{p}_j^{-j-1}) = Y_1(\mathfrak{p}_j^{-j}) \subset \mathfrak{p}_j^{-j+2} \subset \mathfrak{p}_j^{-j+1} .$$

Alors $Y_1 \in h(j,j)_2$. On a $v'(j-1,j) \in \mathfrak{p}_j^{j-2}$ et $v''(\ell(j)-1,j) \in \mathfrak{p}_j^{-j-2}$. Alors

$$Y_2(v'(j-1,j)) \in \mathfrak{p}_j^j \text{ et } Y_2(v''(\ell(j)-1,j)) \in \mathfrak{p}_j^{-j} .$$

Donc $Y_2 \in b(j)$. Cela démontre l'inclusion

$$h^{\#}(j,j)_2 \subset h(j,j)_2 + b(j) .$$

Grâce à (2), on en déduit les égalités de l'énoncé.

Une démonstration analogue vaut si $j \leqslant k' - k''$. □

***VI.12. Lemme***. — *Pour tous $j, j' \in \{1, \dots, k'\}$ tels que $j' > j$, on a l'inclusion*

$$h(j',j)_0 k^1(j) \subset h(j',j)_2 \cap \theta(j',j) .$$

*Démonstration.* — Soient $Y \in k^1(j)$ et $Y' \in h(j',j)_0$. Supposons d'abord $j \leqslant k' - k''$. Pour $n \in \{-j, \dots, j-1\}$, on a $\mathfrak{p}_j^n \subset \mathfrak{p}_j^{-j}$, d'où

$$Y'Y(\mathfrak{p}_j^n) \subset Y'Y(\mathfrak{p}_j^{-j}) \subset Y'(\mathfrak{p}_j^j) = \mathfrak{p}_F Y'(\mathfrak{p}_j^{-j}) \subset \mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{j'}^{-j} = \mathfrak{p}_{j'}^{2j'+2\ell(j')-j} .$$

Or

$$2j' + 2\ell(j') - j \geqslant \begin{cases} n+2, \\ j' + 2\ell(j') + 1. \end{cases}$$

D'où les inclusions

$$Y'Y(\mathfrak{p}_j^n) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n+2},$$
$$Y'Y(\mathfrak{p}_j^{j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{j'+2\ell(j')+1} .$$

Grâce à VI.10 (3), cela démontre que $Y'Y \in h(j',j)_2 \cap \theta(j',j)$.

Supposons maintenant $j \geqslant k' - k'' + 1$. Pour $n \in \{-j, \dots, j-1\}$, on a de même :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_j^n) \subset Y'Y(\mathfrak{p}_j^{-j}) \subset Y'(\mathfrak{p}_j^j) = \mathfrak{p}_F Y'(\mathfrak{p}_j^{-j-2\ell(j)}) \subset \mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{j'}^{-j'-\ell(j')-\ell(j)} = \mathfrak{p}_{j'}^{j'+\ell(j')-\ell(j)} ,$$

or

$$j' + \ell(j') - \ell(j) \geqslant \begin{cases} n+2, \\ j'+1. \end{cases}$$

D'où les inclusions :

$$\begin{aligned} Y'Y(\mathfrak{p}_j^n) &\subset \mathfrak{p}_{j'}^{n+2}, \\ Y'Y(\mathfrak{p}_j^{j-1}) &\subset \mathfrak{p}_{j'}^{j'+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Pour $n \in \{-j-2\ell(j), \dots, -j-1\}$, on a $\mathfrak{p}_j^n \subset \mathfrak{p}_j^{-j-2\ell(j)}$, donc

$$Y'Y(\mathfrak{p}_j^n) \subset Y'Y(\mathfrak{p}_j^{-j-2\ell(j)}) \subset Y'(\mathfrak{p}_j^{-j}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{-j}.$$

Or

$$-j \geqslant \begin{cases} n+2+j+\ell(j)-j'-\ell(j'), \\ -j'+1. \end{cases}$$

D'où les inclusions

$$\begin{aligned} Y'Y(\mathfrak{p}_j^n) &\subset \mathfrak{p}_{j'}^{n+2+j+\ell(j)-j'-\ell(j')}, \\ Y'Y(\mathfrak{p}_j^{-j-1}) &\subset \mathfrak{p}_{j'}^{-j'+1}. \end{aligned}$$

Jointes à (1), elles entraînent que $Y'Y \in h(j',j)_2 \cap \theta(j',j)$. □

**VI.13.** Nous allons définir $k'+4$ ensembles de données. Nous montrerons ensuite que chacun d'eux vérifie les hypothèses de VI.4.

Soient $j, j' \in \{1, \dots, k'\}$ avec $j' \geqslant j$ et $i$ un entier $\geqslant 1$. On pose :

$$\begin{aligned} r(-3;j',j)_i &= \mathfrak{p}_F^i h \cap g\ell(j',j); \\ n(-2;j',j;i) &= \inf(j'+2\ell(j')-j-2\ell(j)+i, 2j'+2\ell(j')), \\ r(-2;j',j)_i &= h(j',j)_{n(-2;j',j;i)}; \\ n(-1;j',j;i) &= \inf(j'-j+i, j'+2\ell(j')-j-2\ell(j)+1), \\ n(0;j',j;i) &= \inf(i, j'-j+1), \end{aligned}$$

et, pour $a \in \{-1, 0\}$,

$$r(a;j',j)_i = h(j',j)_{n(a;j',j;i)} \cap t(j',j);$$

pour $a \in \{1, \dots, k'-k''\}$,

- si $a < j' \leqslant k'-k''$,

$$n(a;j';i) = \begin{cases} \inf(a+i-1, j'-1), & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant k'-a, \\ j', & \text{si } k'-a+1 \leqslant i; \end{cases}$$

• si $k' - k'' + 1 \leqslant j'$,

$$n(a;j';i) = \begin{cases} \inf(a+i-1, j'-1), \ 1 \leqslant i \leqslant k'-a, \\ \sup(a+i-1+j'+\ell(j')-k'-k'', j'), \\ \qquad\qquad\qquad \text{si } k'-a+1 \leqslant i \leqslant k'+k''-a, \\ \inf(a+i-1+j'+\ell(j')-k'-k'', j'+2\ell(j')-1), \\ \qquad\qquad\qquad \text{si } k'+k''-a+1 \leqslant i \leqslant k'+2k''-a, \\ j'+2\ell(j'), \ \text{si } k'+2k''-a+1 \leqslant i; \end{cases}$$

$$r(a;j',j)_i = \begin{cases} h(j',j)_1, \ \text{si } j < a \text{ ou } j = j' = a, \\ \{Y \in h(j',a)_1; Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n(a;j';i)}\}, \ \text{si } j = a < j', \\ h(j',j)_1 \cap t(j',j), \ \text{si } a < j; \end{cases}$$

pour $a \in \{k'-k''+1, \ldots, k'\}$,

• si $j' > a$,

$$n(a;j';i) = \begin{cases} \inf(a+i-1, j'-1), \ \text{si } 1 \leqslant i \leqslant k'-a, \\ j', \ \text{si } k'-a+1 \leqslant i, \end{cases}$$

$$r(a;j',j)_i = \begin{cases} h(j',j)_1, \ \text{si } j < a \text{ ou } j = j' = a, \\ \{Y \in h(j',a)_1; Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n(a;j';i)} \text{ et } Y(\mathfrak{p}_a^{-a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{-2j'+n(a;j';i)}\}, \\ \qquad\qquad\qquad \text{si } j = a < j', \\ h(j',j)_1 \cap t(j',j), \ \text{si } a < j. \end{cases}$$

Pour $a \in \{1, \ldots, k'\}$, on note $m(a)$ l'ensemble des $Y \in g\ell$ vérifiant les conditions suivantes :

• pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$Y(L'[n]) \subset L'[n] \cap \Big(\bigoplus_{j \leqslant a} V(j)\Big),$$
$$Y(L''[n]) \subset L''[n] \cap \Big(\bigoplus_{j \leqslant a} V(j)\Big);$$

• pour tout entier $n < 0$,

$$Y(L'[n]) \subset L'[n],$$
$$Y\Big(L'[n] \cap \Big(\bigoplus_{j > a} V(j)\Big)\Big) = \{0\},$$
$$Y(L''[n]) \subset L''[n],$$
$$Y\Big(L''[n] \cap \Big(\bigoplus_{j > a} V(j)\Big)\Big) = \{0\}.$$

Pour tous $j, j' \in \{1, \ldots, k''\}$ avec $j' \geqslant j$, on pose

$$m(a; j', j) = \begin{cases} \{0\}, & \text{pour } a \in \{-3, -2, -1, 0\}, \\ m(a) \cap g\ell(j', j), & \text{pour } a \in \{1, \ldots, k'\}. \end{cases}$$

On pose

$$J(a) = \begin{cases} \varnothing, & \text{pour } a \in \{-3, -2, -1, 0\}, \\ \{1, \ldots, a\}, & \text{pour } a \in \{1, \ldots, k'\}, \end{cases}$$

et pour $a \in \{1, \ldots, k'\}$ et $j \in J(a)$,

$$s(a, j) = h^{\#}(j, j)_2 .$$

Enfin, on pose

$$M(a) = \begin{cases} \{1\}, & \text{pour } a \in \{-3, -2, -1, 0\}, \\ G \cap (1 + m(a)), & \text{pour } a \in \{1, \ldots, k'\}. \end{cases}$$

***Remarques***

(1) Pour tous $j, j' \in \{1, \ldots, k'\}$ avec $j' \geqslant j$ et tout $a \in \{-3, \ldots, k'\}$, on a $r(a; j', j)_i \subset g\ell(j', j) \cap h^1$ pour tout $i \geqslant 1$ et $m(a; j', j) \subset g\ell(j', j) \cap h^0$. Pour tout $a$, $M(a)$ est un sous-groupe compact de $H$.

(2) Pour tout $a \in \{1, \ldots, k'\}$, l'ensemble $m(a)$ défini ci-dessus est stable par adjonction et coïncide avec celui défini en VI.4.

(3) Appliquons les définitions de VI.4. On vérifie les égalités suivantes :

$$r(a; j', j)_1 = r(a+1; j', j)_\infty , \quad \text{pour tout } a \in \{-3, \ldots, k'-1\}$$
$$\text{et tous } j, j' \in \{1, \ldots, k'\};$$

$$s(a; j', j)_1 = s(a+1; j', j)_\infty , \quad \text{pour tous } a, j, j', \text{ sauf si}$$
$$a \geqslant 0 \text{ et } (j', j) = (a+1, a+1);$$

$$s(a; a+1, a+1)_1 = h(a+1, a+1)_2 \subset h^{\#}(a+1, a+1)_2 = s(a+1; a+1, a+1)_\infty ,$$
$$\text{pour tout } a \in \{0, \ldots, k'-1\}.$$

***VI.14. Lemme***. — *Pour tout $a \in \{-3, \ldots, k'\}$, les données*

- $(r(a; j', j)_i)_{i \geqslant 1}$, *pour* $j, j' \in \{1, \ldots, k'\}$, $j' \geqslant j$ ;
- $m(a; j', j)$, *pour* $j, j' \in \{1, \ldots, k'\}$, $j' \geqslant j$ ;
- $J(a)$ ;
- $s(a, j)$, *pour* $j \in J(a)$ ;
- $M(a)$ ;

*vérifient les conditions (H1) à (H11) de VI.4.*

*Démonstration*. — La condition (H1) résulte de la stabilité par adjonction des réseaux $h(j, j)_i$, $t(j, j)$ et $h^{\#}(j, j)_i$.

La condition (H2) est immédiate si $a = -3$. Pour $a \in \{-2,-1,0\}$, elle résulte de la croissance des suites $i \mapsto n(a;j',j;i)$ pour tous $j' \geqslant j$. Pour $a \in \{1,\dots,k'\}$, elle résulte de la croissance des suites $i \mapsto n(a;j';i)$ pour tout $j' > a$.

Soient $j,j' \in \{1,\dots,k'\}$ et $n,n' \in \mathbb{Z}$. Posons

$$\mathcal{Y}(n',n) = \{Y \in g\ell(j',j)\,;\, Y(\mathfrak{p}_j^n) \subset \mathfrak{p}_j^{n'}\}.$$

L'ensemble $X'\mathcal{Y}(n',n)$ est indépendant de $X'$ pourvu que $X' \in A(j')$ : il est égal à $\mathcal{Y}(n'+1,n)$. Pour tous $a,i$, $r(a;j',j)_i$ est intersection d'ensembles $\mathcal{Y}(n',n)$. La condition (H3) en résulte.

La condition (H4) résulte des lemmes VI.7 (i) et VI.10 (i) sauf dans le cas où $a \in \{1,\dots,k'\}$ et $j = a < j'$. Dans ce cas, pour tout $i \geqslant 1$, on a

$$h(j',a)_1 \cap t(j',a) \subset r(a;j',a)_i \subset h(j',a)_1 .$$

Soient $X \in A(j)$ et $X' \in A(j')$. Grâce au lemme VI.10 (i) et (ii), on a

$$\begin{aligned} r(a;j',a)_i X \subset h(j',a)_1 h(a,a)_1 \subset h(j',a)_2 \cap \theta(j',a) = X'(h(j',a)_1 \cap t(j',a)) \\ \subset X' r(a;j',a)_i = s(a;j',a)_i . \end{aligned}$$

Cela démontre (H4).

La condition (H5) résulte du lemme VI.7 (iv) en remarquant que, si $a \geqslant -1$, on a $r(a;j,j)_i = h(j,j)_1$ pour tous $i,j$ d'après VI.10 (5).

La condition (H10) est immédiate : $s(-3;j',j)_\infty = 0$ pour tous $j,j'$ ; si $a \in \{-2,\dots,k'\}$, la suite $(r(a;j',j)_i)_{i\geqslant 1}$ est stationnaire pour tous $j,j'$.

La condition (H11) est évidente.

Dans les preuves ci-dessous des conditions (H6) et (H7), on simplifie les notations. On fixe $a \in \{-3,\dots,k'\}$ et $i \geqslant 1$. On supprime la lettre $a$ de la notation (par exemple $r(j',j)_i = r(a;j',j)_i$). Si $a \in \{-2,-1,0\}$ et $j' \geqslant j$, on pose

$$n(j',j) = n(a;j',j;i), \quad n^+(j',j) = n(a;j',j;i+1).$$

Si $j' < j$, on pose $n(j',j) = n(j,j')$, $n^+(j',j) = n^+(j,j')$. De même, si $a \in \{1,\dots,k'\}$ et $j' > a$, on pose

$$n(j') = n(a;j';i), \quad n^+(j') = n(a;j';i+1).$$

Etablissons (H6). Soient $j,j',j''$ vérifiant les hypothèses de cette condition. Si $a = 3$, le résultat est clair :

$$\mathfrak{p}_F^i h \mathfrak{p}_F^i h \subset \mathfrak{p}_F^{2i} h \subset \mathfrak{p}_F^{i+1} h.$$

Si $j'' = j \in J$, on a nécessairement $a \geqslant 1$. Comme on l'a dit ci-dessus, $r(j'',j)_{i+1} = h(j'',j)_1$ et l'assertion résulte de VI.8 (1). Supposons maintenant $j'' \geqslant j$, $j'' \geqslant j'$.

Si $a \in \{-2,-1,0\}$, grâce au lemme VI.8 (i) et à VI.10 (6), il suffit d'établir l'inégalité

$$n(j'',j') + n(j',j) \geqslant n^+(j'',j).$$

Si $j' \leqslant j$, on remarque que

$$n(j'',j') \geqslant n(j'',j).$$

Or
$$n(j',j) \geqslant 1 \text{ et } n(j'',j)+1 \geqslant n^+(j'',j).$$
Supposons $j' > j$. Si $a=-2$, on a
$$n(j',j) \geqslant j' + 2\ell(j') - j - 2\ell(j) + 1$$
et
$$n(j'',j') + j' + 2\ell(j') - j - 2\ell(j) + 1 \geqslant n^+(j'',j).$$
Supposons $a=-1$. Si $n(j'',j') = j'' - j' + i$, on remarque que $n(j',j) \geqslant j' - j + 1$, d'où
$$n(j'',j') + n(j',j) \geqslant j'' - j + i + 1 \geqslant n^+(j'',j).$$
*Idem* si $n(j',j) = j' - j + i$. Supposons $n(j'',j') \neq j'' - j' + i$ et $n(j',j) \neq j' - j + i$. Alors :
$$n(j'',j') = j'' + 2\ell(j'') - j' - 2\ell(j') + 1, \quad n(j',j) = j' + 2\ell(j') - j - 2\ell(j) + 1,$$
d'où
$$n(j'',j') + n(j',j) = j'' + 2\ell(j'') - j - 2\ell(j) + 2 \geqslant n^+(j'',j).$$
Supposons $a=0$. Si $n(j'',j') = i$, on a
$$n(j'',j') + n(j',j) \geqslant i + 1 \geqslant n^+(j'',j).$$
*Idem* si $n(j',j) = i$. Supposons $n(j'',j) \neq i$, $n(j',j) \neq i$. Alors
$$n(j'',j') = j'' - j' + 1, \quad n(j',j) = j' - j + 1,$$
d'où
$$n(j'',j') + n(j',j) = j'' - j + 2 \geqslant n^+(j'',j).$$
Supposons maintenant $a \in \{1,\dots,k'\}$. Comme on l'a déjà dit, on a en tout cas
$$r(j'',j')_i r(j',j)_i \subset h(j'',j)_1.$$
Si $j < a$ ou $j = j'' = a$, on a $r(j'',j)_{i+1} = h(j'',j)_1$ et c'est terminé. Si $j' \leqslant j$, on utilise le lemme VI.10 (ii) :
$$r(j'',j')_i r(j',j)_i \subset h(j'',j')_0 h(j',j)_1 \subset h(j'',j)_1 \cap t(j'',j) \subset r(j'',j)_{i+1}.$$
Supposons $j' > j > a$. En revenant un instant aux notations initiales, on remarque que
$$r(a;j'',j')_i = r(0;j'',j')_1, \quad r(a;j',j)_i = r(0;j',j)_1,$$
$$r(a',j'',j)_{i+1} = r(0;j'',j)_1 \supset r(0;j'',j)_2.$$
L'inclusion cherchée résulte de la même inclusion pour $a=0$, $i=1$, que l'on a déjà prouvée. Il reste le cas $j = a < j' \leqslant j''$. Sous ces hypothèses on doit prouver la propriété suivante : soient $Y' \in h(j'',j')_1 \cap t(j'',j')$ et $Y \in r(j',j)_i$, alors on a l'inclusion

(1) $$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n^+(j'')},$$

et, si $a \geqslant k' - k'' + 1$, on a aussi l'inclusion

$$(2) \qquad Y'Y(\mathfrak{p}_a^{-a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{-2j''+n^+(j'')}.$$

Fixons $Y$ et $Y'$ comme ci-dessus. Supposons d'abord $a \leqslant k' - k''$. On a

$$Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n(j')}.$$

Supposons $j' + 2\ell(j') - 1 \leqslant n(j')$. Puisque $Y' \in t(j'', j')$, on a

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{j'+2\ell(j')-1}) = Y'(\mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{j'}^{-j'-1}) \subset \mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{j''}^{-j''} = \mathfrak{p}_{j''}^{j''+2\ell(j'')}.$$

Or $n^+(j'') \leqslant j'' + 2\ell(j'')$, d'où (1).

Supposons :

$$(3) \qquad j' \leqslant n(j') \leqslant j' + 2\ell(j') - 2.$$

Puisque $Y' \in h(j'', j')_1$, on a

$$(4) Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{n(j')}) = Y'(\mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{j'}^{n(j')-2j'-2\ell(j')}) \subset \mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{j''}^{n(j')+1-j''-\ell(j'')-j'-\ell(j')}$$
$$= \mathfrak{p}_{j''}^{n(j')+1+j''+l(j'')-j'-\ell(j')}.$$

L'hypothèse (3) implique $\ell(j') \geqslant 1$, *i.e.* $j' \geqslant k'-k''+1$, et $k'-a+1 \leqslant i \leqslant k'+2k''-a-1$. Si $k' + k'' - a \leqslant i \leqslant k' + 2k'' - a - 1$, les définitions et l'hypothèse (3) impliquent

$$n(j') = a + i - 1 + j' + \ell(j') - k' - k'',$$

d'où

$$n(j') + 1 + j'' + \ell(j'') - j' - \ell(j') = a + i + j'' + \ell(j'') - k' - k'' \geqslant n^+(j'').$$

Si $k' - a + 1 \leqslant i \leqslant k' + k'' - a - 1$, on a

$$\begin{aligned} &n(j') + 1 + j'' + \ell(j'') - j' - \ell(j') \\ &= \sup(a + i + j'' + \ell(j'') - k' - k'', 1 + j'' + \ell(j'') - \ell(j')) \\ &\geqslant \sup(a + i + j'' + \ell(j'') - k' - k'', j'') = n^+(j''). \end{aligned}$$

En tout cas, (4) implique (1).

Supposons $n(j') = j' - 1$. Alors $i \leqslant k' - a$. Puisque $Y' \in t(j'', j')$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{j'-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{j''}.$$

Or $j'' \geqslant n^+(j'')$, d'où (1).

Supposons $n(j') \leqslant j' - 2$. Alors $i \leqslant k' - a - 1$ et $n(j') = a + i - 1$. Puisque $Y' \in h(j'', j')_1$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{n(j')}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n(j')+1} = \mathfrak{p}_{j''}^{a+i}.$$

Or $a + i \geqslant n^+(j'')$, d'où (1).

Supposons maintenant $a \geqslant k' - k'' + 1$. On a les inclusions

$$Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n(j')}, \quad Y(\mathfrak{p}_a^{-a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{-2j'+n(j')}.$$

Supposons $j'-1 \leqslant n(j')$. En utilisant le fait que $Y' \in t(j'',j')$, on démontre comme ci-dessus l'inclusion (1). On a aussi :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{-a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{-j'-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{-j''}.$$

Or $-j'' \geqslant 2j'' + n^+(j'')$, d'où (2).

Supposons $n(j') \leqslant j'-2$. Alors $i \leqslant k'-a-1$ et $n(j') = a+i-1$. En utilisant le fait que $Y' \in h(j'',j')_1$, on démontre comme ci-dessus l'inclusion (1). On a

$$-2j' + n(j') \geqslant -j' - 2\ell(j'),$$

d'où

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{-a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{-2j'+n(j')}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n(j')+1-j'+\ell(j')-j''-\ell(j'')} = \mathfrak{p}_{j''}^{a+i-2j''}.$$

Or $a+i-2j'' \geqslant n^+(j'') - 2j''$, d'où (2). Cela achève la vérification de (H6).

Etablissons (H7). Soient $j, j', j''$ vérifiant les hypothèses de cette condition. Les réseaux $s(j',j)_i$ se calculent grâce aux lemmes VI.7 (i) et VI.10 (i).

Supposons $j' = j \in J$. Puisque $J \neq \varnothing$, on a $a \geqslant 1$. Grâce aux lemmes VI.8 (i) et VI.10 (ii), on a

$$r(j'',j)_i s(j,j)_i \subset h(j'',j)_1 h(j,j)_1 \subset \begin{cases} h(j'',j)_2 = s(j'',j)_{i+1}, & \text{si } j'' < j, \\ h(j'',j)_2 \cap \theta(j'',j) \subset s(j'',j)_{i+1}, & \text{si } j'' \geqslant j. \end{cases}$$

C'est dans ce cas l'inclusion cherchée.

Supposons maintenant $j' > j'' \geqslant j$. Si $a = -3$, on a :

$$s(j',j)_i = \mathfrak{p}_F^i h^1 \cap g\ell(j',j), \quad s(j'',j)_{i+1} = \mathfrak{p}_F^{i+1} h^1 \cap g\ell(j',j)$$

grâce au lemme VI.7 (i) et (ii). On a

$$\mathfrak{p}_F^i h \mathfrak{p}_F^i h^1 \subset \mathfrak{p}_F^{2i} h^1 \subset \mathfrak{p}_F^{i+1} h^1,$$

d'où l'inclusion cherchée.

Supposons $a = -2$ ou $j \geqslant k' - k'' + 1$ et $a = -1$. En utilisant dans ce dernier cas la relation VI.10 (i), on a les égalités :

$$\begin{aligned} r(j'',j')_i &= h(j'',j')_{n(j'',j')}, \\ s(j',j)_i &= h(j',j)_{n(j',j)+1}, \\ s(j'',j)_{i+1} &= h(j'',j)_{n^+(j'',j)+1}. \end{aligned}$$

Appliquons le lemme VI.8 (ii) à $u = n(j',j)+1$, $v = n(j'',j')$. En définissant $n_1$, $n_2$, $n_3$, et $n_4$ comme dans ce lemme, il suffit de prouver que

$$n^+(j'',j) + 1 \leqslant \inf(n_1, n_2, n_3, n_4). \tag{5}$$

Il est clair que

$$n^+(j'',j) + 1 \leqslant 2j'' + 2\ell(j'') + 1 = n_4.$$

Supposons $a = -2$. On a

$$n(j'',j') \geqslant j' + 2\ell(j') - j'' - 2\ell(j'') + 1,$$

$\inf(n_1,n_2,n_3) \geqslant n(j',j)+n(j'',j')+1+2j''+2\ell(j'')-2j'-2\ell(j') \geqslant n(j',j)+j''-j'+2.$
En explicitant $n(j',j)$, on obtient

$$\begin{aligned}\inf(n_1,n_2,n_3) &\geqslant \inf(j''+2\ell(j')-j-2\ell(j)+i+1,\, j''+j'+2\ell(j')+1)+1\\ &\geqslant \inf(j''+2\ell(j'')-j-2\ell(j)+i+1,\, 2j''+2\ell(j''))+1\\ &= n^+(j'',j)+1.\end{aligned}$$

D'où (5).

Supposons $a=-1$ et $j \geqslant k'-k''+1$. Alors $\ell(j) \geqslant 1$, d'où

$$n^+(j'',j)+1 \leqslant j''+2\ell(j'')-j \leqslant n_2.$$

D'autre part

$$n(j'',j') \geqslant j'-j''+1,$$

$\inf(n_1,n_3) \geqslant n(j',j)+n(j'',j')+1+j''+\ell(j'')-j'-\ell(j') = n(j',j)+\ell(j'')-\ell(j')+2.$
En explicitant $n(j',j)$, on obtient :

$\inf(n_1,n_3) \geqslant \inf(j'-\ell(j')+\ell(j'')-j+i+1,\, j'+\ell(j')+\ell(j'')-j-2\ell(j)+2)+1.$
Or $j'-\ell(j') \geqslant j''-\ell(j'')$ (en fait, ces deux termes sont égaux). D'où :

(6) $\inf(n_1,n_3) \geqslant \inf(j''-j+i+1,\, j''+2\ell(j'')-j-2\ell(j)+1)+1 = n^+(j'',j)+1.$

D'où encore (5).

Supposons $a \in \{-1,0\}$ et $j \leqslant k''-k'$. Grâce au lemme VI.10 (i), on a les égalités :

$$r(j'',j')_i = h(j'',j')_{n(j'',j')} \cap t(j'',j'),\quad s(j',j)_i = h(j',j)_{n(j',j)+1} \cap \theta(j',j),$$
$$s(j'',j)_{i+1} = h(j'',j)_{n^+(j'',j)+1} \cap \theta(j'',j).$$

Appliquons le lemme VI.10 (iii) à $u = n(j',j)+1$, $v = n(j'',j')$. En définissant $n_1$, $n_2$, $n_3$ comme dans ce lemme (cas $j \leqslant k'-k''$), il suffit de prouver :

(7) $$n^+(j'',j)+1 \leqslant \inf(n_1,n_2,n_3).$$

Il est clair que

$$n^+(j'',j)+1 \leqslant j''+2\ell(j'')-j+2 = n_3.$$

Si $a=-1$, le calcul qui a conduit à l'inégalité (6) démontre que

$$n^+(j'',j)+1 \leqslant \inf(n_1,n_2).$$

D'où (7).

Supposons $a=0$. On a

$$n^+(j'',j)+1 \leqslant j''-j+2 \leqslant n_1.$$

D'autre part $n(j'',j') \geqslant 1$, d'où :

$$\begin{aligned}n_2 = n(j'',j')+n(j',j)+1 &\geqslant \inf(i+1, j'-j+2)+1 \geqslant\\ &\inf(i+1, j''-j+1)+1 = n^+(j'',j)+1.\end{aligned}$$

D'où encore (7).

Supposons $a=0$ et $j \geqslant k'-k''+1$. On doit remplacer dans le calcul ci-dessus les entiers $n_1$, $n_2$, $n_3$ par les entiers $n_1$, $n_2$ du lemme VI.10 (iii), cas $j \geqslant k'-k''+1$. Le calcul est le même que celui du cas $a=0$ ci-dessus.

Supposons maintenant $a \in \{1,\dots,k'\}$. Supposons $j>a$. En revenant un instant aux notations initiales, on remarque que

$$r(a;j'',j')_i = r(0;j'',j')_1,\quad s(a;j',j)_i = s(0;j',j)_1,$$

$$s(a;j'',j)_{i+1} = s(0;j'',j)_1 \supset s(0;j'',j)_2.$$

L'inclusion à démontrer est la même que dans le cas $a=0$, $i=1$, que l'on a déjà traité.

On a toujours

$$r(j'',j')_i\, s(j',j)_i \subset h(j'',j')_1 h(j',j)_2.$$

Supposons $j<a$ et $j<j''$. Appliquons le lemme VI.8 (ii) à $u=2$, $v=1$. On vérifie que l'entier $N$ de ce lemme est $\geqslant 2$, d'où

$$r(j'',j')_i\, s(j',j)_i \subset h(j'',j)_2 = s(j'',j)_{i+1}.$$

Dans les autres cas, appliquons le lemme VI.9 à $u=2$, $v=1$. L'entier $N$ de ce lemme est $\geqslant 2$ et l'on obtient

$$r(j'',j')_i\, s(j',j)_i \subset h^{\#}(j'',j)_2. \tag{8}$$

Si $j=j'' \leqslant a$, $h^{\#}(j'',j)_2 = s(j'',j)_{i+1}$ et l'inclusion ci-dessus est celle à démontrer.

Reste le cas $j=a<j''<j'$. On suppose désormais ces inégalités vérifiées.

Supposons $a \leqslant k'-k''$. On a les égalités :

$$\begin{aligned} r(j'',j')_i &= h(j'',j')_1 \cap t(j'',j'),\\ s(j',a)_i &= \{Y \in h(j',a)_2 ;\, Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n(j')+1}\},\\ s(j'',a)_{i+1} &= \{Y \in h(j'',a)_2 ;\, Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n^+(j'')+1}\}\\ &= \{Y \in h^{\#}(j'',a)_2 ;\, Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n^+(j'')+1}\}. \end{aligned}$$

Compte tenu de (8), il suffit de prouver que pour $Y \in s(j',a)_i$ et $Y' \in r(j'',j')_i$, on a l'inclusion

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n^+(j'')+1}. \tag{9}$$

Fixons de tels $Y$ et $Y'$. On a l'inclusion :

$$Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n(j')+1}.$$

Supposons $j'+2\ell(j')-1 \leqslant n(j')$. Puisque $Y' \in t(j'',j')$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{j'+2\ell(j')}) = Y'(\mathfrak{p}_F\mathfrak{p}_{j'}^{-j'}) \subset \mathfrak{p}_F\mathfrak{p}_{j''}^{-j''+1} = \mathfrak{p}_{j''}^{j''+2(j'')+1}.$$

Or $j''+2\ell(j'') \geqslant n^+(j'')$, d'où (9).

Supposons $j' + \ell(j') + \ell(j'') - 2 \leqslant n(j') \leqslant j' + 2\ell(j') - 2$. Alors $i \leqslant k' - a - 1$ si $j' \leqslant k' - k''$, resp. $i \leqslant k' + 2k'' - a - 1$ si $j' \geqslant k' - k'' + 1$, d'où $n^+(j'') \leqslant j'' + 2\ell(j'') - 1$. Puisque $Y' \in h(j'', j')_1$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{j'+\ell(j')+\ell(j'')-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{j''+2\ell(j'')} \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n^+(j'')+1}.$$

C'est l'inclusion (9).

Supposons

$$j' + \ell(j') - \ell(j'') - 1 \leqslant n(j') \leqslant j' + \ell(j') + \ell(j'') - 3. \tag{10}$$

Cette hypothèse implique $\ell(j'') \geqslant 1$, *i.e.* $j'' \geqslant k' - k'' + 1$, *a fortiori* $j' \geqslant k' - k'' + 1$. Elle implique aussi $k' - a + 1 \leqslant i \leqslant k' + 2k'' - a - 1$. Puisque $Y' \in h(j'', j')_1$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{n(j')+1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n(j')+2+j''+\ell(j'')-j'-\ell(j')}. \tag{11}$$

Si $k' + k'' - a + 1 - \ell(j') \leqslant i$, les définitions et l'hypothèse (10) impliquent :

$$n(j') = a + i - 1 + j' + \ell(j') - k' - k''.$$

En utilisant une fois encore l'hypothèse (10), on obtient

$$k' + k'' - a - \ell(j'') \leqslant i. \tag{12}$$

D'autre part

$$n(j') + 2 + j'' + \ell(j'') - j' - \ell(j') = a + i + 1 + j'' + \ell(j'') - k' - k''.$$

Grâce à (12), on vérifie que cette expression est $\geqslant n^+(j'') + 1$. Alors (11) implique (9).

Si $k' - a + 1 \leqslant i \leqslant k' + k'' - a - \ell(j')$, on a $n(j') = j'$ et $n^+(j'') = j''$. L'hypothèse (10) implique $\ell(j') = \ell(j'') + 1$. Alors

$$n(j') + 2 + j'' + \ell(j'') - j' - \ell(j') = j'' + 1 = n^+(j'') + 1.$$

L'inclusion (11) implique encore (9).

Supposons $j' - 1 \leqslant n(j') \leqslant j' + \ell(j') - \ell(j'') - 2$. Alors $i \leqslant k' + k'' - a - 1$ et $\ell(j') \geqslant 1$, *i.e.* $j' \geqslant k' - k'' + 1$. Puisque $Y' \in t(j'', j')$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{j'}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{j''+1}. \tag{13}$$

Si $j'' \geqslant k' - k'' + 1$ et $i \geqslant k' + k'' - a - \ell(j'') + 1$, on a :

$$n^+(j'') + 1 = a + i + j'' + \ell(j'') - k' - k'' + 1 \leqslant n(j') + j'' + \ell(j'') - j' - \ell(j') + 2 \leqslant j''.$$

Si $j'' \leqslant k' - k''$ ou si $j'' \geqslant k' - k'' + 1$ et $i \leqslant k' + k'' - a - \ell(j'')$, on a $n^+(j'') \leqslant j''$. Dans les deux cas, (13) implique (9).

Supposons $j'' - 2 \leqslant n(j') \leqslant j' - 2$. Alors $i \leqslant k' - a - 1$, d'où $n^+(j'') \leqslant j'' - 1$. Puisque $Y' \in h(j'', j')_1$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{j''-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{j''} \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n^+(j'')+1}.$$

C'est l'inclusion (9).

Supposons $n(j') \leqslant j'' - 3$. Alors $i \leqslant k' - a - 1$ et $n(j') = a + i - 1 \geqslant n^+(j'') - 1$.

Puisque $Y' \in h(j'',j')_1$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{n(j')+1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n(j')+2} \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n^+(j'')+1}.$$

C'est l'inclusion (9), qui est maintenant démontrée.

Supposons maintenant $a \geqslant k' - k'' + 1$. On voit comme précédemment qu'il suffit de prouver que pour $Y \in s(j',a)_i$ et $Y' \in h(j'',j')_1 \cap t(j'',j')$, on a les inclusions

$$(14) \qquad Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n^+(j'')+1} \text{ et } Y'Y(\mathfrak{p}_a^{-a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{-2j''+n^+(j'')+1}.$$

Fixons de tels $Y, Y'$. On a les inclusions :

$$Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n(j')+1}, \quad Y(\mathfrak{p}_a^{-a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{-2j'+n(j')+1}.$$

Supposons $j' - 1 \leqslant n(j')$. Puisque $Y' \in t(j'',j')$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{j'}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{j''+1},$$
$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{-a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{-j'}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{-j''+1}.$$

Or $j'' \geqslant n^+(j'')$, d'où (14).

Supposons $j'' - 2 \leqslant n(j') \leqslant j' - 2$. Alors $i \leqslant k' - a - 1$ et $n^+(j'') \leqslant j'' - 1$. Puisque $Y' \in h(j'',j')_1$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{j''-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{j''} \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n^+(j'')+1},$$
$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{-a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_F^{-1}\mathfrak{p}_{j'}^{2\ell(j')+j''-1}) \subset \mathfrak{p}_F^{-1}\mathfrak{p}_{j''}^{j''+2\ell(j'')} = \mathfrak{p}_{j''}^{-j''} \subset \mathfrak{p}_{j''}^{-2j''+n^+(j'')+1}.$$

Ce sont les inclusions (14).

Supposons $n(j') \leqslant j'' - 3$. Alors $i \leqslant k' - a - 1$ et $n(j') = a + i - 1 \leqslant n^+(j'') - 1$. Puisque $Y' \in h(j'',j')_1$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{n(j')+1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n(j')+2} \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n^+(j'')+1},$$
$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{-a-1}) \subset Y'(\mathfrak{p}_F^{-1}\mathfrak{p}_{j'}^{2\ell(j')+n(j')+1}) \subset \mathfrak{p}_F^{-1}\mathfrak{p}_{j''}^{n(j')+2+2\ell(j'')}$$
$$= \mathfrak{p}_{j''}^{-2j''+n(j')+2} \subset \mathfrak{p}_{j''}^{-2j''+n^+(j'')+1}.$$

Ce sont les inclusions (14), qui sont maintenant démontrées. Cela achève la vérification de (H7).

Etablissons maintenant la condition (H8). On revient aux notations initiales. On utilise la remarque VI.13 (3) et l'égalité $r(k',j',j)_1 = r(k',j',j)_\infty$ pour tous $j, j'$. On en déduit qu'il suffit de prouver que pour tous $a \in \{0,\ldots,k'-1\}$ et tous $j, j', j'' \in \{1,\ldots,k'\}$, on a l'inclusion :

$$(15) \qquad r(a;j'',j')_1 m(a+1;j',j) \subset r(a;j'',j)_1.$$

On fixe de tels $a, j, j', j''$. On a en tout cas

$$r(a;j'',j')_1 m(a+1;j',j) \subset h(j'',j')_1 h(j',j)_0 \subset h(j'',j)_1$$

d'après VI.8 (1). Si $\inf(j'',j) \leqslant a$, $r(a;j'',j)_1 = h(j'',j)_1$ et on a terminé. Supposons désormais $\inf(j'',j) \geqslant a+1$. Si $j' \leqslant j'' \leqslant j$, l'adjointe de l'assertion (ii) du lemme VI.10 entraîne :

$$r(a;j'',j')_1 m(a+1;j',j) \subset h(j'',j)_1 \cap t(j'',j) \subset r(a;j'',j)_1 .$$

C'est l'inclusion (15). Si $j'' < \inf(j,j')$, puisque $j'' \geqslant a+1$, on a $\inf(j,j') \geqslant a+2$. Alors $m(a+1;j',j) = 0$ et (15) est triviale. Il reste le cas $j'' \geqslant j \geqslant a+1$. Dans ce cas,

$$r(a;j'',j)_1 = h(j'',j)_1 \cap t(j'',j).$$

En utilisant VI.10 (3) et (4), il suffit de prouver que pour $Y \in m(a+1;j',j)$ et $Y' \in r(a;j'',j')_1$, on a les inclusions

$$Y'Y(\mathfrak{p}_j^{j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{j''}, \quad Y'Y(\mathfrak{p}_j^{-j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{-j''} . \tag{16}$$

Supposons $j \leqslant k' - k''$. La deuxième inclusion ci-dessus est plus forte que la première. Puisque $Y'Y \in h(j'',j)_1$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_j^{-j}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{-j+1} \subset \mathfrak{p}_{j''}^{-j''} .$$

D'autre part

$$\mathfrak{p}_j^{-j-1} = \mathfrak{p}_j^{-j} + \mathfrak{p}_F^{-1} v'(j-1,j).$$

Il suffit donc de prouver l'inclusion

$$Y'Y(\mathfrak{p}_F^{-1} v'(j-1,j)) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{-j''} .$$

De l'hypothèse $j \geqslant a+1$ et de la définition de $m(a+1;j',j)$, il résulte que

$$Y(v'(j-1,j)) = 0$$

sauf si $j' = j = a+1$. Dans ce dernier cas, on a $r(a;j'',j')_1 \subset t(j'',j')$, d'où

$$Y'Y(\mathfrak{p}_F^{-1} v'(j-1,j)) \subset Y'(\mathfrak{p}_F^{-1} v'(j'-1,j')) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{-j'-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{-j''} .$$

Cela démontre (16) et achève la preuve de (15) et de la condition (H8).

Nous allons maintenant démontrer les deux relations :

$$\text{pour tout } a \in \{1,\dots,k'\}, \text{ tout } j \in \{1,\dots,k'\} \text{ et tout } j' \in J(a), \tag{17}$$
$$s(a;j',j')_\infty m(a;j',j) \subset s(a;j',j)_\infty ;$$

$$\begin{gathered} \text{pour tout } a \in \{0,\dots,k'-1\} \text{ et tous } j,j',j'' \in \{1,\dots,k'\} \\ \text{tels que } j'' < j' \text{ ou } j'' = j' \in J(a), \\ s(a;j'',j')_1 m(a+1;j',j) \subset s(a;j'',j)_1 . \end{gathered} \tag{18}$$

Si $j' = j$, la relation (17), resp. (18) est immédiate. En effet, un élément de $m(a;j,j)$, resp. $m(a+1;j,j)$, conserve $\mathfrak{p}_j^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et la multiplication par un tel élément conserve $s(a;j,j)_\infty$, resp. $s(a;j'',j)_1$.

Démontrons (17). Soient $a, j, j'$ comme dans cette relation, supposons $j' \neq j$. On a

$$s(a;j',j)_\infty = \begin{cases} h(j',j)_2, & \text{si } \inf(j',j) \leqslant a-1, \\ h(j',j)_2 \cap \theta(j',j), & \text{si } \inf(j',j) \geqslant a. \end{cases}$$

Grâce au lemme VI.11, on a :

$$s(a;j',j')_\infty = h^{\#}(j',j')_2 = h(j',j')_2 + b(j') = h(j',j')_2 + k^1(j').$$

Supposons $j < j'$. Puisque $j' \in J(a)$, alors $\inf(j',j) \leqslant a-1$. D'après le lemme VI.8 (i), on a

$$h(j',j')_2 m(a;j',j) \subset h(j',j')_2 h(j',j)_0 \subset h(j',j)_2 = s(a;j',j)_\infty.$$

D'après la définition de $m(a;j',j)$, on a :

$$b(j') m(a;j',j) = \{0\}.$$

Alors (17) est vérifiée.

Supposons $j > j'$. On va démontrer la relation adjointe de (17), à savoir :

$$m(a;j,j') s(a;j',j')_\infty \subset s(a;j,j')_\infty.$$

D'après le lemme VI.10 (ii), on a :

$$m(a;j,j') h(j',j')_2 \subset h(j,j')_0 h(j',j')_2 \subset h(j,j')_2 \cap \theta(j,j') \subset s(a;j,j')_\infty.$$

D'après le lemme VI.12, on a :

$$m(a;j,j') k^1(j') \subset h(j,j')_0 k^1(j') \subset h(j,j')_2 \cap \theta(j,j') \subset s(a;j,j')_\infty.$$

Cela achève la preuve de (17).

Démontrons (18). Soient $a, j, j', j''$ comme dans cette relation, supposons $j' \neq j$. Si $j'' = j' \in J(a)$, utilisons la remarque VI.13 (3). On a :

$$s(a;j'',j')_1 = s(a+1;j'',j')_\infty, \quad s(a;j'',j)_1 = s(a+1;j'',j)_\infty.$$

Alors (18) résulte de (17) appliqué à l'entier $a+1$.

On suppose désormais $j'' < j'$. On a $s(a;j'',j')_1 \subset h(j'',j')_2$. On en déduit :

$$s(a;j'',j')_1 m(a+1;j',j) \subset \begin{cases} h^{\#}(j,j)_2, & \text{si } j = j'', \\ h(j'',j)_2, & \text{si } j \neq j''. \end{cases} \tag{19}$$

En effet, si $j' < j$, cela résulte du lemme VI.8 (i). Si $j' > j$ et $j \neq j''$, cela résulte du lemme VI.8 (ii) si $j < j''$ ou de son « adjoint » si $j > j''$ : on constate que l'entier $N$ de ce lemme est $\geqslant 2$. Si $j' > j$ et $j = j''$, cela résulte du lemme VI.9 si $j < j''$ ou de son « adjoint » si $j > j''$ : on constate encore que l'entier $N$ de ce lemme est $\geqslant 2$.

Si $\inf(j,j'') \leqslant a$, on a

$$s(a;j'',j)_1 = \begin{cases} h^{\#}(j,j)_2, & \text{si } j = j'', \\ h(j'',j)_2, & \text{si } j \neq j'' \end{cases}$$

et (18) résulte de (19). Supposons $\inf(j,j') \geqslant a+1$. Alors $j' \geqslant a+2$. Si $j \geqslant a+2$, $m(a+1;j',j) = \{0\}$ et (18) est triviale. Il reste le cas $j = a+1 \leqslant j'' < j'$. Dans ce cas

$$s(a;j'',j)_1 = h(j'',j)_2 \cap \theta(j'',j).$$

En tenant compte de (19) et de VI.10 (1), (3) et (4), il suffit de prouver que pour $Y \in m(a+1;j',j)$ et $Y' \in s(a;j'',j')_1$, on a les inclusions :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_j^{j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{j''+1}, \quad Y'Y(\mathfrak{p}_j^{-j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{-j''+1}.$$

De l'hypothèse $j' > j = a+1$ et de la définition de $m(a+1;j',j)$, il résulte que

$$Y(v'(j-1,j)) = 0 \text{ et, si } j \geqslant k' - k'' + 1,\ Y(v''(\ell(j)-1,j)) = 0.$$

Un raisonnement analogue à celui de la preuve de (H8) permet d'en déduire les inclusions ci-dessus. Cela démontre (18).

Etablissons maintenant la condition (H9). Elle est triviale pour $a \leqslant 0$ car on a $m(a;j',j) = \{0\}$ pour tous $j,j'$. Soient $a \in \{1,\dots,k'\}$, $j,j',j'' \in \{1,\dots,k'\}$ tels que $j'' < j'$ ou $j' = j'' \in J(a)$. On veut prouver :

$$s(a;j'',j')_1 m(a;j',j) \subset s(a;j'',j)_1, \tag{20}$$

$$s(a;j'',j')_\infty m(a;j',j) \subset s(a;j'',j)_\infty. \tag{21}$$

Si $a < k'$, (20) résulte de (18) et de l'inclusion

$$m(a;j',j) \subset m(a+1;j',j).$$

Si $a = k'$, on a $s(k',j_1,j_2)_1 = s(k';j_1,j_2)_\infty$ pour tous $j_1, j_2$ et (20) est équivalent à (21). Si $j' = j'' \subset J(a)$, (21) n'est autre que (17). Supposons $j'' < j'$. En utilisant la remarque VI.13 (3) et la relation (18), on a :

$$s(a;j'',j')_\infty m(a;j',j) = s(a-1;j'',j')_1 m(a;j',j) \subset s(a-1;j'',j)_1 \subset s(a;j'',j)_\infty.$$

Cela démontre (20) et (21) et établit la condition (H9). Le lemme est démontré. □

***VI.15. Corollaire.*** — *Pour tout $a \in \{0,\dots,k'-1\}$, le groupe $M(a+1)$ normalise le réseau $s(a)_1$.*

*Démonstration.* — La preuve est identique à celle du (ix) du lemme VI.5, en s'appuyant sur les relations (15) et (18) de la démonstration précédente. □

**VI.16.** Dans ce paragraphe et jusqu'en VI.23 inclus, on fixe un entier $a \in \{1,\dots,k'\}$.

***Lemme.*** — *Pour tout $Y \in \mathfrak{p}_F s(a-1)_1^{\sim}$ et tout $i \in \{-a+1,\dots,a\}$, resp. tout $i \in \{-\ell(a)+1,\dots,\ell(a)\}$, on a l'inclusion :*

$$Y(L'_i) \subset L'_{i-1}, \ \textit{resp.}\ Y(L''_i) \subset L''_{i-1}.$$

*Démonstration.* — Pour $i \in \{-a+1, \ldots, a\}$ et $j, j' \in \{1, \ldots, k'\}$, posons

$$u'_i = \{Y \in g\,;\, Y(L'_{i-1}) \subset \mathfrak{p}_F L'_i\},$$
$$u'(j',j)_i = u'_i \cap g\ell(j',j).$$

Montrons que :

$$\text{(1)} \qquad \text{pour tout } i \in \{-a+1, \ldots, a\} \text{ et tous } j, j' \in \{1, \ldots, k'\} \text{ avec } j' \geqslant j, \\ \text{on a l'inclusion } u'(j',j)_i \subset s(a-1; j', j)_1.$$

Soit $Y \in u'(j',j)_i$. Pour $n \in \{-j, \ldots, j-1\}$, on a :

- si $n \geqslant i-1$, $\mathfrak{p}_j^n \subset L'_{i-1}$, donc $Y(\mathfrak{p}_j^n) \subset \mathfrak{p}_F L'_i \cap V(j')$ ;
- si $n \leqslant i-2$, $\mathfrak{p}_j^n \subset \mathfrak{p}_F^{-1} L'_{i-1}$, donc $Y(\mathfrak{p}_j^n) \subset L'_i \cap V(j')$.

On calcule :

$$\text{(2)} \qquad L'_i \cap V(j') = \begin{cases} \mathfrak{p}_{j'}^{j'}, & \text{si } j' \leqslant i, \\ \mathfrak{p}_{j'}^{i}, & \text{si } -j' \leqslant i \leqslant j', \\ \mathfrak{p}_{j'}^{-j'}, & \text{si } i \leqslant -j'. \end{cases}$$

On en déduit les inclusions suivantes :

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \bullet \quad \text{pour } n \in \{-j, \ldots, j-2\}, \ Y(\mathfrak{p}_j^n) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n+2}; \\ \bullet \quad \text{si } j' > j, \ Y(\mathfrak{p}_j^{j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{j+1}; \\ \bullet \quad \text{si } j \geqslant a, \ Y(\mathfrak{p}_j^{j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{j'+2\ell(j')+1}. \end{cases}$$

Supposons $j \geqslant k' - k'' + 1$. Pour $n \in \{-j-2\ell(j), \ldots, -j-1\}$, on a $\mathfrak{p}_j^n \subset \mathfrak{p}_F^{-1} L'_{i-1}$, donc $Y(\mathfrak{p}_j^n) \subset L'_i \cap V(j')$. Grâce à (2), on vérifie les inclusions suivantes :

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \bullet \quad \text{pour } n \in \{-j-2\ell(j), \ldots, -j-2\}, \ Y(\mathfrak{p}_j^n) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n+2+j+\ell(j)-j'-\ell(j')}; \\ \bullet \quad \text{si } j' > j, \ Y(\mathfrak{p}_j^{-j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{1+\ell(j)-j'-\ell(j')}; \\ \bullet \quad \text{si } j \geqslant a, \ Y(\mathfrak{p}_j^{-j-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{-j'+1}. \end{cases}$$

On déduit de (3) et (4) et de VI.10 (3) les relations :

- $Y \in h^{\#}(j',j)_2$ ;
- si $j' > j$, $Y \in h(j',j)_2$ ;
- si $j \geqslant a$, $Y \in h(j',j)_2 \cap \theta(j',j)$.

Or on a les égalités :

$$s(a-1; j', j)_1 = \begin{cases} h^{\#}(j',j)_2, & \text{si } j = j' \leqslant a-1, \\ h(j',j)_2, & \text{si } j \leqslant a-1 \text{ et } j < j', \\ h(j',j)_2 \cap \theta(j',j), & \text{si } j \geqslant a. \end{cases}$$

Donc $Y \in s(a-1; j', j)_1$, ce qui démontre (1).

Pour tous $i, j, j'$, on a l'égalité

$$u'(j,j')_{1-i} = u'(j',j)_i^*.$$

D'autre part :

$$u'_i = \bigoplus_{j,j'=1}^{k'} u'(j',j)_i .$$

Grâce à ces égalités, à la stabilité de $s(a-1)_1$ par adjonction et à la relation (1), on a l'inclusion

$$u'_i \subset s(a-1)_1$$

pour tout $i \in \{-a+1,\dots,a\}$. D'où aussi $\mathfrak{p}_F\, s(a-1)_1^{\sim} \subset \mathfrak{p}_F \widetilde{u}'_i$. Mais

$$\mathfrak{p}_F \widetilde{u}'_i = \{Y \in g\,;\, Y(L'_i) \subset L'_{i-1}\}.$$

On en déduit la première assertion de l'énoncé.

La démonstration de la seconde assertion est analogue. Ecrivons seulement les égalités analogues à (2) qui nous seront utiles plus tard. On a, pour tout $i \in \{-\ell(a)+1,\dots,\ell(a)\}$ et tout $j \in \{1,\dots,k'\}$,

$$(5) \qquad L''_i \cap V(j) = \begin{cases} \mathfrak{p}_j^{-j}, & \text{si } \ell(j) \leqslant i, \\ \mathfrak{p}_j^{-j-\ell(j)+i}, & \text{si } -\ell(j) \leqslant i \leqslant \ell(j), \\ \mathfrak{p}_j^{-j-2\ell(j)}, & \text{si } i \leqslant -\ell(j). \end{cases}$$

□

**VI.17.** Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on définit un réseau $\Lambda_i$ de $V$ de la façon suivante :

- si $a \leqslant k'-k''$,

$$\Lambda_i = \begin{cases} L''_0, & \text{si } i=-a, \\ L'_i, & \text{si } -a+1 \leqslant i \leqslant a-1; \end{cases}$$

- si $a \geqslant k'-k''+1$,

$$\Lambda_i = \begin{cases} L''_{-k''}, & \text{si } i=-a-2\ell(a), \\ L''_{i+a+\ell(a)}, & \text{si } -a-2\ell(a)+1 \leqslant i \leqslant -a-1, \\ L''_{k''} = L'_{-k'}, & \text{si } i=-a, \\ L'_i, & \text{si } -a+1 \leqslant i \leqslant a-1; \end{cases}$$

- dans les deux cas, pour $i \in \mathbb{Z}$, on écrit $i = 2b(a+\ell(a))+c$ avec $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \{-a-2\ell(a),\dots,a-1\}$ et on pose $\Lambda_i = \mathfrak{p}_F^b \Lambda_c$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$k_n = \{Y \in g\ell\,;\, \forall\, i \in \mathbb{Z},\, Y(\Lambda_i) \subset \Lambda_{i+n}\}.$$

***Lemme***. — *On a l'inclusion*

$$\mathfrak{p}_F\, s(a-1)_1^{\sim} \subset k_{-1}.$$

*Démonstration.* — Cela résulte du lemme précédent. Par exemple, supposons $a \leqslant k' - k''$. Pour $Y \in \mathfrak{p}_F s(a-1)_1^\sim$, on a :

- $Y(\Lambda_a) = Y(\mathfrak{p}_F L_0'') \subset Y(L_a') \subset L_{a-1}' = \Lambda_{a-1}$,
- si $-a+2 \leqslant i \leqslant a-1$, $Y(\Lambda_i) = Y(L_i') \subset L_{i-1}' = \Lambda_{i-1}$,
- $Y(\Lambda_{-a+1}) = Y(L_{-a+1}') \subset L_{-a}' \subset L_0'' = \Lambda_{-a}$. □

**VI.18.** Pour $Z \in g$, posons

$$z(Z) = \begin{cases} \omega_F q_V(Z(v'(-a,a)), v'(-a,a)), & \text{si } a \leqslant k' - k'', \\ \omega_F q_V(Z(v''(-\ell(a),a)), v'(-a,a)), & \text{si } a \geqslant k' - k'' + 1. \end{cases}$$

***Lemme.*** — *Soit $Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1)_1^\sim \cap g$. Alors $z(Z) \in \mathfrak{o}_F$. On a $Z \in \mathfrak{p}_F s(a)_\infty^\sim \cap g$ si et seulement si $z(Z) \in \mathfrak{p}_F$.*

*Démonstration.* — L'égalité suivante résulte des définitions et du lemme VI.7 (iii) :

$$\mathfrak{p}_F s(a-1;a,a)_1^\sim = h(a,a)_{-1}.$$

En particulier, pour $Y \in \mathfrak{p}_F s(a-1;a,a)_1^\sim$, on a

$$Y(\mathfrak{p}_a^{-a}) \subset \mathfrak{p}_a^{-a-1},$$
$$Y(\mathfrak{p}_a^{-a-2\ell(a)}) \subset \mathfrak{p}_a^{-a-2\ell(a)-1}.$$

Il en résulte que, si $a \leqslant k' - k''$,

$$q_V(Y(v'(a,-a)), v'(-a,a)) \in \mathfrak{p}_F^{-1},$$

et, si $a \geqslant k' - k'' + 1$,

$$q_V(Y(v''(-\ell(a),a)), v'(-a,a)) \in \mathfrak{p}_F^{-1}.$$

La première assertion de l'énoncé s'en déduit.

Posons :

$$k^0(a) = \left\{ Y \in g\ell(a,a) ; Y(\mathfrak{p}_a^{-a}) \subset \mathfrak{p}_a^{-a}, Y(\mathfrak{p}_a^{-a-2\ell(a)}) \subset \mathfrak{p}_a^{-a-2\ell(a)} \right\}.$$

On a l'égalité :

$$\mathfrak{p}_F k^1(a)^\sim = k^0(a).$$

D'après les définitions et le lemme VI.11, on a les égalités :

$$\mathfrak{p}_F s(a;j',j)_\infty^\sim = \mathfrak{p}_F s(a-1;j',j)_1^\sim \text{ pour tous } j,j' \in \{1,\dots,k'\},\ (j',j) \neq (a,a),$$
$$\mathfrak{p}_F s(a;a,a)_\infty^\sim = h(a,a)_{-1} \cap k^0(a),$$
$$\mathfrak{p}_F s(a-1;a,a)_1^\sim = h(a,a)_{-1}.$$

Soit $Y \in h(a,a)_{-1}$. Cherchons à quelle condition on a l'inclusion $Y(\mathfrak{p}_a^{-a}) \subset \mathfrak{p}_a^{-a}$. Puisque l'on a déjà l'inclusion :

$$Y(\mathfrak{p}_a^{-a+1}) \subset \mathfrak{p}_a^{-a},$$

et grâce à l'égalité

$$\mathfrak{p}_a^{-a} = \mathfrak{o}_F v'(-a,a) + \mathfrak{p}_a^{-a+1},$$

la condition est :

$$Y(v'(-a,a)) \in \mathfrak{p}_a^{-a}.$$

Ou encore, d'après VI.7 (2) :

- pour tout $v \in \mathfrak{p}_a^{-a-2\ell(a)}$, $q_V(Y(v'(-a,a)),v) \in \mathfrak{o}_F$.

Cette condition est réalisée pour $v \in \mathfrak{p}_a^{-a-2\ell(a)+1}$ puisque $Y(v'(-a,a)) \in \mathfrak{p}_a^{-a-1}$. Puisque :

$$\mathfrak{p}_a^{-a-2\ell(a)} = \begin{cases} \mathfrak{o}_F v'(-a,a) + \mathfrak{p}_a^{-a-2\ell(a)+1}, & \text{si } a \leqslant k'-k'', \\ \mathfrak{o}_F v''(-\ell(a),a) + \mathfrak{p}(a)^{-a-2\ell(a)+1}, & \text{si } a \geqslant k'-k''+1, \end{cases}$$

notre condition est équivalente à :

$$(1) \qquad q_V(Y(v'(-a,a)),v'(-a,a)) \in \mathfrak{o}_F, \ \text{si } a \leqslant k'-k'';$$

$$(2) \qquad q_V(Y(v'(-a,a)),v''(-\ell(a),a)) \in \mathfrak{o}_F, \ \text{si } a \geqslant k'-k''+1.$$

On montre de même que la condition pour que $Y(\mathfrak{p}_a^{-a-2\ell(a)}) \subset \mathfrak{p}_a^{-a-2\ell(a)}$ est (1) si $a \leqslant k'-k''$,

$$(3) \qquad q_V(Y(v''(-\ell(a),a)),v'(-a,a)) \in \mathfrak{o}_F, \ \text{si } a \geqslant k'-k''+1.$$

Si $Y \in g$, les conditions (2) et (3) sont équivalentes. Donc pour $Y \in \mathfrak{p}_F s(a-1;a,a)_1^\sim \cap g$, on a $Y \in \mathfrak{p}_F s(a;a,a)_\infty^\sim \cap g$ si et seulement si (1), resp. (3), est vérifiée si $a \leqslant k'-k''$, resp. $a \geqslant k'-k''+1$. On en déduit la seconde assertion de l'énoncé. □

**VI.19.** Posons

$$W = \left(\bigoplus_{i=-a}^{a-1} V'[i]\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=-\ell(a)}^{\ell(a)-1} V''[i]\right),$$

$$L = \left(\bigoplus_{i=-a}^{a-1} L'[i]\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=-\ell(a)}^{\ell(a)-1} L''[i]\right).$$

On munit $W$ de la forme symplectique $q_W$, restriction de $q_V$ à $W$. On pose

$$\ell' = L/\mathfrak{p}_F\widetilde{L}, \ \ \ell'' = \widetilde{L}/L,$$

que l'on munit de formes réduites $q_{\ell'}$ et $q_{\ell''}$, *cf.* I.3. Si $i \in \{-a,\dots,a-1\}$, resp. $i \in \{-\ell(a),\dots,\ell(a)-1\}$, on note $\ell'[i]$, resp. $\ell''[i]$, les images naturelles de $L'[i]$, resp. $L''[i]$, dans $\ell'$, resp. $\ell''$. Si $i \in \{-a,\dots,a-1\}$ et $j \in \{1,\dots,k'\}$ sont tels que $-j \leqslant i \leqslant j-1$, on note $\overline{v}'(i,j)$ l'image naturelle de $v'(i,j)$ dans $\ell'$. *Idem*, si $i \in \{-\ell(a),\dots,\ell(a)-1\}$ et $j \in \{1,\dots,k'\}$ sont tels que $-\ell(j) \leqslant i \leqslant \ell(j)-1$, on définit $\overline{v}''(i,j) \in \ell''$. Ces vecteurs forment des bases de $\ell'$, resp. $\ell''$. Remarquons que $\ell'' = \{0\}$ si $a \leqslant k'-k''$.

Soit $Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1)_1^\sim \cap g$. En appliquant le lemme VI.16, on voit que pour tout $i \in \{-a+1,\dots,a-1\}$, $Z$ définit un élément de

$$\mathrm{Hom}(L'_i/L'_{i+1}, L'_{i-1}/L'_i)$$

que l'on note $Z'_i$. L'espace précédent s'identifie à

$$\mathrm{Hom}(\ell'[i], \ell'[i-1])$$

et on identifiera $Z'_i$ à un élément de cet espace. *Idem*, pour $i \in \{-\ell(a)+1, \dots, \ell(a)-1\}$, on définit $Z''_i \in \mathrm{Hom}(\ell''[i], \ell''[i-1])$. Remarquons que l'on peut considérer ces termes $Z'_i$, resp. $Z''_i$, comme des éléments de $g\ell(\ell')$, resp. $g\ell(\ell'')$. On pose

$$Z' = \sum_{i=-a+1}^{a-1} Z'_i, \quad Z'' = \sum_{i=-\ell(a)+1}^{\ell(a)-1} Z''_i.$$

Il est clair que $Z' \in g(\ell')$, $Z'' \in g(\ell'')$.

***Lemme***. — *Soit $Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1)^{\sim}_1 \cap g_{\mathrm{ent}}$. Alors l'une des conditions suivantes est réalisée :*

(a) $z(Z) \in \mathfrak{p}_F$ ;

(b) $q_{\ell'}(Z'^{2a-1}(\overline{v}'(a-1,a)), \overline{v}'(a-1,a)) = 0$ ;

(c) $a \geqslant k' - k'' + 1$ *et* $q_{\ell''}(Z''^{2\ell(a)-1}(\overline{v}''(\ell(a)-1,a)), \overline{v}''(\ell(a)-1,a)) = 0$.

*Démonstration*. — D'après le lemme VI.17, on a $Z \in k_{-1}$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $Z$ définit un élément de $\mathrm{Hom}(\Lambda_i/\Lambda_{i+1}, \Lambda_{i-1}/\Lambda_i)$ que l'on note $Z_i$. Pour $j, j' \in \{1, \dots, k'\}$, notons $Z(j', j)$ la composante de $Z$ dans $g\ell(j', j)$. On a encore $Z(j', j) \in k_{-1}$ et l'on définit $Z(j', j)_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Puisque $Z \in k_{-1}$, on a $Z^{2a+2\ell(a)} \in k_{-2a-2\ell(a)}$ et $\omega_F Z^{2a+2\ell(a)} \in k_0$. En particulier ce dernier élément définit un endomorphisme de $\Lambda_{-a-2\ell(a)}/\Lambda_{-a-2\ell(a)+1}$ que nous noterons $N$. Notons

$$\pi \in \mathrm{Hom}(\Lambda_{-a-2\ell(a)}/\Lambda_{-a-2\ell(a)+1}, \Lambda_a/\Lambda_{a+1})$$

l'élément que définit la multiplication par $\omega_F$. On a l'égalité :

$$N = Z_{-a-2\ell(a)+1}, \dots, Z_{a-1} Z_a \pi.$$

Supposons $a \leqslant k' - k''$. Notons

$$\rho : \ell'(-a) = L'_{-a}/L'_{-a+1} \longrightarrow L''_0/L'_{-a+1} = \Lambda_{-a}/\Lambda_{-a+1}$$

l'injection naturelle et

$$\rho^* : \Lambda_{a-1}/\Lambda_a = L'_{a-1}/\mathfrak{p}_F L''_0 \longrightarrow L'_{a-1}/L'_a = \ell'(a-1)$$

la projection naturelle. Grâce au lemme VI.16, on a les égalités :

- si $a = 1$, $Z_0 = \rho Z'_0 \rho^*$ ;
- si $a \geqslant 2$,

$$Z_i = \begin{cases} Z'_{a-1}\rho^*, & \text{si } i = a-1, \\ Z'_i, & \text{si } -a+2 \leqslant i \leqslant a-2, \\ \rho Z'_{-a+1}, & \text{si } i = -a+1. \end{cases}$$

D'où l'égalité :

$$N = \rho Z'_{-a+1}, \dots, Z'_{a-1} \rho^* Z_a \pi .$$

Posons

$$Y = \rho^* Z_a \pi \rho ,$$

$$\widetilde{N} = Z'_{-a+1}, \dots, Z'_{a-1} Y .$$

On a $\widetilde{N} \in \mathrm{End}(\ell'(-a))$ et l'égalité

(1) $$\rho \widetilde{N} = N \rho .$$

Nous allons calculer la trace de $\widetilde{N}$. Pour $j, j' \in \{1, \dots, k'\}$, posons

$$Y(j', j) = \rho^* Z(j', j)_a \pi \rho .$$

On a l'égalité

$$Y = \sum_{j,j'=1}^{k'} Y(j', j) .$$

Montrons que :

(2) pour tous $j, j' \in \{1, \dots, k'\}$ avec $(j', j) \neq (a, a)$, on a $Y(j', j) = 0$.

Soient $j, j' \in \{1, \dots, k'\}$. Dire que $Y(j', j) = 0$ équivaut à dire que

$$Z(j', j)(\mathfrak{p}_F L'_{-a}) \subset L'_a .$$

Posons

$$u'(j', j) = \Big\{ X \in g\ell(j', j) ; X(L'_a) \subset \mathfrak{p}_F^2 L'_{-a} \Big\} .$$

Un raisonnement analogue à celui de la preuve du lemme VI.16 montre que (2) résulte de l'assertion suivante :

(3) si $j' \geqslant j$ et $(j', j) \neq (a, a)$, on a l'inclusion :
$$u'(j', j) \subset s(a-1; j', j)_1 .$$

Utilisons les notations de la preuve du lemme VI.16. Si $j < a$, $L'_a \cap V(j) = L'_{a-1} \cap V(j)$ donc $u'(j', j) \subset u'(j', j)_a$ et (3) résulte de VI.16 (1). Si $j \geqslant a$, on a nécessairement $a < k'$ et $u'(j', j) \subset u'(j', j)_{a+1}$. D'après VI.16 (1) appliqué à l'entier $a+1$,

$$u'(j', j) \subset s(a; j', j)_1 .$$

Si $j > a$, on a $s(a; j', j)_1 = s(a-1; j', j)_1$, d'où (3). Reste le cas $j = a < j'$. D'après l'inclusion ci-dessus, on a déjà :

$$u'(j', a) \subset h(j', a)_2 .$$

Soit $X \in u'(j', a)$. On a $\mathfrak{p}_a^{a-1} \subset \mathfrak{p}_F^{-1} L'_a$, donc $X(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset \mathfrak{p}_F L'_{-a} \cap V(j')$. Grâce à VI.16 (2), on obtient :

$$X(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset \mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{j'}^{-a} = \mathfrak{p}_{j'}^{2j'+2\ell(j')-a} \subset \mathfrak{p}_{j'}^{j'+2\ell(j')+1} .$$

Grâce à VI.10 (3), on en déduit

$$X \in h(j',a)_2 \cap \theta(j',a) = s(a-1;j',a)_1 .$$

Cela démontre (3) et (2).

D'après (2), on a l'égalité $Y = Y(a,a)$. On calcule aisément la matrice de $Y(a,a)$. En effet, pour tout $j \in \{a,\dots,k'\}$, on a l'égalité

$$Y(a,a)(\overline{v}'(-a,j)) = \sum_{j'=a}^{k'} \overline{q_W(\omega_F Z(a,a)(v'(-a,j)), v'(-a,j'))}\,\overline{v}'(a-1,j'),$$

où l'on note $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$ l'application de réduction de $\mathfrak{o}_F$ dans $\mathbb{F}_q$. On en déduit :

$$Y(a,a)(\overline{v}'(-a,j)) = \begin{cases} 0, & \text{si } a+1 \leqslant j \leqslant k', \\ \overline{z(Z)}\,\overline{v}'(a-1,a), & \text{si } j = a. \end{cases}$$

On calcule alors

$$\operatorname{trace}(\widetilde{N}) = -\overline{z(Z)}\,q_{\ell'}(Z'_{-a+1},\dots,Z'_{a-1}(\overline{v}'(a-1,a)), \overline{v}'(a-1,a)).$$

Mais

$$Z'_{-a+1},\dots,Z'_{a-1}(\overline{v}'(a-1,a)) = Z'^{2a-1}(\overline{v}'(a-1,a)),$$

d'où

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{trace}(\widetilde{N}) = \overline{-z(Z)}\,q_{\ell'}(Z'^{2a-1}(\overline{v}'(a-1,a)), \overline{v}'(a-1,a)).$$

Supposons maintenant $a \geqslant k' - k'' + 1$. Notons

$$\rho' : \ell'(-a) = L'_{-a}/L'_{-a+1} \longrightarrow L'_{-k'}/L'_{-a+1} = \Lambda_{-a}/\Lambda_{-a+1},$$

$$\rho'' : \ell''(-\ell(a)) = L''_{-\ell(a)}/L''_{-\ell(a)+1} \longrightarrow L''_{-k''}/L''_{-\ell(a)+1} = \Lambda_{-a-2\ell(a)}/\Lambda_{-a-2\ell(a)+1},$$

les injections naturelles et

$$\rho'^* : \Lambda_{a-1}/\Lambda_a = L'_{a-1}/L'_{k'} \longrightarrow L'_{a-1}/L'_a = \ell'(a-1),$$

$$\rho''^* : \Lambda_{-a-1}/\Lambda_{-a} = L''_{\ell(a)-1}/L''_{k''} \longrightarrow L''_{\ell(a)-1}/L''_{\ell(a)} = \ell''(\ell(a)-1)$$

les projections naturelles. Grâce au lemme VI.16, on a les égalités :

- si $a = 1$, $Z_0 = \rho' Z'_0 \rho'^*$ ;
- si $a \geqslant 2$,

$$Z_i = \begin{cases} Z'_{a-1}\rho'^*, & \text{si } i = a-1, \\ Z'_i, & \text{si } -a+2 \leqslant i \leqslant a-2, \\ \rho' Z'_{-a+1}, & \text{si } i = -a+1; \end{cases}$$

- si $\ell(a) = 1$, $Z_{-a-1} = \rho'' Z''_0 \rho''^*$ ;
- si $\ell(a) \geqslant 2$,

$$Z_i = \begin{cases} Z''_{\ell(a)-1}\rho''^*, & \text{si } i = -a-1, \\ Z''_{i+a+\ell(a)}, & \text{si } -a-2\ell(a)+2 \leqslant i \leqslant -a-2, \\ \rho'' Z''_{-\ell(a)+1}, & \text{si } i = -a-2\ell(a)+1. \end{cases}$$

D'où l'égalité :

$$N = \rho'' Z''_{-\ell(a)+1}, \dots, Z''_{\ell(a)-1} \rho''^{*} Z_{-a} \rho' Z'_{-a+1}, \dots, Z'_{a-1} \rho'^{*} Z_a \pi .$$

Posons

$$Y' = \rho'^{*} Z_a \pi \rho'', \quad Y'' = \rho''^{*} Z_{-a} \rho',$$

$$\widetilde{N} = Z''_{-\ell(a)+1}, \dots, Z''_{\ell(a)-1} Y'' Z'_{-a+1}, \dots, Z'_{a-1} Y' .$$

On a $\widetilde{N} \in \mathrm{End}(\ell''(-\ell(a)))$ et l'égalité

(5) $$\rho'' \widetilde{N} = N \rho'' .$$

Calculons la trace de $\widetilde{N}$. Pour $j, j' \in 1\{1, \dots, k'\}$, posons

$$Y'(j', j) = \rho'^{*} Z(j', j)_a \pi \rho'' .$$

Montrons que

(6) pour tous $j, j' \in \{1, \dots, k'\}$ avec $(j', j) \neq (a, a)$, on a $Y'(j', j) = 0$.

Soient $j, j' \in \{1, \dots, k'\}$. Posons

$$u'(j', j) = \left\{ X \in g\ell(j', j) ; X(L'_a) \subset \mathfrak{p}_F^2 L''_{-\ell(a)} \right\} .$$

Il suffit encore de prouver :

(7) si $j' \geqslant j$ et $(j', j) \neq (a, a)$, on a l'inclusion
$$u'(j', j) \subset s(a-1; j', j)_1 .$$

Le cas $j \neq a$ se traite comme pour (3). Supposons $j = a < j'$. On a de même l'inclusion

$$u'(j', a) \subset h(j', a)_2 .$$

Soit $X \in u'(j', a)$. On a $\mathfrak{p}_a^{a-1} \subset \mathfrak{p}_F^{-1} L'_a$, donc $X(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset \mathfrak{p}_F L''_{-\ell(a)} \cap V(j')$. Grâce à VI.16 (5), on obtient

$$X(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset \mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{j'}^{-j'-\ell(j')-\ell(a)} \subset \mathfrak{p}_{j'}^{j'+1} .$$

De même, $\mathfrak{p}_a^{-a-1} \subset \mathfrak{p}_F^{-1} L'_a$, d'où

$$X(\mathfrak{p}_a^{a-1}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{j'+1} \subset \mathfrak{p}_{j'}^{-j'+1} .$$

Alors

$$X \in h(j', a)_2 \cap \theta(j', a) = s(a-1; j', j)_1 .$$

Cela démontre (7) et (6).

On a donc $Y' = Y'(a, a)$ dont on calcule la matrice comme précédemment :

$$Y'(a, a)(\overline{v}''(-\ell(a), j)) = \begin{cases} 0, & \text{si } a+1 \leqslant j \leqslant k', \\ \overline{z(Z)} \overline{v}'(a-1, a), & \text{si } j = a. \end{cases}$$

Pour $j, j' \in \{a, \dots, k'\}$, on a les égalités :

$$\begin{aligned} q_{\ell''}(Y''(\overline{v}'(-a,j)), \overline{v}''(-\ell(a),j')) &= \overline{\omega_F\, q_W(Z(v'(-a,j)), v''(-\ell(a),j'))} \\ &= \overline{q_W(\omega_F\, Z(v''(-\ell(a),j')), v'(-a,j))} \\ &= q_{\ell'}(Y'(\overline{v}''(-\ell(a),j')), \overline{v}'(-a,j)). \end{aligned}$$

On en déduit la matrice de $Y''$ :

$$Y''(\overline{v}'(-a,j)) = \begin{cases} 0, & \text{si } a+1 \leqslant j \leqslant k', \\ \overline{z(Z)}\,\overline{v}''(\ell(a)-1,a), & \text{si } j = a. \end{cases}$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{trace}(\widetilde{N}) = \overline{z(Z)}^2\, & q_{\ell'}(Z'_{-a+1}, \dots, Z'_{a-1}(\overline{v}'(a-1,a)), \overline{v}'(a-1,a)) \\ & q_{\ell''}(Z''_{-\ell(a)+1}, \dots, Z''_{\ell(a)-1}(\overline{v}''(\ell(a)-1,a)), \overline{v}''(\ell(a)-1,a)), \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} (8) \qquad \operatorname{trace} \widetilde{N} = \overline{z(Z)}^2\, & q_{\ell'}(Z'^{2a-1}(\overline{v}'(a-1,a)), \overline{v}'(a-1,a)) \\ & q_{\ell''}(Z''^{2\ell(a)-1}(\overline{v}''(\ell(a)-1,a), \overline{v}''(\ell(a)-1,a)). \end{aligned}$$

Revenons au cas $a$ quelconque. On définit $g\ell_{\text{ent}}$ et $g\ell_{\text{nil}}$ comme on a défini $g_{\text{ent}}$ et $g_{\text{nil}}$. Puisque $Z \in g_{\text{ent}}$, on a $Z^{2a+2\ell(a)} \in g\ell_{\text{ent}}$ donc $\omega_F\, Z^{2a+2\ell(a)} \in g\ell_{\text{nil}}$ et $N$ est nilpotent. D'après (1) ou (5), $\widetilde{N}$ est lui aussi nilpotent. Donc $\operatorname{trace}(\widetilde{N}) = 0$. D'après (4) ou (8), l'une des conditions de l'énoncé est vérifiée. □

**VI.20.** Notons $W^\perp$ l'orthogonal de $W$ dans $V$. Pour tout $Y \in g$, il existe un unique élément noté $Y_W \in g(W)$ tel que pour tout $w \in W$,

$$Y(w) \in Y_W(w) + W^\perp.$$

Pour tout $Y \in k(L)$, on note $(Y', Y'')$ son image naturelle dans $g(\ell') \times g(\ell'')$.

Le groupe $M(a)$ est naturellement un sous-groupe de $G(W)$ et même de $K(L)$. On note $M' \times M''$ son image naturelle dans $G(\ell') \times G(\ell'')$, et, pour $x \in M(a)$, on note $(x', x'')$ son image naturelle dans $M' \times M''$. Par définition de $M(a)$, pour $x' \in M'$, il existe un élément de $\mathbb{F}_q^\times$, que l'on note $z(x')$, tel que

$$x'(\overline{v}'(a-1,a)) = z(x')\overline{v}'(a-1,a).$$

De même, si $a \geqslant k' - k'' + 1$, pour $x'' \in M''$, il existe un élément de $\mathbb{F}_q^\times$, que l'on note $z(x'')$, tel que

$$x''(\overline{v}''(\ell(a)-1,a)) = z(x'')\overline{v}''(\ell(a)-1,a).$$

Pour $(\gamma, e) \in \Gamma \times \mathcal{E}$, et $j \in \{1, \dots, k'\}$, il résulte de VI.2 (1) et (2) que $X(\gamma, e, j)_W \in k(L)$. On pose simplement

$$X'(\gamma, e, j) = (X(\gamma, e, j)_W)', \quad X''(\gamma, e, j) = (X(\gamma, e, j)_W)''.$$

On définit de même $X'(\gamma, e)$ et $X''(\gamma, e)$.

Rappelons que l'on note encore $\psi$ le caractère de $\mathbb{F}_q$ que définit naturellement notre caractère $\psi$ de $F$. On définit une fonction

$$\varphi : (\mathfrak{p}_F s(a-1)_1^{\sim} \cap g) \times M' \times M'' \times \Gamma \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C}$$

par

$$\varphi(Z, x', x'', \gamma, e) = \begin{cases} \psi\Big[(-1)^{a+1} \overline{\gamma}_a \overline{e}_a^{-1} z(x')^2 \overline{z(Z)} + q_{g(\ell')}(Z', x'^{-1} X'(\gamma, e) x')\Big], \\ \hfill \text{si } a \leqslant k' - k'', \\ \psi\Big[(-1)^{a+1} 2\overline{\gamma}_a \overline{e}_a^{-1} z(x') z(x'') \overline{z(Z)} + q_{g'(\ell')}(Z', x'^{-1} X'(\gamma, e) x') \\ \qquad + q_{g(\ell'')}(Z'', x''^{-1} X''(\gamma, e) x'')\Big], \ \text{si } a \geqslant k' - k'' + 1, \end{cases}$$

pour tous $Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1)_1^{\sim} \cap g$, $x' \in M'$, $x'' \in M''$, $\gamma \in \Gamma$, $e \in \mathcal{E}$.

Posons

$$\Gamma_{>a} = \prod_{j=a+1}^{k'} \Gamma_j, \quad \mathcal{E}_{>a} = \prod_{j=a+1}^{k'} (\mathfrak{o}_F^{\times}/\mathfrak{o}_F^{\times 2}).$$

Pour $\gamma \in \Gamma$, on pose $\gamma_{>a} = (\gamma_j)_{j=a+1,\dots,k'}$. On a $\gamma_{>a} \in \Gamma_{>a}$. *Idem*, pour $e \in \mathcal{E}$, on définit $e_{>a} \in \mathcal{E}_{>a}$.

***Lemme***. — *Il existe une fonction*

$$C : (\mathfrak{p}_F s(a-1)_1^{\sim} \cap g) \times \Gamma_{>a} \times \mathcal{E}_{>a} \longrightarrow \mathbb{C}$$

*telle que la propriété suivante soit vérifiée. Soient $Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1)_1^{\sim} \cap g$, $x \in M(a)$, $\gamma \in \Gamma$, $e \in \mathcal{E}$ et $X \in A(\gamma, e)$. Alors on a l'égalité :*

$$\psi \circ q_g(Z, x^{-1} X x) = \varphi(Z, x', x'', \gamma, e) C(Z, \gamma_{>a}, e_{>a}).$$

*Démonstration*. — Soit $j \in \{1, \dots, k'\}$. Pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $e \in \mathcal{E}$, on a défini $X(\gamma, e, j) \in g$. Il est clair que sa définition ne dépend que de $\gamma_j$ et $e_j$. Si $j \geqslant a+1$, on peut donc définir un terme $X(\widetilde{\gamma}, \widetilde{e}, j)$ pour tous $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_{>a}$, $\widetilde{e} \in \mathcal{E}_{>a}$. Définissons $C$ par

$$C(Z, \widetilde{\gamma}, \widetilde{e}) = \prod_{j=a+i}^{k'} \psi \circ q_g(Z, X(\widetilde{\gamma}, \widetilde{e}, j) - X(\widetilde{\gamma}, \widetilde{e}, j)_W)$$

pour tous $Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1)_1^{\sim} \cap g$, $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_{>a}$, $\widetilde{e} \in \mathcal{E}_{>a}$. Nous allons prouver que cette fonction convient.

Fixons $\gamma \in \Gamma$ et $e \in \mathcal{E}$. Posons $X = X(\gamma, e)$ et pour tout $j \in \{1, \dots, k'\}$,

$$X_j = X(\gamma, e, j), \quad X'_j = X'(\gamma, e, j), \quad X''_j = X''(\gamma, e, j).$$

Soit $Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1)_1^{\sim} \cap g$. Prouvons les égalités suivantes :

(1) pour tout $j \in \{1, \dots, a-1\}$,

$$\psi \circ q_g(Z, X_j) = \begin{cases} \psi \circ q_{g(\ell')}(Z', X'_j), & \text{si } j \leqslant k' - k'', \\ \psi\Big[q_{g(\ell')}(Z', X'_j) + q_{g(\ell'')}(Z'', X''_j)\Big], & \text{si } j \geqslant k' - k'' + 1; \end{cases}$$

$$(2)\quad \psi\circ q_g(Z,X_a)=\begin{cases}\psi\Big[(-1)^{a+1}\overline{\gamma}_a\overline{e}_a^{-1}\overline{z(Z)}+q_{g(\ell')}(Z',X'_a)\Big], & \text{si } a\leqslant k'-k'',\\ \psi\Big[(-1)^{a+1}2\overline{\gamma}_a\overline{e}_a^{-1}\overline{z(Z)}+q_{g(\ell')}(Z',X'_a)+q_{g(\ell'')}(Z'',X''_a)\Big], & \\ & \text{si } a\geqslant k'-k''+1.\end{cases}$$

(3) pour tout $j\in\{a+1,\dots,k'\}$,

$$\psi\circ q_g(Z,X_{j,W})=\begin{cases}\psi\circ q_{g(\ell')}(Z',X'_j), & \text{si } j\leqslant k'-k'',\\ \psi\Big[q_{g(\ell')}(Z',X'_j)+q_{g(\ell'')}(Z'',X''_j)\Big], & \text{si } j\geqslant k'-k''+1.\end{cases}$$

Soit $j\in\{1,\dots,a\}$, supposons $j\leqslant k'-k''$. Posons $\alpha=e_j$, $\delta=(-1)^{j+1}\gamma_j e_j^{-1}$. Grâce à VI.2 (1), on a :

$$\begin{aligned}q_g(Z,X_j)&=\alpha\, q_V(v'(0,j),\,Z(v'(0,j))+\omega_F\,\delta\, q_V(Z(v'(-j,j)),v'(-j,j))\\&\quad+2\sum_{i=2}^{j}q_V(v'(i-1,j),\,Z(v'(1-i,j))).\end{aligned}$$

De même

$$q_{g(\ell')}(Z',X'_j)=\overline{\alpha}\, q_{\ell'}(\overline{v}'(0,j),\,Z'(\overline{v}'(0,j)))+2\sum_{i=2}^{j}q_{\ell'}(\overline{v}'(i-1,j),\,Z'(\overline{v}'(1-i,j))).$$

Pour tout $i\in\{1,\dots,j\}$, $q_V(v'(i-1,j),\,Z(v'(1-i,j)))$ appartient à $\mathfrak{o}_F$ et sa réduction dans $\mathbb{F}_q$ est $q_{\ell'}(\overline{v}(i-1,j),\,Z'(\overline{v}'(1-i,j)))$. D'où l'égalité :

$$(4)\qquad \psi\circ q_g(Z,X_j)=\psi\circ q_{g(\ell')}(Z',X'_j)\,\psi(\omega_F\,\delta\, q_V(Z(v'(-j,j)),v'(-j,j))).$$

Si $j<a$, puisque $v'(-j,j)\in L'_{-j}$, le lemme VI.16 implique $Z(v'(-j,j))\in L'_{-j-1}$. On a $v'(-j,j)\in L'_{-j}\subset\mathfrak{p}_F^{-1}L'_{j+1}=\widetilde{L}'_{-j-1}$, donc $q_V(Z(v'(-j,j)),v'(-j,j))\in\mathfrak{o}_F$ et

$$\psi(\omega_F\,\delta\, q_V(Z(v'(-j,j)),v'(-j,j)))=1.$$

La première égalité de (1) résulte de (4). Si $j=a$, on a par définition

$$\omega_F\, q_V(Z(v'(-a,a)),v'(-a,a))=z(Z)$$

et la première égalité de (2) résulte de (4) et du lemme VI.18.

Soit $j\in\{a+1,\dots,k'\}$, supposons encore $j\leqslant k'-k''$. Grâce à VI.2 (1) et à la définition de $W$, on a

$$q_g(Z,X_{j,W})=\alpha\, q_V(v'(0,j),\,Z(v'(0,j)))+2\sum_{i=2}^{a}q_V(v'(i-1,j),Z(v'(1-i,j)))$$

et de même

$$q_{g(\ell')}(Z',X'_j)=\overline{\alpha}\, q_{\ell'}(\overline{v}'(0,j),Z'(v'(0,j)))+2\sum_{i=2}^{a}q_{\ell'}(\overline{v}'(i-1,j),Z'(\overline{v}'(1-i,j))).$$

La première égalité de (3) en résulte comme précédemment.

Une démonstration analogue s'applique pour $j \geqslant k' - k'' + 1$, en utilisant cette fois VI.2 (2). Cela démontre (1), (2) et (3).

On a l'égalité :

(5) $$\psi \circ q_g(Z, X) = \varphi(Z, 1, 1, \gamma, e) C(Z, \gamma_{>a}, e_{>a}).$$

En effet

$$q_g(Z, X) = \sum_{j=1}^{k'} q_g(Z, X_j) = \Big(\sum_{j=1}^{a} q_g(Z, X_j)\Big) + \Big(\sum_{j=a+1}^{k'} q_g(Z, X_{j,W})\Big) + \Big(\sum_{j=a+1}^{k'} q_g(Z, X_j - X_{j,W})\Big).$$

Appliquons $\psi$ aux deux membres. Grâce à (1), (2) et (3), la contribution des deux premières sommes du membre de droite est $\varphi(Z, 1, 1, \gamma, e)$. Remarquons que pour $j \geqslant a + 1$,

$$X_j - X_{j,W} = X(\gamma_{>a}, e_{>a}, j) - X(\gamma_{>a}, e_{>a}, j)_W.$$

Alors la contribution de la troisième somme est $C(Z, \gamma_{>a}, e_{>a})$.

Prouvons maintenant :

(6) pour tout $j \in \{a + 1, \ldots, k'\}$ et tout $x \in M(a)$, on a la relation
$$x^{-1}(X_j - X_{j,W})x - X_j + X_{j,W} \in s(a - 1)_1.$$

Posons

$$m^{\mathrm{red}}(a) = \bigoplus_{j,j'=1}^{a} m(a; j'j), \quad m^u(a) = \bigoplus_{\substack{j,j'=1 \\ \sup(j,j')>a}}^{k'} m(a; j'j),$$

$$M^{\mathrm{red}}(a) = \{x \in G; x - 1 \in m^{\mathrm{red}}(a)\}, \quad M^u(a) = \{x \in G; x - 1 \in m^u(a)\}.$$

Les ensembles $M^{\mathrm{red}}(a)$ et $M^u(a)$ sont des sous-groupes de $M(a)$, $M^u(a)$ est distingué dans $M(a)$ et on a la décomposition en produit semi-direct

$$M(a) = M^{\mathrm{red}}(a) \times M^u(a).$$

Le groupe $M(a)$ normalise $s(a-1)_1$ (corollaire VI.15). Il suffit donc de démontrer (6) pour $x \in M^{\mathrm{red}}(a)$ et pour $x \in M^u(a)$.

Soient $j \in \{a + 1, \ldots, k'\}$ et $x \in M^{\mathrm{red}}(a)$. Puisque $X_j \in g\ell(j, j)$ et $j > a$, on a $x^{-1} X_j x = X_j$. Pour tout $y \in M(a)$ et tout $Y \in g$, on a l'égalité :

$$y^{-1} Y_W y = (y^{-1} Y y)_W.$$

D'où l'égalité $x^{-1} X_{j,W} x = X_{j,W}$ et (6) s'ensuit.

Soit toujours $j \in \{a+1, \ldots, k'\}$. Prouvons (6) pour $x \in M^u(a)$. Puisque $M^u(a) = E^G(m^u(a) \cap g)$, il suffit de prouver que pour tout couple d'entiers $n, n'$ tels que $0 \leqslant n \leqslant n'$ et $1 \leqslant n'$ et pour tous $Y_1, \ldots, Y_{n'} \in m^u(a)$, on a la relation :

$$Y_1 \cdots Y_n (X_j - X_{j,W}) Y_{n+1} \cdots Y_{n'} \in s(a - 1)_1.$$

Mais $s(a-1)_1$ est stable par multiplication à droite ou à gauche par $m(a)$ (la preuve est identique à celle du corollaire VI.15). Il suffit donc de traiter les cas $(n,n')=(0,1)$ et $(n,n')=(1,1)$. Ces deux cas sont équivalents par adjonction. Il suffit donc de prouver :

(7) $$\text{pour tout } Y\in m^u(a), \text{ on a la relation} \quad (X_j-X_{j,W})Y\in s(a-1)_1.$$

On peut fixer $j'\in\{1,\dots,a\}$ et supposer $Y\in m(a;j,j')$.

Soit $n\in\{-j',\dots,-1\}$. On a $Y(\mathfrak{p}_{j'}^n)\subset\mathfrak{p}_j^n$. Puisque $n\geqslant -j'\geqslant -a$, on a $\mathfrak{p}_j^n\subset\mathfrak{p}_j^n\cap W+\mathfrak{p}_j^a$, donc

$$Y(\mathfrak{p}_{j'}^n)\subset\mathfrak{p}_j^n\cap W+\mathfrak{p}_j^a.$$

On a $X_j\in h(j,j)_1$. La matrice de $X_{j,W}$ est une matrice extraite de celle de $X_j$, laquelle est décrite en VI.2 (1) et (2). Il en résulte que $X_{j,W}\in h(j,j)_1$. On a donc

$$(X_j-X_{j,W})(\mathfrak{p}_j^a)\subset\mathfrak{p}_j^{a+1}.$$

Pour $w\in W$, $(X_j-X_{j,W})(w)$ est la composante de $X_j(w)$ dans $W^\perp$. Si $w\in\mathfrak{p}_j^n$, on a $X_j(w)\in\mathfrak{p}_j^{n+1}$, cette composante est dans $\mathfrak{p}_j^{n+1}\cap W^\perp$ qui est inclus dans $\mathfrak{p}_j^a$. D'où

$$(X_j-X_{j,W})(\mathfrak{p}_j^n\cap W)\subset\mathfrak{p}_j^a.$$

On obtient :

(8) $$\text{pour tout } n\in\{-j',\dots,-1\},\quad (X_j-X_{j,W})Y(\mathfrak{p}_j^n)\subset\mathfrak{p}_j^a\subset\mathfrak{p}_j^{n+2}.$$

Soit $n\in\{-j'-2\ell(j'),\dots,-j'-\ell(j')-1\}$. Cela implique $j'\geqslant k'-k''+1$. On a de même :

$$Y(\mathfrak{p}_{j'}^n)\subset\mathfrak{p}_j^{n+j'+\ell(j')-j-\ell(j)}\subset\mathfrak{p}_j^{n+j'+\ell(j')-j-\ell(j)}\cap W+\mathfrak{p}_j^{-j-\ell(j)+\ell(a)},$$

$$(X_j-X_{j,W})(\mathfrak{p}_j^{-j-\ell(j)+\ell(a)})\subset\mathfrak{p}_j^{-j-\ell(j)+\ell(a)+1},$$

$$(X_j-X_{j,W})(\mathfrak{p}_j^{n+j'+\ell(j')-j-\ell(j)}\cap W)\subset\mathfrak{p}_j^{n+j'+\ell(j')-j-\ell(j)+1}\cap W^\perp\subset\mathfrak{p}_j^{-j-\ell(j)+\ell(a)}.$$

On obtient :

(9) $$\text{pour tout } n\in\{-j'-2\ell(j'),\dots,-j'-\ell(j')-1\},$$
$$(X_j-X_{j,W})Y(\mathfrak{p}_{j'}^n)\subset\mathfrak{p}_j^{-j-\ell(j)+\ell(a)}\subset\mathfrak{p}_j^{n+2+j'+\ell(j')-j-\ell(j)}.$$

Soit $n\in\{0,\dots,j'-1\}$. D'après la définition de $m(a;j,j')$, on a

$$\mathfrak{p}_{j'}^n\subset\mathfrak{p}_{j'}^{j'}+\mathrm{Ker}(Y).$$

Donc $Y(\mathfrak{p}_{j'}^n)\subset Y(\mathfrak{p}_{j'}^{j'})=\mathfrak{p}_F Y(\mathfrak{p}_{j'}^{-j'-2\ell(j')})$. En utilisant (8) et (9), on obtient

$$(X_j-X_{j,W})Y(\mathfrak{p}_{j'}^n)\subset\begin{cases}\mathfrak{p}_j^{a+2j+2\ell(j)}, & \text{si } j'\leqslant k'-k'',\\ \mathfrak{p}_j^{j+\ell(j)+\ell(a)}, & \text{si } j'\geqslant k'-k''+1.\end{cases}$$

En tout cas :

$$(10)\qquad \begin{cases} \text{pour tout } n \in \{0, \dots, j'-1\},\ (X_j - X_{j,W})Y(\mathfrak{p}_{j'}^n) \subset \mathfrak{p}_j^{n+2}, \\ \\ (X_j - X_{j,W})Y(\mathfrak{p}_{j'}^{j'-1}) \subset \begin{cases} \mathfrak{p}_j^{j+2\ell(j)+1}, & \text{si } j' \leqslant k'-k'', \\ \mathfrak{p}_j^{j+1}, & \text{si } j' \geqslant k'-k''+1. \end{cases} \end{cases}$$

Soit $n \in \{-j'-\ell(j'), \dots, -j'-1\}$, ce qui implique $j' \geqslant k'-k''+1$. On a de même

$$\mathfrak{p}_{j'}^n \subset \mathfrak{p}_{j'}^{-j'} + \mathrm{Ker}(Y),$$

$$(X_j - X_{j,W})Y(\mathfrak{p}_{j'}^n) \subset (X_j - X_{j,W})Y(\mathfrak{p}_{j'}^{-j'}) \subset \mathfrak{p}_j^a,$$

d'où

$$(11)\qquad \begin{cases} \text{pour tout } n \in \{-j'-\ell(j'), \dots, -j'-1\}, \\ (X_j - X_{j,W})Y(\mathfrak{p}_{j'}^n) \subset \mathfrak{p}_j^{n+2+j'+\ell(j')-j-\ell(j)}, \\ (X_j - X_{j,W})Y(\mathfrak{p}_{j'}^{-j'-1}) \subset \mathfrak{p}_j^{-j+1}. \end{cases}$$

Il résulte des relations (8) à (11) que

$$(X_j - X_{j,W})Y \in h(j,j')_2 \cap \theta(j,j') \subset s(a-1;j,j')_1.$$

Cela démontre (7) et achève la démonstration de (6).

Pour tout $x \in M(a)$, on a l'égalité :

$$(12)\qquad \psi \circ q_g(xZx^{-1}, X) = \varphi(Z, x', x'', \gamma, e)C(Z, \gamma_{>a}, e_{>a}).$$

Puisque $M(a)$ normalise $\mathfrak{p}_F s(a-1)_1^{\sim} \cap g$, on peut appliquer (5) en remplaçant $Z$ par $xZx^{-1}$. On vérifie les égalités :

$$(xZx^{-1})' = x'Z'x'^{-1}, (xZx^{-1})'' = x''Z''x''^{-1},$$

$$\overline{z(xZx^{-1})} = \begin{cases} z(x')^2\overline{z(Z)}, & \text{si } a \leqslant k'-k'', \\ z(x')z(x'')\overline{z(Z)}, & \text{si } a \geqslant k'-k''+1. \end{cases}$$

On en déduit l'égalité

$$\varphi(xZx^{-1}, 1, 1, \gamma, e) = \varphi(Z, x', x'', \gamma, e).$$

D'autre part, grâce à (6),

$$C(x^{-1}Zx, \gamma_{>a}, e_{>a}) = C(Z, \gamma_{>a}, e_{>a}).$$

D'où (12).

Rappelons que dans tous ces calculs, on avait posé $X = X(\gamma, e)$. Soit maintenant $X \in A(\gamma, e)$. On a $X - X(\gamma, e) \in \mathfrak{p}(\gamma, e)^2 \subset \oplus_{j=1}^{k'} h(j,j)_2 \subset s(a-1)_1$ (*cf.* VI.10 (5)). Pour $x \in M(a)$ et $Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1)_1^{\sim} \cap g$, on a $xZx^{-1} \in \mathfrak{p}_F s(a-1)_1^{\sim}$, donc

$$\psi \circ q_g(xZx^{-1}, X) = \psi \circ q_g(xZx^{-1}, X(\gamma, e))$$

et la formule de l'énoncé résulte de (12). □

**VI.21.** Notons $\ell'_0$ le sous-espace de $\ell'$ de base

$$\{\overline{v}'(i,j); j=1,\dots,a, i=-j,\dots,j-1\}$$

et $\ell''_0$ le sous-espace de $\ell''$ de base

$$\{\overline{v}''(i,j); j=k'-k''+1,\dots,a, i=-\ell(j),\dots,\ell(j)-1\}$$

(on a $\ell''_0=\{0\}$ si $a\leqslant k'-k''$). Notons $\ell'^{\perp}_0$, resp. $\ell''^{\perp}_0$, l'orthogonal de $\ell'_0$ dans $\ell'$, resp. de $\ell''_0$ dans $\ell''$. Pour tout $Y'\in g(\ell')$, il existe un unique élément noté $Y'_0\in g(\ell'_0)$ tel que pour tout $v\in\ell'_0$,

$$Y'(v)\in Y'_0(v)+\ell'^{\perp}_0.$$

De même pour tout $Y''\in g(\ell'')$, on définit un élément $Y''_0\in g(\ell''_0)$. En particulier, pour $Z\in\mathfrak{p}_F\,s(a-1)^{\sim}_1\cap g$, on pose $Z'_0=(Z')_0$, $Z''_0=(Z'')_0$ et, pour $\gamma\in\Gamma$ et $e\in\mathcal{E}$, on pose $X'_0(\gamma,e)=(X'(\gamma,e))_0$, $X''_0(\gamma,e)=(X''(\gamma,e))_0$.

On a défini les sous-groupes $M^{\mathrm{red}}(a)$ et $M^u(a)$ de $M(a)$ (*cf.* VI.20 (6)). On note $M'^{\mathrm{red}}\times M''^{\mathrm{red}}$ et $M'^u\times M''^u$ leurs images dans $G(\ell')\times G(\ell'')$. Remarquons que $M'^{\mathrm{red}}\subset G(\ell'_0)$, $M''^{\mathrm{red}}\subset G(\ell''_0)$, ces derniers groupes étant plongés naturellement dans $G(\ell')$, resp. $G(\ell'')$.

Notons $\mathcal{Z}'$ l'ensemble des $Y'\in g(\ell')$ tels que

(1) pour tout $i\in\{-a,\dots,a-1\}$, $Y'(\ell'[i])\subset\ell'[i-1]$ (avec la convention $\ell'[-a-1]=\{0\}$) ;

• pour tout $i\in\{1,\dots,a-1\}$, $Y''(\ell'[i]\cap\ell'_0)\subset\ell'[i-1]\cap\ell'_0$ et, pour tout $i\in\{-a+1,\dots,-1\}$, $Y''(\ell'[i]\cap\ell'^{\perp}_0)\subset\ell'[i-1]\cap\ell'^{\perp}_0$.

Cet ensemble est stable par conjugaison par $M'$. Notons de même $\mathcal{Z}''$ l'ensemble des $Y''\in g(\ell'')$ tels que

• pour tout $i\in\{-\ell(a),\dots,\ell(a)-1\}$, $Y''(\ell''[i])\subset\ell''[i-1]$ (avec la convention $\ell''[-\ell(a)-1]=\{0\}$) ;

• pour tout $i\in\{1,\dots,\ell(a)-1\}$, $Y''(\ell''[i]\cap\ell''_0)\subset\ell''[i-1]\cap\ell''_0$ et, pour tout $i\in\{-\ell(a)+1,\dots,-1\}$, $Y''(\ell''[i]\cap\ell''^{\perp}_0)\subset\ell''[i-1]\cap\ell''^{\perp}_0$.

Il est stable par conjugaison par $M''$. Posons

$$\mathcal{Z}=\{Z\in\mathfrak{p}_F\,s(a-1)^{\sim}_1\cap g; (Z',Z'')\in\mathcal{Z}'\times\mathcal{Z}''\}.$$

Cet ensemble est stable par conjugaison par $M(a)$. On définit une fonction

$$\phi:(\mathfrak{p}_F\,s(a-1)^{\sim}_1\cap g)\times M'^{\mathrm{red}}\times M''^{\mathrm{red}}\times\Gamma\times\mathcal{E}\longrightarrow\mathbb{C}$$

par :

$$\phi(Z,x',x'',\gamma,e)=\begin{cases}0, \text{ si } Z\notin\mathcal{Z},\\ \psi\Big[(-1)^{a+1}\overline{\gamma}_a\overline{e}_a^{-1}z(x')^2\overline{z(Z)}+q_{g(\ell_0')}(Z_0',x'^{-1}X_0'(\gamma,e)x')\Big],\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } Z\in\mathcal{Z} \text{ et } a\leqslant k'-k'',\\ \psi\Big[\Big(-1)^{a+1}2\overline{\gamma}_a\overline{e}_a^{-1}z(x')z(x'')\overline{z(Z)}\\ \ +q_{g(\ell_0')}(Z_0',x'^{-1}X_0'(\gamma,e)x')+q_{g(\ell_0'')}(Z_0'',x''^{-1}X_0''(\gamma,e)x'')\Big];\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } Z\in\mathcal{Z} \text{ et } a\geqslant k'-k''+1,\end{cases}$$

pour tout $Z\in\mathfrak{p}_F s(a-1)_1^{\sim}\cap g$, $x'\in M'^{\mathrm{red}}$, $x''\in M''^{\mathrm{red}}$, $\gamma\in\Gamma$, $e\in\mathcal{E}$.

***Lemme***. — *Munissons $M^u(a)$ d'une mesure de Haar. Il existe une fonction*

$$C_0:(\mathfrak{p}_F s(a-1)_1^{\sim}\cap g)\times\Gamma_{>a}\times\mathcal{E}_{>a}\longrightarrow\mathbb{C}$$

*telle que la propriété suivante soit vérifiée. Soient $Z\in\mathfrak{p}_F s(a-1)_1^{\sim}\cap g$, $x\in M^{\mathrm{red}}(a)$, $\gamma\in\Gamma$, $e\in\mathcal{E}$ et $X\in A(\gamma,e)$. Alors on a l'égalité :*

$$\int_{M^u(a)}\psi\circ q_g(Z,y^{-1}x^{-1}Xxy)\,dy=\phi(Z,x',x'',\gamma,e)C_0(Z,\gamma_{>a},e_{>a}).$$

*Démonstration*. — Supposons par exemple $a\leqslant k'-k''$. Notons $\mathcal{Y}'$ l'ensemble des $Y'\in g(\ell')$ vérifiant (1). Définissons une fonction

$$S:\mathcal{Y}'\times M'^{\mathrm{red}}\times\Gamma\times\mathcal{E}\longrightarrow\mathbb{C}$$

par

$$S(Y',x',\gamma,e)=\sum_{y'\in M'^u}\psi\circ q_{g(\ell')}(Y',y'^{-1}x'^{-1}X'(\gamma,e)x'y')$$

pour tout $Y'\in\mathcal{Y}'$, $x'\in M'^{\mathrm{red}}$, $\gamma\in\Gamma$, $e\in\mathcal{E}$. On va prouver :

(2) il existe une fonction $C':\mathcal{Y}'\times\Gamma_{>a}\times\mathcal{E}_{>a}\longrightarrow\mathbb{C}$

telle que :

- pour tout $Y'\in\mathcal{Y}'-\mathcal{Z}'$, $\widetilde{\gamma}\in\Gamma_{>a}$, $\widetilde{e}\in\mathcal{E}_{>a}$, $C'(Y',\widetilde{\gamma},\widetilde{e})=0$ ;
- pour tous $Y'\in\mathcal{Y}'$, $x'\in M'^{\mathrm{red}}$, $\gamma\in\Gamma$, $e\in\mathcal{E}$, on a l'égalité

$$S(Y',x',\gamma,e)=\psi\circ q_{g(\ell_0')}(Y_0',x'^{-1}X_0'(\gamma,e)x')C'(Y,\gamma_{>a},e_{>a}).$$

Le lemme en résulte. En effet, soient $Z,x,Y,e,X$ comme dans l'énoncé. On vérifie que $Z'\in\mathcal{Y}'$ et que pour tout $y\in M^u(a)$, $z(y')=1$. En appliquant le lemme VI.20, on obtient l'égalité :

$$\int_{M^u(a)}\psi\circ q_g(Z,y^{-1}x^{-1}Xxy)\,dy$$
$$=\mathrm{mes}(M^u(a))|M'^u|^{-1}\psi((-1)^{a+1}\overline{\gamma}_a\overline{e}_a^{-1}z(x')^2\overline{z(Z)})S(Z',x',\gamma,e)C(Z',\gamma_{>a},e_{>a}).$$

Il suffit alors de définir

$$C_0(Z,\widetilde{\gamma},\widetilde{e}) = \mathrm{mes}(M^u(a))|M'^u|^{-1}C(Z,\widetilde{\gamma},\widetilde{e})C'(Z',\widetilde{\gamma},\widetilde{e})$$

pour tous $\widetilde{\gamma}\in\Gamma_{>a}$ et $\widetilde{e}\in\mathcal{E}_{>a}$ pour vérifier la conclusion de l'énoncé.

Prouvons (2). Fixons $\gamma\in\Gamma$ et $e\in\mathcal{E}$. Posons $X'=X'(\gamma,e)$, $X'_0=X'_0(\gamma,e)$ et pour tout $j\in\{1,\dots,k'\}$, $X'_j=X'(\gamma,e,j)$. Remarquons que

$$X'_0=\sum_{j=1}^{a}X'_j.$$

Posons

$$X'_{>a}=X'-X'_0=\sum_{j=a+1}^{k'}X'_j.$$

Soit $n\in\{1,\dots,a\}$. Notons :

- $m'[n-1]$ l'ensemble des $Y\in g(\ell')$ tels que
$$Y(\ell'[i])=0 \text{ pour tout } i\neq n-1,$$
$$Y(\ell'[n-1]\cap\ell'_0)=\{0\},\quad Y(\ell'[n-1]\cap\ell_0'^{\perp})\subset\ell'[n-1]\cap\ell'_0;$$
- $m'[-n]$ l'ensemble des $Y\in g(\ell')$ tels que
$$Y(\ell'[i])=0 \text{ pour tout } i\neq -n,$$
$$Y(\ell'[-n]\cap\ell_0'^{\perp})=\{0\},\quad Y(\ell'[-n]\cap\ell'_0)\subset\ell'[-n]\cap\ell_0'^{\perp};$$
- $M'[n]=\big\{1+Y\,;\,Y\in g(\ell')\cap(m'[n-1]+m'[-n])\big\}$ ;
- $\mathcal{Y}'[n]$ l'ensemble des $Z\in g(\ell')$ vérifiant (1) et, pour tout $i\in\{n,\dots,a-1\}$,
$$Z(\ell'[i]\cap\ell'_0)\subset\ell'[i-1]\cap\ell'_0 \quad\text{et}\quad Z(\ell'[-i]\cap\ell_0'^{\perp})\subset\ell'[-i-1]\cap\ell_0'^{\perp}.$$

On vérifie que $M'[n]$ est un sous-groupe de $M'^u$ et que $\mathcal{Y}'[n]$ est stable par conjugaison par $M'$. Démontrons les relations :

(3) pour tout $Z\in\mathcal{Y}'[n]$ et tout $y\in M'[n]$, on a l'égalité :
$$q_{g(\ell')}(Z,y^{-1}X'y)=q_{g(\ell')}(Z,X'_0+y^{-1}X'_{>a}y);$$

(4) si $n\geqslant 2$, pour tout $Z\in\mathcal{Y}'[n]$, on a l'égalité :
$$\sum_{y\in M'[n]}\psi\circ q_{g(\ell')}(Z,y^{-1}X'y)=\begin{cases}0, & \text{si } Z\notin\mathcal{Y}'[n-1],\\ |M'[n]|\,\psi\circ q_{g(\ell')}(Z,X'), & \text{si } Z\in\mathcal{Y}'[n-1].\end{cases}$$

Soient $Z\in\mathcal{Y}'[n]$ et $y\in M'[n]$. Posons $y=1+Y_{n-1}+Y_{-n}$ avec $Y_{n-1}\in m'[n-1]$ et $Y_{-n}\in m'[-n]$. Remarquons que

$$X'_0Y_{-n}=0,\quad Y_{n-1}X'_0=0,\quad Y_{-n}X'_0Y_{n-1}=0.$$

Alors

$$y^{-1}X'_0y=X'_0-Y_{-n}X'_0+X'_0Y_{n-1}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
&Z X_0' Y_{n-1}(\ell'[n-1] \cap \ell_0') = \{0\},\\
&Z X_0' Y_{n-1}(\ell'[n-1] \cap \ell_0'^{\perp}) \subset \ell'[n-1] \cap \ell_0',\\
&Z X_0' Y_{n-1}(\ell'[i]) = \{0\}, \text{ pour tout } i \neq n-1.
\end{aligned}$$

On en déduit $\mathrm{trace}(Z X_0' Y_{n-1}) = 0$. Par adjonction, on a aussi $\mathrm{trace}(Y_{-n} X_0' Z) = 0$, d'où $\mathrm{trace}(Z Y_{-n} X_0') = 0$. Alors

$$q_{g(\ell')}(Z, y^{-1} X_0' y) = q_{g(\ell')}(Z, X_0'),$$

ce qui démontre (3).

Supposons $n \geqslant 2$. On a

$$X'_{>a} Y_{n-1} = 0, \quad Y_{-n} X'_{>a} = 0, \quad Y_{n-1} X'_{>a} Y_{-n} = 0,$$

(cette dernière égalité serait fausse pour $n = 1$). D'où :

$$y^{-1} X'_{>a} y = X'_{>a} - Y_{n-1} X'_{>a} + X'_{>a} Y_{-n}.$$

Par adjonction, on obtient :

$$q_{g(\ell')}(Z, y^{-1} X'_{>a} y) = q_{g(\ell')}(Z, X'_{>a}) + 2\,\mathrm{trace}(Z X'_{>a} Y_{-n}).$$

Remarquons que l'application

$$\begin{array}{ccc} M'[n] & \longrightarrow & m'[-n] \\ y & \longmapsto & Y_{-n} \end{array}$$

est bijective. Grâce à (3), on obtient :

$$(5) \quad \sum_{y \in M'[n]} \psi \circ q_{g(\ell')}(Z, y^{-1} X' y) = \psi \circ q_{g(\ell')}(Z, X') \sum_{Y_{-n} \in m'[-n]} \psi \circ \mathrm{trace}(2 Z X'_{>a} Y_{-n}).$$

Cette dernière somme vaut $|M'[n]|$ si le caractère

$$Y_{-n} \longmapsto \mathrm{trace}(2 Z X'_{>a} Y_{-n})$$

de $m'[-n]$ est trivial, elle est nulle sinon. Or ce caractère est trivial si et seulement si

$$Z X'_{>a}(\ell'[-n] \cap \ell_0'^{\perp}) \subset \ell'[-n] \cap \ell_0'^{\perp}.$$

Puisque

$$X'_{>a}(\ell'[-n] \cap \ell_0'^{\perp}) = \ell'[-n+1] \cap \ell_0'^{\perp},$$

la condition ci-dessus est équivalente à :

$$Z(\ell'[-n+1] \cap \ell_0'^{\perp}) \subset \ell'[-n] \cap \ell_0'^{\perp}.$$

Ou encore, par adjonction, à la réunion de cette condition et de

$$Z(\ell'[n-1] \cap \ell_0') \subset \ell'[n-1] \cap \ell_0',$$

c'est-à-dire à la relation $Z \in \mathcal{Y}'[n-1]$. Alors (4) résulte de (5).

Définissons une fonction

$$C' : \mathcal{Y}' \times \Gamma_{>a} \times \mathcal{E}_{>a} \longrightarrow \mathbb{C}$$

par

$$C'(Y',\widetilde{\gamma},\widetilde{e}) = \begin{cases} 0, \ \text{si } Y' \notin \mathcal{Z}', \\ \Big(\prod_{n=2}^{a} |M'[n]|\Big) \displaystyle\sum_{y\in M'[1]} \psi\circ q_{g(\ell')}\Big(Y', \sum_{j=a+1}^{k'} y^{-1}X'(\widetilde{\gamma},\widetilde{e},j)y\Big), \ \text{si } Y' \in \mathcal{Z}', \end{cases}$$

pour tous $Y' \in \mathcal{Y}'$, $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_{>a}$, $\widetilde{e} \in \mathcal{E}_{>a}$.

On vérifie que :

- $M'^u$ est produit direct des groupes $M'[n]$ pour $n = 1, \ldots, a$ ;
- $\mathcal{Y}'[a] = \mathcal{Y}'$, $\mathcal{Y}'[1] = \mathcal{Z}'$.

Soit $Y' \in \mathcal{Y}'$. En utilisant (4) successivement pour $n = a$, $a-1, \ldots, 2$ puis (3) pour $n = 1$, on obtient l'égalité :

$$S(Y',1,\gamma,e) = \varphi\circ q_{g(\ell')}(Y', X'_0(\gamma,e))C'(Y',\gamma_{>a},e_{>a}).$$

Remarquons que

$$q_{g(\ell')}(Y', X'_0(\gamma,e)) = q_{g(\ell'_0)}(Y'_0, X'_0(\gamma,e)).$$

L'égalité précédente est donc celle de (2) pour $x' = 1$. Pour obtenir l'égalité de (2) pour tout $x' \in M'^{\mathrm{red}}$, il suffit de remplacer $Y'$ par $x'Y'x'^{-1}$. On doit vérifier que

$$C'(x'Y'x'^{-1},\gamma_{>a},e_{>a}) = C'(Y',\gamma_{>a},e_{>a}),$$

ce qui résulte de l'égalité

$$x'^{-1}X'_{>a}x' = X'_{>a}$$

avec les notations précédentes. Cela achève la preuve de (2) et du lemme dans le cas $a \leqslant k'-k''$. Une démonstration similaire s'applique si $a \geqslant k'-k''+1$. □

**VI.22.** Pour $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_{>a}$ et $\widetilde{e} \in \mathcal{E}_{>a}$, posons

$$\Gamma|_{\widetilde{\gamma}} = \{\gamma \in \Gamma ; \gamma_{>a} = \widetilde{\gamma}\}, \quad \mathcal{E}|_{\widetilde{e}} = \{e \in \mathcal{E} ; e_{>a} = \widetilde{e}\}.$$

***Lemme.*** — *Soient $Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1)^{\sim}_1 \cap g$, $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_{>a}$ et $\widetilde{e} \in \mathcal{E}_{>a}$. Supposons vérifiée l'une des conditions suivantes :*

- $q_{\ell'}(Z'^{2a-1}(\overline{v}'(a-1,a)), \overline{v}'(a-1,a)) = 0$ ;
- $a \geqslant k'-k''+1$ *et* $q_{\ell''}(Z''^{2\ell(a)-1}(\overline{v}''(\ell(a)-1,a)), \overline{v}''(\ell(a)-1,a)) = 0$.

*Alors on a l'égalité :*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma|_{\widetilde{\gamma}}} \sum_{e\in\mathcal{E}|_{\widetilde{e}}} \sum_{x'\in M'^{\mathrm{red}}} \sum_{x''\in M''^{\mathrm{red}}} \kappa(\gamma,e)\phi(Z,x',x'',\gamma,e) = 0.$$

*Démonstration.* — L'assertion est triviale si $Z \notin \mathcal{Z}$. On suppose $Z \in \mathcal{Z}$.

Supposons d'abord $a \leqslant k'-k''$. L'espace $\ell'_0$ est du type étudié en II.4, l'entier $k$ de ce paragraphe étant égal à $a$. Fixons ${}^oX \in g(\ell'_0)_{\mathrm{nil}}$ comme en II.4, que l'on complète en un $s\ell_2$-triplet $({}^oX, {}^oH, {}^oY)$. Quitte à effectuer une conjugaison, on peut supposer que, pour tout $i \in \{-a, \ldots, a-1\}$, ${}^oH$ agit sur $\ell'[i] \cap \ell'_0$ par l'homothétie de rapport

$2i+1$. Graduons $\boldsymbol{g}(\ell_0')$ comme en V.7. Le groupe $M$ de ce paragraphe est égal à $M'^{\mathrm{red}}$. Posons :

$$^o\boldsymbol{\lambda} = (2a, 2a-2, \ldots, 4, 2)$$

et notons $^o\mathcal{E}$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G(\ell_0')$ contenues dans $\mathcal{O}^{\mathrm{alg}}(^oX)$. L'ensemble $^o\mathcal{E}$ s'identifie à celui des familles de formes quadratiques $(q_i)$ telles que $(^o\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) \in \mathrm{Nil}(\ell_0')$.

Fixons $\delta = (\delta_i)_{i=1,\ldots,a-1} \in \prod_{i=1}^{a-1} \Gamma_i$. Notons $\Gamma|_{\widetilde{\gamma},\delta}$ l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma_{>a} = \widetilde{\gamma}$ et $\gamma_i = \delta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, a-1\}$. Pour tous $\gamma \in \Gamma_{\widetilde{\gamma},\delta}$ et $e \in \mathcal{E}|_{\widetilde{e}}$, on a $X_0'(\gamma, e) \in g(\ell_0'; 2)$ et il résulte des formules VI.2 (1) et VI.2 (2) que

$$\Lambda(X_0'(\gamma, e)) = (^o\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$$

où, pour tout entier pair $i$ tel que $2 \leqslant i \leqslant 2a$, $\eta(q_i) = e_{i/2}$. On définit une application

$$\Gamma|_{\widetilde{\gamma},\delta} \times \mathcal{E}|_{\widetilde{e}} \longrightarrow {^o\mathcal{E}} \times \{1, 2\}$$

en associant à $(\gamma, e)$ la famille $(q_i)$ ci-dessus et l'entier 1 si $\gamma_a \in \mathfrak{o}_F^{\times 2}$, 2 si $\gamma_a \notin \mathfrak{o}_F^{\times 2}$. Cette application est bijective. Soient $^oe \in {^o\mathcal{E}}$ et $j \in \{1, 2\}$. Notons $(\gamma, e)$ l'image réciproque de $(^oe, j)$ dans $\Gamma|_{\widetilde{\gamma},\delta} \times \mathcal{E}|_{\widetilde{e}}$. Posons $X_{^oe} = X_0'(\gamma, e)$ et définissons $X_{^oe}^j \in g(\ell_0'; -2(2a-1))$ par

$$X_{^oe}^j(\overline{v}'(a-1, a)) = (-1)^{a+1} \overline{\gamma}_a \overline{e}_a \overline{v}''(-a, a).$$

Remarquons qu'il existe une constante $c$ ne dépendant que de $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{e}$ telle que, avec les notations ci-dessus et celles de V.10, on ait l'égalité

$$\kappa(\gamma, e) = c\, {^o\mathrm{sgn}}(^oe).$$

Remarquons que $Z_0' \in g(\ell_0'; -2)$. Notons $Z_1'$ l'élément de $g(\ell_0'; 2(a-1))$ tel que $Z_1'(\overline{v}'(-a, a)) = \overline{z(Z)}\,\overline{v}'(a-1, a)$. L'égalité suivante résulte des définitions :

$$(1) \quad \sum_{\gamma \in \Gamma|_{\widetilde{\gamma},\delta}} \sum_{e \in \mathcal{E}|_{\widetilde{e}}} \sum_{x' \in M'^{\mathrm{red}}} \kappa(\gamma, e) \phi(Z, x', 1, \gamma, e) =$$
$$c \sum_{^oe \in {^o\mathcal{E}}} \sum_{j=1,2} \sum_{x' \in M'^{\mathrm{red}}} {^o\mathrm{sgn}}(^oe) \psi \circ q_{g(\ell_0')}(Z_0' + Z_1', x'^{-1}(X_{^oe} + X_{^oe}^j)x').$$

On va appliquer le lemme V.11, le couple $(Y, Z)$ de ce lemme étant égal à $(Z_0', Z_1')$. Vérifions l'hypothèse de ce lemme. Puisque $Z \in \mathcal{Z}$, on a l'égalité

$$Z'^n(\overline{v}'(a-1, a)) = Z_0'^n(\overline{v}'(a-1, a))$$

pour tout $n \in \{1, \ldots, a-1\}$. Alors :

$$\begin{aligned} &q_{\ell'}(Z'^{2a-1}(\overline{v}'(a-1, a)), \overline{v}'(a-1, a)) \\ &\qquad = (-1)^{a-1} q_{\ell'}(Z' Z_0'^{a-1}(\overline{v}'(a-1, a)), Z_0'^{a-1}(\overline{v}'(a-1, a))) \\ &\qquad = (-1)^{a-1} q_{\ell_0'}(Z_0'^{a}(\overline{v}'(a-1, a)), Z_0'^{a-1}(\overline{v}'(a-1, a))) \\ &\qquad = q_{\ell_0'}(Z_0'^{2a-1}(\overline{v}'(a-1, a)), \overline{v}'(a-1, a)). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de l'énoncé, cette expression est nulle. Mais cela implique que $Z_0'^{2a-1} = 0$. Grâce au lemme V.11, l'expression (1) est nulle. En sommant ensuite en $\delta \in \prod_{i=1}^{a-1} \Gamma_i$, on obtient l'assertion de l'énoncé.

Supposons maintenant $a \geqslant k' - k'' + 1$, et, par exemple

$$q_{\ell'}(Z'^{2a-1}(\overline{v}'(a-1,a)), \overline{v}'(a-1,a)) = 0.$$

Introduisons comme précédemment ${}^oX$, ${}^oH$, ${}^o\mathcal{Y}$ et ${}^o\mathcal{E}$. Fixons $\delta = (\delta_i)_{i=1,\dots,a} \in \prod_{i=1}^{a} \Gamma_i$. Notons $(\Gamma \times \mathcal{E})|_{\widetilde{\gamma},\widetilde{e},\delta}$ l'ensemble des $(\gamma, e) \in \Gamma \times \mathcal{E}$ tels que $\gamma_{>a} = \widetilde{\gamma}$, $e_{>a} = \widetilde{e}$ et

- pour tout $i \in \{1, \dots, k' - k''\}$, $\gamma_i = \delta_i$,
- pour tout $i \in \{k' - k'' + 1, \dots, a\}$, $e_i \gamma_i^{-1} \in \delta_i \mathfrak{o}_F^{\times 2}$.

On définit une application

$$(\Gamma \times \mathcal{E})|_{\widetilde{\gamma},\widetilde{e},\delta} \longrightarrow {}^o\mathcal{E}$$

en associant à $(\gamma, e)$ la classe ${}^oe$ de $X_0'(\gamma, e)$. Cette application est bijective. Soit ${}^oe \in {}^o\mathcal{E}$, notons $(\gamma, e)$ son image réciproque. Posons $X_{{}^oe} = X_0'(\gamma, e)$. Il existe une constante $c_1$ indépendante de ${}^oe$, telle que

$$\kappa(\gamma, e) = c_1 \, {}^o\mathrm{sgn}({}^oe).$$

Fixons $x'' \in M''^{\mathrm{red}}$. Il résulte de VI.2 (2) que l'application :

$$\begin{array}{lcl} (\Gamma \times \mathcal{E})|_{\widetilde{\gamma},\widetilde{e},\delta} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\gamma, e) & \longmapsto & \psi \circ q_{g(\ell_0'')}(Z_0'', x''^{-1} X_0''(\gamma, e) x'') \end{array}$$

est constante. Notons $c_2$ sa valeur.

Comme précédemment, on a l'égalité $Z_0'^{2a-1} = 0$. En interprétant le lemme V.9 comme on l'a fait dans la preuve du lemme V.11, on voit que pour tout $t \in \mathbb{F}_q^\times$, il existe $x'(t) \in M'^{\mathrm{red}}$ tel que $z(x'(t)) = t$ et $x'(t) Z_0' x'(t)^{-1} = Z_0'$. Soit $(\gamma, e) \in (\Gamma \times \mathcal{E})|_{\widetilde{\gamma},\widetilde{e},\delta}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{x' \in M'^{\mathrm{red}}} \phi(Z, x', x'', \gamma, e) &= (q-1)^{-1} \sum_{t \in \mathbb{F}_q^\times} \sum_{x' \in M'^{\mathrm{red}}} \phi(Z, x' x'(t), x'', \gamma, e) \\ &= c_2 \sum_{x' \in M'^{\mathrm{red}}} \psi \circ q_{g(\ell_0')}(Z_0', x'^{-1} X_0'(\gamma, e) x') \cdot \\ &\qquad \cdot \sum_{t \in \mathbb{F}_q^\times} (q-1)^{-1} \psi((-1)^{a+1} 2 \overline{\gamma}_a \overline{e}_a^{-1} z(x') z(x'') \overline{z(Z)} t). \end{aligned}$$

La somme en $t$ ne dépend d'aucune des variables $x', \gamma, e$. Notons-la $c_3$. On obtient alors l'égalité

$$\begin{aligned} &\sum_{(\gamma,e) \in (\Gamma \times \mathcal{E})|_{\widetilde{\gamma},\widetilde{e},\delta}} \sum_{x' \in M'^{\mathrm{red}}} \kappa(\gamma, e) \phi(Z, x', x'', \gamma, e) = \\ &\qquad c_1 c_2 c_3 \sum_{{}^oe \in {}^o\mathcal{E}} \sum_{x' \in M'^{\mathrm{red}}} {}^o\mathrm{sgn}({}^oe) \psi \circ q_{g(\ell_0')}(Z_0', x'^{-1} X_{{}^oe} x'). \end{aligned}$$

Cette expression est nulle grâce au lemme V.11 appliqué au couple $(Y, Z) = (Z'_0, 0)$. En sommant ensuite en $\delta$ et $x''$, on obtient l'assertion de l'énoncé.

Une démonstration analogue vaut si

$$q_{g(\ell')}(Z''^{2\ell(a)-1}(\overline{v}''(\ell(a)-1,a)), \overline{v}''(\ell(a)-1,a)) = 0.$$

Cela achève la démonstration. □

**VI.23.** En appliquant les définitions de VI.6 aux données relatives à $a-1$ et à $a$, on définit $I_1(a-1; Z)$ et $I_\infty(a; Z)$ pour tout $Z \in g$.

***Lemme.*** — *Supposons vérifiée l'implication :*

$$Z \in g_{\mathrm{ent}} \ \textit{et} \ I_1(a-1; Z) \neq 0 \Longrightarrow Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1)_1^\sim \cap g.$$

*Alors on a l'implication*

$$Z \in g_{\mathrm{ent}} \ \textit{et} \ I_\infty(a; Z) \neq 0 \Longrightarrow Z \in \mathfrak{p}_F s(a)_\infty^\sim \cap g.$$

*Démonstration.* — Fixons $Z \in g_{\mathrm{ent}}$, supposons $I_\infty(a; Z) \neq 0$. Fixons une mesure de Haar sur $M(a)$. Puisque $M(a-1) \subset M(a)$ et $R_\infty(a) = R_1(a-1)$, il existe une constante $c_1$ telle que

$$I_\infty(a; Z) = c_1 \int_{M(a)} I_1(a-1; xZx^{-1})\, dx.$$

Il existe donc $x \in M(a)$ tel que $I_1(a-1; xZx^{-1}) \neq 0$. Grâce à l'hypothèse de l'énoncé $xZx^{-1} \in \mathfrak{p}_F s(a-1)_1^\sim \cap g$, donc aussi $Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1)_1^\sim \cap g$ (corollaire VI.15).

Pour tout $Y \in g$, posons

$$J(Y) = \int_{M(a)} \sum_{\gamma \in \Gamma, e \in \mathcal{E}} \kappa(\gamma, e) \int_{A(\gamma,e)} \psi \circ q_g(Y, x^{-1}Xx)\, dX\, dx.$$

Il existe une mesure de Haar sur $R_\infty(a)$ telle que

$$I_\infty(a; Z) = \int_{R_\infty(a)} J(yZy^{-1})\, dy.$$

Il existe donc $y \in R_\infty(a)$ tel que $J(yZy^{-1}) \neq 0$. Quitte à remplacer $Z$ par $yZy^{-1}$, ce qui ne modifiera pas la conclusion puisque $\mathfrak{p}_F s(a)_\infty^\sim \cap g$ est stable par conjugaison par $R_\infty(a)$, on peut supposer $y = 1$ et $J(Z) \neq 0$.

Décomposons notre mesure sur $M(a)$ en produit de deux mesures sur $M^{\mathrm{red}}(a)$ et $M^u(a)$. Rappelons que, par définition, $\mathrm{mes}(A(\gamma, e)) = 1$ pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $e \in \mathcal{E}$. Grâce au lemme VI.21, il existe une constante $c_2$ telle que

$$J(Z) = c_2 \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{x' \in M'^{\mathrm{red}}} \sum_{x'' \in M''^{\mathrm{red}}} \kappa(\gamma, e)\, \phi(Z, x', x'', \gamma, e)\, C_0(Z, \gamma_{>a}, e_{>a}).$$

On peut écrire cette égalité sous la forme :

$$J(Z) = \\ c_2 \sum_{\widetilde{\gamma}\in\Gamma_{>a}} \sum_{\widetilde{e}\in\mathcal{E}_{>a}} C_0(Z,\widetilde{\gamma},\widetilde{e}) \sum_{\gamma\in\Gamma|_{\widetilde{\gamma}}} \sum_{e\in\mathcal{E}|_{\widetilde{e}}} \sum_{x'\in M'^{\,\mathrm{red}}} \sum_{x''\in M''^{\,\mathrm{red}}} \kappa(\gamma,e)\,\phi(Z,x',x'',\gamma,e).$$

Il existe $\widetilde{\gamma}\in\Gamma_{>a}$ et $\widetilde{e}\in\mathcal{E}_{>a}$ tels que la quadruple somme intérieure soit non nulle. Grâce au lemme VI.22, aucune des conditions (b) et (c) du lemme VI.19 n'est réalisée. Grâce à ce lemme on a $z(Z)\in\mathfrak{p}_F$. Donc $Z\in\mathfrak{p}_F\, s(a)^{\sim}_{\infty}\cap g$ d'après le lemme VI.18. Cela achève la démonstration. □

**VI.24.** Démontrons la proposition VI.3. Comme dans le paragraphe précédent, pour tout $Z\in g$ et tout $a\in\{-3,\dots,-k'\}$, resp. $a\in\{-2,\dots,k'\}$, on définit $I_1(a;Z)$, resp. $I_\infty(a;Z)$. On a les implications :

(1)
$$\text{pour } a\in\{-2,\dots,k'\},\\ Z\in g_{\mathrm{ent}} \text{ et } I_\infty(a;Z)\neq 0 \Longrightarrow Z\in\mathfrak{p}_F\, s(a)^{\sim}_{\infty}\cap g;$$

(2)
$$\text{pour } a\in\{-3,\dots,k'\},\\ Z\in g_{\mathrm{ent}} \text{ et } I_1(a;Z)\neq 0 \Longrightarrow Z\in\mathfrak{p}_F\, s(a)^{\sim}_{1}\cap g.$$

En effet, pour $a=-3$, on a $r(a)_\infty=\{0\}$ et (2) résulte des lemmes VI.6 et VI.14. Soit $a\in\{-2,\dots,k'\}$, supposons (2) démontré pour $a-1$. Si $a\in\{-2,-1,0\}$, on a $I_\infty(a,Z)=I_1(a-1;Z)$ pour tout $Z\in g$ et $s(a)_\infty=s(a-1)_1$ (*cf.* VI.13 (3)) et (1) pour $a$ est identique à (2) pour $a-1$. Si $a\in\{1,\dots,k'\}$, le lemme VI.23 et (2) pour $a-1$ impliquent (1) pour $a$. Soit toujours $a\in\{-2,\dots,k'\}$, supposons (1) démontré pour $a$. Alors (2) pour $a$ résulte des lemmes VI.6 et VI.14.

On vérifie l'égalité

$$H=M(k')\,R(k')_1,$$

d'où

(3)
$$I(Z)=I_1(k';Z)$$

pour tout $Z\in g$.

On a la relation :

(4) soit $Z\in\mathfrak{p}_F\, s(k')^{\sim}_1\cap g$; alors $Z(L'_{-k'})\subset L'_{-k'}$ et $Z(L''_{-k''})\subset L''_{-k''}$.

Par adjonction, il suffit de prouver que pour tous $j,j'\in\{1,\dots,k'\}$ tels que $j'\geqslant j$ et pour tout $Z\in\mathfrak{p}_F\, s(k';j,j')^{\sim}$, on a

$$Z(\mathfrak{p}_j^{-j})\subset\mathfrak{p}_{j'}^{-j'} \text{ et } Z(\mathfrak{p}_j^{-j-2\ell(j)})\subset\mathfrak{p}_{j'}^{-j'-2\ell(j')}.$$

Si $j'>j$, on a

$$\mathfrak{p}_F\, s(k';j,j')^{\sim}=h(j',j)_{-1}$$

et les inclusions ci-dessus sont immédiates. Si $j' = j$, on a

$$\mathfrak{p}_F\, s(k'; j, j)^{\sim} = h(j,j)_{-1} \cap k^0(j)$$

*cf.* VI.18 pour la définition de $k^0(j)$. Les inclusions cherchées sont encore évidentes.

Grâce à (3) et (4), la proposition VI.3 résulte de (2) pour $a = k'$.

**VI.25.** Soient $(V, q_V)$ un espace symplectique comme en I.2, $k', k'' \in \mathbb{N}$, supposons

$$d = k'(k'+1) + k''(k''+1) \text{ et } k' < k''.$$

On modifie les constructions de VI.1 et VI.2 de la façon suivante. Pour tout $j \in \{1, \dots, k''\}$, on pose

$$\ell(j) = \sup(0, j - k'' + k').$$

On fixe une base de $V$ :

$$\begin{aligned}\big\{v'(i,j)\ ;\ j = k''-k'+1, \dots, k'', i = -\ell(j), \dots, \ell(j)-1\big\}&\\ \cup \big\{v''(i,j); j = 1, \dots, k'', i = -j, \dots, j-1\big\}&\end{aligned}$$

vérifiant les mêmes formules qu'en VI.1. On définit encore les réseaux $L'_i$, $L''_i$ et le sous-groupe $H$ de $G$. Bien sûr, on doit effectuer quelques modifications dans les définitions de VI.1 et VI.2. Par exemple, maintenant, pour tout $i \in \{-k', \dots, k'-1\}$, resp. $i \in \{-k'', \dots, k''-1\}$ le sous-espace $V'[i]$, resp. $V''[i]$, est engendré par le sous-ensemble :

$$\begin{aligned}&\Big\{v'(i,j); j = k''-k'+1, \dots, k'', -\ell(j) \leqslant i \leqslant \ell(j)-1\Big\}\\ \text{resp.}\quad &\Big\{v''(i,j); j = 1, \dots, k'', -j \leqslant i \leqslant j-1\Big\}.\end{aligned}$$

On fixe un ensemble

$$\Gamma = \prod_{j=1}^{k''} \Gamma_j$$

et l'on pose

$$\mathcal{E} = (\mathfrak{o}_F/\mathfrak{o}_F^{\times 2})^{k''}.$$

Pour $\gamma \in \Gamma$ et $e \in \mathcal{E}$, on définit comme en VI.2, $a_{\gamma,j}$ et $F_{\gamma,j}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k''\}$ et l'on pose

$$V(\gamma, e) = \bigoplus_{j=1}^{k''} F_{\gamma,j}.$$

On munit $V(\gamma, e)$ de la forme symplectique $q_V(\gamma, e)$ ainsi définie :

$$q_{V(\gamma,e)}\Big(\bigoplus_j v_j, \bigoplus_j v'_j\Big) = \sum_{j=1}^{k''} [F_{\gamma,j} : F]^{-1} \operatorname{trace}_{F_{\gamma,j}/F}\big(\tau_{\gamma,j}(v_j) v'_j\, a_{\gamma,j} (-1)^{j+\ell(j)} \gamma_j\, e_j\big).$$

On définit l'isomorphisme $\varphi_{\gamma,e} : V(\gamma, e) \to V$ par les égalités suivantes, pour tous $j \in \{1, \dots, k''\}$ et $i \in \{-2j - \ell(j), \dots, \ell(j) - 1\}$ :

$$\varphi_{\gamma,e}(a^i_{\gamma,j}) = \begin{cases} v''(i + j + \ell(j), j), & \text{si } -2j - \ell(j) \leqslant i \leqslant -j - \ell(j) - 1, \\ (-1)^{i+j+\ell(j)}\, e_j\, v''(i + j + \ell(j), j), & \text{si } -j - \ell(j) \leqslant i \leqslant -\ell(j) - 1, \\ \gamma_j\, v'(i, j), & \text{si } -\ell(j) \leqslant i \leqslant -1, \\ (-1)^{i+j+\ell(j)}\, e_j\, v'(i, j), & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant \ell(j) - 1. \end{cases}$$

On définit les ensembles $A(\gamma, e)$ et la fonction $\kappa$ par des formules analogues à celles de VI.2, où l'on échange $k'$ et $k''$, puis une fonction $I$ sur $g$.

***Proposition***. — *La proposition VI.3 reste vraie.*

*Démonstration*. — On peut donner une démonstration similaire à celle de la proposition VI.3. On peut aussi déduire le résultat de la proposition VI.3 en utilisant le groupe des similitudes symplectiques. En effet, on peut appliquer les constructions de VI.1 et VI.2 au couple $(k'', k')$. Affectons d'un exposant $^{\#}$ les objets que l'on en déduit : $V^{\#}$, $v'(i, j)^{\#}$, $L'^{\#}_i$ etc. Définissons une application linéaire

$$\sigma : V \longrightarrow V^{\#}$$

par

$$\begin{aligned} \sigma(v''(i, j)) &= v'(i, j)^{\#}, \text{ pour tout } j = 1, \dots, k'' \text{ et tout } i = -j, \dots, j - 1, \\ \sigma(v'(i, j)) &= \omega_F v''(i, j)^{\#}, \\ &\qquad \text{pour tout } j = k'' - k' + 1, \dots, k'' \text{ et tout } i = -\ell(j), \dots, \ell(j) - 1. \end{aligned}$$

L'application $\sigma$ est une similitude de rapport $\omega_F$.

On peut choisir $\Gamma^{\#} = \Gamma$. On a $\mathcal{E}^{\#} = \mathcal{E}$ et $\kappa^{\#} = \kappa$. Pour $\gamma \in \Gamma$ et $e \in \mathcal{E}$, on a $V(\gamma, e) = V(\gamma, e)^{\#}$ et l'on définit une application linéaire

$$\sigma_{\gamma,e} : V(\gamma, e) \longrightarrow V(\gamma, e)^{\#}$$

par

$$\sigma_{\gamma,e}\Big(\bigoplus_j v_j\Big) = \bigoplus_j a^{j+\ell(j)}_{\gamma,j}\, v_j\,.$$

C'est une similitude de rapport $\omega_F$ et l'on vérifie l'égalité

$$\sigma \varphi_{\gamma,e} = \varphi^{\#}_{\gamma,e} \sigma_{\gamma,e}\,.$$

On en déduit :

$$\begin{gathered} \sigma X(\gamma, e) \sigma^{-1} = X(\gamma, e)^{\#}, \\ \{\sigma X \sigma^{-1} ; X \in A(\gamma, e)\} = A(\gamma, e)^{\#}. \end{gathered}$$

Mais alors, pour tout $Z \in g$, on a l'égalité $I(Z) = I^{\#}(\sigma Z \sigma^{-1})$. Si $Z \in g_{\text{ent}}$ et $I(Z) \neq 0$, on a $\sigma Z \sigma^{-1} \in g_{\text{ent}}$ et, grâce à la proposition VI.3,

$$\sigma Z \sigma^{-1}(L'^{\#}_{-k'}) \subset L'^{\#}_{-k'}, \quad \sigma Z \sigma^{-1}(L''^{\#}_{-k''}) = L''^{\#}_{-k''}.$$

Il reste à remarquer que

$$\sigma^{-1}(L'^{\#}_{-k'}) = L''_{-k'}, \quad \sigma^{-1}(L''^{\#}_{-k''}) = \omega_F^{-1} L'_{-k''}. \qquad \square$$

**VI.26.** Dans la situation de VI.1, resp. VI.25, on pose $R = L'_{-k'}$, resp. $R = L'_{-k''}$. On construit comme en III.2 une fonction ${}^o\!f \in C_c^\infty(g)$ à support dans $k(R)$ et on définit une distribution ${}^o\phi \in \mathcal{D}$ par

$${}^o\phi(f) = |G(R)|^{-1} |g(R)|^{1/2} \int_G \int_g f(x^{-1} Y x)\, {}^o\!f(Y)\, dY\, dx$$

pour toute $f \in C_c^\infty(g)$. On définit une distribution $D[\Gamma] \in \mathcal{D}$ par

$$D[\Gamma] = 2^{-\sup(k',k'')} q^{\delta(k',k'')} \sum_{\gamma \in \Gamma, e \in \mathcal{E}} \kappa(\gamma, e) \int_{A(\gamma,e)} \phi(X, \cdot)\, dX$$

*cf.* III.8 pour la définition de $\delta(k', k'')$.

***Lemme.*** — *Soit $f \in C_c^\infty(g)$. Supposons le support de $\widehat{f}$ inclus dans $g_{\mathrm{ent}}$. Alors on a l'égalité*

$$D[\Gamma](f) = {}^o\phi(f).$$

*Démonstration.* — On suppose pour fixer les notations $k' \geqslant k''$. Pour $\gamma \in \Gamma$, $e \in \mathcal{E}$ et $X \in A(\gamma, e)$, on a l'égalité

$$\phi(X, f) = \int_{T\backslash G} f(x^{-1} X x)\, dx,$$

où $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{Z_G}(X)$. Le groupe $T$ étant compact, on a aussi

$$\phi(X, f) = \mathrm{mes}(T)^{-1} \int_G f(x^{-1} X x)\, dx.$$

Montrons que

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{mes}(T) = 2^{k'}.$$

On a

$$T = \Big\{ (x_j)_{j=1,\dots,k'} ;\ \text{pour tout } j,\ x_j \in F_{\gamma,j} \text{ et } \tau_{\gamma,j}(x_j) x_j = 1 \Big\}.$$

Posons

$$T^1 = \Big\{ (x_j)_{j=1,\dots,k'} ;\ \text{pour tout } j,\ x_j \in 1 + \mathfrak{p}_{\gamma,j} \text{ et } \tau_{\gamma,j}(x_j) x_j = 1 \Big\}.$$

Alors

$$T/T^1 \simeq \{\pm 1\}^{k'},$$

d'où

$$\mathrm{mes}(T) = 2^{k'}\, \mathrm{mes}(T^1).$$

Posons

$$t^1 = \mathfrak{p}(\gamma, e)^1 \cap g.$$

Alors $T^1$ est l'image de $t^1$ par l'application $E^G$. Par définition de nos mesures,

$$\mathrm{mes}(T^1) = \mathrm{mes}(t^1).$$

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité

$$\mathfrak{p}_F(\mathfrak{p}(\gamma, e)^i)^\sim \cap F(\gamma, e) = \mathfrak{p}(\gamma, e)^{1-i}.$$

D'autre part

$$\mathfrak{p}(\gamma, e)^0 \cap g = \mathfrak{p}(\gamma, e)^1 \cap g.$$

On en déduit que

$$t^1 = \{x \in t; \forall Y \in t^1, \psi \circ q_g(X, Y) = 1\},$$

d'où

$$\mathrm{mes}(t^1) = 1.$$

Cela démontre (1).

Posons

$$c = 2^{-2k'} q^{\delta(k',k'')}.$$

Grâce à (1), on a l'égalité

$$D[\Gamma](f) = c \sum_{\gamma \in \Gamma, e \in \mathcal{E}} \kappa(\gamma, e) \int_{A(\gamma,e)} \int_G f(x^{-1} X x)\, dx\, dX.$$

Cette expression est absolument convergente, d'où l'égalité

$$D[\Gamma](f) = c \sum_{y \in K(R)\backslash G} \int_{K(R)} \sum_{\gamma \in \Gamma, e \in \mathcal{E}} \kappa(\gamma, e) \int_{A(\gamma,e)} f(y^{-1} x^{-1} X x y)\, dX\, dx.$$

Pour $Z \in g$, posons

$$J(Z) = \int_{K(R)} \sum_{\gamma \in \Gamma, e \in \mathcal{E}} \kappa(\gamma, e) \int_{A(\gamma,e)} \psi \circ q_g(Z, x^{-1} X x)\, dX\, dx.$$

En exprimant $f$ par inversion de Fourier, on obtient :

(2) $$D[\Gamma](f) = c \sum_{y \in K(R)\backslash G} \int_g \widehat{f}(-y^{-1} Z y)\, J(Z)\, dZ.$$

On prouvera ci-dessous

(3) pour tout $Z \in g_{\mathrm{ent}}$, on a l'égalité

$$J(Z) = 2^{2k'} q^{-\delta(k',k'')} |G(R)|^{-1} |g(R)|^{1/2} \mathrm{mes}(K(R))\, \widehat{{}^o f}(Z).$$

Admettons-le. Grâce à l'hypothèse sur le support de $\widehat{f}$, on peut remplacer $J(Z)$ par le membre de droite ci-dessus dans la formule (2) :

$$D[\Gamma](f) = |G(R)|^{-1} |g(R)|^{1/2} \mathrm{mes}(K(R)) \sum_{y \in K(R)\backslash G} \int_g \widehat{f}(-y^{-1} Z y)\, \widehat{{}^o f}(Z)\, dZ.$$

Puis, par inversion de Fourier :

$$D[\Gamma](f) = |G(R)|^{-1} |g(R)|^{1/2} \mathrm{mes}(K(R)) \sum_{y \in K(R)\backslash G} \int_g f(y^{-1} Z y)\, {}^o f(Z)\, dZ.$$

Puisque ${}^{o}\!f$ est invariant par $K(R)$, on a aussi

$$D[\Gamma](f) = |G(R)|^{-1}\,|g(R)|^{1/2} \sum_{y\in K(R)\backslash G} \int_{K(R)} \int_{g} f(y^{-1}x^{-1}Zxy)\,{}^{o}\!f(Z)\,dZ\,dx = {}^{o}\phi(f)$$

ce qui démontre le lemme.

Il reste à démontrer (3). Soit $Z \in g_{\mathrm{ent}}$. Avec les notations de VI.1 et VI.3, on a l'égalité

$$J(Z) = \sum_{x\in H\backslash K(R)} I(xZx^{-1}).$$

Si $Z \notin k(R)$, tous ces termes sont nuls d'après la proposition VI.3 on a aussi $\widehat{{}^{o}\!f}(Z) = 0$ d'où l'égalité (3). Supposons $Z \in k(R)$. Notons $Y \mapsto \overline{Y}$ l'application de réduction de $k(R)$ sur $g(R)$. Pour tout $\overline{Y} \in g(R)$, posons

$$\alpha(\overline{Y}) = \sum_{x\in G(R)} \psi \circ q_{g(R)}(\overline{Z}, x^{-1}\overline{Y}x).$$

On a l'égalité

$$J(Z) = \mathrm{mes}(K(R))|G(R)|^{-1} \sum_{\gamma\in\Gamma, e\in\mathcal{E}} \kappa(\gamma,e) \int_{A(\gamma,e)} \alpha(\overline{X})\,dX.$$

En considérant les matrices VI.2 (1) et VI.2 (2), on voit qu'il existe une graduation de $g(R)$ comme en V.7 telle que, pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $e \in \mathcal{E}$, on ait :

- $\overline{X}(\gamma, e) \in g(R;2)^{\#}$,
- pour tout $X \in A(\gamma, e)$, $\overline{X} \in \overline{X}(\gamma,e) + g(R;\geqslant 3)$.

Grâce à V.7 (4), on en déduit l'égalité $\alpha(\overline{X}) = \alpha(\overline{X}(\gamma,e))$ pour tous $\gamma \in \Gamma$, $e \in \mathcal{E}$ et $X \in A(\gamma, e)$. On a donc

$$J(Z) = \mathrm{mes}(K(R))|G(R)|^{-1} \sum_{\gamma\in\Gamma, e\in\mathcal{E}} \kappa(\gamma,e)\,\alpha(\overline{X}(\gamma,e)).$$

Soient $\gamma \in \Gamma$ et $e \in \mathcal{E}$. Rappelons que l'on note $e[\overline{X}(\gamma,e)]$ la fonction caractéristique de l'orbite de $\overline{X}(\gamma,e)$. Il résulte des définitions que

$$\alpha(\overline{X}(\gamma,e)) = |g(R)|^{1/2}\,|Z_{G(R)}(\overline{X}(\gamma,e))|\,e[\overline{X}(\gamma,e)]^{\wedge}(\overline{Z}).$$

La partie réductive de $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{G}(R)}(\overline{X}(\gamma,e))$ est isomorphe à $\{\pm 1\}^{k'+k''}$ et son radical unipotent est de dimension $-\delta(k',k'')$, *cf.* II.7. Définissons une fonction $\beta$ sur $g(R)$ par

$$\beta = \sum_{\gamma\in\Gamma, e\in\mathcal{E}} \kappa(\gamma,e)\,e[\overline{X}(\gamma,e)].$$

On a alors l'égalité

$$J(Z) = \mathrm{mes}(K(R))|G(R)|^{-1}\,|g(R)|^{1/2}\,q^{-\delta(k',k'')}\,2^{k'+k''}\,\widehat{\beta}(\overline{Z}). \tag{4}$$

Le calcul de $\beta$ s'effectue comme dans la démonstration du lemme VI.22. Les espaces $r'$ et $r''$ sont du type considéré en II.4. Posons

$${}^{o}\boldsymbol{\lambda}' = (2k', 2k'-2, \ldots, 2),\ {}^{o}\boldsymbol{\lambda}'' = (2k'', 2k''-2, \ldots, 2),$$

notons ${}^o\mathcal{E}'$, ${}^o\mathcal{E}''$, l'ensemble des familles de formes quadratiques $(q_i)$ telles que

$$({}^o\boldsymbol{\lambda}', (q_i)) \in \mathrm{Nil}(r'), \quad \text{resp. } ({}^o\boldsymbol{\lambda}'', (q_i)) \in \mathrm{Nil}(r'').$$

Pour $\gamma \in \Gamma$ et $e \in \mathcal{E}$, notons $\overline{X}'(\gamma, e)$, resp. $\overline{X}''(\gamma, e)$, la réduction de $X(\gamma, e)$ dans $g(r')$, resp. $g(r'')$. On calcule

$$\Lambda(\overline{X}'(\gamma, e)) = ({}^o\boldsymbol{\lambda}', (q_i')), \quad \Lambda(\overline{X}''(\gamma, e)) = ({}^o\boldsymbol{\lambda}'', (q_i''))$$

où

- pour tout entier $i$ pair tel que $2 \leqslant i \leqslant 2k'$, $\eta(q_i') = e_{i/2}$,
- pour tout entier $i$ pair tel que $2 \leqslant i \leqslant 2k''$,

$$\eta(q_i'') = (-1)^{k'-k''} \gamma_{k'-k''+i/2}^{-1} e_{k'-k''+i/2}$$

(il s'agit d'égalités dans $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times 2} = \mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times 2}$). L'application

$$\begin{aligned} \Gamma \times \mathcal{E} &\longrightarrow {}^o\mathcal{E}' \times {}^o\mathcal{E}'' \\ (\gamma, e) &\longmapsto ((q_i'), (q_i'')) \end{aligned}$$

est surjective. Ses fibres ont $2^{k'-k''}$ éléments car les $\gamma_j$ pour $j \in \{1, \dots, k' - k''\}$ n'interviennent pas dans les formules ci-dessus. De plus, pour $\gamma \in \Gamma$, $e \in \mathcal{E}$ et $(q_i'), (q_i'')$ comme ci-dessus, on a l'égalité

$$\kappa(\gamma, e) = {}^o\mathrm{sgn}((q_i'))\, {}^o\mathrm{sgn}((q_i'')).$$

D'après II.4 (1), on a alors l'égalité

$$\beta = 2^{k'-k''}\, {}^o f.$$

Et (3) résulte de (4). Cela achève la démonstration. □

**VI.27.** Soient $(V, q_V)$ un espace symplectique comme en I.2 et $\theta \in \Theta(V)$. On fixe des objets $V_0, V_1, R, \boldsymbol{T}$ et $X_T$ comme en III.1 et III.2 et $\Gamma$ comme en IV.1. On a défini en III.2, resp. IV.1, une distribution $\phi_\theta(X_T, \cdot)$, resp. $D_\theta[\Gamma, X_T]$, qui appartient à $\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}$.

***Proposition***. — *Pour toute $f \in \mathcal{H}$, on a l'égalité*

$$D_\theta[\Gamma, X_T](f) = \phi_\theta(X_T, f).$$

C'est la proposition IV.3 dans le cas symplectique.

*Démonstration.* — Si $V_0 = \{0\}$, $D_\theta[\Gamma, X_T] = \phi_\theta(X_T, \cdot)$ par définition. Supposons $V_0 \neq \{0\}$. D'après le théorème I.9 (i), il suffit de prouver l'égalité de l'énoncé pour toute $f \in C(k(L_i)/b)$, $i$ parcourant l'ensemble $\{0, \dots, d/2\}$. Fixons donc de tels $i$ et $f$. Posons

$$D^1 = D_\theta[\Gamma, X_T], \quad D^2 = \phi_\theta(X_T, \cdot).$$

L'espace $V_0$ et le couple $(k', k'')$ faisant partie de la donnée $\theta$ vérifient les hypothèses de VI.1 ou VI.25. On introduit les distributions $D[\Gamma]$ et ${}^o\phi$ de VI.26 relatives à ces données, que l'on note plutôt $D_0^1$ et $D_0^2$. On peut supposer que le réseau $R$ est le même qu'en VI.26.

Pour $x \in G$, notons ${}_xf$ l'élément de $C_c^\infty(g(V_0))$ défini par

$$ {}_xf(Y) = f(x^{-1}(X_T + Y)x) $$

pour tout $Y \in g(V_0)$. Soit $j \in \{1, 2\}$. La fonction

$$ x \longmapsto D_0^j({}_xf) $$

est invariante à gauche par $TG(V_0)$ et, par définition, on a l'égalité

$$ D^j(f) = \int_{TG(V_0)\backslash G} D_0^j({}_xf)\,dx. $$

Remarquons que $D_0^j$ est à support dans $g_{\text{tn}}(V_0)$ : si $j = 1$, cela résulte du fait que pour tous $\gamma \in \Gamma$, $e \in \mathcal{E}$, on a $A(\gamma, e) \subset g_{\text{tn}}(V_0)$ (avec les notations des paragraphes précédents) ; si $j = 2$, ${}^o\!f$ est à support topologiquement nilpotent. Notons $C$ l'ensemble des $x \in G$ tels que $\text{Supp}({}_xf) \cap g_{\text{tn}}(V_0) \neq \varnothing$. C'est un sous-ensemble de $G$ invariant à gauche par $TG(V_0)$ et à droite par un sous-groupe ouvert de $G$. On a l'égalité

$$ D^j(f) = \int_{TG(V_0)\backslash C} D_0^j({}_xf)\,dx. \tag{1} $$

Soit $x \in C$. Choisissons un élément $Y \in \text{Supp}({}_xf) \cap g_{\text{tn}}(V_0)$. On a $X_T + Y \in k(x(L_i))$. On a vu dans la démonstration du lemme III.3 que cela impliquait l'égalité

$$ x(L_i) = (x(L_i) \cap V_0) \oplus (x(L_i) \cap V). $$

Le réseau $x(L_i) \cap V_0$ de $V_0$ est presque autodual et le sous-module $k(x(L_i) \cap V_0)^1$ de $g(V_0)$ est naturellement inclus dans $k(x(L_i))^1$. Puisque $\text{Ad}(x)(f)$ est invariante par ce dernier, ${}_xf$ l'est par $k(x(L_i) \cap V_0)^1$. Donc $\widehat{{}_xf}$ est à support dans $k(x(L_i) \cap V_0)$, *a fortiori* dans $g_{\text{ent}}(V_0)$. Grâce au lemme VI.26, on a l'égalité

$$ D_0^1({}_xf) = D_0^2({}_xf). $$

Cela étant vrai pour tout $x \in C$, l'égalité $D^1(f) = D^2(f)$ résulte de (1). Cela achève la démonstration. $\square$

# CHAPITRE VII

# DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION IV.3 DANS LE CAS ORTHOGONAL

**VII.1.** Soient $(V, q_V)$ un espace orthogonal comme en I.2, $k', k'' \in \mathbb{N}$. On note $(d', d'', \eta', \eta'')$ le quadruplet paramétrisant la classe de $q_V$ (*cf.* I.3). On suppose :

- $d = k'^2 + k''^2$ ;
- $d' \equiv k' \bmod 2\mathbb{Z}$, $d'' \equiv k'' \bmod 2\mathbb{Z}$ ;
- si $d$ est pair, $d' = d'' = 0$ ;
- $k' \geqslant k''$.

Pour tout $j \in \{1, \ldots, k'\}$, posons

$$\ell(j) = \sup(0, j - k' + k'').$$

Fixons un sous-ensemble de $V$ :

$$\Big\{v'(i,j); j = 1, \ldots, k', i = -j+1, \ldots, j-1, i \neq 0\Big\}$$
$$\cup \Big\{v''(i,j); j = k' - k'' + 1, \ldots, k', k', i = -\ell(j)+1, \ldots, \ell(j)-1, i \neq 0\Big\}$$

de sorte que les égalités ci-dessous soient vérifiées par tous les couples $(i,j)$ et $(i',j')$ tels que les vecteurs correspondants soient définis :

$$q_V(v'(i,j), v''(i',j')) = 0,$$
$$\left.\begin{aligned} q_V(v'(i,j), v'(i',j')) = 0 \\ q_V(v''(i,j), v''(i',j')) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{si } i + i' \neq 0 \text{ ou } j \neq j',$$
$$q_V(v'(i,j), v'(-i,j)) = 1,$$
$$q_V(v''(i,j), v''(-i,j)) = \omega_F^{-1}.$$

Pour tout $i \in \{-k'+1, \dots, k'-1\} - \{0\}$, resp. $i \in \{-k''+1, \dots, k''-1\} - \{0\}$, on note $V'[i]$, resp. $V''[i]$ le sous-espace de $V$ engendré par

$$\{v'(i,j) ; j = |i|+1, \dots, k'\},$$
$$\text{resp.} \quad \{v''(i,j) ; j = k'+|i|+1, \dots, k'\}.$$

On note $L'[i]$, resp. $L''[i]$, le sous $\mathfrak{o}_F$-module de $V$ engendré par les mêmes éléments.

On note $V[0]$ l'orthogonal du sous-espace de $V$ engendré par tous les vecteurs ci-dessus. Ainsi qu'il est loisible, on fixe une décomposition orthogonale

$$V[0] = V'[0] \oplus V''[0]$$

et des réseaux $L'[0] \subset V'[0]$ et $L''[0] \subset V''[0]$ de sorte que

$$d(V'[0]) = k', \quad d(V''[0]) = k'',$$
$$L'[0]^{\sim} = L'[0], \quad L''[0]^{\sim} = \mathfrak{p}_F L''[0].$$

Pour tout entier $n \in \{0, \dots, k'\}$, notons $\mathcal{A}_{>n}$ l'ensemble des familles

$$\alpha = \left((\alpha'_j)_{j=n+1,\dots,k'}, (\alpha''_j)_{j=\sup(n,k'-k'')+1,\dots,k'}\right)$$

telles que

- pour tout $j$, $\alpha'_j, \alpha''_j \in \mathfrak{o}_F^\times / \mathfrak{o}_F^{\times 2}$ ;
- si $n \leqslant k'-k''$, $(-1)^{[k''/2]} \prod_{j=k'-k''+1}^{k'} \alpha''_j = \eta''$ ;
- si $n = 0$, $(-1)^{[k'/2]} \prod_{j=1}^{k'} \alpha'_j = \eta'$.

Pour $n \leqslant m$, on a une application évidente

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{>n} &\longrightarrow \mathcal{A}_{>m} \\ \alpha &\longmapsto \alpha_{>m}. \end{aligned}$$

Identifions $\mathfrak{o}_F^\times / \mathfrak{o}_F^{\times 2}$ à un ensemble de représentants dans $\mathfrak{o}_F^\times$. Pour tout entier $n \in \{0, \dots, k'\}$ et tout $\alpha \in \mathcal{A}_{>n}$, on construit des sous-ensembles :

$$\{v'(\alpha,0,j) ; j = n+1, \dots, k'\} \subset L'[0],$$
$$\{v''(\alpha,0,j) ; j = \sup(n, k'-k'')+1, \dots, k'\} \subset L''[0]$$

formés de vecteurs 2 à 2 orthogonaux et tels que

$$q_V(v'(\alpha,0,j)) = \alpha'_j \ \text{ pour tout } \ j = n+1, \dots, k',$$

$$q_V(v''(\alpha,0,j)) = \omega_F^{-1} \alpha''_j \ \text{ pour tout } \ j = \sup(n, k'-k'')+1, \dots, k'.$$

La construction s'effectue par récurrence descendante sur $n$ : les vecteurs

$$v'(\alpha_{>n+1}, 0, j), \quad \text{resp. } v''(\alpha_{>n+1}, 0, j),$$

étant fixés pour $j \geqslant n+2$, resp. $j \geqslant \sup(n+1, k'-k'')+1$, on pose $v'(\alpha,0,j) = v'(\alpha_{>n+1},0,j)$, resp. $v''(\alpha,0,j) = v''(\alpha_{>n+1},0,j)$, pour ces valeurs de $j$ ; il reste à choisir $v'(\alpha,0,n+1)$ et, si $n \geqslant k'-k''$, $v''(\alpha,0,n+1)$ de sorte que les conditions ci-dessus soient vérifiées, ce qui est loisible.

On pose $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{>0}$. En particulier pour $\alpha \in \mathcal{A}$, on a fixé des vecteurs $v'(\alpha, 0, j)$ et $v''(\alpha, 0, j)$ pour $j = 1, \dots, k'$, resp. $j = k' - k'' + 1, \dots, k'$. Pour unifier les notations on notera $v'(\alpha, i, j)$, resp. $v''(\alpha, i, j)$, les vecteurs $v'(i, j)$ et $v''(i, j)$ précédemment fixés, pour $i \neq 0$.

On pose

$$\widehat{\mathcal{J}} = \left\{ j \in \mathbb{N} ; 2 \leqslant j \leqslant k' - k'', j \equiv d \bmod 2\mathbb{Z} \right\},$$

$$\mathcal{J} = \begin{cases} \widehat{\mathcal{J}} \cup \{k' - k'' + 1, \dots, k'\}, & \text{si } d \text{ est pair}, \\ \widehat{\mathcal{J}} \cup \{1\} \cup \{k' - k'' + 1, \dots, k'\}, & \text{si } d \text{ est impair}. \end{cases}$$

Pour $\alpha \in \mathcal{A}$ et $j \in \mathcal{J}$, on note $V(\alpha, j)$ le sous-espace de $V$ engendré par

$$\left\{ v'(\alpha, i, j) ; -j + 1 \leqslant i \leqslant j - 1 \right\} \cup \left\{ v''(\alpha, i, j) ; -\ell(j) + 1 \leqslant i \leqslant \ell(j) - 1 \right\}, \ \text{si } j \notin \widehat{\mathcal{J}},$$
$$\left\{ v'(\alpha, i, j) ; -j + 1 \leqslant i \leqslant j - 1 \right\} \cup \left\{ v'(\alpha, i, j - 1) ; -j + 2 \leqslant i \leqslant j - 2 \right\}, \ \text{si } j \in \widehat{\mathcal{J}}.$$

On pose $g\ell = \mathrm{End}(V)$ et, pour $\alpha \in \mathcal{A}$, $j, j' \in \mathcal{J}$, $g\ell(\alpha, j', j) = \mathrm{Hom}(V(\alpha, j), V(\alpha, j'))$. On adopte des notations analogues à celles de VI.1 : pour tout sous $\mathfrak{o}_F$-module $r$ de $g\ell$, on définit $\widetilde{r}$ ; on définit des réseaux $L'_i$, $L''_i$ et des ensembles $h$ et $h^1$. On note $H$ le sous-groupe des $x \in G$ tels que

- pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $x(L'_i) \subset L'_i$ et $x(L''_i) \subset L''_i$ ;
- les éléments de $O(L'_0/L'_1)$ et $O(L''_0/L''_1)$ définis par $x$ sont de déterminants égaux à 1.

**VII.2.** Pour tout couple $(\alpha^*, \alpha) \in \mathfrak{o}_F^\times \times \mathfrak{o}_F^\times$, notons $\mathcal{B}[\alpha^*, \alpha]$ l'ensemble des couples $(\beta^*, \beta) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ tels que

- $\beta^* \neq 0$
- $\beta^{*2}\, \overline{\alpha}^*\, \overline{\alpha} + \beta^2 \overline{\alpha}^2 \neq 0$,

où les $^-$ désignent des réductions dans $\mathbb{F}_q$.

Pour $j \in \{k' - k'' + 1, \dots, k''\}$ et $\alpha', \alpha'' \in \mathfrak{o}_F^\times$, on fixe des éléments $\gamma[\alpha', \alpha'']_j \in \mathfrak{o}_F^\times$, $\delta[\alpha', \alpha'']_j \in \mathfrak{o}_F^\times$ et $a[\alpha', \alpha'']_j \in \overline{F}^\times$ tels que

$$\gamma[\alpha', \alpha'']_j = (-1)^{j + \ell(j) - 1}\, \alpha'_j\, \alpha''_j\, \delta[\alpha', \alpha'']_j^2,$$

$$a[\alpha', \alpha'']_j^{2(j + \ell(j)) - 2} = \omega_F\, \gamma[\alpha', \alpha'']_j .$$

Soient $j \in \widehat{\mathcal{J}}$, $\alpha^*, \alpha \in \mathfrak{o}_F^\times$ et $(\beta^*, \beta) \in \mathcal{B}[\alpha^*, \alpha]$. Supposons $\beta^{*2}\, \overline{\alpha}^*\, \overline{\alpha} + \beta^2 \overline{\alpha}^2 \notin \mathbb{F}_q^{\times 2}$. Notons $E$ l'extension quadratique non ramifiée de $F$. On fixe des relèvements de $\beta$ et $\beta^*$ dans $\mathfrak{o}_F$, que nous noterons encore $\beta$ et $\beta^*$, des éléments $\gamma = \gamma[\alpha^*, \alpha, \beta^*, \beta]_j \in \mathfrak{o}_E^\times$ et $a = a[\alpha^*, \alpha, \beta^*, \beta]_j \in \overline{F}^\times$ tels que

$$\gamma^2 + 2(-1)^j \beta \alpha \gamma - \beta^{*2} \alpha^* \alpha = 0,$$

$$a^{2(j-1)} = \omega_F \gamma .$$

Soient $j, \alpha^*, \alpha, \beta^*, \beta$ comme ci-dessus mais supposons $\beta^{*2}\overline{\alpha}^*\,\overline{\alpha} + \beta^2\overline{\alpha}^2 \in \mathbb{F}_q^{\times 2}$. On fixe des relèvements de $\beta$ et $\beta^*$ dans $\mathfrak{o}_F$, encore notés $\beta$ et $\beta^*$, des éléments

$$\gamma = \gamma[\alpha^*, \alpha, \beta^*, \beta]_j, \quad \gamma^* = \gamma^*[\alpha^*, \alpha, \beta^*, \beta]_j$$

de $\mathfrak{o}_F^\times$ et

$$a = a[\alpha^*, \alpha, \beta^*, \beta]_j, \quad a^* = a^*[\alpha^*, \alpha, \beta^*, \beta]_j$$

de $\overline{F}^\times$ tels que

$$\gamma + \gamma^* = 2(-1)^{j-1}\beta\alpha, \quad \gamma\gamma^* = -\beta^{*2}\alpha^*\alpha,$$

$$a^{2(j-1)} = \omega_F\gamma, \quad a^{*2(j-1)} = \omega_F\gamma^*.$$

Posons

$$\mathcal{J}^\# = \begin{cases} \{2, \ldots, k' - k''\}, & \text{si } d \text{ est impair}, \\ \{1, \ldots, k' - k''\}, & \text{si } d \text{ est pair}. \end{cases}$$

Pour $\alpha \in \mathcal{A}$, on note $\mathcal{B}(\alpha)$ l'ensemble des familles $\beta = (\beta_j)_{j \in \mathcal{J}^\#}$ telles que, pour tout $j \in \widehat{\mathcal{J}}$, $(\beta_{j-1}, \beta_j) \in \mathcal{B}[\alpha'_{j-1}, \alpha'_j]$. Pour une telle famille et pour $j \in \widehat{\mathcal{J}}$, on pose

$$q_j(\beta) = \beta_{j-1}^2\overline{\alpha}'_{j-1}\overline{\alpha}'_j + \beta_j^2\overline{\alpha}'^2_j.$$

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des couples $(\alpha, \beta)$ où $\alpha \in \mathcal{A}$ et $\beta \in \mathcal{B}(\alpha)$.

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathcal{B}$ et $j \in \mathcal{J}$.

Si $j \in \{k' - k'' + 1, \ldots, k'\}$, on pose $\gamma_{\alpha,\beta,j} = \gamma[\alpha'_j, \alpha''_j]_j$ et $a_{\alpha,\beta,j} = a[\alpha'_j, \alpha''_j]_j$. On note $F_{\alpha,\beta,j}$ l'extension de $F$ engendrée par $a_{\alpha,\beta,j}$, $\mathfrak{p}_{\alpha,\beta,j}$ l'idéal maximal de son anneau d'entiers, $F^\#_{\alpha,\beta,j}$ son sous-corps d'indice 2 engendré par $a^2_{\alpha,\beta,j}$, $\tau_{\alpha,\beta,j}$ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(F_{\alpha,\beta,j}/F^\#_{\alpha,\beta,j})$. On pose $V(\alpha, \beta, j) = F_{\alpha,\beta,j}$ que l'on munit de la forme quadratique $q_{V(\alpha,\beta,j)}$ définie par l'égalité :

$$q_{V(\alpha,\beta,j)}(v, v') = [F_{\alpha,\beta,j} : F]^{-1}\, \mathrm{trace}_{F_{\alpha,\beta,j}/F}(\tau_{\alpha,\beta,j}(v)\, v'\, \alpha'_j).$$

On définit comme en VI.2 l'algèbre $F(\alpha, \beta, j) \subset g\ell(V(\alpha, \beta, j))$ et des objets $X(\alpha, \beta, j)$, $\mathfrak{p}(\alpha, \beta, j)^i$, $A(\alpha, \beta, j) = g(V(\alpha, \beta, j)) \cap [X(\alpha, \beta, j) + \mathfrak{p}(\alpha, \beta, j)^2]$.

Si $j \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $q_j(\beta) \notin \mathbb{F}_q^{\times 2}$, on pose

$$\gamma_{\alpha,\beta,j} = \gamma[\alpha'_{j-1}, \alpha'_j, \beta_{j-1}, \beta_j]_j, \quad a_{\alpha,\beta,j} = a[\alpha'_{j-1}, \alpha'_j, \beta_{j-1}, \beta_j]_j.$$

On définit comme ci-dessus $F_{\alpha,\beta,j}$ etc. mais la forme $q_{V(\alpha,\beta,j)}$ est maintenant définie par l'égalité

$$q_{V(\alpha,\beta,j)}(v, v') = \\ [F_{\alpha,\beta,j} : F]^{-1}\, \mathrm{trace}_{F_{\alpha,\beta,j}/F}(\tau_{\alpha,\beta,j}(v)\, v'\, 2\gamma_{\alpha,\beta,j}(\gamma_{\alpha,\beta,j} + (-1)^j\beta_j\,\alpha'_j)^{-1}).$$

(Remarquons que $[F_{\alpha,\beta,j} : F] = 4(j-1)$).

Si $j \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $q_j(\beta) \in \mathbb{F}_q^{\times 2}$, on pose

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha,\beta,j} &= \gamma[\alpha'_{j-1}, \alpha'_j, \beta_{j-1}, \beta_j]_j,\\ \gamma_{\alpha,\beta,j-1} &= \gamma^*[\alpha'_{j-1}, \alpha'_j, \beta_{j-1}, \beta_j]_j,\\ a_{\alpha,\beta,j} &= a[\alpha'_{j-1}, \alpha'_j, \beta_{j-1}, \beta_j]_j \quad \text{et}\\ a_{\alpha,\beta,j-1} &= a^*[\alpha'_{j-1}, \alpha'_j, \beta_{j-1}, \beta_j]_j.\end{aligned}$$

On définit comme précédemment $F_{\alpha,\beta,j}$, $F_{\alpha,\beta,j-1}$ etc. On pose

$$V(\alpha, \beta, j) = F_{\alpha,\beta,j-1} \oplus F_{\alpha,\beta,j}\,,$$

que l'on munit de la forme $q_{V(\alpha,\beta,j)}$ définie par l'égalité :

$$\begin{aligned}&q_{V(\alpha,\beta,j)}(v_{j-1} \oplus v_j, v'_{j-1} \oplus v'_j) =\\ &\frac{1}{2(j-1)}\Big[\operatorname{trace}_{F_{\alpha,\beta,j-1}/F}\Big(\tau_{\alpha,\beta,j-1}(v_{j-1})v'_{j-1}\,\gamma_{\alpha,\beta,j-1}\alpha'_j(\gamma_{\alpha,\beta,j-1} - \gamma_{\alpha,\beta,j})^{-1}\Big)\\ &\qquad + \operatorname{trace}_{F_{\alpha,\beta,j}/F}\Big(\tau_{\alpha,\beta,j}(v_j)v'_j\,\gamma_{\alpha,\beta,j}\,\alpha'_j(\gamma_{\alpha,\beta,j} - \gamma_{\alpha,\beta,j-1})^{-1}\Big)\Big].\end{aligned}$$

L'algèbre $F_{\alpha,\beta,j-1} \oplus F_{\alpha,\beta,j}$ se plonge naturellement dans $g\ell(V(\alpha, \beta, j))$. On note son image $F(\alpha, \beta, j)$ ; $X(\alpha, \beta, j)$ celle de $a_{\alpha,\beta,j-1} \oplus a_{\alpha,\beta,j}$ ; pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{p}(\alpha, \beta, j)^i$ celle de $\mathfrak{p}^i_{\alpha,\beta,j-1} \oplus \mathfrak{p}^i_{\alpha,\beta,j}$ ; $A(\alpha, \beta, j) = g(V(\alpha, \beta, j)) \cap [X(\alpha, \beta, j) + \mathfrak{p}(\alpha, \beta, j)^2]$.

Si $d$ est impair et $j = 1$, on pose $F_{\alpha,\beta,1} = V(\alpha, \beta, 1) = F$ que l'on munit de la forme quadratique $q_{V(\alpha,\beta,1)}$ ainsi définie :

$$q_{V(\alpha,\beta,1)}(v, v') = \alpha'_1 v v'.$$

On définit de façon évidente $F(\alpha, \beta, 1)$ et $\mathfrak{p}(\alpha, \beta, 1)^i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On pose $X(\alpha, \beta, 1) = 0$, $A(\alpha, \beta, 1) = \{0\}$, $a_{\alpha,\beta,1} = 1$. Remarquons que $g(V(\alpha, \beta, 1)) = \{0\}$.

On pose

$$V(\alpha, \beta) = \bigoplus_{j \in \mathcal{J}} V(\alpha, \beta, j)$$

que l'on munit de la forme $q_{V(\alpha,\beta)}$ somme orthogonale des précédentes. On définit des objets $F(\alpha, \beta)$, $X(\alpha, \beta)$, $\mathfrak{p}(\alpha, \beta)^i$, $A(\alpha, \beta)$, sommes sur $j$ des précédents.

On définit un isomorphisme $\varphi_{\alpha,\beta} : V(\alpha, \beta) \to V$ de la façon suivante. Soit $j \in \{k' - k'' + 1, \ldots, k'\}$. Notons $\delta = \delta[\alpha'_j, \alpha''_j]_j$. Pour $i \in \{-j - 2\ell(j) + 2, \ldots, j - 1\}$, on pose

$$\varphi_{\alpha,\beta}(a^i_{\alpha,\beta,j}) = \begin{cases} (-1)^j\,\delta\,\gamma^{-1}_{\alpha,\beta,j}\,\alpha'_j\,v''(\alpha, i + j + \ell(j) - 1, j), \\ \qquad\qquad \text{si } \; -j - 2\ell(j) + 2 \leqslant i \leqslant -j - \ell(j) + 1, \\ (-1)^{i+j}\,\delta^{-1}\,v''(\alpha, i + j + \ell(j) - 1, j), \;\text{ si } \; -j - \ell(j) \leqslant i \leqslant -j, \\ v'((\alpha, i, j), \;\text{ si } \; -j + 1 \leqslant i \leqslant 0, \\ (-1)^i\,\alpha'_j\,v'(\alpha, i, j), \;\text{ si } \; 1 \leqslant i \leqslant j - 1. \end{cases}$$

Soit $j \in \widehat{\mathcal{J}}$, supposons $q_j(\beta) \notin \mathbb{F}_q^{\times 2}$. Fixons $\delta \in \mathfrak{o}_E^\times$ tel que $\delta^2 = \alpha'_j$, posons $\varepsilon = (-1)^{j-1}\gamma_{\alpha,\beta,j}^{-1}\beta_{j-1}\alpha'_{j-1}\delta$. Alors $\{\delta, \varepsilon\}$ est une base de $\mathfrak{o}_E$ sur $\mathfrak{o}_F$. Pour $i \in \{-j+1, \dots, j-2\}$, on pose

$$\varphi_{\alpha,\beta}(\delta a^i_{\alpha,\beta,j}) = \begin{cases} v'(\alpha,i,j), & \text{si } -j+1 \leqslant i \leqslant 0, \\ (-1)^i\alpha'_j v'(\alpha,i,j), & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant j-1, \end{cases}$$

$$\varphi_{\alpha,\beta}(\varepsilon a^i_{\alpha,\beta,j}) = \begin{cases} -\beta_j\beta_{j-1}^{-1}v'(\alpha,-j+1,j) + \omega_F^{-1}\beta_{j-1}^{-1}v'(\alpha,j-1,j), \\ \hfill \text{si } i = -j+1, \\ v'(\alpha,i,j-1), \ \text{si } -j+2 \leqslant i \leqslant 0, \\ (-1)^i\alpha'_{j-1}v'(\alpha,i,j-1), \ \text{si } 1 \leqslant i \leqslant j-1. \end{cases}$$

Soit $j \in \widehat{\mathcal{J}}$, supposons $q_j(\beta) \in \mathbb{F}_q^{\times 2}$. Pour $i \in \{-j+1, \dots, j-2\}$, on pose

$$\varphi_{\alpha,\beta}(a^i_{\alpha,\beta,j}) = \begin{cases} \frac{1}{2}v'(\alpha,-j+1,j) + (-1)^j\omega_F^{-1}\alpha'_j(\gamma_{\alpha,\beta,j-1} - \gamma_{\alpha,\beta,j})^{-1}v'(\alpha,j-1,j), \\ \hfill \text{si } i = -j+1, \\ (\gamma_{\alpha,\beta,j} - \gamma_{\alpha,\beta,j-1})^{-1}\big[\gamma_{\alpha,\beta,j}v'(\alpha,i,j) \\ \qquad + (-1)^{j-1}\beta_{j-1}\alpha'_j v'(\alpha,i,j-1)\big], \ \text{si } -j+2 \leqslant i \leqslant 0, \\ (-1)^i(\gamma_{\alpha,\beta,j} - \gamma_{\alpha,\beta,j-1})^{-1}\big[\alpha'_j\gamma_{\alpha,\beta,j}v'(\alpha,i,j) \\ \qquad + (-1)^{j-1}\beta_{j-1}\alpha'_j\alpha'_{j-1}v'(\alpha,i,j-1)\big], \ \text{si } 1 \leqslant i \leqslant j-2, \end{cases}$$

$$\varphi_{\alpha,\beta}(a^i_{\alpha,\beta,j-1}) = \begin{cases} \frac{1}{2}v'(\alpha,-j+1,j) \\ \qquad + (-1)^j\omega_F^{-1}\alpha'_j(\gamma_{\alpha,\beta,j} - \gamma_{\alpha,\beta,j-1})^{-1}v'(\alpha,j-1,j), \\ \hfill \text{si } i = -j+1, \\ (\gamma_{\alpha,\beta,j-1} - \gamma_{\alpha,\beta,j})^{-1}\big[\gamma_{\alpha,\beta,j-1}v'(\alpha,i,j) \\ \qquad + (-1)^{j-1}\beta_{j-1}\alpha'_j v'(\alpha,i,j-1)\big], \ \text{si } -j+2 \leqslant i \leqslant 0, \\ (-1)^i(\gamma_{\alpha,\beta,j} - \gamma_{\alpha,\beta,j-1})^{-1}\big[\alpha'_j\gamma_{\alpha,\beta,j-1}v'(\alpha,i,j) \\ \qquad + (-1)^{j-1}\beta_{j-1}\alpha'_j\alpha'_{j-1}v'(\alpha,i,j-1)\big], \ \text{si } 1 \leqslant i \leqslant j-2. \end{cases}$$

Si $d$ est impair, on pose $\varphi_{\alpha,\beta}(a_{\alpha,\beta,1}) = v'(\alpha,0,1)$.

On vérifie que $\varphi_{\alpha,\beta}$ identifie $q_{V(\alpha,\beta)}$ à $q_V$. On identifie $g\ell$ à $g\ell(V(\alpha,\beta))$ grâce à cet isomorphisme. Remarquons que pour tout $j \in \mathcal{J}$, $\varphi_{\alpha,\beta}(V(\alpha,\beta,j)) = V(\alpha,j)$.

Soit $j \in \{k'-k''+1, \dots, k'\}$. La matrice de $X(\alpha,\beta,j)$ dans la base

$$v'(\alpha,j-1,j), \dots, v'(\alpha,1-j,j), v''(\alpha,\ell(j)-1,j), \dots, v''(\alpha,-\ell(j)+1,j)$$

de $V(\alpha, j)$ est :

$$(1)\qquad \begin{bmatrix}
0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & & & & & & & & & & & & & \vdots\\
\vdots & & \ddots & -1 & & & & & & & & & & & & \vdots\\
\vdots & & & \ddots & -\alpha'_j & & & & & & & & & & & \vdots\\
\vdots & & & & \ddots & 1 & & & & & & & & & & \vdots\\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & & & & & & & & & \vdots\\
\vdots & & & & & & \ddots & 1 & & & & & & & & \vdots\\
\vdots & & & & & & & \ddots & \delta & & & & & & & \vdots\\
\vdots & & & & & & & & \ddots & -1 & & & & & & \vdots\\
\vdots & & & & & & & & & \ddots & \ddots & & & & & \vdots\\
\vdots & & & & & & & & & & \ddots & -1 & & & & \vdots\\
\vdots & & & & & & & & & & & \ddots & -\alpha''_j & & & \vdots\\
\vdots & & & & & & & & & & & & \ddots & 1 & & 0\\
\vdots & & & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & & & & & & & & & & & & & & \ddots & 1\\
-\omega_F\delta & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{bmatrix}$$

Soit $j \in \widehat{\mathcal{J}}$. La matrice de $X(\alpha, \beta, j)$ dans la base

$$v'(\alpha, j-1, j),\, v'(\alpha, j-2, j-1),\, v'(\alpha, j-2, j), \ldots, v'(\alpha, 1, j-1),\, v'(\alpha, 1, j),\, v'(\alpha, 0, j),\\ v'(\alpha, 0, j-1), \ldots, v'(\alpha, -j+2, j),\, v'(\alpha, -j+2, j-1),\, v'(\alpha, -j+1, j)$$

de $V(\alpha, j)$ est :

- si $j = 2$,

$$(2)\qquad \begin{bmatrix}
0 & -\alpha'_2 & 0 & 0\\
\omega_F\beta_2 & 0 & 0 & 1\\
\omega_F\beta_1 & 0 & 0 & 0\\
0 & -\omega_F\beta_2\alpha'_2 & -\omega_F\beta_1\alpha'_1 & 0
\end{bmatrix}$$

- si $j \geqslant 3$,

$$
(3)\qquad
\begin{bmatrix}
0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & -1 & 0 & & & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & -1 & & & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & -1 & 0 & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & 0 & -1 & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & & 0 & -\alpha'_{j-1} & & & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & & -\alpha'_j & 0 & & & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & & 1 & 0 & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & & 0 & 1 & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & & & & \ddots & & & \vdots \\
0 & \vdots & \vdots & & & & & & & & & & & 1 & 0 & \vdots \\
0 & \vdots & \vdots & & & & & & & & & & & 0 & 1 & \vdots \\
\omega_F\beta_j & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & & 1 \\
\omega_F\beta_{j-1} & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & & 0 \\
0 & -\omega_F\beta_{j-1} & -\omega_F\beta_j & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{bmatrix}.
$$

Pour $(\alpha\,\beta) \in \mathcal{B}$ et $j \in \widehat{\mathcal{J}}$, posons :

$$
\xi_j(\alpha,\beta) = \begin{cases}
(q+1)(q-3), & \text{si } q_j(\beta) \in \mathbb{F}_q^{\times 2} \quad \text{et } -\alpha'_j\alpha'_{j-1} \notin \mathfrak{o}_F^{\times 2}, \\
(q-1)(q-3), & \text{si } q_j(\beta) \notin \mathbb{F}_q^{\times 2} \quad \text{et } -\alpha'_j\alpha'_{j-1} \notin \mathfrak{o}_F^{\times 2}, \\
(q-1)(q+1), & \text{si } q_j(\beta) \in \mathbb{F}_q^{\times 2} \quad \text{et } -\alpha'_j\alpha'_{j-1} \in \mathfrak{o}_F^{\times 2}, \\
(q-3)(q+1), & \text{si } q_j(\beta) \notin \mathbb{F}_q^{\times 2} \quad \text{et } -\alpha'_j\alpha'_{j-1} \in \mathfrak{o}_F^{\times 2}.
\end{cases}
$$

On définit une fonction $\kappa : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ par

$$
\kappa(\alpha,\beta) = \Big(\prod_{j\in\widehat{\mathcal{J}}} \xi_j(\alpha,\beta)\Big)\Big(\prod_{j=1}^{k'} \operatorname{sgn}(\alpha'_j)^{j-k'}\Big)\Big(\prod_{j=k'-k''+1}^{k'} \operatorname{sgn}(\alpha''_j)^{j-k'}\Big)
$$

pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathcal{B}$. Pour tout tel $(\alpha,\beta)$, on munit $A(\alpha,\beta)$ d'une mesure déduite d'une mesure de Haar sur $g \cap F(\alpha,\beta)$ telle que $\mathrm{mes}(A(\alpha,\beta)) = 1$.

**VII.3.** On définit une fonction $I : g \to \mathbb{C}$ par l'égalité

$$
I(Z) = \int_H \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{B}} \kappa(\alpha,\beta) \int_{A(\alpha,\beta)} \psi \circ q_g(Z, x^{-1}Xx)\, dX\, dx
$$

pour tout $Z \in g$.

***Proposition***. — *Soit* $Z \in g_{\mathrm{ent}}$. *Supposons* $I(Z) \neq 0$. *Alors* $Z(L'_{-k'+1}) \subset L'_{-k'+1}$ *et* $Z(L''_{-k''+1}) \subset L''_{-k''+1}$.

La démonstration occupe les paragraphes VII.4 à VII.24.

**VII.4.** Considérons les données suivantes :

- un entier $b \in \{0, \dots, k'\}$ ;
- pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et tous $j, j' \in \mathcal{J}$ avec $j' \geqslant j$, une suite $(r(\alpha, j', j)_i)_{i \geqslant 1}$ de réseaux de $g\ell(\alpha, j', j) \cap h^1$ ;
- pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et tous $j, j' \in \mathcal{J}$ avec $j' \geqslant j$, un sous-$\mathfrak{o}_F$-module $m(\alpha, j', j)$ de $g\ell(\alpha, j', j) \cap h^0$ ;
- un sous-ensemble $J \subset \mathcal{J}$ ;
- pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et tout $j \in J$, un réseau $s(\alpha, j)$ de $g\ell(\alpha, j, j)$ ;
- pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, un sous-groupe fermé $M(\alpha)$ de $H$.

On impose à ces données les conditions (H′0) à (H′12) suivantes.

(H′0) Si $d$ est impair, $1 \in J$.

Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et $j \in \mathcal{J}$, on pose

$$A(\alpha, j) = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}(\alpha)} A(\alpha, \beta, j).$$

A l'exception de (H′5) et (H′10), les conditions (H′1) à (H′11) s'obtiennent à partir des conditions (H1) à (H11) de VI.4 par le procédé suivant :

- on fait précéder ces conditions de « pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ » ;
- on glisse $\alpha$ dans les notations ;
- on remplace $\{1, \dots, k'\}$ par $\mathcal{J}$.

*Idem* pour les définitions. Par exemple

(H′3) pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, tous $j, j' \in \mathcal{J}$ avec $j' > j$ ou $j' = j \notin J$ et pour tout $i \geqslant 1$, l'ensemble $X' r(\alpha, j', j)_i$ est indépendant de $X'$ pourvu que $X' \in A(\alpha, j')$.

Et, sous ces hypothèses, on note cet ensemble $s(\alpha, j', j)_i$.

Les conditions (H5) et (H10) deviennent :

(H′5) pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathcal{B}$, tout $j \in \mathcal{J} - J$ et tout $i \geqslant 1$,

$$r(\alpha, j, j)_i = \left[r(\alpha, j, j)_i \cap F(\alpha, \beta, j)^{\sim}\right] \oplus \left[r(\alpha, j, j)_i \cap F(\alpha, \beta, j)\right];$$

(H′10) l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et tous $j, j' \in \mathcal{J}$ avec $j' \geqslant j$, la suite $(r(\alpha, j', j)_i)_{i \geqslant 1}$ est stationnaire ;
- pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et tous $j, j' \in \mathcal{J}$ avec $j' \geqslant j$ et, si $d$ est impair, $(j', j) \neq (1, 1)$, on a $s(\alpha, j', j)_\infty = \{0\}$.

Pour $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{A}_{>b}$, on pose
$$\mathcal{A}|_{\widetilde{\alpha}} = \{\alpha \in \mathcal{A};\, \alpha_{>b} = \widetilde{\alpha}\}, \quad \mathcal{B}|_{\widetilde{\alpha}} = \{(\alpha,\beta) \in \mathcal{B};\, \alpha_{>b} = \widetilde{\alpha}\}.$$
On ajoute la condition

(H′12) pour tout $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{A}_{>b}$, les ensembles $r(\alpha)_1$, $r(\alpha)_\infty$, $s(\alpha)_1$ $s(\alpha)_\infty$ et $M(\alpha)$ sont indépendants de $\alpha$ pourvu que $\alpha \in \mathcal{A}|_{\widetilde{\alpha}}$.

**VII.5.** Le lemme VI.5 reste vrai, mutatis mutandis.

Soit $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{A}_{>b}$. D'après (H′12), on peut noter $r(\widetilde{\alpha})_1$, $r(\widetilde{\alpha})_\infty$, $s(\widetilde{\alpha})_1$, $s(\widetilde{\alpha})_\infty$ et $M(\widetilde{\alpha})$ les ensembles $r(\alpha)_1$ etc. pour n'importe quel $\alpha \in \mathcal{A}|_{\widetilde{\alpha}}$. On définit les groupes $R(\widetilde{\alpha})_1$ et $R(\widetilde{\alpha})_\infty$ comme en VI.6. Pour $Z \in g$, posons
$$I_1(\widetilde{\alpha}, Z) = \int_{M(\widetilde{\alpha})\,R(\widetilde{\alpha})_1} \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{B}|_{\widetilde{\alpha}}} \kappa(\alpha,\beta) \int_{A(\alpha,\beta)} \psi \circ q_g(Z, x^{-1}Xx)\,dX\,dx.$$
Si $r(\widetilde{\alpha})_\infty \cap g$ est ouvert dans $g$, on définit de même $I_\infty(\widetilde{\alpha}, Z)$.

***Lemme***. — *Soit $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{A}_{>b}$. Dans le cas où $r(\widetilde{\alpha})_\infty \cap g$ est ouvert dans $g$, on suppose vérifiée l'implication :*
$$Z \in g_{\text{ent}} \text{ et } I_\infty(\widetilde{\alpha}, Z) \neq 0 \Longrightarrow Z \in \mathfrak{p}_F\, s(\widetilde{\alpha})_\infty^{\sim} \cap g.$$
*On a alors en tout cas l'implication :*
$$Z \in g_{\text{ent}} \text{ et } I_1(\widetilde{\alpha}, Z) \neq 0 \Longrightarrow Z \in \mathfrak{p}_F\, s(\widetilde{\alpha})_1^{\sim} \cap g.$$

*Démonstration*. — La démonstration est analogue à celle du lemme VII.5. Les ensembles $M_0$ et $M_{-1}$ et les termes $J_0(Z)$ et $J_{-1}(Z)$ sont définis comme dans cette démonstration. Pour $i \geqslant 1$ et $\alpha \in \mathcal{A}|_{\widetilde{\alpha}}$, on pose
$$M(\alpha)_i = \left\{x \in M(\widetilde{\alpha})\,R(\widetilde{\alpha})_1;\, xZx^{-1} \in \mathfrak{p}_F\, s(\alpha)_{i+1}^{\sim} \cap g \text{ et } xZx^{-1} \notin \mathfrak{p}_F\, s(\alpha)_i^{\sim}\right\},$$
$$J_i(Z) = \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{B}|_{\widetilde{\alpha}}} \kappa(\alpha,\beta) \int_{M(\alpha)_i} \int_{A(\alpha,\beta)} \psi \circ q_g(Z, x^{-1}Xx)\,dX\,dx.$$
Le reste de la preuve est sans changement. □

**VII.6.** Pour $j \in \mathcal{J}$, on pose
$$\varepsilon(j) = \begin{cases} 0, & \text{si } j \notin \widehat{\mathcal{J}}, \\ 1, & \text{si } j \in \widehat{\mathcal{J}}. \end{cases}$$
Soit $i \in \{-k' + \varepsilon(k') + 1, \ldots, k' - \varepsilon(k') - 1\}$. On définit un sous $\mathfrak{o}_F$-module $\mathcal{L}'[i]$ de $V$ :

• si $|i| + 1 \notin \widehat{\mathcal{J}}$, c'est le module engendré par $\{v'(i,j);\, j = |i|+1, \ldots, k'\}$, *i.e.* $\mathcal{L}'[i] = L'[i]$ ;

• si $|i| + 1 \in \widehat{\mathcal{J}}$, c'est le module engendré par $\{v'(i,j);\, j = |i|+2, \ldots, k'\}$.

Soit $i \in \{-k'' - \varepsilon(k') + 1, \ldots, k'' + \varepsilon(k') - 1\}$. On définit un sous $\mathfrak{o}_F$-module $\mathcal{L}''[i]$ de $V$ :

- si $i \neq 0$, $\mathcal{L}''[i] = L''[i]$ ;
- si $i = 0$, c'est le module engendré par $L''[0]$ et par l'ensemble

$$\{\omega_F^{-1} v'(j-1,j)\,;\, j \in \widehat{\mathcal{J}}\} \cup \{v'(1-j,j)\,;\, j \in \widehat{\mathcal{J}}\}.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\mathcal{L}'_n = \Big(\bigoplus_{i \geqslant n} \mathcal{L}'[i]\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i \leqslant n-1} \mathfrak{p}_F \mathcal{L}'[i]\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i} \mathfrak{p}_F \mathcal{L}''[i]\Big),$$

$$\mathcal{L}''_n = \Big(\bigoplus_{i} \mathcal{L}'[i]\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i \geqslant n} \mathcal{L}''[i]\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i \leqslant n-1} \mathfrak{p}_F \mathcal{L}''[i]\Big).$$

Remarquons que l'on a les égalités

$$\widetilde{\mathcal{L}'_n} = \mathfrak{p}_F^{-1} \mathcal{L}'_{1-n}, \quad \widetilde{\mathcal{L}''_n} = \mathcal{L}''_{1-n}.$$

Soit $\alpha \in \mathcal{A}$. Pour $j \in \mathcal{J}$, $j \neq 1$ et $n \in \{-j-\varepsilon(j)-2\ell(j)+2, \dots, j-\varepsilon(j)-1\}$, posons

$$\mathfrak{p}^n_{\alpha,j} = \begin{cases} \mathcal{L}'_n \cap V(\alpha,j), & \text{si } -j+\varepsilon(j)+1 \leqslant n \leqslant j-\varepsilon(j)-1, \\ \mathcal{L}''_{n+j+\ell(j)-1} \cap V(\alpha,j), & \text{si } -j-\varepsilon(j)-2\ell(j)+2 \leqslant n \leqslant -j+\varepsilon(j). \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, écrivons

$$n = a(2j+2\ell(j)-2)+b, \quad \text{avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \{-j-\varepsilon(j)-2\ell(j)+2, \dots, j-\varepsilon(j)-1\}$$

et posons

$$\mathfrak{p}^n_{\alpha,j} = \mathfrak{p}_F^a \mathfrak{p}^b_{\alpha,j}.$$

Si $d$ est impair, on pose

$$\mathfrak{p}^n_{\alpha,1} = \mathfrak{p}_F^n v'(\alpha,0,1)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Il est plus parlant de remarquer que pour tout $\beta \in \mathcal{B}(\alpha)$, tout $j \in \mathcal{J}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité :

$$\mathfrak{p}^n_{\alpha,j} = \begin{cases} \varphi_{\alpha,\beta}(\mathfrak{p}^n_{\alpha,\beta,j}), & \text{si } j \notin \widehat{\mathcal{J}}, \text{ ou si } j \in \widehat{\mathcal{J}} \text{ et } q_j(\beta) \notin \mathbb{F}_q^{\times 2}, \\ \varphi_{\alpha,\beta}(\mathfrak{p}^n_{\alpha,\beta,j-1} \oplus \mathfrak{p}^n_{\alpha,\beta,j}), & \text{si } j \in \widehat{\mathcal{J}} \text{ et } q_j(\beta) \in \mathbb{F}_q^{\times 2}. \end{cases}$$

D'autre part :

(1) $$\mathfrak{p}_F(\mathfrak{p}^n_{\alpha,j})^{\sim} \cap V(\alpha,j) = \mathfrak{p}^{1-n}_{\alpha,j}.$$

Soient $j, j' \in \mathcal{J}$ et $i \in \mathbb{Z}$. On note $h(\alpha,j',j)_i$ l'ensemble des $Y \in g\ell(\alpha,j',j)$ vérifiant les conditions suivantes :

- si $j \leqslant j'$,

(2) $$Y(\mathfrak{p}^n_{\alpha,j}) \subset \mathfrak{p}^{n+i+j+\ell(j)-j'-\ell(j')}_{\alpha,j'}, \text{ pour tout } n \text{ tel que } -j-2\ell(j)-\varepsilon(j)+2 \leqslant n \leqslant -j+\varepsilon(j),$$

(3) $$Y(\mathfrak{p}^n_{\alpha,j}) \subset \mathfrak{p}^{n+i}_{\alpha,j}, \text{ pour tout } n \text{ tel que } -j+\varepsilon(j)+1 \leqslant n \leqslant j-\varepsilon(j)-1;$$

• si $j > j'$,

$$Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{n-i-j'-\ell(j')+j+\ell(j)}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-n}, \text{ pour tout } n \text{ tel que } \\ -j'-2\ell(j')-\varepsilon(j')+1 \leqslant n \leqslant -j'+\varepsilon(j')-1, \tag{4}$$

$$Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-n-i}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-n}, \text{ pour tout } n \text{ tel que } -j'+\varepsilon(j') \leqslant n \leqslant j'-\varepsilon(j')-2. \tag{5}$$

Remarquons que si $j \leqslant j'$ et $Y \in h(\alpha, j', j)_i$, on a en fait les inclusions (2) pour tout $n \geqslant -j-2\ell(j)-\varepsilon(j)+2$ et (3) pour tout $n \geqslant -j+\varepsilon(j)+1$. *Idem*, si $j > j'$, on a les inclusions (4) pour tout $n \geqslant -j'-2\ell(j')-\varepsilon(j')+1$ et (5) pour tout $n \geqslant -j'+\varepsilon(j')$.

Si $j = j'$, les relations (2) et (3) sont équivalentes à

$$Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{n}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j}^{n+i} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Pour tous $j, j'$, et tout $i$, on a l'égalité

$$h(\alpha, j, j')_i = h(\alpha, j', j)_i^*.$$

On pose

$$h(\alpha)_i = \bigoplus_{j,j' \in \mathcal{J}} h(\alpha, j', j)_i.$$

D'autre part, on pose

$$h_{\mathcal{L}} = \Big\{ Y \in g\ell ; \forall\, n \in \mathbb{Z}, Y(\mathcal{L}'_n) \subset \mathcal{L}'_n, Y(\mathcal{L}''_n) \subset \mathcal{L}''_n \Big\},$$
$$h^1_{\mathcal{L}} = \Big\{ Y \in g\ell ; \forall\, n \in \mathbb{Z}, Y(\mathcal{L}'_n) \subset \mathcal{L}'_{n+1}, Y(\mathcal{L}''_n) \subset \mathcal{L}''_{n+1} \Big\}.$$

***Lemme***. — *Soit $\alpha \in \mathcal{A}$.*

(i) *Soient $j, j' \in \mathcal{J}$, $i \in \mathbb{Z}$, $X' \in A(\alpha, j')$ et $X \in A(\alpha, j)$. Supposons $j' \geqslant j$ et, si $d$ est impair, $j' \geqslant 2$. On a l'égalité*

$$X' h(\alpha, j', j)_i = h(\alpha, j', j)_{i+1}$$

*et l'inclusion :*

$$h(\alpha, j', j)_i X \subset h(\alpha, j', j)_{i+1}.$$

(ii) *On a les égalités $h(\alpha)_0 = h_{\mathcal{L}}$, $h(\alpha)_1 = h^1_{\mathcal{L}}$.*

(iii) *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité $h(\alpha)_{1-i} = \mathfrak{p}_F h(\alpha)_i^{\sim}$.*

(iv) *Pour tous $j \in \mathcal{J}$, $i \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in \mathcal{B}(\alpha)$, on a l'égalité*

$$h(\alpha, j, j)_i = \big[ h(\alpha, j, j)_i \cap F(\alpha, \beta, j)^{\sim} \big] \oplus \mathfrak{p}(\alpha, \beta, j)^i.$$

**VII.7.** En particulier, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, on a les inclusions

$$h(\alpha)_0 h(\alpha)_0 \subset h(\alpha)_0, \; h(\alpha)_0 h(\alpha)_1 \subset h(\alpha)_1, \; h(\alpha)_1 h(\alpha)_0 \subset h(\alpha)_1.$$

***Lemme***. — *Soient $\alpha \in \mathcal{A}$, $j, j', j'' \in \mathcal{J}$ et $u, v \in \mathbb{N}$.*

(i) *Si $j' \leqslant \sup(j, j'')$, on a l'inclusion*

$$h(\alpha, j'', j')_v h(\alpha, j', j)_u \subset h(\alpha, j'', j)_{u+v}.$$

(ii) *Supposons $j' > j'' \geqslant j$. Si $j'' \neq 1$ ou si $d$ est pair, posons*

$$n_1 = \sup(u+v+j''+\ell(j'')-j'-\ell(j'), \ell(j'')+\varepsilon(j'')-\ell(j)-\varepsilon(j)+1),$$
$$n_2 = \sup(u+v+2j''+2\ell(j'')-2j'-2\ell(j'), j''+2\ell(j'')+\varepsilon(j'')-j+\varepsilon(j)),$$
$$n_3 = u+v,$$
$$n_4 = 2j''+2\ell(j'')-1,$$
$$N = \inf(n_1,n_2,n_3,n_4).$$

*Si $j''=j=1$ et $d$ est impair, on pose*

$$N = \begin{cases} 0, & si\ u+v=0, \\ 1, & si\ 1 \leqslant u+v \leqslant 2j'+2\ell(j')-2, \\ 2, & si\ 2j'+2\ell(j')-1 \leqslant u+v. \end{cases}$$

*Alors on a l'inclusion*

$$h(\alpha,j'',j')_v h(\alpha,j',j)_u \subset h(\alpha,j'',j)_N.$$

**VII.8.** Soient $\alpha \in \mathcal{A}$, $j,j' \in \mathcal{J}$ et $i \in \mathbb{Z}$. Si $d$ est impair, on suppose $j \neq 1$, $j' \neq 1$. On note $h^{\#}(\alpha,j',j)_i$ l'ensemble des $Y \in g\ell(\alpha,j',j)$ vérifiant :

- si $j \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $j \leqslant j'$, l'inclusion VII.6 (3) pour $-j+2 \leqslant n \leqslant j-2$ ;
- si $j' \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $j > j'$, l'inclusion VII.6 (5) pour $-j'+1 \leqslant n \leqslant j'-3$ ;
- si $k'-k''+1 \leqslant j \leqslant j'$, les inclusions VII.6 (2) pour $-j-2\ell(j)+2 \leqslant n \leqslant -j-1$ et VII.6 (3) pour $-j+1 \leqslant n \leqslant j-2$ ;
- si $k'-k''+1 \leqslant j' < j$, les inclusions VII.6 (4) pour $-j'-2\ell(j')+1 \leqslant n \leqslant -j'-2$ et VII.6 (5) pour $-j' \leqslant n \leqslant j'-3$.

On a l'égalité $h^{\#}(\alpha,j,j')_i = h^{\#}(\alpha,j',j)_i^*$.

***Lemme***. — *Soient $\alpha \in \mathcal{A}$, $j,j',j'' \in \mathcal{J}$ et $u,v \in \mathbb{N}$. Supposons $j' > j'' \geqslant j$ et, si $d$ est impair, $j \neq 1$. Si $j \in \widehat{\mathcal{J}}$, posons*

$$n_1 = u+v,$$
$$n_2 = \sup(u+v+j''+\ell(j'')-j'-\ell(j'), j''-\varepsilon(j'')-j+2),$$
$$n_3 = j''+\ell(j'')-j+2,$$
$$N = \inf(n_1,n_2,n_3).$$

*Si $j \geqslant k'-k''+1$, posons*

$$n_1 = u+v,$$
$$n_2 = j''-j+2,$$
$$N = \inf(n_1,n_2).$$

*Alors on a l'inclusion*

$$h(\alpha,j'',j')_v h(\alpha,j',j)_u \subset h^{\#}(\alpha,j'',j)_N.$$

**VII.9.** Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $j, j' \in \mathcal{J}$. Notons $t^{\#}(\alpha, j', j)$ l'ensemble des $Y \in g\ell(\alpha, j', j)$ vérifiant les inclusions

$$Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+\varepsilon(j)}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j'+\varepsilon(j')+1}, \quad Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+\varepsilon(j)+1}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j'+\varepsilon(j')+2},$$
$$Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{j-\varepsilon(j)-1}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'-\varepsilon(j')}, \quad Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{j-\varepsilon(j)}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'-\varepsilon(j')+1}.$$

Notons $\theta^{\#}(\alpha, j', j)$ l'ensemble des $Y \in g\ell(\alpha, j', j)$ vérifiant les inclusions

$$Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+\varepsilon(j)}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j'+\varepsilon(j')+2}, \ Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{j-\varepsilon(j)-1}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'-\varepsilon(j')+1}.$$

On a les égalités

$$t^{\#}(\alpha, j, j') = t^{\#}(\alpha, j', j)^*, \ \theta^{\#}(\alpha, j, j') = \theta^{\#}(\alpha, j', j)^*.$$

Si $\inf(j, j') \notin \widehat{\mathcal{J}}$, on pose

$$t(\alpha, j', j) = t^{\#}(\alpha, j', j), \ \theta(\alpha, j', j) = \theta^{\#}(\alpha, j', j).$$

Si $\inf(j, j') \in \widehat{\mathcal{J}}$, posons $n = \inf(j - \varepsilon(j), j' - \varepsilon(j'))$. On note $t(\alpha, j', j)$ l'ensemble des $Y \in g\ell(\alpha, j', j)$ vérifiant les inclusions :

$$Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+\varepsilon(j)}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-n+1}, \quad Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+\varepsilon(j)+1}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-n+2},$$
$$Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{n-1}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'-\varepsilon(j')}, \quad Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{n}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'-\varepsilon(j')+1}.$$

On note $\theta(\alpha, j', j)$ l'ensemble des $Y \in g\ell(\alpha, j', j)$ vérifiant les inclusions :

$$Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+\varepsilon(j)}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-n+2}, \ Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{n-1}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'-\varepsilon(j')+1}.$$

On a les égalités

$$t(\alpha, j, j') = t(\alpha, j', j)^*, \ \theta(\alpha, j, j') = \theta(\alpha, j', j)^*,$$

et les inclusions :

(1) $$t(\alpha, j', j) \subset t^{\#}(\alpha, j', j), \ \theta(\alpha, j', j) \subset \theta^{\#}(\alpha, j', j).$$

Supposons $j' \geqslant j$, soit $i$ un entier $\geqslant 1$. On vérifie les propriétés suivantes :

(2) si $j \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $i \geqslant j' + \ell(j') - j + 1$, ou si $j \geqslant k' - k'' + 1$ et $i \geqslant j' - j + 1$,

$$h(\alpha, j', j)_i \subset t(\alpha, j', j), \ h(\alpha, j', j)_{i+1} \subset \theta(\alpha, j', j);$$

(3) si $j \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $j' - \varepsilon(j') - j + 2 \leqslant i \leqslant j' + \ell(j') - j + 1$,

$$h(\alpha, j', j)_i \cap t(\alpha, j', j) = \{Y \in h^{\#}(\alpha, j', j)_i ; Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+1}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j+2}\},$$
$$h(\alpha, j', j)_{i+1} \cap \theta(\alpha, j', j) = \{Y \in h^{\#}(\alpha, j', j)_{i+1} ; Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+1}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j+3}\};$$

(4) si $j \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $1 \leqslant i \leqslant j' - \varepsilon(j') - j + 2$,

$$h(\alpha, j', j)_i \cap t(\alpha, j', j)$$
$$= \{Y \in h^{\#}(\alpha, j', j)_i ; Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+1}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j+2}, Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{j-2}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'-\varepsilon(j')}\},$$
$$h(\alpha, j', j)_{i+1} \cap \theta(\alpha, j', j)$$
$$= \{Y \in h^{\#}(\alpha, j', j)_{i+1} ; Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+1}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j+3}, Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{j-2}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'-\varepsilon(j')+1}\};$$

(5) $$\text{si } j \geqslant k' - k'' + 1 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant j' - j + 1,$$
$$h(\alpha, j', j)_i \cap t(\alpha, j', j) = \{Y \in h^{\#}(\alpha, j', j)_i ; Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j'+1}, Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{j-1}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'}\},$$
$$h(\alpha, j', j)_{i+1} \cap \theta(\alpha, j', j) = \{Y \in h^{\#}(\alpha, j', j)_{i+1} ; Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j'+2}, Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{j-1}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'+1}\};$$

(6) $$\text{si } j \in \widehat{\mathcal{J}} \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant j' + \ell(j') - j + 1, \text{ ou si}$$
$$j \geqslant k' - k'' + 1 \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant j' - j + 1,$$
$$h(\alpha, j', j)_i \cap t(\alpha, j', j) = h^{\#}(\alpha, j', j)_i \cap t(\alpha, j', j),$$
$$h(\alpha, j', j)_{i+1} \cap \theta(\alpha, j', j) = h^{\#}(\alpha, j', j)_{i+1} \cap \theta(\alpha, j', j);$$

(7) $$\text{si } j = 1 \text{ et } d \text{ est impair},$$
$$t(\alpha, j', 1) = h(\alpha, j', 1)_{\sup(1, j'+2\ell(j')+\varepsilon(j')-1)},$$
$$\theta(\alpha, j', 1) = h(\alpha, j', 1)_{\sup(2, j'+2\ell(j')+\varepsilon(j'))}.$$

Il résulte de (2) et (7) que

(8) $$\text{pour tout } j \in \mathcal{J}, \ h(\alpha, j, j)_1 \subset t(\alpha, j, j).$$

***Lemme.*** — *Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $j, j', j'' \in \mathcal{J}$.*

(i) *On a l'inclusion*

$$(h(\alpha, j'', j')_1 \cap t(\alpha, j'', j'))(h(\alpha, j', j)_1 \cap t(\alpha, j', j)) \subset \theta(\alpha, j'', j).$$

(ii) *Supposons $j' \geqslant j$ et, si $d$ est impair, $j' \geqslant 2$. Soient $i$ un entier $\geqslant 1$, $X \in A(\alpha, j)$ et $X' \in A(\alpha, j')$. On a l'égalité :*

$$X'(h(\alpha, j', j)_i \cap t(\alpha, j', j)) = h(\alpha, j', j)_{i+1} \cap \theta(\alpha, j', j)$$

*et l'inclusion*

$$(h(\alpha, j', j)_i \cap t(\alpha, j', j))X \subset h(\alpha, j', j)_{i+1} \cap \theta(\alpha, j', j).$$

(iii) *Soient $u, v$ deux entiers $\geqslant 1$. Supposons $j' > j'' \geqslant j$ et, si $d$ est impair, $j \geqslant 2$. Définissons $N$ comme dans l'énoncé du lemme VII.8. Alors on a l'inclusion*

$$(h(\alpha, j'', j')_v \cap t(\alpha, j'', j'))(h(\alpha, j', j)_u \cap t(\alpha, j', j)) \subset h(\alpha, j'', j)_N \cap \theta(\alpha, j'', j).$$

*Démonstration.* — Démontrons (i). Par adjonction, on peut supposer $j'' \geqslant j$. On a l'inclusion évidente

$$t^{\#}(\alpha, j'', j')t^{\#}(\alpha, j', j) \subset \theta^{\#}(\alpha, j'', j).$$

Si $j \notin \widehat{\mathcal{J}}$, $\theta(\alpha, j'', j) = \theta^{\#}(\alpha, j'', j)$ et l'assertion de l'énoncé résulte de (1).

Supposons $j \in \widehat{\mathcal{J}}$, soient $Y' \in h(\alpha, j'', j')_1 \cap t(\alpha, j'', j')$, $Y \in h(\alpha, j', j)_1 \cap t(\alpha, j', j)$. Comme ci-dessus $Y'Y \in \theta^{\#}(\alpha, j'', j)$. Pour prouver que $Y'Y \in \theta(\alpha, j'', j)$, il suffit de prouver l'inclusion

(9) $$Y'Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+1}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j''}^{-j+3}.$$

Supposons $j' \geqslant j$. Puisque $Y \in t(\alpha, j', j)$, on a
$$Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+1}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j+2}.$$
Puisque $Y' \in h(\alpha, j'', j')_1$, on a
$$Y'(\mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j+2}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j''}^{-j+3},$$
d'où résulte (9).

Supposons $j' < j$ et, si $d$ est impair, $j' \neq 1$. Pour les mêmes raisons, on a :
$$Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+1}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j'+2}, \quad Y'(\mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j'+2}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j''}^{-j'+3} \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j''}^{-j+3},$$
d'où résulte (9).

Supposons enfin $d$ impair et $j' = 1$. Puisque $Y \in h(\alpha, 1, j)_1$, on a
$$Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{0}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,1}^{1} = \mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{\alpha,1}^{0}$$
d'où
$$Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+1}) \subset Y(\mathfrak{p}_F^{-1}\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{0}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,1}^{0}.$$
Puisque $Y' \in h(\alpha, j'', 1)_1$, on a
$$Y'(\mathfrak{p}_{\alpha,1}^{0}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j''}^{1} \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j''}^{-j+3},$$
et (9) en résulte. Cela démontre (i). À l'aide de (i), les assertions (ii) et (iii) s'obtiennent comme (i) et (iii) du lemme VI.10. □

**VII.10.** Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, notons $h^i$ l'ensemble des $Y \in g\ell$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ :
$$Y(L'_n) \subset L'_{n+i}, \quad Y(L''_n) \subset L''_{n+i}.$$
Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $j, j' \in \mathcal{J}$. On pose
$$h(\alpha, j', j)^i = g\ell(\alpha, j', j) \cap h^i.$$
On a les égalités
$$\begin{gathered} h(\alpha, j, j')^i = (h(\alpha, j', j)^i)^*, \\ \mathfrak{p}_F (h(\alpha, j, j')^i)^{\sim} = h(\alpha, j', j)^{1-i}, \\ h^i = \bigoplus_{j,j' \in \mathcal{J}} h(\alpha, j', j). \end{gathered}$$

Si $j \notin \widehat{\mathcal{J}}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a les égalités :
$$L'_n \cap V(\alpha, j) = \mathcal{L}'_n \cap V(\alpha, j), \quad L''_n \cap V(\alpha, j) = \mathcal{L}''_n \cap V(\alpha, j).$$
Ces termes sont décrits en VII.7.

Si $j \in \widehat{\mathcal{J}}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a les égalités :
$$L'_n \cap V(\alpha, j) = \begin{cases} \mathfrak{p}_F v'(\alpha, -j+1, j) + \mathfrak{p}_{\alpha,j}^{j} \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j}^{j-1} = \mathcal{L}'_n \cap V(\alpha, j), \text{ si } j \leqslant n, \\ \mathfrak{p}_{\alpha,j}^{n} = \mathcal{L}'_n \cap V(\alpha, j), \text{ si } -j+2 \leqslant n \leqslant j-1, \\ \mathfrak{o}_F v'(\alpha, -j+1, j) + \mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+2} \supset \mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+2} = \mathcal{L}'_n \cap V(\alpha, j), \\ \qquad \text{si } n \leqslant -j+1; \end{cases}$$

$$L''_n \cap V(\alpha, j) = \mathfrak{o}_F v'(\alpha, -j+1, j) + \mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+2} \begin{cases} \supset \mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+2} = \mathcal{L}''_n \cap V(\alpha, j), & \text{si } 1 \leqslant n, \\ \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+1} = \mathcal{L}''_n \cap V(\alpha, j), & \text{si } n \leqslant 0. \end{cases}$$

On déduit de ces formules les égalités suivantes :

• si $k' - k'' + 1 \leqslant j \leqslant j'$,

(1) $$h(\alpha, j', j)^1 = h(\alpha, j', j)_1 ;$$

(2) $$h(\alpha, j', j)^1 \cap t(\alpha, j', j) = \Big\{ Y \in h(\alpha, j', j)^1 ; Y(v'(\alpha, j-1, j)) \in \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'}, \\ Y(v''(\alpha, \ell(j)-1, j)) \in \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j'+1} \Big\} ;$$

(3) $$h(\alpha, j', j)^2 = \begin{cases} h(\alpha, j', j)_2, & \text{si } j < j', \\ h^{\#}(\alpha, j, j)_2 \supset h(\alpha, j, j)_2, & \text{si } j' = j ; \end{cases}$$

(4) $$h(\alpha, j', j)^2 \cap \theta(\alpha, j', j) = h(\alpha, j', j)_2 \cap \theta(\alpha, j', j)$$
$$= \big\{ Y \in h(\alpha, j', j)^2 ; Y(v'(\alpha, j-1, j)) \in \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'+1}, Y(v''(\alpha, \ell(j)-1, j)) \in \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j'+2} \big\} ;$$

• si $j \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $j \leqslant j'$,

(5) $h(\alpha, j', j)^1$ est l'ensemble des $Y \in g\ell(\alpha, j', j)$ vérifiant les conditions :

• $Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^n) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{n+1}$, pour tout $n$ tel que $\begin{cases} -j+2 \leqslant n \leqslant j-1, & \text{si } j' > j, \\ -j+2 \leqslant n \leqslant j-2, & \text{si } j' = j, \end{cases}$

• $Y(v'(\alpha, 1-j, j)) \in \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j+2}$,

• si $j' = j$, $Y(v'(\alpha, j-1, j)) \in \mathfrak{p}_F v'(\alpha, 1-j, j) + \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j}$ ;

(6) $h(\alpha, j', j)^2$ est l'ensemble des $Y \in g\ell(\alpha, j', j)$ vérifiant les conditions :

• $Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^n) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{n+2}$, pour tout $n$ tel que $\begin{cases} -j+2 \leqslant n \leqslant j-1, & \text{si } j' > j, \\ -j+2 \leqslant n \leqslant j-3, & \text{si } j' = j, \end{cases}$

• $Y(v'(\alpha, 1-j, j)) \in \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j+3}$,

• si $j' = j$, $Y(v'(\alpha, j-2, j))$, $Y(v'(\alpha, j-2, j-1))$ et $Y(v'(\alpha, j-1, j))$ appartiennent tous trois à $\mathfrak{p}_F v'(\alpha, 1-j, j) + \mathfrak{p}_{\alpha,j}^{j}$ ;

(7) $$h(\alpha, j', j)^1 \cap t(\alpha, j', j) = \Big\{ Y \in h^{\#}(\alpha, j', j)_1 ; Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{j-2}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'-\varepsilon(j')}, \\ Y(v'(\alpha, 1-j, j)) \in \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{2-j}, Y(v'(\alpha, j-1, j)) \in \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{2j'+2\ell(j')-j} \Big\} ;$$

$$(8)\quad h(\alpha,j',j)^1\cap t(\alpha,j',j)=\left\{Y\in h(\alpha,j',j)^1\,;\,Y(v'(\alpha,j-1,j))\in\mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{2j'+2\ell(j')-j},\right.$$
$$\left.\left.\begin{array}{l}Y(v'(\alpha,j-2,j-1))\\ Y(v'(\alpha,j-2,j))\end{array}\right\}\in\mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'-\varepsilon(j')}\right\};$$

$$(9)\ h(\alpha,j',j)^2\cap\theta(\alpha,j',j)=\left\{Y\in h^{\#}(\alpha,j',j)_2\,;\,Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{j-2})\subset\mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'-\varepsilon(j')+1},\right.$$
$$\left.Y(v'(\alpha,1-j,j))\in\mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{3-j},\,Y(v'(\alpha,j-1,j))\in\mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{2j'+2\ell(j')-j+1}\right\};$$

(10)
$$h(\alpha,j',j)^2\cap\theta(\alpha,j',j)=\left\{Y\in h(\alpha,j',j)^2\,;\,Y(v'(\alpha,j-1,j))\in\mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{2j'+2\ell(j')-j+1},\right.$$
$$\left.\left.\begin{array}{l}Y(v'(\alpha,j-2,j-1))\\ Y(v'(\alpha,j-2,j))\end{array}\right\}\in\mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'-\varepsilon(j')+1}\right\};$$

- si $d$ est impair et $j=1$,

$$(11)\qquad h(\alpha,j',1)^1=h(\alpha,j',1)_1\,;$$

$$(12)\qquad h(\alpha,j',1)^1\cap t(\alpha,j',1)=h(\alpha,j',1)_{\sup(1,j'+2\ell(j')+\varepsilon(j')-1)}\,;$$

$$(13)\qquad h(\alpha,j',1)^2=\begin{cases}h(\alpha,j',1)_2, & \text{si } j'>1,\\ h(\alpha,1,1)_1, & \text{si } j'=1;\end{cases}$$

$$(14)\qquad h(\alpha,j',1)^2\cap\theta(\alpha,j',1)=h(\alpha,j',1)_{\sup(2,j'+2\ell(j')+\varepsilon(j'))}\,.$$

***Lemme***. — *Soient $\alpha\in\mathcal{A}$, $j,j',j''\in\mathcal{J}$, $X\in A(\alpha,j)$ et $X'\in A(\alpha,j')$.*

(i) *On a les inclusions :*

$$\left.\begin{array}{l}X'h(\alpha,j',j)^1\\ h(\alpha,j',j)^1X\end{array}\right\}\subset h(\alpha,j',j)^2\,;$$

*si $j'>j$, on a l'égalité*

$$X'h(\alpha,j',j)^1=h(\alpha,j',j)^2\,.$$

(ii) *On a l'égalité*

$$h(\alpha,j',j)^1\cap t(\alpha,j',j)=h(\alpha,j',j)_1\cap t(\alpha,j',j)\,.$$

(iii) *Supposons $j' \geqslant j$. On a l'égalité*

$$X'(h(\alpha,j',j)^1 \cap t(\alpha,j',j)) = h(\alpha,j',j)^2 \cap \theta(\alpha,j',j),$$

*et l'inclusion*

$$(h(\alpha,j',j)^1 \cap t(\alpha,j',j))X \subset h(\alpha,j',j)^2 \cap \theta(\alpha,j',j).$$

(iv) *Si $j \in \widehat{\mathcal{J}}$, on a l'égalité*

$$h(\alpha,j,j)^1 \cap t(\alpha,j,j) \cap g = h(\alpha,j,j)^1 \cap g.$$

(v) *Si $j \notin \widehat{\mathcal{J}}$ et $j'' \geqslant j \geqslant j'$ ou si $j \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $j'' \geqslant j > j'$, on a les inclusions :*

$$h(\alpha,j'',j')^0 h(\alpha,j',j)^1 \subset h(\alpha,j'',j)^1 \cap t(\alpha,j'',j),$$
$$h(\alpha,j'',j')^1 h(\alpha,j',j)^1 \subset h(\alpha,j'',j)^2 \cap \theta(\alpha,j'',j).$$

(vi) *Si $j' > j$, on a l'inclusion*

$$h(\alpha,j',j)^0 h(\alpha,j,j)^2 \subset h(\alpha,j',j)^2 \cap \theta^\#(\alpha,j',j).$$

*Démonstration.* — D'après (1), (5) et (11), on a l'inclusion

$$h(\alpha,j,j)_1 \subset h(\alpha,j,j)^1.$$

En particulier $X \in h(\alpha,j,j)^1$. À l'exception de (iv), les assertions de l'énoncé se déduisent des formules (1) à (11) et des lemmes VII.6 et VII.9 par des calculs standards. Démontrons (iv). Soient $j \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $Y \in h(\alpha,j,j)^1 \cap g$. On a :

$$\left.\begin{matrix} v'(\alpha,j-2,j-1) \\ v'(\alpha,j-2,j) \end{matrix}\right\} \in L'_{j-2} \cap V(\alpha,j),$$
$$v'(\alpha,j-1,j) \in L'_{j-1} \cap V(\alpha,j).$$

D'où

$$\left.\begin{matrix} Y(v'(\alpha,j-2,j-1)) \\ Y(v'(\alpha,j-2,j)) \end{matrix}\right\} \in Y(L'_{j-2} \cap V(\alpha,j)) \subset L'_{j-1} \cap V(\alpha,j) = \mathfrak{p}^{j-1}_{\alpha,j},$$

et

$$\begin{aligned} Y(v'(\alpha,j-1,j)) \in Y(L'_{j-1} \cap V(\alpha,j)) \subset L'_j \cap V(\alpha,j) &= \mathfrak{p}_F L'_{1-j} \cap V(\alpha,j) \\ &= \mathfrak{p}_F v'(\alpha,1-j,j) + \mathfrak{p}^j_{\alpha,j}. \end{aligned}$$

Puisque $Y \in g$, on a

$$q_V(Y(v'(\alpha,j-1,j)), v'(\alpha,j-1,j)) = 0.$$

La composante de $Y(v'(\alpha,j-1,j))$ sur $v'(\alpha,1-j,j)$ (en un sens évident) est donc nulle et la relation précédente implique

$$Y(v'(\alpha,j-1,j)) \in \mathfrak{p}^j_{\alpha,j}.$$

On déduit alors de (8) que $Y \in h(\alpha,j,j)^1 \cap t(\alpha,j,j)$. □

**VII.11.** Soit $a \in \mathcal{J}$, $a \geqslant 2$. Considérons :

- des fonctions $n', n'' : \mathcal{J} \cap \{a+1, \dots, k'\} \to \mathbb{Z}$ ;
- un entier $e \in \{0, 1\}$ ;
- pour tous $\alpha \in \mathcal{A}$, $j, j' \in \mathcal{J}$, un réseau $r(\alpha, j', j)$ de $g\ell(\alpha, j', j)$.

Supposons vérifiées les hypothèses suivantes :

(1) $$\text{pour tout } j \in \mathcal{J} \cap \{a+1, \dots, k'\},\ n'(j) \leqslant j,\ n''(j) \leqslant 1 - a + \varepsilon(a);$$

pour tous $\alpha \in \mathcal{A}$ et $j, j' \in \mathcal{J}$,

(2) $$r(\alpha, j, j') = r(\alpha, j', j)^* ;$$

(3) $$\text{si } \inf(j, j') < a,\ r(\alpha, j', j) = h(\alpha, j', j)^{1+e} ;$$

(4) $$\text{si } j' \geqslant a,\ r(\alpha, j', a) = \Big\{ Y \in h(\alpha, j', a)^{1+e} ; Y(\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{-a+\varepsilon(a)}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{n''(j')+e},\ Y(\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{a-\varepsilon(a)-1}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{n'(j')+e} \Big\} ;$$

(5) $$\text{si } \inf(j, j') > a,\ r(\alpha, j', j) \text{ ne dépend que de } \alpha_{>a}.$$

Cette dernière condition a un sens car, pour $\inf(j, j') > a$, l'espace $g\ell(\alpha, j', j)$ lui-même ne dépend que de $\alpha_{>a}$, en vertu du choix de nos vecteurs de base, *cf.* VII.1.

Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, posons

$$r(\alpha) = \bigoplus_{j, j' \in \mathcal{J}} r(\alpha, j', j).$$

***Lemme***. — *Sous ces hypothèses, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, le réseau $r(\alpha)$ ne dépend que de $\alpha_{>a}$.*

(6) ***Remarque***. — On a supposé $a \geqslant 2$. Si $a = 1$, tout objet dépendant de $\alpha$ ne dépend que de $\alpha_{>1}$ car la projection de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}_{>1}$ est bijective.

*Démonstration*. — Soit $\alpha \in \mathcal{A}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, écrivons $n = u(2a + 2\ell(a) - 2) + v$, avec $-a - 2\ell(a) + 2 \leqslant v \leqslant a - 1$. On a alors l'égalité :

(7) $$\mathfrak{p}_{\alpha,a}^n = \begin{cases} \mathfrak{p}_F^u L'_v \cap V(\alpha, a), & \text{si } a \in \widehat{\mathcal{J}}, \\ \mathfrak{p}_F^u L'_v \cap V(\alpha, a), & \text{si } a \geqslant k' - k'' + 1 \text{ et } -a + 1 \leqslant v \leqslant a - 1, \\ \mathfrak{p}_F^u L''_{v+a+\ell(a)-1} \cap V(\alpha, a), & \text{si } a \geqslant k' - k'' + 1 \\ & \text{et } -a - 2\ell(a) + 2 \leqslant v \leqslant -a. \end{cases}$$

Pour $j \in \mathcal{J}$, $j \geqslant a$, posons

$$m(j) = \begin{cases} e + n''(j), & \text{si } a \geqslant k' - k'' + 1, \\ e + \sup(n'(j), n''(j) + 2j + 2\ell(j) - 2), & \text{si } a \in \widehat{\mathcal{J}}. \end{cases}$$

Si $a \geqslant k' - k'' + 1$, posons

$$s'(\alpha) = L'[a-1] \cap V(\alpha, a)$$
$$s''(\alpha) = L''[\ell(a)-1] \cap V(\alpha, a),$$

$$t'(\alpha) = \begin{cases} L''[\ell(a)-1] \cap V(\alpha,a), & \text{si } e + n'(a) = a+1, \\ \{0\}, & \text{si } e + n'(a) \leqslant a, \end{cases}$$

$$t''(\alpha) = \begin{cases} L'[a-1] \cap V(\alpha,a), & \text{si } m(a) = 2-a, \\ \{0\}, & \text{si } m(a) \leqslant 1-a. \end{cases}$$

Si $a \in \widehat{\mathcal{J}}$, posons

$$s'(\alpha) = L'[a-2] \cap V(\alpha, a),$$
$$s''(\alpha) = L'[a-1] \cap V(\alpha, a),$$

$$t'(\alpha) = \begin{cases} (\mathfrak{p}_F^{-1} L'[a-2] + \mathfrak{p}_F^{-1} L'[a-1]) \cap V(\alpha,a), \text{ si } e=1 \text{ et } n'(a) = a, \\ \mathfrak{p}_F^{-1} L'[a-1] \cap V(\alpha,a), \text{ si } e=1 \text{ et } n'(a)=a-1, \\ (\mathfrak{p}_F^{-1} L'[a-1] + L'[1-a] + L'[2-a]) \cap V(\alpha,a), \text{ si } e=0 \text{ et } n'(a)=a, \\ L'[2-a] \cap V(\alpha,a), \text{ si } e=0 \text{ et } n'(a)=a-1, \\ \{0\}, \text{ si } n'(a) \leqslant a-2, \end{cases}$$

$$t''(\alpha) = \begin{cases} (\mathfrak{p}_F^{-1} L'[a-2] + \mathfrak{p}_F^{-1} L'[a-1]) \cap V(\alpha,a), & \text{si } m(a) = a+1, \\ \mathfrak{p}_F^{-1} L'[a-1] \cap V(\alpha,a), & \text{si } m(a) = a, \\ \{0\}, & \text{si } m(a) \leqslant a-1. \end{cases}$$

Grâce à (7), on vérifie les égalités suivantes :

- si $a \geqslant k' - k'' + 1$,

$$\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{-a} = s''(\alpha) + L'_{1-a} \cap V(\alpha,a),$$
$$\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{a-1} = s'(\alpha) + L'_{a} \cap V(\alpha,a),$$
$$\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{1-m(a)} = t''(\alpha) + \mathfrak{p}_{\alpha,a}^{\sup(a,1-m(a))},$$
$$\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{1-e-n'(a)} = t'(\alpha) + \mathfrak{p}_{\alpha,a}^{\sup(1-a,1-e-n'(a))};$$

- si $a \in \widehat{\mathcal{J}}$,

(8) $$\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{-a+1} = \mathfrak{p}_F^{-1} s''(\alpha) + L'_{1-a} \cap V(\alpha,a),$$

(9) $$\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{a-2} = s'(\alpha) + s''(\alpha) + L'_{a} \cap V(\alpha,a),$$

$$\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{1-m(a)} = t''(\alpha) + L'_{1-a} \cap \mathfrak{p}_{\alpha,a}^{1-m(a)},$$

$$\text{(10)} \qquad \mathfrak{p}_{\alpha,a}^{1-e-n'(a)} = t'(\alpha) + L'_{2-e-a} \cap \mathfrak{p}_{\alpha,a}^{1-e-n'(a)}.$$

Démontrons les relations :

$$\text{(11)} \qquad \text{pour tout } j' \in \mathcal{J},\ j' > a,$$
$$r(\alpha, j', a) = \left\{ Y \in h(\alpha, j', a)^{1+e} ; Y(s'(\alpha)) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{e+n'(j')}, Y(s''(\alpha)) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{m(j')} \right\};$$

(12) $r(\alpha, a, a)$ est l'ensemble des $Y \in h(\alpha, a, a)^{1+e}$ vérifiant la condition suivante :

$$\text{pour tout } (v, w) \in s'(\alpha) \times t'(\alpha) \text{ ou } (v, w) \in s''(\alpha) \times t''(\alpha),$$
$$q_V(Y(v), w) \in \mathfrak{p}_F.$$

Supposons par exemple $a \in \widehat{\mathcal{J}}$ (un raisonnement analogue s'applique si $a \geqslant k'-k''+1$). Soient $j' \in \mathcal{J}$, $j' \geqslant a$ et $Y \in h(\alpha, j', a)^{1+e}$. On a les inclusions :

$$Y(L'_{1-a} \cap V(\alpha, a)) \subset L'_{2-a+e} \cap V(\alpha, j') = \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{2-a+e} \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{e+n''(j')},$$

$$\begin{aligned} Y(L'_a \cap V(\alpha, a)) = Y(\mathfrak{p}_F L'_{1-a} \cap V(\alpha, a)) &\subset \mathfrak{p}_F L'_{2-a+e} \cap V(\alpha, j') \\ &= \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{2j'+2\ell(j')-a+e} \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{e+n'(j')}. \end{aligned}$$

Par définition, $Y \in r(\alpha, j', a)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$Y(\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{-a+1}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{n''(j')+e}, \quad Y(\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{a-2}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{n'(j')+e}.$$

D'après (8), (9) et les inclusions ci-dessus, ces conditions sont équivalentes à

$$Y(\mathfrak{p}_F^{-1} s''(\alpha)) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{n''(j')+e}, \quad Y(s'(\alpha) + s''(\alpha)) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{e+n'(j')}.$$

Celles-ci sont équivalentes à

$$\text{(13)} \qquad Y(s'(\alpha)) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{e+n'(j')}, \quad Y(s''(\alpha)) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{m(j')}.$$

Cela démontre (11).

Considérons le cas $j' = a$. Puisque

$$\mathfrak{p}_F(\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{e+n'(a)})^{\sim} = \mathfrak{p}_{\alpha,a}^{1-e-n'(a)},$$

la première inclusion ci-dessus est équivalente à :

$$\text{(14)} \qquad q_V(Y(v), w) \in \mathfrak{p}_F$$

pour tous $v \in s'(\alpha)$, $w \in \mathfrak{p}_{\alpha,a}^{1-e-n'(a)}$. Mais $s'(\alpha) \subset L'_{a-2}$, donc $Y(s'(\alpha)) \subset L'_{a-1+e}$. Puisque

$$\mathfrak{p}_F \widetilde{L}'_{a-1+e} = L'_{2-e-a},$$

la relation (14) est vérifiée pour tous $v \in s'(\alpha)$, $w \in L'_{2-e-a} \cap \mathfrak{p}_{\alpha,a}^{1-e-n'(a)}$. Grâce à (10), la première inclusion de (13), pour $j' = a$ est équivalente à la relation (14) pour tous $v \in s'(\alpha)$, $w \in t'(\alpha)$. De même, la deuxième inclusion de (13) est équivalente à la relation (14) pour tous $v \in s''(\alpha)$, $w \in t''(\alpha)$. Cela démontre (12).

Fixons $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{A}_{>a}$. Pour $\alpha \in \mathcal{A}|_{\widetilde{\alpha}}$, posons

$$V_1 = \bigoplus_{j \leqslant a} V(\alpha, j), \quad V_2 = \bigoplus_{j > a} V(\alpha, j),$$

$$T' = \bigoplus_{j>a} \mathfrak{p}_{\alpha,j}^{e+n'(j)}, \quad T'' = \bigoplus_{j>a} \mathfrak{p}_{\alpha,j}^{m(j)}.$$

Pour $j > a$, nos vecteurs de base $V(\alpha, i, j)$ sont indépendants de $\alpha \in \mathcal{A}|_{\widetilde{\alpha}}$. Il en est donc de même de l'espace $V_2$ et de ses sous-modules $T'$ et $T''$. L'espace $V_1$ étant l'orthogonal de $V_2$ est lui aussi indépendant de $\alpha$. Pour $Y \in g\ell$ et $k, \ell \in \{1, 2\}$, notons $Y_{k,\ell}$ la composante de $Y$ dans $\mathrm{Hom}(V_\ell, V_k)$. Grâce à (2), (3), (11) et (12) la condition $Y \in r(\alpha)$ est équivalente aux conditions suivantes

- $Y_{11} \in \mathrm{End}(V_1) \cap h^{1+e}$ ;
- $Y_{22} \in \oplus_{j,j' \in \mathcal{J} \cap \{a+1, \dots, k'\}} r(\alpha, j', j)$ ;
- pour $Z = Y_{21}$ ou $Y_{12}^*$, $Z \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \cap h^{1+e}$, $Z(s'(\alpha)) \subset T'$, $Z(s''(\alpha)) \subset T''$ ;
- pour tout $(v, w) \in s'(\alpha) \times t'(\alpha)$ ou $(v, w) \in s''(\alpha) \times t''(\alpha)$,

$$q_V(Y(v), w) \in \mathfrak{p}_F.$$

La première condition est indépendante de $\alpha$. La deuxième l'est aussi d'après l'hypothèse (5). Pour démontrer que les deux dernières conditions sont indépendantes de $\alpha$, il suffit de prouver que les modules $s'(\alpha)$, $s''(\alpha)$, $t'(\alpha)$ et $t''(\alpha)$ le sont. Rappelons que nos vecteurs de base $v(\alpha, i, j)$ sont indépendants de $\alpha$ pour $i \neq 0$. Donc $L'[i] \cap V(\alpha, a)$ et $L''[i] \cap V(\alpha, a)$ le sont aussi pour $i \neq 0$. En se rappelant que $a \geqslant 2$ et en considérant la définition des modules $s'(\alpha)$, $s''(\alpha)$, $t'(\alpha)$, $t''(\alpha)$, on est ramené à prouver :

- si $a = k' - k'' + 1$, $L''[0] \cap V(\alpha, a)$ est indépendant de $\alpha \in \mathcal{A}|_{\widetilde{\alpha}}$ ;
- si $a = 2 \in \widehat{\mathcal{J}}$, $L'[0] \cap V(\alpha, a)$ est indépendant de $\alpha \in \mathcal{A}|_{\widetilde{\alpha}}$.

Dans le premier cas, $L''[0] \cap V(\alpha, a) = L''[0] \cap V_1$. Dans le second $L'[0] \cap V(\alpha, a) = L'[0] \cap V_1$. Cela achève la démonstration. □

**VII.12.** Nous allons définir $k' + 4$ ensembles de données. Nous montrerons ensuite que chacun d'eux vérifie les hypothèses de VII.4.

Pour $a \in \{-3, \dots, 0\} \cup \mathcal{J}$, on pose

$$b(a) = \sup(0, a),$$

et, si $a \in \widehat{\mathcal{J}}$,

$$b(a-1) = a - 2.$$

Soient $\alpha \in \mathcal{A}$, $j, j' \in \mathcal{J}$ avec $j' \geqslant j$ et $i$ un entier $\geqslant 1$. On pose :

$$r(-3; \alpha, j', j)_i = \mathfrak{p}_F^i h_{\mathcal{L}} \cap g\ell(\alpha, j', j);$$

$$n(-2,j',j;i)=\begin{cases}\inf(j'+2\ell(j')+\varepsilon(j')-j-2\ell(j)-\varepsilon(j)+i,\,2j'+2\ell(j')-2),\\ \qquad\qquad\qquad\text{si } j>1 \text{ ou si } d \text{ est pair},\\ \inf(j'+2\ell(j')+\varepsilon(j')-2+i,\,2j'+2\ell(j')-2),\\ \qquad\qquad\qquad\text{si } j'>j=1 \text{ et } d \text{ est impair},\\ 1,\ \text{si } j'=j=1 \text{ et } d \text{ est impair},\end{cases}$$

$$r(-2;\alpha,j',j)_i=h(\alpha,j',j)_{n(-2;j',j;i)}\,;$$

$$n(-1;j',j;i)=\begin{cases}\inf(j'-\varepsilon(j')-j+\varepsilon(j)+i,\,j'+2\ell(j')+2(j')-j\\ \qquad\qquad -2\ell(j)-\varepsilon(j)+1),\ \text{si } j>1 \text{ ou si } d \text{ est pair},\\ \inf(j'-\varepsilon(j')+i-1,\,j'+2\ell(j')+\varepsilon(j')-1),\\ \qquad\qquad\qquad\text{si } j'>j=1 \text{ et } d \text{ est impair},\\ 1,\ \text{si } j'=j=1 \text{ et } d \text{ est impair},\end{cases}$$

$$n(0;j',j;i)=\inf(i,j'-\varepsilon(j')-j+\varepsilon(j)+1),$$

et, pour $a\in\{-1,0\}$,

$$r(a;\alpha,j',j)_i=h(\alpha,j',j)_{n(a;j',j;i)}\cap t(\alpha,j',j);$$

si $d$ est impair,

- si $j'>1$,

$$n(1;j';i)=\begin{cases}j'+2\ell(j')+\varepsilon(j')-1,\ \text{si } k'+2k''+\varepsilon(k')-1\leqslant i,\\ \inf(j'+2\ell(j')+\varepsilon(j')-2,\,i-k'-k''+j'+\ell(j')),\\ \qquad\qquad\text{si } k'+k''-1\leqslant i\leqslant k'+2k''+\varepsilon(k')-2,\\ \sup(j'-\varepsilon(j'),\,i-k'-k''+j'+\ell(j')),\\ \qquad\qquad\text{si } k'-\varepsilon(k')\leqslant i\leqslant k'+k''-1,\\ \inf(j'-\varepsilon(j')-1,i),\ \text{si } 1\leqslant i\leqslant k'-\varepsilon(k')-1,\end{cases}$$

$$r(1;\alpha,j',j)_i=\begin{cases}h(\alpha,j',j)^1\cap t(\alpha,j',j), & \text{si } j>1 \text{ ou si } j'=j=1,\\ h(\alpha,j',1)_{n(1;j';i)}, & \text{si } j'>j=1;\end{cases}$$

- si $a\in\widehat{\mathcal{J}}$ et $j'>a$,

$$\begin{cases}n''(a-1;j';i)=\begin{cases}2-a,\ \text{si } k'-\varepsilon(k')-a+3\leqslant i,\\ \sup(-k'+\varepsilon(k')+i-1,-j'+\varepsilon(j')+1),\\ \qquad\qquad\text{si } 1\leqslant i\leqslant k'-\varepsilon(k')-a+2,\end{cases}\\ \\ n'(a-1;j';i)=\begin{cases}j'-\varepsilon(j'),\ \text{si } i\geqslant 2,\\ j'-\varepsilon(j')-1,\ \text{si } i=1,\end{cases}\end{cases}$$

$$r(a-1;\alpha,j',j)_i = \begin{cases} h(\alpha,j',j)^1, \text{ si } j<a, \\ \Big\{Y\in h(\alpha;j',a)^1; Y(\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{1-a})\subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{n''(a-1;j';i)}, Y(\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{a-2})\subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{n'(a-1;j';i)}\Big\}, \\ \qquad\qquad \text{si } j=a<j', \\ h(\alpha,j',j)^1\cap t(\alpha,j',j), \text{ si } a<j \text{ ou } a=j=j'; \end{cases}$$

- si $a\in\widehat{\mathcal{J}}$ et $j'>a$,

$$n''(a;j';i) = \begin{cases} -j'+\varepsilon(j')+1, \text{ si } 2k'+2k''-2a\leqslant i, \\ -j'+\varepsilon(j'), \text{ si } 2k'+k''-\varepsilon(k')+\ell(j')+\varepsilon(j')-2e \\ \qquad\qquad \leqslant i\leqslant 2k''+2k'-2a-1, \\ \sup(-j'-\ell(j')-2k'-k''+\varepsilon(k')+2a+1+i, \\ \qquad\qquad -j'-2\ell(j')-\varepsilon(j')+2), \\ \text{si } 2k'-2\varepsilon(k')-2a+1\leqslant i\leqslant 2k'+k''-\varepsilon(k')+\ell(j')+\varepsilon(j')-2a-1, \\ -j'-2\ell(j')-\varepsilon(j')+2, \text{ si } k'-\varepsilon(k')-a+1\leqslant i\leqslant 2k'-2\varepsilon(k')-2a, \\ \inf(-2j'-2\ell(j')+a+1+i, -j'-2\ell(j')-\varepsilon(j')+1), \\ \qquad\qquad \text{si } 1\leqslant i\leqslant k'-\varepsilon(k')-a, \end{cases}$$

$$n'(a;j';i) = \begin{cases} j'-\varepsilon(j')-1, \text{ si } 2k'-2\varepsilon(k')-2a+1\leqslant i, \\ \inf(-k'+\varepsilon(k')+2a-2+i, j'-\varepsilon(j')-1), \\ \qquad\qquad \text{si } k'-\varepsilon(k')-a+1\leqslant i\leqslant 2k'-2\varepsilon(k')-2a, \\ a-1, \text{ si } 1\leqslant i\leqslant k'-\varepsilon(k')-a; \end{cases}$$

- si $a\in\{k'-k''+1,\dots,k'\}$ et $j'>a$,

$$n''(a;j';i) = \begin{cases} -j'+1, \text{ si } k'-a+1\leqslant i, \\ \inf(a-2j'+i, -j'), \text{ si } 1\leqslant i\leqslant k'-a, \end{cases}$$

$$n'(a;j';i) = \begin{cases} j', \text{ si } k'-a+1\leqslant i, \\ \inf(a-1+i, j'-1), \text{ si } 1\leqslant i\leqslant k'-a; \end{cases}$$

- si $a\in\widehat{\mathcal{J}}\cup\{k'-k''+1,\dots,k'\}$,

$$r(a;\alpha,j',j)_i = \begin{cases} h(\alpha,j',j)^1, \text{ si } j<a \text{ ou si } a=j=j', \\ \Big\{Y\in h(\alpha;j',a)^1; Y(\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{-a+\varepsilon(a)})\subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{n''(a;j';i)}, Y(\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{a-1-\varepsilon(a)}) \\ \qquad\qquad \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{n'(a;j';i)}\Big\}, \text{ si } j=a<j', \\ h(\alpha,j',j)^1\cap t(\alpha,j',j), \text{ si } a<j. \end{cases}$$

Pour $a \in \mathcal{J}$ et $\alpha \in \mathcal{A}$, on note $m(a;\alpha)$ l'ensemble des $Y \in g\ell$ vérifiant les conditions suivantes :

- pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$Y(L'[n]) \subset L'[n] \cap \Big( \bigoplus_{j \leqslant a} V(\alpha, j) \Big),$$
$$Y(L''[n]) \subset L''[n] \cap \Big( \bigoplus_{j \leqslant a} V(\alpha, j) \Big);$$

- pour tout entier $n \leqslant 0$,

$$Y(L'[n]) \subset L'[n],$$
$$Y\Big(L'[n] \cap \Big( \bigoplus_{j > a} V(\alpha, j) \Big)\Big) = \{0\},$$
$$Y(L''[n]) \subset L''[n],$$
$$Y\Big(L''[n] \cap \Big( \bigoplus_{j > a} V(\alpha, j) \Big)\Big) = \{0\}.$$

Pour $a \in \{-3, \ldots, 0\} \cup \mathcal{J}$, $\alpha \in \mathcal{A}$ et $j, j' \in \mathcal{J}$, avec $j' \geqslant j$, on pose

$$m(a;\alpha, j', j) = \begin{cases} \{0\}, & \text{si } a \in \{-3, \ldots, 0\}, \\ m(a;\alpha) \cap g\ell(\alpha, j', j), & \text{si } a \in \mathcal{J}. \end{cases}$$

Pour $a \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $\alpha, j, j'$ comme ci-dessus, on pose

$$m(a-1;\alpha, j', j) = m(a-2;\alpha, j', j).$$

Pour $a \in \{-3, \ldots, k'\}$, on pose

$$J(a) = \begin{cases} \mathcal{J} \cap \{1, \ldots, b(a)\}, & \text{si } si \ d \text{ est pair}, \\ \{1\} \cup (\mathcal{J} \cap \{1, \ldots, b(a)\}), & \text{si } d \text{ est impair}, \end{cases}$$

et pour $\alpha \in \mathcal{A}$ et $j \in J(a)$, on pose :

$$s(a;\alpha, j) = h(\alpha, j, j)^2.$$

Enfin, pour $a \in \{-3, \ldots, k'\}$ et $\alpha \in \mathcal{A}$, on note $M(a;\alpha)$ l'ensemble des $x \in G$ tels que

- $x \in 1 + m(a;\alpha)$,
- les éléments de $O(L'_0/L'_1)$ et $O(L''_0/L''_1)$ que définit $x$ sont de déterminant égal à 1.

***Remarques***

(1) Pour tout $a \in \{-3, \ldots, k'\}$, tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et tous $j, j' \in \mathcal{J}$, avec $j' \geqslant j$, on a $r(a;\alpha, j', j)_i \subset g\ell(\alpha, j', j) \cap h^1$ pour tout $i \geqslant 1$ et $m(a;\alpha, j', j) \subset g\ell(\alpha, j', j) \cap h^0$. Pour tous $a, \alpha$, $M(a;\alpha)$ est un sous-groupe compact de $H$.

(2) Pour tous $a \in \mathcal{J}$ et $\alpha \in \mathcal{A}$, l'ensemble $m(a;\alpha)$ défini ci-dessus est stable par adjonction et coïncide avec celui défini en VI.4.

(3) Appliquons les définitions de VI.4. Soient $a \in \{-2, \dots, k'\}$, $a \in \mathcal{A}$ et $j, j' \in \mathcal{J}$. On vérifie les égalités suivantes :

- $r(a-1; \alpha, j', j)_1 = r(a; \alpha, j', j)_\infty$, sauf si $a \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $j = j' = a$ ;
- $s(a-1; \alpha, j', j)_1 = s(a; \alpha, j', j)_\infty$, sauf si $a \in \mathcal{J}$, $j = j' = a$ et, si $d$ est impair, $a \geqslant 2$.

Supposons $a \in \widehat{\mathcal{J}}$. Alors

$$r(a-1; \alpha, a, a)_1 \subset r(a; \alpha, a, a)_\infty$$

et, grâce au lemme VII.10 (iv),

$$r(a-1; \alpha, a, a)_1 \cap g = r(a; \alpha, a, a)_\infty \cap g.$$

Supposons $a \in \mathcal{J}$ et, si $d$ est impair, $a \geqslant 2$. Alors

$$s(a-1; \alpha, a, a)_1 = h(\alpha, a, a)^2 \cap \theta(\alpha, a, a) \subset h(\alpha, a, a)^2 = s(a; \alpha, a, a)_\infty.$$

***VII.13. Lemme***. — *Pour tout $a \in \{-3, \dots, k'\}$, les données*

- $b(a)$ ;
- $(r(a; \alpha, j', j)_i)_{i \geqslant 1}$ *pour* $\alpha \in \mathcal{A}$, $j, j' \in \mathcal{J}$, $j' \geqslant j$ ;
- $m(a; \alpha, j', j)$, *pour* $\alpha \in \mathcal{A}$, $j, j' \in \mathcal{J}$, $j' \geqslant j$ ;
- $J(a)$ ;
- $s(a; \alpha, j)$, *pour* $\alpha \in \mathcal{A}$, $j \in J(a)$ ;
- $M(a; \alpha)$, *pour* $\alpha \in \mathcal{A}$ ;

*vérifient les conditions* (H′0) *à* (H′12) *de VII.4.*

*Démonstration.* — La démonstration est similaire à celle du lemme VI.14, en utilisant bien sûr les lemmes des paragraphes précédents. Pour abréger la rédaction, on ne traitera que le cas $a \in \{1, \dots, k' - k''\}$, laissant les autres au lecteur, s'il en reste. On modifie la notation de la façon suivante. On fixe $a, a^*$ vérifiant l'une des conditions :

- $d$ est impair et $a = a^* = 1$ ;
- $a \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $a^* \in \{a-1, a\}$.

Nous allons démontrer le lemme pour les données relatives à $a^*$.

La condition (H′10) est facile. Pour les autres, on fixe $\alpha \in \mathcal{A}$. Les conditions (H′0), (H′1), (H′2), (H′3), (H′11) résultent facilement des définitions et des lemmes des paragraphes précédents.

La condition (H′12) est claire si $b(a^*) \leqslant 1$ puisque la projection de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}_{>b(a^*)}$ est bijective. Supposons $b(a^*) \geqslant 2$, *a fortiori* $a^* \geqslant 2$. Les espaces

$$\bigoplus_{j \leqslant b(a^*)} V(\alpha, j) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{j > b(a^*)} V(\alpha, j)$$

ne dépendent que de $\alpha_{>b(a^*)}$, donc $m(a^*; \alpha)$ et $M(a^*; \alpha)$ aussi. Les réseaux $r(a^*, \alpha)_1$, $r(a^*, \alpha)_\infty$, $s(a^*, \alpha)_1$, $s(a^*, \alpha)_\infty$ ne dépendent que de $\alpha_{>b(a^*)}$ d'après le lemme VII.11 appliqué à l'entier $a$ si $a^* = a$, $a - 2$ si $a^* = a - 1$. Cela démontre (H′12).

Dans les démonstrations des relations (H′4) à (H′7), on simplifie les notations en supprimant les $a^*$ et les $\alpha$. Par exemple, pour $j, j' \in \mathcal{J}$ et $i \geqslant 1$, on pose $r(j', j)_i =$

$r(a^*;\alpha,j',j)_i$, $t(j',j)=t(\alpha,j',j)$, $\mathfrak{p}_j^i=\mathfrak{p}_{\alpha,j}^i$. L'entier $i$ étant fixé, pour $j\in\mathcal{J}$, $j>a$, on pose :

- si $d$ est impair et $a=a^*=1$, $n(j)=n(1;j;i)$, $n_+(j)=n(1;j;i+1)$,
- sinon $n'(j)=n'(a^*;j;i)$, $n'_+(j)=n'(a^*;j;i+1)$, $n''(j)=n''(a^*;j;i)$, $n''_+(j)=n''(a^*;j;i+1)$.

Démontrons (H′4). Soient $j,j'\in\mathcal{J}$ avec $j'\geqslant j$, $i$ un entier $\geqslant 1$ et $X\in A(j)$. On veut prouver l'inclusion

$$r(j',j)_iX\subset s(j',j)_i. \tag{1}$$

Si $d$ est impair et $j=1$, $A(1)=\{0\}$ et l'assertion est triviale. Supposons $d$ pair ou $j>1$. On a

$$X\in h(j,j)_1=h(j,j)_1\cap t(j,j)=h(j,j)^1\cap t(j,j),$$

les égalités résultant de VII.9 (8) et du lemme VII.10 (ii). Si $j'=j\in J(a^*)$, on a

$$r(j,j)_iX\subset h(j',j)^1h(j,j)^1\subset h(j,j)^2=s(j)=s(j,j)_i$$

ce qui démontre (1). Soit $X'\in A(j')$. Si $j'=j\notin J(a^*)$, ou si $j'>j>a$, on a :

$$r(j',j)_i=h(j',j)^1\cap t(j',j),\quad s(j',j)_i=X'r(j',j)_i=h(j',j)^2\cap\theta(j',j)$$

d'après le lemme VII.10 (iii). Alors (1) résulte de ce même lemme. Si $j'>j$ et $j<a$, on a :

$$r(j',j)_i=h(j',j)^1,\quad s(j',j)_i=X'r(j',j)_i=h(j',j)^2$$

d'après le lemme VII.10 (i) et (1) résulte de ce même lemme. Supposons $j'>j=a$. En particulier, si $d$ est impair, $a\neq 1$. Alors

$$r(j',a)_i=\left\{Y\in h(j',a)^1;\,Y(\mathfrak{p}_a^{1-a})\subset\mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')},\,Y(\mathfrak{p}_a^{a-2})\subset\mathfrak{p}_{j'}^{n'(j')}\right\}.$$

Grâce au lemme VII.10 (i), on a :

$$s(j',a)_i=\left\{Y\in h(j',a)^2;\,Y(\mathfrak{p}_a^{1-a})\subset\mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')+1},\,Y(\mathfrak{p}_a^{a-2})\subset\mathfrak{p}_{j'}^{n'(j')+1}\right\}.$$

Evidemment,

$$r(j',a)_iX\subset h(j',a)^2.$$

L'inclusion (1) résulte alors de l'assertion suivante :

(2) supposons $a\in\widehat{\mathcal{J}}$; soit $j'\in\mathcal{J}$ avec $j'>a$, $i\geqslant 1$, $Y'\in r(j',a)_i$ et

$$Y\in\begin{cases}h(a,a)^1, & \text{si } a^*=a,\\ h(a,a)^1\cap t(a,a), & \text{si } a^*=a-1;\end{cases}$$

alors on a les inclusions :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a})\subset\mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')+1},\quad Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-2})\subset\mathfrak{p}_{j'}^{n'(j')+1}.$$

On a $\mathfrak{p}_a^{a-2}=L'_{a-2}\cap V(a)$, d'où :

$$Y(\mathfrak{p}_a^{a-2})\subset L'_{a-1}\cap V(a)=\mathfrak{p}_a^{a-1}=\mathfrak{p}_F\mathfrak{p}_a^{1-a},$$

puis

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-2}) \subset \mathfrak{p}_F Y'(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset \mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')} = \mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')+2j'+2\ell(j')-2}.$$

Si $a^* = a-1$, on a $n''(j') \geqslant -j' + \varepsilon(j') + 1$, d'où :

$$n''(j') + 2j' + 2\ell(j') - 2 \geqslant j' + 2\ell(j') + \varepsilon(j') - 1 \geqslant j' - \varepsilon(j') + 1 \geqslant n'(j') + 1.$$

Si $a^* = a$ et $i \geqslant k' - \varepsilon(k') - a + 1$, on a $n''(j') \geqslant -j' - 2\ell(j') - \varepsilon(j') + 2$, d'où

$$n''(j') + 2j' + 2\ell(j') - 2 \geqslant j' - \varepsilon(j') \geqslant n'(j') + 1.$$

Si $a^* = a$ et $i \leqslant k' - \varepsilon(k') - a$, on a $n''(j') \geqslant -2j' - 2\ell(j') + a + 2$, d'où

$$n''(j') + 2j' + 2\ell(j') - 2 \geqslant a \geqslant n'(j') + 1.$$

En tout cas

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-2}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n'(j')+1}.$$

Supposons $a^* = a$. On a $\mathfrak{p}_a^{1-a} = \mathfrak{p}_F^{-1} L'_{a-1} \cap V(a)$, d'où

$$Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset \mathfrak{p}_F^{-1} Y(L'_{a-1} \cap V(a)) \subset \mathfrak{p}_F^{-1} L'_a \cap V(a) = L'_{1-a} \cap V(a),$$

puis

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset Y'(L'_{1-a} \cap V(a)) \subset L'_{2-a} \cap V(j') = \mathfrak{p}_{j'}^{2-a} \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')+1}.$$

Supposons $a^* = a-1$. Grâce au lemme VII.10 (ii), $Y \in h(a,a)_1$. Alors

$$Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset \mathfrak{p}_a^{2-a} = L'_{2-a} \cap V(a),$$

puis

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset Y'(L'_{2-a} \cap V(a)) \subset L'_{3-a} \cap V(j') = \mathfrak{p}_{j'}^{3-a} \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')+1}.$$

Cela démontre (2) et achève la vérification de (H$'$4).

On a déjà remarqué que pour tout $j \in \mathcal{J} - J(a^*)$ et tout $i \geqslant 1$,

$$r(j,j)_i = h(j,j)^1 \cap t(j,j) = h(j,j)_1.$$

Alors la condition (H$'$5) résulte du lemme VII.6 (iv).

Démontrons (H$'$6). Soient $i \geqslant 1$ et $j, j', j'' \in \mathcal{J}''$ tels que

- $j' \geqslant j$, $j'' \geqslant j'$

ou

- $j'' = j \in J(a^*)$.

On veut prouver :

$$r(j'',j')_i r(j',j)_i \subset r(j'',j)_{i+1}.$$

On a en tout cas :

$$r(j'',j')_i \subset h(j'',j')^1, \quad r(j',j)_i \subset h(j',j)^1,$$

d'où

$$r(j'',j')_i r(j',j)_i \subset h(j'',j)^1.$$

Si $j < a$ ou si $a^* = a$ et $j'' = j = a$, on a $r(j'',j)_{i+1} = h(j'',j)^1$ et c'est terminé. Cela vaut en particulier si $j'' = j \in J(a^*)$.

Si $j' < j$ ou si $j' = j \notin \widehat{\mathcal{J}}$, on utilise le lemme VII.10 (v) :

$$r(j'', j')_i r(j', j)_i \subset h(j'', j')^0 h(j', j)^1 \subset h(j'', j)^1 \cap t(j'', j) \subset r(j'', j)_{i+1}.$$

Si $j' \geqslant j > a$ ou si $a^* = a - 1$ et $j'' = j' = j = a$, on a

$$r(j'', j')_i = h(j'', j')^1 \cap t(j'', j'), \quad r(j', j)_i = h(j', j)^1 \cap t(j', j).$$

Grâce aux lemmes VII.10 (ii) et VII.9 (i),

$$r(j'', j')_i r(j', j)_i \subset h(j'', j)^1 \cap t(j'', j) \subset r(j'', j)_{i+1}.$$

Supposons $a \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $j'' > j' = j = a$. Il suffit de prouver que pour $Y' \in r(j'', a)_i$ et $Y \in r(a, a)_i$, on a les inclusions :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n''_+(j'')}, \tag{3}$$

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-2}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n'_+(j'')}. \tag{4}$$

Elles résultent de (2) et des inégalités $n''_+(j'') \leqslant n''(j'') + 1$, $n'_+(j'') \leqslant n'(j'') + 1$.

Il reste le cas $j'' \geqslant j' > j = a$.

Supposons d'abord $d$ impair et $a = 1$. On doit prouver que pour $Y \in h(j', 1)_{n(j')}$ et $Y' \in h(j'', j')^1 \cap t(j'', j')$, on a l'inclusion

$$Y'Y(\mathfrak{p}_1^0) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n_+(j'')}. \tag{5}$$

Remarquons d'abord que $Y' \in h(j'', j')_1$ (lemme VII.10 (ii)). On a

$$Y(\mathfrak{p}_1^0) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n(j')}.$$

Si $i \geqslant k' + k'' + \ell(j') + \varepsilon(j') - 2$, on a $n(j') \geqslant j' + 2\ell(j') + \varepsilon(j') - 2$ et

$$\mathfrak{p}_{j'}^{n(j')} \subset \mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{j'}^{-j'+\varepsilon(j')}.$$

Puisque $Y' \in t(j'', j')$, on obtient

$$Y'Y(\mathfrak{p}_1^0) \subset \mathfrak{p}_F Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{-j'+\varepsilon(j')}) \subset \mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{j''}^{-j''+\varepsilon(j'')+1} = \mathfrak{p}_{j''}^{j''+2\ell(j'')+\varepsilon(j'')-1}.$$

Or $j'' + 2\ell(j'') + \varepsilon(j'') - 1 \geqslant n_+(j'')$ et on obtient (5).

Si $k' + k'' - \ell(j'') - \varepsilon(j'') \leqslant i \leqslant k' + k'' + \ell(j') + \varepsilon(j') - 3$, on a

$$n(j') = \sup(j' - \varepsilon(j'), i - k' - k'' + j' + \ell(j')),$$

d'où

$$-j' - 2\ell(j') - \varepsilon(j') + 2 \leqslant n(j') - 2j' - 2\ell(j') + 2 \leqslant -j' + \varepsilon(j') - 1.$$

Puisque $Y' \in h(j'', j')_1$, on a :

$$\begin{aligned} Y'Y(\mathfrak{p}_1^0) \subset Y'(\mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{j'}^{n(j')-2j'-\ell(j')+2)}) &\subset \mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{j''}^{n(j')-j'-\ell(j')-j''-\ell(j'')+3} \\ &\subset \mathfrak{p}_{j''}^{n(j')-j'-\ell(j')+j''+\ell(j'')+1}. \end{aligned}$$

Or

$$n(j') - j' - \ell(j') + j'' + \ell(j'') + 1 \geqslant i + 1 - k' - k'' + j'' + \ell(j'') = n_+(j'')$$

et on obtient (5).

Si $j'-\varepsilon(j')-1 \leqslant i \leqslant k'+k''-\ell(j'')-\varepsilon(j'')-1$, on a $n(j') \geqslant j'-\varepsilon(j')-1$. Puisque $Y' \in t(j'',j')$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_1^0) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{j-\varepsilon(j')-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{j''-\varepsilon(j'')},$$

et $j''-\varepsilon(j'') \geqslant n_+(j'')$, d'où (5).

Enfin, si $1 \leqslant i < j'-\varepsilon(j')-2$, on a $n(j') = i$. Puisque $Y \in h(j'',j')_1$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_1^0) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{i}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{i+1} = \mathfrak{p}_{j''}^{n_+(j'')}.$$

Cela achève de démontrer (5).

Supposons maintenant $a \in \widehat{\mathcal{J}}$. On doit prouver les inclusions (3) et (4) pour $Y \in r(j',a)_i$ et $Y' \in r(j'',j')_i = h(j'',j')^1 \cap t(j'',j')$.

On a en tout cas :

$$Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')}, \quad Y(\mathfrak{p}_a^{a-2}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n'(j')}.$$

Supposons $a^* = a-1$. Alors

$$-j'+\varepsilon(j')+1 \leqslant n''(j') \leqslant 2-a,$$

d'où

$$\mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')} = L'_{n''(j')} \cap V(j').$$

Puisque $Y' \in h(j'',j')^1$, on a

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset Y'(L'_{n''(j')} \cap V(j')) \subset L'_{n''(j')+1} \cap V(j'') = \mathfrak{p}_{j''}^{n''(j')+1}.$$

On vérifie que $n''(j')+1 \geqslant n''_+(j')$, ce qui démontre (3).

On a $j'-\varepsilon(j')-1 \leqslant n'(j')$, donc, puisque $Y' \in t(j'',j')$ :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-2}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{j'-\varepsilon(j')-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{j''-\varepsilon(j'')}.$$

Or $j''-\varepsilon(j'') \geqslant n''_+(j'')$ et l'on obtient (4).

Supposons $a^* = a$. Si

$$j' \geqslant k'-k''+1 \ \text{ et } \ 2k'+k''-\varepsilon(k')+\ell(j')+\varepsilon(j')-2a-1 \leqslant i,$$

ou si

$$j' \in \widehat{\mathcal{J}} \ \text{ et } \ k'-\varepsilon(k')-a+1 \leqslant i,$$

on a $-j'+\varepsilon(j') \leqslant n''(j')$. Puisque $Y' \in t(j'',j')$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{-j'+\varepsilon(j')}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{-j''+\varepsilon(j'')+1}.$$

Or $-j''+\varepsilon(j'')+1 \geqslant n''_+(j'')$, d'où (3).

Si

$$j' \geqslant k'-k''+1 \ \text{ et } \ k'-\varepsilon(k')-a+1 \leqslant i \leqslant 2k'+k''-\varepsilon(k')+\ell(j')-2a-2,$$

on a

$$-j'-2\ell(j')+2 \leqslant n''(j') \leqslant j'-1.$$

Puisque $Y' \in h(j'',j')^1$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')}) = Y'(L''_{n''(j')+j'+\ell(j')-1} \cap V(j'))$$
$$\subset L''_{n''(j')+j'+\ell(j')} \cap V(j'') = \mathfrak{p}_{j''}^{n''(j')+j'+\ell(j')-j''-\ell(j'')+1}.$$

On vérifie que

$$n''(j') + j' + \ell(j') - j'' - \ell(j'') + 1 \geqslant n''_+(j''),$$

d'où (3).

Si

$$j' - \varepsilon(j') - a \leqslant i \leqslant k' - \varepsilon(k') - a,$$

on a $n''(j') = -j' - 2\ell(j') - \varepsilon(j') + 1$. Puisque $Y' \in t(j'',j')$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset Y'(\mathfrak{p}_F^{-1}\mathfrak{p}_{j'}^{j'-\varepsilon(j')-1}) \subset \mathfrak{p}_F^{-1}\mathfrak{p}_{j''}^{j''-\varepsilon(j'')} = \mathfrak{p}_{j''}^{-j''-2\ell(j'')-\varepsilon(j'')+2},$$

et $-j'' - 2\ell(j') - \varepsilon(j'') + 2 \geqslant n''_+(j'')$, d'où (3).

Si

$$1 \leqslant i \leqslant j' - \varepsilon(j') - a - 1,$$

on a $n''(j') = -2j' - 2\ell(j') + a + 1 + i$, d'où

$$a \leqslant n''(j') + 2j' + 2\ell(j') - 2 \leqslant j' - \varepsilon(j') - 1.$$

Puisque $Y' \in h(j'',j')^1$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset Y'(\mathfrak{p}_F^{-1}\mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')+2j'+2\ell(j')-2}) = Y'(\mathfrak{p}_F^{-1}L'_{n''(j')+2j'+2\ell(j')-2} \cap V(j'))$$
$$\subset \mathfrak{p}_F^{-1}L'_{n''(j')+2j'+2\ell(j')-1} \cap V(j'') = \mathfrak{p}_{j''}^{n''(j')+2j'+2\ell(j')-2j''-2\ell(j'')+1}.$$

Or

$$n''(j') + 2j' + 2\ell(j') - 2j'' - 2\ell(j'') + 1 = -2j'' - 2\ell(j'') + a + 2 + i \geqslant n''_+(j'').$$

Cela achève de démontrer (3).

Si

$$j' - \varepsilon(j') + k' - \varepsilon(k') + 1 - 2a \leqslant i,$$

on a $n'(j') = j' - \varepsilon(j') - 1$ et, puisque $Y' \in t(j'',j')$ :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-2}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{j'-\varepsilon(j')-1}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{j''-\varepsilon(j'')}.$$

Or $j'' - \varepsilon(j'') \geqslant n'_+(j'')$, d'où (4).

Si

$$1 \leqslant i \leqslant j' - \varepsilon(j') + k' - \varepsilon(k') - 2a,$$

on a

$$n'(j') = \sup(a-1, -k' + \varepsilon(k') + 2a - 2 + i),$$

et

$$a - 1 \leqslant n'(j') \leqslant j' - \varepsilon(j') - 2.$$

Puisque $Y' \in h(j'',j')^1$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-2}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{n'(j')}) = Y'(L'_{n'(j')} \cap V(j')) \subset L'_{n'(j')+1} \cap V(j'') = \mathfrak{p}_{j''}^{n'(j')+1}.$$

On vérifie que $n'(j')+1 \geqslant n'_+(j'')$. Cela achève les démonstrations de (4) et de la condition (H′6).

Démontrons (H′7). Soient $i \geqslant 1$ et $j, j', j'' \in \mathcal{J}$ tels que

- $j' > j'' \geqslant j$,

ou

- $j' = j \in J(a^*)$.

On veut prouver l'inclusion

$$r(j'',j')_i\, s(j',j)_i \subset s(j'',j)_{i+1}\,.$$

Les réseaux $s(j',j)_i$ et $s(j'',j)_{i+1}$ se calculent grâce aux lemmes VII.6 (i) et VII.10 (i) et (iii). On a en tout cas

$$r(j'',j')_i \subset h(j'',j')^1\,,\quad s(j',j)_i \subset h(j',j)^2\,,$$

donc

$$r(j'',j')_i\, s(j',j)_i \subset h(j'',j)^2\,.$$

Si $\inf(j'',j) < a$ ou si $a^* = a$ et $j'' = j = a$, on a $s(j'',j)_{i+1} = h(j'',j)^2$ et c'est terminé.

Si $d$ est impair, $a^* = a = 1$ et $j'' > j' = j = 1$, on utilise le lemme VII.10 (v) :

$$r(j'',1)_i\, s(1,1)_i \subset h(j'',1)^1 h(1,1)^1 \subset h(j'',1)^2 \cap \theta(j'',1)\,.$$

La relation VII.10 (14) et l'inégalité $n_+(j'')+1 \leqslant j'' + 2\ell(j'') + \varepsilon(j'')$ prouvent que

$$h(j'',1)^2 \cap \theta(j',1) \subset s(j'',1)_{i+1}\,.$$

Si $a^* = a \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $j'' > j' = j = a$, on utilise le lemme VII.10 (vi) :

$$r(j'',j)_i\, s(j,j)_i \subset h(j'',j)^0 h(j,j)^2 \subset h(j'',j)^2 \cap \theta^{\#}(j'',j)\,.$$

Les inégalités

$$n''_+(j')+1 \leqslant -j'' + \varepsilon(j'') + 2\,,\quad n'_+(j'')+1 \leqslant j'' - \varepsilon(j'') + 1$$

montrent que

$$h(j'',j)^2 \cap \theta^{\#}(j'',j) \subset s(j'',j)_{i+1}\,.$$

Remarquons que si $j' = j \in J(a^*)$, on est forcément dans l'un des cas ci-dessus.

Si $j' > j'' \geqslant j > a$, on a

$$r(j'',j')_i = h(j'',j')^1 \cap t(j'',j')\,,\quad s(j',j)_i = h(j',j)^2 \cap \theta(j',j)\,.$$

Grâce aux lemmes VII.9 (i) et VII.10 (ii), on en déduit

$$r(j'',j')_i\, s(j',j)_i \subset h(j'',j)^2 \cap \theta(j'',j) \subset s(j'',j)_{i+1}\,.$$

Supposons $a^* = a-1$ et $j' > j'' = j = a$. On a $s(a,a)_{i+1} = h(a,a)^2 \cap \theta(a,a)$. Il suffit de prouver que pour $Y \in s(j',a)_i$ et $Y' \in r(a,j')_i$, on a $Y'Y \in \theta(a,a)$, *i.e.*

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset \mathfrak{p}_a^{3-a}\,,\quad Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-2}) \subset \mathfrak{p}_a^{a}\,. \tag{6}$$

Puisque $Y \in s(j', a)_i$, on a
$$Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')+1}, \quad Y(\mathfrak{p}_a^{a-2}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n'(j')+1}.$$
Puisque $Y' \in r(a, j')_i = r(j', a)_i^*$, en utilisant VII.6 (1), on voit que
$$Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{1-n''(j')}) \subset \mathfrak{p}_a^a, \quad Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{1-n'(j')}) \subset \mathfrak{p}_a^{3-a}.$$
Or
$$n''(j') \geqslant -j' + \varepsilon(j') + 1 \geqslant -n'(j').$$
On peut alors composer les inclusions ci-dessus et l'on obtient (6).

Il reste le cas $j' > j'' > j = a$.

Supposons $d$ impair et $a = 1$. On doit prouver que pour $Y \in h(j', 1)_{n(j')+1}$ et $Y' \in h(j'', j')^1 \cap t(j'', j')$, on a $Y'Y \in h(j'', 1)_{n_+(j'')+1}$, *i.e.*
$$Y'Y(\mathfrak{p}_1^0) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n_+(j'')+1}. \tag{7}$$
On a d'abord :
$$Y(\mathfrak{p}_1^0) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n(j')+1}.$$
Si $k' + k'' + \ell(j') + \varepsilon(j') - 2 \leqslant i$, on a $n(j') + 1 \geqslant j' + 2\ell(j') + \varepsilon(j') - 1$. Puisque $Y' \in t(j'', j')$, on a
$$Y'Y(\mathfrak{p}_1^0) \subset Y'(\mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{j'}^{-j'+\varepsilon(j')+1}) \subset \mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{j''}^{-j''+\varepsilon(j'')+2} = \mathfrak{p}_{j''}^{j''+2\ell(j'')+\varepsilon(j'')}.$$
Or $j'' + 2\ell(j'') + \varepsilon(j'') \geqslant n_+(j'') + 1$, d'où (7).

Si
$$k' - k'' + 1 \leqslant j'' \text{ et } k' + k'' - \ell(j'') - 1 \leqslant i \leqslant k' + k'' + \ell(j') - 3,$$
on a $n(j') = i - k' - k'' + j' + \ell(j')$, d'où
$$-j' - 2\ell(j') + 2 \leqslant -j' - \ell(j') - \ell(j'') + 2 \leqslant n(j') + 3 - 2j' - 2\ell(j') \leqslant -j'.$$
Donc
$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_{j'}^{n(j')+1} &= \mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{j'}^{n(j')+3-2j'-2\ell(j')} \\ &= \mathfrak{p}_F (L''_{n(j')+2-j'-\ell(j')} \cap V(j')) = \mathfrak{p}_F L''_{i-k'-k''+2} \cap V(j').\end{aligned}$$
Puisque $Y' \in h(j'', j)^1$, on en déduit :
$$Y'Y(\mathfrak{p}_1^0) \subset Y'(\mathfrak{p}_F L''_{i-k'-k''+2} \cap V(j')) \subset \mathfrak{p}_F L''_{i-k'-k''+3} \cap V(j'').$$
Mais
$$-j'' - 2\ell(j') + 3 \leqslant i - k' - k'' + 4 - j'' - \ell(j''),$$
d'où
$$L''_{i-k'-k''+3} \cap V(j'') = \mathfrak{p}_{j''}^{\inf(1-j'', i-k'-k''+4-j''-\ell(j''))},$$
et
$$Y'Y(\mathfrak{p}_1^0) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{\inf(j''+2\ell(j'')-1, i-k'-k''+j''+\ell(j'')+2)}.$$
D'après l'hypothèse sur $i$,
$$\inf(j'' + 2\ell(j'') - 1, i - k' - k'' + j'' + \ell(j'') + 2) = n_+(j'') + 1$$

d'où (7).

Si
$$k' - k'' + 1 \leqslant j'' \text{ et } j' - 1 \leqslant i \leqslant k' + k'' - \ell(j'') - 2$$
ou
$$j'' \in \widehat{\mathcal{J}} \text{ et } j' - \varepsilon(j') - 1 \leqslant i \leqslant k' + k'' + \ell(j') + \varepsilon(j') - 3,$$
on a $n(j') + 1 \geqslant j' - \varepsilon(j')$. Puisque $Y' \in t(j'', j')$, on a
$$Y'Y(\mathfrak{p}_1^0) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{j'-\varepsilon(j')}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{j''-\varepsilon(j'')+1}.$$
Or $j'' - \varepsilon(j'') + 1 \geqslant n_+(j'') + 1$, d'où (7).

Si $i \leqslant j' - \varepsilon(j') - 2$, on a $n(j') + 1 = i + 1$ et
$$\mathfrak{p}_{j'}^{n(j')+1} = L'_{i+1} \cap V(j').$$
Puisque $Y' \in h(j'', j')^1$, on a
$$\begin{aligned} Y'Y(\mathfrak{p}_1^0) \subset Y'(L'_{i+1} \cap V(j')) &\subset L'_{i+2} \cap V(j'') \\ &\subset L'_{\inf(j''-\varepsilon(j''), i+2)} \cap V(j'') = \mathfrak{p}_{j''}^{\inf(j''-\varepsilon(j''), i+2)}. \end{aligned}$$
Or $\inf(j'' - \varepsilon(j''), i + 2) = n_+(j'') + 1$ et cela achève la preuve de (7).

Supposons maintenant $a \in \widehat{\mathcal{J}}$. On doit prouver que pour $Y \in s(j', j)_i$ et $Y' \in h(j'', j')^1 \cap t(j'', j')$, on a les inclusions :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-2}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n'_+(j'')+1}, \tag{8}$$

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{n''_+(j'')+1}. \tag{9}$$

On a d'abord :
$$\psi(\mathfrak{p}_a^{a-2}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n'(j')+1}, \quad Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset \mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')+1}.$$
Supposons $a^* = a - 1$. Alors $n'(j') + 1 \geqslant j' - \varepsilon(j')$. Puisque $Y' \in t(j'', j')$, on a
$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-2}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{j'-\varepsilon(j')}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{j''-\varepsilon(j'')+1}.$$
Or $j'' - \varepsilon(j'') + 1 \geqslant n'_+(j'') + 1$, d'où (8).

Si $-j'' + \varepsilon(j'') + 2 + k' - \varepsilon(k') \leqslant i$, on a
$$n''(j') = \inf(2 - a, -k' + \varepsilon(k') + i - 1).$$
Alors
$$-j' + \varepsilon(j') + 2 \leqslant n''(j') + 1 \leqslant 3 - a,$$
d'où
$$\mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')+1} = L'_{n''(j')+1} \cap V(j').$$
D'autre part
$$n''_+(j'') + 1 = \inf(3 - a, -k' + \varepsilon(k') + i + 1) \geqslant n''(j') + 2,$$
et
$$-j'' + \varepsilon(j'') + 1 \leqslant \inf(3 - a, -k' + \varepsilon(k') + i + 1) \leqslant 1.$$

Donc

$$L'_{n''(j')+2} \cap V(j'') \subset L'_{\inf(3-a,-k'+\varepsilon(k')+i+1)} \cap V(j'') = \mathfrak{p}_{j''}^{\inf(3-a,-k'+\varepsilon(k')+i+1)} = \mathfrak{p}_{j''}^{n''_+(j'')+1}.$$

Puisque $Y' \in h(j'',j')^1$, on a

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')+1}) = Y'(L'_{n''(j')+1} \cap V(j')) \subset L'_{n''(j')+2} \cap V(j'') = \mathfrak{p}_{j''}^{n''_+(j'')+1}.$$

C'est l'inclusion (9).

Supposons $a^* = a$. On a

$$a \leqslant n'(j') + 1 \leqslant j' - \varepsilon(j'),$$

d'où

$$\mathfrak{p}_{j'}^{n'(j')+1} = L'_{n'(j')+1} \cap V(j').$$

Puisque $Y' \in h(j'',j')^1$, on a

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-2}) \subset Y'(L'_{n'(j')+1} \cap V(j')) \subset L'_{n'(j')+2} \cap V(j'') \subset L'_{\inf(n'(j')+2,j''-\varepsilon(j''))} \cap V(j'') = \mathfrak{p}_{j''}^{\inf(n'(j')+2,j''-\varepsilon(j''))}.$$

On vérifie que

$$\inf(n'(j')+2, j''-\varepsilon(j'')) \geqslant n'_+(j'')+1,$$

d'où (8).

Si $2k' + k'' - \varepsilon(k') + \ell(j') + \varepsilon(j') - 2a - 1 \leqslant i$, on a $n''(j') + 1 \geqslant -j' + \varepsilon(j') + 1$. Puisque $Y' \in t(j'',j')$, on a :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{-j'+\varepsilon(j')+1)}) \subset \mathfrak{p}_{j''}^{-j''+\varepsilon(j'')+2}.$$

Or $-j'' + \varepsilon(j'') + 2 \geqslant n''_+(j'') + 1$, d'où (9).

Si $j'' \geqslant k' - k'' + 1$, auquel cas $\varepsilon(k') = \varepsilon(j') = \varepsilon(j'') = 0$, et

$$2k' + k'' - \ell(j'') - 2a + 1 \leqslant i \leqslant 2k' + k'' + \ell(j') - 2a - 2,$$

on a

$$n''(j') = -j' - \ell(j') - 2k' - k'' + 2a + 1 + i.$$

Alors

$$-j' - 2\ell(j') + 2 \leqslant n''(j') + 1 \leqslant -j',$$

d'où

$$\mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')+1} = L''_{n''(j')+j'+\ell(j')} \cap V(j') = L''_{-2k'-k''+2a+1+i} \cap V(j').$$

D'autre part,

$$-j'' - 2\ell(j'') + 2 \leqslant -2k' - k'' + 2a + i + 3 - j'' - \ell(j''),$$

d'où

$$L''_{-2k'-k''+2a+i+2} \cap V(j'') = \mathfrak{p}_{j''}^{\inf(1-j'',-2k'-k''+2a+i+3-j''-\ell(j''))}.$$

Puisque $Y' \in h(j'',j')^1$, on a

$$\begin{aligned} Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) &\subset Y'(\mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')+1}) = Y'(L''_{-2k'-k''+2a+1+i} \cap V(j')) \\ &\subset L''_{-2k'-k''+2a+i+2} \cap V(j'') = \mathfrak{p}_{j'}^{\inf(1-j'',-2k'-k''+2a+i+3-j''-\ell(j''))}. \end{aligned}$$

Or

$$\inf(1-j'',-2k'-k''+2a+i+3-j''-\ell(j'')) = n''_+(j'')+1,$$

d'où (9).

Si

$$j'' \geqslant k'-k''+1 \text{ et } j'-\varepsilon(j')-a \leqslant i \leqslant 2k'+k''-\ell(j'')-2a,$$

ou

$$j'' \in \widehat{\mathcal{J}} \text{ et } j'-\varepsilon(j')-a \leqslant i \leqslant 2k'+k''-\varepsilon(k')+\ell(j')+\varepsilon(j')-2a-2,$$

on a $n''(j')+1 \geqslant -j'-2\ell(j')-\varepsilon(j')+2$, et

$$\mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')+1} \subset \mathfrak{p}_F^{-1}\mathfrak{p}_{j'}^{j'-\varepsilon(j')}.$$

Puisque $Y' \in t(j'',j')$, on a

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset Y'(\mathfrak{p}_F^{-1}\mathfrak{p}_{j'}^{j'-\varepsilon(j')}) \subset \mathfrak{p}_F^{-1}\mathfrak{p}_{j''}^{j''-\varepsilon(j'')+1} = \mathfrak{p}_{j''}^{-j''-2\ell(j'')-\varepsilon(j'')+3}.$$

Or $-j''-2\ell(j'')-\varepsilon(j'')+3 \geqslant n''_+(j'')+1$, d'où (9).

Si $1 \leqslant i \leqslant j'-\varepsilon(j')-a-1$, on a $n''(j') = -2j'-2\ell(j')+a+i+1$. D'où

$$a+1 \leqslant n''(j')+2j'+2\ell(j')-1 \leqslant j'-\varepsilon(j')-1$$

et

$$\mathfrak{p}_{j'}^{n''(j')+1} = \mathfrak{p}_F^{-1}L'_{n''(j')+2j'+2\ell(j')-1} \cap V(j') = \mathfrak{p}_F^{-1}L'_{a+i} \cap V(j').$$

Puisque $Y' \in h(j'',j')^1$, on a :

$$\begin{aligned} Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset Y'(\mathfrak{p}_F^{-1}L'_{a+i} \cap V(j')) &\subset \mathfrak{p}_F^{-1}L'_{a+i+1} \cap V(j'') \\ &\subset \mathfrak{p}_F^{-1}L'_{\inf(a+i+1,j''-\varepsilon(j''))} \cap V(j'') \\ &= \mathfrak{p}_F^{-1}\mathfrak{p}_{j''}^{\inf(a+i+1,j''-\varepsilon(j''))} \\ &= \mathfrak{p}_{j''}^{\inf(-2j''-2\ell(j'')+a+i+3,-j''-2\ell(j'')-\varepsilon(j'')+2)}. \end{aligned}$$

Or

$$\inf(-2j''-2\ell(j'')+a+i+3,-j''-2\ell(j'')-\varepsilon(j'')+2) = n''_+(j'')+1,$$

d'où (9). Cela achève la preuve de (8) et (9) et celle de la condition (H′7).

Démontrons (H′8). On simplifie les notations comme ci-dessus, en y conservant toutefois les $a$ et $a^*$. En vertu de la remarque VII.12 (1) et de l'égalité $r(k';j',j)_1 = r(k';j',j)_\infty$ pour tous $j,j' \in \mathcal{J}$, il suffit de démontrer les assertions suivantes :

(10) pour tout $j \in \mathcal{J}$, on a l'inclusion $r(a;a,a)_\infty m(a;a,j) \subset r(a;a,j)_\infty$ ;

(11) pour tous $j,j',j'' \in \mathcal{J}$, on a l'inclusion $r(0;j'',j')_1 m(1;j',j) \subset r(0;j'',j)_1$ ;

(12) supposons $a^* < k'$; pour tous $j, j', j'' \in \mathcal{J}$, on a l'inclusion :

$$r(a^*; j'', j')_1 m(a^* + 1; j', j) \subset r(a^*; j'', j)_1 .$$

La relation (10), resp. (11), (12), pour $a = j$, resp. $j' = j$, est immédiate. Par exemple dans le cas de la relation (12), un élément de $m(a^* + 1; j', j)$ conserve les modules $L'_n \cap V(j)$, $L''_n \cap V(j)$ et $\mathfrak{p}_j^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et la multiplication par un tel élément conserve $r(a^*; j'', j)_1$.

Remarquons que $m(1; j', j) \neq \{0\}$ seulement si $1 \in \mathcal{J}$ et $j' = j = 1$, cas que l'on vient de traiter. Cela démontre (11).

Dans la situation de (12), on a

$$r(a^*; j'', j')_1 m(a^* + 1; j', j) \subset h(j'', j')^1 h(j', j)^0 \subset h(j'', j)^1 .$$

Si $a^* = a$ et $\inf(j'', j) \leqslant a$ ou si $a^* = a - 1$ et $\inf(j'', j) \leqslant a - 2$, on a

$$r(a^*; j'', j)_1 = h(j'', j)^1$$

et on obtient l'inclusion (12). On démontre de même (10) pour $j \leqslant a - 1$.

Achevons la preuve de (10). D'après ce qui précède, on peut supposer $j \geqslant a + 1$. On peut remplacer l'inclusion cherchée par son adjointe :

$$m(a; j, a) r(a; a, a)_\infty \subset r(a; j, a)_\infty .$$

Il suffit de prouver la propriété suivante : pour $Y \in r(a; a, a)_\infty$ et $Y' \in m(a; j, a)$, on a les inclusions :

(13) $$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset \mathfrak{p}_j^{-j+\varepsilon(j)+1}, \quad Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-2}) \subset \mathfrak{p}_j^{j-\varepsilon(j)-1} .$$

Puisque $Y \in h(a, a)^1$, on a :

$$Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) = Y(\mathfrak{p}_F^{-1} \mathfrak{p}_a^{a-1}) = Y(\mathfrak{p}_F^{-1} L'_{a-1} \cap V(a)) \subset \mathfrak{p}_F^{-1} L'_a \cap V(a) = L'_{1-a} \cap V(a),$$

$$Y(\mathfrak{p}_a^{a-2}) = Y(L'_{a-2} \cap V(a)) \subset L'_{a-1} \cap V(a) = \mathfrak{p}_a^{a-1} .$$

Puisque $Y' \in h(j, a)^0$, on a

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{1-a}) \subset Y'(L'_{1-a} \cap V(a)) \subset L'_{1-a} \cap V(j) = \mathfrak{p}_j^{1-a} .$$

Or $1 - a \geqslant -j + \varepsilon(j) + 1$, d'où la première inclusion de (13).

On a

$$\mathfrak{p}_a^{a-1} = \mathfrak{o}_F v'(a - 1, a) + \mathfrak{p}_F L'_{1-a} \cap V(a) .$$

Puisque $Y' \in m(a; j, a)$, on a

$$Y'(v'(a - 1, a)) = 0,$$

donc

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-2}) \subset Y'(\mathfrak{p}_a^{a-1}) = Y'(\mathfrak{p}_F L'_{1-a} \cap V(a)) .$$

Puisque $Y' \in h(j, a)^0$, on obtient :

$$Y'Y(\mathfrak{p}_a^{a-2}) \subset \mathfrak{p}_F L'_{1-a} \cap V(j) = \mathfrak{p}_j^{2j+2\ell(j)-a-1} .$$

Or $2j+2\ell(j)-a-1 \geqslant j-\varepsilon(j)-1$, d'où la deuxième inclusion de (13). Cela achève la démonstration de (10).

Considérons (12). D'après ce qui précède, on peut supposer

$$j' \neq j \text{ et } \inf(j'',j) \geqslant \begin{cases} a+1, & \text{si } a^*=a, \\ a, & \text{si } a^*=a-1. \end{cases} \tag{14}$$

Si $j'' \notin \widehat{\mathcal{J}}$ et $j \geqslant j'' \geqslant j'$ ou si $j'' \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $j \geqslant j'' > j'$, l'adjointe de l'assertion (v) du lemme VII.10 implique :

$$r(a^*;j'',j')_1 m(a^*+1;j',j) \subset h(j'',j')^1 h(j',j)^0 \subset h(j'',j)^1 \cap t(j'',j) \subset r(a^*;j'',j)_1.$$

Si

$$\inf(j',j) \geqslant \begin{cases} a+2, & \text{si } a^*=a, \\ a+1, & \text{si } a^*=a-1, \end{cases}$$

on a $m(a^*+1;j',j)=\{0\}$ et (12) est triviale.

Si $a^*=a-1$ et $j>j''=j'=a$, on remarque que

$$r(a^*;a,a)_1 \subset r(a;a,a)_\infty, \quad r(a^*,a,j)_1 = r(a;a,j)_\infty$$

et (12) résulte de (10).

Remarquons que si $j''<j$, on est nécessairement dans l'un des cas précédents. Si $j'>j''$, on a

$$\inf(j',j) > j'' = \inf(j'',j)$$

et l'on est dans le deuxième cas. Si $j'<j''$, on est dans le premier cas. Supposons $j'=j''$. Si $j'' \notin \widehat{\mathcal{J}}$, on est dans le premier cas. Si $j'' \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $a^*=a$, puisque $j'' \geqslant a+1$, on a $a<k'-k''$. Alors $a+1 \notin \mathcal{J}$, donc $j'' \geqslant a+2$. Alors $\inf(j',j) \geqslant a+2$ et l'on est dans le deuxième cas. Si $j'' \in \widehat{\mathcal{J}}$ et $a^*=a-1$, on est dans le deuxième cas si $j'' \geqslant a+1$, dans le troisième si $j''=a$.

Il reste à traiter le cas $j'' \geqslant j$. Il suffit de prouver que pour $Y \in m(a^*+1;j',j)$ et $Y' \in r(a^*;j'',j')_1$, on a $Y'Y \in h(j'',j)^1 \cap t(j'',j)$. Remarquons que $j \geqslant 2$ d'après la minoration de $\inf(j'',j)$. Puisqu'on sait déjà que $Y'Y \in h(j'',j)^1$, il suffit de prouver les relations suivantes :

- si $j \geqslant k'-k''+1$,

$$Y'Y(v'(j-1,j)) \in \mathfrak{p}_{j''}^{j''}, \quad Y'Y(v''(\ell(j)-1,j)) \in \mathfrak{p}_{j''}^{1-j''};$$

- si $j \in \widehat{\mathcal{J}}$,

$$Y'Y(v'(j-1,j)) \in \mathfrak{p}_{j''}^{2j''+2\ell(j'')-j},$$

$$\left.\begin{aligned} &Y'Y(v'(j-2,j)) \\ &Y'Y(v'(j-2,j-1)) \end{aligned}\right\} \in \mathfrak{p}_{j''}^{j''-\varepsilon(j'')},$$

*cf.* VII.10 (2) et VII.10 (8). Or il résulte de l'hypothèse (14) et de la définition de $m(a^*+1;j',j)$ que $Y$ annule tous les vecteurs intervenant dans ces relations. Cela achève la preuve de (12) et celle de la relation (H′8).

Nous allons maintenant démontrer les trois relations suivantes.

(15) Soient $j \in \mathcal{J}$ et $j' \in J(a^*)$. Alors on a l'inclusion
$$s(a^*;j',j')_\infty\, m(a^*;j',j) \subset s(a^*;j',j)_\infty\,.$$

(16) Pour tous $j,j',j'' \in \mathcal{J}$ tels que $j''<j'$ ou $j''=j' \in J(0)$, on a l'inclusion
$$s(0;j'',j')_1\, m(1;j',j) \subset s(0;j'',j)_1\,.$$

(17) Supposons $a^*<k'$. Pour tous $j,j',j'' \in \mathcal{J}$ tels que $j''<j'$ ou$j''=j' \in J(a^*)$, on a l'inclusion $s(a^*;j'',j')_1\, m(a^*+1;j',j) \subset s(a^*;j'',j)_1$.

Comme dans la preuve des relations (10), (11) et (12), le cas $j'=j$ est immédiat et (16) en résulte.

Dans la situation de (17), on a :
$$s(a^*;j'',j')_1\, m(a^*+1;j',j) \subset h(j'',j')^2\, h(j',j)^0\, h(j'',j)^2\,.$$
Si $a^*=a$ et $\inf(j'',j) \leqslant a$, ou si $a^*=a-1$ et $\inf(j'',j)\leqslant a-2$, on a
$$s(a^*;j'',j)_1 = h(j'',j)^2$$
et on obtient l'inclusion (17). On démontre de même (15) pour $\inf(j',j)<a$.

Achevons la preuve de (15). D'après ce qui précède, on peut supposer $j \neq j'$ et $\inf(j',j') \geqslant a$. Puisque $j' \in J(a^*)$, on a nécessairement $a^*=a$ et $j>j'=a$. On remplace l'inclusion cherchée par son adjointe :
$$m(a;j,a)\, s(a;a,a)_\infty \subset s(a;j,a)_\infty\,.$$
Grâce au lemme VII.10 (vi), on a :
$$m(a;j,a)\, s(a;a,a)_\infty \subset h(j,a)^0\, h(a,a)^2 \subset h(j,a)^2 \cap \theta^{\#}(j,a)\,.$$
Or il résulte des définitions que
$$h(j,a)^2 \cap \theta^{\#}(j,a) \subset s(a;j,a)_\infty\,.$$
Cela achève la preuve de (15).

Achevons la preuve de (17). D'après ce qui précède, on peut supposer
$$\inf(j'',j) \geqslant \begin{cases} a+1, & \text{si } a^*=a,\\ a, & \text{si } a^*=a-1.\end{cases}$$
Cela exclut le cas $j''=j' \in J(a^*)$. Donc $j''<j'$, *a fortiori*
$$j' \geqslant \begin{cases} a+2, & \text{si } a^*=a,\\ a+1, & \text{si } a^*=a-1.\end{cases}$$

Si $j$ vérifie la même inégalité, $m(a^*+1;j',j)=0$ et l'inclusion cherchée est évidente. Il reste le cas

$$j=\begin{cases} a+1, & \text{si } a^*=a,\\ a, & \text{si } a^*=a-1,\end{cases} \quad \text{et } j'>j''\geqslant j\,.$$

Il suffit dans ce cas de prouver que

$$h(j'',j')^2 m(a^*+1;j',j)\subset \theta(j'',j)\,.$$

La preuve est analogue à celle de (12), cas $j''\geqslant j$. Cela achève la preuve de (17).

Les relations (15), (16) et (17) impliquent (H′9) comme dans la preuve du lemme VI.14. Cela achève la démonstration.

***VII.14. Corollaire.*** — *Pour tout $a\in\{0,\dots,k'-1\}$ et tout $\alpha\in\mathcal{A}$, le groupe $M(a+1;\alpha)$ normalise $s(a;\alpha)_1$.*

*Cf.* corollaire VI.15. □

***VII.15. Corollaire.*** — *Pour tout $a\in\mathcal{J}$ et tout $\alpha\in\mathcal{A}$, le réseau $s(a-1;\alpha)_1$ ne dépend que de $\alpha_{>a}$.*

La preuve est identique à celle de la condition (H′12) du lemme précédent. □

**VII.16.** Dans ce paragraphe et jusqu'en VII.22 inclus, on fixe $a\in\mathcal{J}$. Si $d$ est impair, on suppose $a\neq 1$. Quand $a\geqslant k'-k''+1$, les démonstrations sont similaires à celles du cas symplectique. On écrira ces démonstrations seulement dans le cas $a\in\widehat{\mathcal{J}}$.

***Lemme.*** — *Soit $\alpha\in\mathcal{A}$.*

(i) *Si $a\geqslant k'-k''+1$, pour tout $Y\in\mathfrak{p}_F s(a-1;\alpha)_1^{\sim}$ et tout $i\in\{2-a,\dots,a\}$, resp. $i\in\{2-\ell(a),\dots,\ell(a)\}$, on a l'inclusion*

$$Y(L'_i)\subset L'_{i-1}\,,\ \textit{resp.}\ Y(L''_i)\subset L''_{i-1}\,.$$

(ii) *Si $a\in\widehat{\mathcal{J}}$, soient $j,j'\in\mathcal{J}$, $Y\in\mathfrak{p}_F s(a-1;\alpha,j,j')_1^{\sim}$ et*

$$i\in\begin{cases} \{-a+2,\dots,a\}, & \textit{si } \inf(j,j')\neq a,\\ \{-a+2,\dots,a-1\}, & \textit{si } j'=a<j,\\ \{-a+3,\dots,a\}, & \textit{si } j=a<j',\\ \{-a+3,\dots,a-1\}, & \textit{si } j=j'=a.\end{cases}$$

*Alors on a l'inclusion*

$$Y(L'_i\cap V(\alpha,j))\subset L'_{i-1}\cap V(\alpha,j')\,.$$

(iii) *Si $a\in\widehat{\mathcal{J}}$, soient $j'\in\mathcal{J}$ avec $j'\geqslant a$ et $Y\in\mathfrak{p}_F s(a-1;\alpha,a,j')_1^{\sim}$. On a l'inclusion*

$$Y(L'_{2-a}\cap V(\alpha,a))=\begin{cases} L'_{1-k'}\cap V(\alpha,j'), & \textit{si } a<j',\\ \mathfrak{p}_F^{-1}L'_{a-1}\cap V(\alpha,a), & \textit{si } a=j'.\end{cases}$$

*Démonstration.* — On suppose $a \in \widehat{\mathcal{J}}$. Soient $j, j' \in \mathcal{J}$, $i \in \mathbb{Z}$, supposons $j' \geqslant j$ et

$$i \in \begin{cases} \{-a+2, \dots, a\}, & \text{si } j \neq a, \\ \{-a+2, \dots, a-1\}, & \text{si } j = a < j', \\ \{-a+3, \dots, a-1\}, & \text{si } j = j' = a. \end{cases}$$

Posons

$$u(\alpha, j', j)_i = \Big\{ Y \in g\ell(\alpha, j', j) ; Y(L'_{i-1} \cap V(\alpha, j)) \subset \mathfrak{p}_F L'_i \cap V(\alpha, j') \Big\}.$$

Montrons que

$$u(\alpha, j', j)_i \subset s(a-1; \alpha, j', j)_1 .$$

Soient $Y \in u(\alpha, j', j)_i$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

- si $n \geqslant i-1$,

$$Y(L'_n \cap V(\alpha, j)) \subset Y(L'_{i-1} \cap V(\alpha, j)) \subset \mathfrak{p}_F L'_i \cap V(\alpha, j') \subset L'_{n+2} \cap V(\alpha, j');$$

- si $n \leqslant i-2$,

$$Y(L'_n \cap V(\alpha, j)) \subset Y(\mathfrak{p}_F^{-1} L'_{i-1} \cap (\alpha, j)) \subset L'_i \cap V(\alpha, j') \subset L'_{n+2} \cap V(\alpha, j');$$

- $Y(L''_n \cap V(\alpha, j)) \subset Y(\mathfrak{p}_F^{-1} L'_{i-1} \cap V(\alpha, j)) \subset L'_i \cap V(\alpha, j) \subset L''_{n+2} \cap V(\alpha, j')$.

Donc $Y \in h(\alpha, j', j)^2$. Si $j < a$, on a $s(a-1; \alpha, j', j)_1 = h(\alpha, j', j)^2$ et c'est terminé.

Supposons $j \geqslant a$. On vérifie que

$$h(\alpha, j', j)^2 \cap \theta^{\#}(\alpha, j', j) \subset s(a-1; \alpha, j', j)_1 .$$

Il suffit donc de prouver que $Y \in \theta^{\#}(\alpha, j', j)$. On a :

$$\begin{aligned} Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{j-\varepsilon(j)-1}) &= Y(L'_{j-\varepsilon(j)-1} \cap V(\alpha, j)) \subset Y(L'_{i-1} \cap V(\alpha, j)) \subset \mathfrak{p}_F L'_i \cap V(\alpha, j') \\ &\subset \mathfrak{p}_F L'_{2-a} \cap V(\alpha, j') = \mathfrak{p}_F \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{2-a} = \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{2j'+2\ell(j')-a} \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'-\varepsilon(j')+1} . \end{aligned}$$

On a :

$$\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+\varepsilon(j)} = \begin{cases} L''_{\ell(j)-1} \cap V(\alpha, j), & \text{si } j \geqslant k' - k'' + 1, \\ \mathfrak{p}_F^{-1} L'_{j-1} \cap V(\alpha, j), & \text{si } j \in \widehat{\mathcal{J}}. \end{cases}$$

En tout cas $\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+\varepsilon(j)} \subset \mathfrak{p}_F^{-1} L'_{i-1} \cap V(\alpha, j)$. D'où

$$Y(\mathfrak{p}_{\alpha,j}^{-j+\varepsilon(j)}) \subset L'_i \cap V(\alpha, j') = \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^i \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j'+\varepsilon(j')+2} .$$

Les inclusions précédentes prouvent que $Y \in \theta^{\#}(\alpha, j', j)$, ce qui achève la preuve de (1).

Sous les hypothèses de (2), on a

$$u(\alpha, j', j)_i^* \subset s(a-1; \alpha, j, j')_1 ,$$

puis

$$\text{(2)} \qquad \mathfrak{p}_F s(a-1; \alpha, j, j')_1^{\sim} \subset \mathfrak{p}_F (u(\alpha, j', j)_i^*)^{\sim} .$$

Grâce à l'égalité $\mathfrak{p}_F \widetilde{L}'_n = L'_{1-n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mathfrak{p}_F (u(\alpha, j', j)^*_i)^\sim = \Big\{ Y \in g\ell(\alpha, j', j)\,;\, Y(L'_{2-i} \cap V(\alpha, j)) \subset L'_{1-i} \cap V(\alpha, j') \Big\}.$$

Par le changement de variables $i' = 2 - i$, on déduit alors de (2) les inclusions du (ii) de l'énoncé. Ceci pour $j' \geqslant j$. Si $j' < j$, ces inclusions se déduisent des mêmes inclusions pour $j' > j$ par adjonction.

Soit $j' \in \mathcal{J}$ avec $j' \geqslant a$. Posons :

- si $j' > a$,

$$w(\alpha, j', a) = \big\{ Y \in g\ell(\alpha, j', a)\,;\, Y(L'_{a-1} \cap V(\alpha, a)) \subset \mathfrak{p}_F L'_{k'} \cap V(\alpha, j') \big\},$$

- si $j' = a$,

$$w(\alpha, a, a) = \big\{ Y \in g\ell(\alpha, a, a)\,;\, Y(L'_{a-1} \cap V(\alpha, a)) \subset \mathfrak{p}_F^2 L'_{2-a} \cap V(\alpha, a) \big\}.$$

En utilisant les égalités :

- si $j' > a$,

$$s(a-1; \alpha, j', a)_1 = \big\{ Y \in h(\alpha, j', a)^2\,;\, Y(\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{1-a}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{-j'+\varepsilon(j')+2},\ Y(\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{a-2}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,j'}^{j'-\varepsilon(j')} \big\},$$

- si $j' = a$,

$$s(a-1; \alpha, a, a)_1 = h(\alpha, a, a)^2 \cap \theta(\alpha, a, a),$$

on démontre l'inclusion analogue à (1) :

$$w(\alpha, j', a) \subset s(a-1; \alpha, j', a)_1.$$

On en déduit (iii) comme ci-dessus. □

**VII.17.** Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on définit un réseau $\Lambda_i$ de $V$ de la façon suivante :

- si $a \in \widehat{\mathcal{J}}$, $\Lambda_i = L'_i$, si $2 - a \leqslant i \leqslant a - 1$ ;
- si $a \geqslant k' - k'' + 1$,

$$\Lambda_i = \begin{cases} L''_{1-k''}, & \text{si } i = -a - 2\ell(a) + 2, \\ L''_{i+a+\ell(a)-1}, & \text{si } -a - 2\ell(a) + 2 \leqslant i \leqslant -a, \\ L''_{k''} = L'_{1-k'}, & \text{si } i = 1 - a, \\ L'_i, & \text{si } 2 - a \leqslant i \leqslant a - 1 ; \end{cases}$$

- dans les deux cas, pour $i \in \mathbb{Z}$, on écrit $i = 2b(a + \ell(a) - 1) + c$, avec $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \{-a - 2\ell(a) + 2, \ldots, a - 1\}$ et on pose $\Lambda_i = \mathfrak{p}_F^b \Lambda_c$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$k_n = \big\{ Y \in g\ell\,;\, \forall\, i \in \mathbb{Z},\, Y(\Lambda_i) \subset \Lambda_{i+n} \big\}.$$

***Lemme***. — *Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, on a l'inclusion*

$$\mathfrak{p}_F\, s(a-1; \alpha)_1^\sim \subset k_{-1}.$$

Cela résulte du lemme précédent. □

**VII.18.** Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $Z \in g$.

Si $a \in \widehat{\mathcal{J}}$, on définit une application :

$$z(\alpha, Z) : V(\alpha, a) \cap V'[1-a] \longrightarrow V(\alpha, a) \cap V'[a-2]$$

par l'égalité :

$$q_V(z(\alpha, Z)(v), v') = \omega_F q_V(Z(v), v')$$

pour tous $v \in V(\alpha, a) \cap V'[1-a]$, $v' \in V(\alpha, a) \cap V'[2-a]$.

Si $a \geqslant k' - k'' + 1$, on définit $z(\alpha, Z) \in F$ par

$$z(\alpha, Z) = \omega_F q_V(Z(v''(\alpha, 1-\ell(a), a)), v'(\alpha, 1-a, a)).$$

***Lemme.*** — *Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1; \alpha)_1^{\sim} \cap g$. Alors :*

- *si $a \in \widehat{\mathcal{J}}$, $z(\alpha, Z)(V(\alpha, a) \cap L'[1-a]) \subset V(\alpha, a) \cap L'[a-2]$,*
- *si $a \geqslant k' - k'' + 1$, $z(\alpha, Z) \in \mathfrak{o}_F$.*

*On a $Z \in \mathfrak{p}_F s(a; \alpha)_\infty^{\sim} \cap g$ si et seulement si :*

- *si $a \in \widehat{\mathcal{J}}$, $z(\alpha, Z)(V(\alpha, a) \cap L'[1-a]) \subset V(\alpha, a) \cap \mathfrak{p}_F L'[a-2]$,*
- *si $a \geqslant k' - k'' + 1$, $z(\alpha, Z) \in \mathfrak{p}_F$.*

*Démonstration.* — On suppose $a \in \widehat{\mathcal{J}}$. Il résulte des définitions, du lemme VII.6 (iii) et de VII.9 (8) que l'on a l'égalité

$$\mathfrak{p}_F s(a-1; \alpha, a, a)_1^{\sim} = h(\alpha, a, a)_{-1}.$$

D'autre part

$$V(\alpha, a) \cap L'[1-a] \subset \mathfrak{p}_{\alpha,a}^{1-a},$$
$$V(\alpha, a) \cap L'[2-a] = \mathfrak{p}_{\alpha,a}^{2-a} \subset \mathfrak{p}_F^{-1}(\mathfrak{p}_{\alpha,a}^{-a})^{\sim}.$$

Pour $Y \in \mathfrak{p}_F s(a-1; \alpha, a, a)_1^{\sim}$, $v \in V(\alpha, a) \cap L'[1-a]$ et $v' \in V(\alpha, a) \cap L'[2-a]$, on a $Y(v) \in \mathfrak{p}_{\alpha,a}^{-a}$, donc

$$\omega_F q_V(Y(v), v') \in \mathfrak{o}_F.$$

La première assertion de l'énoncé s'en déduit.

On a les égalités :

$$\mathfrak{p}_F s(a; \alpha, j', j)_\infty^{\sim} = \mathfrak{p}_F s(a-1; \alpha, j', j)_1^{\sim} \text{ pour tous } j, j' \in \mathcal{J}, \ (j', j) \neq (a, a),$$
$$\mathfrak{p}_F s(a; \alpha, a, a)_\infty^{\sim} = h(\alpha, a, a)^{-1}.$$

Soit $Y \in \mathfrak{p}_F s(a-1; \alpha, a, a)_1^{\sim} = h(\alpha, a, a)_{-1}$. Cherchons à quelle condition on a $Y \in h(\alpha, a, a)^{-1}$. Pour $n \in \{3-a, \dots, a-1\}$, on a

$$Y(L'_n \cap V(\alpha, a)) = Y(\mathfrak{p}_{\alpha,a}^n) \subset \mathfrak{p}_{\alpha,a}^{n-1} = L'_{n-1} \cap V(\alpha, a).$$

La condition est donc :

$$Y((L'[2-a] + L'[1-a]) \cap V(\alpha, a)) \subset L'_{1-a} \cap V(\alpha, a) = L'_{1-k'} \cap V(\alpha, a).$$

Ou encore

(1) $$q_V(Y(v), v') \in \mathfrak{o}_F$$

pour tous $v \in (L'[2-a]+L'[1-a]) \cap V(\alpha,a)$ et $v' \in L'_{1-a} \cap V(\alpha,a) = \mathfrak{p}_F^{-1} L'_{k'} \cap V(\alpha,a)$. Cette relation est vérifiée si :

- $v \in L'[2-a] \cap V(\alpha,a)$ et $v' \in L'_{2-a} \cap V(\alpha,a)$, car alors $Y(v) \in \mathfrak{p}_{\alpha,a}^{1-a}$ et $v' \in \mathfrak{p}_{\alpha,a}^{2-a}$ ;
- $v \in L'[1-a] \cap V(\alpha,a)$ et $v' \in L'_{3-a} \cap V(\alpha,a)$, car alors $Y(v) \in \mathfrak{p}_{\alpha,a}^{-a}$ et $v' \in \mathfrak{p}_{\alpha,a}^{3-a}$.

Il suffit donc de vérifier (1) dans les trois cas suivants :

$$v \in L'[2-a] \cap V(\alpha,a), \quad v' \in L'[1-a] \cap V(\alpha,a); \tag{2}$$

$$v \in L'[1-a] \cap V(\alpha,a), \quad v' \in L'[2-a] \cap V(\alpha,a); \tag{3}$$

$$v, v' \in L'[1-a] \cap V(\alpha,a). \tag{4}$$

Supposons $Y \in g$. Les cas (2) et (3) sont équivalents par adjonction. Dans le cas (4), la relation (1) est bien vérifiée car $L'[1-a] \cap V(\alpha,a) = \mathfrak{o}_F v'(\alpha,1-a,a)$ et

$$q_V(Y(v'(\alpha,1-a,a)), v'(\alpha,1-a,a)) = 0.$$

Donc $Y \in \mathfrak{p}_F s(a;\alpha,a,a)^{\sim}_{\infty}$ si et seulement si (1) est vérifiée dans la situation de (3). On en déduit la seconde assertion de l'énoncé. □

**VII.19.** Posons

$$W = \left( \bigoplus_{i=1-a}^{a-1} V'[i] \right) \oplus \left( \bigoplus_{i=1-\ell(a)}^{\ell(a)-1} V''[i] \right),$$

$$L = \left( \bigoplus_{i=1-a}^{a-1} L'[i] \right) \oplus \left( \bigoplus_{i=1-\ell(a)}^{\ell(a)-1} L''[i] \right).$$

On munit $W$ de la forme quadratique $q_W$, restriction de $q_V$ à $W$. Comme en VI.19, on définit des espaces $\ell'$, resp. $\ell''$, munis de formes $q_{\ell'}$, resp. $q_{\ell''}$, des sous-espaces $\ell'[i]$, resp. $\ell''[i]$ et, pour $\alpha \in \mathcal{A}$, des vecteurs $\overline{v}'(\alpha,i,j)$, resp. $\overline{v}''(\alpha,i,j)$.

Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1;\alpha)^{\sim}_1$. Pour tout $i \in \{2-a,\dots,a-1\}$, on définit un élément

$$Z'_i \in \mathrm{Hom}(\ell'[i], \ell'[i-1])$$

de la façon suivante. Pour $v \in L'[i]$ et $v' \in L'[1-i]$, on vérifie grâce au lemme VII.16 que $q_V(Z(v),v') \in \mathfrak{o}_F$. Alors $Z'_i$ est l'unique application linéaire telle que

$$q_{\ell'}(Z'_i(\overline{v}), \overline{v}') = \overline{q_W(Z(v),v')}$$

pour tous $v \in L'[i]$, $v' \in L'[1-i]$, les $^-$ désignant les projections évidentes.

Pour tout $i \in \{2-\ell(a), \ell(a)-1\}$, on définit de même un élément

$$Z''_i \in \mathrm{Hom}(\ell''[i], \ell''[i-1]).$$

On définit alors comme en VI.19 des éléments $Z' \in g(\ell')$, $Z'' \in g(\ell'')$.

Supposons $a \in \widehat{\mathcal{J}}$. La réduction naturelle dans $\ell'$ de $L'[1-a] \cap V(\alpha,a)$, resp. $L'[a-2] \cap V(\alpha,a)$, est la droite $\mathbb{F}_q \overline{v}'(\alpha,1-a,a)$, resp. le plan $\mathbb{F}_q \overline{v}'(\alpha,a-2,a-1) \oplus \mathbb{F}_q \overline{v}'(\alpha,a-2,a)$. Grâce au lemme VII.18, on définit par réduction une application :

$$\overline{z}(\alpha,Z) : \mathbb{F}_q \overline{v}'(\alpha,1-a,a) \longrightarrow \mathbb{F}_q \overline{v}'(\alpha,a-2,a-1) \oplus \mathbb{F}_q v'(\alpha,a-2,a).$$

On la prolonge en un élément de $g\ell(\ell')$, nul sur les autres vecteurs de base.

Supposons $a \geqslant k' - k'' + 1$. On note $\overline{z}(\alpha, Z)$ la réduction de $z(\alpha, Z)$ dans $\mathbb{F}_q$.

***Lemme.*** — *Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $Z \in \mathfrak{p}_F\, s(a-1;\alpha)_1^{\sim} \cap g_{\text{ent}}$.*

(i) *Si $a \in \widehat{\mathcal{J}}$, posons $T = Z' + \overline{z}(\alpha, Z) - \overline{z}(\alpha, Z)^*$. Alors on a les égalités :*

$$q_{\ell'}(T^{2a-2}(\overline{v}'(\alpha, 1-a, a)), \overline{v}'(\alpha, a-1, a)) = 0,$$

$$q_{\ell'}(T^{2a-2}(\overline{v}'(\alpha, 1-a, a)), \overline{v}'(\alpha, 1-a, a))\, q_{\ell'}(T^{2a-2}(\overline{v}'(\alpha, a-1, a)), \overline{v}'(\alpha, a-1, a)) = 0.$$

(ii) *Si $a \geqslant k' - k'' + 1$, l'une des conditions suivantes est réalisée :*

*(a)* $\overline{z}(\alpha, Z) = 0$ *;*

*(b)* $q_{\ell'}\big(Z'^{2a-2}(\overline{v}'(\alpha, a-1, a)), \overline{v}'(\alpha, a-1, a)\big) \cdot$
$\cdot\, q_{\ell''}\big(Z''^{2\ell(a)-2}(\overline{v}''(\alpha, \ell(a)-1, a)), \overline{v}''(\alpha, \ell(a)-1, a)\big) = 0.$

*Démonstration.* — On suppose $a \in \widehat{\mathcal{J}}$. D'après le lemme VII.17, on a $Z \in k_{-1}$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $Z$ définit un élément de $\mathrm{Hom}(\Lambda_i/\Lambda_{i+1}, \Lambda_{i-1}/\Lambda_i)$ que l'on note $Z_i$. Pour $j, j' \in \mathcal{J}$, notons $Z(\alpha, j', j)$ la composante de $Z$ dans $g\ell(\alpha, j', j)$. On a encore $Z(\alpha, j', j) \in k_{-1}$ et l'on définit $Z(\alpha, j', j)_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Puisque $Z \in k_{-1}$, on a $Z^{2a-2} \in k_{2-2a}$ et $\omega_F\, Z^{2a-2} \in k_0$. En particulier, ce dernier élément définit un endomorphisme de $\Lambda_{a-1}/\Lambda_a$ que nous noterons $N$. Notons

$$\pi \in \mathrm{Hom}(\Lambda_{1-a}/\Lambda_{2-a}, \Lambda_{a-1}/\Lambda_a)$$

l'élément que définit la multiplication par $\omega_F$. On a l'égalité

$$N = \pi\, Z_{2-a} \cdots Z_{a-1}.$$

Notons

$$R = (L'_{a-1} \cap V(\alpha, a))/(\mathfrak{p}_F\, L'_{2-a} \cap V(\alpha, a))$$

et $v_+$, resp. $v_-$ les images naturelles de $v'(\alpha, a-1, a)$, resp. $\omega_F\, v'(\alpha, 1-a, a)$ dans $R$. Alors $\{v_+, v_-\}$ est une base de $R$ sur $\mathbb{F}_q$. Notons

$$\rho : R \longrightarrow L'_{a-1}/\mathfrak{p}_F\, L'_{2-a} = \Lambda_{a-1}/\Lambda_a$$

l'injection naturelle. Remarquons que puisque $\mathfrak{p}_F\, \widetilde{L}'_{a-1} = L'_{2-a}$, la forme quadratique $\omega_F^{-1}\, q_V$ définit naturellement des formes quadratiques non dégénérées sur $R$ et $\Lambda_{a-1}/\Lambda_a$. On dispose donc de l'application adjointe

$$\rho^* : \Lambda_{a-1}/\Lambda_a \longrightarrow R.$$

Posons

$$\widetilde{N} = \rho^*\, N\, \rho.$$

Alors $\widetilde{N}$ est un endomorphisme de $R$. Calculons sa matrice dans la base $\{v_+, v_-\}$. Il résulte des définitions que

$$Z_{a-1}\, \rho(v_+) = Z'_{a-1}(\overline{v}'(\alpha, a-1, a)). \tag{1}$$

On a l'égalité

$$Z_{a-1}\,\rho(v_-) = \sum_{j'\in\mathcal{J}} Z(\alpha,j',a)_{a-1}\,\rho(v_-).$$

Si $j' < a$, $Z(\alpha,j',a)_{a-1} = 0$ car cette application prend ses valeurs dans l'espace $(L'_{a-2}\cap V(\alpha,j'))/(L'_{a-1}\cap V(\alpha,j'))$ qui est nul. Si $j' > a$, on remarque que l'on a $\rho(v_-) \in L'_a/\Lambda_a$. Grâce au lemme VII.16 (ii), on voit que $\mathrm{Z}(\alpha,j',a)_{a-1}\rho(v_-) = 0$. Enfin, d'après les définitions,

$$Z(\alpha,a,a)_{a-1}\,\rho(v_-) = \overline{z}(\alpha,Z)(\overline{v}'(\alpha,1-a,a)).$$

D'où l'égalité

$$Z_{a-1}\,\rho(v_-) = \overline{z}(\alpha,Z)(\overline{v}'(\alpha,1-a,a)). \tag{2}$$

Par adjonction, on déduit de (1) et (2) l'égalité :

$$\rho^*\pi Z_{2-a}(v) = -q_{\ell'}(\overline{z}(\alpha,Z)^*(v),\overline{v}'(\alpha,1-a,a))v_+ + q_{\ell'}(Z'_{2-a}(v),\overline{v}'(\alpha,a-1,a))v_-$$

pour tout $v\in\ell'[2-a]$.

D'autre part, pour $i\in\{3-a,\dots,a-2\}$, on a

$$\Lambda_i/\Lambda_{i+1} = \ell'[i],\ \Lambda_{i-1}/\Lambda_i = \ell'[i-1]$$

et $Z_i = Z'_i$.

On déduit de ces calculs la matrice de $\widetilde{N}$. Par exemple, le coefficient de $\widetilde{N}(v_+)$ sur le vecteur de base $v_+$ est

$$-q_{\ell'}(\overline{z}(\alpha,Z)^*\,Z'_{3-a}\cdots Z'_{a-1}(\overline{v}'(\alpha,a-1,a)),\overline{v}'(\alpha,1-a,a)).$$

Par définition de $T$, ce terme est égal à

$$q_{\ell'}(T^{2a-2}(\overline{v}'(\alpha,a-1,a)),\overline{v}'(\alpha,1-a,a)).$$

On obtient finalement pour matrice :

(3)

$$\begin{bmatrix} q_{\ell'}(T^{2a-2}(\overline{v}'(\alpha,a-1,a)),\overline{v}'(\alpha,1-a,a)) & q_{\ell'}(T^{2a-2}(\overline{v}'(\alpha,1-a,a)),\overline{v}'(\alpha,1-a,a)) \\ q_{\ell'}(T^{2a-2}(\overline{v}'(\alpha,a-1,a)),\overline{v}'(\alpha,a-1,a)) & q_{\ell'}(T^{2a-2}(\overline{v}'(\alpha,1-a,a)),\overline{v}'(\alpha,a-1,a)) \end{bmatrix}.$$

Les termes diagonaux sont égaux par adjonction.

Montrons que

$$\widetilde{N} \text{ est nilpotent}. \tag{4}$$

On définit $g\ell_{\mathrm{ent}}$ et $g\ell_{\mathrm{nil}}$ comme on a défini $g_{\mathrm{ent}}$ et $g_{\mathrm{nil}}$. Puisque $Z\in g_{\mathrm{ent}}$, on a $Z^{2a-2}\in g\ell_{\mathrm{ent}}$ et $\omega_F\,Z^{2a-2}\in g\ell_{\mathrm{nil}}$. Donc $N$ est nilpotent.

Notons $V(\alpha,a)^\perp$ l'orthogonal de $V(\alpha,a)$ dans $V$ et $S$ l'image naturelle de $L'_{k'}\cap V(\alpha,a)^\perp$ dans $\Lambda_{a-1}/\Lambda_a$. D'après le lemme VII.16 (ii) et (iii), on a les inclusions :

$$\begin{aligned} Z(\Lambda_{2-a}) = Z(L'_{2-a}) \subset L'_{1-k'} + \mathfrak{p}_F^{-1}L'_{a-1}\cap V(\alpha,a) \subset \mathfrak{p}_F^{-1}L'_{k'}\cap V(\alpha,a)^\perp \\ +\mathfrak{p}_F^{-1}L'_{a-1}\cap V(\alpha,a). \end{aligned}$$

Par adjonction, on en déduit que

$$Z(L'_{k'} \cap V(\alpha,a)^{\perp}) \subset L'_{a-1}.$$

Donc $Z_{a-1}$ annule $S$ et l'image de $\pi Z_{2-a}$ est incluse dans S+$\rho(R)$. En utilisant le fait que $\rho\rho^*$ est égal à l'identité sur $\rho(R)$ et est nul sur $S$, on obtient l'égalité :

$$Z_{a-1}\,\rho\rho^*\,\pi\,Z_{2-a} = Z_{a-1}\,\pi\,Z_{2-a}.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on en déduit l'égalité

$$\widetilde{N}^n = \rho^*\,N^n\,\rho.$$

Donc $\widetilde{N}$ est lui aussi nilpotent.

Grâce à (4), la matrice (3) est nilpotente. Les assertions de l'énoncé en résultent. □

**VII.20.** Pour $Y \in g$, on définit $Y_W \in g(W)$ comme en VI.20. De même, pour $Y \in k(L)$, on définit $Y' \in g(\ell')$ et $Y'' \in g(\ell'')$.

Soit $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{A}_{>a}$. Rappelons que les ensembles $s(a-1;\alpha)_1$ et $M(a;\alpha)$ sont indépendants de $\alpha$ pourvu que $\alpha \in \mathcal{A}|_{\widetilde{\alpha}}$ (lemme VII.13 et corollaire VII.15). On les notera $s(a-1;\widetilde{\alpha})_1$ et $M(a;\widetilde{\alpha})$. Ce dernier ensemble est un sous-groupe de $K(L)$. On note $M'(\widetilde{\alpha}) \times M''(\widetilde{\alpha})$ son image naturelle dans $G(\ell') \times G(\ell'')$. Pour $x \in M(a;\widetilde{\alpha})$, on note $(x', x'')$ son image naturelle dans $M'(\widetilde{\alpha}) \times M''(\widetilde{\alpha})$. On a remarqué dans la démonstration du lemme VII.11 que la droite $\mathbb{F}_q\overline{v}'(\alpha, a-1, a)$ était indépendante de $\alpha \in \mathcal{A}|_{\widetilde{\alpha}}$. Pour $x' \in M'(\widetilde{\alpha})$, on note $z(x')$ l'élément de $\mathbb{F}_q^{\times}$ tel que

$$x'(\overline{v}'(\alpha, a-1, a)) = z(x')\overline{v}'(\alpha, a-1, a)$$

pour tout $\alpha \in \mathcal{A}|_{\widetilde{\alpha}}$. De même, si $a \geqslant k' - k'' + 1$, pour $x'' \in M''(\widetilde{\alpha})$, on note $z(x'')$ l'élément de $\mathbb{F}_q^{\times}$ tel que

$$x''(\overline{v}''(\alpha, \ell(a)-1, a)) = z(x'')\overline{v}''(\alpha, \ell(a)-1, a)$$

pour tout $\alpha \in \mathcal{A}|_{\widetilde{\alpha}}$.

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathcal{B}$. Pour $j \in \mathcal{J}$, il résulte de VII.2 (1), (2) et (3) que $X(\alpha,\beta,j)_W \in k(L)$. On pose simplement

$$X'(\alpha,\beta,j) = (X(\alpha,\beta,j)_W)', \quad X''(\alpha,\beta,j) = (X(\alpha,\beta,j)_W)''.$$

On définit de même $X'(\alpha,\beta)$ et $X''(\alpha,\beta)$.

Si $a \in \widehat{\mathcal{J}}$, on définit $z(\alpha,\beta) \in g(\ell')$ par

$$z(\alpha,\beta)(\overline{v}'(\alpha, a-1, a)) = \beta_a\overline{v}'(\alpha, 2-a, a) + \beta_{a-1}\overline{v}'(\alpha, 2-a, a-1),$$

$$z(\alpha,\beta)(\overline{v}'(\alpha, i, j)) = 0$$

pour tout $j \in \mathcal{J}$, $i \in \mathbb{Z}$ tels que $|i| \leqslant j-1$ et $(i,j) \neq (a-1,a)$.

Si $a \geqslant k' - k'' + 1$, on rappelle que l'on a fixé en VII.2 un élément $\delta[\alpha'_a, \alpha''_a]_a \in \mathfrak{o}_F^{\times}$. On note $z(\alpha,\beta)$ sa réduction dans $\mathbb{F}_q^{\times}$.

On définit de façon évidente l'ensemble $\mathcal{B}_{>a}$, une projection

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{B}_{>a}\\ (\alpha,\beta) &\longmapsto (\alpha_{>a},\beta_{>a})\end{aligned}$$

et, pour tout $(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) \in \mathcal{B}_{>a}$, un sous-ensemble $\mathcal{B}|_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$ de $\mathcal{B}$.

Soit $(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) \in \mathcal{B}_{>a}$. On définit une fonction :

$$\varphi_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}} : (\mathfrak{p}_F\, s(a-1;\widetilde{\alpha})_1^{\sim} \cap g) \times M'(\widetilde{\alpha}) \times M''(\widetilde{\alpha}) \times \mathcal{B}|_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

par

$$\varphi_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}(Z,x',x'',\alpha\,\beta) = \begin{cases} \psi\circ q_{g(\ell')}\big(Z' + \overline{z}(\alpha,Z) - \overline{z}(\alpha,Z)^*, x'^{-1}(X'(\alpha,\beta) \\ \qquad\qquad + z(\alpha,\beta) - z(\alpha,\beta)^*)x'\big), \ \text{si } a \in \widehat{\mathcal{J}}, \\ \psi\big[ - z(\alpha,\beta)\, z(x')\, z(x'')\, \overline{z}(\alpha,Z) + q_{g(\ell')}(Z', x'^{-1}X'(\alpha,\beta)x') \\ \qquad + q_{g(\ell'')}(Z'', x''^{-1}X''(\alpha,\beta)x'')\big] \ \text{si } a \geqslant k'-k''+1, \end{cases}$$

pour tous $Z \in \mathfrak{p}_F\, s(a-1;\widetilde{\alpha})_1^{\sim} \cap g$, $x' \in M'(\widetilde{\alpha})$, $x'' \in M''(\widetilde{\alpha})$, $(\alpha,\beta) \in \mathcal{B}|_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$.

***Lemme***. — *Soit $(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) \in \mathcal{B}_{>a}$. Il existe une fonction*

$$C_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}} : \mathfrak{p}_F\, s(a-1;\widetilde{\alpha})_1^{\sim} \cap g \longrightarrow \mathbb{C}$$

*telle que pour tous $Z \in \mathfrak{p}_F\, s(a-1;\widetilde{\alpha})_1^{\sim} \cap g$, $x \in M(a;\widetilde{\alpha})$, $(\alpha,\beta) \in \mathcal{B}|_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$, $X \in A(\alpha,\beta)$, on ait l'égalité :*

$$\psi\circ q_g(Z, x^{-1}X\,x) = \varphi_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}(Z,x',x'',\alpha,\beta)\, C_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}(Z).$$

La preuve est similaire à celle du lemme VI.20. □

**VII.21.** Soit $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{A}|_{>a}$. On a remarqué dans la preuve du lemme VII.11 que le module

$$L \cap \Big( \bigoplus_{j\in\mathcal{J};\, j\leqslant a} V(\alpha,j) \Big), \ \text{resp. } \widetilde{L} \cap \Big( \bigoplus_{j\in\mathcal{J};\, j\leqslant a} V(\alpha,j) \Big)$$

était indépendant de $\alpha \in \mathcal{A}|_{\widetilde{\alpha}}$. On note $\ell_{\widetilde{\alpha}}$, resp. $\ell''_{\widetilde{\alpha}}$, son image naturelle dans $\ell'$, resp. $\ell''$. Pour $Y' \in g(\ell')$, resp. $Y'' \in g(\ell'')$, on définit $Y'_{\widetilde{\alpha}} \in g(\ell'_{\widetilde{\alpha}})$, resp. $Y''_{\widetilde{\alpha}} \in g(\ell''_{\widetilde{\alpha}})$, comme on a défini $Y'_0$ et $Y''_0$ en VI.21. En particulier, pour $Z \in \mathfrak{p}_F\, s(a-1;\widetilde{\alpha})_1^{\sim} \cap g$, on pose $Z'_{\widetilde{\alpha}} = (Z')_{\widetilde{\alpha}}$, $Z''_{\widetilde{\alpha}} = (Z'')_{\widetilde{\alpha}}$ et, pour $(\alpha,\beta) \in \mathcal{B}$, on pose $X'_{\widetilde{\alpha}}(\alpha,\beta) = (X'(\alpha,\beta))_{\widetilde{\alpha}}$, $X''_{\widetilde{\alpha}}(\alpha,\beta) = (X''(\alpha,\beta))_{\widetilde{\alpha}}$.

On définit comme dans le cas symplectique les sous-groupes $M^{\mathrm{red}}(a;\widetilde{\alpha})$ et $M''(a;\widetilde{\alpha})$ de $M(a;\widetilde{\alpha})$. On note $M'^{\mathrm{red}}(\widetilde{\alpha}) \times M''^{\mathrm{red}}(\widetilde{\alpha})$ et $M'^{u}(\widetilde{\alpha}) \times M''^{u}(\widetilde{\alpha})$ leurs images dans $G(\ell') \times G(\ell'')$. Remarquons que $M'^{\mathrm{red}}(\widetilde{\alpha}) \subset G(\ell'_{\widetilde{\alpha}})$, $M''^{\mathrm{red}}(\widetilde{\alpha}) \subset G(\ell''_{\widetilde{\alpha}})$.

Notons $\mathcal{Z}'(\widetilde{\alpha})$ l'ensemble des $Y' \in g(\ell')$ tels que

• pour tout $i \in \{1-a,\dots,a-1\}$, $Y'(\ell'[i]) \subset \ell'[i-1]$ (avec la convention $\ell'[-a] = \{0\}$) ;

• pour tout $i \in \{1,\dots,a-1\}$, $Y'(\ell'[i] \cap \ell'_{\widetilde{\alpha}}) \subset \ell'[i-1] \cap \ell'_{\widetilde{\alpha}}$ et, pour tout $i \in \{2-a,\dots,0\}$, $Y'(\ell'[i] \cap \ell'^{\perp}_{\widetilde{\alpha}}) \subset \ell'[i-1] \cap \ell'^{\perp}_{\widetilde{\alpha}}$ ;

($\ell'^{\perp}_{\widetilde{\alpha}}$ est l'orthogonal de $\ell'_{\widetilde{\alpha}}$ dans $\ell'$). Cet ensemble est stable par conjugaison par $M'(\widetilde{\alpha})$. On définit un sous-ensemble $\mathcal{Z}''(\widetilde{\alpha})$ de $g(\ell'')$ par des conditions analogues. Il est invariant par conjugaison par $M''(\widetilde{\alpha})$. On pose

$$\mathcal{Z}(\widetilde{\alpha}) = \Big\{ Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1;\widetilde{\alpha})_1^{\sim} \cap g;\, (Z', Z'') \in \mathcal{Z}'(\widetilde{\alpha}) \times \mathcal{Z}''(\widetilde{\alpha}) \Big\}.$$

Pour $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \in \mathcal{B}_{>a}$, on définit une fonction

$$\phi_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}} : (\mathfrak{p}_F s(a-1;\widetilde{\alpha})_1^{\sim} \cap g) \times M'^{\,\mathrm{red}}(\widetilde{\alpha}) \times M''^{\,\mathrm{red}}(\widetilde{\alpha}) \times \mathcal{B}|_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

par

$$\phi_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}(Z, x', x'', \alpha, \beta) = \begin{cases} 0, \text{ si } Z \notin \mathcal{Z}(\widetilde{\alpha}); \\ \psi \circ q_{g(\ell'_{\widetilde{\alpha}})}(Z'_{\widetilde{\alpha}} + \overline{z}(\alpha, Z) - \overline{z}(\alpha, Z)^*, x'^{-1}(X'_{\widetilde{\alpha}}(\alpha,\beta) \\ \qquad + z(\alpha,\beta) - z(\alpha,\beta)^*)x'), \text{ si } Z \in \mathcal{Z}(\widetilde{\alpha}) \text{ et } a \in \widehat{\mathcal{J}}, \\ \psi\Big[ - z(\alpha,\beta) z(x') z(x'') \overline{z}(\alpha, Z) + q_{g(\ell'_{\widetilde{\alpha}})}(Z'_{\widetilde{\alpha}}, x'^{-1} X'_{\widetilde{\alpha}}(\alpha,\beta) x') \\ \qquad + q_{g(\ell''_{\widetilde{\alpha}})}(Z''_{\widetilde{\alpha}}, x''^{-1} X''_{\widetilde{\alpha}}(\alpha,\beta) x'')\Big] \text{ si } Z \in \mathcal{Z}(\widetilde{\alpha}) \\ \qquad\qquad \text{et } a \geqslant k' - k'' + 1, \end{cases}$$

pour tout $Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1;\widetilde{\alpha})_1^{\sim} \cap g$, $x' \in M'^{\,\mathrm{red}}(\widetilde{\alpha})$, $x'' \in M''^{\,\mathrm{red}}(\widetilde{\alpha})$, $(\alpha,\beta) \in \mathcal{B}|_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$.

***Lemme***. — *Soit $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \in \mathcal{B}_{>a}$. Munissons $M^u(a;\widetilde{\alpha})$ d'une mesure de Haar. Il existe une fonction*

$$C'_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}} : \mathfrak{p}_F s(a-1;\widetilde{\alpha})_1^{\sim} \cap g \longrightarrow \mathbb{C}$$

*telle que pour tous $Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1;\widetilde{\alpha})_1^{\sim} \cap g$, $x \in M^{\mathrm{red}}(a;\widetilde{\alpha})$, $(\alpha,\beta) \in \mathcal{B}|_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$, $X \in A(\alpha,\beta)$, on ait l'égalité*

$$\int_{M^u(a;\widetilde{\alpha})} \psi \circ q_g(Z, y^{-1} x^{-1} X x y)\, dy = \phi_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}(Z, x', x'', \alpha, \beta)\, C'_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}(Z).$$

La preuve est similaire à celle du lemme VI.21. □

**VII.22.** Soient $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{A}_{>a}$ et $Z \in g$. On a défini en VII.18 un terme $z(\alpha, Z)$ pour $\alpha \in \mathcal{A}$. Comme dans la preuve du lemme VII.11, on montre que $z(\alpha, Z)$ ne dépend pas de $\alpha$ pourvu que $\alpha \in \mathcal{A}|_{\widetilde{\alpha}}$. Cela autorise à noter ce terme $z(\widetilde{\alpha}, Z)$ et sa réduction $\overline{z}(\widetilde{\alpha}, Z)$.

***Lemme***. — *Soient $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \in \mathcal{B}|_{>a}$ et $Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1;\widetilde{\alpha})_1^{\sim} \cap g_{\mathrm{ent}}$. Supposons $\overline{z}(\widetilde{\alpha}, Z) \neq 0$. Alors on a l'égalité*

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{B}|_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}} \;\sum_{x' \in M'^{\,\mathrm{red}}(\widetilde{\alpha})} \;\sum_{x'' \in M''^{\,\mathrm{red}}(\widetilde{\alpha})} \kappa(\alpha,\beta)\, \phi_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}(Z, x', x'', \alpha, \beta) = 0.$$

*Démonstration.* — On suppose $a \in \widehat{\mathcal{J}}$. L'espace $\ell'_{\widetilde{\alpha}}$ est du type étudié en II.5, l'entier $k$ de ce paragraphe étant égal à $a$. Fixons ${}^oX \in \mathfrak{g}(\ell'_{\widetilde{\alpha}})_{\mathrm{nil}}$ comme en II.5, que l'on complète en un $s\ell_2$-triplet $({}^oX, {}^oH, {}^oY)$. Quitte à effectuer une conjugaison, on peut supposer que pour tout $i \in \{1-a, \dots, a-1\}$, ${}^oH$ agit sur $\ell'[i] \cap \ell'_{\widetilde{\alpha}}$ par l'homothétie de rapport $2i$. Graduons $\boldsymbol{g}(\ell'_{\widetilde{\alpha}})$ comme en V.7. Alors $Z'_{\widetilde{\alpha}} \in \mathfrak{g}(\ell'_{\widetilde{\alpha}}; -2)$ et $\overline{z}(\widetilde{\alpha}, Z) - \overline{z}(\widetilde{\alpha}; Z)^* \in \mathfrak{g}(\ell'_{\widetilde{\alpha}}; 4a-8)$.

En appliquant les définitions de V.16 à l'espace $\ell'_{\widetilde{\alpha}}$, on définit une suite $\mathcal{W}^-$ de sous-espaces de $\ell'_{\widetilde{\alpha}}$, un ensemble $\mathcal{X}(\mathcal{W}^-)$, une fonction $\xi_{\mathcal{W}^-}$ sur $\mathcal{X}(\mathcal{W}^-)$ et un isomorphisme :

$$\rho^- : \mathfrak{g}(\ell'_{\widetilde{\alpha}}; 2) \times \mathfrak{g}(\ell'_{\widetilde{\alpha}}; 8-4a) \longrightarrow \mathcal{X}(\mathcal{W}^-).$$

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \tau : M'^{\mathrm{red}}(\widetilde{\alpha}) \times \mathcal{B}|_{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}} &\longrightarrow \mathfrak{g}(\ell'_{\widetilde{\alpha}}) \\ (x', \alpha, \beta) &\longmapsto x'^{-1}(X'_{\widetilde{\alpha}}(\alpha, \beta) + z(\alpha, \beta) - z(\alpha, \beta)^*)x'. \end{aligned}$$

Par construction, son image est incluse dans $\mathfrak{g}(\ell'_{\widetilde{\alpha}}; 2) + \mathfrak{g}(\ell'_{\widetilde{\alpha}}; 8-4a)$. On va montrer :

(1) il existe $c \in \mathbb{C}^\times$ tel que, pour tout $Y \in \mathfrak{g}(\ell'_{\widetilde{\alpha}}; 2) + \mathfrak{g}(\ell'_{\widetilde{\alpha}}; 8-4a)$, on ait l'égalité

$$\sum_{(x', \alpha, \beta) \in \tau^{-1}(Y)} \kappa(\alpha, \beta) = c\xi_{\mathcal{W}^-} \circ \rho^-(Y).$$

Explicitons les définitions de V.16. On a $W_0^- = \ell'[a-1] \cap \ell'_{\widetilde{\alpha}}$ et, pour $i \in \{1, \dots, a\}$, $W_i^- = \ell'[i-a] \cap \ell'_{\widetilde{\alpha}}$. Soit $(\alpha\, \beta) \in \mathcal{B}|_{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}}$. Posons

$$\rho^- \circ \tau(1, \alpha, \beta) = X = (X_i)_{i=0,\dots,a-1}.$$

Alors $X_0$ est défini par l'égalité

$$X_0(v'(\alpha, a-1, a)) = \beta_a \overline{v}'(\alpha, 2-a, a) + \beta_{a-1}\overline{v}'(\alpha, 2-a, a-1),$$

et, pour $i \in \{1, \dots, a-1\}$, $X_i$ est défini par l'égalité :

$$X_i(\overline{v}'(\alpha, i-a, j)) = \overline{v}'(\alpha, i+1-a, j) \text{ pour tout } j \in \{a+1-i, \dots, a\}.$$

Notons $Q$ la restriction de $q_{\ell'}$ à $W_a^-$. Alors

$$\mathrm{sgn}(Q[X]_0) = \mathrm{sgn}(\beta_a^2 \overline{\alpha}'_a + \beta_{a-1}^2 \overline{\alpha}'_{a-1}),$$

et, pour $i \in \{1, \dots, a\}$,

$$\mathrm{sgn}(Q[X]_i) = \prod_{n=a+1-i}^{a} \mathrm{sgn}(\alpha'_n). \tag{2}$$

Remarquons que

$$X_0(W_0^-) + X_1(W_1^-) = W_2^-$$

car $\beta_{a-1} \neq 0$ par définition de $\mathcal{B}$. En utilisant les définitions de V.12 et VII.2, on trouve l'égalité :

$$\xi_{\mathcal{W}^-}(X) = \xi_a(\alpha, \beta) \prod_{n=1}^{a} \mathrm{sgn}(\alpha'_n)^n.$$

Posons

$$C_1 = \operatorname{sgn}\left((-1)^{[k'/2]}\eta'\right)^{k'}\Big(\prod_{j\in\widehat{\mathcal{J}};j>a}\xi_j(\alpha,\beta)\Big)\Big(\prod_{n=a+1}^{k'}\operatorname{sgn}(\alpha'_n)^n\Big) \cdot\Big(\prod_{n=k'-k''+1}^{k'}\operatorname{sgn}(\alpha''_n)^{n-k'}\Big).$$

Il est clair que $C_1$ ne dépend que de $(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$. En se rappelant que, par définition de $\mathcal{A}$, on a l'égalité

$$\prod_{n=1}^{k'}\alpha'_n = (-1)^{[k'/2]}\eta',$$

il résulte de la définition de $\kappa(\alpha\,\beta)$ donnée en VII.2 que l'on a l'égalité :

$$\kappa(\alpha,\beta) = C_1\Big(\prod_{j\in\widehat{\mathcal{J}};j\leqslant a}\xi_j(\alpha,\beta)\Big)\Big(\prod_{n=1}^{a}\operatorname{sgn}(\alpha'_n)^n\Big).$$

D'où l'égalité

(3) $$\kappa(\alpha,\beta) = C_1\,\xi_{\mathcal{W}^-}(X)\prod_{j\in\widehat{\mathcal{J}};j<a}\xi_j(\alpha,\beta).$$

Le groupe $M'^{\mathrm{red}}(\widetilde{\alpha})$ n'est autre que

$$\Big(\prod_{i=1}^{a-1}GL(W_i^-)\Big)\times G(W_a^-).$$

Il agit naturellement sur $W_i^-$ pour tout $i\in\{1,\ldots,a\}$ et sur $W_0^-$ par adjonction. Il agit donc sur $\mathcal{X}(\mathcal{W}^-)$ par une action que l'on note $(x',X)\mapsto x'\cdot X$. Pour $x'\in M'^{\mathrm{red}}(\widetilde{\alpha})$ et $(\alpha,\beta)\in\mathcal{B}|_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$, on a évidemment l'égalité :

$$\rho^-\circ\tau(x',\alpha,\beta) = x'\cdot\rho^-\circ\tau(1,\alpha,\beta).$$

Puisque $\xi_{\mathcal{W}^-}$ est constante sur les orbites pour l'action de $M'^{\mathrm{red}}(\widetilde{\alpha})$, l'égalité (3) reste vraie pour $X=\rho^-\circ\tau(x',\alpha,\beta)$. En particulier $\xi_{\mathcal{W}^-}(X)\neq 0$.

Inversement, soit $X\in\mathcal{X}(\mathcal{W}^-)$ tel que $\xi_{\mathcal{W}^-}(X)\neq 0$. Déterminons la fibre de $\rho^-\circ\tau$ au-dessus de $X$. C'est l'ensemble des $(x',\alpha,\beta)\in M'^{\mathrm{red}}(\widetilde{\alpha})\times\mathcal{B}|_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$ tels qu'en posant $x'^{-1}X=X'$, on ait les égalités :

(4) $$X'_0(\overline{v}'(\alpha,a-1,a)) = \beta_a\overline{v}'(\alpha,2-a,a)+\beta_{a-1}\overline{v}'(\alpha,2-a,a-1),$$

(5) $$\text{pour tout } i\in\{1,\ldots,a-1\} \text{ et tout } j\in\{a+1-i,\ldots,a\},\quad X'_i(\overline{v}'(\alpha,i-a,j)) = \overline{v}'(\alpha,i+1-a,j).$$

Ces égalités impliquent (2). Or (2) détermine $\alpha'_n$ pour $n\in\{1,\ldots,a\}$, donc $\alpha$ puisque $\alpha_{>a}=\widetilde{\alpha}$. Notons $\alpha^X$ l'élément de $\mathcal{A}$ ainsi déterminé. Dans les égalités (4) et (5), on doit prendre $\alpha=\alpha^X$. On vérifie qu'il existe $x'$ tel que (5) soit vérifié. Plus précisément, l'ensemble des $x'$ tels que (5) soit vérifié est en bijection avec le sous-groupe des éléments de $G(W_a^-)$ qui conservent chaque droite $\mathbb{F}_q\overline{v}'(\alpha^X,0,j)$ pour $j=1,\dots,a$. Cet ensemble a $2^{a-1}$ éléments. Pour chaque $x'$ dans cet ensemble, $\beta_{a-1}$ et $\beta_a$ sont déterminés par (4). L'hypothèse $\xi_{\mathcal{W}^-}(X)\neq 0$ entraîne que $(\beta_{a-1},\beta_a)\in\mathcal{B}[\alpha_{a-1}^{X'},\alpha_a^{X'}]$, *cf.* VII.2 pour la définition de cet ensemble. Par contre les $\beta_j$, pour $j\in\mathcal{J}^{\#}$, $j\leqslant a-2$, sont quelconques. Remarquons que pour tout $j\in\widehat{\mathcal{J}}$, on peut considérer $\xi_j(\alpha^X,\cdot)$ comme une fonction définie sur $\mathcal{B}[\alpha_{j-1}^{X'},\alpha_j^{X'}]$. Pour tout tel $j$, posons

$$C_j(\alpha^X)=\sum_{\beta\in\mathcal{B}[\alpha_{j-1}^{X'},\alpha_j^{X'}]}\xi_j(\alpha^X,\beta).$$

L'égalité (3) et la description ci-dessus entraînent l'égalité :

$$\sum_{(x',\alpha,\beta)\in(\rho^-\circ\tau)^{-1}(X)}\kappa(\alpha,\beta)=2^{a-1}C_1\Big(\prod_{j\in\widehat{\mathcal{J}},j<a}C_j(\alpha^X)\Big)\xi_{\mathcal{W}^-}(X).$$

Mais il résulte du lemme V.13, cas $w_0=0$, $w_1\neq 0$, que pour tout $j\in\widehat{\mathcal{J}}$, on a l'égalité

$$C_j(\alpha^X)=(q-1)^2(q+1)(q-3).$$

On en déduit (1) avec :

$$C=2^{a-1}C_1[(q-1)^2(q+1)(q-3)]^{|\{j\in\widehat{\mathcal{J}};j<a\}|}.$$

Si $Z\notin\mathcal{Z}(\widetilde{\alpha})$, on a $\phi_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}(Z,x',x'',\alpha,\beta)=0$ pour tous $x',x'',\alpha,\beta$ et l'assertion de l'énoncé est immédiate. Supposons $Z\in\mathcal{Z}(\widetilde{\alpha})$. Posons

$$T_{\widetilde{\alpha}}=Z'_{\widetilde{\alpha}}+\overline{z}(\widetilde{\alpha},Z)-\overline{z}(\widetilde{\alpha},Z)^*.$$

Grâce à (1), le membre de gauche de l'égalité de l'énoncé est égal à :

$$C\sum_{Y\in g(\ell'_{\widetilde{\alpha}};2)+g(\ell'_{\widetilde{\alpha}};8-4a)}\xi_{\mathcal{W}^-}\circ\rho^-(Y)\psi\circ q_{g(\ell'_{\widetilde{\alpha}})}(T_{\widetilde{\alpha}},Y).$$

Si les deux hypothèses du lemme V.16 sont vérifiées, ce lemme implique la nullité de cette expression, d'où l'égalité de l'énoncé. Ces deux hypothèses sont $\overline{z}(\widetilde{\alpha},Z)\neq 0$, ce que l'on a supposé, et :

(6) $$T_{\widetilde{\alpha}}\text{ est nilpotent}.$$

Démontrons-la. L'endomorphisme $T_{\widetilde{\alpha}}$ de $\ell'_{\widetilde{\alpha}}$ permute cycliquement les sous-espaces suivants de $\ell'_{\widetilde{\alpha}}$ :

$$(\ell'[1-a]\oplus\ell'[a-1])\cap\ell'_{\widetilde{\alpha}},\ \ \ell'[a-2]\cap\ell'_{\widetilde{\alpha}},\dots,\ell'[2-a]\cap\ell'_{\widetilde{\alpha}}.$$

Il suffit de prouver que la restriction de $T_{\widetilde{\alpha}}^{2a-2}$ à $(\ell'[1-a]\oplus\ell'[a-1])\cap\ell'_{\widetilde{\alpha}}$ est nilpotente. Cet espace a pour base $\{v_+,v_-\}$, où

$$v_+=\overline{v}'(a-1,a),\quad v_-=\overline{v}'(1-a,a).$$

La matrice de l'endomorphisme ci-dessus est

$$\begin{bmatrix} q_{\ell'_{\widetilde{\alpha}}}(T_{\widetilde{\alpha}}^{2a-2}(v_+), v_-) & q_{\ell'_{\widetilde{\alpha}}}(T_{\widetilde{\alpha}}^{2a-2}(v_-), v_-) \\ q_{\ell'_{\widetilde{\alpha}}}(T_{\widetilde{\alpha}}^{2a-2}(v_+), v_+) & q_{\ell'_{\widetilde{\alpha}}}(T_{\widetilde{\alpha}}^{2a-2}(v_-), v_+) \end{bmatrix}.$$

Or on a, par exemple :

$$q_{\ell'_{\widetilde{\alpha}}}(T_{\widetilde{\alpha}}^{2a-2}(v_-), v_+) = (-1)^{a-1} q_{\ell'_{\widetilde{\alpha}}}(T_{\widetilde{\alpha}}^{a-1}(v_-), T_{\widetilde{\alpha}}^{a-1}(v_+)).$$

Posons

$$T = Z' + \overline{z}(\widetilde{\alpha}, Z) - \overline{z}(\widetilde{\alpha}, Z)^*.$$

Puisque $Z \in \mathcal{Z}(\widetilde{\alpha})$, on a

$$T_{\widetilde{\alpha}}^{a-1}(v_+) = T^{a-1}(v_+)$$
$$T_{\widetilde{\alpha}}^{a-1}(v_-) = T^{a-1}(v_-).$$

On en déduit l'égalité :

$$q_{\ell'_{\widetilde{\alpha}}}(T_{\widetilde{\alpha}}^{a-2}(v_-), v_+) = q_{\ell'}(T^{2a-2}(v_-), v_+).$$

Un même calcul s'applique aux autres coefficients. Alors la nilpotence de la matrice ci-dessus résulte du lemme VII.19 et de l'hypothèse $Z \in g_{\mathrm{ent}}$. Cela achève la démonstration de (6) et du lemme. □

**VII.23.** Soient $a \in \{-3, \dots, k'\}$, $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{A}_{>b(a)}$ et $Z \in g$. En appliquant les définitions de VII.5 aux données relatives à $a$, on définit $I_1(a; \widetilde{\alpha}, Z)$ et, si $a \neq -3$, $I_\infty(a; \widetilde{\alpha}, Z)$.

***Lemme***. — *Soit $a \in \{-2, \dots, k'\}$. Supposons que pour tout $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{A}_{>b(a-1)}$, on ait l'implication*

$$Z \in g_{\mathrm{ent}} \text{ et } I_1(a-1; \widetilde{\alpha}, Z) \neq 0 \Longrightarrow Z \in \mathfrak{p}_F s(a-1; \widetilde{\alpha})_1^{\sim} \cap g.$$

*Alors pour tout $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{A}_{>b(a)}$, on a l'implication*

$$Z \in g_{\mathrm{ent}} \text{ et } I_\infty(a; \widetilde{\alpha}, Z) \neq 0 \Longrightarrow Z \in \mathfrak{p}_F s(a; \widetilde{\alpha})_\infty^{\sim} \cap g.$$

*Démonstration*. — Supposons d'abord l'une des conditions suivantes vérifiées :
- $a \in \{-2, -1, 0\}$ ;
- $a + 1 \in \widehat{\mathcal{J}}$ ;
- $d$ est impair et $a = 1$.

Dans les deux premiers cas, $b(a) = b(a-1)$. Dans le troisième, $b(a) = 1$, $b(a-1) = 0$. Dans les trois cas, la projection $\mathcal{A}_{>b(a-1)} \to \mathcal{A}_{>b(a)}$ est bijective. Identifions ces deux ensembles. Pour $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{A}_{>b(a)}$, on a les égalités :

$$M(a; \widetilde{\alpha}) R(\widetilde{\alpha})_\infty = M(a-1; \widetilde{\alpha}) R(a-1; \widetilde{\alpha})_1, \quad s(a; \widetilde{\alpha})_\infty = s(a-1; \widetilde{\alpha})_1$$

grâce à VII.12 (3). Alors l'hypothèse et la conclusion de l'énoncé sont identiques.

Supposons maintenant $a \in \mathcal{J}$ et, si $d$ est impair, $a \neq 1$. Soit $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{A}_{>b(a)}$. Notons $\mathcal{A}^{\#}$ la fibre au-dessus de $\widetilde{\alpha}$ de la projection $\mathcal{A}_{>b(a-1)} \to \mathcal{A}_{>b(a)}$. Alors

$$\mathcal{B}|_{\widetilde{\alpha}} = \bigcup_{\alpha^{\#} \in \mathcal{A}^{\#}} \mathcal{B}|_{\alpha^{\#}}.$$

Pour tout $Z \in g$, on a l'égalité :

$$I_\infty(a;\widetilde{\alpha},Z) = \sum_{\alpha^\# \in \mathcal{A}^\#} \int_{M(a;\widetilde{\alpha})R(a;\widetilde{\alpha})_\infty} \sum_{(\alpha,\beta)\in \mathcal{B}|_{\alpha^\#}} \kappa(\alpha,\beta) \int_{A(\alpha,\beta)} \psi \circ q_g(Z, x^{-1}X x)\, dX\, dx.$$

Pour tout $\alpha^\# \in \mathcal{A}^\#$, on a encore l'égalité :

$$R(a;\widetilde{\alpha})_\infty = R(a-1;\alpha^\#)_1.$$

Fixons une mesure de Haar sur $\mathrm{M}(a;\widetilde{\alpha})$. Alors pour tout $\alpha^\# \in \mathcal{A}^\#$, il existe $c(\alpha^\#) > 0$ tel que, pour tout $Z \in g$, on ait l'égalité

$$I_\infty(a;\widetilde{\alpha},Z) = \sum_{\alpha^\# \in \mathcal{A}^\#} c(\alpha^\#) \int_{M(a;\widetilde{\alpha})} I_1(a-1;\alpha^\#, xZx^{-1})\, dx.$$

Supposons $Z \in g_{\mathrm{ent}}$ et $I_\infty(a;\widetilde{\alpha},Z) \neq 0$. Alors il existe $\alpha^\# \in \mathcal{A}^\#$ et $x \in M(a;\widetilde{\alpha})$ tels que $I_1(a-1;\alpha^\#, xZx^{-1}) \neq 0$. Fixons de tels $\alpha^\#$ et $x$. Appliquons l'hypothèse de l'énoncé : on a $xZx^{-1} \in \mathfrak{p}_F\, s(a-1;\alpha^\#)_1^\sim \cap g$. Remarquons que ce module est indépendant de $\alpha^\#$ : c'est l'ensemble $\mathfrak{p}_F\, s(a-1;\widetilde{\alpha})_1^\sim \cap g$ des paragraphes précédents. Il est stable par conjugaison par $M(a;\widetilde{\alpha})$. Donc $Z \in \mathfrak{p}_F\, s(a-1;\widetilde{\alpha})_1^\sim \cap g$. On poursuit la démonstration comme en VI.23, en utilisant les lemmes VII.18, VII.19 et VII.22. □

**VII.24.** Comme en VI.24, la proposition VII.3 se déduit d'une application successive des lemmes VII.5, VII.13 et VII.23. On doit remarquer que $\mathcal{A}_{>b(k')} = \varnothing$, que pour $Z \in g$, on a l'égalité $I_1(k';\varnothing,Z) = I(Z)$ et qu'enfin pour $Z \in \mathfrak{p}_F\, s(k';\varnothing)_1^\sim \cap g = h(\varnothing)^{-1}$, on a $Z(L'_{1-k'}) \subset L'_{1-k'}$ et $Z(L''_{1-k''}) \subset L''_{1-k''}$. □

**VII.25.** On a supposé en VII.1 $k' \geqslant k''$. Comme en VI.25, un argument utilisant une similitude de rapport $\omega_F$ permet d'échanger les rôles de $k'$ et $k''$. On peut donc énoncer et démontrer une proposition analogue à la proposition VII.3 quand $\mathrm{k}' < k''$. Nous laisserons ce point au lecteur et continuerons à supposer $k' \geqslant k''$ pour la commodité de la rédaction.

Posons $R = L'_{1-k'}$. On construit comme en III.2 une fonction ${}^o\!f \in C_c^\infty(g)$ à support dans $k(R)$ et on définit une distribution ${}^o\phi \in \mathcal{D}$ par

$${}^o\phi(f) = |G(R)|^{-1} |g(R)|^{1/2} \int_G \int_g f(x^{-1}Yx)\, {}^o\!f(Y)\, dY\, dx$$

pour toute $f \in C_c^\infty(g)$. Posons

$$C = 2^{1-k'-\sup(0,k''-1)} [(q-1)^2(q+1)(q-3)]^{-[(k'-k'')/2]}$$

et, pour $(\alpha\,\beta) \in \mathcal{B}$ :

$$m(\alpha,\beta) = \mathrm{mes}(Z_G(X(\alpha,\beta))).$$

On définit une distribution $D \in \mathcal{D}$ par :

$$D = cq^{\delta(k',k'')} \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{B}} m(\alpha,\beta)\kappa(\alpha,\beta) \int_{A(\alpha,\beta)} \phi(X,\cdot)\, dX$$

*cf.* III.8 pour la définition de $\delta(k',k'')$. Cette distribution dépend bien sûr des diverses données fixées en VII.1 et VII.2.

***Lemme***. — *Soit $f \in C_c^\infty(g)$. Supposons le support de $\widehat{f}$ inclus dans $g_{\text{ent}}$. Alors on a l'égalité*

$$D(f) = {}^o\phi(f).$$

*Démonstration.* — La preuve est analogue à celle du lemme VI.26. Le calcul de la constante utilise l'égalité :

$$\sum_{\beta\in\mathcal{B}(\alpha)} \prod_{j\in\widehat{\mathcal{J}}} \xi_j(\alpha\beta) = [(q-1)^2(q+1)(q-3)]^{[(k'-k'')/2]}$$

pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$. Cette égalité résulte du lemme V.13, cas $w_0 = 0$, $w_1 \neq 0$. □

**VII.26.** Soit $(V, q_V)$ un espace orthogonal comme en I.2. Supposons que $V$ possède un réseau autodual. Soit $\theta \in \Theta(V)$. On fixe des objets $V_0$, $V_1$, $R$, $\boldsymbol{T}$ et $X_T$ comme en III.1 et III.2 et $\Gamma$ comme en IV.2. On a défini en III.2, resp. IV.2, une distribution $\phi_\theta(X_T, \cdot)$, resp. $D_\theta[\Gamma, X_T]$, qui appartient à $\mathcal{D}_{\text{ent}}$.

***Proposition***. — *Pour toute $f \in \mathcal{H}$, on a l'égalité*

$$D_\theta[\Gamma, X_T](f) = \phi_\theta(X_T, f).$$

C'est la proposition IV.3 dans le cas orthogonal.

*Démonstration.* — Comme on l'a déjà dit, on ne traite que le cas $k' \geqslant k''$. Supposons d'abord $V_0 = V \neq \{0\}$. Ecrivons $\theta = (k', k'', \varnothing, \varnothing, \varnothing)$. Le couple $(k', k'')$ vérifie les conditions de VII.1. Avec les notations du paragraphe précédent, on a l'égalité :

$$\phi_\theta(X_T, \cdot) = {}^o\phi.$$

Etudions la distribution $D_\theta[\Gamma, X_T]$. Les ensembles $\widehat{J}$ de IV.2 et $\widehat{\mathcal{J}}$ de VII.1 sont égaux. Pour $j \in \widehat{J}$, considérons l'ensemble

$$\widetilde{\Gamma}_j = \{(\gamma^*, \gamma) \in \Gamma_{j-1} \times \Gamma_j \,;\, \gamma \not\equiv \gamma^* \bmod 1 + \mathfrak{p}_F\}.$$

Définissons une involution $\iota_j$ de $\widetilde{\Gamma}_j$ par

$$\iota_j(\gamma^*, \gamma) = (\gamma, \gamma^*).$$

Fixons un sous-ensemble $\Delta_j$ de $\widetilde{\Gamma}_j$ tel que $\widetilde{\Gamma}_j$ soit union disjointe de $\Delta_j$ et $\iota_j(\Delta_j)$. Posons

$$\begin{aligned} \Delta &= \{\gamma \in \Gamma \,;\, \forall\, j \in \widehat{J},\, (\gamma_{j-1}, \gamma_j) \in \Delta_j\}, \\ I &= \prod_{j\in\widehat{J}} \{1, \iota_j\}. \end{aligned}$$

Pour tout $i \in I$, on définit de façon évidente l'ensemble $i(\Delta)$. Alors $\Gamma$ est union disjointe des $i(\Delta)$ quand $i$ parcourt $I$. On définit une distribution $D[\Delta]$ en remplaçant dans la définition de $D_\theta[\Gamma, X_T]$ la sommation sur $\gamma \in \Gamma$ par une sommation sur $\gamma \in \Delta$.

On a défini en VII.1 et VII.2 les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Précisons les choix effectués en VII.2. On note $E$ l'extension quadratique non ramifiée de $F$ et $\tau_E$ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(E/F)$. On fixe un sous-ensemble $\Delta_E \subset \theta_E$ tel que

- $\Delta_E \cap \tau_E(\Delta_E) = \varnothing$ ;
- l'application de réduction envoie bijectivement $\Delta_E \cup \tau_E(\Delta_E)$ sur $\mathbb{F}_{q^2} - \mathbb{F}_q$.

Pour $j \in \{k'-k''+1,\dots,k'\}$ et $\alpha', \alpha'' \in \mathfrak{o}_F^\times$, on choisit l'élément $\gamma[\alpha',\alpha'']_j$ de VII.2 dans $\Gamma_j$. Pour $j \in \widehat{J}$, $\alpha^*, \alpha \in \mathfrak{o}_F^\times$, $(\beta^*,\beta) \in \mathcal{B}[\alpha^*,\alpha]$ tels que $\beta^{*}2\overline{\alpha}^*\overline{\alpha}+\beta^2\overline{\alpha}^2 \notin \mathbb{F}_q^{\times 2}$, on choisit l'élément $\gamma[\alpha^*,\alpha,\beta^*,\beta]_j$ dans $\Delta_E$. C'est possible pour des choix convenables de relèvements de $\beta^*$ et $\beta$ dans $\mathfrak{o}_F$. Pour $j, \alpha^*, \alpha, \beta^*, \beta$ comme ci-dessus mais tels que $\beta^{*2}\overline{\alpha}^*\overline{\alpha}+\beta^2\overline{\alpha}^2 \in \mathbb{F}_q^{\times 2}$, on choisit les éléments $\gamma^* = \gamma^*[\alpha^*,\alpha,\beta^*,\beta]_j$ et $\gamma = \gamma[\alpha^*,\alpha,\beta^*,\beta]_j$ tels que $(\gamma^*,\gamma) \in \Delta_j$. C'est encore possible. Dans chaque cas ces choix sont uniquement déterminés. On effectue arbitrairement les autres choix de VII.2. Cela étant, on définit la distribution $D$ de VII.25.

Supposons pour simplifier la rédaction $d$ impair. Notons $\mathcal{B}^E$ l'ensemble des $(\alpha,\beta) \in \mathcal{B}$ tels qu'il existe $j \in \widehat{J}$ pour lequel $q_j(\beta) \notin \mathbb{F}_q^{\times 2}$. Montrons que :

$$\sum_{(\alpha\,\beta)\in\mathcal{B}^E} m(\alpha,\beta)\,\kappa(\alpha,\beta)\int_{A(\alpha,\beta)}\phi(X,\cdot)\,dx = 0. \tag{1}$$

Pour tout sous-ensemble $L$ de $\widehat{J}$, notons $\mathcal{B}_L$ l'ensemble des $(\alpha,\beta) \in \mathcal{B}$ tels que pour tout $j \in \widehat{J}$, on ait l'équivalence

$$j \in L \iff q_j(\beta) \notin \mathbb{F}_q^{\times 2}.$$

L'ensemble $\mathcal{B}^E$ est union disjointe des $\mathcal{B}_L$ quand $L$ parcourt l'ensemble des sous-ensembles non vides de $\widehat{J}$. Il suffit de fixer un tel $L$ et de prouver l'égalité analogue de (1) où $\mathcal{B}^E$ est remplacé par $\mathcal{B}_L$. Fixons un tel $L$ et $\ell \in L$. Fixons aussi une section $s$ de l'application

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_q^\times &\longrightarrow \mathbb{F}_q^{\times 2}\\ x &\longmapsto x^2.\end{aligned}$$

Définissons une application

$$(\alpha,\beta) \longmapsto (\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$$

par les formules :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\alpha}''_j = \alpha''_j \ \text{ pour tout } \ j \in \{k'-k''+1,\dots,k'\},\\
&\widetilde{\alpha}'_j = \alpha'_j \ \text{ pour tout } \ j \in \{1,\dots,k'\} - \{\ell-1,\ell\},\\
&\widetilde{\alpha}'_\ell = \nu\alpha'_\ell, \ \ \widetilde{\alpha}'_{\ell-1} = \nu\alpha'_{\ell-1},\\
&\widetilde{\beta}_j = \beta_j \ \text{ pour tout } \ j \in \{2,\dots,k'-k''\} - \{\ell-1,\ell\},\\
&\widetilde{\beta}_\ell = \overline{\widetilde{\alpha}}'^{-1}_\ell\,\overline{\alpha}'_\ell\beta_\ell, \ \ \widetilde{\beta}_{\ell-1} = s(\overline{\alpha}'_{\ell-1}\overline{\alpha}'_\ell\overline{\widetilde{\alpha}}'^{-1}_{\ell-1}\overline{\widetilde{\alpha}}'^{-1}_\ell)\beta_{\ell-1}.
\end{aligned}$$

(On rappelle que $\nu$ est l'élément non trivial de $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times 2}$. Dans les quatre premières égalités, $\alpha''_j$, $\alpha'_j$ etc. sont des éléments de $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times 2}$. Dans les deux dernières, on les a identifiés comme en VII.1 à des relèvements dans $\mathfrak{o}_F^\times$). On vérifie les propriétés suivantes :

- cette application est une bijection de $\mathcal{B}_L$ sur lui-même ;
- les éléments $X(\alpha,\beta)$ et $X(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$ de $g$ sont conjugués par un élément de $G$ ;
- les sous-ensembles $A(\alpha,\beta)$ et $A(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$ de $g$ sont conjugués par un élément de $G$ ;
- $m(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = m(\alpha,\beta)$ ;

par contre :

- $\kappa(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = -\kappa(\alpha,\beta)$.

Alors la somme des contributions de $(\alpha,\beta)$ et de $(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$ à l'expression (1) (avec $\mathcal{B}^E$ remplacé par $\mathcal{B}_L$) est nulle. D'où l'assertion (1).

Grâce à (1), on peut remplacer dans la définition de $D$ la somme sur les $(\alpha,\beta)\in\mathcal{B}$ par la somme sur les $(\alpha,\beta)\in\mathcal{B}-\mathcal{B}^E$. Remarquons que d'après nos choix, pour $(\alpha,\beta)\in\mathcal{B}-\mathcal{B}^E$, la famille $(\gamma_{\alpha,\beta,j})_{j\in J}$ appartient à $\Delta$. Définissons une application :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}-\mathcal{B}^E &\longrightarrow \Delta\times(\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times 2})^J\\ (\alpha,\beta) &\longmapsto (\gamma,e)\end{aligned}$$

par :

- $\gamma_j = \gamma_{\alpha,\beta,j}$, pour tout $j\in J$ ;
- $e_j = e_{j-1} \equiv \alpha'_j(\gamma_{\alpha,\beta,j-1}-\gamma_{\alpha,\beta,j})^{-1} \bmod \mathfrak{o}_F^{\times 2}$, pour tout $j\in\widehat{J}$ ;
- $e_j = (-1)^{\ell(j)+1}\alpha''_j$, pour tout $j\in\{k'-k''+1,\dots,k'-1\}$,
- si $k''\neq 0$, $e_{k'} = -\eta''\alpha''_{k'}$,

*cf.* I.3 pour la définition de $\eta''$. On vérifie que cette application a pour image $\Delta\times\mathcal{E}$, *cf.* IV.2 pour la définition de $\mathcal{E}$. Les fibres ont toutes $2^{|\widehat{J}|}$ éléments : pour $j\in\widehat{J}$, $\beta_{j-1}$ n'est déterminé qu'au signe près par $(\gamma,e)$.

Pour $(\alpha,\beta)$ et $(\gamma,e)$ comme ci-dessus, on vérifie que les ensembles $A(\alpha,\beta)$ de VII.2 et $A(\gamma)$ de IV.2 sont conjugués par un élément de $G$. Comme dans la preuve du lemme VI.26, on calcule

$$m(\alpha,\beta) = 2^{k'-1}.$$

Enfin, avec les notations de IV.2, on a l'égalité :

$$\kappa(\alpha,\beta) = \operatorname{sgn}(-1)^{(k'-1)/2}(q+1)^{|\widehat{J}|}\sigma(\gamma)\kappa_0(e).$$

On en déduit l'égalité :

$$D = 2^{|\widehat{J}|}D[\Delta].$$

Grâce au lemme VII.25, on a aussi :

$$^{o}\phi(f) = 2^{|\widehat{J}|}D[\Delta](f)$$

pour toute $f\in C_c^\infty(g)$ telle que le support de $\widehat{f}$ soit inclus dans $g_{\mathrm{ent}}$. On peut remplacer dans cette égalité $\Delta$ par $i(\Delta)$ pour tout $i\in I$. Puisque

$$D_\theta[\Gamma,X_T] = \sum_{i\in I} D[i(\Delta)],$$

on obtient

$$ {}^{o}\phi(f) = D_{\theta}[\Gamma, X_T](f) \tag{2} $$

pour toute $f$ comme ci-dessus.

Supposons maintenant $d$ pair. Le calcul est analogue. On doit prendre garde à la difficulté de distinguer les deux classes de conjugaison par $G$ contenues dans une classe de conjugaison par $O(V)$, semi-simple et régulière. On fixe $\delta \in O(V) - G$. Il résulte des définitions que ${}^{o}\phi$ est invariante par conjugaison par $O(V)$, donc ${}^{o}\phi \circ \mathrm{Ad}(\delta) = {}^{o}\phi$. Le lemme VII.25 reste vrai si l'on remplace $D$ par

$$(D + D \circ \mathrm{Ad}(\delta))/2.$$

Dans le calcul précédent, on remplace $D$ par cette distribution. On aboutit encore à l'égalité (2).

Dans ces calculs, on n'a pas utilisé l'hypothèse que $V$ possédait un réseau autodual, mais seulement les propriétés de $k'$ et $k''$ imposées en VII.1. Dans le cas général où $V \neq V_0$, ces propriétés restent vraies. La proposition se déduit alors du cas particulier $V = V_0$ comme dans la démonstration de la proposition VI.27. □

# CHAPITRE VIII

# CORRESPONDANCE DE SPRINGER

**VIII.1.** Soit $W$ un groupe fini. On note $C(W)$ l'espace des fonctions sur $W$ à valeurs complexes, $C^W$ le sous-espace des fonctions invariantes par conjugaison et $\mathcal{R}(W)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles de $W$. En associant à toute représentation (de dimension finie) de $W$ son caractère, on identifie $\mathcal{R}(W)$ à une base de $C^W$. On définit un produit scalaire sur $C(W)$ par

$$\langle f, f' \rangle_W = |W|^{-1} \sum_{w \in W} \overline{f}(w) f'(w).$$

En particulier si $\rho$ et $\rho'$ sont des représentations de $W$ et $\rho'$ est irréductible, $\langle \rho, \rho' \rangle_W$ est la multiplicité de $\rho'$ dans $\rho$.

Soit $U$ un sous-groupe de $W$. Si $\rho$, resp. $\rho_U$, est une représentation de $W$, resp. $U$, on définit la restriction $\mathrm{res}_U^W(\rho)$, resp. l'induite $\mathrm{ind}_U^W(\rho_U)$, qui est une représentation de $U$, resp. $W$. On a la formule de réciprocité de Frobenius :

$$\langle \mathrm{res}_U^W(\rho), \rho_U \rangle_U = \langle \rho, \mathrm{ind}_U^W(\rho_U) \rangle_W .$$

Pour $w \in W$, on note $w \cdot \rho_U$ la représentation $\rho_U \circ \mathrm{Ad}(w^{-1})$ du groupe $wUw^{-1}$. Si $U'$ est un sous-groupe de $W$, on a la formule de Mackey :

$$\mathrm{res}_{U'}^W \, \mathrm{ind}_U^W(\rho_U) = \sum_{w \in U' \backslash W / U} \mathrm{ind}^W_{U' \cap wUw^{-1}} \left( w \cdot \mathrm{res}^U_{w^{-1}U'w \cap U}(\rho_U) \right).$$

Par linéarité, ces définitions et propriétés se généralisent : on peut remplacer ci-dessus $\rho$, resp. $\rho_U$, par un élément de $C^W$, resp. $C^U$.

On note $\mathbf{1}_W$ la représentation triviale de $W$.

**VIII.2.** Soit $n$ un entier $\geqslant 1$, posons $W = W(A_{n-1})$, *cf.* II.3. On définit une bijection

$$\boldsymbol{\rho} : \mathcal{P}(n) \longrightarrow \mathcal{R}(W)$$

*cf.* [C], proposition 11.4.1. En particulier $\boldsymbol{\rho}((n))$ est la représentation triviale. Si $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(n)$ et $\rho \in \mathcal{R}(W)$, on dira que $\boldsymbol{\alpha}$ paramétrise $\rho$ si $\rho = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha})$.

Soient $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}(n)$ et $U$ un sous-groupe de $W$. On dira que $U$ est de type $\boldsymbol{\beta}$ s'il existe une décomposition en union disjointe :

$$\{1, \ldots, n\} = \bigcup_{j=1}^{c(\boldsymbol{\beta})} K_j ,$$

de sorte que :

$$(1) \quad \begin{cases} \bullet \quad \text{pour tout } \ j \in \{1, \ldots, c(\boldsymbol{\beta})\}, \ \ |K_j| = \beta_j ; \\ \bullet \quad U \ \text{ est le sous-groupe des éléments de } \ W \ \text{ qui conservent chaque } \ K_j \\ \quad\ \ \text{pour } \ j \in \{1, \ldots, c(\boldsymbol{\beta})\}. \end{cases}$$

Deux tels sous-groupes sont conjugués. Soit $U$ un tel sous-groupe, posons

$$\pi(\boldsymbol{\beta}) = \operatorname{ind}_U^W(\mathbf{1}_U).$$

Cette représentation ne dépend pas du choix de $U$. On a la propriété suivante :
(2) il existe une matrice $(C(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}))_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}(n)}$ à coefficients complexes telle que
- pour tous $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}(n)$, $C(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\beta} \geqslant \boldsymbol{\alpha}$ ;
- pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(n)$, $C(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = 1$ ;
- pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(n)$, $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}(n)} C(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \pi(\boldsymbol{\beta})$.

Cela résulte de [Z] 4.16. En inversant la matrice, on a aussi :
(3) il existe une matrice $(\widetilde{C}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}))_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}(n)}$ à coefficients complexes telle que
- pour tous $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}(n)$, $\widetilde{C}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \geqslant \boldsymbol{\beta}$ ;
- pour tout $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}(n)$, $\widetilde{C}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) = 1$ ;
- pour tout $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}(n)$, $\pi(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(n)} \widetilde{C}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha})$.

Soient $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}(n)$ et $U$ un sous-groupe de $W$ de type $\boldsymbol{\beta}$. Par réciprocité de Frobenius, on déduit de (3) la propriété suivante :
(4) • si $\langle \operatorname{res}_U^W(\boldsymbol{\rho}(\alpha)), \mathbf{1}_U \rangle_U \neq 0$, alors $\boldsymbol{\alpha} \geqslant \boldsymbol{\beta}$ ;
  • si $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$, $\langle \operatorname{res}_U^W(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha})), \mathbf{1}_U \rangle_U = 1$.

Soient $n', n'' \in \mathbb{N}$ tels que $n' + n'' = n$ et $U$ un sous-groupe de $W$ de type la partition associée à l'ensemble avec multiplicités $\{n', n''\}$. Le groupe $U$ est isomorphe à $W(A_{n'-1}) \times W(A_{n''-1})$ (en posant formellement $W(A_{-1}) = \{1\}$). Ses représentations sont paramétrisées par $\mathcal{P}(n') \times \mathcal{P}(n'')$. Soient $\boldsymbol{\alpha}' \in \mathcal{P}(n')$, $\boldsymbol{\alpha}'' \in \mathcal{P}(n'')$ et $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(n)$. On a :
(5) • si $\langle \operatorname{res}_U^W(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha})), \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}') \otimes \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}'') \rangle_U \neq 0$, alors $\boldsymbol{\alpha} \geqslant \boldsymbol{\alpha}' \cup \boldsymbol{\alpha}''$ ;
  • si $\boldsymbol{\alpha}' \cup \boldsymbol{\alpha}'' = \boldsymbol{\alpha}$, $\langle \operatorname{res}_U^W(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha})), \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}') \otimes \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}'') \rangle_U = 1$.

Affectons d'un $'$, resp. $''$, les objets relatifs à $W(A_{n'-1})$, resp. $W(A_{n''-1})$, que l'on a introduits ci-dessus pour le groupe $W$. On a :

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}') \otimes \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}'') = \sum_{(\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\beta}'') \in \mathcal{P}(n') \times \mathcal{P}(n'')} C'(\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\alpha}') C''(\boldsymbol{\beta}'', \boldsymbol{\alpha}'') \pi(\boldsymbol{\beta}') \otimes \pi(\boldsymbol{\beta}'').$$

Par construction, pour $\boldsymbol{\beta}' \in \mathcal{P}(n')$ et $\boldsymbol{\beta}'' \in \mathcal{P}(n'')$, on a l'égalité

$$\operatorname{ind}_U^W(\pi(\boldsymbol{\beta}') \otimes \pi(\boldsymbol{\beta}'')) = \pi(\boldsymbol{\beta}' \cup \boldsymbol{\beta}'').$$

D'où l'égalité

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}_U^W(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}') \otimes \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}'')) &= \sum_{(\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\beta}'')\in\mathcal{P}(n')\times\mathcal{P}(n'')} C'(\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\alpha}')C''(\boldsymbol{\beta}'',\boldsymbol{\alpha}'')\pi(\boldsymbol{\beta}'\cup\boldsymbol{\beta}'') \\ &= \sum_{\boldsymbol{\gamma}\in\mathcal{P}(n)} \sum_{(\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\beta}'')\in\mathcal{P}(n')\times\mathcal{P}(n'')} \widetilde{C}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}'\cup\boldsymbol{\beta}'')C'(\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\alpha}')C''(\boldsymbol{\beta}'',\boldsymbol{\alpha}'')\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\gamma}).\end{aligned}$$

Par réciprocité de Frobenius, on en déduit

$$\langle \operatorname{res}_U^W(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha})), \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}') \otimes \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}'')\rangle_U = \sum_{(\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\beta}'')\in\mathcal{P}(n')\times\mathcal{P}(n'')} \widetilde{C}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}'\cup\boldsymbol{\beta}'')C'(\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\alpha}')C''(\boldsymbol{\beta}'',\boldsymbol{\alpha}'').$$

L'assertion (5) résulte des propriétés des matrices $\widetilde{C}, C', C''$ et du fait évident que si $\boldsymbol{\beta}' \geqslant \boldsymbol{\alpha}'$ et $\boldsymbol{\beta}'' \geqslant \boldsymbol{\alpha}''$, alors $\boldsymbol{\beta}' \cup \boldsymbol{\beta}'' \geqslant \boldsymbol{\alpha}' \cup \boldsymbol{\alpha}''$, avec égalité si et seulement si $\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\alpha}'$ et $\boldsymbol{\beta}'' = \boldsymbol{\alpha}''$.

**VIII.3.** Soit $n$ un entier $\geqslant 1$, posons $W = W(C_n)$, *cf.* II.3. On définit une projection

$$\sigma : W \longrightarrow W(A_{n-1})$$

par $\sigma(w)(i) = |w(i)|$ pour tous $w \in W$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(n)$, on pose

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \varnothing) = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}) \circ \sigma, \quad \pi(\boldsymbol{\alpha}, \varnothing) = \pi(\boldsymbol{\alpha}) \circ \sigma, \\ &\boldsymbol{\rho}(\varnothing, \boldsymbol{\alpha}) = \operatorname{sgn}_{CD} \otimes \rho(\boldsymbol{\alpha}, \varnothing), \quad \pi(\varnothing, \boldsymbol{\alpha}) = \operatorname{sgn}_{CD} \otimes \pi(\boldsymbol{\alpha}, \varnothing).\end{aligned}$$

Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a + b = n$ et $A, B$ deux sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ tels que

- $|A| = a$, $|B| = b$ ;
- $\{1, \ldots, n\}$ est union disjointe de $A$ et $B$.

Notons $U$ le sous-groupe des éléments de $W$ qui conservent chacun des ensembles $A \cup (-A)$ et $B \cup (-B)$. Le groupe $U$ est isomorphe à $W(C_a) \times W(C_b)$. Pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(a)$ et $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}(b)$, on pose

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &= \operatorname{ind}_U^W(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \varnothing) \otimes \boldsymbol{\rho}(\varnothing, \boldsymbol{\beta})), \\ \pi(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &= \operatorname{ind}_U^W(\pi(\boldsymbol{\alpha}, \varnothing) \otimes \pi(\varnothing, \boldsymbol{\beta})).\end{aligned}$$

Ces représentations ne dépendent pas des choix de $A$ et $B$. La représentation $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ est irréductible.

Notons $\mathcal{P}_2(n)$ l'ensemble des $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ tels que $S(\boldsymbol{\alpha}) + S(\boldsymbol{\beta}) = n$. L'application

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho} : \mathcal{P}_2(n) &\longrightarrow \mathcal{R}(W) \\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &\longmapsto \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\end{aligned}$$

est bijective ([C], proposition 11.4.2). Pour $\rho \in \mathcal{R}(W)$ et $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{P}_2(n)$, on dira que $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ paramétrise $\rho$ si $\rho = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$.

On déduit de VIII.2 (2) et (3) la propriété suivante :

(1) il existe une matrice $(C(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}';\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}))$, resp. $(\widetilde{C}(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}';\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}))$, indexée par $\mathcal{P}_2(n)\times\mathcal{P}_2(n)$, à coefficients complexes, telle que

- pour tous $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')\in\mathcal{P}_2(n)$, $C(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}';\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\neq 0$, resp. $\widetilde{C}(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}';\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\neq 0$, $\Rightarrow S(\boldsymbol{\alpha}')=S(\boldsymbol{\alpha}), S(\boldsymbol{\beta}')=S(\boldsymbol{\beta})$, $\boldsymbol{\alpha}'\geqslant\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}'\geqslant\boldsymbol{\beta}$ ;
- pour tout $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\in\mathcal{P}_2(n)$, $C(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=1$, resp. $\widetilde{C}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=1$ ;
- pour tout $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\in\mathcal{P}_2(n)$, $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')\in\mathcal{P}_2(n)} C(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}';\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\pi(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')$, resp. $\pi(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')\in\mathcal{P}_2(n)}\widetilde{C}(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}';\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\rho(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')$.

Soient $n',n''\in\mathbb{N}$ tels que $n'+n''=n$. Construisons un groupe $U$ comme ci-dessus, en remplaçant $(a,b)$ par $(n',n'')$. Soient $(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')\in\mathcal{P}_2(n')$, $(\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'')\in\mathcal{P}_2(n'')$ et $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\in\mathcal{P}_2(n)$. On a :

(2) • si $\langle\mathrm{res}_U^W(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})),\ \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')\otimes\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'')\rangle_U\neq 0$, alors $S(\boldsymbol{\alpha}')+S(\boldsymbol{\alpha}'')=S(\boldsymbol{\alpha})$, $S(\boldsymbol{\beta}')+S(\boldsymbol{\beta}'')=S(\boldsymbol{\beta})$, $\boldsymbol{\alpha}\geqslant\boldsymbol{\alpha}'\cup\boldsymbol{\alpha}''$ et $\boldsymbol{\beta}\geqslant\boldsymbol{\beta}'\cup\boldsymbol{\beta}''$ ;

• si $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}'\cup\boldsymbol{\alpha}''$ et $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}'\cup\boldsymbol{\beta}''$, on a $\langle\mathrm{res}_U^W(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})),\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')\otimes\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'')\rangle_U=1$.

La preuve est analogue à celle de VIII.2 (5).

Soient $\boldsymbol{\gamma}\in\mathcal{P}(n)$ et $(K_j)_{j=1,\dots,c(\boldsymbol{\gamma})}$ une famille de sous-ensembles de $\{\pm1,\dots,\pm n\}$ telle que :

- pour tout $j\in\{1,\dots,c(\boldsymbol{\gamma})\}$, $|K_j|=\gamma_j$ ;
- $\{\pm1,\dots,\pm n\}$ est union disjointe des ensembles $K_j$ et des ensembles $-K_j$ pour $j\in\{1,\dots,c(\boldsymbol{\gamma})\}$.

Notons $M$ le sous-groupe des éléments de $W$ qui conservent chaque $K_j$ pour $j\in\{1,\dots,c(\boldsymbol{\gamma})\}$, et donc aussi chaque $-K_j$. Soit $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\in\mathcal{P}_2(n)$. On a :

(3) • si $\langle\mathrm{res}_M^W(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})),\mathbf{1}_M\rangle_M\neq 0$, alors $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\geqslant\boldsymbol{\gamma}$ ;

• si $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$, $\langle\mathrm{res}_M^W(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})),\mathbf{1}_M\rangle_M=1$.

Considérons d'abord le cas $\boldsymbol{\gamma}=(n)$, $\boldsymbol{\beta}=\varnothing$. Alors $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha},\varnothing)=\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha})\circ\sigma$. Or $\sigma$ se restreint en une bijection de $M$ sur $W$ sur $W(A_{n-1})$. En identifiant ces deux groupes, on obtient

$$\mathrm{res}_M^W(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha},\varnothing))=\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}),$$

d'où

$$\langle\mathrm{res}_M^W(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha},\varnothing)),\mathbf{1}_M\rangle_M=\begin{cases}1, & \text{si } \boldsymbol{\alpha}=(n),\\ 0, & \text{si } \boldsymbol{\alpha}\neq(n).\end{cases}$$

Considérons maintenant le cas $\boldsymbol{\gamma}=(n)$, $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ quelconque. Posons $a=S(\boldsymbol{\alpha})$, $b=S(\boldsymbol{\beta})$, introduisons un sous-groupe $U$ de $W$, isomorphe à $W(C_a)\times W(C_b)$, tel que

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\mathrm{ind}_U^W(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha},\varnothing)\otimes\boldsymbol{\rho}(\varnothing,\boldsymbol{\beta})).$$

Notons pour simplifier $W_a=W(C_a)$, $W_b=W(C_b)$ les facteurs de $U$ et $M_a=M\cap W_a$, $M_b=M\cap W_b$. On a l'égalité $W=MU$. D'après la formule de Mackey,

$$\langle\mathrm{res}_M^W(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})),\mathbf{1}_M\rangle_M=\langle\mathrm{res}_{M_a}^{W_a}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha},\varnothing)),\mathbf{1}_{M_a}\rangle_{M_a}\langle\mathrm{res}_{M_b}^{W_b}(\boldsymbol{\rho}(\varnothing,\boldsymbol{\beta})),\mathbf{1}_{M_b}\rangle_{M_b}.$$

Les sous-groupes $M_a$ de $W_a$, resp. $M_b$ de $W_b$, sont du même type que $M$, associés aux partitions $(a)$, resp. $(b)$. D'autre part, puisque $\mathrm{sgn}_{CD}$ est trivial sur $M_b$, le dernier facteur de l'expression ci-dessus est égal à :

$$\langle \mathrm{res}_{M_b}^{W_b}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\beta}, \varnothing)), \mathbf{1}_{M_b} \rangle_{M_b} .$$

On peut appliquer le résultat précédent. On obtient :

$$\langle \mathrm{res}_M^W(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})), \mathbf{1}_M \rangle_M = \begin{cases} 1, & \text{si } \boldsymbol{\alpha} = (a) \text{ et } \boldsymbol{\beta} = (b), \\ 0, & \text{sinon}. \end{cases}$$

Par réciprocité de Frobenius, on en déduit l'égalité :

$$\mathrm{ind}_M^W(\mathbf{1}_M) = \sum_{a,b \in \mathbb{N}, a+b=n} \boldsymbol{\rho}((a),(b)).$$

Ou encore, en remarquant que $\boldsymbol{\rho}((a),(b)) = \pi((a),(b))$ pour tous $a, b$ comme ci-dessus :

$$\mathrm{ind}_M^W(\mathbf{1}_M) = \sum_{a,b \in \mathbb{N}, a+b=n} \pi((a),(b)). \tag{4}$$

Passons au cas général. Introduisons le sous-groupe $M'$ des éléments de $W$ qui conservent chaque ensemble $K_j \cup (-K_j)$ pour $j \in \{1, \ldots, c(\boldsymbol{\gamma})\}$. Il contient $M$ et est isomorphe à :

$$\prod_{j=1}^{c(\boldsymbol{\gamma})} W(C_{\gamma_j}).$$

De même $M$ se décompose en produit de groupe $M_j$ et, pour tout $j$, le sous-groupe $M_j$ de $W(C_{\gamma_j})$ relève du cas particulier déjà étudié. Notons $\mathcal{M}(\boldsymbol{\gamma})$ l'ensemble des couples $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ de suites finies d'entiers $\geqslant 0$ tels que $a_j + b_j = \gamma_j$ pout tout $j \geqslant 1$. Il résulte de (4) que

$$\mathrm{ind}_M^{M'}(\mathbf{1}_M) = \sum_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\gamma})} \bigotimes_{j=1}^{c(\boldsymbol{\gamma})} \pi((a_j),(b_j)).$$

On en déduit

$$\mathrm{ind}_M^W(\mathbf{1}_M) = \sum_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\gamma})} \pi(p(\boldsymbol{a}), p(\boldsymbol{b})),$$

*cf.* I.5 pour la définition de $p(\boldsymbol{a})$ et $p(\boldsymbol{b})$. Par réciprocité de Frobenius et grâce à (1), on obtient

$$\langle \mathrm{res}_M^W(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})), \mathbf{1}_M) \rangle_M = \sum_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\gamma})} \widetilde{C}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; p(\boldsymbol{a}), p(\boldsymbol{b})). \tag{5}$$

On vérifie facilement :

(6) pour toutes suites finies $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ d'entiers $\geqslant 0$, on a $p(\boldsymbol{a}) + p(\boldsymbol{b}) \geqslant p(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$, avec égalité si et seulement si $\boldsymbol{a} = p(\boldsymbol{a})$ et $\boldsymbol{b} = p(\boldsymbol{b})$.

Supposons l'expression (5) non nulle. Il existe alors $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\gamma})$ tel que

$$\widetilde{C}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; p(\boldsymbol{a}), p(\boldsymbol{b})) \neq 0.$$

D'après (1), on a

$$\boldsymbol{\alpha} \geqslant p(\boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{\beta} \geqslant p(\boldsymbol{b}),$$

d'où, en utilisant (6) :

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \geqslant p(\boldsymbol{a}) + p(\boldsymbol{b}) \geqslant p(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\gamma}.$$

Supposons $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma}$. Si la contribution à (5) d'un couple $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\gamma})$ est non nulle, les inégalités ci-dessus doivent être des égalités. Grâce à (6), on en déduit $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\beta}$. Le membre de droite de (5) est donc égal à $\widetilde{C}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, *i.e.* à 1. Cela démontre (3). □

**VIII.4.** Soit $n$ un entier $\geqslant 1$, posons $W = W(D_n)$, $W^{\#} = W(C_n)$. Soient $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{P}_2(n)$ et $\rho \in \mathcal{R}(W)$. On dira que $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ paramétrise $\rho$ si $\rho$ est une sous-représentation de la restriction à $W$ de la représentation $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ de $W^{\#}$ définie au paragraphe précédent. Cela établit une correspondance entre $\mathcal{P}_2(n)$ et $\mathcal{R}(W)$.

Précisons les propriétés de cette correspondance (*cf.* [C], proposition 11.4.4). Soit $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{P}_2(n)$. Si $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$, les restrictions à $W$ des représentations $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ et $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$ de $W^{\#}$ sont irréductibles. Elles sont isomorphes. À cette représentation de $W$ correspondent les deux couples $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ et $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$. Inversement, soit $\rho$ un élément de $\mathcal{R}(W)$ paramétrisé par deux couples $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ et $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$. On peut supposer $\boldsymbol{\alpha} \succ \boldsymbol{\beta}$ (*cf.* I.5). On note alors $\rho^{\#}$, resp. $\rho^{b}$, la représentation de $W^{\#}$ paramétrisée par $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, resp. $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$. On a $\rho^{b} = \mathrm{sgn}_{CD} \otimes \rho^{\#}$.

Soit maintenant $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{P}_2(n)$. La restriction à $W$ de la représentation $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$ de $W^{\#}$ est somme de deux sous-représentations irréductibles non isomorphes. À chacune de ces représentations ne correspond que l'unique couple $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$. On distingue ces deux représentations de la façon suivante. Appliquons à la partition $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}$ la construction précédant VIII.3 (3). On suppose comme il est loisible que $K_j \subset \{1, \ldots, n\}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, c(\boldsymbol{\alpha})\}$. Le groupe $M$ est inclus dans $W$. Alors d'après VIII.3 (3), une et une seule des deux représentations de $W$ ci-dessus admet des invariants non nuls par $M$. On note $\boldsymbol{\rho}^{+}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$ cette représentation et $\boldsymbol{\rho}^{-}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$ l'autre. Si $\delta \in W^{\#} - W$, on a l'égalité $\boldsymbol{\rho}^{-}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\rho}^{+}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \circ \mathrm{Ad}(\delta)$.

Soient $n', n'' \in \mathbb{N}$ tels que $n' + n'' = n$ et $N', N''$ deux sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ tels que

- $|N'| = n'$, $|N''| = n''$ ;
- $\{1, \ldots, n\}$ est union disjointe de $N'$ et $N''$.

Notons $U$ le sous-groupe des éléments $w \in W$ qui conservent chacun des ensembles $N' \cup (-N')$ et $N'' \cup (-N'')$ et tels que l'entier $|\{j \in N'; w(j) < 0\}|$ soit pair (alors l'entier $|\{j \in N''; w(j) < 0\}|$ est pair lui aussi). Le groupe $U$ est isomorphe à $W(D_{n'}) \times W(D_{n''})$. Notons plus simplement $W' \times W''$ ce produit. Soient $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{P}_2(n)$, $\rho \in \mathcal{R}(W)$, $\rho' \in \mathcal{R}(W')$, $\rho'' \in \mathcal{R}(W'')$. Supposons que $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ paramétrise $\rho$. Alors :

(2) • si $\langle \mathrm{res}_U^W(\rho), \rho' \otimes \rho''\rangle_U \neq 0$, il existe $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}') \in \mathcal{P}_2(n')$ paramétrisant $\rho'$ et $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'') \in \mathcal{P}_2(n'')$ paramétrisant $\rho''$ tels que $S(\boldsymbol{\alpha}') + S(\boldsymbol{\alpha}'') = S(\boldsymbol{\alpha})$, $S(\boldsymbol{\beta}') + S(\boldsymbol{\beta}'') = S(\boldsymbol{\beta})$, $\boldsymbol{\alpha} \geqslant \boldsymbol{\alpha}' \cup \boldsymbol{\alpha}''$ et $\boldsymbol{\beta} \geqslant \boldsymbol{\beta}' \cup \boldsymbol{\beta}''$.

Inversement, soient $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$ paramétrisant $\rho'$ et $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'')$ paramétrisant $\boldsymbol{\rho}''$, supposons $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}' \cup \boldsymbol{\alpha}''$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}' \cup \boldsymbol{\beta}''$. Alors

(3) • si $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$ ou $\boldsymbol{\alpha}' \neq \boldsymbol{\beta}'$ ou $\boldsymbol{\alpha}'' \neq \boldsymbol{\beta}''$, $\langle \mathrm{res}_U^W(\rho), \rho' \otimes \rho''\rangle_U = 1$ ;
• si $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\beta}'$, $\boldsymbol{\alpha}'' = \boldsymbol{\beta}''$, soient $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ des signes tels que

$$\rho = \rho^{\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}),\ \rho' = \rho^{\varepsilon'}(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}'),\ \rho'' = \rho^{\varepsilon''}(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\alpha}'')$$

(avec la convention $\varepsilon' = +$, resp. $\varepsilon'' = +$, si $n' = 0$, resp. $n'' = 0$) ; alors

$$\langle \mathrm{res}_U^W(\rho), \rho' \otimes \rho''\rangle_U = \begin{cases} 1, & \text{si } \varepsilon = \varepsilon'\varepsilon'', \\ 0, & \text{si } \varepsilon = -\varepsilon'\varepsilon''. \end{cases}$$

Si $n' = 0$ ou $n'' = 0$, $U = W$ et les assertions sont évidentes. Supposons $n' \neq 0$, $n'' \neq 0$. Notons $U^{\#}$ le sous-groupe des éléments de $W^{\#}$ qui conservent chacun des ensembles $N' \cup (-N')$ et $N'' \cup (-N'')$. Il contient $U$ et est isomorphe à $W'^{\#} \times W''^{\#}$. Posons $\widetilde{\rho}' = \mathrm{ind}_{W'}^{W'^{\#}}(\rho')$, $\widetilde{\rho}'' = \mathrm{ind}_{W''}^{W''^{\#}}(\rho'')$. Puisque $\rho$ est contenue dans $\mathrm{res}_W^{W^{\#}}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}))$, on a

(4) $\langle \mathrm{res}_U^W(\rho), \rho' \otimes \rho''\rangle_U \leqslant \langle \mathrm{res}_U^{W^{\#}}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})), \rho' \otimes \rho''\rangle_U = \langle \mathrm{res}_{U^{\#}}^{W^{\#}}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})), \widetilde{\rho}' \otimes \widetilde{\rho}''\rangle_{U^{\#}}$.

Soient $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$ et $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'')$ des couples paramétrisant $\rho'$ et $\rho''$. On a

$$\widetilde{\rho}' = \begin{cases} \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}') + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\alpha}'), & \text{si } \boldsymbol{\alpha}' \neq \boldsymbol{\beta}', \\ \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}'), & \text{si } \boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\beta}' \end{cases}$$

et une égalité similaire pour $\widetilde{\rho}''$. Alors (2) se déduit de VIII.3 (2).

Supposons $\boldsymbol{\alpha}' \cup \boldsymbol{\alpha}'' = \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}' \cup \boldsymbol{\beta}'' = \boldsymbol{\beta}$. Si $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$, l'inégalité (4) est une égalité et (3) se déduit de VIII.3 (2). Supposons $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$, soit $\varepsilon$ un signe tel que $\rho = \boldsymbol{\rho}^{\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$. Posons pour simplifier $\rho^{\varepsilon} = \boldsymbol{\rho}^{\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = \rho$, $\rho^{-\varepsilon} = \rho^{-\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$. Alors $\mathrm{res}_W^{W^{\#}}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})) = \rho^{\varepsilon} + \rho^{-\varepsilon}$, et comme en (4), on a l'égalité :

(5) $\langle \mathrm{res}_U^W(\rho^{\varepsilon}), \rho' \otimes \rho''\rangle_U + \langle \mathrm{res}_U^W(\rho^{-\varepsilon}), \rho' \otimes \rho''\rangle_U = \langle \mathrm{res}_{U^{\#}}^{W^{\#}}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})), \widetilde{\rho}' \otimes \widetilde{\rho}''\rangle_{U^{\#}}$.

Supposons $\boldsymbol{\alpha}' \neq \boldsymbol{\beta}'$. On a aussi $\boldsymbol{\alpha}'' \neq \boldsymbol{\beta}''$. Grâce à VIII.3 (2), le membre de droite ci-dessus est égal à 2. Soit $\delta \in W'^{\#} - W'$. Alors

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{res}_U^W(\rho^{-\varepsilon}), \rho' \otimes \rho''\rangle_U &= \langle \mathrm{res}_U^W(\rho^{\varepsilon} \circ \mathrm{Ad}(\delta)), \rho' \otimes \rho''\rangle_U \\ &= \langle \mathrm{res}_U^W(\rho^{\varepsilon}), \rho' \circ \mathrm{Ad}(\delta^{-1}) \otimes \rho''\rangle_U \\ &= \langle \mathrm{res}_U^W(\rho^{\varepsilon}), \rho' \otimes \rho''\rangle_U. \end{aligned}$$

Les termes du membre de gauche de (5) sont donc tous deux égaux à 1. Supposons $\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\beta}'$ et $\boldsymbol{\alpha}'' = \boldsymbol{\beta}''$. Grâce à VIII.3 (2), le membre de droite de (5) est égal à 1. Donc l'un des termes du membre de gauche est égal à 1, l'autre à 0. Soient $\varepsilon', \varepsilon''$ des signes tels que $\rho' = \boldsymbol{\rho}^{\varepsilon'}(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}')$, $\rho'' = \rho^{\varepsilon''}(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\alpha}'')$. Il suffit de prouver que, si

$$\langle \mathrm{res}_U^W(\rho^\varepsilon), \rho' \otimes \rho'' \rangle_U = 1,$$

alors $\varepsilon = \varepsilon' \varepsilon''$. Fixons $\delta' \in W^\#$ tel que :

- $\delta' = 1$ si $\varepsilon' = +$,
- $\delta' \in W'^\# - W'$, si $\varepsilon' = -$.

Fixons de même $\delta'' \in W^\#$. Posons $\delta = \delta' \delta''$. On a les égalités

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{res}_U^W(\rho^\varepsilon), \rho' \otimes \rho'' \rangle_U &= \langle \mathrm{res}_U^W(\rho^\varepsilon \circ \mathrm{Ad}(\delta)), \rho' \circ \mathrm{Ad}(\delta') \otimes \rho'' \circ \mathrm{Ad}(\delta'') \rangle_U \\ &= \langle \mathrm{res}_U^W(\rho^{\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''}), \rho^+(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}') \otimes \boldsymbol{\rho}^+(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\alpha}'') \rangle_U .\end{aligned}$$

Ceci nous ramène au cas où $\varepsilon' = \varepsilon'' = +$. On a expliqué ci-dessus que l'on distinguait $\rho^+$ de $\rho^-$ en les restreignant à certains sous-groupes $M$ de $W$. Introduisons de même des sous-groupes $M'$ de $W'$ de $M''$ de $W''$ associés aux partitions $\boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{\alpha}'$ et $\boldsymbol{\alpha}'' + \boldsymbol{\alpha}''$. Alors $M = M' \times M''$ est l'un des sous-groupes de $W$ évoqués ci-dessus. On a

$$\langle \mathrm{res}_M^{W' \times W''}(\rho' \otimes \rho''), \mathbf{1}_M \rangle_M = 1.$$

Si

$$\langle \mathrm{res}_U^W(\rho^\varepsilon), \rho' \otimes \rho'' \rangle_U = 1,$$

*a fortiori*

$$\langle \mathrm{res}_M^W(\rho^\varepsilon), \mathbf{1}_M \rangle_M > 0$$

donc $\varepsilon = +$. Cela achève la démonstration de (3). □

**VIII.5.** Soit $n$ un entier $\geqslant 1$, posons $W = W(C_n)$. Soient $n', n'' \in \mathbb{N}$ tels que $n' + n'' = n$ et $N', N''$ deux sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ tels que

- $|N'| = n'$, $|N''| = n''$ ;
- $\{1, \ldots, n\}$ est union disjointe de $N'$ et $N''$.

Notons $U$ le sous-groupe des éléments $w \in W$ qui conservent chacun des ensembles $N' \cup (-N')$ et $N'' \cup (-N'')$ et tels que $|\{j \in N''; w(j) < 0\}|$ soit pair. Le groupe $U$ est isomorphe à $W(C_{n'}) \times W(D_{n''})$. Notons plus simplement $W' \times W''$ ce produit. Soient $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{P}_2(n)$, $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}') \in \mathcal{P}_2(n')$ et $\rho'' \in \mathcal{R}(W'')$. Posons $\rho = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, $\rho' = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$. Alors :

(1) si $\langle \mathrm{res}_U^W(\rho), \rho' \otimes \rho'' \rangle_U \neq 0$, il existe $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'') \in \mathcal{P}_2(n'')$ pamétrisant $\rho''$ tel que

$$S(\boldsymbol{\alpha}') + S(\boldsymbol{\alpha}'') = S(\boldsymbol{\alpha}), \;\; S(\boldsymbol{\beta}') + S(\boldsymbol{\beta}'') = S(\boldsymbol{\beta}), \;\; \boldsymbol{\alpha} \geqslant \boldsymbol{\alpha}' \cup \boldsymbol{\alpha}'' \text{ et } \boldsymbol{\beta} \geqslant \boldsymbol{\beta}' \cup \boldsymbol{\beta}''.$$

Inversement, soit $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'')$ paramétrisant $\rho''$, supposons $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}' \cup \boldsymbol{\alpha}''$ et $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}' \cup \boldsymbol{\beta}''$. Alors :

(2) $$\langle \mathrm{res}_U^W(\rho), \rho' \otimes \rho'' \rangle_U = 1.$$

La démonstration est similaire à celle des relations (2) et (3) du paragraphe précédent.

(3) ***Remarque***. — Dans la suite, pour unifier les notations, il sera utile de poser par convention $W(A_{-1}) = W(C_0) = W(D_0) = \{1\}$. En particulier, si $W = W(D_0)$, on a $W^{\#} = W = \{1\}$.

**VIII.6.** Dans le reste du chapitre VIII, le corps de base est $\mathbb{F}_q$. On considère un couple $(V, q_V)$ comme en II.1. On fixe un nombre premier $\ell \neq p$ et on identifie fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ et fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

***Remarque***. — Certains résultats de ce paragraphe et du paragraphe suivant sont purement algébriques ou combinatoires et sont valables pour un corps de base quelconque. On les utilisera ultérieurement pour le corps de base $F$.

On dit qu'un élément $\boldsymbol{\lambda}$ de $\mathcal{P}(V)$ (défini comme en I.6) est exceptionnel si
- $(V, q_V)$ est orthogonal et $d$ est divisible par 4 ;
- tous les termes de $\boldsymbol{\lambda}$ sont pairs.

On note $\overline{\mathrm{Nil}}(V)$ l'ensemble dont les éléments sont :
- les éléments non exceptionnels de $\mathcal{P}(V)$ ;
- les couples $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon)$ où $\boldsymbol{\lambda}$ est un élément exceptionnel de $\mathcal{P}(V)$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

Soit $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(V)$. Si $(V, q_V)$ est unitaire, on pose $a(\boldsymbol{\lambda}) = \varnothing$ et $A(\boldsymbol{\lambda}) = \{1\}$. Si $(V, q_V)$ est symplectique, on note $a(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble des entiers $i$ pairs $\geqslant 2$ tels que $c_i(\boldsymbol{\lambda}) \neq 0$ et $A(\boldsymbol{\lambda}) = \{\pm 1\}^{a(\boldsymbol{\lambda})}$. Si $(V, q_V)$ est orthogonal, on note $a(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble des entiers $i$ impairs $\geqslant 1$ tels que $c_i(\boldsymbol{\lambda}) \neq 0$ et

$$A(\boldsymbol{\lambda}) = \Big\{(a_i)_{i \in a(\boldsymbol{\lambda})} \in \{\pm 1\}^{a(\boldsymbol{\lambda})} ; \prod_i a_i = 1\Big\}.$$

Notons $\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}(\overline{\mathbb{F}}_q)/\boldsymbol{G}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ l'ensemble des orbites nilpotentes dans $\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}(\overline{\mathbb{F}}_q)$. Comme en I.6, on a une bijection naturelle

$$\overline{\Lambda} : \boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}(\overline{\mathbb{F}}_q)/\boldsymbol{G}(\overline{\mathbb{F}}_q) \longrightarrow \overline{\mathrm{Nil}}(V).$$

Soit $\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}(\overline{\mathbb{F}}_q)/\boldsymbol{G}(\overline{\mathbb{F}}_q)$. Posons $\overline{\Lambda}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{\lambda}$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon)$. Si $X \in \boldsymbol{C}$, le groupe des composantes $\boldsymbol{Z_G}(X)/\boldsymbol{Z_G}(X)^0$ s'identifie naturellement à $A(\boldsymbol{\lambda})$. L'ensemble des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux irréductibles sur $\boldsymbol{C}$ est en bijection avec le groupe $A(\boldsymbol{\lambda})^\wedge$ des caractères abéliens de $A(\boldsymbol{\lambda})$.

On note $\mathcal{I}$, ou plus précisément $\mathcal{I}(V)$, l'ensemble des couples $(\boldsymbol{C}, \mathcal{F})$ où $\boldsymbol{C}$ est un élément de $\boldsymbol{g}_{\mathrm{nil}}(\overline{\mathbb{F}}_q)/\boldsymbol{G}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ et $\mathcal{F}$ un système local irréductible sur $\boldsymbol{C}$. Il est en bijection avec l'ensemble des termes $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\varepsilon})$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon})$, où $\boldsymbol{\lambda}$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon)$ est un élément de $\overline{\mathrm{Nil}}(V)$ et $\boldsymbol{\varepsilon} \in A(\boldsymbol{\lambda})^\wedge$. Selon les situations, on considérera que $\mathcal{I}$ est soit l'ensemble de couples $(\boldsymbol{C}, \mathcal{F})$, soit l'ensemble de termes $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\varepsilon})$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon})$.

On a défini en II.2 l'ensemble $\mathcal{I}_0(V)$, ou simplement $\mathcal{I}_0$, et, pour $k \in \mathcal{I}_0$, on a défini en II.3 le groupe de Lévi $\boldsymbol{M}(k)$ et le groupe $W(k)$. On note $\mathcal{R}(k)$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de $W(k)$. La correspondance de Springer généralisée définit une partition de $\mathcal{I}$ en sous-ensembles :

$$\mathcal{I} = \bigcup_{k \in \mathcal{I}_0} \mathcal{I}(k)$$

et, pour tout $k \in \mathcal{I}_0$, une bijection

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(k) &\longrightarrow \mathcal{R}(k) \\ \iota &\longmapsto p_\iota . \end{aligned}$$

On en rappelle ci-dessous la description combinatoire.

**VIII.7.** Contrairement à Lusztig, nous écrirons les ensembles d'entiers qui vont intervenir dans l'ordre décroissant. Nous ne sommes pas certains que ce soit le bon choix, mais cela s'adapte mieux aux notations déjà introduites concernant les partitions. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, avec $a \geqslant b$, on note $[a, b]$ l'ensemble $\{a, a-1, \dots, b\}$. Si $a - b$ est pair, on note $[a, b]_2$ l'ensemble $\{a, a-2, \dots, b+2, b\}$. Si $\boldsymbol{\lambda}$ est une partition et $r$ un entier $\geqslant c(\boldsymbol{\lambda})$, on identifiera le cas échéant $\boldsymbol{\lambda}$ à la suite finie $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. Par exemple, si $a, b \in \mathbb{Z}$ vérifient $a \geqslant b$, $a - b + 1 \geqslant c(\boldsymbol{\lambda})$, la suite $\boldsymbol{\lambda} + [a, b]$ est la suite finie

$$(\lambda_1 + a, \dots, \lambda_{a-b+1} + b) .$$

Supposons $(V, q_V)$ unitaire. Alors $\mathcal{I}_0 = \{0\}$, $\mathcal{I} = \overline{\mathrm{Nil}}(V) = \mathcal{P}(d)$, $W(0) \simeq W(A_{d-1})$ (*cf.* II.3). On a $\mathcal{I} = \mathcal{I}(0)$ et pour $\iota = \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{I} = \mathcal{P}(d)$, $\rho_\iota = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\lambda})$ (*cf.* VIII.2).

Supposons $(V, q_V)$ symplectique. Considérons l'ensemble des paires $(A, B)$ où $A$, resp. $B$, est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, resp. $\mathbb{N} - \{0\}$, tels que :
- ni $A$, ni $B$ ne contiennent d'entiers consécutifs ;
- $|A| + |B|$ est impair ;
- $2(S(A) + S(B)) = d + (|A| + |B|)(|A| + |B| - 1)$.

Rappelons que pour tout ensemble fini $X$ de nombres, on note $S(X)$ la somme des éléments de $X$. On introduit dans cet ensemble de paires la relation d'équivalence engendrée par

$$(A, B) \sim (\{a + 2; a \in A\} \cup \{0\}, \{b + 2; b \in B\} \cup \{1\}) .$$

On note $\Psi_d$ l'ensemble des classes d'équivalence.

Soit $k \in \mathcal{I}_0$. On définit une application

$$\psi_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}_2([d - k(k+1)]/2) \longrightarrow \Psi_d$$

de la façon suivante. Soit $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{P}_2([d - k(k+1)]/2)$, choisissons un entier $r$ tel que $r \geqslant c(\boldsymbol{\alpha})$, $r \geqslant c(\boldsymbol{\beta})$. Alors $\psi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ est la classe du couple $(A, B)$ ainsi défini :
- si $k$ est pair, $A = \boldsymbol{\alpha} + [2r + 2k, 0]_2$, $B = \boldsymbol{\beta} + [2r - 1, 1]_2$ ;
- si $k$ est impair, $A = \boldsymbol{\beta} + [2r, 0]_2$, $B = \boldsymbol{\alpha} + [2r + 2k + 1, 1]_2$.

(*cf.* [Lu4] 12.2, corrigé par [Sh1] 5.7.3).

On déduit des applications précédentes une application

$$\psi_{\mathcal{P}} : \bigcup_{k \in \mathcal{I}_0} \mathcal{P}_2([d - k(k+1)]/2) \longrightarrow \Psi_d$$

qui est bijective. D'autre part, pour tout $k \in \mathcal{I}_0$, le groupe $W(k)$ est isomorphe à $W(C_{[d-k(k+1)]/2})$ et $\mathcal{R}(k)$ est en bijection avec $\mathcal{P}_2([d-k(k+1)]/2)$, *cf.* VIII.3. On en déduit par composition une bijection

$$\psi_W : \bigcup_{k \in \mathcal{I}_0} \mathcal{R}(k) \longrightarrow \Psi_d.$$

On définit une application

$$\psi_{\mathrm{nil}} : \mathcal{I} \longrightarrow \Psi_d$$

de la façon suivante. Soit $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\varepsilon}) \in \mathcal{I}$. Dans l'ensemble d'entiers $\boldsymbol{\lambda} + [d-1, 0]$, il y a $d/2$ nombres pairs que l'on note $2z_1 > \cdots > 2z_{d/2}$ et $d/2$ nombres impairs que l'on note $2z'_1 + 1 > \cdots > 2z'_{d/2} + 1$. Cela définit des suites d'entiers $\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{z}'$. Posons :

$$A^\# = (\boldsymbol{z}' + [d/2+1, 2]) \cup \{0\}, \quad B^\# = \boldsymbol{z} + [d/2, 1].$$

On a $(A^\#, B^\#) \in \Psi_d$.

Appelons intervalle de $(A^\#, B^\#)$ un sous-ensemble de $(A^\# \cup B^\#) - (A^\# \cap B^\#)$ formé d'entiers consécutifs, maximal pour cette propriété, et ne contenant pas 0. L'ensemble des intervalles a même nombre d'éléments que $a(\boldsymbol{\lambda})$. Notons $i \mapsto \Delta_i$ la bijection de $a(\boldsymbol{\lambda})$ sur cet ensemble d'intervalles telle que, si $i < i'$, les éléments de $\Delta_i$ soient inférieurs à ceux de $\Delta_{i'}$. Remarquons que $A(\boldsymbol{\lambda})^\wedge \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a(\boldsymbol{\lambda})}$, on peut considérer $\boldsymbol{\varepsilon}$ comme un élément de ce dernier ensemble. On pose

$$A = \Big(A^\# - \bigcup_{i \in a(\boldsymbol{\lambda}); \varepsilon_i = 1} (\Delta_i \cap A^\#)\Big) \cup \Big(\bigcup_{i \in a(\boldsymbol{\lambda}); \varepsilon_i = 1} (\Delta_i \cap B^\#)\Big),$$
$$B = \Big(B^\# - \bigcup_{i \in a(\boldsymbol{\lambda}); \varepsilon_i = 1} (\Delta_i \cap B^\#)\Big) \cup \Big(\bigcup_{i \in a(\boldsymbol{\lambda}); \varepsilon_i = 1} (\Delta_i \cap A^\#)\Big).$$

Alors $\psi_{\mathrm{nil}}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\varepsilon})$ est la classe du couple $(A, B)$. L'application $\psi_{\mathrm{nil}}$ ainsi définie est bijective.

Alors, pour $k \in \mathcal{I}_0$, on a $\mathcal{I}(k) = \psi_{\mathrm{nil}}^{-1} \circ \psi_W(\mathcal{R}(k))$ et, pour $\iota \in \mathcal{I}(k)$, $\rho_\iota = \psi_W^{-1} \circ \psi_{\mathrm{nil}}(\iota)$.

Supposons $(V, q_V)$ orthogonal. Considérons l'ensemble des paires $(A, B)$ de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ tels que :

- ni $A$, ni $B$ ne contiennent d'entiers consécutifs ;
- $2(S(A) + S(B)) = d + (|A| + |B| - 1)^2 - 1$.

On introduit dans cet ensemble de paires la relation d'équivalence engendrée par :

$$(A, B) \sim (B, A), \quad (A, B) \sim (\{a+2; a \in A\} \cup \{0\}, \{b+2; b \in B\} \cup \{0\}).$$

On note $\Psi'_d$ l'ensemble des classes d'équivalence.

Soit $k \in \mathcal{I}_0$. On définit une application :

$$\psi'_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}_2((d-k^2)/2) \longrightarrow \Psi'_d$$

de la façon suivante. Soit $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{P}_2((d-k^2)/2)$, choisissons un entier $r$ tel que $r \geqslant c(\boldsymbol{\alpha})$, $r \geqslant c(\boldsymbol{\beta})$. Alors $\psi'_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ est la classe du couple $(A, B)$ tel que $A = \boldsymbol{\alpha} + [2r + 2k - 2, 0]_2, B = \boldsymbol{\beta} + [2r - 2, 0]_2$.

Remarquons que $0 \in \mathcal{I}_0$ si et seulement si $d$ est pair.

On déduit des applications précédentes une application :

$$\psi'_{\mathcal{P}} : \bigcup_{k \in \mathcal{I}_0} \mathcal{P}_2((d-k^2)/2) \longrightarrow \Psi'_d.$$

Elle est surjective. Pour $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$ dans l'espace de départ, on a $\psi'_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \psi'_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$ si et seulement si $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$ ou si les conditions suivantes sont vérifiées : $d$ est pair, $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), (\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$ appartiennent à $\mathcal{P}_2(d/2)$ et $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\alpha}')$.

Pour $k \in \mathcal{I}_0$, le groupe $W(k)$ est isomorphe à $W(C_{(d-k^2)/2})$ si $k \neq 0$, à $W(D_{d/2})$ si $k = 0$. Soit $\rho \in W(k)$, choisissons $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{P}_2((d-k^2)/2)$ qui paramétrise $\rho$, *cf.* VIII.3, VIII.4. L'élément $\psi'_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ de $\Psi'_d$ ne dépend pas de ce choix. Notons-le $\psi'_W(\rho)$. On a ainsi défini une application

$$\psi'_W : \bigcup_{k \in \mathcal{I}_0} \mathcal{R}(k) \longrightarrow \Psi'_d.$$

Elle est surjective. Pour $\rho, \rho'$ dans l'espace de départ, on a $\psi'_W(\rho) = \psi'_W(\rho')$ si et seulement si $\rho = \rho'$ ou si les conditions suivantes sont vérifiées : $d$ est divisible par 4, $\rho, \rho' \in \mathcal{R}(0)$ et il existe $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(d/4)$ et un signe $\varepsilon$ tel que $\rho = \boldsymbol{\rho}^{\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$, $\rho' = \boldsymbol{\rho}^{-\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$. On définit une application

$$\psi'_{\text{nil}} : \mathcal{I} \longrightarrow \Psi'_d$$

de la façon suivante. Soit $\iota \in \mathcal{I}$, écrivons $\iota = (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\varepsilon})$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon})$. Dans l'ensemble d'entiers $\boldsymbol{\lambda} + [d-1, 0]$, il y a $[d/2]$ nombres pairs que l'on note $2z_1 > \cdots > 2z_{[d/2]}$ et $[(d+1)/2]$ nombres impairs que l'on note $2z'_1 + 1 \geqslant \cdots \geqslant 2z'_{[(d+1)/2]} + 1$. Cela définit des suites d'entiers $\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{z}'$. Posons

$$A^{\#} = \boldsymbol{z}' + [[(d-1)/2], 0], \;\; B^{\#} = \boldsymbol{z} + [[d/2] - 1, 0].$$

On a $(A^{\#}, B^{\#}) \in \Psi'_d$. Appelons intervalle de $(A^{\#}, B^{\#})$ un sous-ensemble de $(A^{\#} \cup B^{\#}) - (A^{\#} \cap B^{\#})$ formé d'entiers consécutifs, maximal pour cette propriété et non vide. L'ensemble des intervalles a autant d'éléments que $a(\boldsymbol{\lambda})$ et on fixe une bijection $i \mapsto \Delta_i$ comme dans le cas symplectique. Remarquons qu'il y a une surjection naturelle

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a(\boldsymbol{\lambda})} \longrightarrow A(\boldsymbol{\lambda})^{\wedge}.$$

On fixe un relèvement de $\boldsymbol{\varepsilon}$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a(\boldsymbol{\lambda})}$. On définit alors $(A, B)$ et $\psi'_{\text{nil}}(\iota)$ comme dans le cas symplectique.

L'application $\psi'_{\text{nil}}$ ainsi définie est surjective. Pour $\iota, \iota' \in \mathcal{I}$, on a $\psi'_{\text{nil}}(\iota) = \psi'_{\text{nil}}(\iota')$ si et seulement si $\iota = \iota'$ ou si les conditions suivantes sont vérifiées : $d$ est divisible par 4 et il existe un élément exceptionnel $\boldsymbol{\lambda}$ de $\mathcal{P}(V)$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tels que $\iota = (\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon, 1)$, $\iota' = (\boldsymbol{\lambda}, -\varepsilon, 1)$.

On vérifie que pour tout élément de $\Psi'_d$, les fibres de $\psi'_W$ et de $\psi'_{\text{nil}}$ au-dessus de cet élément ont même nombre d'éléments. Alors, pour $k \in \mathcal{I}_0$, on a $\mathcal{I}(k) = \psi'^{-1}_{\text{nil}} \psi'_W(\mathcal{R}(k))$. Soit $\iota \in \mathcal{I}(k)$. Si la fibre de $\psi'_W$ au-dessus de $\psi'_{\text{nil}}(\iota)$ n'a qu'un élément, $\rho_\iota$ est cet élément. Supposons que cette fibre ait deux éléments. Alors $d$ est divisible par 4 et il existe $\boldsymbol{\lambda}$ et $\varepsilon$ comme ci-dessus tels que $\iota = (\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon, 1)$. Il existe aussi $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(d/4)$ tel que la fibre de $\psi'_W$ au-dessus de $\psi'_{\mathrm{nil}}(\iota)$ soit $\{\rho^+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}), \rho^-(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})\}$. On montre d'ailleurs que $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}$. En identifiant $\varepsilon$ à un signe, on a $\rho_\iota = \rho^\varepsilon(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$ (*cf.* [C] p. 423).

**VIII.8.** Dans ce paragraphe et jusqu'en VIII.12 inclus, on fixe $k \in \mathcal{I}_0$. On a introduit le tore $\mathbf{T}(k)$ en II.3. On pose simplement $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(k)$, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(k)$. Soit

$$V = V_0 \oplus V_1$$

la décomposition orthogonale associée à $\boldsymbol{T}$, *cf.* II.2. On a

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{G}(V_0) \times \boldsymbol{T}.$$

Si $(V, q_V)$ est symplectique ou orthogonal, $V_0$ est du type étudié en II.4 ou II.5. On définit comme dans ces paragraphes un élément ${}^oX \in g_{\mathrm{nil}}(V_0)$. On note ${}^o\boldsymbol{C}$ sa classe de conjugaison par $\boldsymbol{G}(V_0)$. On définit comme en II.4 ou II.5 le système local ${}^o\mathcal{E}$ sur ${}^o\boldsymbol{C}$. Il est muni d'une action de Frobenius. Si $(V, q_V)$ est unitaire, $V_0 = \{0\}$. On pose ${}^oX = 0$, ${}^o\boldsymbol{C} = \{0\}$, on note ${}^o\mathcal{E}$ le système local trivial sur ${}^o\boldsymbol{C}$, muni de son Frobenius évident.

Posons

$$d(k) = \dim({}^o\boldsymbol{C}) + \dim(\boldsymbol{t})$$

et, avec les notations de II.8 :

$$K_k = \mathrm{ind}_M^G(p_1^{\boldsymbol{g}(V_0) \times \boldsymbol{t}, *}({}^o\mathcal{E})[d(k)]).$$

Ce faisceau pervers est muni d'une action de Frobenius et d'une action du groupe $W(k)$, *cf.* [Lu4], théorème 9.2. Nous allons expliciter cette action.

Si $(V, q_V)$ est symplectique ou unitaire, ou si $(V, q_V)$ est orthogonal et $k = 0$, on identifie tout élément de $W(k)$ à un relèvement dans $N_{G(V_1)}(T)$. Si $(V, q_V)$ est orthogonal et $k \neq 0$, une telle construction est impossible. Fixons alors une décomposition orthogonale

$$V_0 = V_0' \oplus V_0'' \tag{1}$$

stable par ${}^oX$, de sorte que $\dim_{\mathbb{F}_q}(V_0') = 2k - 1$ et que la restriction de ${}^oX$ à $V_0'$ soit régulière. Soit $\delta$ l'élément de $\widetilde{G}(V_0)$ qui agit par $-1$ sur $V_0'$ et par 1 sur $V_0''$. On identifie tout élément de $W(k)$ à un relèvement dans $\{1, \delta\} N_{O(V_1)}(T)$.

Notons $\boldsymbol{t}_r$ le sous-ensemble des $X \in \boldsymbol{t}$ tels que $\boldsymbol{Z_G}(X) = \boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ l'ensemble des éléments de $\boldsymbol{g}$ conjugués à un élément de ${}^o\boldsymbol{C} + \boldsymbol{t}_r$ par un élément de $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{Z}_0 = \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{G}(V_0)}({}^oX)$, $\boldsymbol{Z}_0^0$ sa composante neutre, $\overline{\boldsymbol{Z}}_0 = \boldsymbol{Z}/\boldsymbol{Z}_0^0$, ${}^o\varepsilon$ le caractère de $\overline{\boldsymbol{Z}}_0$ correspondant à ${}^o\mathcal{E}$. Considérons le revêtement

$$\begin{array}{l} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} = \left\{(Y, x) ; Y \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}, x \in \boldsymbol{G}/\boldsymbol{Z}_0^0\boldsymbol{T}, x^{-1}Yx \in {}^oX + \boldsymbol{t}_r\right\} \\ \downarrow p_1^{\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}} \\ \boldsymbol{\mathcal{Y}} \end{array}$$

Le groupe $\overline{\boldsymbol{Z}}_0$ agit naturellement sur $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}$. D'après les définitions de II.8, la restriction de $K_k$ à $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ est égale, à un décalage près, au système local quotient de $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{Y}}} \times \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ par $\overline{\boldsymbol{Z}}_0$, celui-ci agissant par ${}^o\!\boldsymbol{\varepsilon}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Le groupe $W(k)$ agit sur $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}$ par

$$(w,(Y,x)) \longmapsto (Y, xw^{-1})$$

avec des notations évidentes. On en déduit par passage au quotient une action de $W(k)$ sur la restriction de $K_k$ à $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$. Elle s'étend à $K_k$ d'après les propriétés du prolongement d'intersection. Notons $w \mapsto \tau_w$ cette action.

Notons $\boldsymbol{C}$ la classe de conjugaison par $\boldsymbol{G}$ induite par ${}^o\boldsymbol{C}$. D'après [Lu4], théorème 9.2, il existe un homomorphisme $s : W(k) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ tel que, pour tout $w \in W(k)$, $s(w)\tau_w$ agisse trivialement sur la fibre de $K_k$ au-dessus d'un point de $C$. On pose alors $\theta_w = s(w)\tau_w$. C'est l'action définie par Lusztig dans [Lu4].

**VIII.9.** Rappelons que si $(V, q_V)$ est symplectique, $W(k) \simeq W(C_{[d-k(k+1)]/2})$.

***Lemme***. — *Si $(V,q_V)$ est orthogonal ou unitaire, $s = 1$. Si $(V,q_V)$ est symplectique, $s = \mathrm{sgn}_{CD}^k$.*

*Démonstration.* — Il suffit de calculer $s$ sur des générateurs de $W(k)$. D'après [Lu6], 2.5 (c), on peut remplacer $\boldsymbol{G}$ par un élément de Lévi $(\boldsymbol{G})$ contenant strictement $\boldsymbol{M}$ et minimal pour cette propriété. Dans le reste de la preuve, $\boldsymbol{G}$, désigne un tel groupe de Lévi.

Fixons un sous-groupe parabolique $\boldsymbol{P}$ de $\boldsymbol{G}$, de sous-groupe de Lévi $\boldsymbol{M}$. On introduit comme en II.8 le faisceau pervers

$$\mathrm{ind}_P^G(p_1^{\boldsymbol{g}(V_0)\times \boldsymbol{t},*}({}^o\mathcal{E}))[d(k)] \tag{1}$$

qui est isomorphe à $K_k$. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{l}
\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}} = \left\{(Y,x); Y \in \boldsymbol{g}, x \in \boldsymbol{G}/\boldsymbol{Z}_0^0\boldsymbol{T}\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{P}}, x^{-1}Yx \in {}^oX + \boldsymbol{t} + \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{P}}\right\} \\
\downarrow \\
\boldsymbol{\mathcal{V}} = \left\{(Y,x); Y \in \boldsymbol{g}, x \in \boldsymbol{G}/\boldsymbol{Z}_0\boldsymbol{T}\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{P}}, x^{-1}Yx \in {}^oX + \boldsymbol{t} + \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{P}}\right\} \\
\downarrow p_1^{\boldsymbol{\mathcal{V}}} \\
\boldsymbol{g}
\end{array}$$

où les flèches sont les applications évidentes. La variété $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}$ est un revêtement de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ de groupe $\overline{\boldsymbol{Z}}_0$ dont on déduit comme précédemment un système local $\mathcal{F}$ sur $\boldsymbol{\mathcal{V}}$. D'après les définitions rappelées en II.7, le faisceau (1), donc aussi $K_k$, est isomorphe à $p_{1!}^{\boldsymbol{\mathcal{V}}}(\mathcal{F})$, à un décalage près. Fixons un élément $X \in ({}^oX + \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{P}}) \cap \boldsymbol{C}$ et une droite $\boldsymbol{d} \subset \boldsymbol{t}$, non centrale dans $\boldsymbol{G}$. Pour $Z \in \boldsymbol{d}$, la fibre de $p_1^{\boldsymbol{\mathcal{V}}}$ au-dessus de $X + Z$ a un élément si $Z = 0$, deux éléments si $Z \neq 0$.

La restriction $K_{k|X+\boldsymbol{d}}$ est la somme de deux faisceaux constants dont on identifie les fibres au-dessus de $X$. Soit $w$ l'unique élément non trivial de $W(k)$. L'action de $\tau_w$

sur la fibre $K_{k|X}$ est limite de son action sur $K_{k|X+Z}$ pour $Z \in \boldsymbol{d} - \{0\}$. Soit $Z \in \boldsymbol{d}$, $Z \neq 0$. Le point

$$((X+Z,1),1) \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}} \times \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

définit naturellement un point de $K_{k|X+Z}$. Son image par $\tau_w$ est de la forme

$$((X+Z,x_Z),1).$$

Quand $Z$ tend vers 0, $x_Z$ tend vers un élément de $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{Z}_0^0\boldsymbol{T}\boldsymbol{U_P}$ nécessairement de la forme $z\boldsymbol{Z}_0^0\boldsymbol{T}\boldsymbol{U_P}$ avec $z \in \boldsymbol{Z}_0$. Alors $\tau_w$ agit par ${}^o\boldsymbol{\varepsilon}(z)$ sur la fibre $K_{k|X}$.

Si $(V,q_V)$ est unitaire ou si $\dim_{\mathbb{F}_q}(V_0) \leqslant 1$, on a ${}^o\boldsymbol{\varepsilon} = 1$ et $\tau_w$ agit trivialement sur $K_{k|X}$. Donc $s(w) = 1$.

Supposons $(V,q_V)$ symplectique ou orthogonal et $\dim_{\mathbb{F}_q}(V_0) \geqslant 2$. Il reste à calculer $z$. Pour $Z \in \boldsymbol{d} - \{0\}$, l'application

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}|_{X+Z} &\longrightarrow \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}|_{X+Z} \\ (X+Z,x) &\longmapsto (X+Z,x\boldsymbol{U_P}) \end{aligned}$$

est bijective. Soit $n_Z \in \boldsymbol{U_P}$ tel que $(X+Z, n_Z\boldsymbol{Z}_0^0\boldsymbol{T}) \in \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{Y}}}$. Son image par l'action de $w$ est $(X+Z, n_Z w^{-1}\boldsymbol{Z}_0^0\boldsymbol{T})$. Donc $x_Z = n_Z w^{-1}\boldsymbol{Z}_0^0\boldsymbol{T}\boldsymbol{U_P}$. Rappelons que le groupe $\boldsymbol{G}$ est un Lévi de notre groupe initial. Il y a deux cas possibles :

- $\boldsymbol{G} \simeq \boldsymbol{G}(V_0) \times \boldsymbol{GL}(2) \times \boldsymbol{T}'$, où $\boldsymbol{T}'$ est un tore ;
- $\boldsymbol{G}$ est le produit d'un tore par un groupe analogue à notre groupe de départ.

Dans le premier cas, on a $\boldsymbol{U_P} \subset \boldsymbol{GL}(2)$, *a fortiori* $n_Z \in \boldsymbol{GL}(2)$. D'après nos choix de relèvements, $w \in \boldsymbol{GL}(2) \times \boldsymbol{T}'$. Quand $Z$ tend vers 0, $x_Z$ tend vers un élément de

$$\left[(\boldsymbol{GL}(2) \times \boldsymbol{T}')\boldsymbol{Z}_0^0\boldsymbol{T}\boldsymbol{U_P}\right] \cap \boldsymbol{Z}_0\boldsymbol{T}\boldsymbol{U_P} = \boldsymbol{Z}_0^0\boldsymbol{T}\boldsymbol{U_P}.$$

Donc $z = 1$ et $\tau_w$ agit trivialement sur $\mathrm{K}_{k|X}$.

Dans le second cas, il est clair que le tore ne compte pas. On est ramené à notre situation initiale, *i.e.* $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(V)$, avec maintenant $\dim_{\mathbb{F}_q}(V_1) = 2$ puisque $\boldsymbol{P}$ est un sous-groupe parabolique propre maximal. Traitons ce cas.

Supposons $(V,q_V)$ symplectique. Introduisons une décomposition de $V_0$ analogue à VIII.8 (1), avec cette fois $\dim_{\mathbb{F}_q}(V_0') = 2k$. Notons ${}^oX'$ et ${}^oX''$ les restrictions de ${}^oX$ à $V_0'$, resp. $V_0''$. On peut supposer $X$ de la forme $X = X' + {}^oX''$, avec $X' \in g(V_0' \oplus V_1)$. Alors $n_Z \in \boldsymbol{G}(V_0' \oplus V_1)$. Puisque l'on a $w \in \boldsymbol{G}(V_1) \subset \boldsymbol{G}(V_0' \oplus V_1)$, tout se passe dans $\boldsymbol{G}(V_0' \oplus V_1)$. On peut ignorer l'espace $V_0''$ et c'est ce que l'on fait dans les calculs qui suivent. Fixons une base $(e_i)_{i=1,\ldots,2k+2}$ de $V_0' \oplus V_1$ telle que :

- $q_V(e_i,e_j) = 0$, si $i+j \neq 2k+3$ ;
- $q_V(e_i,e_{2k+3-i}) = 1$, si $i \in \{1,\ldots,k+1\}$ ;
- $(e_i)_{i=2,\ldots,2k+1}$ est une base de $V_0'$ ;
- $\boldsymbol{T}$ stabilise les droites $\overline{\mathbb{F}}_q e_1$ et $\overline{\mathbb{F}}_q e_{2k+2}$.

Ecrivons matriciellement :

$$
{}^{o}X = \begin{bmatrix}
0 & 0 & & & & & & & & \\
 & 0 & -1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & -1 & & & & & \\
 & & & & & (-1)^{k+1} & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & 0 & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & 0
\end{bmatrix},
$$

$$
X = \begin{bmatrix}
0 & -1 & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & \\
 & & & -1 & & & & \\
 & & & & (-1)^{k+1} & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & 0 & & & & & \\
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & 0
\end{bmatrix},
$$

$$
Z = \begin{bmatrix}
-\zeta & & & & & & \\
 & 0 & & & & 0 & \\
 & & \ddots & & & & \\
 & 0 & & \ddots & & & \\
 & & & & \ddots & & \\
 & & & & & 0 & \\
 & & & & & & \zeta
\end{bmatrix}, \quad \text{avec } \zeta \in \overline{\mathbb{F}}_q - \{0\},
$$

$$w = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & 1 & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$n_Z = \begin{bmatrix} 1 & n_2 & \cdots & \cdots & n_{2k+1} & N \\ & 1 & & & & n'_{2k+1} \\ & & \ddots & & 0 & \vdots \\ & 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & n'_2 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Plus exactement, on peut supposer que $w$ est défini par la matrice précédente. Le terme $n_Z$ est déterminé par la relation :

$$n_Z^{-1}(X+Z)n_Z \in {}^o\!X + \boldsymbol{t}.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} n_j &= -n'_j = -\zeta^{1-j}, \quad && \text{pour } j = 2, \ldots, k+1, \\ n_j &= n'_j = (-\zeta)^{1-j}, \quad && \text{pour } j = k+2, \ldots, 2k+1, \\ N &= -\frac{1}{2}\zeta^{-1-2k}. \end{aligned}$$

Notons $\boldsymbol{B}^+$, resp. $\boldsymbol{B}^-$, le sous-groupe triangulaire supérieur, resp. inférieur, de $\boldsymbol{G}$. Remarquons que $\boldsymbol{Z}_0^0\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{P}} \subset \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{B}^+}$, $\boldsymbol{Z}_0 \subset \boldsymbol{B}^+$, $\overline{\boldsymbol{Z}}_0 \simeq \{\pm 1\}$. Il doit exister $n_Z^- \in \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{B}^-}$ tel que :

(2) • $n_Z^- n_Z w^{-1} \in \boldsymbol{B}^+$ ;
- $\lim_{Z \to 0} n_Z^- = 1$ ;
- en notant $a_{j,Z}$ les coefficients diagonaux de $n_Z^- n_Z w^{-1}$, $\lim_{Z\to 0} a_{j,Z} = z$ pour tout $j = 2, \ldots, 2k+1$.

On calcule grâce aux formules ci-dessus le carré $2\times 2$ supérieur gauche de $n_Z w^{-1}$ :

$$n_Z w^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\zeta^{-1-2k} & -\zeta^{-1} & \\ & & * \\ \zeta^{-2k} & 1 & \\ & * & * \end{bmatrix}$$

L'équation (2) impose :

$$n_Z^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ & & 0 \\ 2\zeta & 1 & \\ & * & * \end{bmatrix}$$

dont on déduit $a_{2,Z} = -1$, puis $z = -1$. Par définition de ${}^o\varepsilon$, *cf.* II.4, on a ${}^o\varepsilon(z) = (-1)^k$. On en déduit le résultat de l'énoncé.

Un calcul analogue vaut dans le cas orthogonal. Signalons simplement que dans ce cas, d'après nos choix de relèvements, on peut supposer :

$$w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ & -1 & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

□

**VIII.10.** Soit $w \in W(k)$. On a défini en II.3 un sous-tore $\boldsymbol{T}^w$ de $\boldsymbol{G}$. Fixons une décomposition

$$V = V_0^w \oplus V_1^w$$

associée à ce tore, *cf.* II.2. Si $(V, q_V)$ est symplectique ou orthogonal, l'espace $V_0^w$ est du type étudié en II.4 ou II.5. On note ${}^o\mathcal{E}^w$ le système local sur une sous-variété de $\boldsymbol{g}(V_0^w)$ défini dans ces paragraphes. Il est muni d'une action de Frobenius que l'on notera $\phi^w$.

Dans [Lu2], § 9.3, Lusztig définit un groupe $\boldsymbol{M}^w$, un système local que nous noterons ${}^o\mathcal{E}_L^w$ sur une sous-variété de $\boldsymbol{m}^w$ et une action de Frobenius sur ce système local que nous noterons $\phi_L^w$. Il résulte des constructions que l'on peut supposer :

$$\boldsymbol{M}^w = \boldsymbol{Z_G}(\boldsymbol{T}^w), \quad {}^o\mathcal{E}_L^w = {}^o\mathcal{E}^w.$$

***Lemme***. — *Pour tout $w \in W(k)$, on a l'égalité*

$$\phi_L^w = s(w)\phi^w.$$

*Démonstration.* — Rappelons les définitions de Lusztig. Comme en II.3, fixons $x \in \boldsymbol{G}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ tel que $\phi_G(x)^{-1}x \in N_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})$ et l'image de cet élément dans $W(k)$ soit $w$. On a

$${}^o\mathcal{E}_L^w = \mathrm{ad}(x^{-1})^*({}^o\mathcal{E}).$$

Notons

$${}^o\theta_w : {}^o\mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{ad}(w)^*({}^o\mathcal{E})$$

l'unique isomorphisme dont se déduit par fonctorialité l'isomorphisme $\theta_w$ défini en VIII.7 et

$$\phi_{{}^o\mathcal{E}} : \phi_G^*({}^o\mathcal{E}) \longrightarrow {}^o\mathcal{E}$$

le Frobenius fixé en II.4 ou II.5. En appliquant $\phi_G^*\,\mathrm{ad}(x^{-1})^*$, resp. $\mathrm{ad}(x^{-1})^*$, on déduit par fonctorialité de ${}^o\theta_w$, resp. $\phi_{{}^o\mathcal{E}}$, un isomorphisme

$$\phi_G^*({}^o\mathcal{E}_L^w) \longrightarrow \mathrm{ad}(x^{-1})^*\,\phi_G^*({}^o\mathcal{E}), \text{ resp. } \mathrm{ad}(x^{-1})^*\,\phi_G^*({}^o\mathcal{E}) \longrightarrow {}^o\mathcal{E}_L^w.$$

D'où par composition le Frobenius

$$\phi_L^w : \phi_G^*({}^o\mathcal{E}_L^w) \longrightarrow {}^o\mathcal{E}_L^w.$$

Représentons ${}^o\mathcal{E}$ par le revêtement

$$\begin{gathered}\Big\{(Y,y)\,;\, Y\in \boldsymbol{g}(V_0),\, y\in \boldsymbol{G}(V_0)/\boldsymbol{Z}_0^0,\, y^{-1}Y\,y = {}^oX\Big\}\\ \downarrow\\ \boldsymbol{g}(V_0)\end{gathered}$$

poussé par le caractère ${}^o\boldsymbol{\varepsilon}$ de $\overline{\boldsymbol{Z}}_0$. Le Frobenius $\phi_{{}^o\mathcal{E}}$ est $(Y,y)\mapsto(Y,\phi_G^{-1}(y))$. On définit l'isomorphisme

$${}^o\tau_w : {}^o\mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{ad}(w)^*({}^o\mathcal{E})$$

par ${}^o\tau_w(Y,y) = (Y, wyw^{-1})$. D'après VIII.7, on a ${}^o\theta_w = s(w){}^o\tau_w$. On peut poursuivre le calcul en remplaçant ${}^o\theta_w$ par ${}^o\tau_w$, il suffira ensuite de multiplier le résultat par $s(w)$. Posons ${}^oX^w = x{}^oX\,x^{-1}$, notons $\boldsymbol{Z}_0^w$, $\boldsymbol{Z}_0^{w,0}$ et $\overline{\boldsymbol{Z}}_0^w$ les groupes analogues à $\boldsymbol{Z}_0$ etc., relatifs à ${}^oX^w$. En explicitant les constructions ci-dessus, on voit que ${}^o\mathcal{E}_L^w$ est le revêtement

$$\begin{gathered}\Big\{(Y,y)\,;\, Y\in \boldsymbol{g}(V_0^w),\, y\in \boldsymbol{G}(V_0^w)/\boldsymbol{Z}_0^{w,0},\, y^{-1}Y\,y = {}^oX^w\Big\}\\ \downarrow\\ \boldsymbol{g}(V_0^w)\end{gathered}$$

poussé par le caractère ${}^o\boldsymbol{\varepsilon}\circ\mathrm{ad}(x^{-1})$ de $\overline{\boldsymbol{Z}}_0^w$. Et $\phi_L^w$ est l'application $(Y,y)\mapsto(Y,\phi_G^{-1}(y))$. Ce Frobenius est évidemment trivial si $d(V_0)\leqslant 1$. Supposons $d(V_0)\geqslant 2$, donc $(V,q_V)$ symplectique ou orthogonal. Notons ${}^of^w$ la fonction définie en II.4 ou II.5 relative à l'espace $V_0^w$. On a l'égalité

$$\phi_L^w = {}^of^w({}^oX^w)\,\phi^w.$$

Il reste à calculer ${}^oX^w$.

Si $(V,q_V)$ est symplectique, on peut supposer $x\in \boldsymbol{G}(V_1;\overline{\mathbb{F}}_q)$. Alors $V_0^w = V_0$, ${}^oX^w = {}^oX$ et ${}^of^w({}^oX^w) = 1$.

Si $(V,q_V)$ est orthogonal, avec les notations de VIII.8, on peut choisir $x\in \boldsymbol{G}(V_0'\oplus V_1;\overline{\mathbb{F}}_q)$. Alors les restrictions de ${}^oX$ et ${}^oX^w$ à $V_0''$ sont égales. Posons

$$\Lambda({}^oX) = ({}^o\boldsymbol{\lambda},({}^oq_i)),\ \ \Lambda({}^oX^w) = ({}^o\boldsymbol{\lambda},({}^oq_i^w)).$$

Pour $i \neq 2k-1$, les formes quadratiques ${}^o q_i$ et ${}^o q_i^w$ ne dépendent que des restrictions de ${}^o X$ et ${}^o X^w$ à $V_0''$. Elles sont donc égales. Le terme ${}^o q_{2k-1}^w$ est imposé par la relation

$$\prod_{\substack{i=1\\ i \text{ impair}}}^{2k-1} \eta({}^o q_i^w) = (-1)^{[k/2]} \eta(q_{V_0^w}).$$

Donc ${}^o X^w$ appartient à l'orbite du point fixé en II.5 relatif à l'espace $V_0^w$ et ${}^o f^w({}^o X^w) = 1$. Cette égalité est donc vraie en tout cas.

On obtient l'égalité de l'énoncé en se rappelant que l'on doit multiplier le résultat ci-dessus par $s(w)$. □

**VIII.11.** Le Frobenius agit sur $W(k)$ donc sur $\mathcal{R}(k)$. On note $\mathcal{R}(k)^\phi$ l'ensemble des points fixes. Pour $\rho \in \mathcal{R}(k)$, on note $\mathcal{V}(\rho)$ un espace dans lequel se réalise $\rho$. Si $\rho \in \mathcal{R}(k)^\phi$, on définit ci-dessous un opérateur noté $\rho(w_\phi) \in GL(\mathcal{V}(\rho))$, tel que

$$\rho(w_\phi)\rho(w)\rho(w_\phi)^{-1} = \rho(\phi(w))$$

pour tout $w \in W(k)$. Pour $w \in W(k)$, on posera par exemple $\rho(w_\phi w) = \rho(w_\phi)\rho(w)$.

Si $(V, q_V)$ est unitaire, on a $k = 0$ et $W(0) = W(A_{d-1})$. On a $\mathcal{R}(0)^\phi = \mathcal{R}(0)$. On a défini en II.3 un élément $w_\phi$ de $W(A_{d-1})$. Pour $\rho \in \mathcal{R}(0)$, $\rho(w_\phi)$ a une signification évidente.

Si $(V, q_V)$ est symplectique ou si $(V, q_V)$ est orthogonal et $k \neq 0$ ou si $(V, q_V)$ est orthogonal déployé, le Frobenius agit trivialement sur $W(k)$. On a $\mathcal{R}(k)^\phi = \mathcal{R}(k)$ et on pose $\rho(w_\phi) = 1$ pour tout $\rho \in \mathcal{R}(k)$.

Supposons $(V, q_V)$ orthogonal pair non déployé et $k = 0$. Alors $W(0) = W(D_{d/2})$. On a défini en II.3 un élément $w_\phi$ de $W(C_{d/2})$. Soient $\rho \in \mathcal{R}(0)$ et $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{P}_2(d/2)$ un couple paramétrisant $\rho$. On a $\rho \in \mathcal{R}(0)^\phi$ si et seulement si $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$. Dans ce cas on a défini en VIII.4 un prolongement $\rho^\#$ de $\rho$ à $W(C_{d/2})$. On pose $\rho(w_\phi) = \rho^\#(w_\phi)$.

Le Frobenius agit sur $\mathcal{I}(k)$, on note $\mathcal{I}(k)^\phi$ l'ensemble des points fixes. L'application $\iota \mapsto \rho_\iota$ de VIII.6 est équivariante pour les actions de Frobenius. Pour $\iota = (\boldsymbol{C}, \mathcal{F}) \in \mathcal{I}(k)$, $\iota$ est fixe par cette action si et seulement si $C$ l'est. Pour tout $\iota = (\boldsymbol{C}, \mathcal{F}) \in \mathcal{I}(k)^\phi$, on va définir un entier $b(\iota)$, un élément $X_\iota \in C$, un élément $\varepsilon(\iota) \in \{\pm 1\}$ et une action de Frobenius $\phi_\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}$.

On pose

$$b(\iota) = (\dim({}^o\boldsymbol{C}) + \dim(\boldsymbol{g}) - \dim(\boldsymbol{C}) - \dim(\boldsymbol{m}))/2.$$

Si $(V, q_V)$ est unitaire, $C$ est une unique classe de conjugaison par $G$. On choisit un élément quelconque $X_\iota$ de cette classe et l'on pose

$$\varepsilon(\iota) = (-1)^{b(\iota)}.$$

Supposons $(V, q_V)$ symplectique ou orthogonal. Posons $\iota = (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\varepsilon})$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon})$ *cf.* VIII.6. On a défini l'ensemble $a(\boldsymbol{\lambda})$ en VIII.6. Notons $a(\boldsymbol{\lambda})_{\text{pair}}$, resp. $a(\boldsymbol{\lambda})_{\text{imp}}$, le sous-ensemble des $i \in a(\boldsymbol{\lambda})$ tels que $c_i(\boldsymbol{\lambda})$ soit pair, resp. impair. Ecrivons

$$a(\boldsymbol{\lambda})_{\text{imp}} = \{i_1 > i_2 > \cdots > i_m\}.$$

Pour tout $i \in a(\boldsymbol{\lambda})$, notons $Q_i$ la classe de forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{F}_q$, de rang $c_i(\boldsymbol{\lambda})$, telle que :

- si $i \in a(\boldsymbol{\lambda})_{\text{pair}}$, $Q_i$ est déployée, *i.e.* $\eta(Q_i) = 1$ ;
- pour $n \in \{1, \dots, m\}$ et $i = i_n \in a(\boldsymbol{\lambda})_{\text{imp}}$,

$$\eta(Q_i) = \begin{cases} (-1)^{k+n}, \text{ si } (V, q_V) \text{ est symplectique}, \\ (-1)^{n+1}\eta(q_V), \text{ si } (V, q_V) \text{ est orthogonal impair}, \\ (-1)^{n+1}, \text{ si } (V, q_V) \text{ est orthogonal pair}. \end{cases}$$

Si $(V, q_V)$ est symplectique ou orthogonal déployé, on fixe $X_\iota \in g_{\text{nil}}$ tel que $\Lambda(X_\iota) = (\boldsymbol{\lambda}, (Q_i))$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, (Q_i), \varepsilon)$. On pose

$$\varepsilon(\iota) = \begin{cases} 1, \text{ si } (V, q_V) \text{ est symplectique}, \\ \operatorname{sgn}(-\eta(q_V))^{(k-1)/2}, \text{ si } (V, q_V) \text{ est orthogonal impair}, \\ \operatorname{sgn}(-1)^{k/2}, \text{ si } (V, q_V) \text{ est orthogonal pair déployé}. \end{cases}$$

Si $(V, q_V)$ est orthogonal non déployé, *i.e.* $d$ est pair et $\operatorname{sgn} \circ \eta(q_V) = -1$, on modifie les choix ci-dessus. Notons plutôt $Q'_i$ les formes quadratiques définies ci-dessus et $a_{\max}$ le plus grand élément de $a(\boldsymbol{\lambda})$. Remarquons que $a(\boldsymbol{\lambda}) \neq \varnothing$ puisque $\iota \in \mathcal{I}(k)^\phi$. On a $\eta(Q'_{a_{\max}}) = 1$. On définit des formes $Q_i$ par

$$Q_i = Q'_i, \text{ si } i \in a(\boldsymbol{\lambda}) - \{a_{\max}\},$$
$$\eta(Q_{a_{\max}}) = \eta(q_V).$$

On fixe $X_\iota \in g_{\text{nil}}$ tel que $\Lambda(X_\iota) = (\boldsymbol{\lambda}, (Q_i))$. On a une surjection

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a(\boldsymbol{\lambda})} \longrightarrow A(\boldsymbol{\lambda})^\wedge \longrightarrow \{1\}.$$

Choisissons un relèvement de $\boldsymbol{\varepsilon}$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a(\boldsymbol{\lambda})}$, que l'on note encore $\boldsymbol{\varepsilon}$. Posons :

$$N = \big|\{n \in \{1, \dots, m\};\ n \text{ est pair et } \varepsilon_{i_n} = 1\}\big| \\ - \big|\{n \in \{1, \dots, m\};\ n \text{ est impair et } \varepsilon_{i_n} = 1\}\big|.$$

On montrera en XI.4 que $|N| = k/2$. Quitte à changer de relèvement, on peut supposer $N = k/2$. Si $k \neq 0$, le relèvement est alors bien déterminé. On pose

$$\varepsilon(\iota) = \begin{cases} 1, \text{ si } k = 0, \\ (-1)^{\varepsilon_{a_{\max}}} \operatorname{sgn}(-1)^{k/2}, \text{ si } k > 0. \end{cases}$$

Dans tous les cas, on munit $\mathcal{F}$ de l'action de Frobenius telle que :

$$\operatorname{trace}(\phi_{\mathcal{F}} | \mathcal{F}_{X_\iota}) = \varepsilon(\iota).$$

Pour tout $\iota = (\boldsymbol{C}, \mathcal{F}) \in \mathcal{I}(k)$, on pose $K_\iota = \mathcal{F}^\#$, *cf.* II.8. C'est l'unique faisceau pervers irréductible sur $\boldsymbol{g}$, à support dans la clôture de $\boldsymbol{C}$, dont la restriction à $\boldsymbol{C}$ soit $F[\dim(\boldsymbol{C})]$. Si de plus $\iota \in \mathcal{I}(k)^\phi$, on munit $K_\iota$ de l'action de Frobenius, notée $\phi_\iota$, déduite de $\phi_{\mathcal{F}}$. On définit une fonction $\chi_\iota$ sur $g$ par

$$\chi_\iota(Y) = \operatorname{trace}(\phi_\iota | K_{\iota|Y}) \quad \text{pour tout } Y \in g.$$

***VIII.12. Proposition***

(i) *Il existe un isomorphisme de complexes*

$$K_k[-\dim(\boldsymbol{t})]|_{\mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}} \simeq \bigoplus_{\iota\in\mathcal{I}(k)} (\mathcal{V}(\rho_\iota)\otimes K_\iota)$$

*vérifiant les propriétés suivantes :*

- *il entrelace l'action de $W(k)$ déduite de $\theta$ sur le membre de gauche avec l'action :*

$$\bigoplus_{\iota\in\mathcal{I}(k)} (\rho_\iota\otimes 1);$$

- *il entrelace l'action de Frobenius naturelle sur le membre de gauche avec une action telle que les composantes du membre de droite sont permutées par cette action ; les composantes fixes sont celles indexées par $\mathcal{I}(k)^\phi$ ; pour $\iota\in\mathcal{I}(k)^\phi$, l'action sur la composante indexée par $\iota$ est*

$$q^{b(\iota)}\,\rho_\iota(w_\phi)\otimes\phi_\iota\,.$$

(ii) *Pour tous $\iota\in\mathcal{I}(k)^\phi$ et $Y\in\mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}$, on a l'égalité*

$$\chi_\iota(Y) = q^{-b(\iota)}|W(k)|^{-1}\sum_{w\in W(k)} \mathrm{trace}\circ\rho_\iota(w_\phi w)\,s(w)\,Q_w(Y)$$

*cf. II.6 pour la définition de $Q_w$.*

*Démonstration.* — Dans le cas déployé, cela résulte de [Lu5], § 4 et § 6 et égalité 6.15 (a), et du calcul des fonctions que Lusztig note $R^G_{L_w}(\chi_w)$. Ce calcul a été effectué au lemme VIII.10. Dans le cas non déployé, la preuve est la même, compte tenu de [Lu2], § 9, égalité 9.6 (e′). Le seul point qui ne résulte pas de ces arguments est la détermination de l'action de Frobenius sur les complexes $K_\iota$. Pour $(V,q_V)$ unitaire, le calcul est fait dans [HS], lemme 3.2. Pour $(V,q_V)$ symplectique ou orthogonal, il l'est dans [Sh2], proposition 3.3 et lemme 3.11 et [Sh1], lemme 3.6. On doit signaler d'une part que notre action de Frobenius sur ${}^o\mathcal{E}$ n'est pas normalisée comme dans les articles de Shoji dans le cas orthogonal, ce qui induit une multiplication du résultat de Shoji par $\mathrm{sgn}(-\eta(q_V))^{(k-1)/2}$ dans le cas orthogonal impair, par $sgn(-1)^{k/2}$ dans le cas orthogonal pair. D'autre part, le résultat de [Sh1] nous paraît incorrect dans le cas orthogonal non déployé, $k>0$. Expliquons brièvement ce qui nous semble être le calcul correct dans ce cas. Soit $({}^o\boldsymbol{\lambda},{}^o\varepsilon)$ le couple associé à $({}^o\boldsymbol{C},{}^o\mathcal{E})$. On choisit un relèvement de ${}^o\varepsilon$ à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a({}^o\boldsymbol{\lambda})}$, que l'on note encore ${}^o\varepsilon$, en appliquant la définition du paragraphe précédent au cas $V=V_0$. Introduisons les groupes orthogonaux. On a une injection

$$A({}^o\boldsymbol{\lambda})\simeq \boldsymbol{Z}_0/\boldsymbol{Z}_0^0 \hookrightarrow \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{O}(V_0)}({}^oX)/\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{O}(V_0)}({}^oX)^0 \simeq \{\pm1\}^{a({}^o\boldsymbol{\lambda})}.$$

Alors ${}^o\mathcal{E}$ se déduit du revêtement

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{O}(V_0)/\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{O}(V_0)}({}^oX)^0 & \quad & x \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^o\boldsymbol{C} & & x\,{}^oX\,x^{-1} \end{array}$$

en le « poussant » par le caractère ${}^o\boldsymbol{\varepsilon}$. On peut de même remplacer dans toutes les constructions les groupes spéciaux orthogonaux par des groupes orthogonaux. Soit $\iota = (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\varepsilon}) \in \mathcal{I}(k)^\phi$. La fibre $K_\iota|_{X_\iota}$ se retrouve munie d'une action du groupe

$$\boldsymbol{Z_O}(X_\iota)/\boldsymbol{Z_O}(X_\iota)^0$$

qui s'identifie à un élément de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a(\boldsymbol{\lambda})}$ dont la restriction à $A(\boldsymbol{\lambda})$ est égale à $\boldsymbol{\varepsilon}$. Les mêmes méthodes de récurrence que celles de [Sh2], § 3 permettent de montrer :

• cet élément de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a(\boldsymbol{\lambda})}$ est le relèvement de $\boldsymbol{\varepsilon}$ défini en VIII.11 ; notons-le encore $\boldsymbol{\varepsilon}$ ;

• l'action de Frobenius sur $K_\iota|_{X_\iota}$ est la multiplication par $(-1)^{\varepsilon_{a_{\max}}}c$, où $c$ ne dépend que de $k$.

On détermine $c$ en considérant le cas $V = V_0$, $\iota = ({}^o\boldsymbol{C}, {}^o\mathcal{E})$. Par définition, on trouve alors $c = \operatorname{sgn}(-1)^{k/2}$. Cela achève l'esquisse de démonstration. □

**VIII.13.** Soit $\iota \in \mathcal{I}(k)^\phi$. Conformément à nos identifications de VIII.6, écrivons simultanément

$$\iota = (\boldsymbol{C}, \mathcal{F}), \quad \iota = (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ ou } (\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon}).$$

Si $(V, q_V)$ est unitaire, on note $\mathcal{Y}_\iota$ la fonction caractéristique de $C$ dans $g$.

Si $(V, q_V)$ est symplectique, on définit deux fonctions $\mathcal{Y}'_\iota$ et $\mathcal{Y}_\iota$ sur $g$ à support dans $C$ de la façon suivante. Soit $Y \in C$, écrivons $\Lambda(Y) = (\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$. On pose

$$\mathcal{Y}'_\iota(Y) = \prod_{i \in a(\boldsymbol{\lambda})} (\operatorname{sgn} \circ \eta(q_i))^{\varepsilon_i}.$$

Cela définit $\mathcal{Y}'_\iota$. On pose

(1) $$\mathcal{Y}_\iota = \mathcal{Y}'_\iota(X_\iota)\mathcal{Y}'_\iota.$$

Si $(V, q_V)$ est orthogonal, on fixe un relèvement de $\boldsymbol{\varepsilon}$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a(\boldsymbol{\lambda})}$ que l'on note encore $\boldsymbol{\varepsilon}$. On définit alors $\mathcal{Y}'_\iota$ et $\mathcal{Y}_\iota$ comme dans le cas symplectique. La fonction $\mathcal{Y}'_\iota$ dépend du choix du relèvement mais pas $\mathcal{Y}_\iota$.

On définit une fonction $\chi_\iota^\natural$ sur $g$ par

$$\chi_\iota^\natural(Y) = \operatorname{trace}(\phi_\iota^{-1}|K_{\iota|Y})$$

pour tout $Y \in g$. Il résulte des définitions que

(2) $$\chi_\iota^\natural(Y) = \begin{cases} 0, & \text{si } Y \notin \overline{C}, \\ \varepsilon(\iota)\mathcal{Y}_\iota(Y), & \text{si } Y \in C. \end{cases}$$

Pour tout $\boldsymbol{T}' \in \mathcal{T}_k$ (*cf.* II.2), il existe une unique fonction $Q^\natural_{T'}$ sur $g$, qui ne dépend que de la classe de conjugaison de $\boldsymbol{T}'$ par $G$, de sorte que, en posant simplement $Q^\natural_w = Q^\natural_{T^w}$ pour tout $w \in W(k)$, on ait l'égalité suivante pour tout $Y \in g$ et tout $\iota \in \mathcal{I}(k)^\phi$ :

(3) $$\chi_\iota^\natural(Y) = q^{b(\iota)}|W(k)|^{-1} \sum_{w \in W(k)} \operatorname{trace} \circ \rho_\iota(w_\phi w) s(w) Q^\natural_w(Y).$$

Pour $\boldsymbol{T}' \in \mathcal{T}_k$ et $\theta' = \Lambda_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{T}') \in \Theta(V)$, *cf.* II.2, on pose $Q^{\natural}_{\theta'} = Q^{\natural}_{T'}$.

**VIII.14.** Soit $(X,H,Y)$ un $s\ell_2$-triplet dans $g$, éventuellement $X = H = Y = 0$. On définit une graduation de $\boldsymbol{g}$ comme en V.7 et une fonction $\Gamma_Y$ sur $g$ par l'égalité :

$$\Gamma_Y(Z) = q^{-\dim(\boldsymbol{g}(\geqslant 2))-\dim(\boldsymbol{g}(-1))/2} \sum_{x\in G;\, xZx^{-1}\in g(\geqslant 2)} \psi \circ q_g(Y, xZx^{-1})$$

pour tout $Z \in g$. C'est le caractère de la représentation de Gelfand-Graev associée au $s\ell_2$-triplet, *cf.* [Lu5], § 2.3.

Rappelons que l'on note $\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}(Y)$ la classe de conjugaison de $Y$ par $\boldsymbol{G}$.

***Proposition.*** — *Pour tout $Z \in g_{\mathrm{nil}}$, on a l'égalité*

$$\widehat{\Gamma}_Y(Z) = q^{[\dim(\boldsymbol{g})-\dim(\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}(Y))]/2} \sum_{k\in\mathcal{I}_0} |W(k)|^{-1} \sum_{w\in W(k)} q^{-\dim(\boldsymbol{t}^w)} |T^w| Q^{\natural}_w(-Y) Q_w(Z).$$

*Démonstration.* — Si $\boldsymbol{G}$ est déployé, Lusztig démontre la formule :

$$\widehat{\Gamma}_Y(Z) = q^{[\dim(\boldsymbol{g})-\dim(\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}(Y))]/2} \sum_{k\in\mathcal{I}_0} |W(k)|^{-1} \cdot$$

$$\sum_{\iota,\iota'\in\mathcal{I}(k)^{\phi}} \sum_{w\in W(k)} q^{b(\iota')-b(\iota)-\dim(\boldsymbol{t}^w)} \operatorname{trace}\circ\rho_\iota(w_\phi w) \operatorname{trace}\circ\rho_{\iota'}(w_\phi w) |T^w| \chi^{\natural}_\iota(-Y) \chi_{\iota'}(Z)$$

pour tout $Z \in g_{\mathrm{nil}}$. Cela résulte de [Lu5], proposition 6.12 et égalité 6.6 (b). Ainsi que le remarque Lusztig, cette égalité se généralise au cas non déployé.

Les relations d'orthogonalité des caractères de représentations de groupes finis permettent d'inverser l'égalité de la proposition VIII.12 (ii) et l'égalité VIII.13 (3) sous la forme :

$$s(w) Q_w = \sum_{\iota\in\mathcal{I}(k)^{\phi}} q^{b(\iota)} \operatorname{trace}\circ\rho_\iota(w_\phi w) \chi_\iota,$$

$$s(w) Q^{\natural}_w = \sum_{\iota\in\mathcal{I}(k)^{\phi}} q^{-b(\iota)} \operatorname{trace}\circ\rho_\iota(w_\phi w) \chi^{\natural}_\iota,$$

pour tout $k \in \mathcal{I}_0$ et tout $w \in W(k)$. L'égalité de l'énoncé résulte des trois égalités ci-dessus. □

Signalons que dans le cas unitaire, la formule de l'énoncé a d'abord été démontrée par Kawanaka ([Kaw2], théorème 3.2.11 (ii) et lemme 3.2.9).

**VIII.15.** Soient $n, D \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$. On appelle symbole de rang $n$ et de défaut $D$ un couple $(X,Y)$ de sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ tels que

$$|X| - |Y| = D$$

$$S(X) + S(Y) - \left[\left(\frac{|X|+|Y|-1}{2}\right)^2\right] = n$$

($[\ \cdot\ ]$ est la partie entière).

Si $D \geqslant 1$, on définit une relation d'équivalence entre symboles, engendrée par $(X, Y) \sim (X', Y')$ où

$$X' = \{x + 1 ; x \in X\} \cup \{0\}, \quad Y' = \{y + 1 ; y \in Y\} \cup \{0\}.$$

Si $D = 0$, on définit une relation d'équivalence entre symboles, engendrée par la relation précédente et par la relation $(X, Y) \sim (Y, X)$.

On note $\mathcal{S}_{n,D}$ l'ensemble des classes d'équivalence. Pour simplifier, on appellera encore symbole une classe d'équivalence.

Si $D \geqslant 1$, l'application

$$(X, Y) \longmapsto (X', Y)$$

où

$$X' = \{x + D - 1 ; x \in X\} \cup \{D - 2, \dots, 0\}$$

définit une bijection

$$\mathcal{S}_{n,1} \longrightarrow \mathcal{S}_{n',D}, \text{ où } n' = n + \left[\left(\frac{D}{2}\right)^2\right] \tag{1}$$

(*cf.* [Lu7], proposition 3.2).

On pose

$$\mathcal{S}_n = \bigcup_{D \text{ impair}} \mathcal{S}_{n,D}, \quad \mathcal{S}_n^+ = \bigcup_{D \equiv 0 \bmod 4} \mathcal{S}_{n,D}.$$

On dit que deux éléments de $\mathcal{S}_n$, resp. $\mathcal{S}_n^+$, sont dans la même famille s'il peuvent être représentés par des symboles $(X, Y), (X', Y')$ tels que

$$X \cup Y = X' \cup Y', \quad X \cap Y = X' \cap Y'.$$

On dit qu'un élément de $\mathcal{S}_{n,1}$ est spécial s'il est représenté par un symbole $(X, Y)$ tel qu'en posant

$$X = \{x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_{r+1}\}, \quad Y = \{y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_r\},$$

on ait

$$x_j \geqslant y_j \geqslant x_{j+1} \text{ pour tout } j = 1, \dots, r.$$

On dit qu'un élément de $\mathcal{S}_{n,0}$ est spécial s'il est représenté par un symbole $(X, Y)$ tel qu'en posant

$$X = \{x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_r\}, \quad Y = \{y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_r\}$$

on ait

$$x_j \geqslant y_j \geqslant x_{j+1} \text{ pour tout } j = 1, \dots, r$$

ou

$$y_j \geqslant x_j \geqslant y_{j+1} \text{ pour tout } j = 1, \dots, r$$

(avec la convention $x_{r+1} = 0$, resp. $y_{r+1} = 0$).

Toute famille contient un unique symbole spécial.

Un élément de $\mathcal{S}_{n,0}$ est dit exceptionnel s'il est représenté par un symbole $(X, X)$. Cela implique que $n$ est pair. Un symbole exceptionnel est spécial et sa famille se réduit à lui-même.

On définit une application

$$\sigma_{C_n} : \mathcal{R}(W(C_n)) \longrightarrow \mathcal{S}_{n,1}$$

de la façon suivante. Soient $\rho \in \mathcal{R}(W(C_n))$ et $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ un couple de partitions paramétrisant $\rho$. Choisissons un entier $r$ tel que $r \geqslant c(\boldsymbol{\alpha})$, $r \geqslant c(\boldsymbol{\beta})$. Posons

$$X = \boldsymbol{\alpha} + [r, 0], \quad Y = \boldsymbol{\beta} + [r-1, 0].$$

Alors $\sigma_{C_n}(\rho)$ est la classe du symbole $(X, Y)$. L'application $\sigma_{C_n}$ est bijective.

On définit une application

$$\sigma_{D_n} : \mathcal{R}(W(D_n)) \longrightarrow \mathcal{S}_{n,0}$$

de la façon suivante. Soient $\rho \in \mathcal{R}(W(D_n))$ et $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ un couple de partitions paramétrisant $\rho$. Choisissons $r$ comme ci-dessus. Posons

$$X = \boldsymbol{\alpha} + [r-1, 0], \quad Y = \boldsymbol{\beta} + [r-1, 0].$$

Alors $\sigma_{D_n}(\rho)$ est la classe du symbole $(X, Y)$. L'application $\sigma_{D_n}$ est surjective. Pour $\rho, \rho' \in \mathcal{R}(W(D_n))$, on a $\sigma_{D_n}(\rho) = \sigma_{D_n}(\rho')$ si et seulement si $\rho = \rho'$ ou si $n$ est pair et il existe $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(n/2)$ et un signe $\varepsilon$ tels que $\rho = \boldsymbol{\rho}^{\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$, $\rho' = \boldsymbol{\rho}^{-\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$. Les images par $\sigma_{D_n}$ de ces dernières représentations sont exactement les éléments exceptionnels de $\mathcal{S}_{n,0}$.

**VIII.16.** Supposons $(V, q_V)$ symplectique. Notons $\sigma$ l'application composée

$$\sigma : \mathcal{R}(0) \simeq \mathcal{R}(W(C_{d/2})) \xrightarrow{\sigma_{C_{d/2}}} \mathcal{S}_{d/2,1}.$$

Pour $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(V)$, on dit que $\boldsymbol{\lambda}$ est spéciale si $\lambda_{2j-1} \equiv \lambda_{2j} \bmod 2\mathbb{Z}$ pour tout $j \geqslant 1$, *cf.* [Ke], proposition 6.5.

Soient $(X, Y)$ un symbole spécial de $\mathcal{S}_{d/2,1}$ et $\iota$ l'élément de $\mathcal{I}(0)$ tel que $\sigma(\rho_\iota) = (X, Y)$. On montre que $\iota$ est de la forme $(\boldsymbol{\lambda}(X, Y), 1)$, où $\boldsymbol{\lambda}(X, Y)$ est une partition spéciale dans $\mathcal{P}(V)$. L'application $(X, Y) \mapsto \boldsymbol{\lambda}(X, Y)$ est une bijection entre symboles spéciaux dans $\mathcal{S}_{d/2,1}$ et partitions spéciales dans $\mathcal{P}(V)$.

Soit $\boldsymbol{\lambda}$ une partition spéciale dans $\mathcal{P}(V)$. Posons comme en VIII.11 :

$$a(\boldsymbol{\lambda})_{\text{imp}} = \{i_1 > \cdots > i_m\}.$$

On appelle intervalle un sous-ensemble de $a(\boldsymbol{\lambda})$ de l'une des formes suivantes

- $\{i\}$, où $i \in a(\boldsymbol{\lambda})$ est tel qu'il existe $\ell \in \{0, \ldots, [\frac{m}{2}]\}$ de sorte que $i_{2\ell} > i > i_{2\ell+1}$, avec la convention $i_{m+1} = 0$, $i_0 = \infty$ ;
- $\{i \in a(\boldsymbol{\lambda}) ; i_{2\ell-1} \geqslant i \geqslant i_{2\ell}\}$, pour $\ell \in \{1, \ldots, [\frac{m}{2}]\}$.

Notons $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble de ces intervalles. Pour $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, on pose

$$c_\Delta(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i \in \Delta} c_i(\boldsymbol{\lambda}).$$

Posons :

$$\widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}) = a(\boldsymbol{\lambda}) \cup \{0\};$$

$$\Delta_{\min} = \begin{cases} \{0\}, & \text{si } m \text{ est pair,} \\ \{i \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}); i_m \geqslant i\}, & \text{si } m \text{ est impair;} \end{cases}$$

$$\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}) \cup \{\Delta_{\min}\}.$$

Alors $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ est une partition de $\widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda})$ en sous-ensembles $\Delta$ vérifiant les propriétés suivantes :

- si $\Delta \neq \Delta_{\min}$, $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda})$ est pair ;
- $\Delta$ est formé d'éléments consécutifs de $\widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda})$.

On montre que $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ est la plus fine partition de $\widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda})$ vérifiant ces propriétés.

Pour $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, on note $j_{\min}(\Delta)$, resp. $j_{\max}(\Delta)$, le plus petit, resp. grand, entier $j \geqslant 1$ tel que $\lambda_j \in \Delta$. On définit de même $j_{\min}(\Delta_{\min})$. Remarquons que $j_{\min}(\Delta)$ est impair, resp. $j_{\max}(\Delta)$ est pair, pour tout $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$, resp. $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$.

Soit $(X, Y)$ l'unique représentant du symbole spécial associé à $\boldsymbol{\lambda}$ de la forme

$$X = \{x_1 > \cdots > x_{d/2+1}\}, \quad Y = \{y_1 > \cdots > y_{d/2}\}.$$

Posons

$$J(X) = \big\{j \in \{1, \ldots, d/2+1\}; x_j \notin Y\big\}, \quad J(Y) = \big\{j \in \{1, \ldots, d/2\}; y_j \notin X\big\}.$$

***Lemme***. — *Sous ces hypothèses, on a les égalités*

$$J(X) = \big\{(j_{\min}(\Delta)+1)/2; \Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})\big\},$$
$$J(Y) = \big\{j_{\max}(\Delta)/2; \Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\big\}.$$

*Démonstration*. — Posons $\iota = (\boldsymbol{\lambda}, 1)$. Par définition, on a :

$$(X, Y) = \sigma(\rho_\iota) = \sigma \circ \psi_W^{-1} \circ \psi_{\mathrm{nil}}(\iota),$$

*cf.* VIII.7. Définissons deux suites d'entiers $\boldsymbol{\lambda}^a$ et $\boldsymbol{\lambda}^b$ par

$$\lambda_j^a = \left[\frac{\lambda_{2j-1}}{2}\right], \quad \lambda_j^b = \left[\frac{\lambda_{2j+1}}{2}\right]$$

pour tout $j \geqslant 1$. En explicitant les définitions, on calcule un représentant $(A, B)$ de $\psi_{\mathrm{nil}}(\iota)$ :

$$A = \boldsymbol{\lambda}^a + [d, 0]_2, \quad B = \boldsymbol{\lambda}^b + [d-1, 1]_2.$$

Pour faire ce calcul, on utilise la propriété suivante : $\boldsymbol{\lambda}$ étant un élément spécial de $\mathcal{P}(V)$, on a $\lambda_{2j-1} = \lambda_{2j}$ pour tout $j \geqslant 1$ tel que $\lambda_{2j-1}$ et $\lambda_{2j}$ sont impairs.

On calcule aussi :

$$X = A - [d/2, 0], \quad Y = B - [d/2, 1],$$

avec une notation évidente. D'où les égalités :

$$X = \boldsymbol{\lambda}^a + [d/2, 0], \quad Y = \boldsymbol{\lambda}^b + [d/2-1, 0].$$

Plus explicitement, on a $x_{d/2+1} = 0$ et, pour $j \in \{1, \ldots, d/2\}$ :

- si $\lambda_{2j-1}$ et $\lambda_{2j}$ sont pairs,
$$x_j = \frac{\lambda_{2j-1}}{2} + \frac{d}{2} + 1 - j > y_j = \frac{\lambda_{2j}}{2} + \frac{d}{2} - j;$$
- si $\lambda_{2j-1}$ et $\lambda_{2j}$ sont impairs,
$$x_j = \frac{\lambda_{2j-1}+1}{2} + \frac{d}{2} - j = y_j = \frac{\lambda_{2j}+1}{2} + \frac{d}{2} - j.$$

L'ensemble $J(Y)$ est l'ensemble des $j \in \{1, \ldots, d/2\}$ tels que $x_j > y_j > x_{j+1}$. La première inégalité est équivalente à : $\lambda_{2j}$ est pair. La seconde à $\lambda_{2j} > \lambda_{2j+1}$. D'où
$$J(Y) = \bigl\{ j \in \{1, \ldots, d/2\} \,;\, \lambda_{2j} \text{ est pair et } \lambda_{2j} > \lambda_{2j+1} \bigr\}.$$
Soient $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ et $j = j_{\max}(\Delta)/2$. On a $\lambda_{2j} \in a(\boldsymbol{\lambda})$ donc $\lambda_{2j}$ est pair. Par définition de $j_{\max}(\Delta)$, $\lambda_{2j} > \lambda_{2j+1}$. Donc $j \in J(Y)$. Inversement, soit $j \in J(Y)$, posons $i = \lambda_{2j}$. Alors $i$ est pair et $i > 0$, donc $i \in a(\boldsymbol{\lambda})$. L'entier $c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})$ (*cf.* I.5) est le nombre de $\ell \geqslant 1$ tels que $\lambda_\ell \geqslant i$, *i.e.* tels que $\ell \leqslant 2j$. Donc $c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}) = 2j$ est pair. Il en résulte que $i$ est le plus petit élément d'un intervalle $\Delta$. Alors $2j = j_{\max}(\Delta)$. Cela démontre la deuxième égalité de l'énoncé.

La première égalité de l'énoncé se démontre de façon analogue. On montre d'abord que
$$J(X) = \bigl\{ j \in \{1, \ldots, d/2+1\} \,;\, \lambda_{2j-1} \text{ est pair et } \lambda_{2j-2} > \lambda_{2j-1} \bigr\},$$
puis que l'ensemble ci-dessus est égal à celui décrit dans l'énoncé. □

**VIII.17.** Soient $(V, q_V)$, $\boldsymbol{\lambda}$ et $(X, Y)$ comme ci-dessus. Notons $\mathcal{F}am(X, Y)$ la famille du symbole $(X, Y)$ dans $\mathcal{S}_{d/2}$. Posons :
$$\mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}.$$
On identifiera $\mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$ avec l'ensemble des couples
$$(\tau, \delta) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}$$
tels que $\tau(\Delta_{\min}) = 0$.

On ordonne $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ : pour $\Delta, \Delta' \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$, $\Delta \geqslant \Delta'$ si et seulement s'il existe $i \in \Delta$ et $i' \in \Delta'$ tels que $i \geqslant i'$. Pour $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$, non maximal, on note $\Delta^+$ le plus petit des intervalles $> \Delta$. Si $\Delta$ est maximal, $\Delta^+$ n'est pas défini mais si $f$ est une fonction de $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ à valeurs dans un groupe, $f(\Delta^+)$ sera par convention l'élément neutre de ce groupe.

Pour $(\tau, \delta) \in \mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$ et i$\in \mathbb{Z}$, posons :
$$\mathcal{I}nt_{X,i}(\tau, \delta) = \bigl\{ \Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}) \,;\, \tau(\Delta) + \delta(\Delta) \equiv i \bmod 2\mathbb{Z} \bigr\},$$
$$\widetilde{\mathcal{I}nt}_{Y,i}(\tau, \delta) = \bigl\{ \Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}) \,;\, \tau(\Delta) + \delta(\Delta^+) \equiv i \bmod 2\mathbb{Z} \bigr\}.$$

On définit une application
$$\mathrm{fam} : \mathcal{F}am(X, Y) \longrightarrow \mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$$

de la façon suivante. Tout élément de $\mathcal{F}am(X,Y)$ a un unique représentant $(X',Y')$ tel que $|X'|+|Y'|=d+1$. Soient $(X',Y')$ un tel élément et $\Delta\in\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$, resp. $\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$. Posons

$$\begin{aligned}\tau(\Delta)\equiv&\left|\left\{\Delta'\in\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})\,;\,\Delta'\geqslant\Delta\ \text{ et }\ x_{(j_{\min}(\Delta)+1)/2}\notin X'\right\}\right|\\&+\left|\left\{\Delta'\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\,;\,\Delta'>\Delta\ \text{ et }\ y_{j_{\max}(\Delta')/2}\notin Y'\right\}\right|\\&+(|X'|-|Y'|-1)/2\bmod 2\mathbb{Z};\end{aligned}$$

$$\text{resp.}\qquad\begin{aligned}\delta(\Delta)\equiv&\left|\left\{\Delta'\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\,;\,\Delta'\geqslant\Delta\ \text{ et }\ x_{(j_{\min}(\Delta')+1)/2}\notin X'\right\}\right|\\&+\left|\left\{\Delta'\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\,;\,\Delta'\geqslant\Delta\ \text{ et }\ y_{j_{\max}(\Delta')/2}\notin Y'\right\}\right|\bmod 2\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

On vérifie que $(\tau,\delta)\in\mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$ et on pose

$$\operatorname{fam}(X',Y')=(\tau,\delta).$$

***Lemme***. — *L'application* fam *est une bijection de $\mathcal{F}am(X,Y)$ sur $\mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$. Pour tout entier $D$ impair $\geqslant 1$, elle se restreint en une bijection de $\mathcal{F}am(X,Y)\cap\mathcal{S}_{d/2,D}$ sur l'ensemble des $(\tau,\delta)\in\mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$ tels que*

$$|\mathcal{I}nt_{X,1}(\tau,\delta)|-|\widetilde{\mathcal{I}nt}_{Y,1}(\tau,\delta)|=\begin{cases}(D-1)/2, & si\ D\equiv 1\bmod 4\mathbb{Z},\\ -(D+1)/2, & si\ D\equiv 3\bmod 4\mathbb{Z}.\end{cases}$$

*Démonstration*. — Soit $(\tau,\delta)\in\mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$. Il existe un unique entier $D$ impair $\geqslant 1$ tel que l'égalité ci-dessus soit vérifiée. Posons

$$\begin{aligned}K_X&=\left\{j_{\max}(\Delta)/2\,;\,\Delta\in\mathcal{I}nt_{X,(D+1)/2}(\tau,\delta)\right\},\\K_Y&=\left\{(j_{\min}(\Delta)+1)/2\,;\,\Delta\in\widetilde{\mathcal{I}nt}_{Y,(D+1)/2}(\tau,\delta)\right\},\\X'&=(X-\{x_j\,;\,j\in K_Y\})\cup\{y_j\,;\,j\in K_X\},\\Y'&=(Y-\{y_j\,;\,j\in K_X\})\cup\{x_j\,;\,j\in K_Y\}.\end{aligned}$$

On vérifie que $(X',Y')\in\mathcal{F}am(X,Y)\cap\mathcal{S}_{d/2,D}$. Notons :

$$\operatorname{fam}':\mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})\longrightarrow\mathcal{F}am(X,Y)$$

l'application qui à $(\tau,\delta)$ associe $(X',Y')$. Alors fam et fam$'$ sont inverses l'une de l'autre. □

**VIII.18.** Supposons $(V,q_V)$ orthogonal impair. Notons $\sigma$ l'application composée

$$\sigma:\mathcal{R}(1)\simeq\mathcal{R}(W(C_{(d-1)/2}))\xrightarrow{\sigma_{C_{(d-1)/2}}}\mathcal{S}_{(d-1)/2,1}.$$

Pour $\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}(V)$, on dit que $\boldsymbol{\lambda}$ est spéciale si $\lambda_{2j}\equiv\lambda_{2j+1}\bmod 2\mathbb{Z}$ pour tout $j\geqslant 1$, *cf.* [Ke], proposition 6.5. Cela entraîne que $\lambda_1$ est impair et $\lambda_{2j}=\lambda_{2j+1}$ pour tout $j\geqslant 1$ tel que $\lambda_{2j}$ et $\lambda_{2j+1}$ sont pairs.

Comme dans le cas symplectique, on associe à tout symbole spécial de $\mathcal{S}_{(d-1)/2,1}$ une partition spéciale $\boldsymbol{\lambda}(X,Y)$ dans $\mathcal{P}(V)$. L'application $(X,Y) \mapsto \boldsymbol{\lambda}(X,Y)$ est bijective.

Soit $\boldsymbol{\lambda}$ une partition spéciale dans $\mathcal{P}(V)$. Posons comme en VIII.11 :

$$a_{\mathrm{imp}}(\boldsymbol{\lambda}) = \{i_1 > \cdots > i_m\}.$$

L'entier $m$ est impair. On appelle intervalle un sous-ensemble de $a(\boldsymbol{\lambda})$ de l'une des formes suivantes :

• $\{i\}$, où $i \in a(\boldsymbol{\lambda})$ est tel qu'il existe $\ell \in \{1, \ldots, \frac{m+1}{2}\}$ de sorte que $i_{2\ell-1} > i > i_{2\ell}$, avec la convention $i_{m+1} = 0$ ;

• $\{i \in a(\boldsymbol{\lambda}) ; i_{2\ell} \geqslant i \geqslant i_{2\ell+1}\}$, pour $\ell \in \{0, \ldots, \frac{m}{2}\}$, avec la convention $i_0 = \infty$.

On note $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble de ces intervalles, que l'on munit d'un ordre comme dans le cas symplectique. On note $\Delta_{\max}$, resp. $\Delta_{\min}$, le plus grand, resp. petit, élément de $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$. Pour $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, on définit $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda})$ et $j_{\max}(\Delta)$ comme dans le cas symplectique. Si $\Delta \neq \Delta_{\max}$, on définit de même $j_{\min}(\Delta)$. Par contre si $\Delta = \Delta_{\max}$, on pose par convention $j_{\min}(\Delta) = 0$. On a les propriétés suivantes :

• $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ est une partition de $a(\boldsymbol{\lambda})$ ;

• pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}) - \{\Delta_{\max}\}$, $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda})$ est pair ;

• $c_{\Delta_{\max}}(\boldsymbol{\lambda})$ est impair ;

• pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, $j_{\min}(\Delta)$ est pair et $j_{\max}(\Delta)$ est impair.

Soit $(X,Y)$ l'unique représentant du symbole spécial associé à $\boldsymbol{\lambda}$ de la forme :

$$X = \{x_1 > \cdots > x_{(d+1)/2}\}, \quad Y = \{y_1 > \cdots > y_{(d-1)/2}\}.$$

On définit $J(X)$ et $J(Y)$ comme dans le cas symplectique (avec $d$ remplacé par $d-1$).

***Lemme.*** — *Sous ces hypothèses, on a les égalités*

$$J(X) = \{(j_{\max}(\Delta)+1)/2 ; \Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\},$$
$$J(Y) = \{j_{\min}(\Delta)/2 ; \Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}) - \{\Delta_{\max}\}\}.$$

*Démonstration.* — Posons $\iota = (\boldsymbol{\lambda}, 1)$. Définissons deux suites d'entiers $\boldsymbol{\lambda}^a$ et $\boldsymbol{\lambda}^b$ par

$$\lambda_j^a = \left[\frac{\lambda_{2j-1}}{2}\right], \quad \lambda_j^b = \left[\frac{\lambda_{2j}+1}{2}\right]$$

pour tout $j \geqslant 1$. En explicitant les définitions, on calcule un représentant $(A,B)$ de $\psi'_{\mathrm{nil}}(\iota)$ :

$$A = \boldsymbol{\lambda}^a + [d-1, 0]_2, \quad B = \boldsymbol{\lambda}^b + [d-3, 0]_2,$$

puis

$$X = \boldsymbol{\lambda}^a + \left[\frac{d-1}{2}, 0\right], \quad Y = \boldsymbol{\lambda}^b + \left[\frac{d-3}{2}, 0\right].$$

On poursuit la démonstration comme dans le cas symplectique. □

**VIII.19.** Soient $(V, q_V)$, $\boldsymbol{\lambda}$ et $(X, Y)$ comme ci-dessus. Notons $\mathcal{F}am(X, Y)$ la famille du symbole $(X, Y)$ dans $\mathcal{S}_{(d-1)/2}$ et $\mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble des

$$(\tau, \delta) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}$$

tels que $\tau(\Delta_{\max}) = \delta(\Delta_{\min}) = 0$.

Avec les mêmes notations que dans le cas symplectique, pour $(\tau, \delta) \in \mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$ et $i \in \mathbb{Z}$, posons

$$\begin{aligned}\mathcal{I}nt_{X,i}(\tau, \delta) &= \big\{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\,;\, \tau(\Delta) + \delta(\Delta) \equiv i \bmod 2\mathbb{Z}\big\},\\ \mathcal{I}nt_{Y,i}(\tau, \delta) &= \big\{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\,;\, \tau(\Delta) + \delta(\Delta^+) \equiv i \bmod 2\mathbb{Z}\big\}.\end{aligned}$$

On vérifie que

$$|\mathcal{I}nt_{X,i}(\tau, \delta)| \equiv |\mathcal{I}nt_{Y,i}(\tau, \delta)| \bmod 2\mathbb{Z}.$$

On définit une application :

$$\mathrm{fam} : \mathcal{F}am(X, Y) \longrightarrow \mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$$

de la façon suivante. Tout élément de $\mathcal{F}am(X, Y)$ a un unique représentant $(X', Y')$ tel que $|X'| + |Y'| = d$. Soient $(X', Y')$ un tel élément et $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$. Posons

$$\begin{aligned}\tau(\Delta) \equiv{}& \Big|\big\{\Delta' \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\,;\, \Delta' > \Delta \text{ et } x_{(j_{\max}(\Delta)+1)/2} \notin X'\big\}\Big|\\ &+ \Big|\big\{\Delta' \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\,;\, \Delta' \geqslant \Delta,\ \Delta' \neq \Delta_{\max} \text{ et } y_{j_{\min}(\Delta)/2} \notin Y'\big\}\Big| \bmod 2\mathbb{Z};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(\Delta) \equiv{}& \Big|\big\{\Delta' \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\,;\, \Delta' \geqslant \Delta \text{ et } x_{(j_{\max}(\Delta)+1)/2} \notin X'\big\}\Big|\\ &+ \Big|\big\{\Delta' \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\,;\, \Delta' \geqslant \Delta,\ \Delta' \neq \Delta_{\max} \text{ et } y_{j_{\min}(\Delta)/2} \notin Y'\big\}\Big|\\ &+ (|X'| - |Y'| - 1)/2 \bmod 2\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

On vérifie que $(\tau, \delta) \in \mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$ et on pose

$$\mathrm{fam}(X', Y') = (\tau, \delta).$$

***Lemme***. — *L'application* fam *est une bijection de $\mathcal{F}am(X, Y)$ sur $\mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$. Pour tout entier $D$ impair $\geqslant 1$, elle se restreint en une bijection de $\mathcal{F}am(X, Y) \cap \mathcal{S}_{(d-1)/2, D}$ sur l'ensemble des $(\tau, \delta) \in \mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$ tels que*

$$|\mathcal{I}nt_{X,1}(\tau, \delta)| - |\mathcal{I}nt_{Y,1}(\tau, \delta)| = \begin{cases}(1-D)/2, & si\ D \equiv 1 \bmod 4\mathbb{Z},\\ (D+1)/2, & si\ D \equiv 3 \bmod 4\mathbb{Z}.\end{cases} \qquad \square$$

**VIII.20.** Supposons $(V, q_V)$ orthogonal pair. Notons $\sigma$ l'application composée :

$$\sigma : \mathcal{R}(0) \simeq \mathcal{R}(W(D_{d/2})) \xrightarrow{\sigma_{D_{d/2}}} \mathcal{S}_{d/2,0}.$$

Pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(V)$, on dit que $\boldsymbol{\lambda}$ est spéciale si $\lambda_{2j-1} \equiv \lambda_{2j} \bmod 2\mathbb{Z}$ pour tout $j \geqslant 1$, *cf.* [Ke], proposition 6.5. Cela entraîne que $\lambda_{2j-1} = \lambda_{2j}$ si $\lambda_{2j-1}$ et $\lambda_{2j}$ sont pairs.

Soient $(X,Y)$ un symbole spécial de $\mathcal{S}_{d/2,0}$ et $\iota$ un élément de $\mathcal{I}(0)$ tel que $\sigma(\rho_\iota) = (X,Y)$. Alors $\iota$ est de la forme $(\boldsymbol{\lambda}(X,Y),1)$ ou $(\boldsymbol{\lambda}(X,Y),\varepsilon,1)$, où $\boldsymbol{\lambda}(X,Y)$ est une partition spéciale dans $\mathcal{P}(V)$ qui ne dépend pas du choix de $\iota$. L'application $(X,Y) \mapsto \boldsymbol{\lambda}(X,Y)$ est une bijection entre symboles spéciaux dans $\mathcal{S}_{d/2,0}$ et partitions spéciales dans $P(V)$.

Soit $\boldsymbol{\lambda}$ une partition spéciale dans $\mathcal{P}(V)$. On définit comme en VIII.16 l'ensemble d'intervalles $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ et, pour $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, les entiers $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda})$, $\jmath_{\min}(\Delta)$ et $\jmath_{\max}(\Delta)$. On a :

- $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ est une partition de $a(\boldsymbol{\lambda})$ ;
- pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda})$ et $\jmath_{\max}(\Delta)$ sont pairs et $\jmath_{\min}(\Delta)$ est impair.

On ordonne $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ et on définit $\Delta_{\max}$ et $\Delta_{\min}$ comme en VIII.18.

Soit $(X,Y)$ l'unique représentant du symbole spécial associé à $\boldsymbol{\lambda}$ de la forme

$$X = \{x_1 > \cdots > x_d\}, \quad Y = \{y_1 > \cdots > y_d\}$$

tel que $x_j \geqslant y_j$ pour tout $j \in \{1,\dots,d\}$. Posons :

$$J(X) = \big\{j \in \{1,\dots,d/2\}\,;\, x_j \notin Y\big\}, \quad J(Y) = \big\{j \in \{1,\dots,d/2\}\,;\, y_j \notin X\big\}.$$

***Lemme.*** — *Sous ces hypothèses, on a les égalités :*

$$J(X) = \big\{(\jmath_{\min}(\Delta)+1)/2\,;\, \Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\big\},$$
$$J(Y) = \big\{\jmath_{\max}(\Delta)/2\,;\, \Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\big\}.$$

*Démonstration.* — Soit $\iota = (\boldsymbol{\lambda},1)$ ou $\iota = (\boldsymbol{\lambda},1,1)$ si $\boldsymbol{\lambda}$ est exceptionnelle. Définissons deux suites d'entiers $\boldsymbol{\lambda}^a$ et $\boldsymbol{\lambda}^b$ par :

$$\lambda^a_j = \left[\frac{\lambda_{2j-1}+1}{2}\right], \quad \lambda^b_j = \left[\frac{\lambda_{2j}}{2}\right]$$

pour tout $j \geqslant 1$. En explicitant les définitions, on calcule un représentant $(A,B)$ de $\psi'_{\mathrm{nil}}(\iota)$ :

$$A = \boldsymbol{\lambda}^a + [d-2,0]_2, \quad B = \boldsymbol{\lambda}^b + [d-2,0]_2$$

puis

$$X = \boldsymbol{\lambda}^a + \left[\frac{d}{2}-1,0\right], \quad Y = \boldsymbol{\lambda}^b + \left[\frac{d}{2}-1,0\right].$$

On poursuit la démonstration comme dans le cas symplectique. □

**VIII.21.** Soient $(V,q_V)$, $\boldsymbol{\lambda}$ et $(X,Y)$ comme ci-dessus. Notons $\mathcal{F}am(X,Y)$ la famille du symbole $(X,Y)$ dans $\mathcal{S}^+_{d/2}$.

Pour

$$(\tau,\delta) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})},$$

on définit comme en VIII.19 les ensembles $\mathcal{I}nt_{X,i}(\tau,\delta)$ et $\mathcal{I}nt_{Y,i}(\tau,\delta)$ pour $i \in \mathbb{Z}$. Notons $\mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble des $(\tau,\delta)$ comme ci-dessus tels que $\delta(\Delta_{\min}) = 0$ et l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée.

- $|\mathcal{I}nt_{X,1}(\tau,\delta)| > |\mathcal{I}nt_{Y,1}(\tau,\delta)|$ ;
- $|\mathcal{I}nt_{X,1}(\tau,\delta)| = |\mathcal{I}nt_{Y,1}(\tau,\delta)|$ et $\tau(\Delta_{\max}) = 0$.

On définit une application

$$\mathrm{fam} : \mathcal{F}am(X,Y) \longrightarrow \mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$$

de la façon suivante. Tout élément de $\mathcal{F}am(X,Y)$ a un unique représentant $(X',Y')$ tel que $|X'|+|Y'|=d$ et l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

- $|X'|>|Y'|$
- $|X'|=|Y'|$ et $X' \succ Y'$

(*cf.* I.5 pour la définition de $\succ$). Soient $(X',Y')$ un tel élément et $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$. Posons

$$\begin{aligned}\tau(\Delta) \equiv &\left|\left\{\Delta' \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\,;\ \Delta' \geqslant \Delta \ \text{ et } \ x_{(j_{\min}(\Delta')+1)/2} \notin X'\right\}\right| \\ &+ \left|\left\{\Delta' \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\,;\ \Delta' > \Delta, \ \text{ et } \ y_{j_{\max}(\Delta')/2} \notin Y'\right\}\right| \bmod 2\mathbb{Z};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(\Delta) \equiv &\left|\left\{\Delta' \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\,;\ \Delta' \geqslant \Delta \ \text{ et } \ x_{(j_{\min}(\Delta')+1)/2} \notin X'\right\}\right| \\ &+ \left|\left\{\Delta' \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\,;\ \Delta' \geqslant \Delta, \ \text{ et } \ y_{j_{\max}(\Delta')/2} \notin Y'\right\}\right| \bmod 2\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

On vérifie que $(\tau,\delta) \in \mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$ et on pose

$$\mathrm{fam}(X',Y') = (\tau,\delta).$$

***Lemme***. — *L'application* fam *est une bijection de $\mathcal{F}am(X,Y)$ sur $\mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$. Pour tout entier $D \geqslant 0$ divisible par 4, elle se restreint en une bijection de $\mathcal{F}am(X,Y) \cap \mathcal{S}_{d/2,D}$ sur l'ensemble des $(\tau,\delta) \in \mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$ tels que*

$$|\mathcal{I}nt_{X,1}(\tau,\delta)| - |\mathcal{I}nt_{Y,1}(\tau,\delta)| = D/2. \qquad \square$$

# CHAPITRE IX

# DISTRIBUTIONS STABLES À SUPPORT NILPOTENT

**IX.1.** Dans ce chapitre, $(V, q_V)$ désigne un couple comme en I.2, défini sur $F$. On suppose que $V$ possède un réseau autodual.

On note $\check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$ l'ensemble des triplets $\check{N} = (L, N', N'')$ où

• $L$ est un réseau presque autodual de $V$ ;

• $N' = (\boldsymbol{\lambda}', (q'_i))$ ou $(\boldsymbol{\lambda}', (q'_i), \varepsilon')$, resp. $N'' = (\boldsymbol{\lambda}'', (q''_i))$ ou $(\boldsymbol{\lambda}'', (q''_i), \varepsilon'')$, est un élément de $\mathrm{Nil}(\ell')$, resp. $\mathrm{Nil}(\ell'')$.

Soit $\check{N}$ un tel triplet. Posons

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}''.$$

Supposons $(V, q_V)$ symplectique. Soit $i$ un entier pair $\geqslant 1$. On montre qu'à isomorphisme près, il existe un unique triplet $(V_i, R_i, q_i)$ vérifiant les conditions suivantes :

• $(V_i, q_i)$ est un espace orthogonal comme en I.2 ;

• $R_i$ est un réseau presque autodual de $V_i$ ;

• $d(r'_i) = c_i(\boldsymbol{\lambda}')$, $d(r''_i) = c_i(\boldsymbol{\lambda}'')$ ;

• les formes $q_{i,r'_i}$ et $q'_i$, resp. $q_{i,r''_i}$ et $q''_i$, sont équivalentes.

Cela définit une famille de formes quadratiques $(q_i)$. Une construction analogue vaut si $(V, q_V)$ est orthogonal ou unitaire.

Remarquons que $\boldsymbol{\lambda}$ est exceptionnelle si et seulement si $\boldsymbol{\lambda}'$ et $\boldsymbol{\lambda}''$ le sont toutes deux. Dans ce cas $N' = (\boldsymbol{\lambda}', \varnothing, \varepsilon')$ et $N'' = (\boldsymbol{\lambda}'', \varnothing, \varepsilon'')$. On pose alors $\varepsilon = \varepsilon'\varepsilon''$.

Posons

$$\check{\Lambda}(\check{N}) = \begin{cases} (\boldsymbol{\lambda}, \varnothing, \varepsilon), & \text{si } \boldsymbol{\lambda} \text{ est exceptionnelle,} \\ (\boldsymbol{\lambda}, (q_i)), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela définit une application $\check{\Lambda} : \check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V) \to \mathrm{Nil}(V)$. Elle est surjective. Pour $\check{N} \in \check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$, on note $\mathcal{O}(\check{N})$ l'élément de $\mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}/G$ paramétrisé par $\check{\Lambda}(\check{N})$.

**IX.2.** Soit $\check{N} = (L, N', N'') \in \check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$. Fixons un $s\ell_2$-triplet $(X', H', Y')$ de $\mathfrak{g}(\ell')$ tel que $Y'$ appartienne à l'orbite nilpotente paramétrisée par $N'$. On en déduit une graduation de $\boldsymbol{g}(\ell')$ et un sous-groupe parabolique $\boldsymbol{P}'$ de $\boldsymbol{G}(\ell')$, *cf.* V.7. Notons $h'$ la fonction caractéristique de $Y' + \mathfrak{g}(\ell'; \geqslant -1)$ dans $\mathfrak{g}(\ell')$. On effectue des constructions analogues relatives à l'espace $\ell''$.

Rappelons que l'on note $\boldsymbol{g}(L) = \boldsymbol{g}(\ell') \times \boldsymbol{g}(\ell'')$. On gradue $\boldsymbol{g}(L)$ en posant

$$\boldsymbol{g}(L; i) = \boldsymbol{g}(\ell'; i) \times \boldsymbol{g}(\ell''; i)$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On pose $\overline{X}_{\check{N}} = (X', X'')$, $\overline{H}_{\check{N}} = (H', H'')$, $\overline{Y}_{\check{N}} = (Y', Y'')$, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}' \times \boldsymbol{P}''$. On note $K^1_{\check{N}}$ l'image réciproque de $U_P$ dans $K(L)^0$ par l'application de réduction $K(L)^0 \to G(L)$, *cf.* I.3. La fonction $h' \otimes h''$ sur $g(L)$ se relève en une fonction sur $k(L)$ que l'on prolonge à $g$ tout entier par 0 hors de $k(L)$. On note $h_{\check{N}}$ la fonction sur $g$ ainsi construite.

***Lemme***. — *Avec les notations ci-dessus, il existe un $s\ell_2$-triplet $(X, H, Y)$ de $g$ tel que*

- $X, H, Y \in k(L)$,
- $Y \in \mathcal{O}(\check{N})$,
- *la réduction de $X$, resp. $H, Y$, dans $k(L)/k(L)^1 = g(L)$ est $\overline{X}_{\check{N}}$, resp. $\overline{H}_{\check{N}}$, $\overline{Y}_{\check{N}}$, cf. [BM], proposition 3.8.* □

***IX.3. Lemme***. — *Soit $\check{N} \in \check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$.*

(i) *L'ensemble $\mathcal{O}(\check{N}) \cap \mathrm{Supp}(h_{\check{N}})$ est non vide et est une unique classe de conjugaison par le groupe $K^1_{\check{N}}$.*

(ii) *Soit $\mathcal{O} \in g_{\mathrm{nil}}/G$. Si $\mathcal{O} \cap \mathrm{Supp}(h_{\check{N}}) \neq \varnothing$, $\mathcal{O}(\check{N})$ est incluse dans la clôture $\overline{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{O}$ pour la topologie usuelle de $g$.*

*Démonstration*. — La démonstration est similaire à celles de [BM], lemme 3.11 et proposition 3.12. Posons $\check{N} = (L, N', N'')$ et utilisons les notations du paragraphe précédent. Introduisons le $s\ell_2$-triplet $(X, H, Y)$ du lemme précédent.

Remarquons d'abord que $\mathrm{Supp}(h_{\check{N}})$ est stable par conjugaison par $K^1_{\check{N}}$. Pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, posons

$$g(i) = \{Z \in g; [H, Z] = iZ\},$$
$$g(i,j) = \{Z \in g(i); [Y, [X, Z]] = jZ\}.$$

Il résulte des formules exprimant les représentations irréductibles de $s\ell_2$ (*cf.* [C], § 5.4) que l'on a les égalités :

$$g = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} g(i,j),$$

(1) $$Z_g(X) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} g(i, 0).$$

Il résulte des mêmes formules et de l'hypothèse $p \geqslant 3d + 1$ que l'on a les propriétés :

- si $i, i' \in \mathbb{Z}$ sont tels que $i \equiv i' \bmod p$ et $g(i) \neq \{0\}$, $g(i') \neq \{0\}$, alors $i = i'$ ;
- soit $i \in \mathbb{Z}$ ; si $j, j' \in \mathbb{Z}$ sont tels que $j \equiv j' \bmod p$ et $g(i,j) \neq \{0\}$, $g(i,j') \neq \{0\}$, alors $j = j'$ ;

(2) • si $i, j \in \mathbb{Z}$ sont tels que $j \equiv 0 \bmod p$ et $g(i,j) \neq \{0\}$, alors $j = 0$.

Montrons que

(3) $$k(L) = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} g(i,j) \cap k(L);$$

(4) $$k(L)^1 = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} g(i,j) \cap k(L)^1;$$

(5) $$Z_g(X) \cap k(L) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} g(i,0) \cap k(L);$$

(6) l'image par réduction de $Z_g(X) \cap k(L)$ dans $g(L)$ est $Z_{g(L)}(\overline{X}_{\check{N}})$.

Notons $I$ le sous-ensemble des $i \in \mathbb{Z}$ tels que $g(i) \neq \{0\}$. Soit $Z \in k(L)$. Ecrivons
$$Z = \sum_{i \in I} Z_i$$
où $Z_i \in g(i)$ pour tout $i \in I$. Soit $i \in I$. Alors on a l'égalité
$$\Big(\prod_{i' \in I - \{i\}} (\mathrm{ad}(H) - i')\Big)(Z) = \Big(\prod_{i' \in I - \{i\}} (i - i')\Big) Z_i$$
Puisque $H \in k(L)$, le membre de gauche appartient à $k(L)$. Le coefficient intervenant dans le membre de droite est inversible $\bmod p$. On en déduit que $Z_i \in k(L)$. Cela démontre l'égalité
$$k(L) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} g(i) \cap k(L).$$
Pour $i \in \mathbb{Z}$, on démontre de même que
$$g(i) \cap k(L) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} g(i,j) \cap k(L).$$
Cela démontre (2). La démonstration de (3) est analogue. L'assertion (4) résulte de (1) et (3). Il est clair que la réduction de $Z_g(X) \cap k(L)$ dans $g(L)$ est incluse dans $Z_{g(L)}(\overline{X}_{\check{N}})$. Pour tous $i,j \in \mathbb{Z}$, notons $\overline{g}(i,j)$ l'image de $g(i,j) \cap k(L)$ dans $g(L)$. D'après (2) et (3), on a l'égalité
$$g(L) = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} \overline{g}(i,j).$$
Il est clair que $Z_{g(L)}(\overline{X}_{\check{N}})$ est inclus dans
$$\bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z},\, j \equiv 0 \bmod p} \overline{g}(i,j).$$
Grâce à (2) et (5), cet espace est la réduction de $Z_g(X) \cap k(L)$. Cela démontre (6).

On déduit de (3) et (5) que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité
$$g(i) \cap k(L) = g(i) \cap Z_g(X) \cap k(L) + \mathrm{ad}(Y)(g(i+2) \cap k(L)).$$
Puis

(7) $$g(\geqslant i) \cap k(L) = g(i) \cap Z_g(X) \cap k(L) + \mathrm{ad}(Y)(g(i+2) \cap k(L)) + g(\geqslant i+1) \cap k(L).$$

Soit $Z \in Z_g(X) \cap k(L)$. Rappelons que $Z_g(X) \subset g(\geqslant 0)$, *i.e.* $g(i,0) = 0$ pour tout $i < 0$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,
$$\mathrm{ad}(Y+Z)(g(i+2) \cap k(L)) + g(\geqslant i+1) \cap k(L) = \mathrm{ad}(Y)(g(i+2) \cap k(L)) + g(\geqslant i+1) \cap k(L).$$
On peut donc remplacer $Y$ par $Y+Z$ dans l'égalité (7). En utilisant cette égalité et en raisonnant par récurrence décroissante sur $i$, on obtient l'égalité :
$$k(L) = Z_g(X) \cap k(L) + \mathrm{ad}(Y+Z)(k(L)).$$

On démontre de même l'égalité :

$$k(L)^1 = Z_g(X) \cap k(L)^1 + \mathrm{ad}(Y+Z)(k(L)^1).$$

En utilisant l'application $E^G$ de I.4, qui est définie sur $g_{\mathrm{tn}}$, un raisonnement d'approximations successives déduit des égalités précédentes l'égalité :

$$Y + Z + k(L)^1 = \{x(Y+Z+Z')x^{-1};\, Z' \in Z_g(X) \cap k(L)^1,\, x \in K(L)^1\}.$$

D'autre part, d'après (6) et V.7 (8), on a l'égalité :

$$\mathrm{Supp}(h_{\check{N}}) = \{x(Y+Z)x^{-1};\, Z \in Z_g(X) \cap k(L) + K(L)^1,\, x \in K^1_{\check{N}}\}.$$

Puisque $K(L)^1 \subset K^1_{\check{N}}$, les deux égalités précédentes impliquent :

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{Supp}(h_{\check{N}}) = \{x(Y+Z)x^{-1};\, Z \in Z_g(X) \cap k(L),\, x \in K^1_{\check{N}}\}.$$

L'ensemble $\mathcal{O}(\check{N}) \cap \mathrm{Supp}(h_{\check{N}})$ est non vide car il contient $Y$. Soit $Y'$ un élément de cet ensemble. Grâce à (8), il existe $Z \in Z_g(X) \cap k(L)$ tel que $Y'$ soit conjugué à $Y+Z$ par un élément de $K_{\check{N}}$. Pour un tel $Z$, on a $Y+Z \in \mathcal{O}(\check{N}) \subset \mathcal{O}^{\mathrm{alg}}(Y)$, donc $Z=0$ d'après V.7 (9) (appliqué sur le corps de base $F$). Donc $Y'$ est conjugué à $Y$ par un élément de $K_{\check{N}}$. C'est l'assertion (i) de l'énoncé.

Soit $\mathcal{O} \in g_{\mathrm{nil}}/G$ tel que $\mathcal{O} \cap \mathrm{Supp}(h_{\check{N}}) \neq \varnothing$. Notons $\rho : \boldsymbol{SL_2} \to \boldsymbol{G}$ l'homomorphisme déduit du $s\ell_2$-triplet $(X,H,Y)$ et

$$t = \rho\left(\begin{pmatrix} \omega_F & 0 \\ 0 & \omega_F^{-1} \end{pmatrix}\right).$$

Grâce à (8), il existe $Z \in Z_g(X)$ tel que $Y+Z \in \mathcal{O}$. Pour un tel $Z$, en se rappelant que $Z_g(X) \subset g(\geqslant 0)$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \omega_F^{-2n} t^n (Y+Z) t^{-n} = Y.$$

Les termes dont on prend la limite appartiennent à $\mathcal{O}$. Donc $Y \in \overline{\mathcal{O}}$ et $\mathcal{O}(\check{N}) \subset \overline{\mathcal{O}}$. Cela démontre le (ii) de l'énoncé. □

**IX.4.** Pour $\check{N} = (L, N', N'') \in \check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$, on a défini en IX.2 une graduation de $g(L)$. Posons

$$d(\check{N}) = \dim(g(L;1))/2.$$

C'est un entier. Rappelons que pour $\mathcal{O} \in g_{\mathrm{nil}}/G$, on a défini en I.6 l'intégrale orbitale $\phi_{\mathcal{O}}$.

***Lemme***. — *Soient $\check{N} \in \check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$ et $\mathcal{O} \in g_{\mathrm{nil}}/G$.*

(i) *Si $\mathcal{O}(\check{N})$ n'est pas incluse dans la clôture $\overline{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{O}$ pour la topologie usuelle, $\phi_{\mathcal{O}}(h_{\check{N}}) = 0$.*

(ii) *Si $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\check{N})$, $\phi_{\mathcal{O}}(h_{\check{N}}) = q^{d(N)}$.*

*Démonstration.* — Le (ii) résulte du (i) du lemme précédent. Supposons $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\check{N})$, écrivons $\check{N} = (L, N', N'')$ et introduisons le $s\ell_2$-triplet $(X, H, Y)$ du lemme IX.2. Soit $n$ un entier $\geqslant 1$, posons

$$K_n = E^G(\mathfrak{p}_F^n k(L)^1), \quad \mathcal{O}_n = \{y^{-1} Y y; y \in K_n\}.$$

Remarquons que $K_n$ est un sous-groupe distingué de $K_{\check{N}}^1$. Posons

$$\mathcal{Y}_n = (Z_G(Y) \cap K_{\check{N}}^1) K_n \setminus K_{\check{N}}^1.$$

Grâce au lemme IX.3 (i), on a la décomposition en union disjointe :

$$\mathcal{O} \cap \mathrm{Supp}(h_{\check{N}}) = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}_n} y \mathcal{O}_n y^{-1}.$$

D'où l'égalité

$$\phi_{\mathcal{O}}(h_{\check{N}}) = |\mathcal{Y}_n| \,\mathrm{mes}(\mathcal{O}_n).$$

On a l'égalité :

$$|\mathcal{Y}_n| = [K_{\check{N}}^1 : K_n][Z_G(Y) \cap K_{\check{N}}^1 : Z_G(Y) \cap K_n]^{-1}.$$

Utilisons les notations de IX.2. On a les égalités :

$$[K_{\check{N}}^1 : K_n] = [K_{\check{N}}^1 : K(L)^1][K(L)^1 : K_n] = q^{\dim(\boldsymbol{u_P}) + n \dim(\boldsymbol{g})}.$$

Puisque $Z_{G(L)}(\overline{Y}_{\check{N}}) \cap U_P = \{1\}$, on a $Z_G(Y) \cap K_{\check{N}}^1 = Z_G(Y) \cap K(L)^1$. Ce groupe étant pro-$p$-nilpotent on a les égalités :

$$\begin{aligned}[Z_G(Y) \cap K_{\check{N}}^1 : Z_G(Y) \cap K_n] &= [Z_G(Y) \cap K(L)^1 : Z_G(Y) \cap K_n], \\ &= [Z_g(Y) \cap k(L)^1 : Z_g(Y) \cap \mathfrak{p}_F^n k(L)^1], \\ &= q^{n \dim(\boldsymbol{Z_g}(Y))}.\end{aligned}$$

Par définition de nos mesures, si $n$ est assez grand, la mesure de $\mathcal{O}_n$ est égale à celle de l'image de $\mathfrak{p}_F^n k(L)^1$ dans l'espace tangent de $\mathcal{O}$ au point $Y$. Cet espace est $Z_g(Y) \setminus g$ et l'image de $\mathfrak{p}_F^n k(L)^1$ est

$$Z_g(Y) \setminus (Z_g(Y) + \mathfrak{p}_F^n k(L)^1). \tag{1}$$

On a muni l'espace tangent ci-dessus de la mesure autoduale pour le bicaractère

$$(Z, Z') \longmapsto \psi \circ q_g(Y, [Z, Z']).$$

Le dual du module (1) pour ce bicaractère est

$$Z_g(Y) \setminus (Z_g(Y) + \mathfrak{p}_F^{-n} k(L)).$$

On en déduit l'égalité

$$\mathrm{mes}(\mathcal{O}_n) = \big[(Z_g(Y) + \mathfrak{p}_F^{-n} k(L)) : (Z_g(Y) + \mathfrak{p}_F^n k(L)^1)\big]^{-1/2}$$

pour $n$ assez grand. Ou encore :

$$\mathrm{mes}(\mathcal{O}_n) = \big[k(L) : \mathfrak{p}_F^{2n} k(L)^1\big]^{-1/2} \big[Z_g(Y) \cap K(L) : Z_g(Y) \cap \mathfrak{p}_F^{2n} k(L)^1\big]^{1/2}.$$

On a les égalités :

$$[k(L):\mathfrak{p}_F^{2n}k(L)^1]=[k(L):k(L)^1][k(L)^1:\mathfrak{p}_F^{2n}k(L)^1]=q^{\dim(\boldsymbol{g}(L))+2n\dim(\boldsymbol{g})},$$

$$\begin{aligned}\left[Z_g(Y)\cap k(L):Z_g(Y)\cap\mathfrak{p}_F^{2n}k(L)^1\right]&=\left[Z_g(Y)\cap k(L):Z_g(Y)\cap k(L)^1\right]\\&\quad\left[Z_g(Y)\cap k(L)^1:Z_g(Y)\cap\mathfrak{p}_F^{2n}k(L)^1\right].\end{aligned}$$

Le dernier terme du membre de droite de l'égalité ci-dessus est égal à

$$q^{2n\dim(\boldsymbol{Z_g}(Y))}.$$

Grâce à IX.3 (6) appliqué à $Y$ au lieu de $X$, on a

$$\left[Z_g(Y)\cap k(L):Z_g(Y)\cap k(L)^1\right]=\left|Z_{g(L)}(\overline{Y}_{\check{N}})\right|=q^{\dim(\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{g}(L)}(\overline{Y}_{\check{N}}))}.$$

En rassemblant tous ces calculs, on obtient l'égalité

$$\phi_{\mathcal{O}}(h_{\check{N}})=q^c,$$

où

$$c=\dim(\boldsymbol{u_P})+\dim(\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{g}(L)}(\overline{Y}_{\check{N}}))/2-\dim(\boldsymbol{g}(L))/2.$$

Il est bien connu que la dimension de la classe de conjugaison de $\overline{Y}_{\check{N}}$ par $\boldsymbol{G}(L)$ est

$$\frac{1}{2}\left[\dim(\boldsymbol{g}(L;\geqslant 1)+\dim(\boldsymbol{g}(L;\geqslant 2)\right].$$

On en déduit l'égalité $c=d(\check{N})$ qui achève la démonstration. □

**IX.5.** Pour $\iota_0=(k',k'')\in\mathcal{I}_0(V)$, *cf.* III.1, on pose

$$n(\iota_0)=\begin{cases}d,\ \text{ si } (V,q_V) \text{ est unitaire},\\(d-k'(k'+1)-k''(k''+1))/2,\ \text{ si } (V,q_V) \text{ est symplectique},\\(d-k'^2-k''^2)/2,\ \text{ si } (V,q_V) \text{ est orthogonal}.\end{cases}$$

Pour $\theta\in\Theta(V)$, on pose $n(\theta)=n(\iota_0)$, où $\iota_0$ est l'élément de $\mathcal{I}_0(V)$ intervenant dans les données $\theta$.

Remarquons que pour $\check{N}\in\check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$, la fonction $h_{\check{N}}$ appartient à $\mathcal{H}$. En effet quitte à conjuguer le réseau intervenant dans la donnée $\check{N}$ et les $s\ell_2$-triplets fixés en IX.2, on peut supposer $h_{\check{N}}$ invariante par $b$.

Dans la proposition ci-dessous et sa preuve, on utilise les notations de III.4, III.8 et IX.2.

***Proposition***. — *Soient $\theta\in\Theta(V)$ et $\check{N}=(L,N',N'')\in\check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$. On a l'égalité*

$$\begin{aligned}\phi_\theta^{\mathcal{H}}(h_{\check{N}})&=q^{\delta(\theta)+d(\check{N})+[\dim(\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{g}(L)}(\overline{Y}_{\check{N}}))-n(\theta)]/2}\\&\quad\cdot\sum_{(\theta',\theta'')\in\Theta(\theta,L)}\eta(\theta',\theta'')[\theta',\theta'']^0\,(Q^\natural_{\theta'}\otimes Q^\natural_{\theta''})(\overline{Y}_{\check{N}}).\end{aligned}$$

*Démonstration.* — Appliquons la proposition III.4. L'entier $\dim(\boldsymbol{T})$ qui y intervient est égal à $n(\theta)$. D'où l'égalité :

$$(1)\quad \phi_\theta^{\mathcal{H}}(h_{\tilde{N}}) = q^{n(\theta)/2} m(L) \sum_{(\theta',\theta'')\in\Theta(\theta,L)} \eta(\theta',\theta'')[\theta',\theta'']^0 (Q_{\theta'}, h')_{g(\ell')} (Q_{\theta''}, h'')_{g(\ell'')}.$$

Définissons une fonction $\varphi$ sur $g(\ell')$ par

$$\varphi(Z) = |G(\ell')|^{-1} \sum_{x\in G(\ell')} h'(x^{-1}Zx)$$

pour tout $Z \in g(\ell')$. Pour tout tel $Z$, on a l'égalité :

$$\widehat{\varphi}(Z) = |G(\ell')|^{-1} q^{-\dim(\boldsymbol{g}(\ell'))/2} \sum_{x\in G(\ell')} \sum_{Z'\in g(\ell';\geqslant -1)} \psi\circ q_g(x^{-1}Zx, Y'+Z'),$$

ou encore :

$$\widehat{\varphi}(Z) = |G(\ell')|^{-1} q^{\dim(\boldsymbol{g}(\ell';\geqslant -1))-\dim(\boldsymbol{g}(\ell'))/2} \sum_x \psi\circ q_g(x^{-1}Zx, Y'),$$

la somme portant sur les $x \in G(\ell')$ tels que $x^{-1}Zx \in g(\ell';\geqslant 2)$. Introduisons la fonction $\Gamma_{Y'}$ de VIII.14 relative à l'espace $\ell'$. Alors

$$(2)\qquad \widehat{\varphi} = |G(\ell')|^{-1} q^{[\dim(\boldsymbol{g}(\ell'))+\dim(\boldsymbol{g}(\ell';1))]/2}\Gamma_{Y'}.$$

Soit $\theta' \in \Theta(\ell')$. Il existe un élément de $\{\pm 1\}$, que l'on note $\sigma(\theta')$ tel que $Q_{\theta'}(-Z) = \sigma(\theta')Q_{\theta'}(Z)$ pour tout $Z \in g(\ell')$. On a aussi $Q_{\theta'}^{\natural}(-Z) = \sigma(\theta')Q_{\theta'}^{\natural}(Z)$ pour tout $Z$ et $\widehat{\widehat{Q}}_{\theta'} = \sigma(\theta')Q_{\theta'}$. On a les égalités :

$$(3)\qquad (Q_{\theta'}, h')_{g(\ell')} = (Q_{\theta'}, \varphi)_{g(\ell')} = (\widehat{\widehat{Q}}_{\theta'}, \widehat{\widehat{\varphi}})_{g(\ell')} = \sigma(\theta')(Q_{\theta'}, \widehat{\widehat{\varphi}})_{g(\ell')}.$$

Soit $k'$ l'élément de $\mathcal{I}_0(\ell')$ intervenant dans la donnée $\theta'$. Notons $\mathcal{W}$ l'ensemble des $w \in W(k')$ tels que $\Lambda_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{T}^w) = \theta'$. Fixons $w \in \mathcal{W}$, posons $\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{T}^w$. Grâce à II.7 (1) et à la proposition VIII.14, on a l'égalité :

$$(4)\qquad (Q_{\theta'}, \widehat{\Gamma}_{Y'})_{g(\ell')} = q^{c_1}|W(k')|^{-1}|\mathcal{W}||W_{G(\ell')}(T')|Q_{\theta'}^{\natural}(-Y'),$$

où

$$c_1 = \dim(\boldsymbol{g}(\ell'))/2 - \dim(\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}(Y'))/2 - \dim(\boldsymbol{t}') + \delta(G(\ell'), T').$$

D'après II.3, $\mathcal{W}$ n'est autre que l'ensemble des $w' \in W(k')$ tels que $w_\phi w'$ et $w_\phi w$ soient conjugués par un élément de $W(k')$. D'après la preuve du lemme III.9, $W_{G(\ell')}(T')$ a même nombre d'éléments que l'ensemble des éléments de $W(k')$ qui commutent à $w_\phi w$. On en déduit l'égalité :

$$(5)\qquad |W(k')|^{-1}|\mathcal{W}||W_{G(\ell')}(T')| = 1.$$

En rassemblant les égalités (2), (3) et (4), on obtient :

$$(Q_{\theta'}, h')_{g(\ell')} = |G(\ell')|^{-1} q^{c_2} Q_{\theta'}^{\natural}(Y'),$$

où

$$c_2 = \dim(\boldsymbol{g}(\ell')) + \delta(G(\ell'), T') - \dim(\boldsymbol{t}') + \dim(\boldsymbol{g}(\ell';1))/2 - \dim(\boldsymbol{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}(Y'))/2.$$

Pour $\theta'' \in \Theta(\ell'')$, on a une formule analogue pour $(Q_{\theta''}, h'')_{g(\ell'')}$, où intervient un tore $\boldsymbol{T}''$. Appliquons ces formules pour un couple $(\theta', \theta'') \in \Theta(\theta, L)$. On a les égalités :

$$m(L)|G(\ell')|^{-1}|G(\ell'')|^{-1} = q^{-[\dim(\boldsymbol{g}(\ell'))+\dim(\boldsymbol{g}(\ell''))]/2},$$
$$\delta(G(\ell'), T') + \delta(G(\ell''), T'') = \delta(\theta),$$
$$\dim(\boldsymbol{t}') + \dim(\boldsymbol{t}'') = n(\theta).$$

L'égalité (1) devient celle de l'énoncé. □

**IX.6.** Soit $\iota_0 = (k', k'') \in \mathcal{I}_0(V)$. Introduisons l'unique élément

$$\theta_{\iota_0} = (k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')$$

de $\Theta(V)$ tel que :

- tous les termes non nuls de $\boldsymbol{\mu}^0$ sont égaux à 1 ;
- $\boldsymbol{\mu}'' = \varnothing$ ;
- $\boldsymbol{\mu}' = \begin{cases} (1,0,\dots), & \text{si } (V, q_V) \text{ est orthogonal pair non déployé et } k' = 0, \\ \varnothing, & \text{sinon.} \end{cases}$

Associons à $\theta_{\iota_0}$ une décomposition orthogonale $V = V_0 \oplus V_1$, un réseau $L_0$ de $V_0$ et un sous-tore maximal de $\boldsymbol{G}(V_1)$ que nous noterons $\boldsymbol{T}(\iota_0)$. Posons

$$\boldsymbol{M}(\iota_0) = \boldsymbol{G}(V_0) \times \boldsymbol{T}(\iota_0) = \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T}(\iota_0)),$$
$$W(\iota_0) = W_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}(\iota_0)).$$

Alors $\boldsymbol{T}(\iota_0)$ est maximalement déployé dans $\boldsymbol{G}(V_1)$ et il existe un sous-groupe parabolique de $G$ défini sur $F$ et de sous-groupe de Lévi $\boldsymbol{M}(\iota_0)$.

Notons $F^{nr}$ la plus grande extension non ramifiée de $F$ dans $\overline{F}$. Le Frobenius $\phi$ est un générateur topologique de $\mathrm{Gal}(F^{nr}/F)$. Tous nos groupes sont déployés sur $F^{nr}$, donc $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F^{nr})$ agit trivialement sur $W(\iota_0)$. On en déduit par passage au quotient une action de $\phi$ sur $W(\iota_0)$.

On identifie $W(\iota_0)$ comme en II.3. En posant $n = n(\iota_0)$, on a

$$W(\iota_0) \simeq \begin{cases} W(A_{n-1}), & \text{si } (V, q_V) \text{ est unitaire,} \\ W(C_n), & \text{si } (V, q_V) \text{ est symplectique ou si } (V, q_V) \text{ est orthogonal} \\ & \text{et } \iota_0 \neq (0,0), \\ W(D_n), & \text{si } (V, q_V) \text{ est orthogonal et } \iota_0 = (0,0). \end{cases}$$

Rappelons que si $(V, q_V)$ est orthogonal, la condition $\iota_0 = (0,0)$ implique que $d$ est pair. Si $(V, q_V)$ est unitaire, on note $w_\phi$ l'élément de plus grande longueur de $W(A_{n-1})$, *cf.* II.3. Si $(V, q_V)$ est orthogonal pair non déployé et $k' = 0$, on note $w_\phi$ l'élément $w_{CD}$ de $W(C_n)$. Dans tous les autres cas, on pose $w_\phi = 1$. Alors l'identification ci-dessus est telle que

$$\phi(w) = w_\phi^{-1} w w_\phi$$

pour tout $w \in W(\iota_0)$.

Pour $w \in W(\iota_0)$, on pose

$$Z_\phi(w) = \{u \in W(\iota_0)\,;\, \phi(u)^{-1}wu = w\},$$
$$\mathcal{O}_\phi(w) = \{\phi(u)^{-1}wu\,;\, u \in W(\iota_0)\}.$$

On notera parfois plus précisément ces ensembles $Z_{W(\iota_0),\phi}(w)$ et $\mathcal{O}_{W(\iota_0),\phi}(w)$.

Soit $w \in W(\iota_0)$. On verra ci-dessous qu'il existe $x \in \boldsymbol{G}(F^{nr})$ tel que $\phi(x)^{-1}x \in N_{\boldsymbol{G}(F^{nr})}(\boldsymbol{M}(\iota_0))$ et l'image de cet élément dans $W(\iota_0)$ soit $w$. Fixons un tel $x$, posons $\boldsymbol{T}^w = x\boldsymbol{T}(\iota_0)x^{-1}$, $V_1^w = x(V_1)$. Alors $V_1^w$ comme $\boldsymbol{T}^w$ sont définis sur $F$ et $\boldsymbol{T}^w$ est un sous-tore maximal non ramifié de $\boldsymbol{G}(V_1^w)$. Posons $\Lambda_T^{\boldsymbol{G}(V_1^w)}(\boldsymbol{T}^w) = (\boldsymbol{\mu}^{0w}, \boldsymbol{\mu}'^w, \boldsymbol{\mu}''^w)$ ou $(\boldsymbol{\mu}^{0w}, \boldsymbol{\mu}'^w, \boldsymbol{\mu}''^w, \varepsilon)$ et $\boldsymbol{\mu}^{1w} = \boldsymbol{\mu}'^w \cup \boldsymbol{\mu}''^w$. Bien que la classe de conjugaison de $\boldsymbol{T}^w$ par $G$ dépende du choix de $x$, on vérifie que ni $\boldsymbol{\mu}^{0w}$, ni $\boldsymbol{\mu}^{1w}$ n'en dépendent. Le quadruplet $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^{0w}, \boldsymbol{\mu}^{1w})$ appartient à $\Xi_I(V)$, *cf.* IV.6. Quand il est exceptionnel, le terme $\varepsilon$ ci-dessus ne dépend pas du choix de $x$. On pose

$$\Lambda_{W(\iota_0)}(w) = \begin{cases} (k', k'', \boldsymbol{\mu}^{0w}, \boldsymbol{\mu}^{1w}), & \text{si ce quadruplet n'est pas exceptionnel,} \\ (0, 0, \boldsymbol{\mu}^{0w}, \varnothing, \varepsilon), & \text{s'il l'est.} \end{cases}$$

Cela définit une application

$$\Lambda_{W(\iota_0)} : W(\iota_0) \longrightarrow \Xi(V)$$

que l'on peut décrire combinatoirement comme en II.3. Son image est l'ensemble des éléments $\xi$ de $\Xi(V)$ tels que $\iota_0$ soit l'élément de $\mathcal{I}_0(V)$ intervenant dans les données $\xi$. Les fibres $\Lambda_{W(\iota_0)}$ au-dessus de son image sont les orbites $\mathcal{O}_\phi(w)$ pour $w \in W(\iota_0)$. En faisant varier $\iota_0$, la collection des applications $\Lambda_{W(\iota_0)}$ définit une application :

$$\Lambda_W : \bigsqcup_{\iota_0 \in \mathcal{I}_0(V)} W(\iota_0) \longrightarrow \Xi(V),$$

qui est surjective.

Soit toujours $\iota_0 = (k', k'') \in \mathcal{I}_0(V)$. On note $\mathcal{R}(\iota_0)$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de $W(\iota_0)$ et $\mathcal{R}(\iota_0)^\phi$ le sous-ensemble des classes fixées par le Frobenius $\phi$. Pour $\rho \in \mathcal{R}(\iota_0)^\phi$, on définit comme en VIII.11 un opérateur $\rho(w_\phi)$ agissant dans l'espace $\mathcal{V}(\rho)$ de $\rho$.

Soit $L$ un réseau presque autodual de $V$. On affectera d'un indice $\ell'$, resp. $\ell''$, les objets définis aux chapitres II et VIII relatifs à l'espace $\ell'$, resp. $\ell''$, quand $\ell'$, resp. $\ell''$ ne figure pas déjà dans la notation. Par exemple, pour $k \in \mathcal{I}_0(\ell')$, on notera $\boldsymbol{M}_{\ell'}(k)$, $\boldsymbol{T}_{\ell'}(k)$ et $W_{\ell'}(k)$ les groupes définis en II.3. Supposons $k' \in \mathcal{I}_0(\ell')$, $k'' \in \mathcal{I}_0(\ell'')$. Quitte à conjuguer $L$ par un élément de $G$, on peut supposer :

- $L = L \cap V_0 \oplus L \cap V_1$ ;
- $L \cap V_0 = L_0$ ;
- le plus grand sous-groupe compact de $T(\iota_0)$ stabilise $L \cap V_1$.

Le tore $\boldsymbol{T}(\iota_0)$ a une structure naturelle sur $\mathfrak{o}_F$. Sous les hypothèses ci-dessus, $\boldsymbol{T}(\iota_0) \underset{\mathfrak{o}_F}{\times} \mathbb{F}_q$ se plonge naturellement dans $\boldsymbol{G}(L)$. Quitte à effectuer une conjugaison par un élément de $K(L)$, on peut supposer que son image est $\boldsymbol{T}_{\ell'}(k') \times \boldsymbol{T}_{\ell''}(k'')$.

Notons $N$ le sous-groupe des éléments de $N_{\boldsymbol{G}(F^{nr})}(\boldsymbol{M}(\iota_0; F^{nr}))$ qui conservent le réseau $L \underset{\mathfrak{o}_F}{\times} \mathfrak{o}_{F^{nr}}$. Ce groupe se réduit naturellement en un groupe $\overline{N}$ qui contient

$$N_{\boldsymbol{G}(L)}(\boldsymbol{M}_{\ell'}(k') \times \boldsymbol{M}_{\ell''}(k'')).$$

Posons

$$W^L(\iota_0) = \overline{N}/(\boldsymbol{M}_{\ell'}(k') \times \boldsymbol{M}_{\ell''}(k'')),$$
$$W_L(\iota_0) = W_{\ell'}(k') \times W_{\ell''}(k'').$$

Alors $W_L(\iota_0)$ est un sous-groupe de $W^L(\iota_0)$. On a deux applications naturelles :

$$N \longrightarrow W^L(\iota_0), \quad N \longrightarrow W(\iota_0).$$

Elles ont même noyau et la première est surjective. On en déduit une suite d'injections :

$$W_L(\iota_0) \hookrightarrow W^L(\iota_0) \hookrightarrow W(\iota_0).$$

Elles sont équivariantes pour l'action des Frobenius. À conjugaison près par un élément de $W(\iota_0)$, elles ne dépendent pas des conjugaisons effectuées dans la construction.

Décrivons plus explicitement ces groupes. Posons $n = n(\iota_0)$,

$$n' = \begin{cases} d(\ell') & \text{si } (V, q_V) \text{ est unitaire}, \\ (d(\ell') - k'(k'+1))/2, & \text{si } (V, q_V) \text{ est symplectique}, \\ (d(\ell') - k'^2)/2, & \text{si } (V, q_V) \text{ est orthogonal}, \end{cases}$$

et définissons de même $n''$. Alors :

• si $(V, q_V)$ est unitaire, $W_L(\iota_0) = W^L(\iota_0) \simeq W(A_{n'-1}) \times W(A_{n''-1}) \subset W(A_{n-1}) \simeq W(\iota_0)$ ;

• si $(V, q_V)$ est symplectique ou si $(V, q_V)$ est orthogonal et $k'k'' \neq 0$,

$$W_L(\iota_0) = W^L(\iota_0) \simeq W(C_{n'}) \times W(C_{n''}) \subset W(C_n) \simeq W(\iota_0);$$

• si $(V, q_V)$ est orthogonal, $k' \neq 0$, $k'' = 0$,

$$W_L(\iota_0) \simeq W(C_{n'}) \times W(D_{n''}) \subset W^L(\iota_0) \simeq W(C_{n'}) \times W(C_{n''}) \subset W(C_n) \simeq W(\iota_0);$$

• si $(V, q_V)$ est orthogonal, $k' = 0$, $k'' \neq 0$,

$$W_L(\iota_0) \simeq W(D_{n'}) \times W(C_{n''}) \subset W^L(\iota_0) \simeq W(C_{n'}) \times W(C_{n''}) \subset W(C_n) \simeq W(\iota_0);$$

• si $(V, q_V)$ est orthogonal et $\iota_0 = (0, 0)$,

$$\begin{aligned} W_L(\iota_0) \simeq W(D_{n'}) \times W(D_{n''}) &\subset W^L(\iota_0) \\ &= W(D_n) \cap (W(C_{n'}) \times W(C_{n''})) \subset W(D_n) = W(\iota_0). \end{aligned}$$

On voit que $W_L(\iota_0) = W^L(\iota_0)$ sauf si $(V, q_V)$ est orthogonal, $k'k'' = 0$ et $d(\ell')d(\ell'') \neq 0$. Dans ce cas $W_L(\iota_0)$ est un sous-groupe d'indice 2 de $W^L(\iota_0)$.

On pose :

$$\mathcal{R}_L(\iota_0) = \mathcal{R}_{\ell'}(k') \times \mathcal{R}_{\ell''}(k''), \quad \mathcal{R}_L(\iota_0)^{\phi} = \mathcal{R}_{\ell'}(k')^{\phi} \times \mathcal{R}_{\ell''}(k'')^{\phi}$$

$$\mathcal{I}_L(\iota_0) = \mathcal{I}_{\ell'}(k') \times \mathcal{I}_{\ell''}(k''), \quad \mathcal{I}_L(\iota_0)^{\phi} = \mathcal{I}_{\ell'}(k')^{\phi} \times \mathcal{I}_{\ell''}(k'')^{\phi},$$

*cf.* VIII.6 et VIII.11 pour les définitions.

**IX.7.** On a défini en IV.12 les ensembles $\mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V)$ et $\Xi^{\mathrm{st}}(V)$. On a l'égalité :

$$\Xi^{\mathrm{st}}(V) = \Lambda_W\Big(\bigsqcup_{\iota_0 \in \mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V)} W(\iota_0)\Big).$$

Soit $\iota_0 = (k', k'') \in \mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V)$. On pose

$$\eta(\iota_0) = \begin{cases} 2, & \text{si } (V, q_V) \text{ est orthogonal et } k'k'' \neq 0, \\ 1, & \text{sinon}. \end{cases}$$

On définit un caractère $s$ de $W(\iota_0)$. Si $(V, q_V)$ n'est pas symplectique, $s = 1$. Si $(V, q_V)$ est symplectique, on a identifié $W(\iota_0)$ à $W(C_{n(\iota_0)})$ dans le paragraphe précédent et on pose $s = \mathrm{sgn}_{CD}^{k'}$.

Pour $w \in W(\iota_0)$, posons

$$\phi_w^{st,\mathcal{H}} = s(w)\eta(\iota_0)^{-1} q^{-\delta(\iota_0)/2} \phi^{\mathcal{H}}_{\Lambda_W(w),1}$$

*cf.* IV.9 pour la définition du dernier terme.

***Lemme***. — *Soient $\iota_0 = (k', k'') \in \mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V)$, $w \in W(\iota_0)$ et $\check{N} = (L, N', N'') \in \check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$.*

(i) *Si $k' \notin \mathcal{I}_0(\ell')$ ou $k'' \notin \mathcal{I}_0(\ell'')$, on a $\phi_w^{st,\mathcal{H}}(h_{\check{N}}) = 0$.*

(ii) *Supposons $k' \in \mathcal{I}_0(\ell')$, et $k'' \in \mathcal{I}_0(\ell'')$. Posons*

$$c = d(\check{N}) + \delta(\iota_0)/2 - n(\iota_0)/2 + \dim(\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{g}(L)}(\overline{Y}_{\check{N}}))/2.$$

*Alors on a l'égalité :*

$$\phi_w^{st,\mathcal{H}}(h_{\check{N}}) = q^c |Z_\phi(w)| |W_L(\iota_0)|^{-1} \sum_{(w',w'') \in W_L(\iota_0) \cap \mathcal{O}_\phi(w)} s(w')s(w'')(Q^{\natural}_{w'} \otimes Q^{\natural}_{w''})(\overline{Y}_{\check{N}}).$$

*Démonstration*. — Pour $\theta = (k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')$ ou $(k', k'', \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'', \varepsilon)$ appartenant à $\Theta(V)$, posons

$$[\theta]^1 = [\boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'']$$

*cf.* III.4. Posons $\xi = \Lambda_W(w)$. Avec les notations de IV.8, on a l'égalité

$$\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,1} = \sum_{\theta \in \Theta(V,\xi)} S(\theta, 1)\phi^{\mathcal{H}}_\theta$$

et, d'après le lemme IV.8, $S(\theta,1)=[\theta]^1$ pour tout $\theta\in\Theta(V,\xi)$. Grâce à la proposition IX.5, on en déduit l'égalité :

$$(1)\qquad \phi_w^{st,\mathcal{H}}(h_{\check N})=q^c\sum_{\theta\in\Theta(V,\xi)}\ \sum_{(\theta',\theta'')\in\Theta(\theta,L)} s(w)\eta(\iota_0)^{-1}[\theta]^1\eta(\theta',\theta'')[\theta',\theta'']^0 (Q^\natural_{\theta'}\otimes Q^\natural_{\theta''})(\overline{Y}_{\check N}).$$

Si $k'\notin\mathcal{I}_0(\ell')$ ou $k''\notin\mathcal{I}_0(\ell'')$, $\Theta(\theta,L)$ est vide pour tout $\theta\in\Theta(V,\xi)$. D'où (i). Supposons $k'\in\mathcal{I}_0(\ell')$, $k''\in\mathcal{I}_0(\ell'')$. Posons simplement $W'=W_{\ell'}(k')$, $W''=W_{\ell''}(k'')$ et définissons comme en II.3 des applications

$$\Lambda':W'\longrightarrow\Theta(\ell'),\quad \Lambda'':W''\longrightarrow\Theta(\ell'').$$

Les propriétés suivantes résultent des définitions :
- $\bigcup_{\theta\in\Theta(V,\xi)}\Theta(\theta,L)=(\Lambda'\times\Lambda'')[(W'\times W'')\cap\mathcal{O}_\phi(w)]$ ;
- la réunion figurant au membre de gauche ci-dessus est disjointe.

Pour $(w',w'')\in(W'\times W'')\cap\mathcal{O}_\phi(w)$, posons

$$c(w',w'')=|\mathcal{O}_{W',\phi}(w')|^{-1}|\mathcal{O}_{W'',\phi}(w'')|^{-1}\eta(\iota_0)^{-1}\eta(\theta',\theta'')[\theta]^1[\theta',\theta'']^0,$$

où $\theta'=\Lambda'(w')$, $\theta''=\Lambda''(w'')$ et $\theta$ est l'élément de $\Theta(V,\xi)$ tel que $(\theta',\theta'')\in\Theta(\theta,L)$. Remarquons que $s(w)=s(w')s(w'')$. L'égalité (1) devient :

$$(2)\quad \phi_w^{st,\mathcal{H}}(h_{\check N})=q^c\sum_{(w',w'')\in(W'\times W'')\cap\mathcal{O}_\phi(w)} c(w',w'')s(w')s(w'')(Q^\natural_{w'}\times Q^\natural_{w''})(\overline{Y}_{\check N}).$$

Fixons $(w',w'')\in(W'\times W'')\cap\mathcal{O}_\phi(w)$. Le cardinal $|\mathcal{O}_{W',\phi}(w')|$ est calculé par l'égalité IX.5 (5) (pour $\mathcal{W}=\mathcal{O}_{W',\phi}(w')$ et $\boldsymbol{T}'=\boldsymbol{T}^{w'}$) et le lemme III.9. *Idem* pour $|\mathcal{O}_{W'',\phi}(w'')|$ et $|\mathcal{O}_\phi(w)|$. Un calcul cas par cas montre que

$$c(w',w'')=|W(\iota_0)||W'|^{-1}|W''|^{-1}|\mathcal{O}_\phi(w)|^{-1}=|Z_\phi(w)||W_L(\iota_0)|^{-1}.$$

L'égalité (2) devient celle de l'énoncé. □

**IX.8.** Soient $\iota_0=(k',k'')\in\mathcal{I}_0^{\rm st}(V)$ et $\rho\in\mathcal{R}(\iota_0)^\phi$, *cf.* IX.6. On pose :

$$\phi_\rho^{st,\mathcal{H}}=|W(\iota_0)|^{-1}\sum_{w\in W(\iota_0)}\operatorname{trace}\circ\rho(w_\phi w)\,\phi_w^{st,\mathcal{H}}.$$

Soit $L$ un réseau presque autodual de $V$. Supposons $k'\in\mathcal{I}_0(\ell')$, $k''\in\mathcal{I}_0(\ell'')$. Soient $(e',e'')\in\mathcal{R}_L(\iota_0)^\phi$.

Si $(V,q_V)$ n'est pas orthogonal pair non déployé ou si $\iota_0\neq(0,0)$, on pose

$$m(\rho;\rho',\rho'')=\left\langle \operatorname{res}^{W(\iota_0)}_{W_L(\iota_0)}(\rho),\rho'\otimes\rho''\right\rangle_{W_L(\iota_0)}.$$

Supposons $(V,q_V)$ orthogonal pair non déployé et $\iota_0=(0,0)$. Alors

$$W(\iota_0)\simeq W(D_{d/2}),\ \ W_{\ell'}(0)\simeq W(D_{d(\ell')/2}),\ \ W_{\ell''}(0)\simeq W(D_{d(\ell'')/2}).$$

Remarquons que $d(\ell') \neq 0$ puisque $q_V$ est non déployée et $V$ admet un réseau autodual. On a introduit en VIII.4 les groupes $W(\iota_0)^\#$ et $W_{\ell'}(0)^\#$ et les prolongements $\rho^\#$ resp. $\rho'^\#$ et $\rho'^b$, de $\rho$ à $W(\iota_0)^\#$, resp. de $\rho'$ à $W_{\ell'}(0)^\#$. On a une inclusion naturelle :

$$W_{\ell'}(0)^\# \times W_{\ell''}(0) \subset W(\iota_0)^\#.$$

On pose

$$m(\rho;\rho',\rho'') = \left\langle \operatorname{res}^{W(\iota_0)^\#}_{W_{\ell'}(0)^\# \times W_{\ell''}(0)}(\rho),\ \ (\rho'^\# - \rho'^b) \otimes \rho'' \right\rangle_{W_{\ell'}(0)^\# \times W_{\ell''}(0)}$$

***Lemme***. — *Soient $\iota_0 = (k', k'') \in \mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V)$, $\rho \in \mathcal{R}(\iota_0)^\phi$ et $\check{N} = (L, N', N'') \in \check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$.*

(i) *Si $k' \notin \mathcal{I}_0(\ell')$ ou $k'' \notin \mathcal{I}_0(\ell'')$, alors $\phi_\rho^{st,\mathcal{H}}(h_{\check{N}}) = 0$.*

(ii) *Supposons $k' \in \mathcal{I}_0(\ell')$ et $k'' \in \mathcal{I}_0(\ell'')$. Définissons $c$ comme dans l'énoncé du lemme IX.7. On a l'égalité*

$$\phi_\rho^{st,\mathcal{H}}(h_{\check{N}}) = q^c \sum_{(\iota',\iota'') \in \mathcal{I}_L(\iota_0)^\phi} m(\rho;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''})\, q^{-b(\iota')-b(\iota'')} (\chi^\natural_{\iota'} \otimes \chi^\natural_{\iota''})(\overline{Y}_{\check{N}}).$$

*Démonstration*. — Le (i) résulte du lemme IX.7 (i). Sous les hypothèses de (ii), le (ii) du même lemme implique l'égalité :

$$\phi_\rho^{st,\mathcal{H}}(h_{\check{N}}) = q^c |W_L(\iota_0)|^{-1} \sum_{(w',w'') \in W_L(\iota_0)} \operatorname{trace} \circ \rho(w_\phi w' w'') s(w') s(w'') (Q^\natural_{w'} \otimes Q^\natural_{w''})(\overline{Y}_{\check{N}}).$$

Supposons que le Frobenius agisse trivialement sur $W(\iota_0)$. Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{res}^{W(\iota_0)}_{W_L(\iota_0)} &= \bigoplus_{(\rho',\rho'') \in \mathcal{R}_L(\iota_0)^\phi} m(\rho;\rho',\rho'')\, \rho' \otimes \rho'', \\ &= \bigoplus_{(\iota',\iota'') \in \mathcal{I}_L(\iota_0)^\phi} m(\rho;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''})\, \rho_{\iota'} \otimes \rho_{\iota''}. \end{aligned}$$

D'où l'égalité :

$$\begin{aligned} \phi_\rho^{st,\mathcal{H}}(h_{\check{N}}) = q^c |W_L(\iota_0)|^{-1} &\sum_{(\iota',\iota'') \in \mathcal{I}_L(\iota_0)^\phi} m(\rho;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''}) \sum_{(w',w'') \in W_L(\iota_0)} \\ &\operatorname{trace} \circ \rho_{\iota'}(w') \operatorname{trace} \circ \rho_{\iota''}(w'') s(w') s(w'') (Q^\natural_{w'} \otimes Q^\natural_{w''})(\overline{Y}_{\check{N}}). \end{aligned}$$

Il reste à utiliser l'égalité VIII.13 (3) pour obtenir la formule de l'énoncé.

Supposons $(V, q_V)$ unitaire. Notons $\mathcal{V}(\rho)$ un espace dans lequel $\rho$ se réalise. Le groupe $W_L(\iota_0)$ agit dans $\mathcal{V}(\rho)$ par le plongement $W_L(\iota_0) \hookrightarrow W(\iota_0)$. Pour $(\rho', \rho'') \in \mathcal{R}_L(\iota_0)$, notons $\mathcal{V}(\rho;\rho',\rho'')$ la composante isotypique de $\mathcal{V}(\rho)$ de type $\rho' \otimes \rho''$. On a l'égalité

$$\mathcal{V}(\rho) = \bigoplus_{(\rho',\rho'') \in \mathcal{R}_L(\iota_0)} \mathcal{V}(\rho;\rho',\rho'').$$

Pour $(\rho', \rho'') \in \mathcal{R}_L(\iota_0)$, l'opérateur $\rho(w_\phi)$ permute les composantes $\mathcal{V}(\rho;\rho',\rho'')$ et $\mathcal{V}(\rho;\phi(\rho') \otimes \phi(\rho''))$. Si $(\rho', \rho'') \notin \mathcal{R}_L(\iota_0)^\phi$, la trace de $\rho(w_\phi w' w'')$ dans

$$\mathcal{V}(\rho;\rho',\rho'') \oplus \mathcal{V}(\rho;\phi(\rho') \otimes \phi(\rho''))$$

est nulle pour tout $(w',w'')\in W_L(\iota_0)$. Supposons $(\rho',\rho'')\in\mathcal{R}_L(\iota_0)^\phi$. On se rappelle que $w_\phi$ est l'élément de plus grande longueur de $W(\iota_0)$. Introduisons les éléments analogues $w'_\phi$, resp. $w''_\phi$ de $W_{\ell'}(0)$, resp. $W_{\ell''}(0)$. D'après la définition du plongement $W_L(\iota_0)\hookrightarrow W(\iota_0)$, on a l'égalité $w_\phi=w'_\phi w''_\phi$. Alors, pour $(w',w'')\in W_L(\iota_0)$, la trace de $\rho(w_\phi w'w'')$ dans $\mathcal{V}(\rho;\rho',\rho'')$ est

$$m(\rho;\rho',\rho'')\,\mathrm{trace}\circ\rho'(w'_\phi w')\,\mathrm{trace}\circ\rho''(w''_\phi w'').$$

On poursuit la démonstration comme ci-dessus.

Supposons enfin $(V,q_V)$ orthogonal pair non déployé et $\iota_0=(0,0)$. Posons

$$W=W(\iota_0),\ \ W^\#=W(\iota_0)^\#,\ \ W'=W_{\ell'}(0),\ \ W'^\#=W_{\ell'}(0)^\#,\ \ W''=W_{\ell''}(0).$$

On a $W^\#=W(C_{d/2})$, $W'^\#=W(C_{d(\ell')/2})$. Introduisons les éléments $w_{CD}$, resp $w'_{CD}$, de $W^\#$, resp. W$'^\#$, *cf.* II.3. Pour $w\in W$, on a par définition :

$$\rho(w_\phi w)=\rho^\#(w_{CD}w).$$

Puisque $V$ possède un réseau autodual, $(\ell'',q_{\ell''})$ est déployé et le Frobenius agit trivialement sur $W''$. D'après la définition du plongement $W'\times W''\hookrightarrow W$, son prolongement naturel

$$W'^\#\times W''\hookrightarrow W^\#$$

envoie $(w'_{CD},1)$ sur $w_{CD}$. On a l'égalité :

$$\mathrm{res}^{W^\#}_{W'^\#\times W''}(\rho^\#)=\bigoplus_{(\widetilde{\rho}',\rho'')\in\mathcal{R}(W'^\#)\times\mathcal{R}(W'')}\big\langle\,\mathrm{res}^{W^\#}_{W'^\#\times W''}(\rho^\#),\,\widetilde{\rho}'\otimes\rho''\big\rangle_{W'^\#\times W''}\,\widetilde{\rho}'\otimes\rho''.$$

Grâce aux propriétés ci-dessus, pour $(w',w'')\in W'\times W''$, on en déduit l'égalité :

$$(1)\ \mathrm{trace}\circ\rho(w_\phi w'w'')=\bigoplus_{(\widetilde{\rho}',\rho'')\in\mathcal{R}(W'^\#)\times\mathcal{R}(W'')}\big\langle\,\mathrm{res}^{W^\#}_{W'^\#\times W''}(\rho^\#),\,\widetilde{\rho}'\otimes\rho''\big\rangle_{W'^\#\times W''}$$
$$\mathrm{trace}\circ\widetilde{\rho}'(w'_{CD}w')\,\mathrm{trace}\circ\rho''(w'').$$

Soient $\widetilde{\rho}'\in\mathcal{R}(W'^\#)$ et $w'\in W$. Si $\mathrm{res}^{W'^\#}_{W'}(\widetilde{\rho}')$ est réductible, $\widetilde{\rho}'(w'_{CD}w')$ échange les deux composantes de cette restriction et $\mathrm{trace}\circ\widetilde{\rho}'(w'_{CD}w')=0$. L'ensemble des $\widetilde{\rho}'\in\mathcal{R}(W'^\#)$ telles que $\mathrm{res}^{W'^\#}_{W'}(\widetilde{\rho}')$ soit irréductible est exactement l'union disjointe :

$$\{\rho'^\#;\rho'\in\mathcal{R}(W')^\phi\}\cup\{\rho'^b;\rho'\in\mathcal{R}(W')^\phi\}.$$

Soient $\rho'\in\mathcal{R}(W')^\phi$ et $w'\in W'$. Alors

$$\mathrm{trace}\circ\rho'^\#(w'_{CD}w')=-\,\mathrm{trace}\circ\rho'^b(w'_{CD}w')=\mathrm{trace}\circ\rho'(w_\phi w'),$$

ce dernier terme étant défini comme en VIII.11. L'égalité (1) devient :

$$\mathrm{trace}\circ\rho(w_\phi w'w'')=\sum_{(\rho',\rho'')\in\mathcal{R}(W')^\phi\times\mathcal{R}(W'')}m(\rho;\rho',\rho'')\,\mathrm{trace}\circ\rho'(w_\phi w')\,\mathrm{trace}\circ\rho''(w'').$$

On poursuit la démonstration comme précédemment. □

**IX.9.** Supposons $(V, q_V)$ unitaire. Notons $\iota_0 = (0,0)$ l'unique élément de $\mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V)$. Posons

$$\mathcal{R}^{\mathrm{st}}(V) = \mathcal{R}(\iota_0)^{\phi}, \quad \mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V) = \mathcal{P}(d).$$

On note $\iota \mapsto \rho_\iota$ la bijection de $\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$ sur $\mathcal{R}^{\mathrm{st}}(V)$ qui, à une partition, associe la représentation qu'elle paramétrise. Pour $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$, on définit une fonction :

$$\gamma_{\boldsymbol{\lambda}} : \mathrm{Nil}(V) \longrightarrow \{\pm 1\}$$

de la façon suivante. Elle est à support dans les éléments de la forme $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$. Pour un tel élément et pour un entier $i \geqslant 1$, posons

$$q_{\geqslant i} = \bigoplus_{\ell \geqslant i} q_\ell\,,$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, & \text{si } q_{\geqslant i} \text{ est quasi-déployée,} \\ -1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}/G$ l'orbite paramétrisée par $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$. On pose alors

$$\gamma_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) = (-1)^{(d^2 - d - \dim(\mathcal{O}))/2} \prod_{i \geqslant i} \gamma_i\,.$$

(1) ***Remarque***. — Pour tout couple $(V', q')$ unitaire, notons $d'(q')$, $d''(q'')$ les éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définis en I.3. Alors $q'$ est quasi-déployée si et seulement si $(d'(q'), d''(q'')) \neq (1,1)$.

***Proposition***. — *Soient $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$ et $\check{N} \in \check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$. Posons $\rho = \rho_{\boldsymbol{\lambda}}$ et $\check{\Lambda}(\check{N}) = (\boldsymbol{\mu}, (q_i))$. Alors :*

(i) *si $\boldsymbol{\mu} \not\leqslant \boldsymbol{\lambda}$, $\phi_\rho^{st,\mathcal{H}}(h_{\check{N}}) = 0$ ;*

(ii) *si $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda}$, $\phi_\rho^{st,\mathcal{H}}(h_{\check{N}}) = q^{d(\check{N})} \gamma_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$.*

*Démonstration.* — Posons $\check{N} = (L, N', N'')$, $\boldsymbol{\mu}' = \Lambda(N')$, $\boldsymbol{\mu}'' = \Lambda(N'')$. On a $\boldsymbol{\mu}' \cup \boldsymbol{\mu}'' = \boldsymbol{\mu}$. Soient $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L(\iota_0)$. Notons $\boldsymbol{\lambda}' \in \mathcal{P}(d(\ell'))$, resp. $\boldsymbol{\lambda}'' \in \mathcal{P}(d(\ell''))$, les partitions qui paramétrisent $\rho_{\iota'}$, resp. $\rho_{\iota''}$. Utilisons les notations du paragraphe précédent. Grâce à VIII.2 (5), on a l'implication :

$$m(\rho; \rho_{\iota'}, \rho_{\iota''}) \neq 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}'' \leqslant \boldsymbol{\lambda}.$$

Grâce à VIII.13 (2), on a l'implication :

$$(\chi_{\iota'}^{\natural} \otimes \chi_{\iota''}^{\natural})(\overline{Y}_{\check{N}}) \neq 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\mu}' \leqslant \boldsymbol{\lambda}', \;\; \boldsymbol{\mu}'' \leqslant \boldsymbol{\lambda}''.$$

Dans l'égalité du lemme IX.8 (ii), on peut se limiter à sommer sur les $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L(\iota_0)$ tels que les relations de droite des implications ci-dessus soient vérifiées. Ces deux relations entraînent $\boldsymbol{\mu} \leqslant \boldsymbol{\lambda}$. D'où le (i) de l'énoncé.

Supposons $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda}$. L'unique solution des relations précédentes est

$$(\boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\lambda}'') = (\boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'').$$

Si $(\iota', \iota'')$ est l'élément de $\mathcal{I}_L(\iota_0)$ qu'elle paramétrise, on a

$$m(\rho; \rho_{\iota'}, \rho_{\iota''}) = 1$$

d'après VIII.2 (5) et

$$(\chi^{\natural}_{\iota'} \otimes \chi^{\natural}_{\iota''})(\overline{Y}_{\check{N}}) = \varepsilon(\iota')\varepsilon(\iota'')$$

d'après VIII.13 (2). Alors, d'après le lemme IX.8 (ii), on a l'égalité :

$$\phi^{st,\mathcal{H}}_{\rho}(h_{\check{N}}) = q^{c-b(\iota')-b(\iota'')}\varepsilon(\iota')\varepsilon(\iota'').$$

En posant

$$D = \dim(\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{g}(L)}(\overline{Y}_{\check{N}})) - d,$$

on calcule :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\iota')\varepsilon(\iota'') &= (-1)^{D/2}, \\ b(\iota') + b(\iota'') &= D/2, \\ C &= d(\check{N}) + D/2. \end{aligned}$$

D'où l'égalité

$$\phi^{st,\mathcal{H}}_{\rho}(h_{\check{N}}) = (-1)^{D/2} q^{d(\check{N})}.$$

Il reste à calculer $D$ modulo $4\mathbb{Z}$.

Rappelons que $\overline{Y}_{\check{N}} = (Y', Y'')$ où $Y'$, resp. $Y''$, est un élément de $g_{\mathrm{nil}}(\ell')$, resp. $g_{\mathrm{nil}}(\ell'')$, paramétrisé par $\boldsymbol{\mu}'$, resp. $\boldsymbol{\mu}''$. Passons à la clôture algébrique $\overline{F}$. Alors la classe de conjugaison de $Y'$ par $\boldsymbol{G}(\ell')$ est l'orbite de Richardson d'un sous-groupe parabolique de $\boldsymbol{G}(\ell')$ associé à la partition transposée ${}^t\boldsymbol{\mu}'$, *i.e.* de sous-groupe de Lévi isomorphe à

$$\prod_{j\geqslant 1} \boldsymbol{GL}(({}^t\boldsymbol{\mu}')_j).$$

Le centralisateur de $Y'$ dans $\boldsymbol{g}(\ell')$ a même dimension que ce groupe de Lévi.

Pour tout $j \geqslant 1$, on calcule :

$$({}^t\boldsymbol{\mu}')_j = c_{\geqslant j}(\boldsymbol{\mu}')$$

*cf.* I.5 pour la définition de ce terme. D'où l'égalité :

(2) $$\dim(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{g}(\ell')}(Y')) = \sum_{j\geqslant 1} c_{\geqslant j}(\boldsymbol{\mu}')^2.$$

On calcule de même $\dim(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{g}(\ell'')}(Y''))$. Alors :

$$D = -d + \sum_{j\geqslant 1}(c_{\geqslant j}(\boldsymbol{\mu}')^2 + c_{\geqslant j}(\boldsymbol{\mu}'')^2).$$

Puisque $\boldsymbol{\mu}' \cup \boldsymbol{\mu}'' = \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda}$, on a

$$c_{\geqslant j}(\boldsymbol{\mu}') + c_{\geqslant j}(\boldsymbol{\mu}'') = c_{\geqslant j}(\boldsymbol{\lambda})$$

pour tout $j \geqslant 1$. On en déduit l'égalité

(3) $$D = -d + \left(\sum_{j\geqslant 1} c_{\geqslant j}(\boldsymbol{\lambda})^2\right) - 2 \sum_{j\geqslant 1} c_{\geqslant j}(\boldsymbol{\mu}')c_{\geqslant j}(\boldsymbol{\mu}'').$$

Grâce à une égalité analogue à (2), le deuxième terme ci-dessus est la dimension du centralisateur dans $\boldsymbol{g}$ d'un élément de l'orbite $\mathcal{O}$. Il est donc égal à $\dim(\boldsymbol{g}) - \dim(\mathcal{O})$, ou encore à $d^2 - \dim(\mathcal{O})$.

Pour tout entier $j \geqslant 1$, on a les congruences :

$$c_j(\boldsymbol{\mu}') \equiv d'(q_j) \bmod 2\mathbb{Z}, \quad c_j(\boldsymbol{\mu}'') \equiv d''(q_j) \bmod 2\mathbb{Z},$$

d'où

$$c_{\geqslant j}(\boldsymbol{\mu}')c_{\geqslant j}(\boldsymbol{\mu}'') \equiv d'(q_{\geqslant j})d''(q_{\geqslant j}) \bmod 2\mathbb{Z}.$$

Grâce à la remarque (1), on obtient :

$$c_{\geqslant j}(\boldsymbol{\mu}')c_{\geqslant j}(\boldsymbol{\mu}'') \equiv \begin{cases} 0 \bmod 2\mathbb{Z}, & \text{si } q_{\geqslant j} \text{ est quasi-déployée,} \\ 1 \bmod 2\mathbb{Z}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On déduit alors de (3) la congruence :

$$D \equiv d^2 - d - \dim(\mathcal{O}) + 2|\{j \geqslant 1;\, q_{\geqslant j} \text{ n'est pas quasi-déployée}\}| \bmod 4\mathbb{Z},$$

puis l'égalité :

$$(-1)^{D/2} = \gamma_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)).$$

Cela achève la démonstration. □

**IX.10.** Supposons $(V, q_V)$ symplectique ou orthogonal. Notons $\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$ l'ensemble des données $(\boldsymbol{\lambda}, \tau, \delta)$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon, \tau, \delta)$ telles que :

- $\boldsymbol{\lambda}$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon) \in \overline{\mathrm{Nil}}(V)$ ;

(*cf.* VIII.6 ; on y a dit que les définitions restaient valables sur le corps de base $\overline{F}$) ;

- $\boldsymbol{\lambda}$ est spéciale ;
- $(\tau, \delta) \in \mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$ (*cf.* VIII.17, VIII.19 et VIII.21) ;
- si $d$ est divisible par 4 et $(V, q_V)$ est orthogonal et non déployé, $\boldsymbol{\lambda}$ possède au moins un terme impair.

Posons

$$\mathcal{R}^{\mathrm{st}}(V) = \bigsqcup_{\iota_0 \in \mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V)} \mathcal{R}(\iota_0)^{\phi}.$$

On définit une application

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\mathrm{st}}(V) &\longrightarrow \mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V) \\ \rho &\longmapsto \iota_\rho \end{aligned}$$

de la façon suivante. Soient $\iota_0 = (k', k'') \in \mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V)$ et $\rho \in \mathcal{R}(\iota_0)^{\phi}$. Posons

$$k = \sup(k', k'').$$

On a $W(\iota_0) = W(C_{n(\iota_0)})$ sauf si $(V, q_V)$ est orthogonal pair et $\iota_0 = (0,0)$, auquel cas $W(\iota_0) = W(D_{d/2})$. Par l'application $\sigma_{C_{n(\iota_0)}}$, resp. $\sigma_{D_{d/2}}$ de VIII.15, on associe à $\rho$ un élément $(X_1, Y_1) \in \mathcal{S}_{n(\iota_0),1}$, resp. $\mathcal{S}_{d/2,0}$. Si $(V, q_V)$ est orthogonal pair et $\iota_0 = (0,0)$, on pose $(X,Y)=(X_1,Y_1)$. Sinon, par l'application VIII.15 (1), on associe à $(X_1,Y_1)$ un élément

$$(X,Y)\in\begin{cases}\mathcal{S}_{d/2,2k+1}, & \text{si } (V,q_V) \text{ est symplectique},\\ \mathcal{S}_{(d-1)/2,2k-1}, & \text{si } (V,q_V) \text{ est orthogonal impair},\\ \mathcal{S}_{d/2,2k}, & \text{si } (V,q_V) \text{ est orthogonal pair}.\end{cases}$$

En tout cas, $(X,Y)\in\mathcal{S}_{d/2}$, resp. $\mathcal{S}_{(d-1)/2}$, $\mathcal{S}^{+}_{d/2}$, si $(V,q_V)$ est symplectique, resp. orthogonal impair, resp. orthogonal pair. Notons $(X^{sp},Y^{sp})$ l'unique symbole spécial dans la famille de $(X,Y)$ et $\boldsymbol{\lambda}$ la partition spéciale dans $\mathcal{P}(V)$ associée à ce symbole. Posons $(\tau,\delta)=\mathrm{fam}(X,Y)$, *cf.* VIII.17, VIII.19, VIII.21. Si $\boldsymbol{\lambda}$ n'est pas exceptionnelle, on pose

$$\iota_\rho=(\boldsymbol{\lambda},\tau,\delta).$$

Supposons $\boldsymbol{\lambda}$ exceptionnelle. Alors $(V,q_V)$ est orthogonal pair, $d$ est divisible par 4, $\iota_0=(0,0)$ et il existe une unique partition $\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{P}(d/4)$ et un unique signe $\varepsilon$ tel que $\rho=\boldsymbol{\rho}^{\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$. En identifiant $\varepsilon$ à un élément de $\{\pm1\}$, on pose

$$\iota_\rho=(\boldsymbol{\lambda},\varepsilon,0,0).$$

L'application $\rho\mapsto\iota_\rho$ ainsi définie est bijective. On note $\iota\mapsto\rho_\iota$ la bijection réciproque.

**IX.11.** On conserve les mêmes hypothèses. Soient $\iota_0=(k',k'')\in\mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V)$, $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\in\mathcal{P}_2(n(\iota_0))$, $\iota=(\boldsymbol{\lambda},\tau,\delta)$ ou $(\boldsymbol{\lambda},\varepsilon,\tau,\delta)$ un élément de $\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$. On suppose que $\rho_\iota\in\mathcal{R}(\iota_0)^{\phi}$ et que $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ paramétrise $\rho_\iota$. On a défini en VIII.16, VIII.18 et VIII.21 les ensembles d'intervalles $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ et, si $(V,q_V)$ est symplectique, $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$. Pour unifier les notations, on pose $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ dans le cas orthogonal. Pour toute partition $\boldsymbol{\mu}$ et tout $\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, on pose

$$c_\Delta(\boldsymbol{\mu})=\sum_{i\in\Delta}c_i(\boldsymbol{\mu}),\quad c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\mu})=\sum_{\Delta'\in\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}),\Delta'\geqslant\Delta}c_{\Delta'}(\boldsymbol{\mu}).$$

Soit $L$ un réseau presque autodual de $V$. Si $k'\notin\mathcal{I}_0(\ell')$ ou $k''\notin\mathcal{I}_0(\ell'')$, on pose $\mathcal{P}_L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\mathcal{I}_L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\varnothing$.

Supposons $k'\in\mathcal{I}_0(\ell')$ et $k''\in\mathcal{I}_0(\ell'')$. Posons

$$n'=\begin{cases}(d(\ell')-k'(k'+1))/2, & \text{si } (V,q_V) \text{ est symplectique},\\ (d(\ell')-k'^2)/2, & \text{si } (V,q_V) \text{ est orthogonal},\end{cases}$$

et définissons de même $n''$. On note $\mathcal{P}_L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ l'ensemble des quadruplets de partitions $(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'')$ tels que :

$$(1)\qquad\begin{cases}\bullet\quad S(\boldsymbol{\alpha}')+S(\boldsymbol{\beta}')=n',\quad S(\boldsymbol{\alpha}'')+S(\boldsymbol{\beta}'')=n'';\\ \bullet\quad S(\boldsymbol{\alpha}')+S(\boldsymbol{\alpha}'')=S(\boldsymbol{\alpha}),\ \ S(\boldsymbol{\beta}')+S(\boldsymbol{\beta}'')=S(\boldsymbol{\beta});\\ \bullet\quad \boldsymbol{\alpha}'\cup\boldsymbol{\alpha}''\leqslant\boldsymbol{\alpha},\ \ \boldsymbol{\beta}'\cup\boldsymbol{\beta}''\leqslant\boldsymbol{\beta}.\end{cases}$$

On note $\mathcal{I}_L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ l'ensemble des couples $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_{\ell'}(k')^{\phi}\times\mathcal{I}_{\ell''}(k'')^{\phi}$ tels qu'il existe des couples de partitions $(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')$ paramétrisant $\rho_{\iota'}$ et $(\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'')$ paramétrisant $\rho_{\iota''}$ de sorte que $(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'')\in\mathcal{P}_L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

En tout cas, on note $\mathcal{I}_L^{\max}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ l'ensemble des couples $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}(\ell')^{\phi}\times\mathcal{I}(\ell'')^{\phi}$ tels qu'en posant $\iota'=(\boldsymbol{\lambda}',\boldsymbol{\varepsilon}')$ ou $(\boldsymbol{\lambda}',\varepsilon',\boldsymbol{\varepsilon}')$ et $\iota''=(\boldsymbol{\lambda}'',\boldsymbol{\varepsilon}'')$ ou $(\boldsymbol{\lambda}'',\varepsilon'',\boldsymbol{\varepsilon}'')$, on ait les propriétés suivantes :

• $\boldsymbol{\lambda}'\cup\boldsymbol{\lambda}''=\boldsymbol{\lambda}$ ;

(2) • pour tout $\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, $\delta(\Delta)\equiv c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\lambda}')+d\equiv c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\lambda}'')\bmod 2\mathbb{Z}$ ;

(3) • si $(V,q_V)$ est symplectique, pour tout $\Delta\in\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ et tout $i\in\Delta\cap a(\boldsymbol{\lambda}')$, resp. $i\in\Delta\cap a(\boldsymbol{\lambda}'')$, on a l'égalité $\varepsilon'_i=\tau(\Delta)$, resp. $\varepsilon''_i=\tau(\Delta)$ ;

(4) • si $(V,q_V)$ est orthogonal, il existe des relèvements de $\boldsymbol{\varepsilon}'$, resp. $\boldsymbol{\varepsilon}''$, dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a(\boldsymbol{\lambda}')}$, resp. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a(\boldsymbol{\lambda}'')}$, que l'on note encore $\boldsymbol{\varepsilon}'$, resp. $\boldsymbol{\varepsilon}''$, de sorte que la propriété précédente soit vérifiée.

On démontrera en XI.30 la proposition suivante. Dans cet énoncé, tout élément $\iota'$ de $\mathcal{I}(\ell')$, resp. $\iota''$ de $\mathcal{I}(\ell'')$, est noté sans plus de commentaire $(\boldsymbol{\lambda}',\boldsymbol{\varepsilon}')$ ou $(\boldsymbol{\lambda}',\varepsilon',\boldsymbol{\varepsilon}')$, resp. $(\boldsymbol{\lambda}'',\boldsymbol{\varepsilon}'')$ ou $(\boldsymbol{\lambda}'',\varepsilon'',\boldsymbol{\varepsilon}'')$.

***Proposition***. — *Sous les hypothèses précédentes, les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(i) *Soient* $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$. *Alors* $\boldsymbol{\lambda}'\cup\boldsymbol{\lambda}''\leqslant\boldsymbol{\lambda}$.

(ii) $\mathcal{I}_L^{\max}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ *est l'ensemble des* $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ *tels que* $\boldsymbol{\lambda}'\cup\boldsymbol{\lambda}''=\boldsymbol{\lambda}$.

(iii) *Soient* $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_L^{\max}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ *et* $(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'')\in\mathcal{P}_L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$. *Supposons que* $(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')$ *paramétrise* $\rho_{\iota'}$ *et* $(\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'')$ *paramétrise* $\rho_{\iota''}$. *Alors* $\boldsymbol{\alpha}'\cup\boldsymbol{\alpha}''=\boldsymbol{\alpha}$ *et* $\boldsymbol{\beta}'\cup\boldsymbol{\beta}''=\boldsymbol{\beta}$.

(iv) *Supposons* $(V,q_V)$ *orthogonal pair,* $\iota_0=(0,0)$, $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\beta}$ *et* $\boldsymbol{\alpha}\succ\boldsymbol{\beta}$. *Soient* $(\iota',\iota'')$ *et* $(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'')$ *comme en (iii). Supposons* $a(\boldsymbol{\lambda}')\neq\varnothing$. *Notons* $\Delta'_{\max}$ *le plus grand élément de* $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ *tel que* $a(\boldsymbol{\lambda}')\cap\Delta'_{\max}\neq\varnothing$. *Alors* $\boldsymbol{\alpha}'\succ\boldsymbol{\beta}'$ *si et seulement si* $\tau(\Delta'_{\max})=0$.

**IX.12.** On suppose toujours $(V,q_V)$ symplectique ou orthogonal. Soit $\iota=(\boldsymbol{\lambda},\tau,\delta)$ ou $(\boldsymbol{\lambda},\varepsilon,\tau,\delta)$ un élément de $\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$.

Si $(V,q_V)$ est symplectique ou orthogonal pair, on pose $C(\iota)=1$. Si $(V,q_V)$ est orthogonal impair, soit $D$ l'entier impair tel que

$$\mathrm{fam}^{-1}(\tau,\delta)\in\mathcal{S}_{(d-1)/2,D}$$

*cf.* lemme VIII.19. On pose

$$C(\iota)=\begin{cases}\mathrm{sgn}(-1)^{(D-1)/4}, & \text{si } D\equiv 1\bmod 4\mathbb{Z},\\ \mathrm{sgn}(\eta'(q_V))\,\mathrm{sgn}(-1)^{(D-3)/4}, & \text{si } D\equiv 3\bmod 4\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Si $(q_i)$ est une famille de formes quadratiques indexée par des entiers $\geqslant 1$, on pose

$$q_\Delta=\bigoplus_{i\in\Delta}q_i,\quad q_{\geqslant\Delta}=\bigoplus_{\Delta'\in\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda});\Delta'\geqslant\Delta}q_{\Delta'}$$

pour tout $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$. À toute forme quadratique $q$ définie sur $F$, on associe deux couples $(d'(q), d''(q)) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $(\eta'(q), \eta''(q)) \in \mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times 2}$, *cf.* I.3.

On définit une fonction

$$\gamma_\iota : \mathrm{Nil}(V) \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$$

de la façon suivante. Si $\iota = (\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon, 0, 0)$, $\gamma_\iota$ est la fonction caractéristique du sous-ensemble à un élément $\{(\boldsymbol{\lambda}, \varnothing, \varepsilon)\}$ de $\mathrm{Nil}(V)$. Supposons $\iota = (\boldsymbol{\lambda}, \tau, \delta)$. Alors $\gamma_\iota$ est à support dans les éléments de $\mathrm{Nil}(V)$ de la forme $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$. Pour un tel élément,

$$\gamma_\iota(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) = \begin{cases} 0, \text{ s'il existe } \Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}) \text{ tel que } d''(q_{\geqslant\Delta}) \neq \delta(\Delta); \\ \displaystyle\prod_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \mathrm{sgn}(\eta'(q_\Delta)\eta''(q_\Delta))^{\tau(\Delta)}, \text{ si } d''(q_{\geqslant\Delta}) = \delta(\Delta) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour tout } \Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}). \end{cases}$$

***Proposition.*** — *Soient $\iota = (\boldsymbol{\lambda}, \tau, \delta)$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon, \tau, \delta)$ un élément de $\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$ et $\check{N} \in \check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$. Posons $\rho = \rho_\iota$ et $\check{\Lambda}(\check{N}) = (\boldsymbol{\mu}, (q_i))$ ou $\boldsymbol{\mu}, (q_i), \widetilde{\varepsilon})$. Alors :*

(i) *si $\boldsymbol{\mu} \not\leqslant \boldsymbol{\lambda}$, $\phi_\rho^{st,\mathcal{H}}(h_{\check{N}}) = 0$ ;*
(ii) *si $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda}$, $\phi_\rho^{st,\mathcal{H}}(h_{\check{N}}) = q^{d(\check{N})} C(\iota) \gamma_\iota \circ \check{\Lambda}(\check{N})$.*

*Démonstration.* — Supposons d'abord $(V, q_V)$ symplectique. Notons $\iota_0 = (k, k)$ l'élément de $\mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V)$ tel que $\rho \in \mathcal{R}(\iota_0)^\phi$, $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ l'élément de $\mathcal{P}_2(n(\iota_0))$ qui paramétrise $\rho$ et posons $N' = (\boldsymbol{\mu}', (q_i'))$, $N'' = (\boldsymbol{\mu}'', (q_i''))$.

Supposons $k \in \mathcal{I}_0(\ell')$ et $k \in \mathcal{I}_0(\ell'')$. Considérons l'égalité du lemme IX.8 (ii). Soient $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L(\iota_0)^\phi$ et $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$, resp. $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'')$, des couples de partitions paramétrisant $\rho_{\iota'}$, resp. $\rho_{\iota''}$. Elles vérifient les premières égalités de IX.11 (1). Supposons $m(\rho; \rho_{\iota'}, \rho_{\iota''}) \neq 0$. Alors, grâce à VIII.3 (2), les autres relations de IX.11 (1) sont vérifiées. Donc $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. Posons $\iota' = (\boldsymbol{\lambda}', \varepsilon')$, $\iota'' = (\boldsymbol{\lambda}'', \varepsilon'')$. Supposons $(\chi_{\iota'}^\natural \otimes \chi_{\iota''}^\natural)(\overline{Y}_{\check{N}}) \neq 0$. Alors, d'après VIII.13 (2), on a :

$$\text{(1)} \qquad \boldsymbol{\mu}' \leqslant \boldsymbol{\lambda}', \quad \boldsymbol{\mu}'' \leqslant \boldsymbol{\lambda}''.$$

Dans l'égalité du lemme IX.8 (ii), on peut donc sommer sur les $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ vérifiant (1). Pour un tel élément, on a $\boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}'' \leqslant \boldsymbol{\lambda}$ d'après la proposition IX.11 (i). Puisque $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}' \cup \boldsymbol{\mu}''$, la relation (1) entraîne $\boldsymbol{\mu} \leqslant \boldsymbol{\lambda}$. La première assertion de l'énoncé en résulte.

Supposons $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda}$. Les inégalités ci-dessus ont pour seule solution $(\boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\lambda}'') = (\boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}'')$. Alors $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}''$ et $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L^{\max}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ d'après la proposition IX.11 (ii). On a $m(\rho; \rho_{\iota'}, \rho_{\iota''}) = 1$ d'après le (iii) de cette proposition et VIII.3 (2). Et l'on a l'égalité

$$(\chi_{\iota'}^\natural \otimes \chi_{\iota''}^\natural)(\overline{Y}_{\check{N}}) = (\mathcal{Y}_{\iota'} \otimes \mathcal{Y}_{\iota''})(\overline{Y}_{\check{N}}),$$

d'après VIII.13 (2). Notons $\mathcal{J}$ le sous-ensemble des $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_L^{\max}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ tels que, avec les notations ci-dessus, $\boldsymbol{\lambda}'=\boldsymbol{\mu}'$ et $\boldsymbol{\lambda}''=\boldsymbol{\mu}''$. Alors

$$\phi_\rho^{st,\mathcal{H}}(h_{\check{N}})=q^c\sum_{(\iota',\iota'')\in\mathcal{J}}q^{-b(\iota')-b(\iota'')}(\mathcal{Y}_{\iota'}\otimes\mathcal{Y}_{\iota''})(\overline{Y}_{\check{N}}),\tag{2}$$

$c$ étant défini dans l'énoncé du lemme IX.7.

Ouvrons une parenthèse sur le cas où $k\notin\mathcal{I}_0(\ell')$ ou $k\notin\mathcal{I}_0(\ell'')$. Alors $\phi_\rho^{st,\mathcal{H}}(h_{\check{N}})=0$ d'après le lemme IX.8 (i). La première assertion de l'énoncé est triviale. Si $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\lambda}$, la formule (2) est vraie car $\mathcal{J}\subset\mathcal{I}_L^{\max}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\subset\mathcal{I}_L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\varnothing$.

Reprenons notre calcul en supposant seulement $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\lambda}$. Soit $\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$. Par définition, on a

$$d''(q_{\geqslant\Delta})\equiv c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\mu}'')\bmod 2\mathbb{Z}.\tag{3}$$

D'autre part $c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\lambda})$ est pair par construction des intervalles et, puisque $\boldsymbol{\mu}'\cup\boldsymbol{\mu}''=\boldsymbol{\lambda}$, on a :

$$c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\mu}')\equiv c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\mu}'')\bmod 2\mathbb{Z}.$$

Les deux conditions suivantes sont donc équivalentes :

- $d''(q_{\geqslant\Delta})=\delta(\Delta)$ ;
- $\delta(\Delta)\equiv c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\mu}')\equiv c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\mu}'')\bmod 2\mathbb{Z}$.

S'il existe $\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tel qu'elles ne soient pas vérifiées, $\gamma_\iota\circ\check{\Lambda}(\check{N})=0$ par définition. D'autre part $\mathcal{J}=\varnothing$ d'après IX.11 (2), donc $\phi_\rho^{st,\mathcal{H}}(h_{\check{N}})=0$. L'égalité du (ii) de l'énoncé est vérifiée.

Supposons les conditions ci-dessus vérifiées pour tout $\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$. Alors $\mathcal{J}$ est réduit à un élément : le couple $(\iota',\iota'')=((\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\varepsilon}'),(\boldsymbol{\mu}'',\boldsymbol{\varepsilon}''))$ appartient à $\mathcal{J}$ si et seulement si $\boldsymbol{\varepsilon}'$ et $\boldsymbol{\varepsilon}''$ vérifient IX.11 (3). Pour cet élément, on calcule comme dans le cas unitaire :

$$c-b(\iota')-b(\iota'')=d(\check{N}).\tag{4}$$

Rappelons que $\overline{Y}_{\check{N}}$ est de la forme $(Y',Y'')$ ou $Y'$, resp. $Y''$, est un élément de $\mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}(\ell')$, resp. $\mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}(\ell'')$, dont la classe de conjugaison est paramétrisée par $(\boldsymbol{\mu}',(q_i'))$, resp. $(\boldsymbol{\mu}'',(q_i''))$. On a introduit en VIII.11 un élément $X_{\iota'}$ de $\mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}(\ell')$. Posons $\Lambda(X_{\iota'})=(\boldsymbol{\mu}',(Q_i'))$. Par définition,

$$\mathcal{Y}_{\iota'}(Y')=\prod_{i\in a(\boldsymbol{\mu}')}\operatorname{sgn}(\eta(q_i')\eta(Q_i'))^{\varepsilon_i'}.$$

D'après IX.11 (3) et puisque $\tau(\Delta)=0$ si $\Delta\in\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})-\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, on a aussi :

$$\mathcal{Y}_{\iota'}(Y')=\prod_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}\ \prod_{i\in a(\boldsymbol{\mu}')\cap\Delta}\operatorname{sgn}(\eta(q_i')\eta(Q_i'))^{\tau(\Delta)}.$$

Posons

$$a(\boldsymbol{\mu}')_{\mathrm{imp}}=\{i_1'>\cdots>i_{m'}'\}$$

et formellement $i'_0 = \infty$, $i'_{m'+1} = 0$. Soit $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$. Notons $u$ le plus grand élément de $\{1, \ldots, m'+1\}$ tel que $i'_{u-1} > i$ pour tout $i \in \Delta$ et $v$ le plus petit élément de $\{0, \ldots, m'\}$ tel que $i'_{v+1} < i$ pour tout $i \in \Delta$. On a :

$$a(\boldsymbol{\mu}')_{\text{imp}} \cap \Delta = \{i'_u > \cdots > i'_v\}.$$

Les égalités suivantes résultent des définitions :

$$(5) \qquad \prod_{i \in a(\boldsymbol{\mu}') \cap \Delta} \eta(q'_i) = \begin{cases} (-1)^{(v-u+1)/2} \eta'(q_\Delta), & \text{si } v \equiv u - 1 \bmod 2\mathbb{Z}, \\ (-1)^{(v-u)/2} \eta'(q_\Delta), & \text{si } v \equiv u \bmod 2\mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\prod_{i \in a(\boldsymbol{\mu}') \cap \Delta} \eta(Q'_i) = \begin{cases} (-1)^{(v-u+1)/2}, & \text{si } v \equiv u - 1 \bmod 2\mathbb{Z}, \\ (-1)^{k+(v+u)/2}, & \text{si } v \equiv u \bmod 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Remarquons que

$$(6) \qquad v \equiv c_{\geqslant \Delta}(\boldsymbol{\mu}') \equiv \delta(\Delta) \bmod 2\mathbb{Z}, \quad u - 1 \equiv c_{\geqslant \Delta^+}(\boldsymbol{\mu}') \equiv \delta(\Delta^+) \bmod 2\mathbb{Z}.$$

On obtient l'égalité :

$$\prod_{i \in a(\boldsymbol{\mu}') \cap \Delta} \eta(q'_i)\eta(Q'_i) = (-1)^{(k+\delta(\Delta))(\delta(\Delta)-\delta(\Delta^+))} \eta'(q_\Delta),$$

puis l'égalité :

$$\mathcal{Y}_{\iota'}(Y') = \prod_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \left[ \operatorname{sgn}(-1)^{(k+\delta(\Delta))(\delta(\Delta)-\delta(\Delta^+))\tau(\Delta)} \operatorname{sgn} \circ \eta'(q_\Delta)^{\tau(\Delta)} \right].$$

On a une formule analogue pour $\mathcal{Y}_{\iota''}(Y'')$. D'où l'égalité :

$$(\mathcal{Y}_{i'} \otimes \mathcal{Y}_{\iota''})(\overline{Y}_{\check{N}}) = \prod_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \operatorname{sgn}(\eta'(q_\Delta)\eta''(q_\Delta))^{\tau(\Delta)} = \gamma_\iota \circ \check{\Lambda}(\check{N}).$$

Jointe à (2) et (4), cette égalité démontre le (ii) de l'énoncé.

Supposons maintenant $(V, q_V)$ orthogonal. On reprend pas à pas la démonstration ci-dessus. Notons $\iota_0 = (k', k'')$ l'élément de $\mathcal{I}_0^{\text{st}}(V)$ tel que $\rho \in \mathcal{R}(\iota_0)^\phi$, $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ un élément de $\mathcal{P}_2(n(\iota_0))$ qui paramétrise $\rho$. Si $d$ est pair et $\iota_0 = (0,0)$, on suppose $\boldsymbol{\alpha} \succ \boldsymbol{\beta}$. Posons

$$N' = (\boldsymbol{\mu}', (q'_i)) \text{ ou } (\boldsymbol{\mu}', (q'_i), \tilde{\varepsilon}') \text{ et } N'' = (\boldsymbol{\mu}'', (q''_i)) \text{ ou } (\boldsymbol{\mu}''(q''_i), \tilde{\varepsilon}'').$$

Le (i) de l'énoncé se démontre comme précédemment. Si $d$ est impair et $\iota_0 = (1,0)$ ou si $d$ est pair, $q_V$ n'est pas déployée et $\iota_0 = (0,0)$, resp. $d$ est pair, $q_V$ est déployée et $\iota_0 = (0,0)$, on doit remplacer l'usage de VIII.3 (2) par celui de VIII.5 (1), resp. VIII.4 (2).

Supposons $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda}$. Notons $\mathcal{J}$ le sous-ensemble des $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L^{\max}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ tels qu'en posant $\iota' = (\boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\varepsilon}')$ ou $(\boldsymbol{\lambda}', \varepsilon', \boldsymbol{\varepsilon}')$ et $\iota'' = (\boldsymbol{\lambda}'', \boldsymbol{\varepsilon}'')$ ou $(\boldsymbol{\lambda}'', \varepsilon'', \boldsymbol{\varepsilon}'')$, on ait :

- $\boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{\mu}'$ et $\boldsymbol{\lambda}'' = \boldsymbol{\mu}''$ ;
- si $\boldsymbol{\mu}'$, resp. $\boldsymbol{\mu}''$, est exceptionnelle, $\varepsilon' = \tilde{\varepsilon}'$, resp. $\varepsilon'' = \tilde{\varepsilon}''$.

Si $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_L(\iota_0)^\phi-\mathcal{J}$, on a $m(\rho;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''})=0$ ou $(\chi^\natural_{\iota'}\otimes\chi^\natural_{\iota''})(\overline{Y}_{\check N})=0$. On en déduit l'égalité :

$$(7)\qquad \phi^{st,\mathcal{H}}_\rho(h_{\check N})=q^c\sum_{(\iota',\iota'')\in\mathcal{J}}m(\rho;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''})q^{-b(\iota')-b(\iota'')}\varepsilon(\iota')\varepsilon(\iota'')(\mathcal{Y}_{\iota'}\otimes\mathcal{Y}_{\iota''})(\overline{Y}_{\check N}).$$

Soit $\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$. On a encore la relation (3). Si $d$ est impair et $\Delta$ est l'élément maximal de $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda})$ est impair. Sinon $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda})$ est pair. On en déduit :

$$c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\lambda})\equiv d \bmod 2\mathbb{Z},$$

puis

$$c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\mu}')+d\equiv c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\mu}'')\bmod 2\mathbb{Z}.$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- $d''(q_{\geqslant\Delta})=\delta(\Delta)$ ;
- $\delta(\Delta)\equiv c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\mu}')+d\equiv c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\mu}'')\bmod 2\mathbb{Z}$.

S'il existe $\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tel qu'elles ne soient pas vérifiées, on a $\gamma_\iota\circ\check\Lambda(\check N)=\phi^{st,\mathcal{H}}_\rho(h_{\check N})=0$. Supposons-les vérifiées pour tout $\Delta$. Grâce à IX.11 (4), $\mathcal{J}$ est réduit à un élément que l'on note $(\iota',\iota'')$.

***Remarque***. — Les conditions $\iota'\in\mathcal{I}(\ell')^\phi$ et $\iota''\in\mathcal{I}(\ell'')^\phi$ sont bien vérifiées : si $(\ell',q_{\ell'})$ est orthogonal pair non déployé, puisque $N'\in\mathrm{Nil}(\ell')$, on a $a(\boldsymbol{\mu}')\neq\varnothing$, donc $\iota'\in\mathcal{I}(\ell')^\phi$ puisque $\boldsymbol{\lambda}'=\boldsymbol{\mu}'$.

Posons $\iota'=(\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\varepsilon}')$ ou $(\boldsymbol{\mu}',\widetilde{\varepsilon}',\boldsymbol{\varepsilon}')$, $\iota''=(\boldsymbol{\mu}'',\boldsymbol{\varepsilon}'')$ ou $(\boldsymbol{\mu}'',\widetilde{\varepsilon}'',\boldsymbol{\varepsilon}'')$. On a encore l'égalité (4).

Supposons $d$ impair. Grâce à VIII.3 (2) si $\iota_0=(1,0)$, à VIII.5 (2) si $\iota_0=(1,0)$, et à la proposition IX.11 (iii), on a

$$m(\rho;\rho_{i'},\rho_{\iota''})=1.$$

Par définition :

$$\varepsilon(\iota')\varepsilon(\iota'')=\mathrm{sgn}(-\eta'(q_V))^{(k'-1)/2}\,\mathrm{sgn}(-1)^{k''/2}.$$

Avant l'énoncé, on a associé à $\iota$ un entier $D$. D'après les définitions de IX.10, on a l'égalité $D=2\sup(k',k'')-1$. En se rappelant que $k'$ est impair, $k''$ est pair et $|k'-k''|=1$, on obtient

$$\varepsilon(\iota')\varepsilon(\iota'')=C(\iota)\,\mathrm{sgn}(-\eta'(q_V))^{k''/2}.$$

Ecrivons $\overline{Y}_{\check N}=(Y',Y'')$. Rappelons que $(\ell'',q_{\ell''})$ est orthogonal pair et déployé. Le calcul de $\mathcal{Y}_{\iota''}(Y'')$ s'effectue comme précédemment :

$$(8)\qquad \mathcal{Y}_{\iota''}(Y'')=\prod_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}\left[\mathrm{sgn}(-1)^{(1+\delta(\Delta))(\delta(\Delta)-\delta(\Delta^+))\tau(\Delta)}\,\mathrm{sgn}\circ\eta''(q_\Delta)^{\tau(\Delta)}\right].$$

Calculons $\mathcal{Y}_{i'}(Y')$. Soit $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$. Avec les mêmes notations que dans le cas symplectique, les égalités (5) restent vraies. On a :

$$\prod_{i\in a(\boldsymbol{\mu}')\cap\Delta} \eta(Q'_i) = \begin{cases} (-1)^{(v-u+1)/2}, & \text{si } v \equiv u-1 \bmod 2\mathbb{Z}, \\ (-1)^{1+(v+u)/2}\eta'(q_V), & \text{si } v \equiv u \bmod 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Rappelons que l'on note $\Delta_{\max}$ le plus grand élément de $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ et que l'on pose formellement $\delta(\Delta^+_{\max}) = 0$. Alors

$$v \equiv c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\mu}') \equiv \delta(\Delta) + 1 \bmod 2\mathbb{Z},$$

$$u - 1 \equiv c_{\geqslant\Delta^+}(\boldsymbol{\mu}') \equiv \begin{cases} \delta(\Delta^+) + 1 \bmod 2\mathbb{Z}, & \text{si } \Delta \neq \Delta_{\max}, \\ \delta(\Delta^+_{\max}) \bmod 2\mathbb{Z}, & \text{si } \Delta = \Delta_{\max}. \end{cases}$$

On en déduit l'égalité

$$\prod_{i\in a(\boldsymbol{\mu}')\cap\Delta} \eta(q'_i)\eta(Q'_i) = \begin{cases} ((-1)^{\delta(\Delta)}\eta'(q_V))^{\delta(\Delta)-\delta(\Delta^+)}\eta'(q_\Delta), & \text{si } \Delta \neq \Delta^{\max}, \\ ((-1)^{\delta(\Delta)}\eta'(q_V))^{\delta(\Delta)-\delta(\Delta^+)+1}\eta'(q_\Delta), & \text{si } \Delta = \Delta^{\max}. \end{cases}$$

On a $\tau(\Delta_{\max}) = 0$, *cf.* VIII.19. Posons :

$$h = \sum_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} (\delta(\Delta) - \delta(\Delta^+))\tau(\Delta).$$

On obtient alors l'égalité :

$$\mathcal{Y}_{\iota'}(Y') = \operatorname{sgn}(-\eta'(q_V))^h \prod_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \left[\operatorname{sgn}(-1)^{(1+\delta(\Delta))(\delta(\Delta)-\delta(\Delta^+))\tau(\Delta)} \operatorname{sgn}\circ\eta'(q_\Delta)^{\tau(\Delta)}\right],$$

puis, grâce à (8) :

$$(\mathcal{Y}_{\iota'} \otimes \mathcal{Y}_{\iota''})(\overline{Y}_{\check{N}}) = \operatorname{sgn}(-\eta'(q_V))^h \gamma_\iota \circ \check{\Lambda}(\check{N}).$$

Calculons $h$. Posons

$$H = \sum_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} (1 - (-1)^{\tau(\Delta)})((-1)^{\delta(\Delta)} - (-1)^{\delta(\Delta^+)}).$$

La contribution d'un intervalle $\Delta$ à $H$ est 0 si $(\delta(\Delta) - \delta(\Delta^+))\tau(\Delta) = 0$, $\pm 4$ si $(\delta(\Delta) - \delta(\Delta^+))\tau(\Delta) = 1$. Donc $h \equiv H/4 \bmod 2\mathbb{Z}$. On a l'égalité

$$H = \Big(\sum_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} (-1)^{\delta(\Delta)}\Big) - \Big(\sum_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} (-1)^{\delta(\Delta^+)}\Big) - \Big(\sum_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} (-1)^{\tau(\Delta)+\delta(\Delta)}\Big) + \Big(\sum_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} (-1)^{\tau(\Delta)+\delta(\Delta^+)}\Big).$$

Utilisons les notations de VIII.19. On a $\delta(\Delta_{\min}) = \delta(\Delta^+_{\max}) = 0$ et les deux premiers termes ci-dessus se compensent. On a les égalités :

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} (-1)^{\tau(\Delta)+\delta(\Delta)} = |\mathcal{I}nt_{X,0}(\tau,\delta)| - |\mathcal{I}nt_{X,1}(\tau,\delta)| = |\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})| - 2\,|\mathcal{I}nt_{X,1}(\tau,\delta)|,$$

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} (-1)^{\tau(\Delta)+\delta(\Delta^+)} = |\mathcal{I}nt_{Y,0}(\tau,\delta)| - |\mathcal{I}nt_{Y,1}(\tau,\delta)| = |\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})| - 2\,|\mathcal{I}nt_{Y,1}(\tau,\delta)|.$$

Alors

$$H = 2\,|\mathcal{I}nt_{X,1}(\tau,\delta)| - 2\,|\mathcal{I}nt_{Y,1}(\tau,\delta)|. \tag{9}$$

En utilisant le lemme VIII.19 et les propriétés de $D$ déjà utilisées ci-dessus, on obtient l'égalité $H = \pm 2k''$, puis $h \equiv k''/2 \bmod 2\mathbb{Z}$.

On a maintenant calculé tous les termes de la formule (7) et l'on obtient le (ii) de l'énoncé.

Supposons $d$ pair et $q_V$ déployée. Par définition et puisque $k' = k''$, on a :

$$\varepsilon(\iota')\varepsilon(\iota'') = 1.$$

L'égalité (8) reste vraie et $\mathcal{Y}_{\iota'}(Y')$ est donné par une formule analogue. D'où l'égalité

$$(\mathcal{Y}_{\iota'} \otimes \mathcal{Y}_{\iota''})(\overline{Y}_{\check{N}}) = \prod_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \operatorname{sgn}(\eta'(q_\Delta)\eta''(q_\Delta))^{\tau(\Delta)}.$$

Si $\boldsymbol{\lambda}$ n'est pas exceptionnelle, on a

$$m(\rho;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''}) = 1$$

grâce à VIII.3 (2) si $\iota_0 \neq (0,0)$, VIII.4 (3) si $\iota_0 = (0,0)$. Si $\boldsymbol{\lambda}$ est exceptionnelle, alors $\iota = (\boldsymbol{\lambda},\varepsilon,0,0)$, $\check{\Lambda}(\check{N}) = (\boldsymbol{\lambda},\varnothing,\widetilde{\varepsilon})$ et, grâce à VIII.4 (3),

$$m(\rho;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \varepsilon = \widetilde{\varepsilon}'\widetilde{\varepsilon}'' = \widetilde{\varepsilon}, \\ 0, & \text{sinon}. \end{cases}$$

On obtient encore le (ii) de l'énoncé.

Supposons $d$ pair et $q_V$ non déployée. Alors $q_{\ell''}$ est déployée mais pas $q_{\ell'}$. Supposons d'abord $\iota_0 \neq (0,0)$. D'après VIII.3 (2),

$$m(\rho;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''}) = 1.$$

Le terme $\mathcal{Y}_{\iota''}(Y'')$ est calculé par l'égalité (8). Le terme $\mathcal{Y}_{\iota'}(Y')$ se calcule de façon analogue. La seule différence est que si l'on note $a'_{\max}$ le plus grand élément de $a(\boldsymbol{\mu}')$, on a $\operatorname{sgn}\circ\eta(Q'_{a'_{\max}}) = -1$ alors que, dans le calcul de $\mathcal{Y}_{\iota''}(Y'')$, le terme analogue valait 1 (*cf.* VIII.11). Notons $\Delta'_{\max}$ le plus grand élément de $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $a(\boldsymbol{\mu}')\cap\Delta'_{\max} \neq \varnothing$. On a $a'_{\max} \in \Delta'_{\max}$ et on en déduit l'égalité :

$$(\mathcal{Y}_{\iota'} \otimes \mathcal{Y}_{\iota''})(\overline{Y}_{\check{N}}) = (-1)^{\tau(\Delta'_{\max})}\gamma_\iota \circ \check{\Lambda}(\check{N}). \tag{10}$$

Posons simplement $k = k' = k''$. On a l'égalité

$$\varepsilon(\iota'') = \operatorname{sgn}(-1)^{k/2}.$$

Relevons $\boldsymbol{\varepsilon}'$ en un élément de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a(\boldsymbol{\mu}')}$, noté encore $\boldsymbol{\varepsilon}'$, tel que la relation IX.11 (3) soit vérifiée. Avec les notations ci-dessus, posons

$$N(\boldsymbol{\varepsilon}') = \left|\{n \in \{1,\ldots,m'\}; n \text{ est pair et } \varepsilon'_{i'_n} = 1\}\right| \\ - \left|\{n \in \{1,\ldots,m'\}; n \text{ est impair et } \varepsilon'_{i'_n} = 1\}\right|.$$

Soit $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, introduisons $u$ et $v$ comme ci-dessus. Calculons la contribution à $N(\boldsymbol{\varepsilon}')$ des $n$ tels que $\iota'_n \in \Delta$. Elle est nulle si $\tau(\Delta) = 0$. Supposons $\tau(\Delta) = 1$. La contribution est

$$\left|\{n \in \{u,\ldots,v\}; n \text{ est pair}\}\right| - \left|\{n \in \{u,\ldots,v\}; n \text{ est impair}\}\right|,$$

que l'on calcule : c'est

$$\frac{1}{2}\left[(-1)^{v} - (-1)^{u-1}\right].$$

Les congruences (6) sont encore vraies. On obtient que pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, la contribution cherchée est égal à

$$\frac{1}{4}(1-(-1)^{\tau(\Delta)})((-1)^{\delta(\Delta)} - (-1)^{\delta(\Delta^+)}).$$

Avec les notations ci-dessus, on a alors l'égalité $N(\boldsymbol{\varepsilon}') = H/4$. D'après (9) et la définition de $\mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$, *cf.* VIII.21, on a $N(\boldsymbol{\varepsilon}') > 0$. Alors

$$\varepsilon(\iota') = (-1)^{\tau(\Delta'_{\max})}\operatorname{sgn}(-1)^{k/2},$$

*cf.* VIII.11. On a maintenant calculé tous les termes de la formule (7) et l'on obtient le (ii) de l'énoncé.

Supposons enfin $\iota_0 = (0,0)$. L'égalité (10) reste vraie et on a l'égalité

$$\varepsilon(\iota')\varepsilon(\iota'') = 1.$$

Soit $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'') \in \mathcal{P}_L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ tel que $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$ paramétrise $\rho_{\iota'}$ et $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'')$ paramétrise $\rho_{\iota''}$. On a supposé $\boldsymbol{\alpha} \succ \boldsymbol{\beta}$, donc

$$\rho^{\#} = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$$

(il s'agit d'une représentation de $W(C_{d/2})$). Remarquons que $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$ car $\rho \in \mathcal{R}(\iota_0)^{\phi}$. En appliquant la proposition IX.11 (iv), on obtient l'égalité

$$\rho^{\#}_{\iota'} - \rho^{b}_{\iota'} = (-1)^{\tau(\Delta'_{\max})}\left[\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}') - \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\alpha}')\right].$$

Grâce à VIII.5 (1) et (2), à la proposition IX.11 (iii) et à la définition de $m(\rho; \rho_{\iota'}, \rho_{\iota''})$, *cf.* IX.8, on en déduit l'égalité :

$$m(\rho; \rho_{\iota'}, \rho_{\iota''}) = (-1)^{\tau(\Delta'_{\max})}.$$

D'où encore le (ii) de l'énoncé. Cela achève la démonstration. □

**IX.13.** Le couple $(V, q_V)$ est de nouveau comme en IX.1. Pour tout $\iota \in \mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$, définissons une distribution $\phi_\iota \in \mathcal{D}_{\mathrm{nil}}$ par l'égalité

$$\phi_\iota = \sum_{\mathcal{O} \in g_{\mathrm{nil}}/G} \gamma_\iota \circ \Lambda(\mathcal{O}) \phi_{\mathcal{O}}.$$

Ecrivons $\iota = (\boldsymbol{\lambda}, \tau, \delta)$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon, \tau, \delta)$. On note $\dim(\iota)$ la dimension de l'orbite nilpotente de $\boldsymbol{g}(\overline{F})$ paramétrisée par $\boldsymbol{\lambda}$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon)$.

***Lemme.*** — *Soit $\iota \in \mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$. Alors il existe une famille $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ telle que :*

- *$D_n \in \mathcal{D}[n]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (cf. IV.15) ;*
- *$D_n = 0$ si $|n|$ est assez grand et si $n > \dim(\iota)$ ;*
- *$D_{\dim(\iota)} = C(\iota) \phi_\iota$*
- *$\phi_{\rho_\iota}^{st,\mathcal{H}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D_n)$.*

*Démonstration.* — D'après le théorème I.9 (ii), il existe une unique famille $\boldsymbol{C} = (C(\mathcal{O}))_{\mathcal{O} \in g_{\mathrm{nil}}/G}$ de nombres complexes telle que

$$\phi_{\rho_\iota}^{st,\mathcal{H}} = \sum_{\mathcal{O} \in g_{\mathrm{nil}}/G} C(\mathcal{O}) \,\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\phi_{\mathcal{O}}). \tag{1}$$

Munissons $g_{\mathrm{nil}}/G$ d'un ordre total tel que :

$$\dim(\mathcal{O}) < \dim(\mathcal{O}') \Longrightarrow \mathcal{O} < \mathcal{O}'.$$

Considérons $\boldsymbol{C}$ comme une matrice colonne.

Fixons une section $\mathcal{O} \mapsto \check{N}(\mathcal{O})$ de l'application

$$\Lambda^{-1} \circ \check{\Lambda} : \check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V) \longrightarrow g_{\mathrm{nil}}/G.$$

Définissons une matrice colonne $\boldsymbol{C}' = (C'(\mathcal{O}))_{\mathcal{O} \in g_{\mathrm{nil}}/G}$ et une matrice carrée $\boldsymbol{M} = (m(\mathcal{O}, \mathcal{O}'))_{\mathcal{O}, \mathcal{O}' \in g_{\mathrm{nil}}/G}$ par :

$$C'(\mathcal{O}) = \phi_{\rho_\iota}^{st,\mathcal{H}}(h_{\check{N}(\mathcal{O})}), \quad m(\mathcal{O}, \mathcal{O}') = \phi_{\mathcal{O}'}(h_{\check{N}(\mathcal{O})}).$$

D'après les propositions IX.9 et IX.12, pour tout $\mathcal{O} \in g_{\mathrm{nil}}/G$, on a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \bullet \quad C'(\mathcal{O}) \neq 0 \Longrightarrow \dim(\mathcal{O}) \leqslant \dim(\iota); \\ \bullet \quad \text{si } \dim(\mathcal{O}) = \dim(\iota), \ C'(\mathcal{O}) = q^{d(\check{N}(\mathcal{O}))} C(\iota) \gamma_\iota \circ \Lambda(\mathcal{O}). \end{cases} \tag{2}$$

D'après le lemme IX.4, pour tous $\mathcal{O}, \mathcal{O}' \in g_{\mathrm{nil}}/G$, on a les propriétés suivantes :

- $m(\mathcal{O}, \mathcal{O}') \neq 0 \Rightarrow \dim(\mathcal{O}) < \dim(\mathcal{O}')$ ou $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$ ;
- $m(\mathcal{O}, \mathcal{O}) = q^{d(\check{N}(\mathcal{O}))}$.

Il en résulte que $\boldsymbol{M}$ est inversible et que, si l'on note $\boldsymbol{M}' = (m'(\mathcal{O}, \mathcal{O}'))_{\mathcal{O}, \mathcal{O}' \in g_{\mathrm{nil}}/G}$ son inverse, on a les propriétés suivantes pour tous $\mathcal{O}, \mathcal{O}' \in g_{\mathrm{nil}}/G$ :

$$\begin{cases} \bullet \quad m'(\mathcal{O}, \mathcal{O}') \neq 0 \Longrightarrow \dim(\mathcal{O}) < \dim(\mathcal{O}') \text{ ou } \mathcal{O} = \mathcal{O}'; \\ \bullet \quad m'(\mathcal{O}, \mathcal{O}) = q^{-d(\check{N}(\mathcal{O}))}. \end{cases} \tag{3}$$

Or on a l'égalité $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{M}\boldsymbol{C}$, d'où $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{M}'\boldsymbol{C}'$. On déduit de (2) et (3) que pour tout $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{\text{nil}}/G$, on a les propriétés :

- $C(\mathcal{O}) \neq 0 \Rightarrow \dim(\mathcal{O}) \leqslant \dim(\iota)$ ;
- si $\dim(\mathcal{O}) = \dim(\iota)$, $C(\mathcal{O}) = C(\iota)\gamma_\iota \circ \Lambda(\mathcal{O})$.

En se rappelant que, pour tout $\mathcal{O}$, $\phi_{\mathcal{O}} \in \mathcal{D}[\dim(\mathcal{O})]$, l'énoncé résulte de l'égalité (1).

□

***IX.14. Lemme.*** — *La famille de distributions $(\phi_\iota)_{\iota \in \mathcal{I}^{\text{st}}(V)}$ est linéairement indépendante.*

*Démonstration.* — Pour $\iota, \iota' \in \mathcal{I}^{\text{st}}(V)$, il résulte des définitions que les supports des fonctions $\gamma_\iota \circ \Lambda$ et $\gamma_{\iota'} \circ \Lambda$ sur $\mathfrak{g}_{\text{nil}}/G$ sont égaux ou disjoints. Disons que $\iota$ est équivalent à $\iota'$ si ces supports sont égaux. Cela définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{I}^{\text{st}}(V)$. Il est clair qu'il suffit de prouver que pour toute classe d'équivalence $\mathcal{J}$, la famille $(\phi_\iota)_{\iota \in \mathcal{J}}$ est linéairement indépendante.

Si $(V, q_V)$ est unitaire, toute classe d'équivalence a un seul élément. Puisque $\phi_\iota \neq 0$ pour tout $\iota \in \mathcal{I}^{\text{st}}(V)$, l'assertion est évidente.

Supposons $(V, q_V)$ symplectique. Une classe d'équivalence est déterminée par une partition spéciale $\boldsymbol{\lambda}$ dans $\mathcal{P}(V)$ et un élément $\delta \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}$ : la classe est l'ensemble des éléments de $\mathcal{I}^{\text{st}}(V)$ de la forme $(\boldsymbol{\lambda}, \tau, \delta)$. L'application $(\boldsymbol{\lambda}, \tau, \delta) \mapsto \tau$ est une bijection de cette classe sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}$. Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des éléments de $\text{Nil}(V)$ de la forme $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$ tels que $d''(q_{\geqslant\Delta}) = \delta(\Delta)$ pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$. Définissons une application

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{N} &\longrightarrow \{\pm 1\}^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \\ (\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) &\longmapsto \big(\text{sgn}(\eta'(q_\Delta)\eta''(q_\Delta))\big)_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}. \end{aligned}$$

Soit $n$ est un entier $\geqslant 1$. Quand $q$ décrit l'ensemble des classes de formes quadratiques non dégénérées de dimension $n$, le triplet $(\text{sgn} \circ \eta'(q), \text{sgn} \circ \eta''(q), d''(q))$ décrit l'ensemble :

$$(1) \qquad \begin{cases} \bullet \quad \{\pm 1\} \times \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{si } n \geqslant 3, \\ \bullet \quad (\{\pm 1\} \times \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) - \{(-1, -1, 0)\}, & \text{si } n = 2, \\ \bullet \quad (\{\pm 1\} \times \{\pm 1\} \times \{0\}) \cup (\{1\} \times \{\pm 1\} \times \{1\}), & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Rappelons que $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda})$ est pair pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$. Il en résulte que pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ et tout $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, il existe une forme $q$ de dimension $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda})$ telle que $d''(q) = \delta(\Delta) - \delta(\Delta^+)$ et $\text{sgn}(\eta'(q)\eta''(q)) = \varepsilon$. On en déduit que l'application $\sigma$ est surjective.

Soit $(C_\tau)$ une famille de nombres complexes indicée par $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}$. Supposons

$$\sum_{\tau \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}} C_\tau \, \phi_{(\boldsymbol{\lambda}, \tau, \delta)} = 0.$$

Alors pour tout $N \in \mathrm{Nil}(V)$,

$$\sum_{\tau \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}} C_\tau \, \gamma_{(\boldsymbol{\lambda},\tau,\delta)}(N) = 0.$$

Soit $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_\Delta)_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \in \{\pm 1\}^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}$. Appliquons l'égalité précédente à un $N \in \mathcal{N}$ tel que $\sigma(N) = \boldsymbol{\varepsilon}$. On obtient

$$\sum_{\tau \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}} C_\tau \prod_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \varepsilon_\Delta^{\tau(\Delta)} = 0.$$

L'indépendance linéaire des caractères du groupe $\{\pm 1\}^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}$ entraîne que $C_\tau = 0$ pour tout $\tau$. Donc la famille $(\phi_{(\boldsymbol{\lambda},\tau,\delta)})_{\tau \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}}$ est linéairement indépendante.

Supposons $(V, q_V)$ orthogonal. La classe d'équivalence d'un élément de $\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$ de la forme $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon, 0, 0)$ est réduite à cet élément. On a $\phi_{(\boldsymbol{\lambda},\varepsilon,0,0)} \neq 0$ et l'indépendance linéaire que l'on cherche à démontrer est claire. Les autres classes d'équivalence sont déterminées par une partition spéciale $\boldsymbol{\lambda}$ dans $\mathcal{P}(V)$ telle que $a(\boldsymbol{\lambda}) \neq \varnothing$ et par un élément $\delta \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}$ tel que $\delta(\Delta_{\min}) = 0$ (rappelons que $\Delta_{\min}$ est le plus petit élément de $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$) : la classe est l'ensemble des éléments de $\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$ de la forme $(\boldsymbol{\lambda}, \tau, \delta)$. Notons $T$ l'ensemble des $\tau \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}$ tels que $(\tau, \delta) \in \mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$. Alors l'application $(\boldsymbol{\lambda}, \tau, \delta) \mapsto \tau$ est une bijection de la classe d'équivalence sur $T$.

Définissons l'ensemble $\mathcal{N}$ comme dans le cas symplectique. Quand $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$ décrit $\mathcal{N}$, la famille $(q_\Delta)_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}$ décrit l'ensemble des telles familles vérifiant les conditions :

$$\text{pour tout } \Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}), \ d''(q_{\geqslant \Delta}) = \delta(\Delta); \tag{2}$$

$$\text{pour tout } \Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}), \ q_\Delta \text{ est non dégénérée de dimension } c_\Delta(\boldsymbol{\lambda}); \tag{3}$$

$$q_{\geqslant \Delta_{\min}} \sim_a q_V. \tag{4}$$

Evidemment (2) est équivalente à :

$$\text{pour tout } \Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}), \ d''(q_\Delta) = \delta(\Delta) - \delta(\Delta^+). \tag{5}$$

Supposons (2) et (3) vérifiées. La condition (4) est équivalente aux quatre relations :

$$d'(q_{\geqslant \Delta_{\min}}) \equiv d \bmod 2\mathbb{Z}, \ d''(q_{\geqslant \Delta_{\min}}) = 0;$$
$$\eta'(q_{\geqslant \Delta_{\min}}) = \eta'(q_V), \ \eta''(q_{\geqslant \Delta_{\min}}) = 1.$$

Les deux premières sont automatiques d'après (2) et (3) grâce aux relations $\delta(\Delta_{\min}) = 0$, $c_{\geqslant \Delta_{\min}}(\boldsymbol{\lambda}) \equiv d \bmod 2\mathbb{Z}$. Posons

$$x'' = \left| \{ \Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}); \delta(\Delta) \neq \delta(\Delta^+) \} \right|,$$

$$x' = \begin{cases} \left| \{ \Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}); c_\Delta(\boldsymbol{\lambda}) - \delta(\Delta) + \delta(\Delta^+) \equiv 1 \bmod 2\mathbb{Z} \} \right| - 1, & \text{si } d \text{ est impair}, \\ x'', & \text{si } d \text{ est pair}. \end{cases}$$

On vérifie que $x'$ et $x''$ sont pairs. Grâce à (2) et (3), on montre que les deux dernières relations ci-dessus sont équivalentes à :

$$(6) \qquad \prod_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \eta'(q_\Delta) = (-1)^{x'/2}\eta'(q_V), \qquad \prod_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \eta''(q_\Delta) = (-1)^{x''/2}.$$

Finalement les trois conditions (2), (3) et (4) sont équivalentes aux trois conditions (3), (5) et (6).

Remarquons que $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}) \neq \varnothing$ puisque $a(\boldsymbol{\lambda}) \neq \varnothing$. Fixons $\Delta^0 \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tel que :

(7) s'il existe $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda}) \geqslant 3$ ou $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda}) = 2$ et $\delta(\Delta) \neq \delta(\Delta^+)$, $\Delta^0$ vérifie l'une des ces conditions.

Définissons une application

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{N} &\longrightarrow \{\pm 1\}^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})-\{\Delta^0\}} \\ (\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) &\longmapsto (\operatorname{sgn}(\eta'(q_\Delta)\eta''(q_\Delta))_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})-\{\Delta^0\}}. \end{aligned}$$

Montrons que :

$$(8) \qquad \sigma \text{ est surjective.}$$

Soit $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_\Delta)_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})-\{\Delta^0\}} \in \{\pm 1\}^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})-\{\Delta^0\}}$. Supposons d'abord que $\Delta^0$ vérifie l'une des conditions de (7). Grâce à (1), on voit que pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}) - \{\Delta^0\}$, il existe une forme $q_\Delta$ de dimension $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda})$, telle que $d''(q_\Delta) = \delta(\Delta) - \delta(\Delta^+)$ et $\operatorname{sgn}(\eta'(q_\Delta)\eta''(q_\Delta)) = \varepsilon_\Delta$. On fixe de telles formes. Toujours grâce à (1) et à l'hypothèse sur $\Delta^0$, il existe une forme $q_{\Delta^0}$ de dimension $c_{\Delta^0}(\boldsymbol{\lambda})$, telle que $d''(q_{\Delta^0}) = \delta(\Delta^0) - \delta(\Delta^{0+})$ et telle que (6) soit vérifiée. Fixons une telle forme. La famille $(q_\Delta)_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}$ vérifie (3), (5) et (6), donc provient d'un élément $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) \in \mathcal{N}$ pour lequel $\sigma(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) = \boldsymbol{\varepsilon}$. Supposons maintenant $\Delta^0$ ne vérifie aucune des conditions de (7). Alors pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, on a $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda}) \leqslant 2$, et, si $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda}) = 2$, on a aussi $\delta(\Delta) = \delta(\Delta^+)$. Il y a au plus un élément $\Delta$ de $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda}) = 1$. Puisque $\delta(\Delta_{\min}) = \delta(\Delta^+_{\max}) = 0$, on en déduit que $\delta(\Delta) = 0$ pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$. D'où l'égalité $x'' = 0$. Grâce à (1), on voit que pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}) - \{\Delta^0\}$, il existe une forme $q_\Delta$ de dimension $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda})$, telle que $d''(q_\Delta) = 0$, $\eta''(q_\Delta) = 1$ et $\operatorname{sgn} \circ \eta'(q_\Delta) = \varepsilon_\Delta$. Fixons de telles formes. Toujours grâce à (1), il existe une forme $q_{\Delta^0}$ de dimension $c_{\Delta^0}(\boldsymbol{\lambda})$, telle que $d''(q_{\Delta^0}) = 0$, $\eta''(q_{\Delta^0}) = 1$ et telle que (6) soit vérifiée. On conclut comme ci-dessus. Cela démontre (8).

Soit $(C_\tau)_{\tau\in T}$ une famille de nombres complexes, supposons

$$\sum_{\tau\in T} C_\tau\, \phi_{(\boldsymbol{\lambda},\tau,\delta)} = 0.$$

Alors, pour tout $N \in \operatorname{Nil}(V)$,

$$\sum_{\tau\in T} C_\tau\, \gamma_{(\boldsymbol{\lambda},\tau,\delta)}(N) = 0.$$

Soit $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_\Delta)_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})-\{\Delta^0\}} \in \{\pm 1\}^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})-\{\Delta^0\}}$. Appliquons l'égalité précédente à un $N = (\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) \in \mathcal{N}$ tel que $\sigma(N) = \boldsymbol{\varepsilon}$. Pour $\tau \in T$, on a l'égalité

$$\gamma_{(\boldsymbol{\lambda},\tau,\delta)}(N) = \prod_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \operatorname{sgn}(\eta'(q_\Delta)\eta''(q_\Delta))^{\tau(\Delta)}.$$

Posons :

$$C'_\tau = \operatorname{sgn}((-1)^{(x'+x'')/2}\eta'(q_V))^{\tau(\Delta^0)}.$$

On déduit de (6) l'égalité :

$$\gamma_{(\boldsymbol{\lambda},\tau,\delta)}(N) = C'_\tau \prod_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})-\{\Delta^0\}\}} \varepsilon_\Delta^{\tau(\Delta)-\tau(\Delta^0)}.$$

On obtient donc :

$$\sum_{\tau\in T} C_\tau C'_\tau \prod_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})-\{\Delta^0\}} \varepsilon_\Delta^{\tau(\Delta)-\tau(\Delta^0)} = 0.$$

Par définition de $\mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$, l'application

$$\begin{aligned} T &\longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})-\{\Delta^0\}} \\ \tau &\longmapsto (\tau(\Delta)-\tau(\Delta^0))_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})-\{\Delta^0\}} \end{aligned}$$

est bijective. On conclut alors comme dans le cas symplectique. □

***IX.15. Théorème***. — *La famille $(\phi_\iota)_{\iota\in\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)}$ est une base de l'espace $\mathcal{D}_{\mathrm{nil}} \cap \mathcal{D}^{\mathrm{st}}$.*

*Démonstration*. — D'après le théorème IV.13 et les définitions de IX.7, la famille

$$(\phi_w^{st,\mathcal{H}})_{w\in W(\iota_0),\iota_0\in\mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V)}$$

engendre l'espace $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^{\mathrm{st}}) \cap \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$. Pour $\iota_0 \in \mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V)$ et $w \in W(\iota_0)$, $\phi_w^{st,\mathcal{H}}$ ne dépend que de $\mathcal{O}_\phi(w)$. On déduit des formules d'orthogonalité des coefficients de représentations de groupes finis que la famille

$$(\phi_\rho^{st,\mathcal{H}})_{\rho\in\mathcal{R}^{\mathrm{st}}(V)}$$

engendre le même espace. Donc

$$|\mathcal{R}^{\mathrm{st}}(V)| \geqslant \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}^{\mathrm{st}}) \cap \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})).$$

Ou encore, grâce aux théorèmes IV.13, IV.16 et au lemme IV.14 :

$$|\mathcal{R}^{\mathrm{st}}(V)| \geqslant \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}_{\mathrm{nil}} \cap \mathcal{D}^{\mathrm{st}}).$$

Soit $\iota \in \mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$. On a $\phi_\iota \in \mathcal{D}_{\mathrm{nil}}$. Grâce aux lemmes IV.15 et IX.13, on a aussi $\phi_\iota \in \mathcal{D}^{\mathrm{st}}$. La famille $(\phi_\iota)_{\iota\in\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)}$ est donc grâce au lemme IX.14 une base d'un sous-espace de $\mathcal{D}_{\mathrm{nil}} \cap \mathcal{D}^{\mathrm{st}}$ de dimension $|\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)|$. On conclut grâce à l'égalité $|\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)| = |\mathcal{R}^{\mathrm{st}}(V)|$ et à l'inégalité ci-dessus. □

**IX.16.** Supposons $(V, q_V)$ symplectique ou orthogonal.

Soit $\boldsymbol{\lambda}$ une partition spéciale dans $\mathcal{P}(V)$. Si $(V, q_V)$ est symplectique, posons

$$\mathbf{Det}(\boldsymbol{\lambda}) = (F^\times / F^{\times 2})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}.$$

Si $(V, q_V)$ est orthogonal, posons

$$x = d - \sum_{i \in \mathbb{N},\, i \text{ impair}} c_i(\boldsymbol{\lambda}).$$

C'est un entier pair. Notons $\mathbf{Det}(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble des familles

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_\Delta)_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \in (F^\times / F^{\times 2})^{\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}$$

telles que

$$\prod_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \alpha_\Delta = (-1)^{x/2} \det(q_V).$$

En tout cas, notons $\mathcal{A}^{\mathrm{st}}(V)$ l'ensemble des données $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha})$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon, \boldsymbol{\alpha})$ telles que

- $\boldsymbol{\lambda}$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon)$ appartient à $\overline{\mathrm{Nil}}(V)$ ;
- $\boldsymbol{\lambda}$ est spéciale ;
- $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{Det}(\boldsymbol{\lambda})$.

Pour un élément $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha})$, resp. $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon, \boldsymbol{\alpha})$, de $\mathcal{A}^{\mathrm{st}}(V)$, posons

$$\phi_{\boldsymbol{a}} = \sum \phi_{\mathcal{O}}$$

où $\mathcal{O}$ parcourt le sous-ensemble des éléments de $\mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}/G$ tels que $\Lambda(\mathcal{O})$ soit de la forme $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$, resp. $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon, (q_i))$, et vérifie :

- pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, $\det(q_\Delta) = \alpha_\Delta$.

***Remarque***. — Supposons $(V, q_V)$ orthogonal. Pour tout élément de $\mathrm{Nil}(V)$ de la forme $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$, resp. $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon, (q_i))$, la relation

$$\bigoplus_i q_i \sim_a q_V$$

implique

$$\prod_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \det(q_\Delta) = (-1)^{x/2} \det(q_V)$$

$x$ étant défini comme ci-dessus.

***Théorème***. — *La famille $(\phi_{\boldsymbol{a}})_{\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}^{\mathrm{st}}(V)}$ est une base de l'espace $\mathcal{D}_{\mathrm{nil}} \cap \mathcal{D}^{\mathrm{st}}$.*

*Démonstration.* — On vérifie que pour tout $\iota \in \mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$, $\phi_\iota$ est combinaison linéaire des $\phi_{\boldsymbol{a}}$ pour $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}^{\mathrm{st}}(V)$. D'autre part, $\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$ et $\mathcal{A}^{\mathrm{st}}(V)$ ont même nombre d'éléments. $\square$

Ce théorème résout les conjectures $A$ et $C$ de [A1].

# CHAPITRE X

# FACTEURS DE TRANSFERT

**X.1.** On considère trois espaces $(V, q_V)$, $(V_1, q_{V_1})$ et $(V_2, q_{V_2})$ comme en I.2. On pose

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(V), \quad \boldsymbol{G}_1 = \boldsymbol{G}(V_1), \quad \boldsymbol{G}_2 = \boldsymbol{G}(V_2), \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}_1 \times \boldsymbol{G}_2.$$

On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :

• si $(V, q_V)$ est symplectique, $(V_1, q_{V_1})$ l'est aussi, $(V_2, q_{V_2})$ est orthogonal pair et $d(V_1) + d(V_2) = d(V)$ ;

• si $(V, q_V)$ est orthogonal impair, $(V_1, q_{V_1})$ et $(V_2, q_{V_2})$ le sont aussi et $d(V_1) + d(V_2) = d(V) + 1$ ;

• si $(V, q_V)$ est orthogonal pair, $(V_1, q_{V_1})$ et $(V_2, q_{V_2})$ le sont aussi, $d(V_1) + d(V_2) = d(V)$, $q_V = q_{V_1} \oplus q_{V_2}$ ;

• si $(V, q_V)$ est unitaire, $(V_1, q_{V_1})$ et $(V_2, q_{V_2})$ le sont aussi et $d(V_1) + d(V_2) = d(V)$ ;

• $(V, q_V)$ n'est pas orthogonal de dimension 2 et aucun des couples $(V_1, q_{V_1})$ et $(V_2, q_{V_2})$ n'est orthogonal déployé de dimension 2 ;

• les groupes $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2$ sont tous trois quasi-déployés.

Le groupe $\boldsymbol{H}$ est un groupe endoscopique elliptique de $\boldsymbol{G}$ et tout groupe endoscopique elliptique de $\boldsymbol{G}$ est de cette forme.

***Remarques***

(1) Pour être précis, la définition d'un groupe endoscopique nécessite des données supplémentaires $s, \eta$ dans la notation de [Ko]. Mais ici $\boldsymbol{H}$ détermine ces objets à une équivalence convenable près.

(2) L'hypothèse $p \geqslant 3d(V) + 1$ de I.2 ne nous servira pas dans ce chapitre.

(3) Dans le cas unitaire, on a supposé en I.2 que l'extension quadratique $E$ de $F$ était non ramifiée. Cette hypothèse ne nous servira pas dans ce chapitre. Mais bien sûr les espaces $(V, q_V)$, $(V_1, q_{V_1})$ et $(V_2, q_{V_2})$ sont relatifs à la même extension.

**X.2.** Comme on l'a dit en IV.5, Langlands et Shelstad ont défini :

• un ouvert de Zariski $\boldsymbol{h}_{G-\mathrm{reg}}$ de $\boldsymbol{h}_{\mathrm{reg}}$ ;

• une correspondance entre classes de conjugaison stable dans $h_{G-\text{reg}}$ et classes de conjugaison stable dans $g_{\text{reg}}$ ;

• une fonction

$$\Delta_{G,H} : h_{G-\text{reg}} \times g_{\text{reg}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle que $\Delta_{G,H}(Y,X) \neq 0$ si et seulement si les classes de conjugaison stable de $Y$ et de $X$ se correspondent.

Cette fonction n'est définie qu'à multiplication près par un scalaire. On la précisera ci-dessous.

Explicitons la correspondance entre classes de conjugaison stable en imposant quelques hypothèses de régularité suffisantes pour notre propos. Pour $n = 1, 2$, soient $(I_n, (a_{n,i}), (c_{n,i}))$ des données vérifiant les conditions de I.7 relativement à $(V_n, q_{V_n})$. On suppose que l'orbite correspondante $\mathcal{O}(I_n, (a_{n,i}), (c_{n,i}))$ existe. Soit $Y_n$ un élément de cette orbite. Posons $Y = (Y_1, Y_2)$. Supposons pour simplifier $I_1$ et $I_2$ disjoints. Posons $I = I_1 \cup I_2$ et notons $(a_i)$ la réunion des familles $(a_{1,i})$ et $(a_{2,i})$. Supposons que la famille $(a_i)$ vérifie encore les conditions de régularité de I.7. Alors $Y \in h_{G-\text{reg}}$. Soit $X \in g_{\text{reg}}$. Supposons que $(V, q_V)$ n'est pas orthogonal pair. Alors les classes de conjugaison stable de $Y$ et $X$ se correspondent si et seulement s'il existe des données $(c_i)$ telles que $X \in \mathcal{O}(I, (a_i), (c_i))$. Supposons $(V, q_V)$ orthogonal pair. Rappelons que quand l'ensemble $\mathcal{O}(I, (a_i), (c_i))$ existe, il est réunion de deux orbites $\mathcal{O}^+(I, (a_i), (c_i))$ et $\mathcal{O}^-(I, (a_i), (c_i))$. Si les classes de conjugaison stable de $Y$ et de $X$ se correspondent, il existe des données $(c_i)$ telles que $X \in \mathcal{O}(I, (a_i), (c_i))$. Inversement, pour toutes données $(c_i)$ telles que $\mathcal{O}(I, (a_i), (c_i))$ existe, il existe un unique signe $\varepsilon$ tel que la classe de conjugaison stable de $Y$ et celle de tout élément de $\mathcal{O}^\varepsilon(I, (a_i), (c_i))$ se correspondent. Supposons $(V, q_V)$, $(V_1, q_{V_1})$ et $(V_2, q_{V_2})$ tous trois exceptionnels. On peut choisir des décompositions lagrangiennes de $V$, $V_1$ et $V_2$ comme en I.6 de sorte que, si les données $(I_n, (a_{n,i}), (c_{n,i}))$ sont exceptionnelles pour $n = 1, 2$ (auquel cas les données $(c_{n,i})$ sont vides) et si $\varepsilon_n$ est le signe tel que $Y_n \in \mathcal{O}^{\varepsilon_n}(I_n, (a_{n,i}), \varnothing)$, alors le signe $\varepsilon$ si-dessus est égal à $\varepsilon_1\varepsilon_2$.

Décrivons le facteur de transfert $\Delta_{G,H}$. Fixons un sous-groupe de Borel $\boldsymbol{B}^*$ de $\boldsymbol{G}$ et un sous-tore maximal $\boldsymbol{T}^*$ de $\boldsymbol{B}^*$, tous deux définis sur $F$. Notons $S$ l'ensemble des racines simples de $\boldsymbol{T}^*$ relatif à $\boldsymbol{B}^*$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ agit sur $S$. Pour tout $\alpha \in S$, on fixe un élément non nul $X_\alpha$ du sous-espace radiciel de $\boldsymbol{g}$ associé à $\alpha$ de sorte que $\tau(X_\alpha) = X_{\tau(\alpha)}$ pour tous $\alpha \in S$, $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Posons

$$W^* = W_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T}^*), \quad N^* = N_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T}^*).$$

On définit une section

$$n : W^* \longrightarrow N^*$$

de la projection naturelle, *cf.* [LS] 2.1.

Soient $Y \in h_{G-\text{reg}}$ et $X \in g_{\text{reg}}$. Supposons que les classes de conjugaison stable de $Y$ et $X$ se correspondent. Soit $\boldsymbol{T}$ le commutant de $X$ dans $\boldsymbol{G}$. C'est un sous-tore maximal de $\boldsymbol{G}$ défini sur $F$. Notons $R$ l'ensemble des racines de $\boldsymbol{T}$ dans $\boldsymbol{g}$. Le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ agit dans $R$. Soit $\alpha \in R$. On lui associe :

- une coracine $\check{\alpha} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, \boldsymbol{T})$ ;
- des homomorphismes dérivés $d\alpha : \boldsymbol{t}(\overline{F}) \to \overline{F}$ et $d\check{\alpha} : \overline{F} \to \boldsymbol{t}(\overline{F})$.

Fixons $x \in \boldsymbol{G}(\overline{F})$ tel que $\boldsymbol{T} = x\boldsymbol{T}^* x^{-1}$. Posons $\boldsymbol{B} = x\boldsymbol{B}^* x^{-1}$. En général, le groupe de Borel $\boldsymbol{B}$ n'est pas défini sur $F$. Il définit un ordre sur $R$. C'est cet ordre que l'on utilise dans les formules ci-dessous.

Soit $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Posons

$$\lambda_1(\tau) = \prod_{\substack{\alpha\in R\\ \alpha>0\\ \tau^{-1}(\alpha)<0}} \check{\alpha} \circ d\alpha(X).$$

C'est un élément de $\boldsymbol{T}(\overline{F})$. Le terme $x^{-1}\tau(x)$ appartient à $N^*$. Notons $w_\tau$ son image dans $W^*$. Posons

$$\lambda_2(\tau) = xn(w_\tau)\tau(x^{-1}).$$

C'est un élément de $\boldsymbol{T}(\overline{F})$. Posons

$$\lambda(\tau) = \lambda_1(\tau)\lambda_2(\tau).$$

D'après [LS] 2.3, l'application $\lambda : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \boldsymbol{T}(\overline{F})$ ainsi définie est un cocycle. Posons

$$H^1(T) = H^1(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F), \boldsymbol{T}(\overline{F})).$$

Notons $\boldsymbol{\lambda} \in H^1(T)$ la classe de $\lambda$.

Les données $\boldsymbol{H}$ et $Y$ définissent un élément $s_T$ du groupe dual $H^1(T)^\vee$. On pose

$$\Delta_1(Y, X) = \langle s_T, \boldsymbol{\lambda}\rangle$$

le produit étant le produit naturel sur $H^1(T)^\vee \times H^1(T)$.

Posons

$$D_G(X) = \left|\prod_{\alpha\in R} d\alpha(X)\right|_F^{1/2}.$$

En remplaçant $\boldsymbol{G}$ par $\boldsymbol{H}$, on définit de même $D_H(Y)$. On pose alors

$$\Delta_{G,H}(Y, X) = \Delta_1(Y, X) D_G(X) D_H(Y)^{-1}$$

*cf.* [LS] 3.7.

***Remarque***. — On a implicitement fait des choix qui trivialisent les termes $\Delta_{II}$ et $\Delta_{III,1}$ de [LS]. Le terme $\Delta_{III,2}$ est trivial pour les algèbres de Lie.

Dans la suite du chapitre, on va expliciter les constructions ci-dessus.

**X.3.** Supposons que $(V,q_V)$ soit symplectique. Fixons $\eta \in F^\times$ et une base $\{e_j; j=1,\dots,d\}$ de $V$ telle que pour tous $j,k \in \{1,\dots,d\}$, on ait l'égalité :

$$q_V(e_j,e_k) = \begin{cases} 0, & \text{si } j+k \neq d+1, \\ \eta(-1)^j, & \text{si } j+k = d+1 \text{ et } j \leqslant d/2. \end{cases}$$

On choisit pour $\boldsymbol{B}^*$, resp. $\boldsymbol{T}^*$, le sous-groupe des éléments de $\boldsymbol{G}$ triangulaires supérieurs, resp. diagonaux, relativement à cette base. On numérote de façon évidente les racines simples : $S = \{\alpha_j; j=1,\dots,d/2\}$. Pour $j \in \{1,\dots,d/2-1\}$, on note $X_{\alpha_j}$ l'élément de $g$ qui annule $e_k$ pour tout $k \neq j+1$, $d+1-j$ et tel que

$$X_{\alpha_j}(e_{j+1}) = e_j, \quad X_{\alpha_j}(e_{d+1-j}) = e_{d-j}.$$

On note $X_{\alpha_{d/2}}$ l'élément de $g$ qui annule $e_k$ pour tout $k \neq 1+d/2$ et tel que

$$X_{\alpha_{d/2}}(e_{1+d/2}) = e_{d/2}.$$

On identifie $W^*$ au sous-groupe des permutations $w$ de l'ensemble $\{1,\dots,d\}$ telles que pour tout $j \in \{1,\dots,d\}$, $w(j)+w(d+1-j) = d+1$. On définit une fonction

$$r : \{1,\dots,d\} \times W^* \longrightarrow \mathbb{N}$$

par

$$r(j,w) = \big|\{k \in \mathbb{N}; j < k \leqslant d, w(j) > w(k)\}\big|$$

pour tous $j \in \{1,\dots,d\}$, $w \in W^*$.

Le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ agit trivialement sur tous les objets.

Supposons $(V,q_V)$ orthogonal impair. On fixe $\eta \in F^\times$ et une base $\{e_j; j=1,\dots,d\}$ de $V$ telle que pour tous $j,k \in \{1,\dots,d\}$, on ait l'égalité :

$$q_V(e_j,e_k) = \begin{cases} 0, & \text{si } j+k \neq d+1, \\ (-1)^{j+1}\eta/2, & \text{si } j+k = d+1 \text{ et } j \neq k, \\ (-1)^{(d-1)/2}\eta, & \text{si } j=k=(d+1)/2. \end{cases}$$

De tels choix sont possibles. On choisit $\boldsymbol{B}^*$ et $\boldsymbol{T}^*$ comme ci-dessus. On numérote les racines simples : $S = \{\alpha_j; j=1,\dots,(d-1)/2\}$. Pour $j \in \{1,\dots,(d-3)/2\}$, on définit $X_{\alpha_j}$ comme dans le cas symplectique. On note $X_{\alpha_{(d-1)/2}}$ l'élément de $g$ qui annule $e_k$ pour tout $k \neq (d+1)/2, (d+3)/2$ et tel que

$$X_{\alpha_{(d-1)/2}}(e_{(d+1)/2}) = 2e_{(d-1)/2}, \quad X_{\alpha_{(d-1)/2}}(e_{(d+3)/2}) = e_{(d+1)/2}.$$

On identifie $W^*$ au même groupe de permutations que dans le cas symplectique et on définit une fonction $r$ par la même formule. Le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ agit trivialement.

Supposons $(V,q_V)$ orthogonal pair et déployé. On fixe $\eta \in F^\times$ et une base $\{e_j; j=1,\dots,d\}$ de $V$ telle que pour tous $j,k \in \{1,\dots,d\}$, on ait l'égalité

$$(1) \qquad q_V(e_j,e_k) = \begin{cases} 0, & \text{si } j+k \neq d+1, \\ (-1)^{j+1}\eta/2, & \text{si } j+k = d+1. \end{cases}$$

On choisit $\boldsymbol{B}^*$ et $\boldsymbol{T}^*$ comme ci-dessus. On numérote les racines simples : $S = \{\alpha_j; j = 1, \ldots, d/2\}$. Pour $j \in \{1, \ldots, d/2 - 1\}$, on définit $X_{\alpha_j}$ comme dans le cas symplectique. On note $X_{\alpha_{d/2}}$ l'élément de $g$ qui annule $e_k$ pour tout $k \neq d/2+1$, $d/2+2$ et tel que

$$X_{\alpha_{d/2}}(e_{d/2+1}) = e_{d/2-1}, \quad X_{\alpha_{d/2}}(e_{d/2+2}) = e_{d/2}.$$

On identifie $W^*$ au sous-groupe des permutations $w$ de l'ensemble $\{1, \ldots, d\}$ telles que

- pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$, $w(j) + w(d+1-j) = d+1$ ;
- $\{j; 1 \leqslant j \leqslant d/2, d/2+1 \leqslant w(j) \leqslant d\}$ a un nombre pair d'éléments.

On définit une fonction

$$r : \{1, \ldots, d\} \times W^* \longrightarrow \mathbb{N}$$

par

$$r(j,w) = |\{k \in \mathbb{N}; j < k \leqslant d, w(j) > w(k), j+k \neq d+1\}|$$

pour tous $j \in \{1, \ldots, d\}$, $w \in W^*$.

Supposons $(V, q_V)$ orthogonal pair non déployé. Puisque $\boldsymbol{G}$ est quasi-déployé, il existe une unique extension quadratique de $F$ qui déploie $\boldsymbol{G}$. Notons-la $E$. La forme $q_V$ se prolonge $E$-bilinéairement en une forme sur $V \otimes_F E$, encore notée $q_V$, qui est déployée. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E/F)$ agit sur $V \otimes_F E$. On fixe $\eta \in F^\times$ et une base $\{e; j = 1, \ldots, d\}$ de $V \otimes_F E$ vérifiant les égalités (1) et de plus

- pour tout $j \in \{1, \ldots, d\} - \{d/2, d/2+1\}$, $e_j$ est fixé par $\mathrm{Gal}(E/F)$ ;
- si $\tau$ est l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(E/F)$, $\tau(e_{d/2}) = e_{d/2+1}$ et $\tau(e_{d/2+1}) = e_{d/2}$.

De tels choix sont possibles. Le reste des constructions est analogue à celui du cas déployé. L'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ sur les différents objets se déduit de son action sur les vecteurs de base.

Supposons $(V, q_V)$ unitaire. On note $\theta$ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(E/F)$. On fixe $\eta \in E^*$ et une base $\{e_j; j = 1, \ldots, d\}$ de $V$ sur $E$ de sorte que

- $\theta(\eta) = (-1)^{d+1}\eta$,
- pour tous $j, k \in \{1, \ldots, d\}$,

$$q_V(e_j, e_k) = \begin{cases} 0, & \text{si } j+k \neq d+1, \\ 2\eta(-1)^{j+1}, & \text{si } j+k = d+1, \end{cases}$$

de tels choix sont possibles.

Notons ${}_\theta V$ le groupe $V$ muni de la structure de $E$-espace :

$$(z, v) \longmapsto \theta(z)v$$

pour tous $v \in V$, $z \in E$. Pour $j \in \{1, \ldots, d\}$, on note ${}_\theta e_j$ le vecteur $e_j$ vu comme élément de ${}_\theta V$. La forme $q_V$ se prolonge en une dualité $\overline{F}$ linéaire :

$$({}_\theta V \underset{E}{\otimes} \overline{F}) \times (V \underset{E}{\otimes} \overline{F}) \longrightarrow \overline{F}.$$

Le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ agit naturellement sur $({}_\theta V \otimes_E \overline{F}) \times (V \otimes_E \overline{F})$. Pour $j,k \in \{1,\ldots,d\}$ et $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, on a :

$$\tau({}_\theta e_j, e_k) = \begin{cases} ({}_\theta e_j, e_k), & \text{si } \tau \text{ agit trivialement sur } E, \\ ({}_\theta e_k, e_j), & \text{si } \tau \text{ agit non trivialement sur } E. \end{cases}$$

La forme $q_V$ est équivariante pour les actions de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Le groupe $\boldsymbol{G}(\overline{F})$ est le groupe des

$$({}_\theta g, g) \in GL({}_\theta V \otimes_E \overline{F}) \times GL(V \otimes_E \overline{F})$$

qui conservent $q_V$. L'action de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ sur $\boldsymbol{G}(\overline{F})$ se déduit de son action sur l'espace $({}_\theta V \otimes_E \overline{F}) \times (V \otimes_E \overline{F})$. On identifie $\boldsymbol{G}(\overline{F})$ à $GL(V \otimes_E \overline{F})$ par $({}_\theta g, g) \mapsto g$.

Cette identification étant faite, on choisit $\boldsymbol{B}^*$ et $\boldsymbol{T}^*$ comme précédemment. On numérote les racines simples : $S = \{\alpha_j ; j = 1, \ldots, d-1\}$. Pour $j \in \{1, \ldots, d-1\}$, on note $X_{\alpha_j}$ l'élément de $\boldsymbol{g}(\overline{F}) = \boldsymbol{g\ell}(V \otimes_E \overline{F})$ qui annule $e_k$ pour tout $k \neq j+1$ et tel que

$$X_{\alpha_j}(e_{j+1}) = e_j .$$

On identifie $W^*$ au groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, d\}$. On définit une fonction $r$ comme dans le cas symplectique.

L'action de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ sur les différents objets se déduit de son action sur l'espace $({}_\theta V \otimes_E \overline{F}) \times (V \otimes_E \overline{F})$.

**X.4.** D'après les constructions du paragraphe précédent, $\boldsymbol{G}(\overline{F})$ s'identifie à un sous-groupe de $\boldsymbol{GL}(V \otimes_F \overline{F})$ dans les cas symplectique ou orthogonal, $\boldsymbol{GL}(V \otimes_E \overline{F})$ dans le cas unitaire. Le lemme suivant décrit l'application $n$ de X.2.

***Lemme.*** — *Soient $w \in W^*$ et $j \in \{1, \ldots, d\}$. On a l'égalité*

$$n(w)(e_j) = (-1)^{r(j,w)} e_{w(j)} .$$

*Démonstration.* — Pour $\alpha \in S$, on note :

- $X_{-\alpha}$ l'unique élément du sous-espace radiciel de $\boldsymbol{g}(\overline{F})$ associé à $-\alpha$ tel que

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = d\check{\alpha}(1);$$

- $w_\alpha \in W^*$ la symétrie simple associée à $\alpha$.

Le groupe $W^*$ est muni d'une fonction longueur que l'on note $\ell$. D'autre part, l'exponentielle notée exp est bien définie sur les éléments nilpotents de $\boldsymbol{g}(\overline{F})$.

L'application $n$ est caractérisée par les deux propriétés suivantes :

- pour tout $\alpha \in S$,

$$n(w_\alpha) = \exp(X_\alpha) \exp(-X_{-\alpha}) \exp(X_\alpha);$$

- pour tous $w, w' \in W^*$ tels que $\ell(w) + \ell(w') = \ell(ww')$,

$$n(ww') = n(w)n(w');$$

*cf.* [LS] 2.1. On vérifie cas par cas que l'application définie par la formule de l'énoncé vérifie ces deux propriétés. □

**X.5.** Soit $F_0$ une extension finie de $F$. Posons $\boldsymbol{T} = \mathrm{Res}_{F_0/F}(\mathbb{G}_m)$. On a $T = F_0^\times$. Il est bien connu que $H^1(T) = \{0\}$.

Soient maintenant $F_0^\#$ une extension finie de $F$ et $F_0$ une extension quadratique de $F_0^\#$. On note $\tau_0$ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(F_0/F_0^\#)$ et $N_{F_0/F_0^\#} : F_0^\times \to F_0^{\#\times}$ la norme. Notons $\boldsymbol{T}$ le tore défini sur $F$ tel que

$$T = \{z \in F_0^\times \,;\, z\tau_0(z) = 1\}.$$

Il est bien connu que $H^1(T) \simeq \{\pm 1\}$. Rappelons la construction d'un tel isomorphisme. Notons $\Sigma(F_0)$ l'ensemble des plongements de $F_0$ dans $\overline{F}$ qui prolongent celui de $F$ dans $\overline{F}$. Fixons un élément de $\Sigma(F_0)$ que l'on note $1_{F_0}$, ou simplement 1, grâce auquel on identifie $F_0$ à un sous-corps de $\overline{F}$. Le groupe $\boldsymbol{T}(\overline{F})$ est égal à l'ensemble des applications

$$y : \Sigma(F_0) \longrightarrow \overline{F}^\times$$

telles que $y(\sigma)y(\sigma\tau_0) = 1$ pour tout $\sigma \in \Sigma(F_0)$. L'action de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ est ainsi définie : pour $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, $y \in \boldsymbol{T}(\overline{F})$ et $\sigma \in \Sigma(F_0)$, on a l'égalité

$$(\tau(y))(\sigma) = \tau(y(\tau^{-1}\sigma)).$$

Soit alors $\tau \mapsto y_\tau$ un cocycle de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ dans $\boldsymbol{T}(\overline{F})$. D'après le théorème « Hilbert 90 », il existe $z \in \overline{F}^\times$ tel que

$$y_\tau(1) = \tau(z)z^{-1}$$

pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F_0)$. Fixons un tel $z$. Considérons l'élément

$$y_\tau(1)z\tau(z)$$

de $\overline{F}^\times$ pour $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F_0^\#)$ de restriction non triviale à $F_0$. Il est indépendant de $\tau$. Notons-le simplement $\widetilde{y}$. On vérifie que $\widetilde{y} \in F_0^{\#\times}$ et que sa classe $\widetilde{y}N_{F_0/F_0^\#}(F_0^\times)$ dans $F_0^{\#\times}/N_{F_0/F_0^\#}(F_0^\times)$ est indépendante des choix de $z$ et de $1_{F_0}$ et ne dépend que de la classe du cocycle $\tau \mapsto y_\tau$ dans $H^1(T)$. L'application qui à cette classe de cocycles associe $\widetilde{y}N_{F_0/F_0^\#}(F_0^\times)$ est l'isomorphisme cherché de $H^1(T)$ sur $F_0^{\#\times}/N_{F_0/F_0^\#}(F_0^\times) \simeq \{\pm 1\}$.

**X.6.** Considérons des données $(I,(a_i),(c_i))$ comme en I.7 telles que $\mathcal{O}(I,(a_i),(c_i))$ existe. Soit $X$ un élément de cet ensemble. Notons $\boldsymbol{T}$ le centralisateur de $X$ dans $\boldsymbol{G}$. On va construire un $x \in \boldsymbol{G}(\overline{F})$ tel que $\boldsymbol{T} = x\boldsymbol{T}^*x^{-1}$. On utilise les notations de I.7.

Supposons $(V, q_V)$ symplectique. Identifions $V, q_V$ et $X$ aux objets $W, q_W, X_W$ définis en I.7. Pour tout $i \in I$, notons $\Sigma(F_i)$ l'ensemble des homomorphismes de $F$-algèbres non nuls de $F_i$ dans $\overline{F}$. Notons $\Sigma(V)$ l'ensemble des couples $(i,\sigma)$ tels que

$i \in I$ et $\sigma \in \Sigma(F_i)$. L'espace $V \otimes_F \overline{F}$ est muni d'une base $\{f_{i,\sigma}; (i,\sigma) \in \Sigma(V)\}$ telle que pour tout $i \in I$ et tout $v_i \in F_i \subset V$, on ait l'égalité

$$v_i = \sum_{\sigma \in \Sigma(F_i)} \sigma(v_i) f_{i,\sigma}.$$

Pour tous $(i,\sigma)$, $(i',\sigma') \in \Sigma(V)$, on a l'égalité :

$$q_V(f_{i',\sigma'}, f_{i,\sigma}) = \begin{cases} 0, & \text{si } (i',\sigma') \neq (i,\sigma\tau_i), \\ \sigma(c_i)[F_i : F]^{-1}, & \text{si } (i',\sigma') = (i,\sigma\tau_i). \end{cases}$$

On a les égalités suivantes, pour $(i,\sigma) \in \Sigma(V)$ et $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ :

$$X(f_{i,\sigma}) = \sigma(a_i) f_{i,\sigma},$$
$$\tau(f_{i,\sigma}) = f_{i,\tau\sigma}.$$

Fixons une bijection :

$$\delta : \Sigma(V) \longrightarrow \{1, \ldots, d\}$$

de sorte que pour tout $(i,\sigma) \in \Sigma(V)$, on ait l'égalité :

$$\delta(i,\sigma\tau_i) + \delta(i,\sigma) = d + 1. \tag{1}$$

Fixons de plus une application :

$$\mu : \{1, \ldots, d\} \longrightarrow \overline{F}^\times$$

telle que pour tout $j \in \{1, \ldots, d/2\}$, en posant $(i,\sigma) = \delta^{-1}(j)$, on ait l'égalité :

$$\mu(j)\mu(d+1-j) = \eta(-1)^{j+1}[F_i : F]\sigma(c_i)^{-1}. \tag{2}$$

Définissons un élément $x \in \boldsymbol{GL}(V \otimes_F \overline{F})$ par :

$$x(e_j) = \mu(j) f_{\delta^{-1}(j)}$$

pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$. Alors $x \in \boldsymbol{G}(\overline{F})$ et $\boldsymbol{T} = x\boldsymbol{T}^* x^{-1}$.

Supposons $(V, q_V)$ orthogonal pair. Une construction similaire s'applique. On doit remplacer $\eta$ par $\eta/2$ dans l'égalité (2). L'élément $x$ construit appartient au groupe orthogonal. En remplaçant éventuellement $\delta$ par sa composée avec la symétrie qui échange 1 et $d$ et fixe $\{2, \ldots, d-1\}$, on peut supposer $x \in \boldsymbol{G}(\overline{F})$.

Supposons $(V, q_V)$ orthogonal impair. On identifie $V$ à

$$F \oplus \left(\bigoplus_{i \in I} F_i\right),$$

*cf.* I.7. On fixe un élément non nul $f_0$ du facteur $F$. Alors $V \otimes_F \overline{F}$ est muni d'une base $\{f_0\} \cup \{f_{i,\sigma}; (i,\sigma) \in \Sigma(V)\}$. On fixe une bijection

$$\delta : \{0\} \cup \Sigma(V) \longrightarrow \{1, \ldots, d\}$$

vérifiant (1) ainsi que :

$$\delta(0) = (d+1)/2.$$

On fixe une application

$$\mu : \{1, \dots, d\} \longrightarrow \overline{F}^{\times}$$

de sorte que :

- pour tout $j \in \{1, \dots, (d-1)/2\}$, posons $(i, \sigma) = \delta^{-1}(j)$, alors on a l'égalité :

$$\mu(j)\,\mu(d+1-j) = \frac{1}{2}\eta(-1)^{j+1}[F_i : F]\sigma(c_i)^{-1}.$$

- $\mu((d+1)/2)^2 = (-1)^{(d-1)/2}\eta q_V(f_0, f_0)^{-1}$.

On construit $x$ comme précédemment. Quitte à multiplier $\mu((d+1)/2)$ par $-1$, on peut supposer $x \in \boldsymbol{G}(\overline{F})$.

Supposons $(V, q_V)$ unitaire. On identifie $V$ à

$$\bigoplus_{i \in I} F_i,$$

*cf.* I.7. Pour tout $i \in I$, on définit ${}_\theta F_i$ comme on a défini ${}_\theta V$ en X.3. On note $\Sigma(F_i)$, resp. $\Sigma({}_\theta F_i)$, l'ensemble des homomorphismes de $E$-algèbres non nuls de $F_i$, resp. ${}_\theta F_i$ dans $\overline{F}$. Remarquons qu'en identifiant $F_i$ et ${}_\theta F_i$ en tant que groupes, l'application $\sigma \mapsto \sigma\tau_i$ est une bijection de $\Sigma(F_i)$ sur $\Sigma({}_\theta F_i)$. Notons $\Sigma(V)$, resp. $\Sigma({}_\theta V)$ l'ensemble des couples $(i, \sigma)$ tels que $i \in I$ et $\sigma \in \Sigma(F_i)$, resp. $\sigma \in \Sigma({}_\theta F_i)$. L'espace $V \otimes_E \overline{F}$ est muni d'une base $\{f_{i,\sigma}; (i, \sigma) \in \Sigma(V)\}$ et de même ${}_\theta V \otimes_E \overline{F}$ est muni d'une base $\{f_{i,\sigma}; (i, \sigma) \in \Sigma({}_\theta V)\}$. Pour tous $(i, \sigma) \in \Sigma(V)$, $(i', \sigma') \in \Sigma({}_\theta V)$, on a l'égalité :

$$q_V(f_{i',\sigma'}, f_{i,\sigma}) = \begin{cases} 0, & \text{si } (i', \sigma') \neq (i, \sigma\tau_i), \\ \sigma(c_i)[F_i : E]^{-1}, & \text{si } (i', \sigma') = (i, \sigma\tau_i). \end{cases}$$

L'élément $X$ de $g$ s'identifie à un élément de $\boldsymbol{g\ell}({}_\theta V \otimes_E \overline{F}) \times \boldsymbol{g\ell}(V \otimes_E \overline{F})$ que l'on notera $({}_\theta X, X)$. On a les égalités suivantes, pour $(i, \sigma) \in \Sigma(V)$, $(i', \sigma') \in \Sigma({}_\theta V)$ et $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ :

$${}_\theta X(f_{i',\sigma'}) = \sigma'(a_{i'})\,f_{i',\sigma'}, \quad X(f_{i,\sigma}) = \sigma(a_i)\,f_{i,\sigma},$$

$$\tau(f_{i',\sigma'}, f_{i,\sigma}) = \begin{cases} (f_{i',\tau\sigma'}, f_{i,\tau\sigma}), & \text{si } \tau \text{ agit trivialement sur } E, \\ (f_{i,\tau\sigma}, f_{i',\tau\sigma'}), & \text{sinon}. \end{cases}$$

On fixe une bijection

$$\delta : \Sigma(V) \longrightarrow \{1, \dots, d\},$$

on note

$${}_\theta\delta : \Sigma({}_\theta V) \longrightarrow \{1, \dots, d\}$$

la bijection telle que pour tout $(i, \sigma) \in \Sigma(V)$,

$${}_\theta\delta(i, \sigma\tau_i) = d + 1 - \delta(i, \sigma).$$

On définit une application

$$\mu : \{1, \dots, d\} \longrightarrow \overline{F}^{\times}$$

par la formule suivante. Soient $j \in \{1, \dots, d\}$ et $(i, \sigma) = \sigma^{-1}(j)$. Alors

$$\mu(j) = (-1)^{j+1}\eta[F_i : F]\sigma(c_i)^{-1}.$$

On définit un automorphisme $x$ de $({}_\theta V \otimes_E \overline{F}) \times (V \otimes_E \overline{F})$ par :

$$x({}_\theta e_j, e_k) = (f_{{}_\theta\delta^{-1}(j)}, \mu(k) f_{\delta^{-1}(k)}).$$

Alors $x \in \boldsymbol{G}(\overline{F})$ et $\boldsymbol{T} = x\boldsymbol{T}^* x^{-1}$.

**X.7.** Conservons les mêmes hypothèses. Notons $P_X$ le polynôme caractéristique de $X$ vu comme élément de $\mathrm{End}_F(V)$ dans les cas symplectique ou orthogonal, $\mathrm{End}_E(V)$ dans le cas unitaire. Il ne dépend que des données $(I, (a_i))$. Notons $P'_X$ le polynôme dérivé. On a défini en I.7 le sous-ensemble $I^*$ de $I$. Pour $i \in I^*$, posons

$$C_i = \begin{cases} \eta[F_i : F] c_i^{-1} a_i^{-1} P'_X(a_i), & \text{si } (V, q_V) \text{ est orthogonal pair,} \\ \eta[F_i : F] c_i^{-1} P'_X(a_i), & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie que $C_i \in F_i^{\#\times}$. Rappelons que l'on note $\mathrm{sgn}_{F_i/F_i^\#}$ le caractère quadratique de $F_i^{\#\times}$ attaché à l'extension $F_i/F_i^\#$.

En X.2, on a attaché $X$ un élément $\boldsymbol{\lambda}$ de $H^1(T)$. D'après X.5,

$$H^1(T) = \{\pm 1\}^{I^*}.$$

***Lemme***. — *On a l'égalité*

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathrm{sgn}_{F_i/F_i^\#}(C_i))_{i \in I^*}.$$

*Démonstration*. — On définit comme en X.2 un cocycle $\lambda$ représentant $\boldsymbol{\lambda}$, l'élément $x$ étant choisi comme en X.6. Soit $i \in I^*$. Fixons un élément de $\Sigma(F_i)$, que l'on note $1_{F_i}$, grâce auquel on identifie $F_i$ à un sous-corps de $\overline{F}$. On définit une fonction

$$\lambda(i, \cdot) : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F_i^\#) \longrightarrow \overline{F}^\times$$

par

$$\lambda(\tau) f_{i,1_{F_i}} = \lambda(i, \tau) f_{i,1_{F_i}}$$

pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F_i^\#)$. D'après X.5, il existe $z_i \in \overline{F}^\times$ tel que :

(1) $$\lambda(i, \tau) = \tau(z_i) z_i^{-1}$$

pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F_i)$. Fixons un tel $z_i$ et $\theta_i \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F_i^\#)$ de restriction non triviale à $F_i$. Toujours d'après X.5, on a l'égalité :

(2) $$\boldsymbol{\lambda} = \left(\mathrm{sgn}_{F_i/F_i^\#}(\lambda(i, \theta_i) z_i \theta_i(z_i))\right)_{i \in I^*}.$$

On calcule les objets ci-dessus cas par cas. On suppose désormais $(V, q_V)$ symplectique et on laisse les autres cas au lecteur.

Fixons $i \in I^*$, notons simplement $1 = 1_{F_i}$ et posons $b = \delta(i, 1)$. Soit $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F_i^\#)$. On a l'égalité :

$$\lambda_2(\tau) f_{i,1} = (x n(w_\tau) \tau x^{-1} \tau^{-1})(f_{i,1}).$$

Supposons $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F_i)$. Alors

$$\begin{aligned}(xn(w_\tau)\tau x^{-1}\tau^{-1})(f_{i,1}) &= (xn(w_\tau)\tau x^{-1})(f_{i,1})\\ &= (xn(w_\tau)\tau)(\mu(b)^{-1}e_b)\\ &= \tau\circ\mu(b)^{-1}(xn(w_\tau))(e_b).\end{aligned}$$

On calcule $w_\tau$. Notons $w'_\tau$ la bijection : $(j,\sigma)\mapsto(j,\tau\sigma)$ de $\Sigma(V)$. Alors $w_\tau = \delta\circ w'_\tau\circ\delta^{-1}$. Grâce au lemme X.4, on a donc :

$$n(w_\tau)(e_b) = (-1)^{r(\tau)}e_b,$$

où

$$r(\tau) = \big|\{(j,\sigma)\in\Sigma(V);\, \delta(j,\tau\sigma) < b < \delta(j,\sigma)\}\big|.$$

D'où l'égalité

$$\lambda_2(\tau)f_{i,1} = \mu(b)\tau\circ\mu(b)^{-1}(-1)^{r(\tau)}f_{i,1}. \tag{3}$$

Supposons la restriction de $\tau$ à $F_i$ non triviale. Alors

$$\begin{aligned}(xn(w_\tau)\tau x^{-1}\tau^{-1})(f_{i,1}) &= (xn(w_\tau)\tau x^{-1})(f_{i,\tau_i})\\ &= (xn(w_\tau)\tau)(\mu(d+1-b)^{-1}e_{d+1-b})\\ &= \tau\circ\mu(d+1-b)^{-1}(xn(w_\tau))(e_{d+1-b}).\end{aligned}$$

Comme ci-dessus :

$$n(w_\tau)(e_{d+1-b}) = (-1)^{r(\tau)}e_b$$

où

$$r(\tau) = \big|\{(j,\sigma)\in\Sigma(V);\, d+1-b < \delta(j,\sigma),\, \delta(j,\tau\sigma) < b\}\big|.$$

D'où l'égalité

$$\lambda_2(\tau)f_{i,1} = \mu(b)\tau\circ\mu(d+1-b)^{-1}(-1)^{r(\tau)}f_{i,1}. \tag{4}$$

L'ensemble $R$ des racines de $\boldsymbol{T}$ se décrit ainsi. Considérons le sous-ensemble des $((j,\sigma),(j',\sigma'))\in\Sigma(V)^2$ tels que $(j,\sigma)\neq(j',\sigma')$. Munissons-le de la relation d'équivalence engendrée par :

$$((j,\sigma),(j',\sigma')) \sim ((j',\sigma'\tau_{j'}),(j,\sigma\tau_j)).$$

Alors $R$ s'identifie à l'ensemble des classes d'équivalence. Soient $((j,\sigma),(j',\sigma'))$ un couple comme ci-dessus et $\alpha\in R$ la racine associée. On a

- $d\alpha(X) = \sigma(a_j) - \sigma'(a_{j'})$ ;
- $\alpha > 0 \Leftrightarrow \delta(j,\sigma) < \delta(j',\sigma')$ ;
- pour $z\in\overline{F}^\times$ et $(j'',\sigma'')\in\Sigma(V)$,

$$\check{\alpha}(z)f_{j'',\sigma''} = \begin{cases} z f_{j'',\sigma''}, & \text{si } (j'',\sigma'') = (j,\sigma) \text{ ou } (j',\sigma'\tau_{j'}),\\ z^{-1}f_{j'',\sigma''}, & \text{si } (j'',\sigma'') = (j,\sigma\tau_j) \text{ ou } (j',\sigma'),\\ f_{j'',\sigma''}, & \text{sinon}.\end{cases}$$

Soit $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F_i^{\#})$. On déduit des formules ci-dessus l'égalité suivante :

$$\lambda_1(\tau) f_{i,1} = \Big[ \prod_{(j,\sigma)\in R^+(\tau)} (a_i - \sigma(a_j)) \Big] \Big[ \prod_{(j,\sigma)\in R^-(\tau)} (\sigma(a_j) - a_i)^{-1} \Big] f_{i,1}, \tag{5}$$

où :

- si $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F_i)$,

$$R^+(\tau) = \big\{(j,\sigma) \in \Sigma(V) ; \delta(j,\tau^{-1}\sigma) < b < \delta(j,\sigma)\big\},$$
$$R^-(\tau) = \big\{(j,\sigma) \in \Sigma(V) ; \delta(j,\sigma) < b < \delta(j,\tau^{-1}\sigma)\big\};$$

- si la restriction de $\tau$ à $F_i$ est non triviale,

$$R^+(\tau) = \big\{(j,\sigma) \in \Sigma(V) ; b < \delta(j,\sigma), \delta(j,\tau^{-1}\sigma) < d+1-b\big\},$$
$$R^-(\tau) = \big\{(j,\sigma) \in \Sigma(V) ; \delta(j,\sigma) < b, d+1-b < \delta(j,\tau^{-1}\sigma)\big\}.$$

Posons

$$S = \big\{(j,\sigma) \in \Sigma(V) ; b < \delta(j,\sigma)\big\},$$

$$z_i = \mu(b)^{-1} \prod_{(j,\sigma)\in S} (a_i - \sigma(a_j))^{-1}. \tag{6}$$

Soit $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F_i)$. Grâce à l'égalité $\tau(a_i) = a_i$, on calcule :

$$\tau(z_i) z_i^{-1} = \mu(b)\tau \circ \mu(b)^{-1} \Big[ \prod_{(j,\sigma)\in S} (a_i - \sigma(a_j)) \Big] \Big[ \prod_{(j,\sigma)\in S(\tau)} (a_i - \sigma(a_j))^{-1} \Big],$$

où

$$S(\tau) = \big\{(j,\sigma) \in \Sigma(V) ; b < \delta(j,\tau^{-1}\sigma)\big\}.$$

En éliminant les termes égaux, on peut remplacer dans l'égalité ci-dessus $S$ par $S - S \cap S(\tau)$ et $S(\tau)$ par $S(\tau) - S \cap S(\tau)$. Or $S - S\cap S(\tau) = R^+(\tau)$ et $S(\tau) - S \cap S(\tau) = R^-(\tau)$. D'autre part, en utilisant la bijection $(j,\sigma) \mapsto (j,\tau^{-1}\sigma)$, on voit que :

$$|R^-(\tau)| = r(\tau).$$

On obtient l'égalité :

$$\tau(z_i) z_i^{-1} = \mu(b)\tau\circ\mu(b)^{-1} (-1)^{r(\tau)} \Big[ \prod_{(j,\sigma)\in R^+(\tau)} (a_i - \sigma(a_j)) \Big] \Big[ \prod_{(j,\sigma)\in R^-(\tau)} (\sigma(a_j) - a_i)^{-1} \Big].$$

Grâce à (3) et (5), on en déduit l'égalité (1).

Soit maintenant $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F_i^{\#})$ de restriction non triviale à $F_i$. On a alors $\tau(a_i) = -a_i$, d'où :

$$\tau(z_i) = \tau \circ \mu(b)^{-1} \prod_{(j,\sigma)\in S(\tau)} (-a_i - \sigma(a_j))^{-1},$$

$S(\tau)$ étant défini comme ci-dessus. Posons

$$S'(\tau) = \big\{(j,\sigma) \in \Sigma(V) ; b < \delta(j,\tau^{-1}\sigma\tau_j)\big\}.$$

Utilisons le changement de variables $(j,\sigma) \mapsto (j,\sigma\tau_j)$ en se rappelant que $\tau_j(a_j) = -a_j$ pour tout $j \in I$. Alors :

$$\tau(z_i) = (-1)^{|S'(\tau)|}\tau \circ \mu(b)^{-1} \prod_{(j,\sigma)\in S'(\tau)} (a_i - \sigma(a_j))^{-1}. \tag{7}$$

Pour tout sous-ensemble $U$ de $\Sigma(V)$, notons $\mathbf{1}_U$ sa fonction caractéristique. Posons

$$m = \mathbf{1}_{R^-(\tau)} + \mathbf{1}_{S'(\tau)} + \mathbf{1}_S - \mathbf{1}_{R^+(\tau)}.$$

L'égalité suivante résulte de (4), (5), (6) et (7) :

$$\begin{aligned} &\lambda(i,\tau)\, z_i\, \tau(z_i) \\ &\quad= \tau(\mu(b)\,\mu(d+1-b))^{-1}(-1)^{r(\tau)+|R^-(\tau)|+|S'(\tau)|} \prod_{(j,\sigma)\in\Sigma(V)} (a_i - \sigma(a_j))^{-m(j,\sigma)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Grâce à X.6 (1), on a :

$$S'(\tau) = \bigl\{(j,\sigma) \in \Sigma(V)\,;\, \delta(j,\tau^{-1}\sigma) < d+1-b\bigr\}. \tag{9}$$

On remarque que $R^+(\tau) \subset S$ et

$$S - R^+(\tau) = \bigl\{(j,\sigma) \in \Sigma(V)\,;\, b < \delta(j,\sigma),\, d+1-b \leqslant \delta(j,\tau^{-1}\sigma)\bigr\}.$$

D'autre part, pour $(j,\sigma) \in \Sigma(V)$, les égalités $\delta(j,\sigma) = b$ et $\delta(j,\tau^{-1}\sigma) = d+1-b$ sont équivalentes. On a donc l'égalité :

$$R^-(\tau) = \bigl\{(j,\sigma) \in \Sigma(V)\,;\, \delta(j,\sigma) < b,\, d+1-b \leqslant \delta(j,\tau^{-1}\sigma)\bigr\}.$$

Alors les ensembles $S'(\tau)$, $S - R^+(\tau)$ et $R^-(\tau)$ sont deux à deux disjoints et leur réunion est $\Sigma(V) - \{(i,1)\}$. Le dernier produit de la formule (8) est égal à

$$\prod_{(j,\sigma)\in\Sigma(V)-\{(i,1)\}} (a_i - \sigma(a_j))^{-1},$$

*i.e.* à $P'_X(a_i)^{-1}$.

D'après (9), on a $|S'(\tau)| = d - b$. En utilisant la bijection $(j,\sigma) \mapsto (j,\tau^{-1}\sigma)$, on voit que $|R^-(\tau)| = r(\tau)$. En utilisant X.6 (2) et en se rappelant que $\tau(c_i) = -c_i$, l'égalité (8) devient

$$\lambda(i,\tau)\, z_i\, \tau(z_i) = \eta^{-1}[F_i : F]^{-1} c_i\, P'_X(a_i)^{-1} = C_i^{-1}.$$

Evidemment $\mathrm{sgn}_{F_i/F_i^\#}(C_i^{-1}) = \mathrm{sgn}_{F_i/F_i^\#}(C_i)$. L'égalité de l'énoncé résulte alors de (2). $\square$

***Remarque***. — D'après [LS] 2.3, $\boldsymbol{\lambda}$ appartient à l'image de l'homomorphisme

$$H^1(T_{sc}) \longrightarrow H^1(T),$$

où $\boldsymbol{T}_{sc}$ est l'image réciproque de $\boldsymbol{T}$ dans le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de $\boldsymbol{G}$. Cette image est égale à $H^1(T)$ si $(V,q_V)$ est symplectique. Si $(V,q_V)$ est orthogonal ou unitaire, elle est égale au noyau de l'homomorphisme produit :

$$H^1(T) = \{\pm1\}^{I^*} \longrightarrow \{\pm1\}.$$

Il en résulte dans ce cas que l'on a l'égalité

$$\prod_{i\in I^*} \mathrm{sgn}_{F_i/F_i^\#}(C_i) = 1.$$

**X.8.** Pour $n = 1,2$, soient $(I_n, (a_{n,i})(c_{n,i}))$ des données vérifiant les conditions de I.7 relativement à $(V_n, q_{V_n})$, telles que l'orbite $\mathcal{O}(I_n, (a_{n,i}), (c_{n,i}))$ existe dans $\mathfrak{g}_{n,\mathrm{reg}}$. Fixons $Y_n$ dans cette orbite, posons $Y = (Y_1, Y_2)$. Posons

$$I = I_1 \cup I_2, \quad I^* = I_1^* \cup I_2^*$$

(en supposant $I_1$ et $I_2$ disjoints). Notons $(a_i)$ la réunion des familles $(a_{1,i})$ et $(a_{2,i})$. Supposons que ces données vérifient encore les conditions de régularité de I.7, relativement à $(V, q_V)$. Soit $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$, supposons que les classes de conjugaison stable de $X$ et de $Y$ se correspondent. Il existe alors des données $(c_i)$ telles que $X \in \mathcal{O}(I, (a_i), (c_i))$. Fixons de telles données. Pour $i \in I^*$, on définit $C_i$ comme dans le paragraphe précédent.

***Proposition***. — *Sous ces hypothèses, on a l'égalité :*

$$\Delta_{G,H}(Y, X) = D_G(X) D_H(Y)^{-1} \prod_{i\in I_2^*} \mathrm{sgn}_{F_i/F_i^\#}(C_i).$$

*Démonstration.* — Notons $\boldsymbol{T}$ le commutant de $X$ dans $\boldsymbol{G}$, identifions $H^1(T)$ à $\{\pm 1\}^{I^*}$ et $H^1(T)^\vee$ à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^*}$. On peut choisir les données auxiliaires définissant le groupe endoscopique $\boldsymbol{H}$ de sorte que l'élément $s_T = (s_{T,i})_{i\in I^*}$ de $H^1(T)^\vee$ vérifie :

$$s_{T,i} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \in I_1^*, \\ 1, & \text{si } i \in I_2^*. \end{cases}$$

L'énoncé résulte de la définition du facteur de transfert (*cf.* X.2) et du lemme X.7. □

Dans la suite, on appliquera la proposition au cas où $V$, $V_1$, $V_2$ possèdent tous trois des réseaux autoduaux (et l'extension $E$ est non ramifiée dans le cas unitaire). On suppose dans ce cas que l'élément $\eta$ de $F^\times$ ou $E^\times$ fixé en X.3 est une unité. Cela ne détermine pas entièrement $\eta$, mais cela détermine le facteur de transfert.

# CHAPITRE XI

# INDUCTION ENDOSCOPIQUE D'ORBITES NILPOTENTES

**XI.1.** Dans ce chapitre on ne considère que des couples $(V, q_V)$ du type symplectique ou orthogonal. Les démonstrations combinatoires étant similaires dans les deux cas, on les écrira le plus souvent seulement dans le cas symplectique.

Soit $(V, q_V)$ comme en I.2, du type symplectique ou orthogonal. Posons

$$\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } (V, q_V) \text{ est symplectique}, \\ 1, & \text{si } (V, q_V) \text{ est orthognal}. \end{cases}$$

Définissons une fonction $e : \mathbb{Z} \longrightarrow \{0, 1/2\}$ par

$$e(j) = \begin{cases} 0, & \text{si } j \text{ est pair}, \\ 1/2, & \text{si } j \text{ est impair}. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{O} \in g_{\mathrm{nil}}/G$ une orbite nilpotente, posons $\Lambda(\mathcal{O}) = \boldsymbol{\lambda}$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon)$.

***Lemme***. — *Soit $b$ un entier tel que $b \geqslant d$ et $b \equiv d \bmod 2\mathbb{Z}$. On a l'égalité :*

$$\dim_F(\mathcal{O}) = \dim_F(g) - db - \left[\frac{d+1}{2}\right] + 2\sum_{j=1}^{b}[\theta e(j) + S_j(\boldsymbol{\lambda})/2].$$

*Cf. I.5 pour la définition de $S_j(\boldsymbol{\lambda})$.*

*Démonstration.* — Soit $X \in \mathcal{O}$, complétons $X$ en un $s\ell_2$-triplet $(X, H, Y)$ (éventuellement $H = Y = 0$ si $X = 0$). On en déduit comme en V.7 une graduation de $\boldsymbol{g}$. D'après V.7 (2) et (5), on a l'égalité

(1) $\quad \dim(\mathcal{O}) = \dim(g(\geqslant 2)) + \dim(g(\leqslant -1)) = \dim(g) - \dim(g(0)) - \dim(g(1))$

(il s'agit de variétés analytiques définies sur $F$, « dim » désigne leur dimension sur $F$). La graduation se construit explicitement ainsi. Fixons une décomposition :

$$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$$

telle que, pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, on ait :

- $V_i$ et $V_j$ sont orthogonaux si $i+j\neq 0$ ;
- $\dim(V_i)=D_{|i|}$, où pour tout $k\in\mathbb{N}$, on pose

$$D_k=\sum_{\substack{\ell\geqslant k+1\\ \ell\equiv k+1 \bmod 2\mathbb{Z}}} c_\ell(\boldsymbol{\lambda}).$$

Si cette décomposition est convenablement choisie, on a l'égalité :

$$g(i)=\{Z\in g;\forall\, j\in\mathbb{Z},\, Z(V_j)\subset V_{j+i}\}$$

pour tout $i\in\mathbb{Z}$. On en déduit les égalités :

$$\dim(g(0))=\dim(g(V_0))+\sum_{i\geqslant 1}\dim(g\ell(V_i)),$$
$$\dim(g(1))=\sum_{i\geqslant 0}\dim(\operatorname{Hom}(V_i,V_{i+1})).$$

Rappelons que

$$\dim(g)=d(d+1-2\theta)/2.$$

Une formule analogue vaut pour $g(V_0)$. Posons

$$D=D_0(D_0+1-2\theta)/2+\sum_{i\geqslant 1}D_i^2+\sum_{i\geqslant 0}D_iD_{i+1}.$$

Grâce à (1), on obtient l'égalité

(2) $$\dim(\mathcal{O})=\dim(g)-D.$$

On utilisera l'égalité suivante :

(3) $$\frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 1}c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})^2=db+d/2-\sum_{\ell=1}^{b}S_\ell(\boldsymbol{\lambda}).$$

En effet, on a :

$$\sum_{\ell=1}^{b}S_\ell(\boldsymbol{\lambda})=\sum_{\ell=1}^{b}\sum_{j=1}^{\ell}\lambda_j=\sum_{j=1}^{b}\lambda_j(b+1-j)=d(b+1)-\sum_{j=1}^{b}j\,\lambda_j.$$

Soit $i$ un entier $\geqslant 1$. Calculons la contribution à la dernière somme des $j$ tels que $\lambda_j=i$. Ces $j$ sont les éléments de l'intervalle $\{c_{\geqslant(i+1)}(\boldsymbol{\lambda})+1,\dots,c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})\}$. Leur contribution est

$$i\sum_{j=c_{\geqslant(i+1)}(\boldsymbol{\lambda})+1}^{c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})}j,$$

ou encore

$$\frac{i}{2}(c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})^2-c_{\geqslant(i+1)}(\boldsymbol{\lambda})^2+c_i(\boldsymbol{\lambda})).$$

En sommant en $i$, on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^{b}S_\ell(\boldsymbol{\lambda})=d(b+1)-\frac{1}{2}\Big[\sum_{i\geqslant 1}c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})^2\Big]-\frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 1}i\,c_i(\boldsymbol{\lambda}).$$

La dernière somme vaut $d$, d'où l'égalité (3).

Grâce à (3) et à la définition de $D$, on a les égalités :

$$D=\Big(\frac{1}{2}-\theta\Big)D_0+\frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 0}(D_i+D_{i+1})^2,$$

$$D=\Big(\frac{1}{2}-\theta\Big)D_0+\frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 1}c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})^2,$$

(4)
$$D=\Big(\frac{1}{2}-\theta\Big)D_0+db+d/2-\sum_{\ell=1}^{b}S_\ell(\boldsymbol{\lambda}).$$

Supposons $(V,q_V)$ symplectique. Alors on a l'égalité :

(5)
$$D_0/2=\sum_{\ell=1}^{b}(S_\ell(\boldsymbol{\lambda})-2[S_\ell(\boldsymbol{\lambda})/2]).$$

En effet, soit $i\in\mathbb{N}$, calculons la contribution à la somme ci-dessus des

$$\ell\in\{c_{\geqslant(i+1)}(\boldsymbol{\lambda})+1,\dots,c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})\},$$

avec la convention $c_{\geqslant 0}(\boldsymbol{\lambda})=b$. Puisque $\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}(V)$, tout nombre impair intervient un nombre pair de fois. Donc $S_{c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})}(\boldsymbol{\lambda})$ est pair. Si $i$ est pair $S_\ell(\boldsymbol{\lambda})$ est donc pair pour tout $\ell$ dans l'intervalle et la contribution est nulle. Si $i$ est impair, $S_\ell(\boldsymbol{\lambda})$ est alternativement pair ou impair. La longueur de l'intervalle étant paire, égale à $c_i(\boldsymbol{\lambda})$, la contribution cherchée est $c_i(\boldsymbol{\lambda})/2$. En sommant sur $i$, on obtient la formule (5).

Supposons maintenant $(V,q_V)$ orthogonal. Alors on a l'égalité :

(6)
$$-D_0/2=\Big[\frac{d+1}{2}\Big]-d/2+\sum_{\ell=1}^{b}(S_\ell(\boldsymbol{\lambda})-2[e(\ell)+S_\ell(\boldsymbol{\lambda})/2]).$$

En effet, soit $i\in\mathbb{N}$, calculons la contribution à la somme ci-dessus des

$$\ell\in\{c_{\geqslant(i+1)}(\boldsymbol{\lambda})+1,\dots,c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})\}.$$

Puisque $\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}(V)$, tout nombre pair intervient un nombre pair de fois, donc on a $S_{c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})}(\boldsymbol{\lambda})\equiv c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})\bmod 2\mathbb{Z}$, *i.e.* $S_{c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})}(\boldsymbol{\lambda})+2e(c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}))$ est pair. Si $i$ est impair $S_\ell(\boldsymbol{\lambda})+2e(\ell)$ est pair pour tout $\ell$ dans l'intervalle, la contribution cherchée est

$$-2\sum_{\ell}e(\ell)$$

où $\ell$ parcourt l'intervalle. Si $i$ est pair, $S_\ell(\boldsymbol{\lambda})+2e(\ell)$ est alternativement pair ou impair. La longueur de l'intervalle est paire, égale à $c_i(\boldsymbol{\lambda})$, et la contribution cherchée est

$$c_i(\boldsymbol{\lambda})/2-2\sum_{\ell}e(\ell).$$

En sommant sur $i$, le membre de droite de l'expression (6) est égale à

$$\left[\frac{d+1}{2}\right] - d/2 + \frac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{i\geqslant 0\\ i\equiv 0 \bmod 2\mathbb{Z}}} c_i(\boldsymbol{\lambda})\Big) - 2\Big(\sum_{\ell=1}^{b} e(\ell)\Big).$$

Or

$$\sum_{\substack{i\geqslant 0\\ i\equiv 0 \bmod 2\mathbb{Z}}} c_i(\boldsymbol{\lambda}) = c_{\geqslant 0}(\boldsymbol{\lambda}) - D_0 = b - D_0,$$

$$2\sum_{\ell=1}^{b} e(\ell) = \left[\frac{b+1}{2}\right] = \frac{b-d}{2} + \left[\frac{d+1}{2}\right].$$

On obtient l'égalité (6).

L'égalité de l'énoncé résulte de (2), (4), (5) et (6). □

***Remarque***. — Le lemme resterait vrai si l'on remplaçait le corps de base $F$ par $\mathbb{F}_q$.

**XI.2.** On suppose que $(V, q_V)$ possède un réseau autodual. Soient $\iota = (\boldsymbol{\lambda}, \tau, \delta)$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, \varepsilon, \tau, \delta)$ un élément de $\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$, *cf.* IX.10, $\rho_\iota$ l'élément de $\mathcal{R}^{\mathrm{st}}(V)$ qui lui correspond et $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ un couple de partitions paramétrisant $\rho_\iota$. Notons $D$ l'entier tel que $\mathrm{fam}^{-1}(\tau, \delta) \in \mathcal{S}_{[d/2],D}$, *cf.* VIII.17, VIII.19, VIII.21. Pour $a, b \in \mathbb{N}$, posons

$$E(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, a, b) = S_{a+b}(\boldsymbol{\lambda}) + D(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 + (-1)^{\lambda_{a+b}}(1-2\theta)e(a+b+d) - e(d)$$

avec la convention $(-1)^{\lambda_{a+b}} = (-1)^d$ si $a + b = 0$.

***Lemme***. — *Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, $E(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, a, b)$ est un entier pair et on a l'inégalité :*

$$2S_a(\boldsymbol{\alpha}) + 2S_b(\boldsymbol{\beta}) \leqslant E(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, a, b).$$

*Démonstration*. — On suppose $(V, q_V)$ symplectique. Posons $k = (D-1)/2$ et fixons un entier $r$ tel que $r \geqslant d/2$, $r + k + 1 \geqslant a$, $r - k \geqslant b$. Posons

$$X = \boldsymbol{\alpha} + [r+k, 0], \quad Y = \boldsymbol{\beta} + [r-k-1, 0].$$

Il résulte de VIII.15 et IX.10 que $(X, Y)$ est un représentant du symbole $\mathrm{fam}^{-1}(\tau, \delta)$. On a les égalités :

$$S_a(\boldsymbol{\alpha}) = S_a(X) - S_a([r+k, 0]), \quad S_b(\boldsymbol{\beta}) = S_b(Y) - S_b([r-k-1, 0]).$$

Introduisons l'ensemble avec multiplicités $X \cup Y$ réunion de $X$ et $Y$. On a :

(1) $$S_a(X) + S_b(Y) \leqslant S_{a+b}(X \cup Y).$$

Notons $(X^{sp}, Y^{sp})$ l'unique symbole spécial dans la famille de $(X, Y)$, tel que $|X^{sp}| + |Y^{sp}| = |X| + |Y|$. On a X$\cup Y = X^{sp} \cup Y^{sp}$. Les relations précédentes entraînent :

(2) $$S_a(\boldsymbol{\alpha}) + S_b(\boldsymbol{\beta}) \leqslant S_{a+b}(X^{sp} \cup Y^{sp}) - S_a([r+k, 0]) - S_b([r-k-1, 0]).$$

Posons

$$a' = \left[\frac{a+b+1}{2}\right], \quad b' = \left[\frac{a+b}{2}\right].$$

Puisque $(X^{sp}, Y^{sp})$ est spécial, on a l'égalité

$$S_{a+b}(X^{sp} \cup Y^{sp}) = S_{a'}(X^{sp}) + S_{b'}(Y^{sp}).$$

On a calculé $(X^{sp}, Y^{sp})$ dans la preuve du lemme VIII.16. Avec les notations de cette preuve, on a l'égalité :

(3) $$X^{sp} = \boldsymbol{\lambda}^a + [r, 0], \quad Y^{sp} = \boldsymbol{\lambda}^b + [r-1, 0].$$

Pour tout entier $j \geqslant 1$, on a les égalités

$$\lambda_j^a = \lambda_{2j-1}/2 - e(\lambda_{2j-1}), \quad \lambda_j^b = \lambda_{2j}/2 + e(\lambda_{2j}).$$

On en déduit les égalités :

$$S_{a'}(\boldsymbol{\lambda}^a) + S_{b'}(\boldsymbol{\lambda}^b) = S_{a+b}(\boldsymbol{\lambda})/2 + \sum_{j=1}^{a+b}(-1)^j e(\lambda_j).$$

Puisque $\boldsymbol{\lambda}$ est spéciale, $e(\lambda_{2j}) = e(\lambda_{2j-1})$ pour tout $j \geqslant 1$. Si $a+b$ est pair, la dernière somme ci-dessus est nulle. Si $a+b$ est impair, elle vaut $-e(\lambda_{a+b})$. Remarquons que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité

$$e(n) = (1 + (-1)^{n+1})/4.$$

En tout cas, la dernière somme de l'expression ci-dessus vaut :

$$e(a+b)((-1)^{\lambda_{a+b}} - 1)/2.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} S_{a'}([r, 0]) &= S_{a'}([2r, 0]_2)/2, \\ S_{b'}([r-1, 0]) &= (S_{b'}([2r-1, 1]_2) - b')/2, \\ &= S_{b'}([2r-1, 1]_2)/2 - (a+b)/4 + e(a+b)/2 \end{aligned}$$

d'où

$$S_{a'}([r, 0]) + S_{b'}([r-1, 0]) = S_{a+b}([2r, 0])/2 - (a+b)/4 + e(a+b)/2.$$

De ces calculs et de (3) résulte l'égalité :

$$S_{a+b}(X^{sp} \cup Y^{sp}) = S_{a+b}(\boldsymbol{\lambda})/2 - (a+b)/4 + (-1)^{\lambda_{a+b}} e(a+b)/2 + S_{a+b}([2r, 0])/2.$$

Posons

$$c = S_{a+b}([2r, 0]) - 2S_a([r+k, 0]) - 2S_b([r-k, 0]) - (a+b)/2.$$

Alors, grâce à (2), on a l'égalité :

$$2S_a(\boldsymbol{\alpha}) + 2S_b(\boldsymbol{\beta}) \leqslant S_{a+b}(\boldsymbol{\lambda}) + (-1)^{\lambda_{a+b}} e(a+b) + c.$$

Le calcul de $c$ est élémentaire. On trouve :

$$c = D(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2$$

et le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est égal à $E(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},a,b)$. Cela démontre l'inégalité de l'énoncé. D'après la démonstration, $E(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},a,b)$ est le double du membre de droite de l'inégalité (2). C'est donc un entier pair. □

**XI.3.** Dans ce paragraphe, le corps de base est $\mathbb{F}_q$ et on considère un couple $(V,q_V)$ comme en II.1, du type symplectique ou orthogonal. Soit $\iota=(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\varepsilon})$ ou $(\boldsymbol{\lambda},\varepsilon,\boldsymbol{\varepsilon})$ un élément de $\mathcal{I}(V)$, *cf.* VIII.6. Posons comme en VIII.11 :

$$a(\boldsymbol{\lambda})_{\mathrm{imp}}=\{i_1>i_2>\cdots>i_m\}.$$

Si $(V,q_V)$ est symplectique, $\boldsymbol{\varepsilon}\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a(\boldsymbol{\lambda})}$. Si $(V,q_V)$ est orthogonal, fixons un relèvement de $\boldsymbol{\varepsilon}$ à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a(\boldsymbol{\lambda})}$ que l'on note encore $\boldsymbol{\varepsilon}$. Pour tout $i\in\mathbb{N}$, posons

$$\begin{aligned}N(i)=&\Big|\{n\in\{1,\dots,m\};\,n\ \text{est pair},\ i_n\geqslant i,\ \varepsilon_{i_n}=1\}\Big|\\&-\Big|\{n\in\{1,\dots,m\};\,n\ \text{est impair},\ i_n\geqslant i,\ \varepsilon_{i_n}=1\}\Big|.\end{aligned}$$

Supposons $(V,q_V)$ orthogonal. Si $a(\boldsymbol{\lambda})=\varnothing$, auquel cas $d$ est pair, on a $N(i)=0$ pour tout $i$. Supposons $a(\boldsymbol{\lambda})\neq\varnothing$. Si l'on change de relèvement $\boldsymbol{\varepsilon}$, la suite $(N(i))_{i\in\mathbb{N}}$ est changée en une autre suite, disons $(N'(i))_{i\in\mathbb{N}}$. On a l'égalité :

$$N(1)+N'(1)=\Big|\{n\in\{1,\dots,m\};\,n\ \text{est pair}\}\Big|-\Big|\{n\in\{1,\dots,m\};\ n\ \text{est impair}\}\Big|.$$

Or $m\equiv d \bmod 2\mathbb{Z}$, d'où

$$N(1)+N'(1)=\begin{cases}-1, & \text{si } d \text{ est impair},\\ 0, & \text{si } d \text{ est pair}.\end{cases}$$

Quitte à changer de relèvement, on suppose

$$\begin{aligned}&N(1)\leqslant -1, && \text{si } d \text{ est impair},\\ &N(1)\geqslant 0, && \text{si d est pair}.\end{aligned}$$

Si $d$ est pair et $N(1)=N'(1)=0$, cette condition ne détermine pas le relèvement. Dans ce cas, on suppose

$$\varepsilon_{a_{\max}}=0,$$

où $a_{\max}$ est le plus grand élément de $a(\boldsymbol{\lambda})$.

On pose

$$k=\begin{cases}2N(1), & \text{si } N(1)\geqslant 0,\\ -2N(1)-1, & \text{si } N(1)<0;\end{cases}$$

$$u=\begin{cases}0, & \text{si } (V,q_V) \text{ est symplectique et } k \text{ est pair},\\ 1, & \text{si } (V,q_V) \text{ est symplectique et } k \text{ est impair},\\ \dfrac{(-1)^{k+1}}{2}, & \text{si } (V,q_V) \text{ est orthogonal}.\end{cases}$$

Pour tout entier $i \geqslant 1$, posons :

$$v(i) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})+k}}{2}, & \text{si } (V, q_V) \text{ est symplectique et } i \text{ est impair ou si} \\ & (V, q_V) \text{ est orthogonal et } i \text{ est pair}, \\ (-1)^{c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})+k}, & \text{si } i \in a(\boldsymbol{\lambda}) \text{ et } \varepsilon_i = 1, \\ 0, & \text{sinon}; \end{cases}$$

$$w(i) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})+k+\varepsilon_i}}{2}, & \text{si } i \in a(\boldsymbol{\lambda})_{\text{imp}}, \\ 0, & \text{sinon}; \end{cases}$$

$$a(i) = \frac{i}{2} - k - u + 2(-1)^k N(i) - v(i);$$

$$b(i) = \frac{i}{2} + k + u - 2(-1)^k N(i) + v(i).$$

***Lemme***. — *Pour tout entier $i \geqslant 1$, on a les propriétés suivantes :*

(i) *$a(i)$ et $b(i)$ sont entiers ; $c_i(\boldsymbol{\lambda})/2 \pm w(i)$ est entier $\geqslant 0$, nul si $i \geqslant d+1$ ;*

(ii) *$0 \leqslant a(i) \leqslant a(i+1)$, $0 \leqslant b(i) \leqslant b(i+1)$ ;*

(iii)

$$2w(\geqslant i) + 2(-1)^k N(i) = \begin{cases} 0, & \textit{si } c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}) \textit{ est pair}, \\ (-1)^{k+1}, & \textit{si } c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}) \textit{ est impair}. \end{cases}$$

*Démonstration.* — Le (i) est immédiat. Démontrons les inégalités :

$$a(i) \leqslant a(i+1), \quad b(i) \leqslant b(i+1).$$

Si $i \notin a(\boldsymbol{\lambda})_{\text{imp}}$, on a $N(i) = N(i+1)$ et il suffit de prouver l'inégalité

$$|v(i+1) - v(i)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Elle résulte des définitions en remarquant que, puisque $i \notin a(\boldsymbol{\lambda})_{\text{imp}}$, $c_i(\boldsymbol{\lambda})$ est pair et $c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}) \equiv c_{\geqslant (i+1)}(\boldsymbol{\lambda}) \bmod 2\mathbb{Z}$.

Si $i \in a(\boldsymbol{\lambda})_{\text{imp}}$ et $\varepsilon_i = 0$, on a encore $N(i) = N(i+1)$ et il suffit de prouver la même inégalité que ci-dessus. Elle résulte des relations $v(i) = 0$, $v(i+1) \in \{\pm 1/2\}$.

Si $i \in a(\boldsymbol{\lambda})_{\text{imp}}$ et $\varepsilon_i = 1$, on doit prouver l'inégalité

$$|2(-i)^k (N(i) - N(i+1)) + v(i+1) - v(i)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Soit $n \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $i = i_n$. Alors :

$$N(i) - N(i+1) = (-1)^n,$$

$$v(i) = (-1)^{c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})+k} = (-1)^{n+k}, \quad v(i+1) = \frac{(-1)^{c_{\geqslant (i+1)}(\boldsymbol{\lambda})+k}}{2} = \frac{(-1)^{n+k+1}}{2}.$$

L'inégalité à prouver n'est autre que

$$\left|2(-1)^{k+n} + \frac{(-1)^{k+n+1}}{2} - (-1)^{k+n}\right| \leqslant \frac{1}{2},$$

que l'on vérifie.

Pour achever de prouver (ii), il suffit de prouver que

$$0 \leqslant a(1), \quad 0 \leqslant b(1).$$

Si $(V, q_V)$ est symplectique, on a :

$$k + u - 2(-1)^k N(1) = 0, \quad v(1) \in \left\{\pm \frac{1}{2}\right\}.$$

Si $(V, q_V)$ est orthogonal, on a

$$k + u - 2(-1)^k N(1) = -\frac{1}{2}, \quad c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}) \equiv d \equiv k \bmod 2\mathbb{Z}, \quad v(1) \in \{0, 1\}.$$

Les inégalités cherchées résultent de ces relations.

Démontrons (iii). Soit $n$ le plus grand élément de $\{0, \ldots, m\}$ tel que $i_n \geqslant i$, avec la convention $i_0 = \infty$. Pour $r \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, posons :

$$I_{r,s} = \left\{\ell \in \{1, \ldots, n\} ; \ell \equiv r \bmod 2\mathbb{Z} \text{ et } \varepsilon_{i_\ell} = s\right\}.$$

On a les relations :
- $N(i) = |I_{0,1}| - |I_{1,1}|$ ;
- pour $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant i$,

$$2w(j) = \begin{cases} 0, & \text{s'il n'existe pas de } \ell \in \{1, \ldots, n\} \text{ tel que } j = i_\ell, \\ 1, & \text{si } j = i_\ell \text{ avec } \ell \in I_{k,0} \cup I_{k+1,1}, \\ -1, & \text{si } j = i_\ell \text{ avec } \ell \in I_{k,1} \cup I_{k+1,0}. \end{cases}$$

On en déduit l'égalité :

$$2w(\geqslant i) + 2(-1)^k N(i) = |I_{k,0}| + |I_{k,1}| - |I_{k+1,0}| - |I_{k+1,1}|.$$

D'autre part, si $n$ est pair,

$$|I_{k,0}| + |I_{k,1}| = |I_{k+1,0}| + |I_{k+1,1}| = \frac{n}{2},$$

tandis que si $n$ est impair,

$$|I_{k,0}| + |I_{k,1}| = \frac{1}{2}(n + (-1)^{k+1}), \quad |I_{k+1,0}| + |I_{k+1,1}| = \frac{1}{2}(n + (-1)^k).$$

En remarquant que $n \equiv c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}) \bmod 2\mathbb{Z}$, l'assertion (iii) résulte des relations ci-dessus. □

**XI.4.** On conserve les hypothèses précédentes. Pour $r, s \in \mathbb{N}$, on note $(r)^s$ la partition $(r, \dots, r, 0, \dots)$, l'entier $r$ étant répété $s$ fois. On définit des partitions $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ par :

$$\boldsymbol{\alpha} = \bigcup_{i \geqslant 1} (a(i))^{e_i(\boldsymbol{\lambda})/2 - w(i)}, \quad \boldsymbol{\beta} = \bigcup_{i \geqslant i} (b(i))^{c_i(\boldsymbol{\lambda})/2 + w(i)}.$$

***Lemme***. — *On a les relations :*

$$k \in \mathcal{I}_0(V), \quad \iota \in \mathcal{I}(k),$$

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \begin{cases} \mathcal{P}_2((d - k(k+1))/2), & si\ (V, q_V)\ est\ symplectique, \\ \mathcal{P}_2((d - k^2)/2), & si\ (V, q_V)\ est\ orthogonal. \end{cases}$$

*Le couple $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ paramétrise $\rho_\iota$. Si $(V, q_V)$ est orthogonal pair et $k = 0$, on a $\boldsymbol{\alpha} \succ \boldsymbol{\beta}$ et même $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ si $a(\boldsymbol{\lambda}) = \varnothing$.*

*Démonstration*. — Si $(V, q_V)$ est orthogonal pair et $k = 0$, pour tout entier $i \geqslant 1$ tel que $i > a_{\max}$ si $a(\boldsymbol{\lambda}) \neq \varnothing$, on a les égalités

$$a(i) = b(i) = \frac{1}{2}, \quad w(i) = 0.$$

Si $a(\boldsymbol{\lambda}) \neq \varnothing$, on a $w(a_{\max}) \leqslant 0$ et

$$a(a_{\max}) = (a_{\max} + 1)/2, \quad b(a_{\max}) = (a_{\max} - 1)/2.$$

Les dernières assertions de l'énoncé en résultent.

On ne traite les premières que dans le cas symplectique. En VIII.7, on a associé à $\iota$ des suites d'entiers $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z}'$, $A^{\#}$, $B^{\#}$, $A$ et $B$. Nous allons les calculer. Pour alléger les notations, on pose simplement $c_i = c_i(\boldsymbol{\lambda})$ pour tout entier $i \geqslant 1$. On pose par convention $c_0 = d - c_{\geqslant 1}$.

Soit $i \in \mathbb{N}$, posons

$$H(i) = \left[i + d - c_{\geqslant (i+1)} - 1, i + d - c_{\geqslant i}\right],$$

$$Z(i) = \left\{h/2 ; h \in H(i),\ h \text{ est pair}\right\}, \quad Z'(i) = \left\{(h-1)/2 ; h \in H(i),\ h \text{ est impair}\right\},$$

$$s_i = |Z(i)|, \quad s'_i = |Z'(i)|,$$

$$A^{\#}(i) = Z'(i) + \left[\frac{d}{2} + 1 - s'_{\geqslant (i+1)}, \frac{d}{2} + 2 - s'_{\geqslant i}\right],$$

$$B^{\#}(i) = Z(i) + \left[\frac{d}{2} - s_{\geqslant (i+1)}, \frac{d}{2} + 1 - s_{\geqslant i}\right].$$

On a l'égalité :

$$\boldsymbol{\lambda} + [d - 1, 0] = \bigcup_{i \geqslant 0} H(i),$$

d'où l'on déduit :

$$\boldsymbol{z} = \bigcup_{i \geqslant 0} Z(i), \quad \boldsymbol{z}' = \bigcup_{i \geqslant 0} Z'(i).$$

Si $i, i' \in \mathbb{N}$, avec $i > i'$ et si $h \in Z(i)$ et $h' \in Z(i')$, on a $h > h'$. On en déduit que pour $i \in \mathbb{N}$,

$$Z(i) = \left\{z_{s_{\geqslant (i+1)} + 1}, \dots, z_{s_{\geqslant i}}\right\}$$

et de même :

$$Z'(i) = \{z'_{s'_{\geqslant(i+1)}+1}, \dots, z'_{s'_{\geqslant i}}\}.$$

Alors, par construction

$$A^{\#} = \Big(\bigcup_{i\geqslant 0} A^{\#}(i)\Big) \cup \{0\}, \quad B^{\#} = \bigcup_{i\geqslant 0} B^{\#}(i).$$

Soit $i \in \mathbb{N}$. Si $c_i$ est pair, $s_i = s'_i = c_i/2$. Si $c_i$ est impair, alors $i$ est pair puisque $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(V)$ et l'on a :

$$s_i = (c_i+1)/2, \quad s'_i = (c_i-1)/2, \quad \text{si } c_{\geqslant i} \text{ est pair},$$
$$s_i = (c_i-1)/2, \quad s'_i = (c_i+1)/2, \quad \text{si } c_{\geqslant i} \text{ est impair}.$$

D'où la formule générale :

$$(1) \qquad s_i = c_i/2 + (-1)^{c_{\geqslant i}} e(c_i), \quad s'_i = c_i/2 - (-1)^{c_{\geqslant i}} e(c_i).$$

On vérifie l'égalité :

$$\sum_{i'\geqslant i} (-1)^{c_{\geqslant i'}} e(c_{i'}) = -e(c_{\geqslant i}),$$

d'où l'on déduit les égalités :

$$s_{\geqslant i} = c_{\geqslant i}/2 - e(c_{\geqslant i}), \quad s'_{\geqslant i} = c_{\geqslant i}/2 + e(c_{\geqslant i}).$$

Posons

$$x_i = i + d - c_{\geqslant i}.$$

Le plus petit terme de $Z(i)$, resp. $Z'(i)$, est $x_i/2$ si $x_i$ est pair, $(x_i+1)/2$, resp. $(x_i-1)/2$, si $x_i$ est impair. Autrement dit, c'est $x_i/2 + e(x_i)$, resp. $x_i/2 - e(x_i)$. Alors :

$$Z(i) = \big[x_i/2 + e(x_i) + s_i - 1, x_i/2 + e(x_i)\big]$$
$$Z'(i) = \big[x_i/2 - e(x_i) + s'_i - 1, x_i/2 - e(x_i)\big].$$

Grâce à la parité de $d$ et au fait que $c_i$ est pair si $i$ est impair, on vérifie les égalités :

$$e(c_{\geqslant i}) + e(x_i) = \frac{1}{2} - (-1)^{c_{\geqslant i}} e(i+1),$$
$$2e(c_i) - e(i+1) = (-1)^{1+c_i} e(i+1).$$

On déduit des formules ci-dessus les égalités :

$$(2) \qquad \begin{aligned} A^{\#}(i) &= \Big[d - c_{\geqslant(i+1)} + \frac{i}{2} - \frac{1}{2} + (-1)^{c_{\geqslant(i+1)}} e(i+1), d - c_{\geqslant i} \\ &\qquad + \frac{i}{2} + \frac{3}{2} + (-1)^{c_{\geqslant i}} e(i+1)\Big]_2, \\ B^{\#}(i) &= \Big[d - c_{\geqslant(i+1)} + \frac{i}{2} - \frac{1}{2} - (-1)^{c_{\geqslant(i+1)}} e(i+1), d - c_{\geqslant i} \\ &\qquad + \frac{i}{2} + \frac{3}{2} - (-1)^{c_{\geqslant i}} e(i+1)\Big]_2. \end{aligned}$$

On vérifie grâce à ces égalités les propriétés suivantes :

- si $i$ est impair, $A^{\#}(i) = B^{\#}(i)$ ;

• si $i$ est pair, $A^{\#}(i) \cap B^{\#}(i) = \varnothing$ et $A^{\#}(i) \cup B^{\#}(i)$ est formé d'entiers consécutifs ;

• si $c_i \neq 0$, le plus petit élément de $A^{\#}(i) \cup B^{\#}(i)$ est $\geqslant 2$ si $i \neq 0$, égal à 1 si $i = 0$ ;

• $i, i' \in \mathbb{N}$ avec $i > i'$, si $h \in A^{\#}(i) \cup B^{\#}(i)$ et $h' \in A^{\#}(i') \cup B^{\#}(i')$, alors $h \geqslant h' + 2$.

On déduit ce que l'on a affirmé en VIII.7, à savoir que les intervalles de $(A^{\#}, B^{\#})$ sont les ensembles $A^{\#}(i) \cup B^{\#}(i)$ pour $i \in a(\boldsymbol{\lambda})$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, posons :

$$A(i) = A^{\#}(i), \ \ B(i) = B^{\#}(i), \ \text{ si } i \notin a(\boldsymbol{\lambda}) \text{ ou } i \in a(\boldsymbol{\lambda}) \text{ et } \varepsilon_i = 0,$$
$$A(i) = B^{\#}(i), \ \ B(i) = A^{\#}(i), \ \text{ si } i \in a(\boldsymbol{\lambda}) \text{ et } \varepsilon_i = 1.$$

Par définition, on a :

$$A = \Big( \bigcup_{i \geqslant 0} A(i) \Big) \cup \{0\}, \quad B = \bigcup_{i \geqslant 0} B(i).$$

Soit $i$ un entier $\geqslant 1$. On a les égalités :

$$(3) \qquad \begin{cases} \bullet \quad \text{si } k \text{ est pair}, & |A(i)| = c_i/2 - w(i), \ \ |B(i)| = c_i/2 + w(i); \\ \bullet \quad \text{si } k \text{ est impair}, & |A(i)| = c_i/2 + w(i), \ \ |B(i)| = c_i/2 - w(i). \end{cases}$$

En effet, on a les égalités

• $|A(i)| = s_i$, $|B(i)| = s'_i$, si $i \in a(\boldsymbol{\lambda})$ et $\varepsilon_i = 1$,

• $|A(i)| = s'_i$, $|B(i)| = s_i$, sinon.

Les égalités (3) résultent alors de (1) et de la définition de la fonction $w$.

On a les égalités :

$$(4) \qquad \begin{cases} \bullet \quad \text{si } k \text{ est pair}, & |A| = d/2 + k/2 + 1, & |B| = d/2 - k/2; \\ \bullet \quad \text{si } k \text{ est impair}, & |A| = d/2 - k/2 + 1/2, & |B| = d/2 + k/2 + 1/2. \end{cases}$$

En effet, d'après (3),

$$\sum_{i \geqslant 1} |B(i)| = c_{\geqslant 1}/2 + (-1)^k w(\geqslant 1).$$

D'après (1),

$$|B(0)| = s_0 = c_0/2 + e(c_0).$$

D'après le lemme XI.3 (iii) et le fait que $c_0$ et $c_{\geqslant 1}$ sont de même parité, on a :

$$(-1)^k w(\geqslant 1) + e(c_0) = -N(1).$$

On en déduit l'égalité

$$|B| = d/2 - N(1).$$

Par construction,

$$|A| + |B| = |A^{\#}| + |B^{\#}| = d + 1,$$

d'où

$$|A| = d/2 + N(1) + 1$$

et il reste à appliquer la définition de $k$ pour obtenir les égalités (4).

Soit $i$ un entier $\geqslant 1$. Supposons $A(i) \neq \varnothing$, resp. $B(i) \neq \varnothing$. Notons $a'(i)$, resp. $b'(i)$, le plus petit élément de $A(i)$, resp. $B(i)$. Alors on a les égalités :

$$(5)\quad \begin{cases} \bullet \text{ si } k \text{ est pair}, & a'(i) = d + k + 2 - c_{\geqslant i} + 2w(\geqslant i) + a(i), \text{ resp.} \\ & b'(i) = d - k + 1 - c_{\geqslant i} - 2w(\geqslant i) + b(i); \\ \bullet \text{ si } k \text{ est impair}, & a'(i) = d - k + 1 - c_{\geqslant i} - 2w(\geqslant i) + b(i), \text{ resp.} \\ & b'(i) = d + k + 2 - c_{\geqslant i} + 2w(\geqslant i) + a(i). \end{cases}$$

Supposons $A(i) \neq \varnothing$, posons

$$\eta = \begin{cases} 1, & \text{si } i \notin a(\boldsymbol{\lambda}) \text{ ou } i \in a(\boldsymbol{\lambda}) \text{ et } \varepsilon_i = 0, \\ -1, & \text{si } i \in a(\boldsymbol{\lambda}) \text{ et } \varepsilon_i = 1. \end{cases}$$

D'après (2) et la définition de $A(i)$, on a l'égalité

$$a'(i) = d - c_{\geqslant i} + i/2 + 3/2 + (-1)^{c_{\geqslant i}} \eta e(i+1).$$

Notons $a''(i)$ le membre de droite des égalités (5) concernant $a'(i)$. Exprimons $a''(i)$ en utilisant la définition de $a(i)$ si $k$ est pair, de $b(i)$ si $k$ est impair. On remarque que :

- si $k$ est pair $2 - u = 2$,
- si $k$ est impair $1 + u = 2$.

On obtient :

$$a''(i) = d - c_{\geqslant i} + i/2 + 2 + 2(-1)^k w(\geqslant i) + 2N(i) - (-1)^k v(i).$$

D'après le lemme XI.3, (iii),

$$2(-1)^k w(\geqslant i) + 2N(i) = -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{c_{\geqslant i}}}{2}.$$

D'où l'égalité :

$$a''(i) = d - c_{\geqslant i} + i/2 + 3/2 + \frac{(-1)^{c_{\geqslant i}}}{2} - (-1)^k v(i).$$

Pour démontrer l'égalité $a'(i) = a''(i)$, il suffit de vérifier l'égalité :

$$(-1)^{c_{\geqslant i}} \eta e(i+1) = \frac{(-1)^{c_{\geqslant i}}}{2} - (-1)^k v(i).$$

Celle-ci résulte de la définition de $v(i)$.

On démontre de même les égalités (5) concernant $b'(i)$.

Grâce à (3) et (5), on a les égalités :

- si $k$ est pair,

$$\bigcup_{i \geqslant 1} A(i) = \boldsymbol{\alpha} + \left[d + k, d + k + 2 - 2c(\boldsymbol{\alpha})\right]_2,$$
$$\bigcup_{i \geqslant 1} B(i) = \boldsymbol{\beta} + \left[d - k - 1, d - k + 1 - 2c(\boldsymbol{\beta})\right]_2,$$

• si $k$ est impair,

$$\underset{i\geqslant 1}{\cup} A(i)=\boldsymbol{\beta}+\big[d-k-1,d-k+1-2c(\boldsymbol{\beta})\big]_2,$$
$$\underset{i\geqslant 1}{\cup} B(i)=\boldsymbol{\alpha}+\big[d+k,d+k+2-2c(\boldsymbol{\alpha})\big]_2.$$

En utilisant (4) et (2) pour $i=0$, on en déduit les égalités :

$$(6)\quad\begin{cases}\bullet\quad \text{si } k \text{ est pair}, & A=\boldsymbol{\alpha}+[d+k,0]_2, \qquad B=\boldsymbol{\beta}+[d-k-1,1]_2,\\ \bullet\quad \text{si } k \text{ est impair}, & A=\boldsymbol{\beta}+[d-k-1,0]_2, \quad B=\boldsymbol{\alpha}+[d+k,1]_2.\end{cases}$$

De ces formules se déduit l'égalité :

$$S(\boldsymbol{\alpha})+S(\boldsymbol{\beta})=S(A)+S(B)-(d^2+d+k^2+k)/2.$$

D'autre part $S(A)+S(B)=S(A^{\#})+S(B^{\#})$ et on calcule grâce à la construction de $A^{\#}$ et B$^{\#}$ :

$$S(A^{\#})+S(B^{\#})=d(d+2)/2.$$

D'où l'égalité :

$$S(\boldsymbol{\alpha})+S(\boldsymbol{\beta})=(d-k(k+1))/2.$$

*A fortiori* $k(k+1)\leqslant d$, donc $k\in\mathcal{I}_0(V)$. On a $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\in\mathcal{P}_2((d-k(k+1))/2)$. Enfin, grâce à (6) et aux définitions de VIII.7,

$$\psi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(A,B)=\psi_{\text{nil}}(\iota).$$

Donc $\iota\in\mathcal{I}(k)$ et $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ paramétrise $\rho_\iota$. Cela achève la démonstration. □

**XI.5.** On conserve les mêmes hypothèses.

***Lemme.*** — *Pour tout entier $i\geqslant 1$, on a l'égalité :*

$$S_{c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})}(\boldsymbol{\lambda})=2S_{c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})/2-w(\geqslant i)}(\boldsymbol{\alpha})+2S_{c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})/2+w(\geqslant i)}(\boldsymbol{\beta})\\ -4w(\geqslant i)^2-(4k+2-2\theta)w(\geqslant i).$$

*Démonstration.* — On raisonne par récurrence descendante sur $i$. L'égalité est triviale si $i\geqslant d+1$. Supposons-la démontrée en $i+1$. Il suffit alors de démontrer l'égalité différence entre l'égalité de l'énoncé et la même égalité pour $i+1$. Celle-là s'écrit :

$$i\,c_i(\boldsymbol{\lambda})=(c_i(\boldsymbol{\lambda})-2w(i))\,a(i)+(c_i(\boldsymbol{\lambda})+2w(i))\,b(i)+4w(i)^2\\ -8w(i)\,w(\geqslant i)-(4k+2-2\theta)\,w(i).$$

En remplaçant $a(i)$ et $b(i)$ par leurs valeurs, elle est équivalente à :

$$w(i)\Big(u-2(-1)^kN(i)+v(i)+w(i)-2w(\geqslant i)+\frac{\theta-1}{2}\Big)=0.$$

Grâce au lemme XI.3 (iii), on a :

$$-2(-1)^kN(i)-2w(\geqslant i)=\frac{(-1)^k}{2}-\frac{(-1)^{k+c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})}}{2}.$$

On vérifie l'égalité :

$$u+\frac{(-1)^k}{2}+\frac{\theta-1}{2}=0.$$

Alors l'égalité à démontrer est :

$$w(i)\Big[v(i)+w(i)-\frac{(-1)^{k+c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda})}}{2}\Big]=0.$$

Si $i\notin a(\boldsymbol{\lambda})_{\text{imp}}$, $w(i)=0$ et cette égalité est vérifiée. Si $i\in a(\boldsymbol{\lambda})_{\text{imp}}$, on vérifie que le terme entre crochets est nul. Cela achève la démonstration. □

**XI.6.** Pour $(V,q_V)$ symplectique et $\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}(V)$, on a défini en VIII.16 l'ensemble $\widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda})=a(\boldsymbol{\lambda})\cup\{0\}$ et, si $\boldsymbol{\lambda}$ est spéciale, l'ensemble $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})\cup\{\Delta_{\min}\}$. Pour unifier les notations, si $(V,q_V)$ est orthogonal et $\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}(V)$, on posera $\widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda})=a(\boldsymbol{\lambda})$ et, si $\boldsymbol{\lambda}$ est spéciale, $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})=\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$.

Plaçons-nous dans la situation de X.1, supposons $(V,q_V)$ symplectique ou orthogonal. Pour $n=1,2$, soit $\boldsymbol{\lambda}_n$ une partition spéciale dans $\mathcal{P}(V_n)$. Notons $J$ l'ensemble des entiers $j\geqslant 1$ tels que

$$\lambda_{1,j}\in\widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1),\quad \lambda_{2,j}\in\widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_2);$$

$J^+$ le sous-ensemble des $j\in J$ tels que
- $j\equiv d+1 \bmod 2\mathbb{Z}$,
- $j=1$ ou $\lambda_{1,j-1}>\lambda_{1,j}$ ou $\lambda_{2,j-1}>\lambda_{2,j}$ ;

$J^-$ le sous-ensemble des $j\in J$ tels que
- $j\equiv d \bmod 2\mathbb{Z}$,
- $\lambda_{1,j}>\lambda_{1,j+1}$ ou $\lambda_{2,j}>\lambda_{2,j+1}$.

Remarquons que $J$ est fini. Définissons une suite $\boldsymbol{\xi}=(\xi_j)_{j\geqslant 1}$ d'entiers par :

$$\xi_j=\begin{cases}0, & \text{si } j\notin J^+\cup J^-,\\ 1, & \text{si } j\in J^+,\\ -1, & \text{si } j\in J^-.\end{cases}$$

***Lemme***. — *Soit $\ell$ un entier $\geqslant 1$. On a les égalités suivantes :*

$$\xi_{\leqslant\ell}=\begin{cases}1-2e(d), & \textit{si } \ell\in J-J^-,\\ -2e(d), & \textit{si } \ell\notin J-J^-.\end{cases}$$

*Démonstration*. — Puisque $\boldsymbol{\lambda}_1$ et $\boldsymbol{\lambda}_2$ sont spéciales, $J$ est union de couples $\{j,j+1\}$ où $j\equiv d+1 \bmod 2\mathbb{Z}$, auxquels il faut adjoindre $\{1\}$ si $d$ est impair. Introduisons la relation d'équivalence dans $J$ engendrée par les relations suivantes où $j,j+1\in J$ :
- $j\sim j+1$ si $j\equiv d+1 \bmod 2\mathbb{Z}$,
- $j\sim j+1$ si $j\equiv d \bmod 2\mathbb{Z}$, $\lambda_{1,j}=\lambda_{1,j+1}$ et $\lambda_{2,j}=\lambda_{2,j+1}$.

Les classes d'équivalence sont des intervalles $\{j_1,\dots,j_2\}$ tels que $j_2\equiv d \bmod 2\mathbb{Z}$ et $j_1\equiv d+1 \bmod 2\mathbb{Z}$ ou $j_1=1$. Par définition, $J^-$ est l'ensemble de ces $j_2$ et $J^+$ est l'ensemble de ces $j_1$, dont on exclut le terme $j_1 = 1$ si $d$ est impair. On représente graphiquement l'ensemble $J$ :

$$(1)\qquad \begin{cases} \bullet\quad \text{si } d \text{ est pair,} \\[1em] \overset{1}{\bullet}\ \ \overset{2}{\bullet}\ \ \underbrace{\overset{J^+}{\bullet}\ \ \bullet\ \ \bullet\ \ \overset{J^-}{\bullet}}_{J}\ \ \bullet\ \ \bullet\ \ \underbrace{\overset{J^+}{\bullet}\ \ \overset{J^-}{\bullet}}_{J}\ \ \underbrace{\overset{J^+}{\bullet}\ \ \overset{J^-}{\bullet}}_{J}\ \ \bullet\ \ \bullet \\[1em] \bullet\quad \text{si } d \text{ est impair,} \\[1em] \underbrace{\overset{1}{\bullet}\ \ \overset{2}{\bullet}\ \ \overset{J^-}{\bullet}}_{J}\ \ \bullet\ \ \bullet\ \ \underbrace{\overset{J^+}{\bullet}\quad \overset{J^-}{\bullet}}_{J}\ \ \underbrace{\overset{J^+}{\bullet}\ \ \bullet\ \ \bullet\ \ \overset{J^-}{\bullet}}_{J}\ \ \bullet\ \ \bullet\ \ \bullet \end{cases}$$

Le lemme en résulte aisément. □

**XI.7.** Posons

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2 + \boldsymbol{\xi}.$$

***Lemme***. — *La suite d'entiers $\boldsymbol{\lambda}$ appartient à $\mathcal{P}(V)$.*

*Démonstration.* — Soit $j \geqslant 1$. Démontrons l'inégalité

$$(1)\qquad \lambda_j \geqslant \lambda_{j+1},$$

ou encore

$$(2)\qquad \lambda_{1,j} - \lambda_{1,j+1} + \lambda_{2,j} - \lambda_{2,j+1} \geqslant \xi_{j+1} - \xi_j\,.$$

Considérons les deux conditions :

- $j \in J^-$ ;
- $j+1 \in J^+$.

Si aucune d'elles n'est vérifiée, $\xi_{j+1} - \xi_j \leqslant 0$ et (2) est claire. Si une et une seule de ces conditions est vérifiée $\xi_{j+1} - \xi_j = 1$. Mais on a $\lambda_{1,j} > \lambda_{1,j+1}$ ou $\lambda_{2,j} > \lambda_{2,j+1}$ et (2) en résulte. Si les deux conditions sont vérifiées, $\xi_{j+1} - \xi_j = 2$. Comme dans le cas précédent, le membre de gauche de (2) est $> 0$. Mais puisque $j, j+1 \in J$, $\lambda_{1,j}$ et $\lambda_{1,j+1}$, comme $\lambda_{2,j}$ et $\lambda_{2,j+1}$, sont de même parité. Le membre de gauche de (2) est donc $\geqslant 2$. Cela démontre (1).

Si $j > d$, $\lambda_j = 0$. D'après (1), les termes de $\boldsymbol{\lambda}$ sont donc des entiers $\geqslant 0$. On a

$$S(\boldsymbol{\lambda}) = S(\boldsymbol{\lambda}_1) + S(\boldsymbol{\lambda}_2) + S(\boldsymbol{\xi}),$$
$$S(\boldsymbol{\lambda}_1) = d(V_1), S(\boldsymbol{\lambda}_2) = d(V_2),$$

et, d'après le lemme XI.6,

$$S(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 0, & \text{si } d \text{ est pair,} \\ -1, & \text{si } d \text{ est impair.} \end{cases}$$

D'après les conditions imposées en X.1, on en déduit $S(\boldsymbol{\lambda}) = d$.

Il reste à prouver que pour tout entier $i \geqslant 1$ tel que

$$(3) \qquad \begin{cases} \bullet \quad i \text{ est impair si} \quad (V, q_V) \text{ est symplectique,} \\ \bullet \quad i \text{ est pair si} \quad (V, q_V) \text{ est orthogonal,} \end{cases}$$

$c_i(\boldsymbol{\lambda})$ est pair. Fixons un tel $i$. D'après XI.6 (1), l'ensemble des entiers $\geqslant 1$ est réunion disjointe d'ensembles $I$ de la forme suivante :

(4) • $I = \{j\}$, où $j \in J^+ \cup J^-$ ;

(5) • $I = \{j, j+1\}$, où $j \equiv d + 1 \bmod 2\mathbb{Z}$ ; $j \notin J$, $j + 1 \notin J$ ;

(6) • $I = \{j, j+1\}$, où $j \equiv \bmod 2\mathbb{Z}$, $j \in J - J^-$, $j + 1 \in J - J^+$.

Il suffit de prouver que si $I$ est un tel ensemble, la multiplicité de $i$ dans l'ensemble avec multiplicités $\{\lambda_j ; j \in I\}$ est paire. Si $I$ est de la forme (4), cette multiplicité est nulle car $\lambda_j$ ne vérifie pas les conditions (3). Si $I$ est de l'une des formes (5) ou (6), l'ensemble en question est $\{\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}, \lambda_{1,j+1} + \lambda_{2,j+1}\}$. Dans le cas (6), puisque $j \in J - J^-$, les deux termes sont égaux et l'assertion est claire. Dans le cas (5), puisque $\boldsymbol{\lambda}_1$ et $\boldsymbol{\lambda}_2$ sont spéciales, $\lambda_{1,j}$ et $\lambda_{1,j+1}$, comme $\lambda_{2,j}$ et $\lambda_{2,j+1}$, sont de même parité. L'ensemble en question ne peut contenir un élément vérifiant (3) que si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

• $\lambda_{1,j} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1)$, $\lambda_{2,j} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_2)$ ;

• $\lambda_{1,j} \notin \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1)$, $\lambda_{2,j} \notin \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_2)$.

La première est exclue par l'hypothèse $j \notin J$. Sous la seconde condition, les deux termes de l'ensemble sont égaux car $\boldsymbol{\lambda}_1$ et $\boldsymbol{\lambda}_2$ sont spéciales. La multiplicité de $i$ y est donc paire. Cela achève la démonstration. □

***XI.8. Corollaire.*** — *Supposons $(V, q_V)$ orthogonal pair. Si tous les termes de $\boldsymbol{\lambda}$ sont pairs, ceux de $\boldsymbol{\lambda}_1$ et $\boldsymbol{\lambda}_2$ le sont aussi.*

*Démonstration.* — Si $j \in J^+ \cup J^-$, $\lambda_j$ est impair. Donc $J^+ \cup J^- = \varnothing$. Grâce à XI.6 (1), $J = \varnothing$. L'assertion résulte alors de la dernière partie de la démonstration précédente. □

**XI.9.** Désormais, nous poserons simplement $c_i = c_i(\boldsymbol{\lambda})$ pour tout entier $i \geqslant 1$. On pose par convention $c_0 = c_{\geqslant 0} = \infty$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose

$$J(i) = \{c_{\geqslant(i+1)} + 1, \dots, c_{\geqslant i}\}.$$

Si $c_i = 0$, $J(i) = \varnothing$. Si $c_i \neq 0$, $J(i)$ est l'ensemble des entiers $j \geqslant 1$ tels que $\lambda_j = i$.

Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $c_i \geqslant 2$. Posons simplement $c = c_{\geqslant i}$, $c^+ = c_{\geqslant(i+1)}$. Pour $n \in \{1, 2\}$, introduisons la suite

$$\boldsymbol{\lambda}_n(i) = (\lambda_{n,c^+ + 1}, \dots, \lambda_{n,c})$$

et considérons les conditions suivantes :

$(1)_n$ • il existe $\nu \in \mathbb{N}$ tel que $\boldsymbol{\lambda}_n(i) = (\nu, \dots, \nu)$ ;

$(2)_n$ • $c^+ + 1 \in J^-$ et il existe $\nu \in \mathbb{N} - \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ tel que $\boldsymbol{\lambda}_n(i) = (\nu + 1, \nu, \dots, \nu)$ ;

$(3)_n$ • $c \in J^+$ et il existe $\nu \in \mathbb{N} - \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ tel que $\boldsymbol{\lambda}_n(i) = (\nu, \dots, \nu, \nu - 1)$ ;

$(4)_n$ • $c^+ + 1 \in J^-$, $c \in J^+$ et il existe $\nu \in \mathbb{N} - \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ tel que $\boldsymbol{\lambda}_n(i) = (\nu + 1, \nu, \dots, \nu, \nu - 1)$.

***Lemme***

(i) *Pour $n \in \{1, 2\}$ l'une des conditions $(1)_n$, $(2)_n$, $(3)_n$, $(4)_n$ est vérifiée.*

(ii) *Il existe $n \in \{1, 2\}$ tel que la condition $(1)_n$ soit vérifiée.*

*Démonstration.* — Soient $j, j' \in J(i)$ avec $j < j'$. On a

$$\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j} + \xi_j = \lambda_j = i = \lambda_{j'} = \lambda_{1,j'} + \lambda_{2,j'} + \xi_{j'} .$$

D'où

$$(5) \qquad \lambda_{1,j} - \lambda_{1,j'} = \lambda_{2,j'} - \lambda_{2,j} + \xi_{j'} - \xi_j .$$

Le membre de gauche est $\geqslant 0$, celui de droite $\leqslant 2$. Ils valent donc 0, 1 ou 2 et la suite $\boldsymbol{\lambda}_1(i)$ contient au plus trois termes distincts, de différences $\leqslant 2$. S'ils sont tous égaux, $(1)_1$ est vérifiée. Supposons que $\boldsymbol{\lambda}_1(i)$ contient au moins deux termes distincts. Supposons d'abord qu'il existe $j \in J(i)$ tel que $\lambda_{1,j}$ soit un élément maximal de $\boldsymbol{\lambda}_1(i)$ et tel que $j \notin J^-$. Fixons un tel $j$ et posons $\nu = \lambda_{1,j}$. Soit $j' \in J(i)$ tel que $\lambda_{1,j'}$ ne soit pas un élément maximal de $\boldsymbol{\lambda}_1(i)$. Appliquons (5) à ce couple $(j, j')$. Le membre de gauche est $\geqslant 1$. Celui de droite est $\leqslant \xi_{j'}$. Donc $\xi_{j'} = 1$ et $j' \in J^+$. Remarquons que $J^+$ est formé d'entiers de même parité tandis que l'ensemble des $j' \in J(i)$ tels que $\lambda_{1,j'}$ ne soit pas un élément maximal de $\boldsymbol{\lambda}_1(i)$ est formé d'entiers consécutifs. Cet ensemble est donc réduit à un élément qui ne peut être que $c$. Donc $c \in J^+$ et d'après le calcul ci-dessus, $\lambda_{1,c} = \nu - 1$. Puisque $c \in J$, $\lambda_{1,c} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ et $\nu \notin \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1)$. La condition $(3)_1$ est vérifiée. Supposons maintenant qu'il existe $j' \in J(i)$ tel que $\lambda_{1,j'}$ soit un élément minimal de $\boldsymbol{\lambda}_1(i)$ et tel que $j' \notin J^+$. On montre de même que $(2)_1$ est vérifiée. Supposons enfin que pour tous $j, j' \in J(i)$ tels que $\lambda_{1,j}$, resp. $\lambda_{1,j'}$, soit un élément maximal, resp. minimal, de $\boldsymbol{\lambda}_1(i)$, on ait $j \in J^-$, resp. $j' \in J^+$. Le même argument que ci-dessus prouve que l'ensemble de ces $j$, resp. $j'$, est réduit à $\{c^+ + 1\}$, resp. $\{c\}$. Puisque $c, c^+ + 1 \in J$, $\lambda_{1,c}$ et $\lambda_{1,c^++1}$ sont de même parité et $(4)_1$ est vérifiée.

Un argument analogue vaut en échangeant les indices 1 et 2. Cela démontre (i).

Supposons que l'une des conditions $(2)_1$, $(3)_1$ ou $(4)_1$ est vérifiée. Dans le cas de $(2)_1$, puisque $\lambda_{1,c} = \nu \notin \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1)$, on a $c \notin J$ et $\xi_c = 0$. *Idem*, dans le cas $(3)_1$, $\xi_{c^++1} = 0$. Appliquons (5) pour $j = c^+ + 1$ et $j' = c$. On obtient l'égalité $\lambda_{2,c^++1} = \lambda_{2,c}$. La condition $(1)_1$ est donc vérifiée. Cela démontre (ii). □

**XI.10.** Soit $n \in \{1, 2\}$. On note $\Delta_{n,\max}$, resp. $\Delta_{n,\min}$, le plus grand, resp. petit, élément de $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$. Pour $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$, on a défini $j_{\min}(\Delta)$ et $j_{\max}(\Delta)$ en VIII.17, VIII.19, et VIII.21.

***Remarques***
(1) Si $(V_n, q_{V_n})$ est orthogonal impair, on rappelle que par convention $j_{\min}(\Delta_{n,\max}) = 0$.
(2) Si $(V_n, q_{V_n})$ est symplectique, on n'a pas défini $j_{\max}(\Delta_{n,\min})$ en VIII.17. On pose $j_{\max}(\Delta_{n,\min}) = \infty$.

Notons $\mathcal{J}_{n,\max}$ l'ensemble des éléments $j$ de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ vérifiant l'une des conditions suivantes :

- $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 1$, $j \equiv d \bmod 2\mathbb{Z}$, $\lambda_{n,j} \in a(\boldsymbol{\lambda}_n)$, $\lambda_{n,j} > \lambda_{n,j+1}$ ;
- $(V_n, q_{V_n})$ est symplectique et $j = \infty$.

Notons $\mathcal{J}_{n,\min}$ l'ensemble des éléments $j$ de $\mathbb{N}$ vérifiant l'une des conditions suivantes :

- $j \geqslant 2$, $j \equiv d + 1 \bmod 2\mathbb{Z}$, $\lambda_{n,j} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_n)$, $\lambda_{n,j-1} > \lambda_{n,j}$ ;
- $d(V_n)$ est pair, $j = 1$ et $\lambda_{n,1} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ ;
- $d(V_n)$ est impair et $j = 0$.

***Lemme***. — *On a les égalités :*

$$\mathcal{J}_{n,\max} = \{j_{\max}(\Delta) ; \Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)\},$$

$$\mathcal{J}_{n,\min} = \{j_{\min}(\Delta) ; \Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)\}.$$

*Démonstration*. — C'est un exercice facile. □

Dans la suite, on adopte la convention que si $r$ est un entier, $\{r, \ldots, \infty\}$ est l'ensemble des entiers $\geqslant r$. Pour $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$, on pose

$$J(\Delta) = \{j_{\min}(\Delta), \ldots, j_{\max}(\Delta)\}.$$

**XI.11.** Posons

$$\mathcal{J} = \{0, \infty\} \cup \{j_{\min}(\Delta) ; \Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1) \cup \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_2)\} \cup \{j_{\max}(\Delta) ; \Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1) \cup \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_2)\}.$$

On note $\mathcal{J}^+$, resp. $\mathcal{J}^-$, l'ensemble des entiers $j \geqslant 1$ tels qu'il existe $\Delta_1 \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ et $\Delta_2 \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_2)$ de sorte que $j = j_{\min}(\Delta_1) = j_{\min}(\Delta_2)$, resp. $j = j_{\max}(\Delta_1) = j_{\max}(\Delta_2)$. En particulier $\mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^- \subset \mathcal{J}$ et $\mathcal{J}^+$, resp. $\mathcal{J}^-$, est formé d'entiers $\equiv d + 1 \bmod 2\mathbb{Z}$, resp. $\equiv d \bmod 2\mathbb{Z}$.

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ de la forme $\{j, \ldots, j'\}$ où $j$ et $j'$ sont deux éléments consécutifs de $\mathcal{J}$. Pour un tel ensemble $C = \{j, \ldots, j'\}$, notons $m(C)$ le nombre des $n \in \{1, 2\}$ tels qu'il existe $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ de sorte que $C \subset J(\Delta)$. Posons :

$$J_C = \begin{cases} C, & \text{si } m(C) = 1, \\ \{j+1, \ldots, j'-1\}, & \text{si } m(C) \in \{0, 2\} \end{cases}$$

(avec la convention $\infty - 1 = \infty$).

Posons

$$\mathcal{N} = \{\{j\} ; j \in \mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-\} \cup \{\mathcal{J}_C ; C \in \mathcal{C}\},$$

$$\mathcal{N}_{\text{int}} = \{\{j\} ; j \in \mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-\} \cup \{\mathcal{J}_C ; C \in \mathcal{C}, m(C) = 1\}.$$

Ce sont des ensembles de sous-ensembles de $\mathbb{N}$. Pour $D \in \mathcal{N}$, on pose :

$$\Delta(D) = \{\lambda_j\,;\, j \in D,\, j \geqslant 1\}.$$

***Lemme***

(i) $\mathcal{N}$ *est une partition de* $\mathbb{N} - \{0\}$.
(ii) $\{\Delta(D)\,;\, D \in \mathcal{N}\}$ *est une partition de* $\{i \in \mathbb{N}\,;\, c_i \neq 0\}$.
(iii) $\{\Delta(D)\,;\, D \in \mathcal{N}_{\mathrm{int}}\}$ *est une partition de* $\widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda})$.

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que :
(1) $J^+$, resp. $J^-$, est l'ensemble des entiers $j \geqslant 1$ tels que $\lambda_{i,j} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1)$, $\lambda_{2,j} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_2)$ et il existe $n \in \{1,2\}$ et $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ de sorte que $j = j_{\min}(\Delta)$, resp. $j = j_{\max}(\Delta)$.

Cela résulte des définitions et du lemme XI.10. *A fortiori* :
(2) $\mathcal{J}^+ \subset J^+ \subset \mathcal{J}$, $\mathcal{J}^- \subset J^- \subset \mathcal{J}$.

Il est clair que tout entier $j \geqslant 1$ qui n'appartient pas à $\mathcal{J}$ appartient à un et un seul élément de $\mathcal{N}$. Pour démontrer (i), il suffit de prouver :
(3) 0 n'appartient à aucun élément de $\mathcal{N}$ ;
(4) tout élément de $\mathcal{J} - \{0, \infty\}$ appartient à un et un seul élément de $\mathcal{N}$.

Par définition de $\mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-$, 0 n'appartient à aucun ensemble $\{j\}$ pour $j \in \mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-$.

Soit $j$ le plus petit élément de $\mathcal{J} - \{0\}$. L'unique élément $C$ de $\mathcal{C}$ tel que $J_C$ puisse contenir 0 est $C = \{0, \ldots, j\}$. Si $d$ est pair, pour $n \in \{1,2\}$ et $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$, on a $0 \notin J(\Delta)$. Donc $m(C) = 0$. Si $d$ est impair, $j$ est le plus petit des deux entiers $j_{\max}(\Delta_{i,\max})$, $j_{\max}(\Delta_{2,\max})$. Alors $C \subset J(\Delta_{1,\max}) \cap J(\Delta_{2,\max})$ et $m(C) = 2$. En tout cas $J_C = \{1, \ldots, j-1\}$ et $J_C$ ne contient pas 0. Cela démontre (3).

Soit $j \in \mathcal{J} - \{0, \infty\}$, étudions les configurations possibles au « voisinage » de $j$. Notons $j'$ le plus petit élément de $\mathcal{J}$ qui soit $> j$ et $j''$ le plus grand élément de $\mathcal{J}$ qui soit $< j$. Posons $C' = \{j, \ldots, j'\}$, $C'' = \{j'', \ldots, j\}$. Puisque $j \in \mathcal{J}$, il existe $n \in \{1,2\}$ et $\Delta_n \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ tel que $j = j_{\max}(\Delta_n)$ ou $j = j_{\min}(\Delta_n)$. On suppose qu'il existe $\Delta_1 \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ tel que $j = j_{\min}(\Delta_1)$. Une étude analogue à celle qui suit vaut dans les autres cas. Remarquons que $C' \subset J(\Delta_1)$ : en effet, puisque $j_{\max}(\Delta_1) \in \mathcal{J}$ et $j_{\max}(\Delta_1) > j$, on a nécessairement $j_{\max}(\Delta_1) \geqslant j'$. Remarquons aussi qu'il n'existe pas de $\Delta_1'' \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ tel que $C'' \subset J(\Delta_1'')$. En effet s'il existait un tel $\Delta_1''$, on aurait $j \in J(\Delta_1'')$, donc $J(\Delta_1'') \cap J(\Delta_1) \neq \varnothing$, donc $\Delta_1'' = \Delta_1$. Mais alors $j = j_{\min}(\Delta_1) = j_{\min}(\Delta_1'') \leqslant j''$, contradiction. Montrons maintenant que seules les trois situations suivantes sont possibles :
(5) il existe $\Delta_2 \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_2)$ tel que $j = j_{\min}(\Delta_2)$ ; alors $C' \subset J(\Delta_2)$ et il n'existe pas de $\Delta_2'' \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_2)$ tel que $C'' \subset J(\Delta_2'')$ ;
(6) il existe $\Delta_2 \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_2)$ tel que $C'' \cup C' \subset J(\Delta_2)$ ;
(7) pour tout $\Delta_2 \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_2)$, $(C'' \cup C') \cap J(\Delta_2)$ est égal à $\varnothing$ ou $\{j''\}$ ou $\{j'\}$ ; il n'existe pas de $\Delta_2 \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_2)$ tel que $j \in J(\Delta_2)$ ou $C' \subset J(\Delta_2)$ ou $C'' \subset J(\Delta_2)$.

Remarquons que dans (5), les dernières assertions résultent comme ci-dessus de la première. Dans (7), les dernières assertions résultent trivialement de la première. Supposons qu'il existe $\Delta_2 \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_2)$ tel que $j \in J(\Delta_2)$. Si $j = j_{\min}(\Delta_2)$, (5) est vérifié. Sinon $j_{\min}(\Delta_2) < j$, donc $j_{\min}(\Delta_2) \leqslant j''$ et $C'' \subset J(\Delta_2)$. L'entier $j_{\max}(\Delta_2)$ ne peut pas être égal à $j = j_{\min}(\Delta_1)$ car ces entiers sont de parités distinctes. Donc $j_{\max}(\Delta_2) > j$ puis $j_{\max}(\Delta_2) \geqslant j'$ et $C' \subset J(\Delta_2)$. Alors (6) est vérifiée. Supposons qu'il n'existe pas de $\Delta_2 \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_2)$ tel que $j \in J(\Delta_2)$. Soit $\Delta_2 \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_2)$. On a nécessairement soit $j < j_{\min}(\Delta_2)$, soit $j_{\max}(\Delta_2) < j$. Dans le premier cas $j' \leqslant j_{\min}(\Delta_2)$ et $(C'' \cup C') \cap J(\Delta_2)$ est égal à $\varnothing$ ou $\{j'\}$. Dans le deuxième cas, $j_{\max}(\Delta_2) \leqslant j''$ et $(C'' \cup C') \cap J(\Delta_2)$ est égal à $\varnothing$ ou $\{j''\}$. Alors (7) est vérifiée.

Comme conséquences immédiates des définitions, on a :

(8) dans le cas (5), $j \in \mathcal{J}^+$, $J_{C''} = \{j''+1, \ldots, j-1\}$, $J_{C'} = \{j+1, \ldots, j'-1\}$ ;

(9) dans le cas (6), $j \notin \mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-$, $J_{C''} = \{j'', \ldots, j\}$, $J_{C'} = \{j+1, \ldots, j'-1\}$ ;

(10) dans le cas (7), $j \notin \mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-$, $J_{C''} = \{j''+1, \ldots, j-1\}$, $J_{C'} = \{j, \ldots, j'\}$.

Démontrons (4). Les seuls éléments de $\mathcal{N}$ auxquels $j$ puisse appartenir sont $J_{C''}$, $J_{C'}$ et $\{j\}$ si $j \in \mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-$. Puisque l'une des trois propriétés (8), (9), (10) est vérifiée, $j$ appartient à un et un seul de ces ensembles. Cela démontre (4) et le (i) de l'énoncé.

Poursuivons l'étude ci-dessus. Montrons que :

(11) $\lambda_j \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda})$ ;

(12) dans le cas (5), $\lambda_j > \lambda_{j+1}$ et, si $j \geqslant 2$, $\lambda_{j-1} > \lambda_j$ ;

(13) dans le cas (6), $\lambda_j > \lambda_{j+1}$ ;

(14) dans le cas (7), $\lambda_{j-1} > \lambda_j$ si $j \geqslant 2$.

Dans le cas (5), on a $j \in \mathcal{J}^+$ donc $j \in J^+$ d'après (2) et $\lambda_j \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda})$. On a $j+1 \notin J^+$ (les éléments de $J^+$ ont même parité) donc $\xi_{j+1} \leqslant 0$. Alors

$$\lambda_j = \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j} + 1 > \lambda_{1,j+1} + \lambda_{2,j+1} + \xi_{j+1} = \lambda_{j+1}.$$

Supposons $j \geqslant 2$. Puisque $j = j_{\min}(\Delta_1) = j_{\min}(\Delta_2)$, on a $\lambda_{1,j-1} \geqslant \lambda_{1,j} + 1$, $\lambda_{2,j-1} \geqslant \lambda_{2,j} + 1$. Si $\xi_{j-1} \geqslant 0$, alors

$$\lambda_{j-1} = \lambda_{1,j-1} + \lambda_{2,j-1} + \xi_{j-1} > \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j} + 1 = \lambda_j.$$

Si $\xi_{j-1} = -1$, alors $j-1 \in J^-$ donc $\lambda_{1,j-1} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1)$, $\lambda_{2,j-1} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_2)$. Alors $\lambda_{1,j-1}$ et $\lambda_{1,j}$, comme $\lambda_{2,j-1}$ et $\lambda_{2,j}$, sont de même parité et $\lambda_{1,j-1} \geqslant \lambda_{1,j} + 2$, $\lambda_{2,j-1} \geqslant \lambda_{2,j} + 2$. On conclut encore que $\lambda_{j-1} > \lambda_j$.

Dans le cas (6), d'après (1), $j \in J^+$. Comme dans le cas précédent, $\lambda_j \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda})$ et $\lambda_j > \lambda_{j+1}$.

Dans le cas (7), $\lambda_{2,j} \notin \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_2)$ et $j \notin J$. Alors $\lambda_j = \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}$. C'est la somme d'un élément de $\widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ et d'un entier qui n'appartient pas à $\widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_2)$. Donc $\lambda_j \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda})$. Supposons $j \geqslant 2$. Puisque $j = j_{\min}(\Delta_1)$, on a $\lambda_{1,j-1} \geqslant \lambda_{1,j} + 1$. Si $\xi_{j-1} \geqslant 0$, alors

$$\lambda_{j-1} = \lambda_{1,j-1} + \lambda_{2,j-1} + \xi_{j-1} > \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j} = \lambda_j.$$

Si $\xi_{j-1} = -1$, alors $j-1 \in J^-$, *a fortiori* $\lambda_{1,j-1} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ et $\lambda_{1,j-1}$ et $\lambda_{1,j}$ sont de même parité. Alors $\lambda_{1,j-1} \geqslant \lambda_{1,j}+2$ et on conclut encore $\lambda_{j-1} > \lambda_j$.

Démontrons (ii). D'après (i), on a l'égalité :

$$\bigcup_{D\in\mathcal{N}} \Delta(D) = \{i \in \mathbb{N};\, c_i \neq 0\}.$$

On doit démontrer que la réunion du membre de gauche est disjointe. Il suffit de montrer que si $D$ et $D'$ sont deux éléments consécutifs de $\mathcal{N}$, si $k$ est le plus grand élément de $D$ et donc $k+1$ le plus petit élément de $D'$, on a $\lambda_k > \lambda_{k+1}$. Soient donc de tels $D$, $D'$ et $k$. Par construction et parce que $0 \notin \mathcal{N}$, on a $k \in \mathcal{J} - \{0,\infty\}$ ou $k+1 \in \mathcal{J} - \{0,\infty\}$. Supposons $k \in \mathcal{J} - \{0,\infty\}$. Appliquons notre étude précédente à $j = k$. On a supposé qu'il existait $\Delta_1 \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ tel que $j = j_{\min}(\Delta_1)$ mais, comme on l'a dit, une étude analogue vaut dans les autres cas possibles. La propriété (10) n'est pas vérifiée car (10) interdit à $j = k$ d'être le plus grand terme d'un élément de $\mathcal{N}$. On est donc dans l'un des cas (5) ou (6). Alors $\lambda_k > \lambda_{k+1}$ d'après (12) ou (13). De même, si l'on suppose $k+1 \in \mathcal{J} - \{0,\infty\}$, on applique l'étude précédente à $j = k+1$. La propriété (9) n'est pas vérifiée. On est dans l'un des cas (5) ou (7) et $\lambda_k > \lambda_{k+1}$ d'après (12) ou (14). Cela démontre (ii).

Démontrons (iii). D'après (ii), il suffit de prouver :

- si $D \in \mathcal{N}_{\mathrm{int}}$, $\Delta(D) \subset \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda})$ ;
- si $D \in \mathcal{N} - \mathcal{N}_{\mathrm{int}}$, $\Delta(D) \cap \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}) = \varnothing$.

Soit $D \in \mathcal{N}_{\mathrm{int}}$ et $j \in D$. Si $j \in \mathcal{J}$, on a $\lambda_j \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda})$ d'après (11). Supposons $j \notin \mathcal{J}$. Alors il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $m(C) = 1$ et $D = J_C$. Puisque $j \notin \mathcal{J}$, on a $j \notin J^+ \cup J^-$ d'après (2) donc $\lambda_j = \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}$. Puisque $m(C) = 1$, on a $\lambda_{1,j} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ et $\lambda_{2,j} \notin \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_2)$ ou vice-versa. En tout cas $\lambda_j \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda})$.

Soit maintenant $D \in \mathcal{N} - \mathcal{N}_{\mathrm{int}}$. Alors il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $m(C) \in \{0,2\}$ et $D = J_C$. Soit $j \in D$. Par construction $j \notin \mathcal{J}$ et, comme ci-dessus, $\lambda_j = \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}$. En utilisant le fait que $m(C) \in \{0,2\}$, on conclut cette fois que $\lambda_j \notin \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda})$. Cela achève la démonstration de (iii) et du lemme. □

On pose

$$\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}) = \{\Delta(D);\, D \in \mathcal{N}_{\mathrm{int}}\}.$$

Remarquons que cette définition dépend de $\boldsymbol{\lambda}_1$ et $\boldsymbol{\lambda}_2$, bien qu'on ne les fasse pas figurer dans la notation. L'ensemble $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ est une partition de $\widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda})$. Si $(V, q_V)$ est symplectique, on note $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ l'ensemble $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ privé de son unique élément qui contient 0. Si $(V, q_V)$ est orthogonal, on pose $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}) = \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$. On ordonne $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ de façon naturelle (si $\Delta, \Delta' \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$, $i \in \Delta$, $i' \in \Delta'$ et $i \geqslant i'$, alors $\Delta \geqslant \Delta'$). Pour $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$, on note $\Delta^+$ son successeur (si $\Delta$ n'est pas maximal). On note $J(\Delta)$ l'ensemble des entiers $j \geqslant 1$ tels que $\lambda_j \in \Delta$. On note $j_{\min}(\Delta)$, resp. $j_{\max}(\Delta)$, le plus petit, resp. grand, élément de $J(\Delta)$, avec la convention $j_{\max}(\Delta) = \infty$ si $0 \in \Delta$. On a :

(15) • si $|J(\Delta)| = 1$, $j_{\min}(\Delta) = j_{\max}(\Delta)$ ;
• si $|J(\Delta)| \geqslant 2$, $j_{\min}(\Delta)$ et $j_{\max}(\Delta)$ sont deux éléments consécutifs de $\mathcal{J}$.

Soient $n \in \{1,2\}$ et $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$. Supposons que l'ensemble :

$$\{\Delta_n \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)\,;\, j_{\max}(\Delta) \leqslant j_{\max}(\Delta_n)\} \tag{16}$$

soit non vide. On note $\Delta_n(\Delta)$ le plus grand élément de cet ensemble. Grâce à (15) on voit qu'une et une seule des deux propriétés suivantes est vérifiée :

- $J(\Delta) \subset J(\Delta_n(\Delta))$ ;
- $j_{\max}(\Delta) \leqslant j_{\min}(\Delta_n(\Delta))$ et, si $\Delta_n(\Delta)^+$ existe, $j_{\max}(\Delta_n(\Delta)^+) \leqslant j_{\min}(\Delta)$.

Si l'ensemble (16) est vide, on ne peut définir $\Delta_n(\Delta)$ comme ci-dessus. Nous utiliserons néanmoins la notation $\Delta_n(\Delta)$ dans des expressions dont le sens sera évident. Par exemple, une somme sur tous les $\Delta'_n \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ tels que $\Delta'_n \geqslant \Delta_n(\Delta)$ sera une somme sur tout $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ ; si $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n) \neq \varnothing$, $\Delta_n(\Delta)^+$ sera le plus petit élément de $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ etc.

### *XI.12. Corollaire*

(i) *Pour tout $j \in J^+$, resp. $j \in J^-$, il existe $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $j = j_{\max}(\Delta)$, resp. $j = j_{\min}(\Delta)$.*

(ii) *Pour tout $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$, on a $j_{\max}(\Delta) \in J^+$, resp. $j_{\min}(\Delta) \in J^-$, si et seulement s'il existe $n \in \{1,2\}$ et $\Delta_n \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ tel que $j_{\max}(\Delta) = j_{\min}(\Delta_n)$, resp. $j_{\min}(\Delta) = j_{\max}(\Delta_n)$.*

*Démonstration.* — Soit $j \in J^+$. D'après XI.11 (1), on peut supposer qu'il existe $\Delta_1 \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1)$tel que $j = j_{\min}(\Delta_1)$. Alors l'une des propriétés (5), (6), (7) de XI.11 est vérifiée. La dernière est exclue d'après l'hypothèse $j \in J$. Grâce à XI.11 (8), (9) on voit qu'il existe $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $j = j_{\max}(\Delta)$.

Soit $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$. Si $j_{\max}(\Delta) \in J^+$, la conclusion de (ii) résulte de XI.11 (1). Supposons qu'il existe $\Delta_1 \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ tel que $j_{\max}(\Delta) = j_{\min}(\Delta_1)$. On applique à $j = j_{\max}(\Delta)$ l'étude faite dans la preuve du lemme XI.11. La propriété XI.11 (10) n'est pas vérifiée car elle interdit à $j$ d'être le plus grand terme d'un élément de $\mathcal{N}_{\text{int}}$. Donc XI.11 (5) ou XI.11 (6) est vérifiée et $j \in J^+$ grâce à XI.1 (1).

Les propriétés relatives à $J^-$ se démontrent de façon analogue. □

**XI.13.** Si $(V, q_V)$ est orthogonal, $a(\boldsymbol{\lambda}) = \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda})$, $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}) = \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ et $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ est une partition de $a(\boldsymbol{\lambda})$ d'après le lemme XI.11 (iii). Supposons $(V, q_V)$ symplectique. Notons $\Delta_{\min}$ l'élément de $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ contenant 0. Alors $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ est une partition de $a(\boldsymbol{\lambda})$ si et seulement si $\Delta_{\min} = \{0\}$.

***Lemme.*** — *Supposons $(V, q_V)$ symplectique. Alors $\Delta_{\min} \neq \{0\}$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- *$c(\boldsymbol{\lambda}_2) > c(\boldsymbol{\lambda}_1)$ et $\lambda_{2,c(\boldsymbol{\lambda}_2)} \geqslant 2$ ;*
- *$c(\boldsymbol{\lambda}_1) > c(\boldsymbol{\lambda}_2)$ et $c(\boldsymbol{\lambda}_1)$ est impair.*

*Démonstration.* — Notons $j$ le plus grand des deux entiers $j_{\min}(\Delta_{1,\min})$, $j_{\max}(\Delta_{2,\min})$. Remarquons que ces entiers sont distincts car de parité distincte. D'après la construction de XI.11, $J(\Delta_{\min}) = \{j, \dots, \infty\}$. La condition $\Delta_{\min} \neq \{0\}$ est équivalente à $\lambda_j \neq 0$. Grâce au corollaire XI.12, on calcule $\lambda_j$ :

(1) • si $j_{\min}(\Delta_{1,\min}) < j_{\max}(\Delta_{2,\min}) = j$, on a $j \in J^-$ et $\lambda_j = \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j} - 1$ ;

(2) • si $j_{\max}(\Delta_{2,\min}) < j_{\min}(\Delta_{1,\min}) = j$, on a $j \notin J$ et $\lambda_j = \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}$.

On utilisera les deux remarques suivantes :

(3) • $\lambda_{1,j_{\min}(\Delta_{1,\min})}$ est pair ; il est non nul si et seulement si $c(\boldsymbol{\lambda}_1)$ est impair ;

(4) • $\lambda_{2,c(\boldsymbol{\lambda}_2)} \geqslant 2$ ou $c(\boldsymbol{\lambda}_2) = j_{\max}(\Delta_{2,\min})$.

Supposons $\lambda_{1,j} \neq 0$. C'est un entier pair, donc $\lambda_j \neq 0$ d'après (1) ou (2). Montrons que l'une des conditions de l'énoncé est vérifiée. D'après (3), $c(\boldsymbol{\lambda}_1)$ est impair. Puisque $c(\boldsymbol{\lambda}_2)$ est pair, on a $c(\boldsymbol{\lambda}_1) \neq c(\boldsymbol{\lambda}_2)$. Si $c(\boldsymbol{\lambda}_1) > c(\boldsymbol{\lambda}_2)$, la dernière condition de l'énoncé est satisfaite. Si $c(\boldsymbol{\lambda}_2) > c(\boldsymbol{\lambda}_1)$, remarquons que $c(\boldsymbol{\lambda}_1) \geqslant j$ puisque $\lambda_{1,j} \neq 0$. Alors $c(\boldsymbol{\lambda}_2) > j_{\max}(\Delta_{2,\min})$ donc $\lambda_{2,c(\boldsymbol{\lambda}_2)} \geqslant 2$ d'après (4). La première condition de l'énoncé est satisfaite.

Supposons $\lambda_{1,j} = 0$. Si $c(\boldsymbol{\lambda}_1)$ est impair, on a $\lambda_{1,j_{\min}(\Delta_{1,\min})} \neq 0$ d'après (3), donc $j > j_{\min}(\Delta_{1,\min})$. Alors $j = j_{\max}(\Delta_{2,\min}) \leqslant c(\boldsymbol{\lambda}_2)$. Mais $j > c(\boldsymbol{\lambda}_1)$, puisque $\lambda_{1,j} = 0$. Donc $c(\boldsymbol{\lambda}_2) > c(\boldsymbol{\lambda}_1)$. La dernière condition de l'énoncé n'est donc pas vérifiée. Supposons $\lambda_j \neq 0$. D'après (1) ou (2), $\lambda_{2,j} \neq 0$, donc $c(\boldsymbol{\lambda}_2) \geqslant j$. Comme ci-dessus, $j > c(\boldsymbol{\lambda}_1)$, donc $c(\boldsymbol{\lambda}_2) > c(\boldsymbol{\lambda}_1)$. Si $c(\boldsymbol{\lambda}_2) \neq j_{\max}(\Delta_{2,\min})$, alors la première condition de l'énoncé est vérifiée d'après (4). Supposons $c(\boldsymbol{\lambda}_2) = j_{\max}(\Delta_{2,\min})$. Alors $j = j_{\max}(\Delta_{2,\min})$. D'après (1), la condition $\lambda_j \neq 0$ entraîne $\lambda_{2,j} \geqslant 2$, *i.e.* $\lambda_{2,c(\boldsymbol{\lambda}_2)} \geqslant 2$ et la première condition de l'énoncé est vérifiée. Inversement supposons cette condition vérifiée. On a évidemment $\lambda_{c(\boldsymbol{\lambda}_2)} \neq 0$. Or $j \leqslant \sup(c(\boldsymbol{\lambda}_2), c(\boldsymbol{\lambda}_1) + 1) \leqslant c(\boldsymbol{\lambda}_2)$. Donc $\lambda_j \neq 0$. Cela achève la démonstration. □

**XI.14.** Soit $n \in \{1, 2\}$. On note $I_n$ l'ensemble des entiers $i \geqslant 1$ tels que $c_i \geqslant 1$ et tels que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

$$(1) \qquad \begin{cases} \bullet \quad \lambda_{n,c_{\geqslant i}} > \lambda_{n,c_{\geqslant i}+1} ; \\ \bullet \quad c_{\geqslant i} \equiv d \bmod 2\mathbb{Z} \qquad \text{et } \lambda_{n,c_{\geqslant i}} \notin \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_n) ; \\ \bullet \quad c_{\geqslant i} \equiv d+1 \bmod 2\mathbb{Z} \quad \text{et } \lambda_{n,c_{\geqslant i}} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_n). \end{cases}$$

***Lemme***. — *L'ensemble $I_1 \cap I_2$ est la réunion des deux ensembles suivants :*

- *celui des entiers $i \geqslant 1$ tels que $c_i \geqslant 1$ et $i \notin a(\boldsymbol{\lambda})$ ;*
- *celui des plus petits termes des éléments de $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$.*

*Démonstration.* — Soit $i$ un entier $\geqslant 1$ tel que $c_i \geqslant 1$ et $i \notin a(\boldsymbol{\lambda})$. D'après la dernière partie de la démonstration du lemme XI.7, l'ensemble $J(i)$ est réunion de couples $\{j-1, j\}$ vérifiant l'une des deux conditions :

(2) • $j \equiv d \bmod 2\mathbb{Z}$, $\lambda_{1,j} \notin \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1)$, $\lambda_{2,j} \notin \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_2)$ ;

(3) • $j \equiv d+1 \bmod 2\mathbb{Z}$, $\lambda_{1,j} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1)$, $\lambda_{2,j} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_2)$.

Il en résulte que l'entier $c_{\geqslant i}$ vérifie aussi l'une de ces conditions. Mais alors la relation (1) est vérifiée pour $n \in \{1,2\}$ et $i \in I_1 \cap I_2$.

Soit maintenant $i$ un entier $\geqslant 1$ tel que $c_i \geqslant 1$ et $i \in a(\boldsymbol{\lambda})$. Supposons $i \in I_1 \cap I_2$, posons $j = c_{\geqslant i}$. Supposons d'abord la relation (1) vérifiée pour tout $n \in \{1,2\}$. Alors l'une des deux conditions (2) ou (3) est vérifiée. L'hypothèse $i \in a(\boldsymbol{\lambda})$ impose que c'est la condition (3) et que $j \in J^+$. D'après le corollaire XI.12, il existe alors $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $j = j_{\max}(\Delta)$. Le plus petit terme de $\Delta$ est $i$. Supposons maintenant que la relation (1) n'est pas vérifiée pour $n = 1$. On a alors :

$$\text{(4)} \qquad \lambda_{1,j} > \lambda_{1,j+1}, \quad \lambda_{1,j} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1), \quad j \equiv d \bmod 2\mathbb{Z}.$$

En effet l'inégalité résulte de l'hypothèse $i \in I_1$. Puisque (1) n'est pas vérifiée pour $n = 1$, ou bien les deux dernières relations sont vérifiées, ou bien sont vérifiées les deux conditions : $\lambda_{1,j} \notin \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1)$, $j \equiv d+1 \bmod 2\mathbb{Z}$. Mais celles-ci entraînent que $\lambda_{1,j} = \lambda_{1,j+1}$ grâce au fait que $\boldsymbol{\lambda}_1$ est spéciale. Contradiction qui démontre (4).

Il résulte de (4) qu'il existe $\Delta_1 \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}_1)$ tel que $j = j_{\max}(\Delta_1)$. *A fortiori*, $j$ appartient à l'ensemble $\mathcal{J}$ de XI.11. On a l'une des propriétés :

(5) il existe $\Delta_2 \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}_2)$ tel que $j = j_{\max}(\Delta_2)$ ;

(6) $\lambda_{2,j} \notin \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_2)$.

En effet, si $\lambda_{2,j} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_2)$, la relation (1) n'est pas vérifiée pour $n = 2$ puisque $j \equiv d \bmod 2\mathbb{Z}$ d'après (4). Puisque $i \in I_2$, l'analogue de la relation (4) est vérifiée, où l'on remplace les indices 1 par des indices 2. Cette relation entraîne (5).

En utilisant (5) ou (6), une étude analogue à celle que l'on a conduite dans la démonstration du lemme XI.11 montre qu'il existe $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $j = j_{\max}(\Delta)$. Le plus petit terme de $\Delta$ est alors $i$.

Soient maintenant $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ et $i$ le plus petit terme de $\Delta$. Posons $j = c_{\geqslant i}$. Alors $j = j_{\max}(\Delta)$. Supposons comme dans la preuve du lemme XI.11 qu'il existe $\Delta_1 \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ tel que $j = j_{\min}(\Delta_1)$ (une étude similaire vaut dans les autres cas). Alors $j \equiv d + 1 \bmod 2\mathbb{Z}$ (*cf.* lemme XI.10) et $\lambda_{1,j} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1)$. Donc (1) est vérifiée pour $n = 1$. Puisque $j = j_{\max}(\Delta)$, la relation XI.11 (10) est interdite. Donc l'une des conditions XI.11 (5) ou XI.11 (6) est vérifiée. En tout cas $\lambda_{2,j} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_2)$ et (2) est vérifiée pour $n = 2$. Donc $i \in I_1 \cap I_2$. Cela achève la démonstration. □

**XI.15.** Les résultats de ce paragraphe sont combinatoires, il est plus commode de supposer que les espaces $(V, q_V)$ et $(V_n, q_{V_n})$ pour $n \in \{1,2\}$ sont définis sur $\mathbb{F}_q$. On fera figurer les lettres $V$ ou $V_n$ dans la notation de certains objets pour bien les distinguer.

Soit $n \in \{1,2\}$. Notons $\iota_n$ l'élément suivant de $\mathcal{I}(V_n)$ :

$$\iota_n = \begin{cases} (\boldsymbol{\lambda}_n, 0), & \text{si } \boldsymbol{\lambda}_n \text{ n'est pas exceptionnelle}, \\ (\boldsymbol{\lambda}_n, +1, 0), & \text{si } \boldsymbol{\lambda}_n \text{ est exceptionnelle}, \end{cases}$$

*cf.* VIII.6. Soit $(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_n)$ un couple de partitions paramétrisant $\rho_{\iota_n}$. On a

$$S(\boldsymbol{\alpha}_n) + S(\boldsymbol{\beta}_n) = [d(V_n)/2].$$

Si $(V_n, q_{V_n})$ est orthogonal pair, on suppose $\boldsymbol{\alpha}_n \succ \boldsymbol{\beta}_n$.

Posons :

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2.$$

Notons $W$ le groupe $W(0)$ si $d$ est pair, $W(1)$ si $d$ est impair, ces groupes étant relatifs à l'espace $(V, q_V)$. On a $W \simeq W(C_{[d/2]})$, si $(V, q_V)$ est symplectique ou orthogonal impair, $W \simeq W(D_{d/2})$, si $(V, q_V)$ est orthogonal pair. En tout cas $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ paramétrise au moins une représentation irréductible de ce groupe $W$. Soient $\rho$ une telle représentation et $\iota \in \mathcal{I}(V)$ tel que $\rho = \rho_\iota$. La partition de $d$ qui intervient dans les données $\iota$ est appelée la partition induite par $\boldsymbol{\lambda}_1$ et $\boldsymbol{\lambda}_2$.

***Remarque***. — Cette partition est bien déterminée. En effet $\rho$ est unique sauf si $(V, q_V)$ est orthogonal pair et $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$. Dans ce cas la construction ci-dessus fournit deux données $\iota$ possibles, mais les partitions qui figurent dans ces deux données sont les mêmes.

***Lemme***. — *La partition induite par $\boldsymbol{\lambda}_1$ et $\boldsymbol{\lambda}_2$ est égale à $\boldsymbol{\lambda}$.*

*Démonstration*. — On suppose $(V, q_V)$ symplectique. Posons $\iota = (\boldsymbol{\lambda}, 0)$. Il suffit de prouver que

$$\psi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \psi_{\text{nil}}(\iota),$$

*cf.* VIII.7. On va calculer ces termes. Calculons d'abord $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. On a l'égalité

$$\psi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1) = \psi_{\text{nil}}(\iota_1).$$

On a calculé $\psi_{\text{nil}}(\iota_1)$ dans la preuve du lemme VIII.16. En utilisant la définition de $\psi_{\mathcal{P}}$, *cf.* VIII.7, on en déduit les égalités

(1) $$\alpha_{1,j} = \left[\frac{\lambda_{1,2j-1}}{2}\right], \quad \beta_{1,j} = \left[\frac{\lambda_{1,2j}+1}{2}\right]$$

pour tout entier $j \geqslant 1$. De même, on a l'égalité

$$\psi'_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2) = \psi'_{\text{nil}}(\iota_2).$$

On a calculé $\psi'_{\text{nil}}(\iota_2)$ en VIII.20. En utilisant l'hypothèse $\boldsymbol{\alpha}_2 \succ \boldsymbol{\beta}_2$, on en déduit les égalités

(2) $$\alpha_{2,j} = \left[\frac{\lambda_{2,2j-1}+1}{2}\right], \quad \beta_{2,j} = \left[\frac{\lambda_{2,2j}}{2}\right]$$

pour tout $j \geqslant 1$. Rappelons la formule :

(3) $$\psi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + [d, 0]_2, \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + [d-1, 1]_2).$$

Calculons maintenant $\psi_{\mathrm{nil}}(\iota)$. Pour tout entier $j \geqslant 1$, posons

$$z_j = \left[\frac{\lambda_{1,2j}+1}{2}\right] + \left[\frac{\lambda_{2,2j}}{2}\right] + d/2 - j,$$
$$z'_j = \left[\frac{\lambda_{1,2j-1}}{2}\right] + \left[\frac{\lambda_{2,2j}+1}{2}\right] + d/2 - j.$$

On a les propriétés suivantes :
(4) pour tout $j \in J^+$, $\lambda_j + d - j = 2z'_{(j+1)/2} + 1$ ;
(5) pour tout $j \in J^-$, $\lambda_j + d - j = 2z_{j/2}$ ;
(6) pour tout entier $j \geqslant 1$ tel que $2j-1 \notin J$ et $2j \notin J$, les ensembles

$$\{2z'_j + 1, 2z_j\} \quad \text{et} \quad \{\lambda_{2j-1} + d - 2j + 1, \lambda_{2j} + d - 2j\}$$

sont égaux ;
(7) pour tout entier $j \geqslant 1$ tel que $2j \in J - J^-$ et $2j+1 \in J - J^+$, les ensembles

$$\{2z'_{j+1} + 1, 2z_j\} \quad \text{et} \quad \{\lambda_{2j} + d - 2j, \lambda_{2j+1} + d - 2j - 1\}$$

sont égaux.

Les propriétés (4) et (5) sont immédiates. Soit $j$ vérifiant les hypothèses de (6). Puisque $\boldsymbol{\lambda}_1$ et $\boldsymbol{\lambda}_2$ sont spéciales, $\lambda_{1,2j-1}$ et $\lambda_{1,2j}$, comme $\lambda_{2,2j-1}$ et $\lambda_{2,2j}$, sont de même parité. Puisque $2j-1 \notin J$, $2j \notin J$, on est dans l'un des trois cas suivants :
- $\lambda_{1,2j-1}$, $\lambda_{1,2j}$, $\lambda_{2,2j-1}$, $\lambda_{2,2j}$ sont pairs ;
- $\lambda_{1,2j-1}$, $\lambda_{1,2j}$, $\lambda_{2,2j-1}$, $\lambda_{2,2j}$ sont impairs ;
- $\lambda_{1,2j-1}$, $\lambda_{1,2j}$ sont impairs et $\lambda_{2,2j-1}$, $\lambda_{2,2j}$ sont pairs.

On a les égalités

$$\lambda_{2j-1} = \lambda_{1,2j-1} + \lambda_{2,2j-1}, \quad \lambda_{2j} = \lambda_{1,2j} + \lambda_{2,2j}.$$

Dans les deux premiers cas ci-dessus, on voit que

$$\lambda_{2j-1} + d - 2j + 1 = 2z'_j + 1, \quad \lambda_{2j} + d - 2j = 2z_j.$$

Dans le dernier cas, puisque $\boldsymbol{\lambda}_1$ et $\boldsymbol{\lambda}_2$ sont spéciales, on a $\lambda_{1,2j-1} = \lambda_{1,2j}$ et $\lambda_{2,2j-1} = \lambda_{2,2j}$. On vérifie qu'alors

$$\lambda_{2j-1} + d - 2j + 1 = 2z_j, \quad \lambda_{2j} + d - 2j = 2z'_j + 1.$$

Soit maintenant $j$ vérifiant les hypothèses de (7). On a les égalités

$$\lambda_{2j} = \lambda_{1,2j} + \lambda_{2,2j}, \quad \lambda_{2j+1} = \lambda_{1,2j+1} + \lambda_{2,2j+1}.$$

Les définitions de $J$, $J^+$ et $J^-$ entraînent :
- $\lambda_{1,2j}$, $\lambda_{1,2j+1}$ sont pairs et égaux ; $\lambda_{2,2j}$, $\lambda_{2,2j+1}$ sont impairs et égaux.

Alors

$$\lambda_{2j} + d - 2j = 2z'_{j+1} + 1, \quad \lambda_{2j+1} + d - 2j - 1 = 2z_j.$$

En utilisant le graphique XI.6 (1), on voit que l'ensemble $\{1, \ldots, d\}$ est union disjointe d'ensembles $\{j\}$, où $j$ est comme en (4) ou (5), d'ensembles $\{2j-1, 2j\}$, où $j$

est comme en (6) et enfin d'ensembles $\{2j, 2j+1\}$, où $j$ est comme en (7). On déduit des relations (4) à (7) l'égalité :

$$\boldsymbol{\lambda} + [d-1, 0] = \{2z_j; j = 1, \dots, d\} \cup \{2z'_j + 1; j = 1, \dots, d\}.$$

En appliquant la recette de VIII.7 et en utilisant (1) et (2), on obtient l'égalité

$$\psi_{\mathrm{nil}}(\iota) = \big(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + [d, 0]_2, \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + [d-1, 1]_2\big).$$

Grâce à (3), on conclut à l'égalité $\psi_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \psi_{\mathrm{nil}}(\iota)$, ce qui achève la démonstration. □

**XI.16.** On conserve les hypothèses de XI.6, en revenant à une situation définie sur $F$. On suppose désormais que $V$, $V_1$, $V_2$ possèdent tous trois des réseaux autoduaux. On suppose aussi :

(1) pour $n \in \{1, 2\}$, si $(V_n, q_{V_n})$ est orthogonal pair non déployé, alors $\boldsymbol{\lambda}_n$ possède au moins un terme impair.

La propriété suivante résulte de cette hypothèse :

• $(V, q_V)$ est orthogonal pair non déployé, alors $\boldsymbol{\lambda}$ possède au moins un terme impair.

En effet, si $(V, q_V)$ est orthogonal pair non déployé, il résulte des hypothèses de X.1 que l'un des couples $(V_n, q_{V_n})$ pour $n \in \{1, 2\}$ est du même type. L'une des partitions $\boldsymbol{\lambda}_n$ pour $n \in \{1, 2\}$ possède donc un terme impair et $\boldsymbol{\lambda}$ aussi d'après le corollaire XI.8.

D'après (1), pour $n \in \{1, 2\}$, il existe une orbite $\mathcal{O}_n \in \mathfrak{g}_{n,\mathrm{nil}}/G_n$ dont la partition associée soit $\boldsymbol{\lambda}_n$. *Idem* il existe $\mathcal{O} \in \mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}/G$ dont la partition associée soit $\boldsymbol{\lambda}$. Fixons de telles orbites.

***Lemme***. — *On a l'égalité :*

$$\dim(\mathcal{O}) = \dim(\mathcal{O}_1) + \dim(\mathcal{O}_2) + \dim(\mathfrak{g}) - \dim(\mathfrak{h}).$$

*Démonstration*. — On suppose $(V, q_V)$ symplectique. Utilisons le lemme XI.1 pour calculer $\dim(\mathcal{O})$, $\dim(\mathcal{O}_1)$ et $\dim(\mathcal{O}_2)$. Pour obtenir l'égalité de l'énoncé, il suffit de prouver que pour tout entier $j \geqslant 1$, on a l'égalité :

$$[S_j(\boldsymbol{\lambda})/2] = [S_j(\boldsymbol{\lambda}_1)/2] + [e(j) + S_j(\boldsymbol{\lambda}_2)/2]. \tag{2}$$

Soit $j$ un entier $\geqslant 1$. D'après les définitions et le lemme XI.6, on a les égalités :

$$S_j(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} S_j(\boldsymbol{\lambda}_1) + S_j(\boldsymbol{\lambda}_2), & \text{si } j \notin J - J^-, \\ S_j(\boldsymbol{\lambda}_1) + S_j(\boldsymbol{\lambda}_2) + 1, & \text{si } j \in J - J^-. \end{cases} \tag{3}$$

Puisque $\boldsymbol{\lambda}_1$ et $\boldsymbol{\lambda}_2$ sont spéciales, on a la propriété suivante :

(4) • pour $n \in \{1, 2\}$, $S_j(\boldsymbol{\lambda}_n)$ est pair si $\lambda_{n,j}$ est pair et $2e(j) + S_j(\boldsymbol{\lambda}_n)$ est pair si $\lambda_{n,j}$ est impair.

Supposons $\lambda_{2,j}$ pair. Grâce à (4),

$$[e(j) + S_j(\boldsymbol{\lambda}_2)/2] = S_j(\boldsymbol{\lambda}_2)/2.$$

Le membre de droite de (2) est égal à

$$[(S_j(\boldsymbol{\lambda}_1)+S_j(\boldsymbol{\lambda}_2))/2].$$

Or $j\notin J$ puisque $\lambda_{2,j}$ est pair et l'égalité (2) résulte de (3).

Supposons $\lambda_{1,j}$ et $\lambda_{2,j}$ impairs. Grâce à (4),

$$[S_j(\boldsymbol{\lambda}_1)/2]=-e(j)+S_j(\boldsymbol{\lambda}_1)/2,[e(j)+S_j(\boldsymbol{\lambda}_2)/2]=e(j)+S_j(\boldsymbol{\lambda}_2)/2.$$

Le membre de droite de (2) est égal à :

$$(S_j(\boldsymbol{\lambda}_1)+S_j(\boldsymbol{\lambda}_2))/2.$$

Or $j\notin J$ puisque $\lambda_{1,j}$ est impair et on conclut comme ci-dessus.

Supposons $\lambda_{1,j}$ pair et $\lambda_{2,j}$ impair. De même le membre de droite de (2) est égal à

$$e(j)+(S_j(\boldsymbol{\lambda}_1)+S_j(\boldsymbol{\lambda}_2))/2.$$

Remarquons que $j\in J$ et, si $j\in J^-$, alors $j$ est pair et $e(j)=0$. D'après (3), on a donc :

$$2e(j)+S_j(\boldsymbol{\lambda}_1)+S_j(\boldsymbol{\lambda}_2)\leqslant S_j(\boldsymbol{\lambda})\leqslant 1+2e(j)+S_j(\boldsymbol{\lambda}_1)+S_j(\boldsymbol{\lambda}_2).$$

Le membre de gauche de cette relation est pair d'après ce qui précède, donc

$$[S_j(\boldsymbol{\lambda})/2]=e(j)+(S_j(\boldsymbol{\lambda}_1)+S_j(\boldsymbol{\lambda}_2))/2.$$

L'égalité (2) s'ensuit, ce qui achève la démonstration. □

**XI.17.** On conserve les mêmes hypothèses. Soient $n\in\{1,2\}$ et $\iota_n$ un élément de $\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$ de la forme $(\boldsymbol{\lambda}_n,\tau_n,\delta_n)$ ou $(\boldsymbol{\lambda}_n,\varepsilon_n,\tau_n,\delta_n)$, *cf.* IX.10. Notons $D_n$ l'entier tel que $\mathrm{fam}^{-1}(\tau_n,\delta_n)\in\mathcal{S}_{[d/2],D_n}$, posons :

$$k_n=\begin{cases}(D_n-1)/2, & \text{si } (V_n,q_{V_n}) \text{ est symplectique},\\ (D_n+1)/2, & \text{si } (V_n,q_{V_n}) \text{ est orthogonal impair},\\ D_n/2, & \text{si } (V_n,q_{V_n}) \text{ est orthogonal pair}.\end{cases}$$

En VIII.17, VIII.19 et VIII.21, on a défini les ensembles

$$\mathcal{I}nt_{X,\ell}(\tau_n,\delta_n)\quad\text{et}\quad\widetilde{\mathcal{I}nt}_{Y,\ell}(\tau_n,\delta_n)$$

pour $\ell\in\mathbb{Z}$. Plus exactement, dans le cas orthogonal, on a défini $\mathcal{I}nt_{Y,\ell}(\tau_n,\delta_n)$ mais nous le noterons désormais $\widetilde{\mathcal{I}nt}_{Y,\ell}(\tau_n,\delta_n)$. On pose

$$\mathcal{I}nt_{n,X}=\mathcal{I}nt_{X,k_n+1}(\tau_n,\delta_n),\quad \widetilde{\mathcal{I}nt}_{n,Y}=\widetilde{\mathcal{I}nt}_{Y,k_n+1}(\tau_n,\delta_n).$$

Rappelons que pour tout entier $i\geqslant 1$, on a posé $c_i=c_i(\boldsymbol{\lambda})$. On a aussi posé $c_0=\infty$. Pour tout $i\in\mathbb{N}$, posons :

$$\begin{aligned}N_n(i)=\Big|\{\Delta\in\mathcal{I}nt_{n,X}\,;\,j_{\max}(\Delta)\leqslant c_{\geqslant i}-1\}\Big|\\ -\Big|\{\Delta\in\widetilde{\mathcal{I}nt}_{n,Y}\,;\,1\leqslant j_{\min}(\Delta)\leqslant c_{\geqslant(i+1)}+1\}\Big|;\end{aligned}$$

$$a_n(i) = \begin{cases} \left[\dfrac{\lambda_{n,c_{\geqslant i}}}{2}\right] - k_n + N_n(i), & \text{si } (V_n, q_{V_n}) \text{ est symplectique,} \\ \left[\dfrac{\lambda_{n,c_{\geqslant i}}+1}{2}\right] - k_n + N_n(i), & \text{si } (V_n, q_{V_n}) \text{ est orthogonal;} \end{cases}$$

$$b_n(i) = \begin{cases} \left[\dfrac{\lambda_{n,c_{\geqslant (i+1)}+1}+1}{2}\right] + k_n - N_n(i), & \text{si } (V, q_{V_n}) \text{ est symplectique,} \\ \left[\dfrac{\lambda_{n,c_{\geqslant (i+1)}+1}}{2}\right] + k_n - N_n(i), & \text{si } (V, q_{V_n}) \text{ est orthogonal;} \end{cases}$$

$$w_n(i) = \sum_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}_n); c_{\geqslant(i+1)} < j_{\max}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}} \frac{(-1)^{\tau_n(\Delta)+\delta_n(\Delta)+k_n}}{2} - \sum_{\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n); c_{\geqslant(i+1)} < j_{\min}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}} \frac{(-1)^{\tau_n(\Delta)+\delta_n(\Delta^+)+k_n}}{2}.$$

Notons $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des applications $f_n : \mathbb{N} - \{0\} \to \{-1/2, 0, 1/2\}$ telles que, pour tout $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, on ait les relations :

- si $i \in I_n$ ou si $i > d$, $f_n(i) = 0$ ;
- si $c_i \geqslant 1$ et $i \notin I_n$, $f_n(i) \in \{-1/2, 1/2\}$ ;
- si $c_i = 0$, $f_n(i) = f_n(i+1)$.

***Lemme***

(i) *On a l'égalité* $N_n(0) = k_n$.

(ii) *Pour tout* $i \in \mathbb{N}$, *on a les inégalités*

$$0 \leqslant a_n(i) \leqslant a_n(i+1), \quad 0 \leqslant b_n(i) \leqslant b_n(i+1).$$

(iii) *Pour tout entier* $i \geqslant 1$, *on a l'égalité :*

$$w_n(\geqslant i) = \left|\{\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}_{n,Y} ; 1 \leqslant j_{\min}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}\}\right| - \left|\{\Delta \in \mathcal{I}nt_{n,X} ; j_{\max}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}\}\right| + e(d) + z_n(i),$$

*où*

$$z_n(i) = \begin{cases} -1/2, & \textit{s'il existe } \Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1) \textit{ tel que } c_{\geqslant i} \in J(\Delta) - \{j_{\max}(\Delta)\}, \\ 0, & \textit{sinon.} \end{cases}$$

(iv) *Soit* $i$ *un entier* $\geqslant 1$ *tel que* $c_i \neq 0$. *On a les égalités suivantes :*

- *s'il n'existe pas de* $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ *tel que* $c_{\geqslant i} = j_{\min}(\Delta)$ *ou* $c_{\geqslant i} = j_{\max}(\Delta)$,

$$N_n(i) + w_n(\geqslant i) - e(d) = \begin{cases} 0, & si\ \lambda_{n,c_{\geqslant i}} \notin \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_n), \\ -\dfrac{1}{2}, & si\ \lambda_{n,c_{\geqslant i}} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_n); \end{cases}$$

• *si* $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ *est tel que* $c_{\geqslant i} = j_{\max}(\Delta)$,

$$N_n(i) + w_n(\geqslant i) - e(d) = -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{\tau_n(\Delta)+\delta_n(\Delta)+k_n}}{2};$$

• *si* $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ *est tel que* $c_{\geqslant i} = j_{\min}(\Delta)$,

$$N_n(i) + w_n(\geqslant i) - e(d) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\tau_n(\Delta)+\delta_n(\Delta^+)+k_n+1}}{2}, & si\ c_i \geqslant 2, \\ -\dfrac{1}{2}, & si\ c_i = 1. \end{cases}$$

*(v) Soit i un entier* $\geqslant 1$ *tel que* $c_{i-1} \neq 0$. *On a les égalités suivantes :*

• *s'il n'existe pas de* $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ *tel que* $c_{\geqslant i} + 1 = j_{\min}(\Delta)$ *ou* $c_{\geqslant i} + 1 = j_{\max}(\Delta)$,

$$N_n(i-1) + w_n(\geqslant i) - e(d) = \begin{cases} 0, & si\ \lambda_{n,c_{\geqslant i}+1} \notin \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_n), \\ -\dfrac{1}{2}, & si\ \lambda_{n,c_{\geqslant i}+1} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_n); \end{cases}$$

• *si* $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ *est tel que* $c_{\geqslant i} + 1 = j_{\max}(\Delta)$,

$$N_n(i-1) + w_n(\geqslant i) - e(d) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\tau_n(\Delta)+\delta_n(\Delta)+k_n+1}}{2}, & si\ c_{i-1} \geqslant 2, \\ -\dfrac{1}{2}, & si\ c_{i-1} = 1; \end{cases}$$

• *si* $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ *est tel que* $c_{\geqslant i} + 1 = j_{\min}(\Delta)$,

$$N_n(i-1) + w_n(\geqslant i) - e(d) = -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{\tau_n(\Delta)+\delta_n(\Delta^+)+k_n}}{2}.$$

(vi) *Pour tout entier* $i \geqslant 1$, *tout* $f_n \in \mathcal{F}_n$ *et tout* $\varepsilon \in \{\pm 1\}$,

$$c_i/2 + \varepsilon w_n(i) + \varepsilon f_n(i) - \varepsilon f_n(i+1)$$

*est entier* $\geqslant 0$.

*Démonstration.* — Si $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n) \neq \varnothing$, on vérifie que $j_{\min}(\Delta_{n,\min}) \leqslant c_{\geqslant 1} + 1$. On a donc l'égalité :

$$N_n(0) = |\mathcal{I}nt_{n,X}| - \left|\{\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}_{n,Y}\,;\, 1 \leqslant j_{\min}(\Delta)\}\right|.$$

Si $(V_n, q_{V_n})$ est symplectique, cette égalité devient :

$$N_n(0) = \left|\mathcal{I}nt_{X,1+k_n}(\tau_n, \delta_n)\right| - \left|\widetilde{\mathcal{I}nt}_{Y,1+k_n}(\tau_n, \delta_n)\right|.$$

En utilisant les égalités :

$$\left|\mathcal{I}nt_{X,0}(\tau_n, \delta_n)\right| + \left|\mathcal{I}nt_{X,1}(\tau_n, \delta_n)\right| = \left|\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}_n)\right|,$$
$$\left|\widetilde{\mathcal{I}nt}_{Y,0}(\tau_n, \delta_n)\right| + \left|\widetilde{\mathcal{I}nt}_{Y,1}(\tau_n, \delta_n)\right| = \left|\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}_n)\right| + 1,$$

on obtient :

$$N_n(0)=\begin{cases}|\mathcal{I}nt_{X,1}(\tau_n,\delta_n)|-|\widetilde{\mathcal{I}nt}_{Y,1}(\tau_n,\delta_n)|, & \text{si } k_n \text{ est pair},\\ -1-|\mathcal{I}nt_{X,1}(\tau_n,\delta_n)|+|\widetilde{\mathcal{I}nt}_{Y,1}(\tau_n,\delta_n)|, & \text{si } k_n \text{ est impair}.\end{cases}$$

Si $(V_n,q_{V_n})$ est orthogonal pair, $k_n$ est pair et on a de même :

$$N_n(0)=|\mathcal{I}nt_{X,1}(\tau_n,\delta_n)|-|\widetilde{\mathcal{I}nt}_{Y,1}(\tau_n,\delta_n)|.$$

Si $(V_n,q_{V_n})$ est orthogonal impair, l'unique élément $\Delta$ de $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}_n)$ qui ne vérifie pas la relation $1\leqslant j_{\min}(\Delta)$ est $\Delta_{n,\max}$. On a $\tau_n(\Delta_{n,\max})=\delta_n(\Delta^+_{n,\max})=0$. On obtient

$$N_n(0)=\begin{cases}|\mathcal{I}nt_{X,1}(\tau_n,\delta_n)|-|\widetilde{\mathcal{I}nt}_{Y,1}(\tau_n,\delta_n)|, & \text{si } k_n \text{ est pair},\\ 1-|\mathcal{I}nt_{X,1}(\tau_n,\delta_n)|+|\widetilde{\mathcal{I}nt}_{Y,1}(\tau_n,\delta_n)|, & \text{si } k_n \text{ est impair}.\end{cases}$$

On obtient le (i) de l'énoncé en appliquant les lemmes VIII.17, resp. VIII.21, VIII.19.

Démontrons (ii) en supposant $(V_n,q_{V_n})$ symplectique. Soit $i\in\mathbb{N}$. Posons $c=c_{\geqslant i}$, $c'=c_{\geqslant(i+1)}$, $c''=c_{\geqslant(i+2)}$. Démontrons les inégalités

$$\text{(1)}\qquad \left[\frac{\lambda_{n,c'+1}+1}{2}\right]-\left[\frac{\lambda_{n,c''+1}+1}{2}\right]\leqslant N_n(i)-N_n(i+1)\leqslant\left[\frac{\lambda_{n,c'}}{2}\right]-\left[\frac{\lambda_{n,c}}{2}\right].$$

Par définition,

$$N_n(i)-N_n(i+1)\leqslant\Big|\{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}_n);\,c'\leqslant j_{\max}(\Delta)\leqslant c-1\}\Big|.$$

Si $c_i=0$, on a $c=c'$ et le membre de droite ci-dessus est nul. La deuxième inégalité de (1) est claire. Supposons $c_i\neq 0$. Il résulte du lemme XI.11 (ii) qu'un élément de $\mathcal{J}$ appartenant à $J(i)=\{c'+1,\dots,c\}$ est forcément égal à $c'+1$ ou à $c$. En particulier si $\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}_n)$ vérifie $c'\leqslant j_{\max}(\Delta)\leqslant c-1$, on a $j_{\max}(\Delta)=c'$ ou $j_{\max}(\Delta)=c'+1$ et dans ce cas $c'+1\leqslant c-1$. Comme de plus $j_{\max}(\Delta)\equiv d \bmod 2\mathbb{Z}$, on voit qu'il existe au plus un tel $\Delta$. Donc

$$N_n(i)-N_n(i+1)\leqslant 1.$$

Si cette inégalité est stricte, la deuxième inégalité de (1) est claire. Supposons $N_n(i)-N_n(i+1)=1$. Il existe alors $\Delta$ comme ci-dessus. Puisque $|J(\Delta)|$ est pair, $c'\in J(\Delta)$, donc $\lambda_{n,c'}$ est pair. D'autre part

$$\lambda_{n,c'}\geqslant\lambda_{n,j_{\max}(\Delta)}>\lambda_{n,j_{\max}(\Delta)+1}\geqslant\lambda_{n,c}.$$

Donc

$$1\leqslant\left[\frac{\lambda_{n,c'}}{2}\right]-\left[\frac{\lambda_{n,c}}{2}\right]$$

et cela démontre la deuxième inégalité de (1).

Par définition

$$-\Big|\{\Delta\in\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n);\,c''+2\leqslant j_{\min}(\Delta)\leqslant c'+1\}\Big|\leqslant N_n(i)-N_n(i+1).$$

On en déduit comme ci-dessus la première inégalité de (1).

Il résulte de (1) que

$$a_n(i)\leqslant a_n(i+1),\quad b_n(i)\leqslant b_n(i+1).$$

Grâce à (i), on voit que $a_n(0) = b_n(0) = 0$. D'où (ii).

Soit $i$ un entier $\geqslant 1$. On a les égalités :

$$\begin{aligned} w_n(\geqslant i) = & -\frac{1}{2}\Big|\big\{\Delta \in \mathcal{I}nt_{n,X}\,;\, j_{\max}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}\big\}\Big| \\ & + \frac{1}{2}\Big|\big\{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}_n) - \mathcal{I}nt_{n,X}\,;\, j_{\max}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}\big\}\Big| \\ & + \frac{1}{2}\Big|\big\{\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}_{n,Y}\,;\, 1 \leqslant j_{\min}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}\big\}\Big| \\ & - \frac{1}{2}\Big|\big\{\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n) - \widetilde{\mathcal{I}nt}_{n,Y}\,;\, 1 \leqslant j_{\min}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}\big\}\Big|. \end{aligned}$$

Posons

$$z'_n(i) = \frac{1}{2}\Big|\big\{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}_n)\,;\, j_{\max}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}\big\}\Big| - \frac{1}{2}\Big|\big\{\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)\,;\, 1 \leqslant j_{\min}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}\big\}\Big|.$$

Alors

$$\begin{aligned} w_n(\geqslant i) = & \Big|\big\{\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}_{n,Y}\,;\, 1 \leqslant j_{\min}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}\big\}\Big| \\ & \qquad - \Big|\big\{\Delta \in \mathcal{I}nt_{n,X}\,;\, j_{\max}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}\big\}\Big| + z'_n(i). \end{aligned}$$

On calcule

$$z'_n(i) = e(d) + z_n(i),$$

d'où le (iii) de l'énoncé.

Supposons de plus $c_i \neq 0$, donc $c_{\geqslant(i+1)} + 1 \leqslant c_{\geqslant i}$. En utilisant la définition de $N_n(i)$ et la formule ci-dessus exprimant $w_n(\geqslant i)$, on obtient

$$\begin{aligned} N_n(i) + w_n(\geqslant i) = & \Big|\big\{\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}_{n,Y}\,;\, c_{\geqslant(i+1)} + 2 \leqslant j_{\min}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}\big\}\Big| \\ & - \Big|\big\{\Delta \in \mathcal{I}nt_{n,Y}\,;\, j_{\max}(\Delta) = c_{\geqslant i}\big\}\Big| + e(d) + z_n(i). \end{aligned}$$

Il résulte du lemme XI.11 (ii) qu'un élément de $\mathcal{J}$ appartenant à $J(i)$ est forcément égal à $c_{\geqslant(i+1)} + 1$ ou a $c_{\geqslant i}$. On a donc

$$\begin{aligned} & \Big|\big\{\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}_{n,Y}\,;\, c_{\geqslant(i+1)} + 2 \leqslant j_{\min}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}\big\}\Big| = \\ & \qquad \begin{cases} 0, \ \text{si } c_i = 1, \\ \big|\{\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}_{n,Y}\,;\, j_{\min}(\Delta) = c_{\geqslant i}\}\big|, \ \text{si } c_i \geqslant 2. \end{cases} \end{aligned}$$

On déduit le (iv) de l'énoncé des égalités précédentes en séparant tous les cas possibles.

La preuve de (v) est analogue.

Soit $i$ un entier $\geqslant 1$. Montrons que :

(2) l'entier $c_{\geqslant i} + 2w_n(\geqslant i) + 2f_n(i)$ est pair.

Si $i > d$, c'est évident. Sinon, remplacer $i$ par le plus petit entier $i' \geqslant i$ tel que $c_{i'} \neq 0$ ne modifie pas l'entier ci-dessus. On peut donc supposer $c_i \neq 0$. Grâce à (iii), il suffit de prouver :

$$c_{\geqslant i} + 2f_n(i) + 2z_n(i) + d \equiv 0 \bmod 2\mathbb{Z}.$$

Notons $A$, resp. $B$, $C$, l'ensemble des entiers $j \geqslant 1$ tels que $j \equiv d \bmod 2\mathbb{Z}$, resp. $\lambda_{n,j} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_n)$, resp. $\lambda_{n,j} > \lambda_{n,j+1}$. Notons $A'$, resp. $B'$, $C'$ le complémentaire de $A$, resp. $B$, $C$, dans $\mathbb{N} - \{0\}$. Enfin, pour tout sous-ensemble $D$ de $\mathbb{N} - \{0\}$, notons $\mathbf{1}_D$ sa fonction caractéristique. Posons $j = c_{\geqslant i}$. On a

$$c_{\geqslant i} + d \equiv \mathbf{1}_{A'}(j) \bmod 2\mathbb{Z}.$$

Par définition de $\mathcal{F}_n$ et $I_n$, on a

$$2f_n(i) \equiv \mathbf{1}_{(A\cap B\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C')}(j) \bmod 2\mathbb{Z}. \tag{3}$$

Enfin, grâce au lemme XI.10,

$$2z_n(i) \equiv \mathbf{1}_{(A'\cap B)\cup(C'\cap B)}(j) \bmod 2\mathbb{Z}.$$

On est ramené à prouver :

$$\mathbf{1}_{A'}(j) + \mathbf{1}_{(A\cap B\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C')}(j) + \mathbf{1}_{(A'\cap B)\cup(C'\cap B)}(j) \equiv 0 \bmod 2\mathbb{Z}.$$

On constate que cette relation n'est fausse que si $j \in A'\cap B'\cap C$. Or si $j \in A'\cap B'$, on a $j \equiv d+1 \bmod 2\mathbb{Z}$ et $\lambda_{n,j} \notin \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_n)$. Puisque $\boldsymbol{\lambda}_n$ est spéciale, cela entraîne $\lambda_{n,j} = \lambda_{n,j+1}$, donc $j \notin C$. Donc $A' \cap B' \cap C = \varnothing$ et cela démontre (2).

Par différence, on déduit de (2) que pour $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, le nombre

$$c_i/2 + \varepsilon w_n(i) + \varepsilon f_n(i) - \varepsilon f_n(i+1) \tag{4}$$

est entier. Montrons qu'il est $\geqslant 0$. Si $c_i = 0$, il est nul. Supposons $c_i \geqslant 1$. On a déjà utilisé plusieurs fois que si $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ vérifie $c_{\geqslant(i+1)} < j_{\max}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}$, resp. $c_{\geqslant(i+1)} < j_{\min}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}$, on a nécessairement $j_{\max}(\Delta) = c_{\geqslant(i+1)}+1$ ou $j_{\max}(\Delta) = c_{\geqslant i}$, resp. $j_{\min}(\Delta) = c_{\geqslant(i+1)} + 1$ ou $j_{\min}(\Delta) = c_{\geqslant i}$. Posons

$$w' = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{s'il existe } \Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n) \text{ tel que } c_{\geqslant i} = j_{\max}(\Delta) \text{ ou } c_{\geqslant i} = j_{\min}(\Delta), \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$w'' = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{s'il existe } \Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n) \text{ tel que } c_{\geqslant(i+1)} + 1 = j_{\max}(\Delta) \\ & \qquad\qquad\qquad \text{ou } c_{\geqslant(i+1)} + 1 = j_{\min}(\Delta), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$|w_n(i)| \leqslant w' + w''.$$

Utilisons les notations ci-dessus. Grâce au lemme XI.11, on voit que si $w' = 1/2$, on a $c_{\geqslant i} \in (A' \cap B) \cup (A \cap B \cap C)$. Grâce à (3), on a alors $f_n(i) = 0$. On obtient

$$w' + |f_n(i)| \leqslant 1/2.$$

De même, si $w'' = 1/2$ et $c_{\geqslant(i+1)} \neq 0$, on a $c_{\geqslant(i+1)} \in (A' \cap B) \cup (A \cap B')$. Grâce à (3), on a alors $f_n(i+1) = 0$. On obtient

$$w'' + |f_n(i+1)| \leqslant 1/2.$$

On déduit de ces relations l'inégalité

$$|w_n(i) + f_n(i) - f_n(i+1)| \leqslant 1.$$

Le nombre (4) est donc $\geqslant -1/2$. Puisqu'il est entier, il est $\geqslant 0$. Cela démontre (vi) et achève la démonstration du lemme. □

Pour tout $f_n \in \mathcal{F}_n$, on définit une suite finie $\boldsymbol{m}(f_n) = (m(f_n)_i)_{i\geqslant 1}$ d'entiers $\geqslant 0$ par l'égalité :

$$m(f_n)_i = c_i/2 - w_n(i) - f_n(i) + f_n(i+1)$$

pour tout $i \geqslant 1$. On pose par convention $m(f_n)_0 = \infty$.

**XI.18.** Soit $(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_n)$ un couple de partitions paramétrisant la représentation $\rho_{\iota_n} \in \mathcal{R}^{\mathrm{st}}(V_n)$, *cf.* IX.10. Si $(V_n, q_{V_n})$ est orthogonal pair et $k_n = 0$, on suppose $\boldsymbol{\alpha}_n \succ \boldsymbol{\beta}_n$. Notons $\mathcal{M}(\iota_n)$ l'ensemble des suites finies $\boldsymbol{m} = (m_i)_{i\geqslant 1}$ d'entiers $\geqslant 0$ telles que pour tout entier $i \geqslant 1$, on ait :

(1) $$0 \leqslant m_i \leqslant c_i;$$

(2) $$2S_{m_{\geqslant i}}(\boldsymbol{\alpha}_n) + 2S_{c_{\geqslant i} - m_{\geqslant i}}(\boldsymbol{\beta}_n) = E(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_n, m_{\geqslant i}, c_{\geqslant i} - m_{\geqslant i}),$$

*cf.* XI.2 pour la définition de ce dernier terme.

***Lemme.*** — *On a l'égalité* $\mathcal{M}(\iota_n) = \{\boldsymbol{m}(f_n); f_n \in \mathcal{F}_n\}$.

*Démonstration.* — On suppose $(V_n, q_{V_n})$ symplectique. Remarquons que pour $f_n \in \mathcal{F}_n$, la suite $\boldsymbol{m}(f_n)$ vérifie (1) d'après le (v) du lemme précédent. Soit $\boldsymbol{m} = (m_i)_{i\geqslant 1}$ une suite finie d'entiers $\geqslant 0$ vérifiant (1). Soit $(X, Y)$ un représentant du symbole $\mathrm{fam}^{-1}(\tau_n, \delta_n)$. On suppose $|X| + |Y|$ assez grand. Soit $i$ un entier $\geqslant 1$. Alors la condition (2) est équivalente à :

(3) $$S_{m_{\geqslant i}}(X) + S_{c_{\geqslant i} - m_{\geqslant i}}(Y) = S_{c_{\geqslant i}}(X \sqcup Y).$$

En effet, il suffit de reprendre la démonstration du lemme XI.2 : l'inégalité de son énoncé est une égalité si et seulement si l'inégalité XI.2 (1) est une égalité.

Notons $(X^{sp}, Y^{sp})$ l'unique symbole spécial dans la même famille que $(X, Y)$, tel que $|X^{sp}| + |Y^{sp}| = |X| + |Y|$. Ecrivons

$$X^{sp} = \{x_1 > x_2 > \cdots > x_{r+1}\}, \quad Y^{sp} = \{y_1 > y_2 > \cdots > y_r\}.$$

Posons

$$K_X = \{j_{\max}(\Delta)/2; \Delta \in \mathcal{I}nt_{n,X}\}, \quad K_Y = \{(j_{\min}(\Delta) + 1)/2; \Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}_{n,Y}\}.$$

D'après la démonstration du lemme VIII.17, on a les égalités :

$$X = (X^{sp} - \{x_j\,;\, j \in K_Y\}) \cup \{y_j\,;\, j \in K_X\},$$
$$Y = (Y^{sp} - \{y_j\,;\, j \in K_X\}) \cup \{x_j\,;\, j \in K_Y\}.$$

Fixons un entier $i \geqslant 1$. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des couples $(S_X, S_Y)$ tels que :

• $S_X \subset \{1, \dots, r+1\}$, $S_Y \subset \{1, \dots, r\}$ ;

• l'ensemble avec multiplicités $\{x_j; j \in S_X\} \sqcup \{y_j; j \in S_Y\}$ est égal à celui des $c_{\geqslant i}$ plus grands termes de $X^{sp} \sqcup Y^{sp}$.

Notons $\mathcal{S}(i)$ l'ensemble des entiers $s \in \{0, \dots, c_{\geqslant i}\}$ tels que

$$S_s(X) + S_{c_{\geqslant i}-s}(Y) = S_{c_{\geqslant i}}(X \sqcup Y).$$

On a :

(4) l'application $(S_X, S_Y) \longmapsto s = |S_X| - |S_X \cap K_Y| + |S_Y \cap K_X|$

est une bijection de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}(i)$.

En effet, soit $(S_X, S_Y) \in \mathcal{S}$. On a l'inclusion

$$X \supset \{x_j\,;\, j \in S_X - S_X \cap K_Y\} \cup \{y_j\,;\, j \in S_Y \cap K_X\}$$

et ce dernier ensemble a $s$ éléments. On en déduit $s \geqslant 0$ et :

$$S_s(X) \geqslant \Big(\sum_{j \in S_X - S_X \cap K_Y} x_j\Big) + \Big(\sum_{j \in S_Y \cap K_X} y_j\Big).$$

*Idem*, on a l'inclusion

$$Y \supset \{y_j\,;\, j \in S_Y - S_Y \cap K_X\} \cup \{x_j\,;\, j \in S_X \cap K_Y\}$$

et ce dernier ensemble a $c_{\geqslant i} - s$ éléments. Donc $s \leqslant c_{\geqslant i}$ et

$$S_{c_{\geqslant i}-s}(Y) \geqslant \Big(\sum_{j \in S_Y - S_Y \cap K_X} y_j\Big) + \Big(\sum_{j \in S_X \cap K_Y} x_j\Big).$$

Des deux inégalités ci-dessus et de la définition de $\mathcal{S}$ résulte l'inégalité

$$S_s(X) + S_{c_{\geqslant i}-s}(Y) \geqslant S_{c_{\geqslant i}}(X^{sp} \sqcup Y^{sp}).$$

Mais on a trivialement

$$S_s(X) + S_{c_{\geqslant i}-s}(Y) \leqslant S_{c_{\geqslant i}}(X \cup Y) = S_{c_{\geqslant i}}(X^{sp} \sqcup Y^{sp}).$$

Ces deux dernières inégalités sont donc des égalités et $s \in \mathcal{S}(i)$. Inversement, soit $s \in \mathcal{S}(i)$. Notons $S'_X$, $S'_Y$, $S''_X$, $S''_Y$ les ensembles d'entiers tels que l'ensemble des $s$ plus grands termes de $X$ soit

$$\{x_j\,;\, j \in S'_X\} \cup \{y_j\,;\, j \in S''_Y\}$$

et celui des $c_{\geqslant i} - s$ plus grands termes de $Y$ soit

$$\{y_j\,;\, j \in S'_Y\} \cup \{x_j\,;\, j \in S''_X\}.$$

On pose $(S_X, S_Y) = (S'_X \cup S''_X, S'_Y \cup S''_Y)$. On vérifie que $(S_X, S_Y) \in \mathcal{S}$ et que l'application $s \mapsto (S_X, S_Y)$ ainsi définie est inverse de la précédente. Cela démontre (4).

Supposons $c_i \neq 0$. Le calcul de $\mathcal{S}$ est immédiat grâce aux inégalités $x_j \geqslant y_j \geqslant x_{j+1}$ pour tout entier $j \in \{1, \dots, r\}$. On obtient :

(5) • si $c_{\geqslant i}$ est pair et $y_{c_{\geqslant i}/2} > x_{1+c_{\geqslant i}/2}$, resp. si $c_{\geqslant i}$ est impair et $x_{(1+c_{\geqslant i})/2} > y_{(1+c_{\geqslant i})/2}$, $\mathcal{S}$ a un seul élément :

$$\Big(\{1, \dots, c_{\geqslant i}/2\}, \{1, \dots, c_{\geqslant i}/2\}\Big), \text{ resp. } \Big(\{1, \dots, (1+c_{\geqslant i})/2\}, \{1, \dots, (c_{\geqslant i}-1)/2\}\Big);$$

(6) • si $c_{\geqslant i}$ est pair et $y_{c_{\geqslant i}/2} = x_{1+c_{\geqslant i}/2}$, resp. si $c_{\geqslant i}$ est impair et $x_{(1+c_{\geqslant i})/2} = y_{(1+c_{\geqslant i})/2}$, $\mathcal{S}$ a deux éléments : celui décrit ci-dessus et de plus

$$\Big(\{1, \dots, 1+c_{\geqslant i}/2\}, \{1, \dots, c_{\geqslant i}/2 - 1\}\Big), \qquad \text{resp. } \Big(\{1, \dots, (c_{\geqslant i}-1)/2\}, \{1, \dots, (1+c_{\geqslant i})/2\}\Big).$$

On a calculé $X^{sp}$ et $Y^{sp}$ dans la preuve du lemme VIII.16. Les hypothèses de (5) sont équivalentes à ce que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

- $c_{\geqslant i}$ est pair et $\lambda_{c_{\geqslant i}}$ est impair ;
- $c_{\geqslant i}$ est pair, $\lambda_{c_{\geqslant i}}$ est pair et $\lambda_{c_{\geqslant i}} > \lambda_{c_{\geqslant i}+1}$ ;
- $c_{\geqslant i}$ est impair et $\lambda_{c_{\geqslant i}}$ est pair.

C'est équivalent à : $i \in I_n$. De même les hypothèses de (6) sont équivalentes à $i \notin I_n$.

Soit $(S_X, S_Y) \in \mathcal{S}$. Remarquons que sous les hypothèses de (6), on a :

- si $c_{\geqslant i}$ est pair, $1 + c_{\geqslant i}/2 \notin K_Y$ et $c_{\geqslant i}/2 \notin K_X$, car $x_{1+c_{\geqslant i}/2} = y_{c_{\geqslant i}/2}$ ;
- si $c_{\geqslant i}$ est impair, $(1+c_{\geqslant i})/2 \notin K_Y$ et $(1+c_{\geqslant i})/2 \notin K_X$, car $x_{(1+c_{\geqslant i})/2} = y_{(1+c_{\geqslant i})/2}$.

On en déduit que pour $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}_{n,Y}$, resp. $\Delta \in \mathcal{I}nt_{n,X}$, on a :

$$(j_{\min}(\Delta)+1)/2 \in S_X \Longleftrightarrow j_{\min}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i},$$

resp.

$$j_{\max}(\Delta)/2 \in S_Y \Longleftrightarrow j_{\max}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}.$$

Donc

$$|S_X \cap K_Y| = |\{\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}_{n,Y}\,;\, j_{\min}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}\}|,$$
$$|S_Y \cap K_X| = |\{\Delta \in \mathcal{I}nt_{n,X}\,;\, j_{\max}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}\}|.$$

Supposons $i \in I_n$. D'après (5), on a

$$|S_X| = c_{\geqslant i}/2 + e(c_{\geqslant i}).$$

Grâce au lemme XI.17 (iii), on obtient :

$$|S_X| - |S_X \cap K_Y| + |S_Y \cap K_X| = c_{\geqslant i}/2 - w_n(\geqslant i) + e(c_{\geqslant i}) + z_n(i).$$

Mais, d'après XI.17 (2), $c_{\geqslant i}/2 - w_n(\geqslant i)$ est entier. Puisque $e(c_{\geqslant i}) + z_n(i) \in \{-1/2, 0, 1/2\}$, ce terme est nul. Grâce à (4) on obtient :

(7) $$\text{si } i \in I_n,\ \mathcal{S}(i) = \{c_{\geqslant i}/2 - w_n(\geqslant i)\}.$$

On démontre de même :

(8) $$\text{si } c_i \neq 0 \text{ et } i \notin I_n,\ \mathcal{S}(i) = \big\{c_{\geqslant i}/2 - w_n(\geqslant i) - 1/2, c_{\geqslant i}/2 - w_n(\geqslant i) + 1/2\big\}.$$

Définissons une application $f : \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{R}$ par

$$f(i) = c_{\geqslant i}/2 - w_n(\geqslant i) - m_{\geqslant i}$$

pour tout entier $i \geqslant 1$. Il résulte de (1) que si $i$ est un entier $\geqslant 1$ tel que $c_i = 0$, on a $f(i) = f(i+1)$. De plus $f(i) = 0$ si $i > d$. D'autre part la condition (3) est vérifiée pour tout entier $i \geqslant 1$ si et seulement si elle l'est pour tout $i$ tel que $c_i \neq 0$. Il résulte alors de (7) et (8) que la condition (3) est vérifiée pour tout $i \geqslant 1$ si et seulement si $f \in \mathcal{F}_n$. Bien sûr $f \in \mathcal{F}_n$ si et seulement si $\boldsymbol{m} \in \{\boldsymbol{m}(f_n); f_n \in \mathcal{F}_n\}$. On en déduit l'énoncé. □

***XI.19. Lemme.*** — *Soient $i, j \in \mathbb{N}$ et $f_n \in \mathcal{F}_n$. Supposons*

$$m(f_n)_{\geqslant(i+1)} + 1 \leqslant j \leqslant m(f_n)_{\geqslant i}, \quad \textit{resp.}\ c_{\geqslant(i+1)} - m(f_n)_{\geqslant(i+1)} + 1 \leqslant j \leqslant c_{\geqslant i} - m(f_n)_{\geqslant i}.$$

*Alors on a les égalités*

$$\alpha_{n,j} = a_n(i), \quad \textit{resp.}\ \beta_{n,j} = b_n(i).$$

*Démonstration.* — On suppose $(V_n, q_{V_n})$ symplectique et on reprend les notations de la démonstration précédente. L'assertion est triviale si $c_i = 0$. On suppose $c_i \neq 0$ et de plus $i \geqslant 1$. On pose

$$c = c_{\geqslant i}, \quad c' = c_{\geqslant(i+1)}, \qquad m = m(f_n)_{\geqslant i}, \quad m' = m(f_n)_{\geqslant(i+1)}.$$

Notons $X(i)$, resp. $Y(i)$, resp. $T(i)$, l'ensemble des $m$, resp. $c - m$, resp. $c$ plus grands termes de $X$, resp. $Y$, resp. $X \sqcup Y$, dont on retranche l'ensemble des $m'$, resp. $c' - m'$, resp. $c'$, plus grands termes. Dans le cas de $T(i)$, il s'agit d'un ensemble avec multiplicités et on peut remplacer $X \sqcup Y$ par $X^{sp} \sqcup Y^{sp}$ dans sa définition. On a démontré que la suite $\boldsymbol{m}(f_n)$ vérifiait la relation XI.18 (3). Celle-ci implique :

(1) $$X(i) \sqcup Y(i) = T(i).$$

D'autre part, d'après VIII.15 et IX.10, on a les égalités :

(2) $$\begin{cases} X(i) = \big\{\alpha_{n,j} + r + k_n + 1 - j; j = m' + 1, \dots, m\big\}, \\ Y(i) = \big\{\beta_{n,j} + r - k_n - j; j = c' - m' + 1, \dots, c - m\big\}. \end{cases}$$

On a la propriété suivante :

(3) soit $\ell \in \{1, \dots, 1 + 2r\}$ ; alors le $\ell$-ième plus grand terme de $X^{sp} \sqcup Y^{sp}$ est égal à

$$r + \lambda_{n,\ell}/2 - \ell/2 + |e(\lambda_{n,\ell}) - e(\ell)|.$$

En effet, puisque $(X^{sp}, Y^{sp})$ est spécial, ce terme est $y_{\ell/2}$ si $\ell$ est pair et $x_{(\ell+1)/2}$ si $\ell$ est impair. On calcule ces termes grâce aux formules données dans la démonstration du lemme VIII.16.

On a les propriétés suivantes :
(4) l'ensemble sans multiplicité sous-jacent à $T(i)$ est formé d'entiers consécutifs ; notons-le $\{t, \dots, t'-1\}$ ;
(5) pour $\ell \in \{t, \dots, t'-1\}$, la multiplicité de $\ell$ dans $T(i)$ est 2 si $\ell \neq t$ et $\ell \neq t'-1$, elle est 1 ou 2 si $\ell = t$ ou $\ell = t'-1$.
C'est évident si $c_i = 1$ car $T(i)$ n'a alors qu'un élément. Supposons $c_i \geqslant 2$. D'après (3),

$$T(i) = \{r + \lambda_{n,\ell}/2 - \ell/2 + |e(\lambda_{n,\ell}) - e(\ell)|\,;\, \ell = c'+1, \dots, c\}.$$

La suite $(\lambda_{n,\ell})_{\ell=c'+1,\dots,c}$ est décrite par le lemme XI.9. Dans chacun des cas, on vérifie les propriétés requises.

Grâce à (1) et au fait que $X(i)$ et $Y(i)$ sont « sans multiplicité » par définition, on déduit des propriétés (4) et (5) que $X(i)$ et $Y(i)$ sont formés d'entiers consécutifs. En utilisant (2), on en déduit :
(6) les suites $(\alpha_{n,j})_{j=m'+1,\dots,m}$ et $(\beta_{n,j})_{j=c'-m'+1,\dots,c-m}$ sont toutes deux constantes.

Supposons $m > m'$. Notons $X(\geqslant i)$ l'ensemble des $m$ plus grands termes de $X$. Notons $\xi$ le plus petit élément de $X(i)$, qui est aussi le plus petit élément de $X(\geqslant i)$. D'après (4) et (5), on a :

$$\xi = \begin{cases} t, & \text{si } t \in X(\geqslant i), \\ t+1, & \text{si } t \notin X(\geqslant i). \end{cases}$$

Prouvons plus précisément :
(7) $\xi = t$ si l'une des propriétés suivantes est vérifiée et $\xi = t+1$ si aucune de ces propriétés n'est vérifiée :

- $c$ est pair, $c/2 \in K_X$ ;
- $c$ est pair, $\lambda_{n,c}$ est impair ;
- $c$ est impair, $i \in I_n$ et $(c+1)/2 \notin K_Y$ ;
- $i \notin I_n$ et $f_n(i) = -1/2$.

Définissons un couple d'ensembles $(S_X, S_Y)$ de la façon suivante :

• si $i \in I_n$ ou si $i \notin I_n$, $c$ est pair et $f_n(i) = 1/2$, ou si $i \notin I_n$, $c$ est impair et $f_n(i) = -1/2$, c'est le couple écrit en XI.18 (5) ;

• si $i \notin I_n$, $c$ est pair et $f_n(i) = -1/2$ ou si $i \notin I_n$, $c$ est impair et $f_n(i) = 1/2$, c'est le couple écrit en XI.18 (6).

D'après la preuve du lemme XI.18, on a l'égalité

$$X(\geqslant i) = \{x_j\,;\, j \in S_X - S_X \cap K_Y\} \cup \{y_j\,;\, j \in S_Y \cap K_X\}.$$

Alors $\xi = t$, resp. $\xi = t+1$, si $t$ appartient à cet ensemble, resp. n'y appartient pas.

Supposons $c$ pair. Alors $t = y_{c/2}$ et $t \in X(\geqslant i)$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$(8) \qquad \begin{cases} \bullet \quad c/2 \in S_Y \cap K_X\,; \\ \bullet \quad \text{il existe } j \in S_X - S_X \cap K_Y \text{ tel que } x_j = y_{c/2}. \end{cases}$$

Remarquons que si $c/2 \in K_X$, les hypothèses de XI.18 (5) sont vérifiées et $c/2 \in S_Y$. La première condition de (8) est donc équivalente à

• $c/2 \in K_X$.

S'il existe $j \in S_X$ tel que $x_j = y_{c/2}$, ce $j$ n'appartient pas à $S_X \cap K_Y$ par définition de $K_Y$. Un tel $j$ est forcément égal à $c/2$ ou à $c/2+1$. D'après les formules de la démonstration du lemme VIII.16, l'égalité $x_{c/2} = y_{c/2}$ est équivalente à : $\lambda_{n,c}$ est impair. La deuxième condition de (8) est donc vérifiée si et seulement si l'une des conditions suivantes l'est :

• $\lambda_{n,c}$ est impair et $c/2 \in S_X$ ;

• $x_{c/2+1} = y_{c/2}$ et $c/2+1 \in S_X$.

On a toujours $c/2 \in S_X$. D'autre part $x_{c/2+1} = y_{c/2}$ si et seulement si les hypothèses de XI.18 (6) sont vérifiées, *i.e.* $i \notin I_n$ et, dans ce cas, on a $c/2+1 \in S_X$ si et seulement si $f_n(i) = -1/2$. La deuxième condition de (8) est donc vérifiée si et seulement si l'une des conditions suivantes l'est :

• $\lambda_{n,c}$ est impair ;

• $i \notin I_n$ et $f_n(i) = -1/2$.

On voit que l'on a démontré (7) sous l'hypothèse $c$ pair.

Supposons maintenant $c$ impair. Alors $t = x_{(c+1)/2}$. Remarquons que, par définition de $K_X$, il n'existe pas de $j \in K_X$ tel que $y_j = x_{(c+1)/2}$. Alors $t \in X(\geqslant i)$ si et seulement si $(c+1)/2 \in S_X - S_X \cap K_Y$. Si $i \in I_n$, on a $(c+1)/2 \in S_X$ et la condition précédente est équivalente à $(c+1)/2 \notin K_Y$. Si $i \notin I_n$, les hypothèses de XI.18 (6) sont vérifiées donc $x_{(1+c)/2} = y_{(1+c)/2}$ et $(1+c)/2 \notin K_Y$. La condition est alors équivalente à $(c+1)/2 \in S_X$, ou encore à $f_n(i) = -1/2$. Cela achève la vérification de (7).

Démontrons maintenant l'égalité :

$$(8) \qquad \xi = a_n(i) + r + k_n + 1 - m.$$

Posons

$$\zeta = t - a_n(i) - r - k_n - 1 + m.$$

On calcule $t$ grâce à (3) appliqué à $\ell = c$. En explicitant $a_n(i)$ et $m$, on obtient :

$$\zeta = \frac{\lambda_{n,c}}{2} - \left[\frac{\lambda_{n,c}}{2}\right] + |e(\lambda_{n,c}) - e(c)| - N_n(i) - w_n(\geqslant i) - f_n(i) - 1.$$

Traitons les différents cas possibles :

• $c$ est pair et $\lambda_{n,c}$ est impair. La relation XI.14 (1) est vérifiée, donc $i \in I_n$ et $f_n(i) = 0$. Grâce au lemme XI.17 (iv), $N_n(i) + w_n(\geqslant i) = 0$. On obtient $\zeta = 0$. Mais $\xi = t$ d'après (7), d'où l'égalité (8).

• $c$ est pair, $\lambda_{n,c}$ est pair et $i \in I_n$. Alors $f_n(i) = 0$ et

$$\zeta = -N_n(i) - w_n(\geqslant i) - 1.$$

Puisque $i \in I_n$ et puisque la relation XI.14 (1) n'est pas vérifiée, on a $\lambda_{n,c} > \lambda_{n,c+1}$. Alors il existe $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}_n)$ tel que $c = j_{\max}(\Delta)$. Pour cet élément $\Delta$, le lemme XI.17 (iv) implique :

$$\zeta = \begin{cases} 0, & \text{si } \Delta \in \mathcal{I}nt_{n,X}\,, \\ -1, & \text{si } \Delta \notin \mathcal{I}nt_{n,X}\,. \end{cases}$$

Mais la condition $\Delta \in \mathcal{I}nt_{n,X}$ est équivalente à : $c/2 \in K_X$. En comparant avec (7), on obtient (8) ;

• $c$ est pair, $\lambda_{n,c}$ est pair et $i \notin I_n$. Cette fois $\lambda_{n,c} = \lambda_{n,c+1}$ et il n'existe pas de $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}_n)$ tel que $c = j_{\max}(\Delta)$. *A fortiori* $c/2 \notin K_X$. Puisque $c$ est pair, il n'existe pas non plus de $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ tel que $c = j_{\min}(\Delta)$. Grâce au lemme XI.17 (iv), on obtient :

$$\zeta = -1/2 - f_n(i).$$

En comparant avec (7), on obtient (8) ;

• $c$ est impair et $\lambda_{n,c}$ est impair. On a $\lambda_{n,c} = \lambda_{n,c+1}$ puisque $\boldsymbol{\lambda}_n$ est spéciale, donc $i \notin I_n$. Grâce au lemme XI.17 (iv), on obtient :

$$\zeta = -1/2 - f_n(i)$$

et on conclut en comparant avec (7).

• $c$ est impair et $\lambda_{n,c}$ est pair. La relation XI.14 (1) est vérifiée et $i \in I_n$, d'où $f_n(i) = 0$. Puisque $c$ est impair, il n'existe pas de $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}_n)$ tel que $c = j_{\max}(\Delta)$. Le lemme XI.17 (iv) implique

$$\zeta = \begin{cases} -1, & \text{si } c_i \geqslant 2 \text{ et il existe } \Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}_{n,Y} \text{ tel que } c = j_{\min}(\Delta), \\ 0, & \text{sinon}. \end{cases}$$

Remarquons qu'il existe $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}_{n,Y}$ tel que $c = j_{\min}(\Delta)$ si et seulement si $(c+1)/2 \in K_Y$. En comparant avec (7), on obtient (8) sauf dans le cas ou $c_i = 1$ et $\xi = t+1$. Mais ce cas ne peut pas se produire. En effet, si $c_i = 1$, $T(i) = \{t\}$. On a supposé $m > m'$. D'après (1), on a donc $X(i) = T(i) = \{t\}$. Alors $\xi = t$. Cela achève la démonstration de (8).

On déduit de (2), (6) et (8) l'égalité

$$\alpha_{n,j} = a_n(i)$$

pour tout $j \in \{m'+1, \ldots, m\}$. On démontre de façon analogue l'égalité

$$\beta_{n,j} = b_n(i)$$

pour tout $j \in \{c'-m'+1, \ldots, c-m\}$.

On a supposé $i \geqslant 1$. Traitons le cas $i = 0$. Notons $T(0)$ l'ensemble $X \sqcup Y$ dont on retranche le sous-ensemble des $c_{\geqslant 1}$ plus grands termes. Il résulte du lemme XI.9

que $\lambda_{n,\ell} = 0$ pour $\ell \geqslant c_{\geqslant 1} + 1$. Alors $T(0)$ vérifie encore (4) et (5) et on en déduit que les suites $(\alpha_{n,j})$, resp. $(\beta_{n,j})$, sont constantes pour $j \geqslant m(f_n)_{\geqslant 1} + 1$, resp. $j \geqslant c_{\geqslant 1} - m(f_n)_{\geqslant 1} + 1$. Ces valeurs constantes ne peuvent être que nulles et on obtient encore les égalités de l'énoncé. Cela achève la démonstration. $\square$

Le lemme est équivalent à l'énoncé suivant : pour tout $f_n \in \mathcal{F}_n$, on a les égalités

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \bigcup_{i\geqslant 1} (a_n(i))^{m(f_n)_i}, \quad \boldsymbol{\beta}_n = \bigcup_{i\geqslant 1} (b_n(i))^{c_i - m(f_n)_i}.$$

**XI.20.** Notons $\Gamma(\iota_n)$ l'ensemble des triplets $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{m})$ de suites finies d'entiers $\geqslant 0$ vérifiant les conditions suivantes :

- $p(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant \boldsymbol{\alpha}_n$, $p(\boldsymbol{\beta}) \leqslant \boldsymbol{\beta}_n$ ;
- pour tout entier $i \geqslant 1$, $0 \leqslant m_i \leqslant c_i$ ;
- pour tout entier $i \geqslant 1$, on a l'égalité :

$$2\alpha_{\leqslant (m_{\geqslant i})} + 2\beta_{\leqslant (c_{\geqslant i} - m_{\geqslant i})} = E(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_n, m_{\geqslant i}, c_{\geqslant i} - m_{\geqslant i})$$

*cf.* I.5 et XI.2 pour les notations.

***Lemme***. — *On a l'égalité*

$$\Gamma(\iota_n) = \{\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_n, \boldsymbol{m}(f_n) ; f_n \in \mathcal{F}_n\}.$$

*Démonstration.* — Si $\boldsymbol{m} \in \mathcal{M}(\iota_n)$, il est clair que $(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_n, \boldsymbol{m}) \in \Gamma(\iota_n)$. L'inclusion du membre de droite de l'égalité de l'énoncé dans celui de gauche résulte du lemme XI.18. Soient $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{m}) \in \Gamma(\iota_n)$ et $i$ un entier $\geqslant 1$. Puisque $p(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant \boldsymbol{\alpha}_n$, on a l'inégalité

$$\alpha_{\leqslant (m_{\geqslant i})} \leqslant \alpha_{n, \leqslant (m_{\geqslant i})} = S_{m_{\geqslant i}}(\boldsymbol{\alpha}_n).$$

*Idem*,

$$\beta_{\leqslant (c_{\geqslant i} - m_{\geqslant i})} \leqslant S_{c_{\geqslant i} - m_{\geqslant i}}(\beta_n).$$

Grâce au lemme XI.2, on a la suite d'inégalités :

$$(1) \qquad \begin{cases} E(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_n, m_{\geqslant i}, c_{\geqslant i} - m_{\geqslant i}) = 2\alpha_{\leqslant (m_{\geqslant i})} + 2\beta_{\leqslant (c_{\geqslant i} - m_{\geqslant i})} \\ \qquad\qquad \leqslant 2S_{m_{\geqslant i}}(\boldsymbol{\alpha}_n) + 2S_{c_{\geqslant i} - m_{\geqslant i}}(\boldsymbol{\beta}_n) \\ \qquad\qquad \leqslant E(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_n, m_{\geqslant i}, c_{\geqslant i} - m_{\geqslant i}). \end{cases}$$

Ces inégalités doivent être des égalités. L'égalité des deux dernières lignes implique que $\boldsymbol{m} \in \mathcal{M}(\iota_n)$ et, grâce au lemme XI.18, il existe $f_n \in \mathcal{F}_n$ tel que $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}(f_n)$. Montrons que :

$$(2) \qquad \alpha_j = \alpha_{n,j} \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, m_{\geqslant i}\}.$$

Posons $m = m_{\geqslant i}$, $m' = m_{\geqslant (i+1)}$. En raisonnant par récurrence descendante sur $i$, on peut supposer que $\alpha_j = \alpha_{n,j}$ pour tout $j \in \{1, \dots, m'\}$. On peut supposer $m > m'$. L'égalité des deux premières lignes de (1) implique

$$\alpha_{\leqslant m} = S_m(\boldsymbol{\alpha}_n),$$

d'où

$$\sum_{j=m'+1}^{m} \alpha_j = \sum_{j=m'+1}^{m} \alpha_{n,j}.$$

D'après le lemme XI.19, les termes de la somme de droite ci-dessus sont tous égaux. Grâce à l'inégalité $p(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant \boldsymbol{\alpha}_n$ et à l'hypothèse de récurrence, ces termes sont supérieurs ou égaux à ceux de la somme de gauche ci-dessus. Tous ces termes sont donc égaux et l'on obtient (2).

Comme ci-dessus, la relation (2) pour $i = 1$ entraîne que $\alpha_j \leqslant \alpha_{n,m_{\geqslant 1}+1}$ pour tout $j \geqslant m_{\geqslant 1} + 1$. Mais $\alpha_{n,m_{\geqslant 1}+1} = 0$, donc $\alpha_j = \alpha_{n,j} = 0$ pour tout $j \geqslant m_{\geqslant 1} + 1$. Cela démontre que $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_n$. On démontre de même l'égalité $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_n$. Cela achève la démonstration. □

**XI.21.** On conserve les hypothèses de XI.16. Pour tout $n \in \{1, 2\}$, soit $\iota_n$ un élément de $\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V_n)$ de la forme $(\boldsymbol{\lambda}_n, \tau_n, \delta_n)$ ou $(\boldsymbol{\lambda}_n, \varepsilon_n, \tau_n, \delta_n)$. Pour chacun de ces éléments, on utilise les définitions et résultats des paragraphes précédents. Rappelons qu'en XI.11, pour $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ et $n \in \{1, 2\}$, on a défini $\Delta_n(\Delta) \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$. Plus exactement, ce terme n'est pas toujours défini mais on vérifie qu'il l'est dans toutes les situations où on l'utilise ci-dessous.

On définit des fonctions

$$\delta^+, \delta^- : \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

par les formules suivantes. Soit $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, posons $\Delta_n = \Delta_n(\Delta)$ pour $n = 1, 2$. Alors :

- si $j_{\max}(\Delta) \in J^+$,
$$\delta^+(\Delta) = \tau_1(\Delta_1) + \tau_2(\Delta_2) + k_1 + k_2 + 1,$$
$$\delta^-(\Delta) = \tau_1(\Delta_1) + \tau_2(\Delta_2) + k_1 + k_2;$$
- si $j_{\max}(\Delta) \in J^-$,
$$\delta^+(\Delta) = \delta^-(\Delta) = \delta_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2);$$
- si $j_{\max}(\Delta) \notin J^+ \cup J^-$ et $J(\Delta) \subset J(\Delta_1)$,
$$\delta^+(\Delta) = \delta^-(\Delta) = \delta_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2^+);$$
- si $j_{\max}(\Delta) \notin J^+ \cup J^-$ et $J(\Delta) \subset J(\Delta_2)$,
$$\delta^+(\Delta) = \delta^-(\Delta) = \delta_1(\Delta_1^+) + \delta_2(\Delta_2).$$

***Remarque***. — D'après le lemme XI.11 et XI.11 (2), une et une seule des hypothèses ci-dessus est vérifiée.

On définit des fonctions

$$\tau^+, \tau^- : \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

par les formules suivantes. Soit $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$. Avec les notations ci-dessus :

• si $|J(\Delta)| \geqslant 2$ et $J(\Delta) \subset J(\Delta_1)$,

$$\tau^+(\Delta) = \tau^-(\Delta) \equiv \tau_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2^+) + k_2 \bmod 2\mathbb{Z};$$

• si $|J(\Delta)| \geqslant 2$ et $J(\Delta) \subset J(\Delta_2)$,

$$\tau^+(\Delta) \equiv \delta_1(\Delta_1^+) + \tau_2(\Delta_2) + k_1 \bmod 2\mathbb{Z},$$
$$\tau^-(\Delta) \equiv \delta_1(\Delta_1^+) + \tau_2(\Delta_2) + k_1 + 1 \bmod 2\mathbb{Z};$$

• si $|J(\Delta) = 1$ et $j_{\min}(\Delta) = j_{\max}(\Delta) \in J^+$,

$$\tau^+(\Delta) = \tau^-(\Delta) = \tau_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2^+) + k_2\,;$$

• si $|J(\Delta)| = 1$ et $j_{\min}(\Delta) = j_{\max}(\Delta) \in J^-$,

$$\tau^+(\Delta) = \tau^-(\Delta) = \tau_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2) + k_2\,.$$

La même remarque que ci-dessus s'applique.

***Remarques***
(1) Conformément à nos conventions, si $n \in \{1,2\}$ et $\Delta_n = \Delta_{n,\max}$, on a $\delta_n(\Delta_n^+) = 0$. Nous adopterons par contre une convention différente pour les fonctions $\delta^+$ et $\delta^-$. Soit $\Delta_{\max}$ l'élément maximal de $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$. On pose :

- si $d$ est pair, $\delta^+(\Delta_{\max}^+) = \delta^-(\Delta_{\max}^+) = 0\,;$
- si $d$ est impair, $\delta^+(\Delta_{\max}^+) \equiv k_1 + k_2 + 1 \bmod 2\mathbb{Z}$, $\delta^-(\Delta_{\max}^+) \equiv k_1 + k_2 \bmod 2\mathbb{Z}$.

(2) Notons $\Delta_{\min}$ le plus petit élément de $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$. Alors :

- si $(V, q_V)$ est symplectique, $\tau^+(\Delta_{\min}) = \tau^-(\Delta_{\min}) = 0\,;$
- si $(V, q_V)$ est orthogonal, $\delta^+(\Delta_{\min}) = \delta^-(\Delta_{\min}) = 0$.

En effet, posons $\Delta = \Delta_{\min}$. Si $(V, q_V)$ est symplectique, on a $|J(\Delta)| = \infty$, $\Delta_1(\Delta) = \Delta_{1,\min}$, $\Delta_2(\Delta)^+ = \Delta_{2,\min}$, $J(\Delta) \subset J(\Delta_{1,\min})$. Alors

$$\tau^+(\Delta) = \tau^-(\Delta) \equiv \tau_1(\Delta_{1,\min}) + \delta_2(\Delta_{2,\min}) + k_2 \equiv 0 \bmod 2\mathbb{Z}.$$

Si $(V, q_V)$ est orthogonal, deux cas sont possibles :

• si $j_{\max}(\Delta_{1,\min}) = j_{\max}(\Delta_{2,\min})$, on a $J(\Delta) = \{j_{\max}(\Delta_{1,\min})\} = \{j_{\max}(\Delta_{2,\min})\}$, $j_{\max}(\Delta) \in J^-$, $\Delta_1(\Delta) = \Delta_{1,\min}, \Delta_2(\Delta) = \Delta_{2,\min}$ et $\delta^+(\Delta) = \delta^-(\Delta) = \delta_1(\Delta_{1,\min}) + \delta_2(\Delta_{2,\min}) = 0\,;$

• si $j_{\max}(\Delta_{1,\min}) \neq j_{\max}(\Delta_{2,\min})$, par exemple $j_{\max}(\Delta_{1,\min}) > j_{\max}(\Delta_{2,\min})$, alors $j_{\max}(\Delta) = j_{\max}(\Delta_{1,\min}) \notin J^+ \cup J^-$, $\Delta_1(\Delta) = \Delta_{1,\min}$, $\Delta_2(\Delta)^+ = \Delta_{2,\min}$, $J(\Delta) \subset J(\Delta_{1,\min})$ et $\delta^+(\Delta) = \delta^-(\Delta) = \delta_1(\Delta_{1,\min}) + \delta_2(\Delta_{2,\min}) = 0$.

**XI.22.** Pour toute suite finie de réels $\boldsymbol{\mu}$ et tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, on pose

$$\mu_\Delta = \sum_{i\in\Delta} \mu_i, \quad \mu_{\geqslant\Delta} = \sum_{\Delta'\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda});\Delta'\geqslant\Delta} \mu_{\Delta'}\,.$$

***Lemme***

(i) *Soient* $n \in \{1,2\}$, $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ *et* $i$ *le plus grand élément de* $\Delta$. *Supposons* $\Delta \neq \{i\}$. *Alors on a l'égalité :*

$$4w_n(i) = (-1)^{\tau^+(\Delta)+\delta^+(\Delta^+)+k_1+k_2+1} + (-1)^{\tau^-(\Delta)+\delta^-(\Delta^+)+k_1+k_2+n}.$$

(ii) *Soient* $n \in \{1,2\}$, $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ *et* $i$ *le plus petit élément de* $\Delta$. *Supposons* $\Delta \neq \{i\}$. *Alors on a l'égalité :*

$$4w_n(i) = (-1)^{\tau^+(\Delta)+\delta^+(\Delta)+k_1+k_2} + (-1)^{\tau^-(\Delta)+\delta^-(\Delta)+k_1+k_2+1+n}.$$

(iii) *Soient* $n \in \{1,2\}$ *et* $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$. *On a l'égalité :*

$$\begin{aligned}4w_n(\Delta) = (-1)^{\tau^+(\Delta)+\delta^+(\Delta^+)+k_1+k_2+1} &+ (-1)^{\tau^-(\Delta)+\delta^+(\Delta)+k_1+k_2}\\ +(-1)^{\tau^-(\Delta)+\delta^-(\Delta^+)+k_1+k_2+n} &+ (-1)^{\tau^-(\Delta)+\delta^-(\Delta)+k_1+k_2+1+n}.\end{aligned}$$

*Démonstration.* — On traite le cas $n = 1$. On pose $\Delta_1 = \Delta_1(\Delta)$, $\Delta_2 = \Delta_2(\Delta)$. Sous les hypothèses de (i), on a $|J(\Delta)| \geqslant 2$. Supposons $J(\Delta) \subset J(\Delta_1)$. On a les inégalités :

$$\left.\begin{array}{l} j_{\min}(\Delta_1)\\ j_{\max}(\Delta_2^+)\end{array}\right\} \leqslant j_{\min}(\Delta) = c_{\geqslant(i+1)} + 1 \leqslant c_{\geqslant i} < j_{\max}(\Delta) \leqslant \left\{\begin{array}{l} j_{\max}(\Delta_1)\\ j_{\min}(\Delta_2).\end{array}\right.$$

Si $\Delta_1' \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ est tel que $j_{\max}(\Delta_1') \in \{c_{\geqslant(i+1)}+1,\dots,c_{\geqslant i}\}$, resp. $j_{\min}(\Delta_1') \in \{c_{\geqslant(i+1)}+1,\dots,c_{\geqslant i}\}$ on a nécessairement $j_{\max}(\Delta_1') = c_{\geqslant(i+1)}+1$, resp. $j_{\min}(\Delta_1') = c_{\geqslant(i+1)}+1$. Les inégalités ci-dessus montrent que la première égalité est impossible. La seconde est possible si et seulement si $j_{\min}(\Delta_1) = j_{\min}(\Delta)$ et dans ce cas elle est équivalente à $\Delta_1' = \Delta_1$. Par définition de $w_1(i)$, on obtient :

$$(1)\qquad 2w_1(i) = \begin{cases} 0, & \text{si } j_{\min}(\Delta_1) < j_{\min}(\Delta),\\ (-1)^{\tau_1(\Delta_1)+\delta_1(\Delta_1^+)+k_1+1}, & \text{si } j_{\min}(\Delta_1) = j_{\min}(\Delta).\end{cases}$$

D'après les définitions,

$$(2)\qquad \tau^+(\Delta) = \tau^-(\Delta) \equiv \tau_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2^+) + k_2 \bmod 2\mathbb{Z}.$$

Supposons $j_{\min}(\Delta_1) < j_{\min}(\Delta)$. Puisque $j_{\min}(\Delta) \in \mathcal{J}$ (*cf.* XI.11), on a nécessairement $j_{\min}(\Delta) = j_{\max}(\Delta_2^+)$. Notons $j$ le plus petit des entiers $j_{\min}(\Delta_1)$, $j_{\min}(\Delta_2^+)$. Si $j \geqslant 1$, il résulte des constructions de XI.11 que $j_{\max}(\Delta^+) = j$. On a $j \in J^+$ d'après le corollaire XI.12. D'après les définitions, $\delta^+(\Delta^+) = \delta^-(\Delta^+) + 1$. Si $j = 0$, $d$ est impair et $\Delta$ est le plus grand élément de $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$. D'après nos conventions, on a encore $\delta^+(\Delta^+) = \delta^-(\Delta^+) + 1$. Grâce à (2), le membre de droite de l'égalité de l'énoncé est nul. Cette égalité résulte donc de (1).

Supposons $j_{\min}(\Delta_1) = j_{\min}(\Delta)$. Démontrons les égalités

$$(3)\qquad \delta^+(\Delta^+) = \delta^-(\Delta^+) = \delta_1(\Delta_1^+) + \delta_2(\Delta_2^+).$$

Remarquons que si $d$ est impair, $\Delta_2$ n'est pas l'élément maximal de $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}_2)$ (car $j_{\min}(\Delta_{2,\max}) = 0$) et l'hypothèse $j_{\min}(\Delta_1) = j_{\min}(\Delta)$ assure que $\Delta_1$ n'est pas l'élément maximal de $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}_1)$. Si $d$ est pair, pour $n' \in \{1,2\}$, on pose $j_{\max}(\Delta_{n'}^+) = 0$ dans la discussion ci-dessous, si $\Delta_{n'}$ est l'élément maximal de $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_{n'})$ ou si $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_{n'}) = \varnothing$. On calcule $\Delta^+$ grâce aux définitions de XI.11 :

- si $j_{\max}(\Delta_2^+) < j_{\max}(\Delta_1^+)$, on a :

$$\left.\begin{matrix} j_{\min}(\Delta_1^+) \\ j_{\max}(\Delta_2^+) \end{matrix}\right\} \leqslant j_{\min}(\Delta^+) < j_{\max}(\Delta^+) = j_{\max}(\Delta_1^+) < j_{\min}(\Delta_2),$$

$j_{\max}(\Delta^+) \notin J^+ \cup J^-$, $\Delta_1(\Delta^+) = \Delta_1^+$, $\Delta_2(\Delta^+) = \Delta_2$ et $J(\Delta^+) \subset J(\Delta_1^+)$ ;

- si $j_{\max}(\Delta_1^+) < j_{\max}(\Delta_2^+)$, on a :

$$\left.\begin{matrix} j_{\max}(\Delta_1^+) \\ j_{\min}(\Delta_2^+) \end{matrix}\right\} \leqslant j_{\min}(\Delta^+) < j_{\max}(\Delta^+) = j_{\max}(\Delta_2^+) < j_{\min}(\Delta_1),$$

$j_{\max}(\Delta^+) \notin J^+ \cup J^-$, $\Delta_1(\Delta^+) = \Delta_1$, $\Delta_2(\Delta^+) = \Delta_2^+$ et $J(\Delta^+) \subset J(\Delta_2^+)$ ;

- si $j_{\max}(\Delta_1^+) = j_{\max}(\Delta_2^+) \geqslant 1$, on a :

$$j_{\max}(\Delta^+) = j_{\min}(\Delta^+) = j_{\max}(\Delta_1^+) = j_{\max}(\Delta_2^+),$$

$j_{\max}(\Delta^+) \in J^-$, $\Delta_1(\Delta^+) = \Delta_1^+$, $\Delta_2(\Delta^+) = \Delta_2^+$ ;

- si $j_{\max}(\Delta_1^+) = j_{\max}(\Delta_2^+) = 0$, alors $d$ est pair et $\Delta$ est le plus grand élément de $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$.

Dans chaque cas, (3) résulte des définitions.

L'égalité de l'énoncé se déduit de (1), (2) et (3).

Une démonstration analogue s'applique si $J(\Delta) \subset J(\Delta_2)$. Cela démontre le (i) de l'énoncé.

On démontre (ii) de façon analogue.

Soit $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$. Comme ci-dessus, si $\Delta_1' \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ vérifie $j_{\max}(\Delta_1') \in J(\Delta)$, $j_{\min}(\Delta_1') \in J(\Delta)$, on a nécessairement

$$j_{\max}(\Delta_1') \in \{j_{\min}(\Delta), j_{\max}(\Delta)\}, \quad \text{resp.} \quad j_{min}(\Delta_1') \in \{j_{\min}(\Delta), j_{\max}(\Delta)\}.$$

Si $|J(\Delta)| \geqslant 2$, alors $w_1(\Delta)$ est la somme des expressions calculées en (i) et (ii) et l'on obtient le (iii) de l'énoncé.

Supposons $|J(\Delta)| = 1$. Alors $j_{\min}(\Delta) = j_{\max}(\Delta) \in \mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-$.

Si $j_{\min}(\Delta) = j_{\max}(\Delta) \in \mathcal{J}^+$, on a $j_{\min}(\Delta) = j_{\max}(\Delta) = j_{\min}(\Delta_1) = j_{\min}(\Delta_2)$. D'après les définitions :

$$2w_1(\Delta) = (-1)^{\tau_1(\Delta_1)+\delta_1(\Delta_1^+)+k_1+1},$$

$$\tau^+(\Delta) = \tau^-(\Delta) \equiv \tau_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2^+) + k_2 \bmod 2\mathbb{Z},$$

$$\delta^+(\Delta) \equiv \tau_1(\Delta_1) + \tau_2(\Delta_2) + k_1 + k_2 + 1 \bmod 2\mathbb{Z},$$

$$\delta^-(\Delta) \equiv \tau_1(\Delta_1) + \tau_2(\Delta_2) + k_1 + k_2 \bmod 2\mathbb{Z}.$$

On démontre comme ci-dessus l'égalité (3). Le (iii) de l'énoncé résulte de ces formules.

Si $j_{\min}(\Delta) = j_{\max}(\Delta) \in \mathcal{J}^-$, on a $j_{\min}(\Delta) = j_{\max}(\Delta) = j_{\max}(\Delta_1) = j_{\max}(\Delta_2)$. Alors :

$$2w_1(\Delta) = (-1)^{\tau_1(\Delta_1)+\delta_1(\Delta_1)+k_1},$$

$$\tau^+(\Delta) = \tau^-(\Delta) \equiv \tau_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2) + k_2 \bmod 2\mathbb{Z},$$
$$\delta^+(\Delta) = \delta^-(\Delta) = \delta_1(\Delta_1) + \delta_2(\Delta_2).$$

De même que l'on a démontré (3), on démontre les égalités :

$$\delta^+(\Delta^+) \equiv \tau_1(\Delta_1) + \tau_2(\Delta_2) + k_1 + k_2 + 1 \bmod 2\mathbb{Z},$$
$$\delta^-(\Delta^+) \equiv \tau_1(\Delta_1) + \tau_2(\Delta_2) + k_1 + k_2 \bmod 2\mathbb{Z}.$$

Le (iii) de l'énoncé résulte de ces formules. Cela achève la démonstration. □

***XI.23. Corollaire.*** — *Soient $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ et $i$ le plus petit élément de $\Delta$. Alors*

$$w_1(\geqslant i) + w_2(\geqslant i) \quad et \quad w_1(\geqslant i) - w_2(\geqslant i)$$

*sont des entiers relatifs. Ils vérifient les congruences :*

$$w_1(\geqslant i) + w_2(\geqslant i) \equiv \delta^+(\Delta) + d(k_1 + k_2 + 1) \bmod 2\mathbb{Z},$$
$$w_1(\geqslant i) - w_2(\geqslant i) \equiv \delta^-(\Delta) + d(k_1 + k_2) \bmod 2\mathbb{Z}.$$

*Démonstration.* — Si $\ell$ est un entier $\geqslant 1$ tel que $\ell \notin a(\boldsymbol{\lambda})$,

$$w_1(\ell) = w_2(\ell) = 0$$

grâce au lemme XI.11 et aux définitions. On a donc :

$$w_1(\geqslant i) + w_2(\geqslant i) = w_1(\geqslant \Delta) + w_2(\geqslant \Delta).$$

Grâce au lemme précédent, on obtient :

$$w_1(\geqslant i) + w_2(\geqslant i) = \sum_{\Delta' \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}); \Delta' \geqslant \Delta} \left[ \frac{(-1)^{\tau^+(\Delta') + \delta^+(\Delta'^+) + k_1 + k_2 + 1}}{2} + \frac{(-1)^{\tau^+(\Delta') + \delta^+(\Delta') + k_1 + k_2}}{2} \right].$$

Chaque terme de cette somme est entier donc $w_1(\geqslant i) + w_2(\geqslant i)$ l'est aussi. Modulo $2\mathbb{Z}$, la contribution d'un $\Delta' \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $\Delta' \geqslant \Delta$ à la somme ci-dessus est égal à $\delta^+(\Delta') - \delta^+(\Delta'^+)$. Alors

$$w_1(\geqslant i) + w_2(\geqslant i) \equiv \sum_{\Delta' \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}); \Delta' \geqslant \Delta} (\delta^+(\Delta') - \delta^+(\Delta'^+)) \equiv \delta^+(\Delta) - \delta^+(\Delta^+_{\max}) \bmod 2\mathbb{Z}.$$

On obtient la congruence de l'énoncé en utilisant la remarque XI.21 (1).

Les assertions relatives à $w_1(\geqslant i) - w_2(\geqslant i)$ se démontrent de façon analogue. □

***XI.24. Corollaire.*** — *On a les égalités :*

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \left(1 - (-1)^{\tau^+(\Delta)}\right)\left((-1)^{\delta^+(\Delta)} - (-1)^{\delta^+(\Delta^+)}\right) = \begin{cases} 2(k_1 + k_2), & si\ k_1 + k_2 \ est\ pair, \\ -2(k_1 + k_2) - 2(-1)^d, & si\ k_1 + k_2 \ est\ impair; \end{cases}$$

$$\sum_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \left(1-(-1)^{\tau^-(\Delta)}\right)\left((-1)^{\delta^-(\Delta)}-(-1)^{\delta^-(\Delta^+)}\right) = \begin{cases} 2(k_1-k_2), & \textit{si } k_1+k_2 \textit{ est pair},\\ -2(k_2-k_1)-2(-1)^d, & \textit{si } k_1+k_2 \textit{ est impair}.\end{cases}$$

*Démonstration.* — En utilisant le lemme XI.22 (iii), on voit que le membre de gauche de la première égalité de l'énoncé est égal à :

$$\sum_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \left[2(-1)^{k_1+k_2+1}(w_1(\Delta)+w_2(\Delta))+(-1)^{\delta^+(\Delta)}-(-1)^{\delta^+(\Delta^+)}\right].$$

Ou encore, en notant $\Delta_0$ le plus petit élément de $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ :

(1) $$2(-1)^{k_1+k_2+1}(w_1(\geqslant \Delta_0)+w_2(\geqslant \Delta_0))+(-1)^{\delta^+(\Delta_0)}-(-1)^{\delta^+(\Delta^+_{\max})}.$$

Supposons $(V,q_V)$ orthogonal. Alors $\Delta_0=\Delta_{\min}$. D'après XI.21 (1) et (2), on a

(2) $$(-1)^{\delta^+(\Delta_0)}-(-1)^{\delta^+(\Delta^+_{\max})} = \begin{cases} 0, & \text{si } d \text{ est pair},\\ 1-(-1)^{k_1+k_2+1}, & \text{si } d \text{ est impair}.\end{cases}$$

Par le même raisonnement que dans la démonstration du corollaire précédent, pour $n\in\{1,2\}$, on a l'égalité $w_n(\geqslant \Delta_{\min}) = w_n(\geqslant 1)$. Remarquons que $\lambda_{n,c_{\geqslant 1}+1} = \lambda_{c_{\geqslant 1}+1}=0$, donc $\lambda_{n,c_{\geqslant 1}+1}\notin \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_n)$. Grâce au lemme XI.17 (i) et (v), on a l'égalité

(3) $$w_n(\geqslant 1) = -k_n+e(d).$$

En se rappelant que $k_1$ et $k_2$ sont pairs si $d$ est pair, la première égalité de l'énoncé résulte de (1), (2) et (3).

Supposons $(V,q_V)$ symplectique. Alors $\Delta_0=\Delta^+_{\min}$. On a $\delta^+(\Delta^+_{\max})=0$. Supposons $\Delta_{\min}\neq\{0\}$. Notons $i$ le plus grand élément de $\Delta_{\min}$. Pour $n\in\{1,2\}$, un raisonnement déjà plusieurs fois utilisé montre que

$$w_n(\geqslant 1) = w_n(\geqslant \Delta^+_{\min})+w_n(i).$$

Grâce à XI.21 (2) et au lemme XI.22 (i), on calcule :

$$2(w_1(i)+w_2(i)) = (-1)^{\delta^+(\Delta^+_{\min})+k_1+k_2+1}$$

et l'expression (1) est égale à

(4) $$2(-1)^{k_1+k_2+1}(w_1(\geqslant 1)+w_2(\geqslant 1))-1.$$

Grâce au lemme XI.13, on voit que $\lambda_{1,c_{\geqslant 1}+1}=\lambda_{2,c_{\geqslant 1}+1}=0$, donc $\lambda_{1,c_{\geqslant 1}+1}\in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1)$, $\lambda_{2,c_{\geqslant 1}+1}\notin\widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_2)$. D'autre part $J(\Delta_{\min})\subset J(\Delta_{1,\min})$, donc $j_{\min}(\Delta_{1,\min})\leqslant j_{\min}(\Delta_{\min})<c_{\geqslant 1}+1$, et il n'existe pas de $\Delta_1\in\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ tel que $c_{\geqslant 1}+1=j_{\min}(\Delta_1)$ ou $c_{\geqslant 1}+1=j_{\max}(\Delta_1)$. Grâce au lemme XI.17 (i) et (v), on a les égalités

(5) $$w_1(\geqslant 1) = -k_1-\frac{1}{2},\quad w_2(\geqslant 1)=-k_2.$$

La première égalité de l'énoncé résulte de (4) et (5).

Supposons maintenant $\Delta_{\min} = \{0\}$. Pour $n \in \{1,2\}$, on a $w_n(\geqslant \Delta^+_{\min}) = w_n(\geqslant 1)$ et l'expression (1) est égale à

$$(6) \qquad 2(-1)^{k_1+k_2+1}(w_1(\geqslant 1) + w_2(\geqslant 1)) + (-1)^{\delta^+(\Delta^+_{\min})} - 1.$$

D'après le lemme XI.13, l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$(7) \qquad c(\boldsymbol{\lambda}_2) > c(\boldsymbol{\lambda}_1) \text{ et } \lambda_{2,c(\boldsymbol{\lambda}_2)} = 1;$$

$$(8) \qquad c(\boldsymbol{\lambda}_1) \geqslant c(\boldsymbol{\lambda}_2) \text{ et } c(\boldsymbol{\lambda}_1) \text{ est pair}.$$

Supposons vérifiée (7). Alors $c_{\geqslant 1} = c(\boldsymbol{\lambda}) = c(\boldsymbol{\lambda}_2) - 1$. Donc $\lambda_{n,c_{\geqslant 1}+1} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ pour tout $n \in \{1,2\}$. On a $c_{\geqslant 1} + 1 = j_{\max}(\Delta_{2,\min})$. Par contre, on a $c_{\geqslant 1} + 1 \neq j_{\min}(\Delta_{1,\min})$ car les parités de ces entiers sont distinctes donc il n'existe pas de $\Delta_1 \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ tel que $c_{\geqslant 1} + 1 = j_{\max}(\Delta_1)$ ou $c_{\geqslant 1} + 1 = j_{\min}(\Delta_1)$. Grâce au lemme XI.17 (i) et (v) et à l'égalité $\delta_2(\Delta_{2,\min}) = 0$, on obtient :

$$(9) \qquad w_1(\geqslant 1) = -k_1 - \frac{1}{2}, \quad w_2(\geqslant 1) = -k_2 + \frac{(-1)^{\tau_2(\Delta_{2,\min})+k_2+1}}{2}.$$

D'autre part, $j_{\max}(\Delta^+_{\min})$ est le plus grand des entiers $j_{\min}(\Delta_{1,\min}), j_{\min}(\Delta_{2,\min})$. Donc $\Delta_1(\Delta^+_{\min}) = \Delta_{1,\min}, \Delta_2(\Delta^+_{\min}) = \Delta_{2,\min}$ et $j_{\max}(\Delta^+_{\min}) \in J^+$. D'après les définitions et grâce à l'égalité $\tau_1(\Delta_{1,\min}) = 0$, on obtient :

$$(10) \qquad \delta^+(\Delta^+_{\min}) = \tau_2(\Delta_{2,\min}) + k_1 + k_2 + 1.$$

En se rappelant que $k_2$ est pair, la première égalité de l'énoncé résulte de (6), (9) et (10).

Supposons maintenant vérifiée (8). Alors $c_{\geqslant 1} = c(\boldsymbol{\lambda}_1)$, donc $\lambda_{1,c_{\geqslant 1}+1} = 0 \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ et $\lambda_{2,c_{\geqslant 1}+1} = 0 \notin \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_2)$. Puisque $c(\boldsymbol{\lambda}_1)$ est pair, $\Delta_{1,\min} = \{0\}$ et $c_{\geqslant 1} + 1 = j_{\min}(\Delta_{1,\min})$. Grâce au lemme XI.17 (i) et (v) et à l'égalité $\tau_1(\Delta_{1,\min}) = 0$, on obtient :

$$(11) \qquad w_1(\geqslant 1) = -k_1 + \frac{(-1)^{\delta_1(\Delta^+_{1,\min})+k_1}}{2} - \frac{1}{2}, \quad w_2(\geqslant 1) = -k_2.$$

On a $\Delta_1(\Delta_{\min}) = \Delta_{1,\min}$, $\Delta_2(\Delta_{\min})^+ = \Delta_{2,\min}$ et $J(\Delta) \subset J(\Delta_{1,\min})$. La preuve de la relation XI.22 (3) s'applique. Puisque $\delta_2(\Delta_{2,\min}) = 0$, on en déduit :

$$(12) \qquad \delta^+(\Delta^+_{\min}) = \delta_1(\Delta^+_{1,\min}).$$

La première égalité de l'énoncé résulte de (6), (11) et (12). Cela achève la preuve de cette égalité. La deuxième se démontre de façon analogue. $\square$

**XI.25.** Définissons des fonctions

$$aa, bb, ab, ba : \mathbb{N} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

par les égalités suivantes, pour $i \in \mathbb{N} - \{0\}$ :

• s'il n'existe pas de $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $i$ soit l'élément minimal de $\Delta$,

$$\begin{aligned}
aa(i) &= \frac{i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2} + 2e(d) - k_1 - k_2 - w_1(\geqslant i) - w_2(\geqslant i),\\
bb(i) &= \frac{i}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2} - 2e(d) + k_1 + k_2 + w_1(\geqslant i) + w_2(\geqslant i),\\
ab(i) &= \frac{i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2} - k_1 + k_2 - w_1(\geqslant i) + w_2(\geqslant i),\\
ba(i) &= \frac{i}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2} + k_1 - k_2 + w_1(\geqslant i) - w_2(\geqslant i);
\end{aligned}$$

• s'il existe un élément de $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ dont $i$ soit l'élément minimal, en notant $\Delta$ cet élément,

$$\begin{aligned}
aa(i) &= \frac{i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2} + 2e(d) - k_1 - k_2 - w_1(\geqslant i) - w_2(\geqslant i) + \frac{(-1)^{\tau^+(\Delta)+\delta^+(\Delta)+k_1+k_2}}{2},\\
bb(i) &= \frac{i}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2} - 2e(d) + k_1 + k_2 + w_1(\geqslant i) + w_2(\geqslant i) - \frac{(-1)^{\tau^+(\Delta)+\delta^+(\Delta)+k_1+k_2}}{2},\\
ab(i) &= \frac{i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2} - k_1 + k_2 - w_1(\geqslant i) + w_2(\geqslant i) + \frac{(-1)^{\tau^-(\Delta)+\delta^-(\Delta)+k_1+k_2}}{2},\\
ba(i) &= \frac{i}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2} + k_1 - k_2 + w_1(\geqslant i) - w_2(\geqslant i) - \frac{(-1)^{\tau^-(\Delta)+\delta^-(\Delta)+k_1+k_2}}{2}.
\end{aligned}$$

***Lemme***

(i) *Soit $i \in \mathbb{N} - \{0\}$. Supposons $c_i \geqslant 2$ ou $c_i = 1$ et $c_{\geqslant i} \notin J^+ \cup J^-$. Alors on a les égalités :*

$$\begin{aligned}
a_1(i) + a_2(i) &= aa(i),\\
b_1(i) + b_2(i) &= bb(i),\\
a_1(i) + b_2(i) &= ab(i),\\
b_1(i) + a_2(i) &= ba(i).
\end{aligned}$$

(ii) *Soit $i \in \mathbb{N} - \{0\}$. Supposons $c_i = 1$ et $c_{\geqslant i} \in J^+ \cup J^-$. On a encore les quatre égalités ci-dessus, à condition de supposer $w_1(i) + w_2(i) < 0$, resp. $w_1(i) + w_2(i) > 0$, $w_1(i) - w_2(i) < 0$, $w_1(i) - w_2(i) > 0$, pour la première, resp. deuxième, troisième, quatrième.*

*Démonstration.* — On traite le cas $(V, q_V)$ symplectique. Soit $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, supposons $c_i > 0$, considérons l'égalité à établir :

$$a_1(i) + a_2(i) = aa(i). \tag{1}$$

Posons $j = c_{\geqslant i}$. On a l'égalité :

$$a_1(i) + a_2(i) = \left[\frac{\lambda_{1,j}}{2}\right] + \left[\frac{1 + \lambda_{2,j}}{2}\right] - k_1 - k_2 + N_1(i) + N_2(i). \tag{2}$$

Supposons d'abord $i$ impair. Alors $i = \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}$ et $\lambda_{1,j}$ et $\lambda_{2,j}$ sont de parité opposée. On calcule :

$$\left[\frac{\lambda_{1,j}}{2}\right] + \left[\frac{1+\lambda_{2,j}}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{i-1}{2}, & \text{si } \lambda_{1,j} \text{ est impair et } \lambda_{2,j} \text{ est pair,} \\ \dfrac{i+1}{2}, & \text{si } \lambda_{1,j} \text{ est pair et } \lambda_{2,j} \text{ est impair.} \end{cases}$$

D'après le lemme XI.9, on a $j \notin \mathcal{J}$, *a fortiori* il n'existe pas de $n \in \{1,2\}$ et $\Delta_n \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ tel que $j = j_{\max}(\Delta_n)$ ou $j = j_{\min}(\Delta_n)$. Grâce au lemme XI.17 (iv), on a l'égalité

$$N_1(i) + N_2(i) = -w_1(\geqslant i) - w_2(\geqslant i) + \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda_{1,j} \text{ est impair et } \lambda_{2,j} \text{ est pair,} \\ -1, & \text{si } \lambda_{1,j} \text{ est pair et } \lambda_{2,j} \text{ est impair.} \end{cases}$$

L'égalité (1) résulte de ces formules.

Supposons $i$ pair. Deux cas sont possibles.

- $\lambda_{1,j}$ et $\lambda_{2,j}$ sont de même parité, $j \notin J^+ \cup J^-$ et $i = \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}$ ;
- $\lambda_{1,j}$ est pair, $\lambda_{2,j}$ est impair, $j \in J^+ \cup J^-$ et $i = \lambda_{1,j} + \lambda_{2,j} + \xi_j$.

On calcule dans chaque cas :

$$\left[\frac{\lambda_{1,j}}{2}\right] + \left[\frac{1+\lambda_{2,j}}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{i}{2}, & \text{si } j \notin J^-, \\ 1 + \dfrac{i}{2}, & \text{si } j \in J^-. \end{cases} \tag{3}$$

Notons $\Delta$ l'élément de $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ auquel $i$ appartient. Posons $\Delta_1 = \Delta_1(\Delta)$, $\Delta_2 = \Delta_2(\Delta)$. Supposons $|J(\Delta)| \geqslant 2$ et, par exemple $J(\Delta) \subset J(\Delta_1)$. On a

$$\left.\begin{matrix} j_{\min}(\Delta_1) \\ j_{\max}(\Delta_2^+) \end{matrix}\right\} \leqslant j_{\min}(\Delta) \leqslant j \leqslant j_{\max}(\Delta) \leqslant \left\{\begin{matrix} j_{\max}(\Delta_1) \\ j_{\min}(\Delta_2). \end{matrix}\right.$$

Supposons $j \neq j_{\min}(\Delta)$ et $j \neq j_{\max}(\Delta)$. Alors $\lambda_{1,j}$ et $\lambda_{2,j}$ sont pairs, et il n'existe pas de $n \in \{1,2\}$ et $\Delta_n' \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ tels que $j = j_{\max}(\Delta_n')$ ou $j = j_{\min}(\Delta_n')$. Grâce au lemme XI.17 (iv),

$$N_1(i) + N_2(i) = -w_1(\geqslant i) - w_2(\geqslant i) - \frac{1}{2}.$$

D'autre part $j \notin J^-$. L'égalité (1) résulte de (2), (3) et de l'égalité précédente.

Supposons $j = j_{\min}(\Delta)$. Puisque $j_{\min}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant(i+1)} + 1$, on a $c_i = 1$. Le terme $\lambda_{1,j}$ est pair et ou bien $j = j_{\min}(\Delta_1)$, ou bien il n'existe pas de $\Delta_1' \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ tel que $j = j_{\max}(\Delta_1')$ ou $j = j_{\min}(\Delta_1')$. En tout cas, grâce au lemme XI.17 (iv) :

$$N_1(i) = -w_1(\geqslant i) - \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Si $j \neq j_{\max}(\Delta_2^+)$, $\lambda_{2,j}$ est pair et, grâce au même lemme, on a

$$N_2(i) = -w_2(\geqslant i).$$

On a $j \notin J^-$ et (1) résulte de (2), (3), (4) et de l'égalité ci-dessus.

Supposons $j = j_{\max}(\Delta_2^+)$. Dans ce cas, toujours grâce au même lemme :

$$N_2(i) = -w_2(\geqslant i) - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{\tau_2(\Delta_2^+)+\delta_2(\Delta_2^+)+k_2}}{2}. \tag{5}$$

Remarquons que $j \neq j_{\min}(\Delta_1)$, ces entiers n'étant pas de même parité. Il résulte directement des définitions que

$$w_1(i) + w_2(i) = \frac{(-1)^{\tau_2(\Delta_2^+)+\delta_2(\Delta_2^+)+k_2}}{2}.$$

On a $j \in J^-$ d'après le corollaire XI.12 (ii). Comme dans le (ii) de l'énoncé, supposons $w_1(i) + w_2(i) < 0$. D'après l'égalité ci-dessus, ce terme est égal à $-1/2$. En reportant cette valeur dans l'égalité (5), on obtient :

$$N_2(i) = -w_2(\geqslant i) - 1.$$

Alors (1) résulte de cette égalité et de (2), (3) et (4).

Supposons $j = j_{\max}(\Delta)$. Alors $i$ est l'élément minimal de $\Delta$ et $j \notin J^-$ d'après le corollaire XI.12 (i). D'après les définitions :

$$\tau^+(\Delta) + \delta^+(\Delta) \begin{cases} = \tau_1(\Delta_1) + \delta_1(\Delta_1), & \text{si } j \notin J^+, \\ \equiv \tau_2(\Delta_2) + \delta_2(\Delta_2^+) + k_1 + k_2 + 1 \bmod 2\mathbb{Z}, & \text{si } j \in J^+. \end{cases} \tag{6}$$

Si $j = j_{\max}(\Delta_1)$, on a $j \neq j_{\min}(\Delta_2)$ car ces entiers ont une parité distincte, donc $\lambda_{2,j}$ est pair. Grâce au lemme XI.17 (iv),

$$N_i(i) + N_2(i) = -w_1(\geqslant i) - w_2(\geqslant i) - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{\tau_1(\Delta_1)+\delta_1(\Delta_1)+k_1}}{2}.$$

Mais $j \notin J^+$ d'après le corollaire XI.12 (ii). Puisque $k_2$ est pair, les deux égalités précédentes entraînent :

$$N_1(i) + N_2(i) = -w_1(\geqslant i) - w_2(\geqslant i) - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{\tau^+(\Delta)+\delta^+(\Delta)+k_1+k_2}}{2}. \tag{7}$$

Alors (1) résulte de cette égalité et de (2) et (3).

Si $j \neq j_{\max}(\Delta_1)$, puisque $j \in \mathcal{J}$, on a $j = j_{\min}(\Delta_2)$. Grâce au lemme XI.17 (iv),

$$N_1(i) + N_2(i) = \tag{8}$$

$$-w_1(\geqslant i) - w_2(\geqslant i) \begin{cases} -\dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^{\tau_2(\Delta_2)+\delta_2(\Delta_2^+)+k_2+1}}{2}, & \text{si } c_i \geqslant 2, \\ -1, & \text{si } c_i = 1. \end{cases}$$

Si $c_i \geqslant 2$, on obtient comme ci-dessus l'égalité (7), puis (1). Si $c_i = 1$, remarquons que $j \in J^+$ d'après le corollaire XI.12 (ii). On suppose alors $w_1(i) + w_2(i) < 0$ comme dans le (ii) de l'énoncé. Il résulte des définitions que

$$w_1(i) + w_2(i) = \frac{(-1)^{\tau_2(\Delta_2)+\delta_2(\Delta_2^+)+k_2+1}}{2}.$$

Ce terme est donc égal à $-1/2$. On déduit alors de (6) et (8) l'égalité (7), puis (1).

Une démonstration analogue s'applique si $|J(\Delta)| \geqslant 2$ et $J(\Delta) \subset J(\Delta_2)$.

Supposons maintenant $|J(\Delta)| = 1$. Alors $c_i = 1$ et $j \in \mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-$, donc $j \in J^+ \cup J^-$ (*cf.* XI.17 (2)). On suppose $w_1(i) + w_2(i) < 0$ comme dans le (ii) de l'énoncé.

Supposons $j \in \mathcal{J}^+$. On a $j = j_{\min}(\Delta_1) = j_{\min}(\Delta_2)$. Grâce au lemme XI.17 (iv),

$$N_1(i) + N_2(i) = -w_1(\geqslant i) - w_2(\geqslant i) - 1.$$

Grâce au lemme XI.22 (iii),

$$(9) \qquad 2(w_1(i) + w_2(i)) = (-1)^{\tau^+(\Delta)+\delta^+(\Delta^+)+k_1+k_2+1} + (-1)^{\tau^+(\Delta)+\delta^+(\Delta)+k_1+k_2}.$$

Puisque ce terme est $< 0$, on a

$$(10) \qquad (-1)^{\tau^+(\Delta)+\delta^+(\Delta)+k_1+k_2} = -1.$$

On en déduit l'égalité (7). On a $j \in J^+$ et (1) résulte de (2), (3) et (7).

Supposons $j \in \mathcal{J}^-$. On a $j = j_{\max}(\Delta_1) = j_{\max}(\Delta_2)$. Grâce au lemme XI.17 (v),

$$N_1(i) + N_2(i) = -w_1(\geqslant (i+1)) - w_2(\geqslant (i+1)) - 1.$$

On a encore l'égalité (9), dont on déduit (10) et l'égalité :

$$w_1(i) + w_2(i) = -1.$$

On obtient alors l'égalité :

$$N_1(i) + N_2(i) = -w_1(\geqslant i) - w_2(\geqslant i) - \frac{3}{2} + \frac{(-1)^{\tau^+(\Delta)+\delta^+(\Delta)+k_1+k_2}}{2}.$$

On a $j \in J^-$ et (1) résulte de (2), (3) et de l'égalité ci-dessus.

Cela démontre l'égalité (1) sous les hypothèses de l'énoncé. Une démonstration analogue s'applique pour la relation

$$b_1(i) + b_2(i) = bb(i).$$

Considérons la relation

$$(11) \qquad a_1(i) + b_2(i) = ab(i).$$

Posons $j = c_{\geqslant i}$, $j' = c_{\geqslant (i+1)} + 1$. On a l'égalité :

$$a_1(i) + b_2(i) = \left[\frac{\lambda_{1,j}}{2}\right] + \left[\frac{\lambda_{2,j'}}{2}\right] - k_1 + k_2 + N_1(i) - N_2(i).$$

On doit calculer les deux premiers termes en fonction de $i$. Le calcul est facile si $i$ est impair. Supposons $i$ pair, soient $\Delta$, $\Delta_1$, $\Delta_2$ comme ci-dessus. Supposons $J(\Delta) \subset J(\Delta_1)$. On a l'égalité :

$$(12) \qquad \lambda_{1,j} = \lambda_{1,j'}.$$

Si $j = j'$, c'est évident. Supposons $j' < j$, considérons la suite $\boldsymbol{\lambda}_1(i)$ de XI.9. Puisque $\lambda_{1,\ell} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ pour tout $\ell \in \{j', \dots, j\}$, le lemme XI.9 entraîne que deux cas seulement sont possibles :

- $\boldsymbol{\lambda}_1(i)$ est constante,

• $j = j' + 1$, $j' \in J^-$, $j \in J^+$ et $\lambda_{1,j'} = \lambda_{1,j} + 2$.

Dans le premier cas, (12) est clair. Montrons que le deuxième cas est exclu. En effet, il entraîne que $j'$ est pair, $\lambda_{1,j'} \in a(\boldsymbol{\lambda}_1)$ et $\lambda_{1,j'} > \lambda_{1,j'+1}$. Alors d'après le lemme XI.10, il existe $\Delta'_1 \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}_1)$ tel que $j' = j_{\max}(\Delta'_1)$. Cela contredit les inégalités

$$j_{\min}(\Delta_1) \leqslant j' < j_{\max}(\Delta_1)$$

et (12) est démontré.

Grâce à (12), on calcule :

$$\left[\frac{\lambda_{1,j}}{2}\right] + \left[\frac{\lambda_{2,j'}}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{i}{2}, & \text{si } j' \notin J^+, \\ \dfrac{i}{2} - 1, & \text{si } j' \in J^+. \end{cases}$$

De même, si l'on suppose $J(\Delta) \subset J(\Delta_2)$, on obtient

$$\left[\frac{\lambda_{1,j}}{2}\right] + \left[\frac{\lambda_{2,j'}}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{i}{2}, & \text{si } j \in J^-, \\ \dfrac{i}{2} - 1, & \text{si } j \notin J^-. \end{cases}$$

On poursuit la démonstration de (11) comme précédemment. Une démonstration analogue s'applique à la relation

$$b_1(i) + a_2(i) = ba(i).$$

Cela achève la démonstration. □

***XI.26. Corollaire.*** — *Soient $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ et $i \in \Delta$. On suppose $i \geqslant 1$.*

(i) *Supposons $c_i \geqslant 2$ ou $c_i = 1$ et $c_{\geqslant i} \notin J^+ \cup J^-$. Alors les membres de droite des relations ci-dessous sont entiers et on a les congruences :*

$$\begin{aligned} a_1(i) + a_2(i) &\equiv \tau^+(\Delta) + \frac{i}{2} + \theta\Big(k_1 + k_2 + \frac{1}{2}\Big) \bmod 2\mathbb{Z}, \\ b_1(i) + b_2(i) &\equiv \tau^+(\Delta) + \frac{i}{2} - \theta\Big(k_1 + k_2 + \frac{1}{2}\Big) \bmod 2\mathbb{Z}, \\ a_1(i) + b_2(i) &\equiv \tau^-(\Delta) + \frac{i}{2} + \theta\Big(k_1 + k_2 + \frac{1}{2}\Big) \bmod 2\mathbb{Z}, \\ b_1(i) + a_2(i) &\equiv \tau^-(\Delta) + \frac{i}{2} - \theta\Big(k_1 + k_2 + \frac{1}{2}\Big) \bmod 2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(ii) *Supposons $c_i = 1$ et $c_{\geqslant i} \in J^+ \cup J^-$. On a les mêmes assertions, à condition de supposer $w_1(i) + w_2(i) < 0$, resp. $w_1(i) + w_2(i) > 0$, $w_1(i) - w_2(i) < 0$, $w_1(i) - w_2(i) > 0$, pour la première relation, resp. la deuxième, troisième, quatrième.*

*Démonstration.* — D'après le lemme précédent, il suffit de démontrer des assertions analogues où l'on remplace $a_1(i) + a_2(i)$ par $aa(i)$, $b_1(i) + b_2(i)$ par $bb(i)$ etc. Supposons d'abord que $i$ soit le plus petit élément de $\Delta$. Grâce au corollaire XI.23, on a la congruence :

$$aa(i) \equiv \frac{i}{2} - \frac{1}{2} - k_1 - k_2 + \delta^+(\Delta) + \frac{\theta}{2} + 2e(d) + d(k_1 + k_2 + 1) \\ + \frac{(-1)^{\tau^+(\Delta)+\delta^+(\Delta)+k_1+k_2}}{2} \bmod 2\mathbb{Z}.$$

On vérifie que

$$\frac{\theta}{2} + 2e(d) + d(k_1 + k_2 + 1) \equiv \theta\Big(k_1 + k_2 + \frac{1}{2}\Big) \bmod 2\mathbb{Z},$$

et que pour tout $n \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a la congruence

$$\frac{(-1)^n}{2} \equiv \frac{1}{2} + n \bmod 2\mathbb{Z}.$$

On en déduit la première congruence de l'énoncé.

Supposons que $i$ n'est pas le plus petit élément de $\Delta$. Notons $i'$ le plus grand élément de $\Delta$. Comme dans la preuve du corollaire XI.23, on montre que

$$w_1(\geqslant i) + w_2(\geqslant i) = w_1(\geqslant \Delta^+) + w_2(\geqslant \Delta^+) + w_1(i') + w_2(i').$$

Les deux derniers termes sont calculés par le lemme XI.22 (i). On a la congruence :

$$w_1(\geqslant \Delta^+) + w_2(\geqslant \Delta^+) \equiv \delta^+(\Delta^+) + d(k_1 + k_2 + 1) \bmod 2\mathbb{Z}.$$

Si $\Delta$ n'est pas maximal, cela résulte du corollaire XI.23. Si $\Delta$ est maximal, cela résulte de la remarque XI.21 (1). On obtient alors la congruence :

$$aa(i) \equiv \frac{i}{2} - \frac{1}{2} - k_1 - k_2 + \delta^+(\Delta^+) + \frac{\theta}{2} + 2e(d) + d(k_1 + k_2 + 1) \\ + \frac{(-1)^{\tau^+(\Delta)+\delta^+(\Delta^+)+k_1+k_2}}{2} \bmod 2\mathbb{Z}.$$

On conclut comme précédemment. Une démonstration analogue s'applique aux autres congruences de l'énoncé. □

**XI.27.** On conserve les hypothèses de XI.21. On définit un sous-ensemble

$$\mathcal{I}_0(\iota_1, \iota_2) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{\pm 1\}$$

de la façon suivante :

- si $(V, q_V)$ est symplectique,

$$\mathcal{I}_0(\iota_1, \iota_2) = \Big\{(k_1+k_2, \sup(k_1-k_2, k_2-k_1-1), 1), (\sup(k_1-k_2, k_2-k_1-1), k_1+k_2, -1)\Big\};$$

- si $(V, q_V)$ est orthogonal impair,

$$\mathcal{I}_0(\iota_1, \iota_2) = \begin{cases} \{(k_1 + k_2 - 1, |k_1 - k_2|, 1)\}, & \text{si } k_1 + k_2 \text{ est pair}, \\ \{(|k_1 - k_2|, k_1 + k_2 - 1, -1)\}, & \text{si } k_1 + k_2 \text{ est impair}; \end{cases}$$

• si $(V,q_V)$ est orthogonal pair,
$$\mathcal{I}_0(\iota_1,\iota_2)=\{(k_1+k_2,|k_1-k_2|,1),(|k_1-k_2|,k_1+k_2,-1)\}.$$
Remarquons que si $(k',k'',\zeta)\in\mathcal{I}_0(\iota_1,\iota_2)$, on a $(k',k'')\in\mathcal{I}_0(V)$, *cf.* III.1.

Soient $\iota_0=(k',k'',\zeta)\in\mathcal{I}_0(\iota_1,\iota_2)$ et $L$ un réseau presque autodual de $V$. Si $k'\notin\mathcal{I}_0(\ell')$ ou $k''\notin\mathcal{I}_0(\ell'')$, on pose $\mathcal{P}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)=\mathcal{I}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)=\varnothing$.

Supposons $k'\in\mathcal{I}_0(\ell')$ et $k''\in\mathcal{I}_0(\ell'')$. Posons
$$n'=\begin{cases}(d(\ell')-k'(k'+1))/2, & \text{si } (V,q_V) \text{ est symplectique},\\ (d(\ell')-k'^2)/2, & \text{si } (V,q_V) \text{ est orthogonal},\end{cases}$$
et définissons de même $n''$. Soit
$$\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'',\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\alpha}''_1,\boldsymbol{\alpha}''_2,\boldsymbol{\beta}'_1,\boldsymbol{\beta}'_2,\boldsymbol{\beta}''_1,\boldsymbol{\beta}''_2)\tag{1}$$
une famille de suites finies d'entiers $\geqslant 0$. Considérons les conditions suivantes :

(2) $\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}''$ sont des partitions; $S(\boldsymbol{\alpha}')+S(\boldsymbol{\beta}')=n'$, $S(\boldsymbol{\alpha}'')+S(\boldsymbol{\beta}'')=n''$;

$$\boldsymbol{\alpha}'\leqslant\boldsymbol{\alpha}'_1+\boldsymbol{\alpha}'_2,\ \boldsymbol{\beta}'\leqslant\boldsymbol{\beta}'_1+\boldsymbol{\beta}'_2,\ \boldsymbol{\alpha}''\leqslant\boldsymbol{\alpha}''_1+\boldsymbol{\alpha}''_2,\ \boldsymbol{\beta}''\leqslant\boldsymbol{\beta}''_1+\boldsymbol{\beta}''_2;\tag{3}$$

$$\begin{aligned}&p(\boldsymbol{\alpha}'_1)\cup p(\boldsymbol{\alpha}''_1)\leqslant\boldsymbol{\alpha}_1,\ p(\boldsymbol{\beta}'_1)\cup p(\boldsymbol{\beta}''_1)\leqslant\boldsymbol{\beta}_1,\\&p(\boldsymbol{\alpha}'_2)\cup p(\boldsymbol{\alpha}''_2)\leqslant\boldsymbol{\alpha}_2,\ p(\boldsymbol{\beta}'_2)\cup p(\boldsymbol{\beta}''_2)\leqslant\boldsymbol{\beta}_2.\end{aligned}\tag{$C$}$$

On rappelle que pour $n\in\{1,2\}$, $(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_n)$ paramétrise $\rho_{\iota_n}$, *cf.* XI.18. On déduit de $(C)$ une condition $(C_{\iota_0})$ en permutant un couple de suites dans la relation $(C)$ :

• si $\zeta=1$ et $k_1\geqslant k_2$, on permute $\boldsymbol{\alpha}''_2$ et $\boldsymbol{\beta}''_2$ ;
• si $\zeta=1$ et $k_1<k_2$, on permute $\boldsymbol{\alpha}''_1$ et $\boldsymbol{\beta}''_1$ ;
• si $\zeta=-1$ et $k_1\geqslant k_2$, on permute $\boldsymbol{\alpha}'_2$ et $\boldsymbol{\beta}'_2$ ;
• si $\zeta=-1$ et $k_1<k_2$, on permute $\boldsymbol{\alpha}'_2$ et $\boldsymbol{\beta}'_1$ ;

Par exemple, dans le premier cas ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned}&p(\boldsymbol{\alpha}'_1)\cup p(\boldsymbol{\alpha}''_1)\leqslant\boldsymbol{\alpha}_1,\ p(\boldsymbol{\beta}'_1)\cup p(\boldsymbol{\beta}''_1)\leqslant\boldsymbol{\beta}_1,\\&p(\boldsymbol{\alpha}'_2)\cup p(\boldsymbol{\beta}''_2)\leqslant\boldsymbol{\alpha}_2,\ p(\boldsymbol{\beta}'_2)\cup p(\boldsymbol{\alpha}''_2)\leqslant\boldsymbol{\beta}_2.\end{aligned}\tag{$C_{\iota_0}$}$$

On note $\mathcal{P}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$ l'ensemble des familles $\boldsymbol{p}$ vérifiant les conditions (2), (3) et $(C_{\iota_0})$.

On note $\mathcal{I}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$ l'ensemble des couples $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_{\ell'}(k')^{\phi}\times\mathcal{I}_{\ell''}(k'')^{\phi}$ tels qu'il existe $\boldsymbol{p}$ comme en (1) de sorte que :

• $\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$ ;
• $(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')$ paramétrise $\rho_{\iota'}$ et $(\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'')$ paramétrise $\rho_{\iota''}$.

Soit $\boldsymbol{p}$ comme en (1). Considérons les conditions suivantes :

$$\boldsymbol{\alpha}'=\boldsymbol{\alpha}'_1+\boldsymbol{\alpha}'_2,\ \boldsymbol{\beta}'=\boldsymbol{\beta}'_1+\boldsymbol{\beta}'_2,\ \boldsymbol{\alpha}''=\boldsymbol{\alpha}''_1+\boldsymbol{\alpha}''_2,\ \boldsymbol{\beta}''=\boldsymbol{\beta}''_1+\boldsymbol{\beta}''_2;\tag{4}$$

$(C^{\max})$ $\boldsymbol{\alpha}'_1,\boldsymbol{\alpha}'_2,\boldsymbol{\alpha}''_1,\boldsymbol{\alpha}''_2,\boldsymbol{\beta}'_1,\boldsymbol{\beta}'_2,\boldsymbol{\beta}''_1,\boldsymbol{\beta}''_2$ sont des partitions;
$$\boldsymbol{\alpha}'_1\cup\boldsymbol{\alpha}''_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\beta}'_1\cup\boldsymbol{\beta}''_1=\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}'_2\cup\boldsymbol{\alpha}''_2=\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}'_2\cup\boldsymbol{\beta}''_2=\boldsymbol{\beta}_2.$$

Par le même procédé que ci-dessus, on déduit de $(C^{\max})$ une condition $(C^{\max}_{\iota_0})$. On note $\mathcal{P}^{\max}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$ l'ensemble des familles $\boldsymbol{p}$ vérifiant les conditions (2), (4) et $(C^{\max}_{\iota_0})$.

***XI.28. Proposition.*** — *Soient $\iota_0 \in \mathcal{I}_0(\iota_1,\iota_2)$, $L$ un réseau presque autodual de $V$ et $(\iota',\iota'') \in \mathcal{I}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$. Notons $\boldsymbol{\lambda}'$, resp. $\boldsymbol{\lambda}''$, la partition figurant dans la donnée $\iota'$, resp. $\iota''$. Alors on a l'inégalité :*

$$\boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}'' \leqslant \boldsymbol{\lambda}.$$

*Démonstration.* — Rappelons le critère suivant :
(1) soient $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ deux partitions ; alors $\boldsymbol{\mu} \leqslant \boldsymbol{\nu}$ si et seulement si, pour tout entier $i \geqslant 1$, on a l'inégalité $S_c(\boldsymbol{\mu}) \leqslant S_c(\boldsymbol{\nu})$, où $c = c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\mu})$
*cf.* [Spa], lemme 3.4, p. 182.

On pose $\iota_0 = (k',k'',\zeta)$. D'après l'hypothèse, $\mathcal{I}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$ est non vide, donc $k' \in \mathcal{I}_0(\ell')$ et $k'' \in \mathcal{I}_0(\ell'')$. En XI.3, on a associé à $\iota'$, resp. $\iota''$, une fonction $w$, que nous noterons ici $w'$, resp. $w''$. Plus généralement, on affectera d'un $'$, resp. $''$, les objets définis dans les paragraphes précédents, relatifs à l'espace $\ell'$, resp. $\ell''$. En particulier, on définit $\theta',\theta'' \in \{0,1\}$. Soit $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$ tel que, en écrivant $\boldsymbol{p}$ comme en XI.27 (1), $(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')$ paramétrise $\rho_{\iota'}$ et $(\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'')$ paramétrise $\rho_{\iota''}$. Supposons d'abord que $(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')$, resp. $(\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'')$, soit le couple défini en XI.4 associé à $\iota'$, resp. $\iota''$. Remarquons que, grâce au lemme XI.4, cette hypothèse est automatique si $(\ell',q_{\ell'})$, resp. $(\ell'',q_{\ell''})$, n'est pas orthogonal pair ou si $k' \neq 0$, resp. $k'' \neq 0$.

Soit $i$ un entier $\geqslant 1$, posons

$$c = c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}''),\ \ c' = c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}'),\ \ c'' = c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}''),\ \ x' = w'(\geqslant i),\ \ x'' = w''(\geqslant i).$$

On a les égalités :

$$S_c(\boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}'') = \sum_{\ell \geqslant i} \ell c_\ell(\boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}'') = \sum_{\ell \geqslant i} \ell(c_\ell(\boldsymbol{\lambda}') + c_\ell(\boldsymbol{\lambda}'')) = S_{c'}(\boldsymbol{\lambda}') + S_{c''}(\boldsymbol{\lambda}'').$$

Grâce au lemme XI.5, on obtient :

$$\begin{aligned}(2) S_c(\boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}'') = {}& 2S_{c'/2-x'}(\boldsymbol{\alpha}') + 2S_{c'/2+x'}(\boldsymbol{\beta}') + 2S_{c''/2-x''}(\boldsymbol{\alpha}'') + 2S_{c''/2+x''}(\boldsymbol{\beta}'') \\ & -4(x'^2 + x''^2) - (4k'+2-2\theta')x' - (4k''+2-2\theta'')x''.\end{aligned}$$

Grâce à XI.27 (9), on a :

$$\begin{aligned} S_{c'/2-x'}(\boldsymbol{\alpha}') &= \alpha'_{\leqslant(c'/2-x')}, \\ (3) \qquad &\leqslant \alpha'_{1,\leqslant(c'/2-x')} + \alpha'_{2,\leqslant(c'/2-x')}, \\ (4) \qquad &\leqslant S_{c'/2-x'}(p(\boldsymbol{\alpha}'_1)) + S_{c'/2-x'}(p(\boldsymbol{\alpha}'_2)),\end{aligned}$$

et des inégalités analogues concernant $\boldsymbol{\beta}'$, $\boldsymbol{\alpha}''$ et $\boldsymbol{\beta}''$.

Il est clair que si $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\tau}$ sont des partitions telles que $\boldsymbol{\mu} \cup \boldsymbol{\nu} \leqslant \boldsymbol{\tau}$ et si $n,m \in \mathbb{N}$, alors

$$S_n(\boldsymbol{\mu}) + S_m(\boldsymbol{\nu}) \leqslant S_{n+m}(\boldsymbol{\tau}).$$

Supposons par exemple $\zeta = 1$ et $k_1 \geqslant k_2$ (une démonstration analogue s'applique aux autres cas). Grâce à $(C_{\iota_0})$, on a les inégalités :

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} S_{c'/2-x'}(p(\boldsymbol{\alpha}'_1)) + S_{c''/2-x''}(p(\boldsymbol{\alpha}''_1)) \leqslant S_{c/2-x'-x''}(\boldsymbol{\alpha}_1), \\ S_{c'/2-x'}(p(\boldsymbol{\alpha}'_2)) + S_{c''/2+x''}(p(\boldsymbol{\beta}''_2)) \leqslant S_{c/2-x'+x''}(\boldsymbol{\alpha}_2), \\ S_{c'/2+x'}(p(\boldsymbol{\beta}'_1)) + S_{c''/2+x''}(p(\boldsymbol{\beta}''_1)) \leqslant S_{c/2+x'+x''}(\boldsymbol{\beta}_1), \\ S_{c'/2+x'}(p(\boldsymbol{\beta}'_2)) + S_{c''/2-x''}(p(\boldsymbol{\alpha}''_2)) \leqslant S_{c/2+x'-x''}(\boldsymbol{\beta}_2). \end{cases}$$

Enfin, grâce au lemme XI.2, on a les inégalités :

(6)

$$\begin{cases} 2S_{c/2-x'-x''}(\boldsymbol{\alpha}_1) + 2S_{c/2+x'+x''}(\boldsymbol{\beta}_1) \leqslant E(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1, c/2 - x' - x'', c/2 + x' + x''), \\ 2S_{c/2-x'+x''}(\boldsymbol{\alpha}_2) + 2S_{c/2+x'-x''}(\boldsymbol{\beta}_2) \leqslant E(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2, c/2 - x' + x'', c/2 + x' - x''). \end{cases}$$

En rassemblant ces inégalités, on obtient :

$$\begin{aligned} S_c(\boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}'') \leqslant E(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1, c/2-x'-x'', c/2+x'+x'') + E(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2, c/2-x'+x'', c/2+x'-x'') \\ -4(x'^2 + x''^2) - (4k' + 2 - 2\theta')x' - (4k'' + 2 - 2\theta'')x''. \end{aligned}$$

Pour $n \in \{1, 2\}$, on note $D_n$, $d_n$ et $\theta_n$ les données intervenant en XI.2 relatives à l'espace $(V_n, q_{V_n})$ et à $\iota_n$. Explicitons l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned} S_c(\boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}'') &\leqslant S_c(\boldsymbol{\lambda}_1) + S_c(\boldsymbol{\lambda}_2) \\ &\quad + (2D_1 + 2D_2 - 4k' - 2 + 2\theta')x' + (2D_1 - 2D_2 - 4k'' - 2 + 2\theta'')x'' \\ &\quad + (-1)^{\lambda_{1,c}}(1 - 2\theta_1)e(c + d_1) + (-1)^{\lambda_{2,c}}(1 - 2\theta_2)e(c + d_2) - e(d_1) - e(d_2). \end{aligned}$$

Il résulte des définitions que

$$2D_1 + 2D_2 - 4k' - 2 + 2\theta' = 2D_1 - 2D_2 - 4k'' - 2 + 2\theta'' = 0.$$

Grâce au lemme XI.6,

$$S_c(\boldsymbol{\lambda}_1) + S_c(\boldsymbol{\lambda}_2) = S_c(\boldsymbol{\lambda}) + 2e(d) - C_1,$$

où

$$C_1 = \begin{cases} 0, & \text{si } c \notin J - J^-, \\ 1, & \text{si } c \in J - J^-. \end{cases}$$

Remarquons que $d_1 \equiv d_2 \equiv d \bmod 2\mathbb{Z}$. En posant :

$$C_2 = e(c + d)\Big[(-1)^{\lambda_{1,c}}(1 - 2\theta_1) + (-1)^{\lambda_{2,c}}(1 - 2\theta_2)\Big]$$

on obtient

$$S_c(\boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}'') \leqslant S_c(\boldsymbol{\lambda}) + C_2 - C_1.$$

Je dis que $C_2 - C_1 \leqslant 0$. C'est clair si $C_2 \leqslant 0$. Supposons $C_2 > 0$. Nécessairement

$$e(c + d) = 1/2, \quad (-1)^{\lambda_{n,c}}(1 - 2\theta_n) = 1 \text{ pour } n \in \{1, 2\}.$$

Donc $C_2 = 1$. D'autre part, la deuxième condition ci-dessus implique que $\lambda_{n,c} \in \widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ pour $n \in \{1,2\}$, donc $c \in J$. La première condition implique que $c \notin J^-$. Donc $C_1 = 1$ et $C_2 - C_1 = 0$.

L'inégalité

$$S_c(\boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}'') \leqslant S_c(\boldsymbol{\lambda})$$

en résulte, d'où celle de l'énoncé grâce à (1).

On a supposé que $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$, resp. $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'')$, était le couple associé en XI.4 à $\iota'$, resp. $\iota''$. Supprimons cette hypothèse, considérons par exemple le cas où $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$ est le couple associé en XI.4 à $\iota'$ mais $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'')$ n'est pas le couple associé en XI.4 à $\iota''$. Ce dernier est alors $(\boldsymbol{\beta}'', \boldsymbol{\alpha}'')$. Dans l'égalité (2), on doit permuter $\boldsymbol{\alpha}''$ et $\boldsymbol{\beta}''$. Remarquons que puisque $\iota''$ est paramétrisé par deux couples de partitions, $(\ell'', q_{\ell''})$ est orthogonal pair et $k'' = 0$. Donc $4k'' + 2 - 2\theta'' = 0$. Echanger $\boldsymbol{\alpha}''$ et $\boldsymbol{\beta}''$ dans (2) revient à changer $x''$ en $-x''$. La démonstration se poursuit, en changeant partout $x''$ en $-x''$, ce qui ne modifie pas le résultat. □

**XI.29.** Soient $\iota_0 = (k', k'', \zeta) \in \mathcal{I}_0(\iota_1, \iota_2)$ et $L$ un réseau presque autodual de $V$. On note $\mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$ l'ensemble des couples $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}(\ell')^\phi \times \mathcal{I}(\ell'')^\phi$ tels qu'en posant $\iota' = (\boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\varepsilon}')$ ou $(\boldsymbol{\lambda}', \varepsilon', \boldsymbol{\varepsilon}')$ et $\iota'' = (\boldsymbol{\lambda}'', \boldsymbol{\varepsilon}'')$ ou $(\boldsymbol{\lambda}'', \varepsilon'', \boldsymbol{\varepsilon}'')$, on ait les propriétés suivantes :

(1) $\boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}'' = \boldsymbol{\lambda}$ ;

(2) pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$,

$$c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\lambda}') \equiv \delta^{\zeta}(\Delta) + d \operatorname{mod} 2\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\lambda}'') \equiv \delta^{-\zeta}(\Delta) \operatorname{mod} 2\mathbb{Z};$$

- si $(V, q_V)$ est symplectique, pour tout $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ et tout $i \in \Delta \cap a(\boldsymbol{\lambda}')$, resp. $i \in \Delta \cap a(\boldsymbol{\lambda}'')$, on a l'égalité :

$$\varepsilon'_i = \tau^{\zeta}(\Delta), \ \text{ resp. } \varepsilon''_i = \tau^{-\zeta}(\Delta);$$

- si $(V, q_V)$ est orthogonal, il existe des relèvements de $\boldsymbol{\varepsilon}'$, resp. $\boldsymbol{\varepsilon}''$, dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a(\boldsymbol{\lambda}')}$, resp. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a(\boldsymbol{\lambda}'')}$, que l'on note encore $\boldsymbol{\varepsilon}'$, resp. $\boldsymbol{\varepsilon}''$, de sorte que la propriété précédente soit vérifiée.

(3) ***Remarque***. — *Cf.* XI.21 pour les définitions de $\delta^+$, $\delta^-$, $\tau^+$, $\tau^-$. On a identifié ici $\zeta$ et $-\zeta$ à des signes $\pm$.

(4) ***Remarque***. — Si (1) est vérifiée, les deux congruences de (2) sont équivalentes. Il suffit de prouver que :

$$c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\lambda}') + c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\lambda}'') \equiv \delta^+(\Delta) + \delta^-(\Delta) + d \operatorname{mod} 2\mathbb{Z}.$$

D'après les définitions,

$$\delta^+(\Delta) + \delta^-(\Delta) = \begin{cases} 1, & \text{si } j_{\max}(\Delta) \in J^+, \\ 0, & \text{si } j_{\max}(\Delta) \notin J^+. \end{cases}$$

D'autre part :

$$c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\lambda}') + c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\lambda}'') = c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\lambda}) \equiv j_{\max}(\Delta) \bmod 2\mathbb{Z}.$$

D'après le lemme XI.11, il existe $n \in \{1,2\}$ et $\Delta_n \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_n)$ tel que $j_{\max}(\Delta) = j_{\min}(\Delta_n)$ ou $j_{\max}(\Delta) = j_{\max}(\Delta_n)$. Grâce au lemme XI.10 et au corollaire XI.12 (ii), on voit que :

$$j_{\max}(\Delta) \begin{cases} \equiv d+1 \bmod 2\mathbb{Z}, & \text{si } j_{\max}(\Delta) \in J^+, \\ \equiv d \bmod 2\mathbb{Z}, & \text{si } j_{\max}(\Delta) \notin J^+. \end{cases}$$

La remarque résulte de ces formules.

Soit $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$. Supposons $(\ell', q_{\ell'})$ orthogonal pair (ce qui implique que $(V, q_V)$ l'est aussi), $k' = 0$ et $a(\boldsymbol{\lambda}') \neq \varnothing$. Notons $\Delta'_{\max}$ le plus grand élément de $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $a(\boldsymbol{\lambda}') \cap \Delta'_{\max} \neq \varnothing$. On définit l'élément suivant de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ :

$$n'(\iota', \iota'') = \begin{cases} \tau^{\zeta}(\Delta'_{\max}) + 1, & \text{si } \zeta = -1 \text{ et } k_1 < k_2, \\ \tau^{\zeta}(\Delta'_{\max}), & \text{sinon}. \end{cases}$$

Supposons $(\ell'', q_{\ell''})$ orthogonal pair (ce qui implique que $(V, q_V)$ est orthogonal), $k'' = 0$ et $a(\boldsymbol{\lambda}'') \neq \varnothing$. Notons $\Delta''_{\max}$ le plus grand élément de $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $a(\boldsymbol{\lambda}'') \cap \Delta''_{\max} \neq \varnothing$. On définit l'élément suivant de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ :

$$n''(\iota', \iota'') = \begin{cases} \tau^{-\zeta}(\Delta''_{\max}) + 1, & \text{si } \zeta = 1 \text{ et } k_1 < k_2, \\ \tau^{-\zeta}(\Delta''_{\max}), & \text{sinon}. \end{cases}$$

Dans l'énoncé suivant, tout élément $\iota'$ de $\mathcal{I}(\ell')$, resp. $\iota''$ de $\mathcal{I}(\ell'')$, est noté sans plus de commentaire $(\boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\varepsilon}')$ ou $(\boldsymbol{\lambda}', \varepsilon', \boldsymbol{\varepsilon}'')$, resp. $(\boldsymbol{\lambda}'', \boldsymbol{\varepsilon}'')$ ou $(\boldsymbol{\lambda}'', \varepsilon'', \boldsymbol{\varepsilon}'')$.

***Proposition***. — *Soient $\iota_0 = (k', k'', \zeta) \in \mathcal{I}_0(\iota_1, \iota_2)$ et $L$ un réseau presque autodual de $V$.*

(i) *L'ensemble $\mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$ est égal à celui des couples $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$ tels que $\boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}'' = \boldsymbol{\lambda}$.*

(ii) *Soit $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$. Alors l'ensemble des $\boldsymbol{p}$ de la forme XI.27 (1) tels que $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}_L(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$, $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$ paramétrise $\rho_{\iota'}$ et $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'')$ paramétrise $\rho_{\iota''}$ est réduit à un élément. Cet élément appartient à $\mathcal{P}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$.*

(iii) *Soient $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$ et $\boldsymbol{p}$ comme ci-dessus. Supposons $(\ell', q_{\ell'})$ orthogonal pair, $k' = 0$ et $a(\boldsymbol{\lambda}') \neq \varnothing$, resp. $(\ell'', q_{\ell''})$ orthogonal pair, $k'' = 0$ et $a(\boldsymbol{\lambda}'') \neq \varnothing$. Alors $\boldsymbol{\alpha}' \succ \boldsymbol{\beta}'$, resp. $\boldsymbol{\alpha}'' \succ \boldsymbol{\beta}''$, si et seulement si $n'(\iota', \iota'') = 0$, resp. $n''(\iota', \iota'') = 0$.*

*Démonstration*. — Traitons d'abord le cas où $(V, q_V)$ est symplectique, $k_1 \geqslant k_2$ et $\zeta = 1$.

Soient $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$ et $\boldsymbol{p}$ comme en XI.27 (1) tel que $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}_L(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$ $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$ paramétrise $\rho_{\iota'}$ et $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'')$ paramétrise $\rho_{\iota''}$. Remarquons que $\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}''$

sont uniquement déterminés par $\iota'$ et $\iota''$ et que, $\mathcal{I}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$ étant non vide par hypothèse, on a $k' \in \mathcal{I}_0(\ell')$ et $k'' \in \mathcal{I}_0(\ell'')$. Notons comme toujours $\iota' = (\boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\varepsilon}')$ et $\iota'' = (\boldsymbol{\lambda}'', \boldsymbol{\varepsilon}'')$. Supposons

$$\boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}'' = \boldsymbol{\lambda}. \tag{5}$$

Introduisons les fonctions $w'$ et $w''$ définies en XI.3, associées à $\iota'$ et $\iota''$. Définissons des suites $\boldsymbol{m}_1 = (m_{1,i})_{i\geqslant 1}$ et $\boldsymbol{m}_2 = (m_{2,i})_{i\geqslant 1}$ par les égalités

$$m_{1,i} = c_i/2 - w'(i) - w''(i),$$
$$m_{2,i} = c_i/2 - w'(i) + w''(i)$$

pour tout $i \geqslant 1$. D'après (5) et le lemme XI.3 (i), ce sont des suites finies d'entiers $\geqslant 0$ et on a les égalités :

$$0 \leqslant m_{1,i} \leqslant c_i\,, \quad 0 \leqslant m_{2,i} \leqslant c_i\,, \tag{6}$$

pour tout entier $i \geqslant 1$.

Définissons des suites finies $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}_1}$, $\widetilde{\boldsymbol{\beta}_1}$, $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}_2}$ et $\widetilde{\boldsymbol{\beta}_2}$ d'entiers $\geqslant 0$ de la façon suivante. Soit $i$ un entier $\geqslant 1$. Posons

$$c = c_{\geqslant i}\,,\ \ c' = c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}')\,,\ \ c'' = c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}'')\,,\ \ n_1 = m_{1,\geqslant i}\,,\ \ n_2 = m_{2,\geqslant i}\,,$$
$$x' = w'(\geqslant i)\,,\ \ x'' = w''(\geqslant i)\,,$$
$$c^+ = c_{\geqslant(i+1)}\,,\ \ c'^+ = c_{\geqslant(i+1)}(\boldsymbol{\lambda}')\,,\ \ c''^+ = c_{\geqslant(i+1)}(\boldsymbol{\lambda}'')\,,$$
$$n_1^+ = m_{1,\geqslant(i+1)}\,,\ \ n_2^+ = m_{2,\geqslant(i+1)}\,,$$
$$x'^+ = w'(\geqslant (i+1))\,,\ \ x''^+ = w''(\geqslant (i+1))\,.$$

On pose

$$\begin{cases} (\widetilde{\alpha}_{1,n_1^++1},\ldots,\widetilde{\alpha}_{1,n_1}) = \\ \qquad (\alpha'_{1,c'^+/2-x'^++1},\ldots,\alpha'_{1,c'/2-x'},\alpha''_{1,c''^+/2-x''^++1},\ldots,\alpha''_{1,c''/2-x''}), \\ (\widetilde{\beta}_{1,c^+-n_1^++1},\ldots,\widetilde{\beta}_{1,c-n_1}) = \\ \qquad (\beta'_{1,c'^+/2+x'^++1},\ldots,\beta'_{1,c'/2+x'},\beta''_{1,c''^+/2+x''^++1},\ldots,\beta''_{1,c''/2+x''}), \\ (\widetilde{\alpha}_{2,n_2^++1},\ldots,\widetilde{\alpha}_{2,n_2}) = \\ \qquad (\alpha'_{2,c'^+/2-x'^++1},\ldots,\alpha'_{2,c'/2-x'},\beta''_{2,c''^+/2+x''^++1},\ldots,\beta''_{2,c''/2+x''}), \\ (\widetilde{\beta}_{2,c^+-n_2^++1},\ldots,\widetilde{\beta}_{2,c-n_2}) = \\ \qquad (\beta'_{2,c'^+/2+x'^++1},\ldots,\beta'_{2,c'/2+x'},\alpha''_{2,c''^+/2-x''^++1},\ldots,\alpha''_{2,c''/2-x''}). \end{cases} \tag{7}$$

On prolonge cette définition au cas $i = 0$ en fixant un entier $r \geqslant 0$ tel que $\alpha'_{n,j} = \beta'_{n,j} = \alpha''_{n,j} = \beta''_{n,j} = 0$ pour $n \in \{1,2\}$ et $j \geqslant r$ et en posant par exemple :

$$(\widetilde{\alpha}_{1,n_1^++1},\ldots) = (\alpha'_{1,c'^+/2-x'^++1},\ldots,\alpha'_{1,r},\alpha''_{1,c''^+/2-x''^++1},\ldots,\alpha''_{1,r},0,\ldots).$$

On a l'égalité

$$p(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}_1}) = p(\boldsymbol{\alpha}'_1) \cup p(\boldsymbol{\alpha}''_1).$$

Grâce à l'hypothèse $(C_{\iota_0})$, on en déduit $p(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1) \leqslant \boldsymbol{\alpha}_1$. Plus généralement :

(8) $$\text{pour } n \in \{1,2\}, \quad p(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_n) \leqslant \boldsymbol{\alpha}_n\,, \ \ p(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_n) \leqslant \boldsymbol{\beta}_n\,.$$

Soit $i$ un entier $\geqslant 1$. Reprenons la preuve de la proposition XI.28. D'après l'hypothèse (5), les inégalités de cette preuve sont des égalités.

En particulier les inégalités (4), (5) et (6) de XI.28 sont des égalités. On en déduit :

(9)
$$\text{pour } n \in \{1,2\}, \ \ 2\widetilde{\alpha}_{n,\leqslant(m_{n,\geqslant i})} + 2\widetilde{\beta}_{n,\leqslant(c_{\geqslant i}-m_{n,\geqslant i})} = E(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_n, m_{n,\geqslant i}, c_{\geqslant i} - m_{n,\geqslant i})\,.$$

D'après (6), (8), et (9), pour $n \in \{1,2\}$, le triplet $(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_n, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_n, \boldsymbol{m}_n)$ appartient à l'ensemble $\Gamma(\iota_n)$ de XI.20. D'après le lemme XI.20, on a les égalités

(10) $$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_n = \boldsymbol{\alpha}_n\,, \quad \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_n = \boldsymbol{\beta}_n\,,$$

et il existe $f_n \in \mathcal{F}_n$ tel que $\boldsymbol{m}_n = \boldsymbol{m}(f_n)$. Dans la suite, $f_n$ désigne cet élément de $\mathcal{F}_n$, qui bien sûr est unique. Il résulte de (10) et de la définition (7) que les suites $\boldsymbol{\alpha}'_1, \boldsymbol{\alpha}''_1$, etc. sont uniquement déterminées, donc $\boldsymbol{p}$ aussi. De plus, la condition $(C^{\max})$ de XI.27 est vérifiée.

Soit $i$ un entier $\geqslant 1$. L'inégalité XI.28 (3) est une égalité. En soustrayant de cette égalité la même relative à l'entier $i+1$, on obtient l'égalité :

$$\sum_j \alpha'_j = \sum_j (\alpha'_{1,j} + \alpha'_{2,j})\,,$$

où $j$ parcourt $\{c'^{+}/2 - x'^{+} + 1, \ldots, c'/2 - x'\}$ (avec les notations de (7)). D'après (10) et le lemme XI.19, $\alpha'_{1,j}$, resp. $\alpha'_{2,j}$ est constant pour $j$ dans cet intervalle. Il en est de même de $\alpha'_j$ d'après les définitions de XI.4. On a donc l'égalité

$$\alpha'_j = \alpha'_{1,j} + \alpha'_{2,j}$$

pour tout $j$ dans l'intervalle. Puis pour $j \in \{1, \ldots, c_{\geqslant 1}(\boldsymbol{\lambda}')/2 - w'(\geqslant 1)\}$. Le même argument que ci-dessus montre que $\alpha'_{1,j}$, resp. $\alpha'_{2,j}$, $\alpha'_j$ est constant pour $j \geqslant c_{\geqslant 1}(\boldsymbol{\lambda}')/2 - w'(\geqslant 1) + 1$. Ces valeurs constantes ne peuvent être que nulles. Finalement, $\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}'_1 + \boldsymbol{\alpha}'_2$. Plus généralement, la relation XI.27 (4) est vérifiée. On a prouvé :

(11) $\boldsymbol{p}$ est uniquement déterminé et appartient à $\mathcal{P}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$.

Par définition des suites $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$, $\boldsymbol{m}(f_1)$, $\boldsymbol{m}(f_2)$, on a les égalités :

(12) $$\begin{cases} w'(i) + w''(i) = w_1(i) + f_1(i) - f_1(i+1)\,, \\ w'(i) - w''(i) = w_2(i) + f_2(i) - f_2(i+1)\,, \end{cases}$$

pour tout entier $i \geqslant 1$. Soient $\Delta$ un élément de $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ et $\ell$ son plus petit élément. D'après le lemme XI.14, on a $\ell \in I_1 \cap I_2$, donc $f_1(\ell) = f_2(\ell) = 0$. En sommant les égalités (12), on obtient :

$$2w'(\geqslant \ell) = w_1(\geqslant \ell) + w_2(\geqslant \ell)\,.$$

D'après la définition de $w'$ (*cf.* XI.3), pour tout entier $i \geqslant 1$, $2w'(i)$ est entier et $2w'(i) \equiv c_i(\boldsymbol{\lambda}') \bmod 2\mathbb{Z}$. On a donc

$$2w'(\geqslant \ell) \equiv c_{\geqslant \ell}(\boldsymbol{\lambda}') \equiv c_{\geqslant \Delta}(\boldsymbol{\lambda}') \bmod 2\mathbb{Z}.$$

On déduit des deux relations précédentes et du corollaire XI.23 la congruence

$$c_{\geqslant \Delta}(\boldsymbol{\lambda}') \equiv \delta^+(\Delta) \bmod 2\mathbb{Z}.$$

D'après (4), la relation (2) est vérifiée.

Soit $i$ un entier $\geqslant 1$. Supposons $\mathrm{c}_i(\boldsymbol{\lambda}')/2 - w'(i) \neq 0$. Avec les notations de (7), l'intervalle $\{c'^+/2 - x'^+ + 1, \ldots, c'/2 - x'\}$ est non vide. Soit $j$ dans cet intervalle. On a prouvé ci-dessus l'égalité $\alpha'_j = \alpha'_{1,j} + \alpha'_{2,j}$. D'après (10) et le lemme XI.19, on a les égalités $\alpha'_{1,j} = a_1(i)$, $\alpha'_{2,j} = a_2(i)$. D'autre part, $\alpha'_j = a'(i)$, *cf.* XI.4. D'où l'égalité $a'(i) = a_1(i) + a_2(i)$. Plus généralement, on a :

$$(13) \qquad \begin{cases} \bullet \quad \text{si } c_i(\boldsymbol{\lambda}')/2 - w'(i) \neq 0, & a'(i) = a_1(i) + a_2(i)\,; \\ \bullet \quad \text{si } c_i(\boldsymbol{\lambda}')/2 + w'(i) \neq 0, & b'(i) = b_1(i) + b_2(i)\,; \\ \bullet \quad \text{si } c_i(\boldsymbol{\lambda}'')/2 - w''(i) \neq 0, & a''(i) = a_1(i) + b_2(i)\,; \\ \bullet \quad \text{si } c_i(\boldsymbol{\lambda}'')/2 + w''(i) \neq 0, & b''(i) = b_1(i) + a_2(i)\,. \end{cases}$$

Soient $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ et $i \in \Delta \cap a(\boldsymbol{\lambda}')$. Démontrons l'égalité :

$$(14) \qquad \varepsilon'_i = \tau^+(\Delta).$$

Reportons-nous aux définitions de XI.3. L'entier $k' + u'$ est pair. Le terme $v'(i)$ est entier et vérifie la congruence $v'(i) \equiv \varepsilon'_i \bmod 2\mathbb{Z}$. On en déduit :

$$a'(i) \equiv b'(i) \equiv i/2 + \varepsilon'_i \bmod 2\mathbb{Z}.$$

Supposons $\mathrm{c}_i \geqslant 2$ ou $c_i = 1$ et $c_{\geqslant i} \notin J^+ \cup J^-$. D'après le corollaire XI.26 (i), on a les congruences :

$$a_1(i) + a_2(i) \equiv b_1(i) + b_2(i) \equiv \tau^+(\Delta) + i/2 \bmod 2\mathbb{Z}.$$

Puisque $i \in a(\boldsymbol{\lambda}')$, on a $c_i(\boldsymbol{\lambda}') \geqslant 1$. L'une au moins des hypothèses des deux premières relations de (13) est satisfaite. En appliquant la relation en question, l'égalité (14) résulte des deux congruences ci-dessus.

Supposons maintenant $c_i = 1$ et $c_{\geqslant i} \in J^+ \cup J^-$. On a $c_i(\boldsymbol{\lambda}') = 1$ et $w'(i) \in \{\pm 1/2\}$. Une et une seule des hypothèses des deux premières relations de (13) est satisfaite. Le calcul ci-dessus vaut à condition de montrer que le membre de droite de la relation en question est justiciable du (ii) du corollaire XI.26. C'est-à-dire que l'on doit prouver, sous les hypothèses précédentes :

$$(15) \qquad w'(i) = 1/2 \Longleftrightarrow w_1(i) + w_2(i) > 0, \quad w'(i) = -1/2 \Longleftrightarrow w_1(i) + w_2(i) < 0.$$

Supposons d'abord $\Delta = \{i\}$. D'après le lemme XI.14, $i \in I_1 \cap I_2$, donc $f_1(i) = f_2(i) = 0$. Ou bien $i$ est le plus grand des entiers $\ell \geqslant 1$ tels que $c_\ell \neq 0$, ou bien, en notant $\imath^+$ le plus petit des entiers $\ell \geqslant i$ tels que $c_\ell \neq 0$, on a $\imath^+ \in I_1 \cap I_2$, toujours d'après le même lemme. Dans les deux cas $f_1(i+1) = f_2(i+1) = 0$. Alors (15) résulte immédiatement de (12). Supposons maintenant $\Delta \neq \{i\}$. Puisque $c_{\geqslant i} \in J^+ \cup J^-$, le corollaire XI.12 implique que $i$ est soit le plus petit, soit le plus grand élément de $\Delta$. Comme précédemment on en déduit $f_1(i) = f_2(i) = 0$ dans le premier cas, $f_1(i+1) = f_2(i+1) = 0$ dans le second. En tout cas

$$|f_1(i) + f_2(i) - f_1(i+1) - f_2(i+1)| \leqslant 1.$$

D'après le lemme XI.22 (i) et (ii), on a

$$w_1(i) + w_2(i) \in \{\pm 1/2\}.$$

D'après (12),

$$2w'(i) = w_1(i) + w_2(i) + f_1(i) + f_2(i) - f_1(i+1) - f_2(i+1).$$

Enfin comme on l'a déjà dit, $2w'(i) \in \{\pm 1\}$. La première équivalence de (15) résulte des relations ci-dessus. La seconde se démontre de façon analogue. Cela démontre (15) et achève la preuve de (14).

On démontre de même que pour $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ et $i \in \Delta \cap a(\boldsymbol{\lambda}'')$, on a l'égalité $\varepsilon''_i = \tau^-(\Delta)$. On a ainsi vérifié toutes les propriétés requises pour que $(\iota', \iota'')$ appartienne à $\mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$.

Inversement, soit $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$. On utilise comme précédemment les termes définis en XI.3 relatifs à $\iota'$, resp. $\iota''$, que l'on affecte d'un $'$, resp. $''$.
*Attention.* Des entiers $k'$ et $k''$ font déjà partie de nos données. On note donc $\widetilde{k}'$, resp. $\widetilde{k}''$, l'entier noté $k$ en XI.3, relatif à $\iota'$, resp. $\iota''$.

Posons

$$a(\boldsymbol{\lambda}')_{\mathrm{imp}} = \{i'_1 > i'_1 > \cdots > i'_{m'}\}.$$

Pour $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$, posons :

$$n'(\Delta) = \Big|\{\ell \in \{1, \ldots, m'\}; \ell \text{ est pair}, \ i'_\ell \in \Delta \text{ et } \varepsilon'_{i'_\ell} = 1\}\Big| \\ - \Big|\{\ell \in \{1, \ldots, m'\}; \ell \text{ est impair}, \ i'_\ell \in \Delta \text{ et } \varepsilon'_{i'_\ell} = 1\}\Big|.$$

Prouvons l'égalité :

$$n'(\Delta) = \frac{1}{4}\big(1 - (-1)^{\tau^+(\Delta)}\big)\big((-1)^{\delta^+(\Delta)} - (-1)^{\delta^+(\Delta^+)}\big). \tag{16}$$

Si $\tau^+(\Delta) = 0$, puisque $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$, on a $\varepsilon'_i = 0$ pour tout $i \in \Delta \cap a(\boldsymbol{\lambda}')$, donc $n'(\Delta) = 0$. Supposons $\tau^+(\Delta) = 1$. Pour la même raison, $\varepsilon'_i = 1$ pour tout $i \in \Delta \cap a(\boldsymbol{\lambda}')$. Notons $h$, resp. $h^+$ le plus grand, resp. petit, élément $\ell$ de $\{0, \ldots, m'\}$ tel que

$$c_{\geqslant i_\ell} \leqslant j_{\max}(\Delta), \text{ resp. } c_{\geqslant i_{\ell+1}} \geqslant j_{\min}(\Delta),$$

avec la convention $c_{\geqslant i_0} = 0$, $c_{\geqslant i_{m'+1}} = \infty$. Alors

$$\big\{\ell \in \{1, \ldots, m\}; i'_\ell \in \Delta\big\} = \{h^+ + 1, \ldots, h\}.$$

Le terme $n'(\Delta)$ est la différence entre le nombre de termes pairs de cet ensemble et celui de ses termes impairs. D'où l'égalité :

$$n'(\Delta) = \frac{1}{2}\big[(-1)^{h} - (-1)^{h^+}\big].$$

Mais $h \equiv c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\lambda}') \bmod 2\mathbb{Z}$ et $h^+ \equiv c_{\geqslant\Delta^+}(\boldsymbol{\lambda}') \bmod 2\mathbb{Z}$. D'après (2), on obtient

$$n'(\Delta) = \frac{1}{2}\big[(-1)^{\delta^+(\Delta)} - (-1)^{\delta^+(\Delta^+)}\big]$$

et (16) en résulte.

Par définition, on a l'égalité $N'(1) = n'(\geqslant \Delta_{\min})$. Grâce à (16) et au fait que $\tau^+(\Delta_{\min}) = 0$ (*cf.* XI.21 (2)), on obtient l'égalité :

$$N'(1) = \frac{1}{4} \sum_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \big(1 - (-1)^{\tau^+(\Delta)}\big)\big((-1)^{\delta^+(\Delta)} - (-1)^{\delta^+(\Delta^+)}\big).$$

Du corollaire XI.24 et des définitions, on déduit alors l'égalité $\widetilde{k}' = k'$. D'après le lemme XI.4, on a alors :

$$k' \in \mathcal{I}_0(\ell') \text{ et } \iota' \in \mathcal{I}_{\ell'}(k').$$

On démontre de même :

$$k'' \in \mathcal{I}_0(\ell'') \text{ et } \iota'' \in \mathcal{I}_{\ell''}(k'').$$

Soit $i$ un entier $\geqslant 1$. Notons $\Delta(i)$ le plus petit $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $j_{\min}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}$ (s'il n'existe pas de tel $\Delta$, on pose $j_{\max}(\Delta(i)) = 0$ dans les formules ci-dessous). Démontrons les égalités suivantes :

$$(17)\quad \begin{cases} \bullet \ \text{si } c_{\geqslant i} \geqslant j_{\max}(\Delta(i)), \\ \quad 4w'(\geqslant i) = \displaystyle\sum_{\Delta \geqslant \Delta(i)} \Big[(-1)^{\tau^+(\Delta)+\delta^+(\Delta)+k'} + (-1)^{\tau^+(\Delta)+\delta^+(\Delta^+)+k'+1}\Big]; \\ \bullet \ \text{si } c_{\geqslant i} < j_{\max}(\Delta(i)), \\ \quad 4w'(\geqslant i) = (-1)^{\tau^+(\Delta(i))+\delta^+(\Delta(i)^+)+k'+1} + (-1)^{\tau^+(\Delta(i))+c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}')+k'} \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{\Delta \geqslant \Delta(i)^+} \Big[(-1)^{\tau^+(\Delta)+\delta^+(\Delta)+k'} + (-1)^{\tau^+(\Delta)+\delta^+(\Delta^+)+k'+1}\Big]. \end{cases}$$

Pour $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$, posons

$$w'(\geqslant i, \Delta) = \sum_{\ell \in \{1,\ldots,m'\},\, \iota'_\ell \in \Delta,\, \iota'_\ell \geqslant i} \frac{(-1)^{\ell+k'+\varepsilon'_{\iota'_\ell}}}{2}.$$

Puisque $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$, on a $\varepsilon'_{\iota'_\ell} = \tau^+(\Delta)$ pour tout $\ell$ intervenant dans la somme ci-dessus. Donc

$$w'(\geqslant i, \Delta) = \frac{(-1)^{k'+\tau^+(\Delta)}}{2} \Big(\big|\{\ell \in \{1,\ldots,m'\};\, \ell \text{ est pair},\ \iota'_\ell \in \Delta,\ \iota'_\ell \geqslant i\}\big| \\ - \big|\{\ell \in \{1,\ldots,m'\};\, \ell \text{ est impair},\ \iota'_\ell \in \Delta,\ \iota'_\ell \geqslant i\}\big|\Big).$$

On calcule ce terme comme on a calculé $n'(\Delta)$. On obtient :

- si $j_{\max}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i}$,

$$w'(\geqslant i, \Delta) = \frac{(-1)^{k'+\tau^+(\Delta)}}{4} \left((-1)^{\delta^+(\Delta)} - (-1)^{\delta^+(\Delta^+)}\right);$$

- si $c_{\geqslant i} < j_{\min}(\Delta)$, $w'(\geqslant i, \Delta) = 0$ ;
- si $j_{\min}(\Delta) \leqslant c_{\geqslant i} < j_{\max}(\Delta)$,

$$w'(\geqslant i, \Delta) = \frac{(-1)^{k'+\tau^+(\Delta)}}{4} \left((-1)^{c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}')} - (-1)^{\delta^+(\Delta^+)}\right).$$

Il résulte de la définition de $w'$ que

$$w'(\geqslant i) = \sum_{\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})} w'(\geqslant i, \Delta).$$

On en déduit les égalités (17).

On démontre de même des égalités analogues à (17), où $w'$, $k'$, $\boldsymbol{\lambda}'$, $\tau^+$, $\delta^+$ sont remplacés par $w''$, $k''$, $\boldsymbol{\lambda}''$, $\tau^-$, $\delta^-$.

Définissons des fonctions

$$f_1, f_2 : \mathbb{N} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

par

$$f_1(i) = w'(\geqslant i) + w''(\geqslant i) - w_1(\geqslant i), \quad f_2(i) = w'(\geqslant i) - w''(\geqslant i) - w_2(\geqslant i)$$

pour tout entier $i \geqslant 1$.

Soit $i$ un entier $\geqslant 1$. On a les égalités :

$$(18) \qquad \begin{cases} \bullet \quad \text{si } c_{\geqslant i} \geqslant j_{\max}(\Delta(i)), \ f_1(i) = 0; \\ \bullet \quad \text{si } c_{\geqslant i} < j_{\max}(\Delta(i)), \\ \quad f_1(i) = \dfrac{(-1)^{k'+\tau^+(\Delta(i))+c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}')}}{4} + \dfrac{(-1)^{k''+\tau^-(\Delta(i))+c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}'')}}{4}. \end{cases}$$

On a déjà remarqué que pour tout entier $\ell \geqslant 1$, $w_1(\ell) = 0$ si $\ell$ n'est pas un élément extrémal d'un élément de $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$. On a donc :

- si $c_{\geqslant i} \geqslant j_{\max}(\Delta(i))$, $w_1(\geqslant i) = \sum_{\Delta \geqslant \Delta(i)} w_1(\Delta)$ ;
- si $c_{\geqslant i} < j_{\max}(\Delta(i))$, notons $\ell$ le plus grand élément de $\Delta(i)$ ; alors

$$w_1(\geqslant i) = w_1(\ell) + \sum_{\Delta \geqslant \Delta(i)^+} w_1(\Delta).$$

Ces termes sont calculés par le lemme XI.22. En utilisant les formules de ce lemme, les égalités (17) et leurs analogues pour le terme $w''(\geqslant i)$, les égalités (18) résultent de la définition de $f_1$.

Démontrons maintenant :

(19) • $f_1 \in \mathcal{F}_1$, $f_2 \in \mathcal{F}_2$.

Soit $i$ un entier $\geqslant 1$. Si $c_i = 0$, on a $f_1(i) = f_1(i+1)$ d'après (18). De même $f_1(i) = 0$ si $i > d$. Supposons $c_i \neq 0$. On doit prouver :

$$(20) \qquad \begin{cases} \bullet \quad \text{si } i \in I_1\,, \ f_1(i) = 0\,; \\ \bullet \quad \text{si } i \notin I_1\,, \ f_1(i) \in \left\{ \pm \dfrac{1}{2} \right\}. \end{cases}$$

Supposons $c_{\geqslant i} \geqslant j_{\max}(\Delta(i))$. Alors ou bien $i \notin \Delta(i)$ donc $i$ est impair, ou bien $i$ est le plus petit élément de $\Delta(i)$. D'après le lemme XI.14, $i \in I_1$. Grâce à (18), (20) est vérifié. Supposons $c_{\geqslant i} < j_{\max}(\Delta(i))$. Alors $i \in \Delta(i)$ donc $i$ est pair et $i$ n'est pas le plus petit élément de $\Delta(i)$. En particulier $|\Delta(i)| \geqslant 2$. Puisque $k_2$ est pair, on a $k' \equiv k'' \equiv k_1 \bmod 2\mathbb{Z}$. D'après (1), on a

$$c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}') + c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}'') = c_{\geqslant i}\,.$$

Posons $\Delta_n = \Delta_n(\Delta(i))$ pour $n \in \{1, 2\}$. D'après (18) et les définitions de $\tau^+$ et $\tau^-$ (*cf.* XI.21), on obtient :

• si $c_{\geqslant i}$ est impair et $J(\Delta(i)) \subset J(\Delta_1)$, ou si $c_{\geqslant i}$ est pair et $J(\Delta(i)) \subset J(\Delta_2)$, $f_1(i) = 0\,;$

• sinon $f_1(i) \in \{\pm \frac{1}{2}\}$.

Montrons que :

• si $J(\Delta(i)) \subset J(\Delta_1)$, on a $i \in I_1$ si et seulement si $c_{\geqslant i}$ est impair.

En effet, supposons $J(\Delta(i)) \subset J(\Delta_1)$. Alors $\lambda_{1, c_{\geqslant i}}$ est pair. Si $c_{\geqslant i}$ est impair, la relation XI.14 (1) est vérifiée et $i \in I_1$. Inversement, si $i \in I_1$, ou bien cette relation est vérifiée et $c_{\geqslant i}$ est impair, ou bien $\lambda_{1, c_{\geqslant i}} > \lambda_{1, c_{\geqslant i}+1}$. Supposons cette inégalité vérifiée. Si $c_{\geqslant i}$ est pair, $\lambda_{1, c_{\geqslant i}}$ est le plus petit terme d'un élément $\Delta_1'$ de $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1)$. On a :

$$j_{\max}(\Delta_1') = c_{\geqslant i} \in J(\Delta(i)) \subset J(\Delta_1)\,,$$

dont on déduit que $\Delta_1' = \Delta_1$, puis que $c_{\geqslant i} = j_{\max}(\Delta(i))$. Mais cela contredit l'hypothèse. Donc $c_{\geqslant i}$ est impair.

Montrons que

• si $J(\Delta(i)) \subset J(\Delta_2)$, on a $i \in I_1$ si et seulement si $c_{\geqslant i}$ est pair.

En effet, supposons $J(\Delta(i)) \subset J(\Delta_2)$. On a

$$j_{\max}(\Delta_1^+) \leqslant j_{\min}(\Delta(i)) \leqslant c_{\geqslant i} < j_{\max}(\Delta(i)) \leqslant j_{\min}(\Delta_1)\,.$$

Supposons $\lambda_{1, c_{\geqslant i}}$ pair. Alors $c_{\geqslant i} = j_{\max}(\Delta_1^+)$. Donc $\lambda_{1, c_{\geqslant i}} > \lambda_{1, c_{\geqslant i}+1}$ et $i \in I_1$. D'autre part $c_{\geqslant i}$ est pair d'après le lemme XI.10. Supposons $\lambda_{1, c_{\geqslant i}}$ impair. Si $c_{\geqslant i}$ est pair, la relation XI.14 (1) est vérifiée et $i \in I_1$. Inversement, si $i \in I_1$, ou bien cette relation est vérifiée et $c_{\geqslant i}$ est pair, ou bien $\lambda_{1, c_{\geqslant i}} > \lambda_{1, c_{\geqslant i}+1}$. Cette inégalité entraîne que $c_{\geqslant i}$ est pair parce que $\boldsymbol{\lambda}_1$ est spéciale.

La relation (20) résulte des propriétés prouvées ci-dessus. Cela démontre la première relation de (19). La seconde se démontre de façon analogue.

Soit $i$ un entier $\geqslant 1$. Les égalités (12) sont vérifiées par définition de $f_1$ et $f_2$.

Montrons que les relations (13) sont vérifiées. Supposons $c_i(\boldsymbol{\lambda}')/2 - w'(i) \neq 0$. *A fortiori* $c_i(\boldsymbol{\lambda}') \neq 0$ et $c_i(\boldsymbol{\lambda}) \neq 0$. Rappelons que :

• $k' = k_1 + k_2$.

D'après le lemme XI.11 (iii) et la définition de $v'(i)$, on a l'égalité :

$$\bullet\, 2(-1)^{k'} N'(i) - v'(i) = -2w'(\geqslant i) + \frac{(-1)^{k'+1}}{2} + \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ est impair}, \\ \frac{(-1)^{k'+c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}')+\varepsilon'_i}}{2}, & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases}.$$

On a aussi :

• $-u' + \frac{(-1)^{k'+1}}{2} = -\frac{1}{2}$,

et, d'après (12),

• $-2w'(\geqslant i) = -w_1(\geqslant i) - w_2(\geqslant i) - f_1(i) - f_2(i)$.

On a :

• si $i$ est impair, $f_1(i) = f_2(i) = 0$.

Cela résulte du fait que $i \in I_1$ et de (19).

Montrons que :

• si $i$ est pair,

$$-f_1(i) - f_2(i) + \frac{(-1)^{k'+c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}')+\varepsilon'_i}}{2} = \begin{cases} 0, \text{ si } i \text{ n'est pas l'élément minimal de } \Delta(i), \\ \frac{(-1)^{\tau^+(\Delta(i))+\delta^+(\Delta(i))+k_1+k_2}}{2}, \text{ si } i \text{ est} \\ \qquad \text{l'élément minimal de } \Delta(i). \end{cases}$$

Puisque $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$, on a $\varepsilon'_i = \tau^+(\Delta(i))$. Si $i$ n'est pas l'élément minimal de $\Delta(i)$, $f_1(i)$ est calculé par la deuxième relation de (18). Une formule analogue vaut pour $f_2(i)$ : le deuxième terme de la somme est affecté d'un signe $-$. On en déduit l'égalité cherchée. Si $i$ est l'élément minimal de $\Delta(i)$, $f_1(i) = f_2(i) = 0$ d'après (18). D'autre part $c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}') \equiv c_{\geqslant \Delta(i)}(\boldsymbol{\lambda}') \equiv \delta^+(\Delta(i)) \bmod 2\mathbb{Z}$ d'après (2). D'où encore l'égalité cherchée.

En utilisant les relations ci-dessus et les définitions de $a'(i)$ (*cf.* XI.3) et $aa(i)$ (*cf.* XI.25), on obtient l'égalité

$$a'(i) = aa(i).$$

Si $c_i \geqslant 2$ ou $c_i = 1$ et $c_{\geqslant i} \notin J^+ \cup J^-$, on déduit du lemme XI.25 l'égalité

$$a'(i) = a_1(i) + a_2(i).$$

Si $c_i = 1$ et $c_{\geqslant i} \in J^+ \cup J^-$, la relation (15) s'applique, sa démonstration ne reposant que sur la relation (12). D'après l'hypothèse $c_i(\boldsymbol{\lambda}')/2 - w'(i) \neq 0$, on a $w_1(i) + w_2(i) < 0$ et on peut appliquer le (ii) du lemme XI.26 qui conduit encore à l'égalité ci-dessus. Cela démontre la première relation de (13). Les autres se démontrent de façon analogue.

Notons $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$, resp. $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'')$, le couple de partitions paramétrisant $\rho_{\iota'}$, resp. $\rho_{\iota''}$. Définissons des partitions $\boldsymbol{\alpha}'_1, \boldsymbol{\alpha}'_2$, $\boldsymbol{\alpha}''_1$, $\boldsymbol{\alpha}''_2$, $\boldsymbol{\beta}'_1$, $\boldsymbol{\beta}'_2$, $\boldsymbol{\beta}''_1$, $\boldsymbol{\beta}''_2$ par les égalités :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}'_1 &= \bigcup_{i\geqslant 1}(a_1(i))^{c_i(\boldsymbol{\lambda}')/2-w'(i)}, & \boldsymbol{\alpha}'_2 &= \bigcup_{i\geqslant 1}(a_2(i))^{c_i(\boldsymbol{\lambda}')/2-w'(i)},\\
\boldsymbol{\beta}'_1 &= \bigcup_{i\geqslant 1}(b_1(i))^{c_i(\boldsymbol{\lambda}')/2+w'(i)}, & \boldsymbol{\beta}'_2 &= \bigcup_{i\geqslant 1}(b_2(i))^{c_i(\boldsymbol{\lambda}')/2+w'(i)},\\
\boldsymbol{\alpha}''_1 &= \bigcup_{i\geqslant 1}(a_1(i))^{c_i(\boldsymbol{\lambda}'')/2-w''(i)}, & \boldsymbol{\alpha}''_2 &= \bigcup_{i\geqslant 1}(b_2(i))^{c_i(\boldsymbol{\lambda}'')/2-w''(i)},\\
\boldsymbol{\beta}''_1 &= \bigcup_{i\geqslant 1}(b_1(i))^{c_i(\boldsymbol{\lambda}'')/2+w''(i)}, & \boldsymbol{\beta}''_2 &= \bigcup_{i\geqslant 1}(a_2(i))^{c_i(\boldsymbol{\lambda}'')/2+w''(i)}.
\end{aligned}$$

La relation XI.27 (2) est vérifiée. La relation XI.27 (4) aussi grâce aux relations (13) et au lemme XI.4. Grâce à (12), on a les égalités :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}'_1 \cup \boldsymbol{\alpha}''_1 &= \bigcup_{i\geqslant 1}(a_1(i))^{m(f_1)_i}, & \boldsymbol{\beta}'_1 \cup \boldsymbol{\beta}''_1 &= \bigcup_{i\geqslant 1}(b_1(i))^{c_i-m(f_1)_i},\\
\boldsymbol{\alpha}'_2 \cup \boldsymbol{\beta}''_2 &= \bigcup_{i\geqslant 1}(a_2(i))^{m(f_2)_i}, & \boldsymbol{\beta}'_2 \cup \boldsymbol{\alpha}''_2 &= \bigcup_{i\geqslant 1}(b_2(i))^{c_i-m(f_2)_i}.
\end{aligned}$$

Grâce à (19) et au lemme XI.19, on en déduit que la relation $(C^{\max}_{\iota_0})$ de XI.27 est vérifiée. Alors la famille $\boldsymbol{p}$ définie par XI.27 (1) appartient à $\mathcal{P}^{\max}_L(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$, *a fortiori* à $\mathcal{P}_L(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$. Donc $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$. Cela démontre le (i) de l'énoncé.

Le (ii) résulte de (11).

Cela achève la démonstration dans le cas où $(V, q_V)$ est symplectique, $k_1 \geqslant k_2$ et $\zeta = 1$. Les autres cas se traitent de façon analogue pourvu que les couples $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$, resp. $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'')$, soient uniquement déterminés par $\iota'$, resp. $\iota''$.

Traitons un cas où cette condition n'est pas vérifiée. Par exemple le cas $(V, q_V)$ orthogonal pair, $\zeta = 1$ et $k_1 = k_2 \geqslant 1$. Alors $k' \neq 0$ et $k'' = 0$.

Soit $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$, écrivons $\iota' = (\boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\varepsilon}')$ et $\iota'' = (\boldsymbol{\lambda}'', \boldsymbol{\varepsilon}'')$ ou $(\boldsymbol{\lambda}'', \varepsilon'', \boldsymbol{\varepsilon}'')$. Comme en XI.3, identifions $\iota'$, resp. $\iota''$, à un relèvement dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a(\boldsymbol{\lambda}')}$, resp. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{a(\boldsymbol{\lambda}'')}$. Soit $\boldsymbol{p}$ comme en XI.27 (1), supposons que $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}_L(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$, que $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$ paramétrise $\rho_{\iota'}$ et $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'')$ paramétrise $\rho_{\iota''}$. Supposons enfin $\boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}'' = \boldsymbol{\lambda}$. Puisque $k' \neq 0$, il n'y a qu'un choix possible pour $(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}')$ : c'est le couple défini en XI.4 relatif à $\iota'$. Supposons d'abord que $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'')$ soit le couple défini en XI.4 relatif à $\iota''$. La démonstration précédente s'applique sans changement. On obtient que $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}^{\max}_L(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$ et en particulier :

- pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ et tout $i \in \Delta \cap a(\boldsymbol{\lambda}'')$, on a l'égalité $\varepsilon''_i = \tau^-(\Delta)$.

Supposons $a(\boldsymbol{\lambda}'') \neq \varnothing$, introduisons l'élément $\Delta''_{\max}$ de $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ défini avant l'énoncé et le plus grand élément $a''_{\max}$ de $a(\boldsymbol{\lambda}'')$. D'après les définitions de XI.3, $\varepsilon''_{a''_{\max}} = 0$. Or $a''_{\max} \in \Delta''_{\max}$. D'où $\tau^-(\Delta''_{\max}) = 0$, *i.e.* $n''(\iota', \iota'') = 0$. Remarquons que l'on a aussi $\boldsymbol{\alpha}'' \succ \boldsymbol{\beta}''$ (lemme XI.4).

Supposons maintenant que $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'')$ n'est pas le couple défini en XI.4 relatif à $\iota''$. Ce couple est alors $(\boldsymbol{\beta}'', \boldsymbol{\alpha}'')$. La démonstration précédente s'applique à condition d'y échanger $\boldsymbol{\alpha}''$ et $\boldsymbol{\beta}''$, ce qui revient à changer $w''$ en $-w''$ et d'échanger les fonctions $a''$ et $b''$. On obtient que $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$ et en particulier :

• pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ et tout $i \in \Delta \cap a(\boldsymbol{\lambda}'')$, on a l'égalité $\varepsilon_i'' = \tau^-(\Delta) + 1$.

Si $a(\boldsymbol{\lambda}'') \neq \varnothing$, on voit comme ci-dessus que $n''(\iota', \iota'') = 1$. Remarquons que, cette fois, $\boldsymbol{\beta}'' \succ \boldsymbol{\alpha}''$.

Levons l'hypothèse sur $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'')$. Si $a(\boldsymbol{\lambda}'') = \varnothing$, le couple $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'')$ est uniquement déterminé (et on a $\boldsymbol{\alpha}'' = \boldsymbol{\beta}''$). Si $a(\boldsymbol{\lambda}'') \neq \varnothing$, les résultats ci-dessus montrent que $(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'')$ est aussi uniquement déterminé par la valeur de $n''(\iota', \iota'')$. Comme dans la démonstration précédente $\boldsymbol{p}$ est alors lui-aussi uniquement déterminé. De plus si $a(\boldsymbol{\lambda}'') \neq \varnothing$, on a l'équivalence :

$$\boldsymbol{\alpha}'' \succ \boldsymbol{\beta}'' \iff n''(\iota', \iota'') = 0.$$

Quant nous aurons achevé la démonstration du (i) de l'énoncé, les propriétés ci-dessus entraîneront (ii) et (iii).

Réciproquement, soit $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$. Posons $\iota' = (\boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\varepsilon}')$ ou $(\boldsymbol{\lambda}', \varepsilon', \boldsymbol{\varepsilon}')$, $\iota'' = (\boldsymbol{\lambda}'', \boldsymbol{\varepsilon}'')$ ou $(\boldsymbol{\lambda}'', \varepsilon'', \boldsymbol{\varepsilon}'')$, identifions comme ci-dessus $\boldsymbol{\varepsilon}'$ et $\boldsymbol{\varepsilon}''$ à leurs relèvements définis en XI.3. Par hypothèse, il existe $e', e'' \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tels que pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ et tout $i \in \Delta \cap a(\boldsymbol{\lambda}')$, resp. $i \in \Delta \cap a(\boldsymbol{\lambda}'')$, on ait l'égalité

$$\varepsilon_i' = \tau^+(\Delta) + e', \ \text{ resp. } \varepsilon_i'' = \tau^-(\Delta) + e''.$$

On calcule comme précédemment :

$$N'(1) = \begin{cases} k'/2, & \text{si } e' = 0 \\ -k'/2, & \text{si } e' = 1 \end{cases}, \quad N''(1) = 0.$$

La condition $N'(1) \geqslant 0$ imposée en XI.3 implique $e' = 0$. Si $a(\boldsymbol{\lambda}'') \neq \varnothing$, la condition $\varepsilon''_{a''_{\max}} = 0$ imposée en XI.3 implique $e'' = n''(\iota', \iota'')$.

Si $a(\boldsymbol{\lambda}'') = \varnothing$ ou si $a(\boldsymbol{\lambda}'') \neq \varnothing$ et $n''(\iota', \iota'') = 0$, la démonstration se poursuit comme précédemment. Si $a(\boldsymbol{\lambda}'') \neq \varnothing$ et $n''(\iota', \iota'') = 1$, on doit y remplacer $w''$ par $-w''$ et échanger les fonctions $a''$ et $b''$. On obtient encore que $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$. Cela achève la démonstration. □

**XI.30.** Considérons le cas particulier où $d(V_2) \leqslant 1$, donc $G = G_1 = H$. Les égalités suivantes résultent des définitions

• $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_1$ ;

• l'ensemble $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ défini en IX.11 est égal à l'ensemble $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1)$ défini en VIII.16, VIII.18, VIII.20.

• $\delta^+ = \delta^- = \delta_1$, $\tau^+ = \tau^- = \tau_1 + d$.

La proposition XI.11 résulte des propositions XI.28 et XI.29 appliquées à ce cas particulier.

# CHAPITRE XII

# TRANSFERT D'INTÉGRALES ORBITALES NILPOTENTES

**XII.1.** On se place dans la situation de X.1 (si les espaces sont du type unitaire, on suppose comme en I.2 que $E$ est l'extension quadratique non ramifiée de $F$). On suppose que chacun des espaces $V$, $V_1$, $V_2$ possède un réseau autodual. Pour $n \in \{1,2\}$, on affecte d'un indice $n$ les objets relatifs au groupe $\boldsymbol{G}_n$. On affecte d'un exposant $H$ les objets relatifs au groupe $\boldsymbol{H}$. Par exemple, on a $\mathcal{H}^H = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $\mathcal{D}^H \supset \mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2$.

Soient $f \in C_c^\infty(g)$ et $f^H \in C_c^\infty(h)$. On dit que $f^H$ est un transfert de $f$ si on a l'égalité :

$$\phi^{H,\mathrm{st}}(Y, f^H) = \phi^{G,H}(Y, f)$$

pour tout $Y \in h_{G-\mathrm{reg}}$ (*cf.* IV.5).

Soient $D \in \mathcal{D}$ et $D^H \in \mathcal{D}^H$. On dit que $D$ est un transfert de $D^H$ si on a l'égalité :

$$D(f) = D^H(f^H)$$

pour tout couple $(f, f^H) \in C_c^\infty(g) \times C_c^\infty(h)$ tel que $f^H$ soit un transfert de $f$.

Soient $\widetilde{D} \in \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$ et $\widetilde{D}^H \in \mathrm{res}_{\mathcal{H}^H}(\mathcal{D}^H_{\mathrm{ent}})$. On dit que $\widetilde{D}$ est un transfert de $\widetilde{D}^H$ s'il existe $D \in \mathcal{D}_{\mathrm{ent}}$ et $D^H \in \mathcal{D}^H_{\mathrm{ent}}$ de sorte que :

- $D$ est un transfert de $D^H$ ;
- $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D) = \widetilde{D}$, $\mathrm{res}_{\mathcal{H}^H}(D^H) = \widetilde{D}^H$.

**XII.2.** Supposons $(V, q_V)$ unitaire. Pour tout $n \in \{1,2\}$, soit $\xi_n = (0, 0, \boldsymbol{\mu}_n^0, \boldsymbol{\mu}_n^1)$ un élément de $\Xi^{\mathrm{st}}(V_n)$, *cf.* IV.12. Posons

$$\boldsymbol{\mu}^0 = \boldsymbol{\mu}_1^0 \cup \boldsymbol{\mu}_2^0, \quad \boldsymbol{\mu}^1 = \boldsymbol{\mu}_1^1 \cup \boldsymbol{\mu}_2^1$$

et

$$\xi = (0, 0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\mu}^1).$$

C'est un élément de $\Xi(V)$. Fixons un élément $\kappa \in \mathcal{K}(\xi) = \{\pm 1\}^{c(\boldsymbol{\mu}^1)}$ tel que, pour tout entier $i \geqslant 1$, on ait l'égalité :

$$c_i(\boldsymbol{\mu}^1, \kappa) = c_i(\boldsymbol{\mu}_2^1),$$

*cf.* IV.6. Posons

$$\phi^{\mathcal{H}}[\xi_1, \xi_2] = \phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa},$$

*cf.* IV.9. C'est un élément de $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$.

***Proposition***. — *L'élément* $\phi^{\mathcal{H}}[\xi_1, \xi_2]$ *de* $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$ *est un transfert de l'élément* $\phi^{\mathcal{H}_1}_{\xi_1,1} \otimes \phi^{\mathcal{H}_2}_{\xi_2,1}$ *de* $\mathrm{res}_{\mathcal{H}^H}(\mathcal{D}^H_{\mathrm{ent}})$.

*Démonstration.* — Pour $n \in \{1,2\}$, posons $\theta_n = \theta(\xi_n, 0)$, où 0 est l'élément neutre de $\mathcal{E}(\xi_n)$, *cf.* IV.6. Comme en III.2, associons à $\theta_n$ un élément $X_{T_n}$ de $g_n$, entier et de réduction régulière. Notons $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des réductions dans $\overline{\mathbb{F}}_q$ des valeurs propres de $X_{T_n}$. On peut supposer, et on suppose, $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ disjoints.

Posons

$$Y = (X_{T_1}, X_{T_2}) \in h.$$

C'est un élément de $h_{G-\mathrm{reg}}$. Ainsi qu'on l'a remarqué dans la preuve du lemme IV.12, on a l'égalité :

$$\phi^{\mathcal{H}_1}_{\xi_1,1} \otimes \phi^{\mathcal{H}_2}_{\xi_2,1} = \mathrm{res}_{\mathcal{H}^H}(\phi^{H,\mathrm{st}}(Y, \cdot)).$$

Par définition, $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\phi^{G,H}(Y,\cdot))$ est un transfert de cet élément de $\mathrm{res}_{\mathcal{H}^H}(\mathcal{D}^H_{\mathrm{ent}})$.

Pour $n \in \{1,2\}$, introduisons des données $I_n, (a_{n,i})$, $(c_{n,i})$ comme en I.7 paramétrisant la classe de conjugaison de $X_{T_n}$ par $G_n$. On suppose $I_1$ et $I_2$ disjoints. Posons $I = I_1 \cup I_2$, $I^* = I_1^* \cup I_2^*$ et notons $(a_i)$ la réunion des familles $(a_{1,i})$ et $(a_{2,i})$. Identifions $I^*$ à $\{1, \ldots, c(\boldsymbol{\mu}^1)\}$ de sorte que pour tout $i \in \{1, \ldots, c(\boldsymbol{\mu}^1)\}$, on ait l'égalité

$$\mu_i^1 = [F_i : E],$$

où $F_i = E(a_i)$. Pour $e \in \mathcal{E}(\xi)$ et $i \in \{1, \ldots, c(\boldsymbol{\mu}^1)\}$, fixons $c(e)_i \in F_i^{\#\times}$ (*cf.* I.7) tel que :

$$\mathrm{sgn}_{F_i/F_i^{\#}}(c(e)_i) = (-1)^{e_i}.$$

Les données $I$, $(a_i)$, $(c(e)_i)$ paramétrisent une classe de conjugaison par $G$ dans $g_{\mathrm{reg}}$. Fixons $X_T^e$ dans cette classe. C'est un élément entier et de réduction régulière. Il est associé comme en III.2 à $\theta(\xi, e)$. En particulier, on a l'égalité :

$$\phi^{\mathcal{H}}_{\theta(\xi,e)} = \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\phi(X_T^e, \cdot)).$$

D'autre part, $(X_T^e)_{e \in \mathcal{E}(\xi)}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G$ dans la classe de conjugaison stable correspondant à celle de $Y$ (*cf.* X.2). Définissons $\kappa^Y \in \mathcal{K}(\xi)$ par :

$$\kappa_i^Y = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in I_1^*, \\ -1, & \text{si } i \in I_2^*, \end{cases}$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, c(\boldsymbol{\mu}^1)\}$. Grâce à la non-ramification des extensions $F_i/E$, la proposition X.8 implique l'égalité

$$\Delta_{G,H}(Y, X_T^e) = \kappa^Y(e)$$

pour tout $e \in \mathcal{E}(\xi)$. On a alors l'égalité :

$$\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\phi^{G,H}(Y,\cdot)) = \mathrm{res}_{\mathcal{H}}\left(\sum_{e\in\mathcal{E}(\xi)} \kappa^Y(e)\phi(X_T^e,\cdot)\right) = \phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa^Y}.$$

Mais $\kappa_Y \sim \kappa$ (*cf.* IV.6). D'après le lemme IV.9, on a donc $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa} = \phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa^Y}$ et on conclut que $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi,\kappa}$ est un transfert à $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$ de $\phi^{\mathcal{H}_1}_{\xi_1,1}\otimes\phi^{\mathcal{H}_2}_{\xi_2,1}$. □

**XII.3.** Supposons $(V,q_V)$ symplectique ou orthogonal. Pour $\iota_1 \in \mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V_1)$ et $\iota_2 \in \mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V_2)$, on a défini en XI.27 un sous ensemble $\mathcal{I}_0(\iota_1,\iota_2)$ de $\mathcal{I}_0(V)\times\{\pm 1\}$. Remarquons que cet ensemble ne dépend que des éléments $\iota_{1,0}\in\mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V_1)$ et $\iota_{2,0}\in\mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V_2)$ associés à $\iota_1$ et $\iota_2$, *cf.* IX.10. On peut noter cet ensemble $\mathcal{I}_0(\iota_{1,0},\iota_{2,0})$, ce qui définit un tel ensemble pour tous $\iota_{1,0}\in\mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V_1)$ et $\iota_{2,0}\in\mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V_2)$.

Pour tout $n\in\{1,2\}$, soit $\iota_{n,0}=(k'_n,k''_n)\in\mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V_n)$. Posons $k_n=\sup(k'_n,k''_n)$. Soit $\iota_0=(k',k'',\zeta)\in\mathcal{I}_0(\iota_{1,0},\iota_{2,0})$. Posons

$$e=\begin{cases}0, & \text{si } \zeta=1,\\ 1, & \text{si } \zeta=-1.\end{cases}$$

On définit $c(\iota_0)\in\mathbb{Q}^\times$ par les formules suivantes :

- si $(V,q_V)$ est symplectique,

$$c(\iota_0)=\begin{cases}\mathrm{sgn}(\eta'(V_2)^{k_1+e}), & \text{si } k_1\geqslant k_2\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(\eta'(V_2)^{k_1+e}), & \text{si } k_1\geqslant k_2=0,\\ \mathrm{sgn}(-1)^{[(k_1+k_2+1)/2]}\,\mathrm{sgn}(\eta'(V_2)^{k_1+e}), & \text{si } k_1<k_2;\end{cases}$$

- si $(V,q_V)$ est orthogonal impair,

$$c(\iota_0)=\begin{cases}\mathrm{sgn}\left((-1)^{k_2+1}\eta'(V)^{k_1+1}\eta'(V_1)^{k_1+1}\eta'(V_2)^{k_2+1}\right), & \text{si } k_1\geqslant k_2,\\ \mathrm{sgn}\left((-1)^{k_1+1}\eta'(V)^{k_2+1}\eta'(V_1)^{k_1+1}\eta'(V_2)^{k_2+1}\right), & \text{si } k_1<k_2;\end{cases}$$

- si $(V,q_V)$ est orthogonal pair,

$$c(\iota_0)=\begin{cases}\mathrm{sgn}(\eta'(V_2)^{e}), & \text{si } k_1\geqslant k_2\neq 0,\\ \mathrm{sgn}(\eta'(V_1)^{e}), & \text{si } k_2> k_1\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(\eta'(V_2)^{e}), & \text{si } k_1\geqslant k_2=0,\\ \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(\eta'(V_1)^{e}), & \text{si } k_2>k_1=0.\end{cases}$$

On pose $\delta(\iota_0)=\delta(k',k'')$, *cf.* III.8.

Pour tout $n\in\{1,2\}$, soit $\xi_n=(k'_n,k''_n,\boldsymbol{\mu}_n^0,\boldsymbol{\mu}_n^1)$ ou $(k'_n,k''_n,\boldsymbol{\mu}_n^0,\boldsymbol{\mu}_n^1,\varepsilon_n)$ un élément de $\Xi^{\mathrm{st}}(V_n)$, *cf.* IV.12. Posons $\iota_{n,0}=(k'_n,k''_n)$ et

$$\mathcal{I}_0(\xi_1,\xi_2)=\mathcal{I}_0(\iota_{1,0},\iota_{2,0}).$$

Pour $\iota_0 \in \mathcal{I}_0(\xi_1,\xi_2)$, on pose
$$c(\xi_1,\xi_2;\iota_0) = \alpha\, 2^\beta\, c(\iota_0)\, q^{(\delta(\iota_{1,0})+\delta(\iota_{2,0})-\delta(\iota_0))/2},$$
où $\alpha$ et $\beta$ sont définis par les formules suivantes, avec les mêmes notations que ci-dessus :

- si $(V,q_V)$ est symplectique,
$$\alpha = (\zeta(-1)^{k_1})^{c(\boldsymbol{\mu}_2^1)},$$
$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{si } k_2 \neq 0, \\ 0, & \text{si } k_2 = 0; \end{cases}$$
- si $(V,q_V)$ est orthogonal,
$$\alpha = \zeta^{c(\boldsymbol{\mu}_n^1)},$$

où $n = 2$ si $k_1 \geqslant k_2$, $n = 1$ si $k_1 < k_2$,
$$\beta = \begin{cases} 2, & \text{si } k_1 = k_2 > 2e(d), \\ 1, & \text{si } k_1 \neq k_2 \text{ et } \inf(k_1,k_2) > 2e(d), \\ 0, & \text{si } \inf(k_1,k_2) = 2e(d). \end{cases}$$
On pose
$$\boldsymbol{\mu}^0 = \boldsymbol{\mu}_1^0 \cup \boldsymbol{\mu}_2^0, \quad \boldsymbol{\mu}^1 = \boldsymbol{\mu}_1^1 \cup \boldsymbol{\mu}_2^1.$$
On définit une application
$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0(\xi_1,\xi_2) &\longrightarrow \Xi(V) \\ \iota_0 &\longmapsto \xi(\iota_0) \end{aligned}$$
par les formules suivantes. Supposons d'abord que $\xi_1$ et $\xi_2$ ne sont pas tous deux exceptionnels. Pour $\iota_0 = (k',k'',\zeta) \in \mathcal{I}_0(\xi_1,\xi_2)$, on pose :
$$\xi(\iota_0) = (k',k'',\boldsymbol{\mu}^0,\boldsymbol{\mu}^1).$$
Supposons $\xi_1$ et $\xi_2$ tous deux exceptionnels. Alors $\boldsymbol{\mu}^1 = \varnothing$. Pour $\iota_0 = (k',k'',\zeta) \in \mathcal{I}_0(\xi_1,\xi_2)$, on a $k' = k'' = 0$ et l'on pose
$$\xi(\iota_0) = (0,0,\boldsymbol{\mu}^0,\varnothing,\varepsilon_1\varepsilon_2).$$

***Remarque***. — Si $(V,q_V)$ est orthogonal pair et $n \in \{1,2\}$ est tel que $V_n = \{0\}$, on considère $\xi_n$ comme exceptionnel, avec $\varepsilon_n = 1$.

On fixe un élément $\kappa \in \{\pm 1\}^{c(\boldsymbol{\mu}^1)}$ tel que
$$c_i(\boldsymbol{\mu}^1,\kappa) = \begin{cases} c_i(\boldsymbol{\mu}_2^1), & \text{si } (V,q_V) \text{ est symplectique, ou si } (V,q_V) \text{ est orthogonal et } k_1 \geqslant k_2, \\ c_i(\boldsymbol{\mu}_1^1), & \text{si } (V,q_V) \text{ est orthogonal et } k_1 < k_2, \end{cases}$$
*cf.* IV.6. Pour $\iota_0 \in \mathcal{I}_0(\xi_1,\xi_2)$, on identifie $\kappa$ à un élément de $\mathcal{K}(\xi(\iota_0))$ que l'on note $\kappa(\iota_0)$.

On pose

$$\phi^{\mathcal{H}}[\xi_1,\xi_2] = \sum_{\iota_0\in\mathcal{I}_0(\xi_1,\xi_2)} c(\xi_1,\xi_2;\iota_0)\,\phi^{\mathcal{H}}_{\xi(\iota_0),\kappa(\iota_0)}.$$

C'est un élément de $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$.

***Proposition***. — *L'élément* $\phi^{\mathcal{H}}[\xi_1,\xi_2]$ *de* $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$ *est un transfert de l'élément* $\phi^{\mathcal{H}_1}_{\xi_1,1}\otimes \phi^{\mathcal{H}_2}_{\xi_2,1}$ *de* $\mathrm{res}_{\mathcal{H}^H}(\mathcal{D}^H_{\mathrm{ent}})$.

*Démonstration*. — Supposons $(V,q_V)$ symplectique et $\xi_2$ non exceptionnel. Pour $n\in\{1,2\}$, posons $\theta_n=\theta(\xi_n,0)$ et introduisons des objets relatifs à $\theta_n$ comme en IV.1 ou IV.2 :

- $\mathbf{\Gamma}_n=\prod_{j=1}^{k_n}\Gamma_{n,j}$ (on l'a noté $\Gamma$ en IV.1 et IV.2) ;
- $\sigma_n$ ;
- pour $\gamma_n\in\mathbf{\Gamma}_n$, $A(\gamma_n)$ ;
- pour $\gamma_n\in\mathbf{\Gamma}_n$ et $a_n\in A(\gamma_n)$, $X_{T_n}[a_n,1]$ si $n=1$ et $X^+_{T_n}[a_n,1], X^-_{T_n}[a_n,1]$ si $n=2$.

Posons

$$\mathbf{\Gamma}_0=\mathbf{\Gamma}_1\times\mathbf{\Gamma}_2.$$

Pour $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in\mathbf{\Gamma}_0$, on pose

$$\sigma_0(\gamma)=\sigma_1(\gamma_1)\sigma_2(\gamma_2),$$
$$A(\gamma)=A(\gamma_1)\times A(\gamma_2),$$

et, pour $a=(a_1,a_2)\in A(\gamma)$ et $\varepsilon=+$ ou $-$,

$$Y^\varepsilon[a]=(X_{T_1}[a_1,1],X^\varepsilon_{T_2}[a_2,1])\in h.$$

En choisissant convenablement les éléments $X_{T_1}$ et $X_{T_2}$ de IV.1 et IV.2, on peut supposer que $Y^\varepsilon[a]\in h_{G-\mathrm{reg}}$.

D'après la preuve du lemme IV.12, on a l'égalité :

$$\phi^{\mathcal{H}_1}_{\xi_1,1}\otimes\phi^{\mathcal{H}_2}_{\xi_2,1}=\mathrm{res}_{\mathcal{H}^H}\left[c_1\sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}_0}\sigma_0(\gamma)\int_{A(\gamma)}\Big(\phi^{H,\mathrm{st}}(Y^+[a],\cdot)+\phi^{H,\mathrm{st}}(Y^-[a],\cdot)\Big)\right]da,$$

où $c_1$ est le produit des constantes intervenant dans les définitions de IV.1 et IV.2, *i.e.*

$$c_1=2^{-k_1-k_2+2\beta-1}q^{\delta(\iota_{1,0})+\delta(\iota_{2,0})},$$

$\beta$ étant le nombre qui intervient dans la définition des constantes $c(\xi_1,\xi_2;\iota_0)$.

Posons

$$D_0=c_1\sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}_0}\sigma_0(\gamma)\int_{A(\gamma)}\Big(\phi^{G,H}(Y^+[a],\cdot)+\phi^{G,H}(Y^-[a],\cdot)\Big)\,da.$$

Alors :

(1) $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D_0)$ est un transfert à $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$ de $\phi^{\mathcal{H}_1}_{\xi_1,1}\otimes\phi^{\mathcal{H}_2}_{\xi_2,1}$.

Pour $n \in \{1,2\}$, fixons des données $(I_n, (a_{n,i})_{i\in I_n})$ comme en I.7, relatives à l'espace $V_{n,1}$ (*cf.* IV.1 ou IV.2), paramétrisant la classe de conjugaison stable de $X_{T_n}$. On suppose, ainsi qu'il est loisible, que $I_n$ est disjoint de $\mathbb{N}$ et que $I_1$ et $I_2$ sont disjoints. Pour $\gamma_n \in \mathbf{\Gamma}_n$ et $a_n = (a_{n,i})_{i=1,\dots,k_n} \in A(\gamma_n)$, les données

$$\Big(\{1,\dots,k_n\} \cup I_n,\ (a_{n,i})_{i\in\{1,\dots,k_n\}\cup I_n}\Big)$$

paramétrisent la classe de conjugaison stable de $X_{T_1}[a_1,1]$ si $n=1$, de $X^+_{T_2}[a_2,1]$ et $X^-_{T_2}[a_2,1]$ si $n=2$. Posons

$$\widetilde{J} = \Big\{(n,j);\, n\in\{1,2\}, j\in\{1,\dots,k_n\}\Big\},\quad \widetilde{I} = I_1\cup I_2\cup\widetilde{J}.$$

Pour $\gamma\in\mathbf{\Gamma}_0$ et $a=(a_1,a_2)\in A(\gamma)$, notons simplement $(a_i)_{i\in\widetilde{I}}$ la réunion en un sens évident des familles $(a_{n,i})_{i\in\{1,\dots,k_n\}\cup I_n}$ pour $n=1,2$. Alors les données $(\widetilde{I},(a_i)_{i\in\widetilde{I}})$ paramétrisent la classe de conjugaison stable dans $g$ correspondant à celle de $Y^+[a]$ comme à celle de $Y^-[a]$. On note cette classe $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}[a]$.

Pour $(n,j)\in\widetilde{J}$, posons

$$f(n,j) = \begin{cases} 2j, & \text{si } n=1,\\ 2j-1, & \text{si } n=2.\end{cases}$$

Posons $J=\{1,\dots,k_1+k_2\}$. Identifions $J$ à $\widetilde{J}$ par l'unique bijection telle que l'application composée

$$J \longrightarrow \widetilde{J} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$$

soit croissante. Supposons $k_1 \geqslant k_2$ pour simplifier la rédaction. Pour $i\in J$, posons $\Gamma_i = \Gamma_{n,j}$, où $(n,j)$ est l'image de $i$ dans $\widetilde{J}$. Posons

$$\mathbf{\Gamma} = \prod_{i\in J}\Gamma_i.$$

Alors $\mathbf{\Gamma}_0$ est le sous-ensemble des $\gamma=(\gamma_i)_{i\in J}\in\mathbf{\Gamma}$ tels que

$$\prod_{i=1}^{2k_2-1}\gamma_i \equiv \eta'(V_2)\,\nu^{c(\mu_2^1)} \bmod \mathfrak{o}_F^{\times 2}$$

(*cf.* IV.2). Pour $\gamma\in\mathbf{\Gamma}$, on construit un ensemble $A(\gamma)$ de la façon suivante. Pour $i\in J$, on fixe $a[\gamma_i]_i\in\overline{F}$ tel que

$$a[\gamma_i]_i^{2i} = \omega_F\gamma_i,\ \text{ si } i\leqslant 2k_2,$$
$$a[\gamma_i]_i^{2(2i-2k_2')} = \omega_F\gamma_i,\ \text{ si } i\geqslant 2k_2+1.$$

On construit alors $A(\gamma)$ à partir de ces éléments de la même façon qu'en IV.1. Si $\gamma\in\mathbf{\Gamma}_0$, cet ensemble $A(\gamma)$ est le même que celui que l'on a déjà introduit.

Posons $I=I_1\cup I_2\cup J$, $I^*=I_1^*\cup I_2^*\cup J$ et :

$$\mathcal{E} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^*}.$$

Soient $\gamma \in \mathbf{\Gamma}_0$, $a \in A(\gamma)$ et $e \in \mathcal{E}$. Modulo identification de $I$ et $\widetilde{I}$, on a défini ci-dessus la famille $(a_i)_{i\in I}$. Rappelons que pour $i \in I^*$, l'extension $F_i = F[a_i]$ est un corps qui contient une sous-extension $F_i^{\#}$ d'indice 2. On note $\tau_i$ l'élément non trivial du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F_i/F_i^{\#})$. On fixe $c(a,e)_i \in F_i^{\times}$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\tau_i(c(a,e)_i) = -c(a,e)_i$ ;
- $\mathrm{sgn}_{F_i/F_i^{\#}}(c(a,e)_i\, a_i) = (-1)^{e_i}$.

Les données :

$$(I, (a_i)_{i\in I}, (c(a,e)_i)_{i\in I^*})$$

paramétrisent une classe de conjugaison par $G$ contenue dans $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}[a]$. Fixons un élément $Z(a,e)$ de cette classe. Alors $(Z(a,e))_{e\in\mathcal{E}}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G$ contenue dans $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}[a]$. Pour $\varepsilon = +$ ou $-$, on a l'égalité :

$$\phi^{G,H}(Y^{\varepsilon}[a],\cdot) = \sum_{e\in\mathcal{E}} \Delta_{G,H}(Y^{\varepsilon}[a], Z(a,e))\,\phi(Z(a,e),\cdot)\,. \tag{2}$$

On va calculer ces facteurs de transfert. Remarquons que le polynôme caractéristique de $Z(a,e)$ est indépendant de $e \in \mathcal{E}$. Notons-le $P(X)$. Pour tout $\ell \in I$, notons $\Sigma(F_\ell)$ l'ensemble des homomorphismes non nuls de $F$-algèbres de $F_\ell$ dans $\overline{F}$ et posons

$$P_\ell(X) = \prod_{\sigma\in\Sigma(F_\ell)} (X - \sigma(a_\ell))\,.$$

Alors

$$P(X) = \prod_{\ell\in I} P_\ell(X)\,.$$

On note $P'$ et $P'_{\ell'}$ pour $\ell \in I$, les polynômes dérivés de $P$ et $P_\ell$. Pour $\ell \in I^*$, on fixe un élément $1_{F_\ell}$ de $\Sigma(F_\ell)$ grâce auquel on identifie $F_\ell$ à un sous-corps de $\overline{F}$ (si $\ell \in J$, $F_\ell$ est par construction un sous-corps de $\overline{F}$ et on choisit pour $1_{F_\ell}$ le plongement naturel). On note $v_{\overline{F}}$ le prolongement à $\overline{F}$ de la valuation $v_F$ de $F$. En choisissant convenablement les éléments $X_{T_1}$ et $X_{T_2}$ de IV.1 et IV.2, on peut supposer et on suppose que pour $\ell, \ell' \in I_1 \cup I_2$, $\sigma \in \Sigma(F_\ell)$, $\sigma' \in \Sigma(F_{\ell'})$ et $(\ell,\sigma) \neq (\ell',\sigma')$, on a $v_{\overline{F}}(\sigma(a_\ell) - \sigma'(a_{\ell'})) = 0$.

Soit $i \in I$. On vérifie aisément que $a_i P'_i(a_i) \in F_i^{\#}$ et $P_\ell(a_i) \in F_i^{\#}$ pour tout $\ell \in I - \{i\}$. *A fortiori* $a_i P'(a_i) \in F_i^{\#}$. On a d'abord :

$$\text{si } i \in I - J,\ \ a_i P'(a_i) \text{ est une unité de } F_i^{\#}. \tag{3}$$

En effet, par construction de $X_{T_1}$ et $X_{T_2}$, $v_{F_i}(a_i) = 0$. D'après l'hypothèse ci-dessus, on a $v_{\overline{F}}(a_i - \sigma(a_\ell)) = 0$ pour tous $\ell \in I$, $\sigma \in \Sigma(F_\ell)$ tels que $(\ell,\sigma) \neq (i, 1_{F_i})$. La conclusion s'ensuit.

Supposons maintenant $i \in J$. Soit $\ell \in I$. On va montrer :

$$(4)\quad \begin{cases} \bullet \ \text{si } \ell \in I - I^*, \ P_\ell(a_i) \text{ est une unité de } F_i^\# \text{ et} \\ \qquad\qquad \operatorname{sgn}_{F_i/F_i^\#}(P_\ell(a_i)) = \operatorname{sgn}(-1)^{[F_\ell:F]/2}; \\ \bullet \ \text{si } \ell \in I_1^* \cup I_2^*, \ P_\ell(a_i) \text{ est une unité de } F_i^\# \text{ et} \\ \qquad\qquad \operatorname{sgn}_{F_i/F_i^\#}(P_\ell(a_i)) = -\operatorname{sgn}(-1)^{[F_\ell:F]/2}; \\ \bullet \ \text{si } \ell \in J \text{ et } \ell < i, \ v_{F_i}(P_\ell(a_i)) = [F_\ell : F] \text{ et} \\ \qquad\qquad \operatorname{sgn}_{F_i/F_i^\#}(P_\ell(a_i)) = \operatorname{sgn}(-1)^{[F_\ell:F]/2}; \\ \bullet \ \text{si } \ell \in J \text{ et } \ell > i, \ v_{F_i}(P_\ell(a_i)) = [F_i : F] \text{ et} \\ \qquad\qquad \operatorname{sgn}_{F_i/F_i^\#}(P_\ell(a_i)) = \operatorname{sgn}\left((-1)^{[F_i:F]/2+1}\gamma_\ell\gamma_i\right); \\ \bullet \ v_{F_i}(a_i P_i'(a_i)) = [F_i : F] \text{ et} \\ \qquad\qquad \operatorname{sgn}_{F_i/F_i^\#}(a_i P_i'(a_i)) = \operatorname{sgn}\left((-1)^{[F_i:F]/2}[F_i : F]\right). \end{cases}$$

Supposons d'abord $\ell \in I - J$ ou $\ell \in J$ et $\ell > i$. Posons

$$N_{F_\ell/F}(a_\ell) = \prod_{\sigma \in \Sigma(F_\ell)} \sigma(a_\ell).$$

C'est un élément de $F^\times$. D'après l'hypothèse sur $\ell$, on a $v_{\overline{F}}(\sigma(a_\ell)) < v_{\overline{F}}(a_i)$ pour tout $\sigma \in \Sigma(F_\ell)$. On en déduit que $P_\ell(a_i)N_{F_\ell/F}(a_\ell)^{-1}$ est une unité de $F_i^\#$ congrue à 1 modulo l'idéal maximal $\mathfrak{p}_i^\#$ de l'anneau des entiers de $F_i^\#$. Donc

$$v_{F_i}(P_\ell(a_i)) = v_{F_i}(N_{F_\ell/F}(a_\ell)),$$

$$\operatorname{sgn}_{F_i/F_i^\#}(P_\ell(a_i)) = \operatorname{sgn}_{F_i/F_i^\#}(N_{F_\ell/F}(a_\ell)).$$

Pour $\sigma \in \Sigma(F_\ell)$, on a :

$$v_{\overline{F}}(\sigma(a_\ell)) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ell \in I - J, \\ [F_\ell : F]^{-1}, & \text{si } \ell \in J. \end{cases}$$

On en déduit de ces formules la valeur de $v_{F_i}(P_\ell(a_i))$.

Supposons $\ell \in I - J$. On a $\tau_\ell(a_\ell) = -a_\ell$ (*cf.* I.7), d'où

$$N_{F_\ell/F}(a_\ell) = (-1)^{[F_\ell:F]/2} N_{F_\ell^\#/F}(a_\ell^2)$$

où $N_{F_\ell^\#/F}$ désigne bien sûr la norme de l'extension $F_\ell^\#/F$. On a :

$$a_\ell^2 \in \mathfrak{o}_{F_\ell^\#}^{\times 2}, \ \text{si } \ell \in I - I^*,$$
$$a_\ell^2 \in \mathfrak{o}_{F_\ell^\#}^{\times} - \mathfrak{o}_{F_\ell^\#}^{\times 2}, \ \text{si } \ell \in I_1^* \cup I_2^*.$$

Puisque $F_\ell^{\#}/F$ est non ramifiée, l'application $N_{F_\ell^{\#}/F}$ définit une bijection de $\mathfrak{o}_{F_\ell^{\#}}^{\times}/\mathfrak{o}_{F_\ell^{\#}}^{\times 2}$ sur $\mathfrak{o}_F^{\times}/\mathfrak{o}_F^{\times 2}$. On en déduit :

$$N_{F_\ell^{\#}/F}(a_\ell^2) \in \mathfrak{o}_F^{\times 2}, \text{ si } \ell \in I - I^*,$$
$$N_{F_\ell^{\#}/F}(a_\ell^2) \in \mathfrak{o}_F^{\times} - \mathfrak{o}_F^{\times 2}, \text{ si } \ell \in I_1^* \cup I_2^*.$$

Puisque $F_i/F$ est totalement ramifiée, la restriction de $\mathrm{sgn}_{F_i/F_i^{\#}}$ à $\mathfrak{o}_F^{\times}$ est le caractère sgn de ce groupe. On déduit des formules ci-dessus le calcul de $\mathrm{sgn}_{F_i/F_i^{\#}}(P_\ell(a_i))$.

Supposons $\ell \in J$ et $\ell > i$. Remarquons que $(-1)^{[F_i:F]/2}\omega_F^{-1}\gamma_i$ est une norme de l'extension $F_i/F_i^{\#}$ : c'est la norme de $\omega_F^{-1}a[\gamma_i]_i^{[F_i:F]/2}$. On a donc

$$\mathrm{sgn}_{F_i/F_i^{\#}}(P_\ell(a_i)) = \mathrm{sgn}_{F_i/F_i^{\#}}\left((-1)^{[F_i:F]/2}\omega_F^{-1}\gamma_i N_{F_\ell/F}(a_\ell)\right).$$

Par construction de $A(\gamma)$, on a

$$N_{F_\ell/F}(a_\ell) \in -\omega_F\gamma_\ell(1+\mathfrak{p}_F).$$

On en déduit comme ci-dessus

$$\mathrm{sgn}_{F_i/F_i^{\#}}(P_\ell(a_i)) = \mathrm{sgn}\left((-1)^{[F_i:F]/2+1}\gamma_\ell\gamma_i\right).$$

Soit maintenant $\ell \in J$, $\ell < i$. Alors $v_{\overline{F}}(\sigma(a_\ell)) > v_{\overline{F}}(a_i)$ pour tout $\sigma \in \Sigma(F_\ell)$. Donc $P_\ell(a_i)a_i^{-[F_\ell:F]}$ est une unité de $F_i^{\#}$ congrue à 1 modulo $\mathfrak{p}_i^{\#}$. On obtient :

$$v_{F_i}(P_\ell(a_i)) = v_{F_i}(a_i^{[F_\ell:F]}) = [F_\ell : F],$$
$$\mathrm{sgn}_{F_i/F_i^{\#}}(P_\ell(a_i)) = \mathrm{sgn}_{F_i/F_i^{\#}}(a_i^{[F_\ell:F]}).$$

Mais

$$a_i^{[F_\ell:F]} = (-1)^{[F_\ell:F]/2}(a_i\tau_i(a_i))^{[F_\ell:F]/2}$$

et le dernier terme est une norme de l'extension $F_i/F_i^{\#}$. D'où le résultat cherché.

Enfin, posons pour simplifier $\widetilde{a}_i = a[\gamma_i]_i$ et notons $\widetilde{P}_i$ l'analogue de $P_i$ pour $\widetilde{a}_i$. Parce que $F_i/F$ est modérément ramifiée et par construction de $A(\gamma)$, on a :

- $v_{\overline{F}}(\widetilde{a}_i - \sigma(\widetilde{a}_i)) = v_{\overline{F}}(\widetilde{a}_i)$
- $v_{\overline{F}}(a_i - \sigma(a_i) - \widetilde{a}_i + \sigma(\widetilde{a}_i)) > v_{\overline{F}}(\widetilde{a}_i)$,

pour tout $\sigma \in \Sigma(F_i)$, $\sigma \neq 1_{F_i}$. De plus $v_{\overline{F}}(a_i - \widetilde{a}_i) > v_{\overline{F}}(a_i)$. On en déduit :

$$v_{F_i}(a_iP_i'(a_i)) = v_{F_i}(\widetilde{a}_i^{[F_i:F]}) = [F_i : F],$$
$$\mathrm{sgn}_{F_i/F_i^{\#}}(a_iP_i'(a_i)) = \mathrm{sgn}_{F_i/F_i^{\#}}(\widetilde{a}_i\widetilde{P}_i'(\widetilde{a}_i)).$$

Par définition, on a :

$$\widetilde{P}_i(X) = X^{[F_i:F]} - \omega_F\gamma_i.$$

On en déduit

$$\widetilde{a}_i\widetilde{P}_i'(\widetilde{a}_i) = [F_i : F]\widetilde{a}_i^{[F_i:F]}.$$

Comme ci-dessus, on a l'égalité :

$$\widetilde{a}_i^{[F_i:F]} = (-1)^{[F_i:F]/2}(\widetilde{a}_i\tau_i(\widetilde{a}_i))^{[F_i:F]/2}.$$

On obtient :

$$\operatorname{sgn}_{F_i/F_i^\#}(\widetilde{a}_i \widetilde{P}_i'(\widetilde{a}_i)) = \operatorname{sgn}\left((-1)^{[F_i:F]/2}[F_i : F]\right),$$

ce qui achève de démontrer (4).

Posons :

$$\sigma_3(\gamma) = \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^{2k_2-1} \operatorname{sgn}(-\gamma_i)^{k_1+(i+1)/2}\right)\left(\prod_{\substack{i=2 \\ i \text{ pair}}}^{2k_2} \operatorname{sgn}(\gamma_i)^{i/2}\right),$$

$$\delta_0 = -\Big[(k_1+k_2)(k_1+k_2+1)(2k_1+2k_2+1)+(k_1-k_2)(k_1-k_2+1)(2k_1-2k_2+1)\Big]\Big/6.$$

Soient $e \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon = \pm$. Posons :

$$\kappa(e) = \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^{2k_2-1} (-1)^{e_i}\right)\left(\prod_{i \in I_2^*} (-1)^{e_i}\right).$$

Démontrons l'égalité :

$$\Delta_{G,H}(Y^\varepsilon[a], Z(a,e)) = \sigma_3(\gamma)\,\kappa(e)\,q^{(\delta_0-\delta(\iota_{1,0})-\delta(\iota_{2,0}))/2}. \tag{5}$$

On applique la proposition X.8. Prenons garde aux différences de notations : l'ensemble noté $I_2^*$ en X.8 est l'ensemble des éléments de $I^*$ qui « proviennent » de $(V_2, q_{V_2})$. C'est la réunion du $I_2^*$ ci-dessus et de l'ensemble des $i \in \{1, \ldots, 2k_2 - 1\}$ impairs. En posant, pour tout $i$ dans cette réunion,

$$C_i = \eta[F_i : F]\,c(a,e)_i^{-1}\,P'(a_i),$$

on a donc

$$\Delta_{G,H}(Y^\varepsilon[a], Z(a,e)) = D_G(Z(a,e))\,D_H(Y^\varepsilon[a])^{-1} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^{2k_2-1} \operatorname{sgn}_{F_i/F_i^\#}(C_i)\right)\left(\prod_{i \in I_2^*} \operatorname{sgn}_{F_i/F_i^\#}(C_i)\right).$$

Pour $i \in I_2^*$, il résulte de (3), de la non ramification de l'extension $F_i/F$ et de la définition de $c(a,e)_i$ que

$$\operatorname{sgn}_{F_i/F_i^\#}(C_i) = (-1)^{e_i}.$$

Pour $i \in \{1, \ldots, 2k_2 - 1\}$, $i$ impair, il résulte de (4) et de la définition de $c(a,e)_i$ que

$$\operatorname{sgn}_{F_i/F_i^\#}(C_i) = (-1)^{e_i + c(\boldsymbol{\mu}^1)} \operatorname{sgn}\left((-1)^{d/2}\eta\right) \operatorname{sgn}\left((-1)^{1+[F_i:F]/2}\gamma_i\right)^{k_1+k_2-i} \prod_{\ell=i+1}^{k_1+k_2} \operatorname{sgn}\left((-1)^{[F_\ell:F]/2}\gamma_\ell\right).$$

On vérifie que le produit sur $i$ de tous ces termes est égal à $\sigma_3(\gamma)\,\kappa(e)$.

En notant $T(a,e)$ le centralisateur de $Z(a,e)$ dans $G$, on a décrit au cours de la démonstration du lemme X.7 l'ensemble des racines de $T(a,e)$ dans $g$. On en déduit l'égalité

$$D_G(Z(a,e)) = \Big|\prod_{i\in I} N_{F_i/F}(a_i P'(a_i))\Big|_F^{1/4}.$$

Grâce à (3), pour $i \in I - J$,

$$|N_{F_i/F}(a_i P'(a_i))|_F = 1.$$

Grâce à (4), pour $i \in J$,

$$|N_{F_i/F}(a_i P'(a_i))|_F = q^{N_i},$$

où

$$N_i = (i-1-k_1-k_2)[F_i : F] - \sum_{\ell=1}^{i-1}[F_\ell : F].$$

On vérifie alors l'égalité

$$D_G(Z(a,e)) = q^{\delta_0/2}.$$

*Idem*

$$D_H(Y^\varepsilon[a]) = q^{(\delta(\iota_{1,0})+\delta(\iota_{2,0}))/2}.$$

On obtient l'égalité (5).

Pour tout $\gamma \in \boldsymbol{\Gamma}$, posons

$$\sigma(\gamma) = \prod_{i=2k_2+1}^{k_1+k_2} \operatorname{sgn}(\gamma_i)^i.$$

Pour $\gamma \in \boldsymbol{\Gamma}_0$, on vérifie les égalités

$$\sigma_0(\gamma)\sigma_3(\gamma) = \sigma(\gamma) \prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^{2k_2-1} \operatorname{sgn}(-\gamma_i)^{k_1} = (-1)^{k_1 c(\mu_2^1)} \operatorname{sgn}(\eta'(V_2))^{k_1}.$$

Posons :

$$c_2 = (-1)^{k_1 c(\mu_2^1)} \operatorname{sgn}(\eta'(V_2))^{k_1}\, 2^{-k_1-k_2+2\beta}\, q^{(\delta_0+\delta(\iota_{1,0})+\delta(\iota_{2,0}))/2}.$$

Grâce à (2) et (5), on obtient l'égalité

$$(6) \qquad D_0 = c_2 \sum_{\gamma\in\boldsymbol{\Gamma}_0} \sigma(\gamma) \int_{A(\gamma)} \sum_{e\in\mathcal{E}} \kappa(e)\phi(Z(a,e),\cdot)\,da.$$

Soit $\iota_0 \in \mathcal{I}_0(\xi_1,\xi_2)$. Calculons $\phi^{\mathcal{H}}_{\xi(\iota_0),\kappa(\iota_0)}$. Posons

$$\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times 2})^J, \quad \mathcal{E}(\xi(\iota_0)) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{c(\mu^1)}.$$

Pour $e_0 \in \mathcal{E}(\xi(\iota_0))$, soit $X_T^{e_0,\iota_0}$ un élément associé comme en III.2 à $\theta(\xi(\iota_0),e_0)$. Utilisons les constructions de IV.1 pour $\theta(\xi(\iota_0),e_0)$. L'ensemble $J$ de IV.1 est le même que celui introduit ci-dessus. La fonction sur $\widetilde{\mathcal{E}}$ notée $\kappa_0$ en IV.1 est indépendante de $\iota_0$ et de $e$. Notons la $\widetilde{\kappa}$. On peut choisir pour l'ensemble $\Gamma$ de IV.1 l'ensemble $\boldsymbol{\Gamma}$ ci-dessus et alors la fonction $\sigma$ de IV.1 coïncide avec la fonction introduite ci-dessus. Posons, avec les notations de IV.1 :

$$D(\iota_0) = 2^{-k_1-k_2}q^{\delta(\iota_0)}\sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}}\sigma(\gamma)\int_{A(\gamma)}\sum_{\widetilde{e}\in\widetilde{\mathcal{E}}}\sum_{e_0\in\mathcal{E}(\xi(\iota_0))}\widetilde{\kappa}(\widetilde{e})\kappa(\iota_0)(e_0)\phi(X_T^{e_0,\iota_0}[a,\widetilde{e}],\cdot)\,da.$$

Le même raisonnement que dans la preuve du lemme IV.12 conduit à l'égalité :

$$(7)\qquad \phi^{\mathcal{H}}_{\xi(\iota_0),\kappa(\iota_0)} = \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D(\iota_0)).$$

Identifions comme toujours $\{1,\dots,c(\boldsymbol{\mu}^1)\}$ à $I_1^*\cup I_2^*$ de sorte que pour tout $i\in\{1,\dots,c(\boldsymbol{\mu}^1)\}$, on ait l'égalité $\mu_i^1=[F_i:F]/2$. Alors $\mathcal{E}(\xi(\iota_0))=(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I_1^*\cup I_2^*}$. Identifions de façon naturelle $\widetilde{\mathcal{E}}$ à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$. Alors

$$\widetilde{\mathcal{E}}\times\mathcal{E}(\xi(\iota_0))=\mathcal{E}.$$

Le caractère $\widetilde{\kappa}$ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ est la restriction de $\kappa$ à $\widetilde{\mathcal{E}}$. Grâce au lemme IV.9, on peut supposer que $\kappa(\iota_0)$ est la restriction de $\kappa$ à $\mathcal{E}(\xi(\iota_0))$. Pour $\gamma\in\mathbf{\Gamma}$, définissons $\widetilde{e}(\gamma,\iota_0)\in\widetilde{\mathcal{E}}=(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$ par :

- si $\iota_0=(k_1+k_2,k_1-k_2,1)$ ou si $k_2=0$ et $\iota_0=(k_1,k_1,-1)$,

$$(-1)^{\widetilde{e}(\gamma,\iota_0)_i}=\mathrm{sgn}(-1)$$

pour tout $i\in J$ ;

- si $k_2>0$ et $\iota_0=(k_1-k_2,k_1+k_2-1)$,

$$(-1)^{\widetilde{e}(\gamma,\iota_0)_i}=\begin{cases}\mathrm{sgn}((-1)^{i+1}\gamma_i) & \text{pour tout } i\in\{1,\dots,2k_2\},\\ \mathrm{sgn}(-\gamma_i) & \text{pour tout } i\in\{2k_2+1,\dots,k_1+k_2\}.\end{cases}$$

Pour tous $\gamma\in\mathbf{\Gamma}$, $a\in A(\gamma)$ et $e\in\mathcal{E}$, écrivons $e=(\widetilde{e},e_0)$ avec $\widetilde{e}\in\widetilde{\mathcal{E}}$ et $e_0\in\mathcal{E}(\xi(\iota_0))$. Il résulte des définitions de IV.1 que la classe de conjugaison par $G$ de $X_T^{e_0,\iota_0}[a,\widetilde{e}\widetilde{e}(\gamma,\iota_0)]$ ne dépend pas de $\iota_0$. En utilisant le fait que pour tout $i\in J$, $-a_i^2$ est une norme de l'extension $F_i/F_i^\#$, on voit que si $\gamma\in\mathbf{\Gamma}_0$, cette classe de conjugaison contient l'élément $Z(a,e)$ précédemment introduit. En tout cas on fixe un élément de cette classe, qu'il est loisible de noter $Z(a,e)$. On obtient alors l'égalité

$$(8)\qquad D(\iota_0)=2^{-k_1-k_2}q^{\delta(\iota_0)}\sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}}\sigma(\gamma)\widetilde{\kappa}(\widetilde{e}(\gamma,\iota_0))\int_{A(\gamma)}\sum_{e\in\mathcal{E}}\kappa(e)\phi(Z(a,e),\cdot)\,da.$$

Posons

$$D=\sum_{\iota_0\in\mathcal{I}_0(\xi_1,\xi_2)}c(\xi_1,\xi_2;\iota_0)D(\iota_0).$$

D'après (7) et les définitions, on a l'égalité

$$(9)\qquad \phi^{\mathcal{H}}[\xi_1,\xi_2]=\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D).$$

On vérifie l'égalité $\delta(\iota_0) = \delta_0$ pour tout $\iota_0 \in \mathcal{I}_0(\xi_1, \xi_2)$. Soit $\gamma \in \boldsymbol{\Gamma}$, en explicitant les définitions, on a l'égalité :

$$2^{-k_1-k_2} \sum_{\iota_0 \in \mathcal{I}_0(\xi_1,\xi_2)} q^{\delta(\iota_0)} c(\xi_1, \xi_2; \iota_0) \widetilde{\kappa}(\widetilde{e}(\gamma, \iota_0))$$
$$= \frac{1}{2} c_2 \Big[ 1 + (-1)^{c(\boldsymbol{\mu}_2^1)} \operatorname{sgn}\Big( \eta'(V_2) \prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^{2k_2-1} \gamma_i \Big) \Big].$$

Si $k_2 = 0$, on a $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}_0$ et $(-1)^{c(\boldsymbol{\mu}_2^1)} \operatorname{sgn}(\eta'(V_2)) = 1$, *cf.* IV.6. Si $k_2 \neq 0$, le terme entre crochets ci-dessus vaut 2 si $\gamma \in \boldsymbol{\Gamma}_0$, 0 si $\gamma \notin \boldsymbol{\Gamma}_0$. En tout cas le membre de droite de l'égalité ci-dessus vaut $c_2$ si $\gamma \in \boldsymbol{\Gamma}_0$, 0, si $\gamma \notin \boldsymbol{\Gamma}_0$. Grâce à (6) et (8), on en déduit l'égalité $D = D_0$. D'après (1) et (9), $\phi^{\mathcal{H}}[\xi_1, \xi_2]$ est donc un transfert à $\operatorname{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\text{ent}})$ de $\phi^{\mathcal{H}_1}_{\xi_1,1} \otimes \phi^{\mathcal{H}_2}_{\xi_2,1}$.

On a supposé $k_1 \geqslant k_2$ et $\xi_2$ non exceptionnel. Si $k_1 < k_2$, un calcul analogue vaut. Si $\xi_2$ est exceptionnel, $\phi^{\mathcal{H}_2}_{\xi_2,1}$ ne s'exprime plus à l'aide des définitions de IV.2 (où on avait supposé les données non exceptionnelles). Mais on a simplement

$$\phi^{\mathcal{H}_2}_{\xi_2,1} = \operatorname{res}_{\mathcal{H}_2}\left(\phi^{G_2}(X_{T_2}, \cdot)\right)$$

où $\boldsymbol{T}_2$ est un sous-tore maximal de $\boldsymbol{G}_2$ qui se déduit de $\xi_2$. La suite du calcul est analogue à ci-dessus.

Supposons maintenant $(V, q_V)$ orthogonal impair et $k_1 \geqslant k_2$. Posons

$$J = \{2, \dots, k_1 + k_2 - 1\}$$

et notons $\widehat{J}$ l'ensemble des éléments impairs de $\{3, \dots, 2k_2 - 1\}$. Pour tout $i \in J$, fixons un ensemble de représentants $\Gamma_i$ de $\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^{\times 2}$ dans $\mathfrak{o}_F^\times$. On suppose que pour tous $i \in \widehat{J}$, $\gamma_{i-1} \in \Gamma_{i-1}$ et $\gamma_i \in \Gamma_i$, on a $\gamma_{i-1} - \gamma_i \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}_F$. Posons :

$$\boldsymbol{\Gamma}_0 = \prod_{i \in J} \Gamma_i .$$

On définit une fonction $\sigma_0 : \boldsymbol{\Gamma}_0 \to \{\pm 1\}$ par :

$$\sigma_0(\gamma) = \Big( \prod_{i=2}^{2k_2-1} \operatorname{sgn}(-\gamma_i)^{[i/2]} \Big) \Big( \prod_{i=2k_2}^{k_1+k_2-1} \operatorname{sgn}(-\gamma_i)^{i-k_2} \Big)$$

pour tout $\gamma \in \boldsymbol{\Gamma}_0$. Pour tout tel $\gamma$ et pour $i \in J$, fixons $a[\gamma_i]_i \in \overline{F}$ tel que

$$a[\gamma_i]_i^{2i-2} = \omega_F \gamma_i, \ \text{ si } i \leqslant 2k_2 - 1 \text{ et } i \text{ est impair},$$
$$a[\gamma_i]_i^{2i} = \omega_F \gamma_i, \ \text{ si } i \leqslant 2k_2 - 1 \text{ et } i \text{ est pair},$$
$$a[\gamma_i]_i^{4(i-k_2)} = \omega_F \gamma_i \ \text{ si } i \geqslant 2k_2.$$

On déduit de ces éléments un ensemble $A(\gamma)$ comme en IV.1. À tout $a \in A(\gamma)$, on peut associer un élément $Y[a]$ de $\mathfrak{h}_{G-\text{reg}}$.

Pour $n \in \{1,2\}$, posons

$$\alpha_n = \begin{cases} \operatorname{sgn}(-1)^{(k'_n-1)/2}, & \text{si } k'_n > k''_n, \\ (-1)^{c(\boldsymbol{\mu}_n^1)} \operatorname{sgn}((-1)^{k''_n/2-1}\eta'(V_n)), & \text{si } k''_n > k'_n\,; \end{cases}$$

$$\beta_n = \begin{cases} 2-k_n\,, & \text{si } k_n \neq 1, \\ 0, & \text{si } k_n = 1. \end{cases}$$

Posons

$$c_1 = \alpha_1\,\alpha_2\,2^{\beta_1+\beta_2}\,q^{\delta(\iota_{1,0})+\delta(\iota_{2,0})}$$

et

$$D_0 = c_1 \sum_{\gamma\in\boldsymbol{\Gamma}_0} \sigma_0(\gamma) \int_{A(\gamma)} \phi^{G,H}(Y[a],\cdot)\,da. \tag{10}$$

Avec ces définitions, on a encore la relation (1).

Introduisons des ensembles $I_1$ et $I_2$ comme dans le cas symplectique et des données $(a_i)_{i\in I_1\cup I_2}$. On pose encore

$$I = I_1 \cup I_2 \cup J\,, \quad I^* = I_1^* \cup I_2^* \cup J$$

et cette fois :

$$\mathcal{E} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^{I^*}$$

(on rappelle que c'est l'ensemble des $e \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I^*}$ tels que $\sum_{i\in I^*} e_i = 0$). Pour tous $\gamma \in \boldsymbol{\Gamma}_0$, $a \in A(\gamma)$, $e \in \mathcal{E}$ et $i \in I^*$, on fixe $c(a,e)_i \in F_i^{\#\times}$ (avec les notations du cas symplectique) de sorte que :

- si $e'$ est un autre élément de $\mathcal{E}$, $\operatorname{sgn}_{F_i/F_i^\#}(c(a,e)_i\,c(a,e')_i^{-1}) = (-1)^{e_i-e'_i}$ ;
- les données $(I,(a_i)_{i\in I},(c(a,e)_i)_{i\in I^*})$ paramétrisent une classe de conjugaison par $G$ dans $g$.

De tels éléments existent car la classe de conjugaison stable de $Y[a]$ se transfère à $g$. On fixe un élément $Z(a,e)$ dans la classe ci-dessus. On pose simplement $c(a) = c(a,0)$. On peut supposer, et on suppose que $c(a)_i = 1$ si $i \in I_1^* \cup I_2^*$ : c'est évident si $J \neq \varnothing$ ; si $J = \varnothing$, cela résulte du fait que $V$ possède un réseau autodual.

Pour $\gamma \in \boldsymbol{\Gamma}_0$ et $a \in A(\gamma)$, on a l'égalité

$$\phi^{G,H}(Y[a],\cdot) = \sum_{e\in\mathcal{E}} \Delta_{G,H}(Y[a],Z(a,e))\,\phi(Z(a,e),\cdot)\,. \tag{11}$$

Soit $e \in \mathcal{E}$. On peut supposer que l'ensemble des éléments de $I^*$ qui « proviennent » de $(V_2,q_{V_2})$ est la réunion de $I_2^*$ et de l'ensemble des éléments pairs de $\{2,\dots,2k_2-1\}$. Pour $i$ dans cette réunion, posons

$$C_i = \eta'(V)[F_i : F]\,c(a,e)_i^{-1}\,P'(a_i)\,.$$

D'après la proposition X.8, on a l'égalité :

$$\Delta_{G,H}(Y[a], Z(a,e)) = D_G(Z(a,e))\, D_H(Y[a])^{-1} \Big(\prod_{\substack{i=2 \\ i \text{ pair}}}^{2k_2-2} \operatorname{sgn}_{F_i/F_i^{\#}}(C_i)\Big)\Big(\prod_{i\in I_2^*} \operatorname{sgn}_{F_i/F_i^{\#}}(C_i)\Big).$$

Le calcul de ces termes s'effectue comme dans le cas symplectique, aux deux différences près suivantes. D'abord, pour tout $i \in I$, on a l'égalité :

$$P'(a_i) = a_i P_i'(a_i) \prod_{\ell\in I-\{i\}} P_\ell(a_i),$$

le terme $a_i$ provenant du fait que $Z(a,e)$ possède la valeur propre « supplémentaire » 0. D'autre part, soit $i \in \{2,\dots,2k_2-2\}$, $i$ pair. Les termes $a_i P_i'(a_i)$ et $P_\ell(a_i)$ pour $\ell \in I - \{i, i+1\}$ vérifient les relations (4). Le calcul de $P_{i+1}(a_i)$ est différent car $v_{\overline{F}}(a_i) = v_{\overline{F}}(a_i{+}1)$. Posons $\widetilde{a}_i = a[\gamma_i]_i$, $\widetilde{a}_{i+1} = a[\gamma_{i+1}]_{i+1}$ et notons $\widetilde{P}_{i+1}$ l'analogue de $P_{i+1}$ pour $\widetilde{a}_{i+1}$. Grâce à la définition de $A(\gamma)$ et au fait que $\gamma_i - \gamma_{i+1} \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}_F$, on montre que $P_{i+1}(a_i)\widetilde{P}_{i+1}(\widetilde{a}_i)^{-1}$ est une unité de $F_i^{\#}$ congrue à 1 modulo $\mathfrak{p}_i^{\#}$. Or

$$\widetilde{P}_{i+1}(X) = X^{2i} - \omega_F \gamma_{i+1},$$

d'où

$$\widetilde{P}_{i+1}(\widetilde{a}_i) = \omega_F(\gamma_i - \gamma_{i+1}).$$

On en déduit $v_{F_i}(P_{i+1}(a_i)) = [F_i : F]$. D'autre part

$$\omega_F \gamma_i = \widetilde{a}_i^{2i} = (-\widetilde{a}_i \tau(\widetilde{a}_i))^i = (\widetilde{a}_i \tau(\widetilde{a}_i))^i$$

puisque $i$ est pair. *I.e.* $\omega_F\gamma_i$ est une norme de l'extension $F_i/F_i^{\#}$. D'où :

$$\operatorname{sgn}_{F_i/F_i^{\#}}(P_{i+1}(a_i)) = \operatorname{sgn}(\gamma_i(\gamma_i - \gamma_{i+1})).$$

Ecrivons simplement le résultat du calcul. Posons

$$\sigma_3(\gamma, a) = \Big[\prod_{\substack{i=2 \\ i \text{ pair}}}^{2k_2-2} \operatorname{sgn}\Big((-1)^{k_1+k_2}\gamma_i^{k_1+k_2-2-i/2}\gamma_{i+1}^{i/2}(\gamma_i - \gamma_{i+1})\Big)\Big] \Big[\prod_{\substack{i=2 \\ i \text{ pair}}}^{2k_2-2} \operatorname{sgn}_{F_i/F_i^{\#}}(c(a)_i)\Big]\Big[\prod_{i=2k_2}^{k_1+k_2-1} \operatorname{sgn}(\gamma_i)^{k_2-1}\Big],$$

$$\delta_0 = -\Big[(k_1+k_2-1)(k_1+k_2-2)(k_1+k_2) + (k_1-k_2)(k_1-k_2-1)(k_1-k_2+1)\Big]\Big/3,$$

$$\kappa(e) = \Big(\prod_{\substack{i=2 \\ i \text{ pair}}}^{2k_2-2} (-1)^{e_i}\Big)\Big(\prod_{i\in I_2^*}(-1)^{e_i}\Big),$$

$$c_2 = \Big[(-1)^{c(\boldsymbol{\mu}^1)}\operatorname{sgn}(\eta'(V))\Big]^{k_2-1}.$$

Alors

(12) $$\Delta_{G,H}(Y[a], Z(a,e)) = c_2\sigma_3(\gamma, a)\kappa(e)\, q^{(\delta_0-\delta(\iota_{1,0})-\delta(\iota_{2,0}))/2}.$$

Pour $\gamma \in \mathbf{\Gamma}_0$ et $a \in A(\gamma)$, posons

$$\sigma_4(\gamma, a) = \prod_{\substack{i=2\\ i \text{ pair}}}^{2k_2-2} \mathrm{sgn}_{F_i/F_i^{\#}}(c(a)_i\,\gamma_i^{k_1+k_2+1}),$$

$$\sigma_5(\gamma) = \Big[\prod_{i\in\widehat{J}} \mathrm{sgn}\left(\gamma_{i-1}\gamma_i(\gamma_{i-1}-\gamma_i)\right)\Big]\Big[\prod_{\substack{i=2k_2\\ i \text{ pair}}}^{k_1+k_2-1} \mathrm{sgn}(-\gamma_i)\Big].$$

On vérifie l'égalité :

$$\sigma_0(\gamma)\sigma_3(\gamma, a) = \sigma_5(\gamma)\sigma_4(\gamma, a).$$

Posons enfin

$$c_3 = \alpha_1\alpha_2 2^{\beta_1+\beta_2}(-1)^{c(\mu^1)(k_2-1)}\,\mathrm{sgn}(\eta'(V))^{k_2-1}\, q^{(\delta_0+\delta(\iota_{1,0})+\delta(\iota_{2,0}))/2}.$$

Grâce à (10), (11) et (12), on obtient l'égalité :

(13) $$D_0 = c_3 \sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}_0} \sigma_5(\gamma)\int_{A(\gamma)} \sum_{e\in\mathcal{E}} \kappa(e)\sigma_4(\gamma, a)\phi(Z(a,e),\cdot)\,da.$$

Remarquons que tous les termes ci-dessus dépendant de $\gamma$ ont été définis pour $\gamma \in \mathbf{\Gamma}_0$ mais leur définition s'étend à tout $\gamma \in (\mathfrak{o}_F^\times)^J$ tel que $\gamma_{i-1}-\gamma_i \not\equiv \bmod \mathfrak{p}_F$ pour tout $i \in \widehat{J}$. Pour tout tel $\gamma$, posons

$$f(\gamma) = \sigma_5(\gamma)\int_{A(\gamma)} \sum_{e\in\mathcal{E}} \kappa(e)\sigma_4(\gamma, a)\phi(Z(a,e),\cdot)\,da.$$

On va faire varier $\mathbf{\Gamma}_0$. Conservons fixés les ensembles $\Gamma_i$ pour $i \in \{2k_2, \dots, k_1+k_2-1\}$. Fixons un ensemble de représentants $\Theta$ de $\mathfrak{o}_F^\times/(1+\mathfrak{p}_F)$ dans $\mathfrak{o}_F^\times$. Notons $\mathcal{X}$ l'ensemble des ensembles

$$\mathbf{\Gamma}_0 = \prod_{i\in J} \Gamma_i$$

vérifiant

- pour tout $i \in \{2k_2, \dots, k_1+k_2-1\}$, $\Gamma_i$ est l'ensemble ci-dessus fixé ;
- pour tout $i \in \{2, \dots, 2k_2-1\}$, $\Gamma_i \subset \Theta$ ;
- pour tout $i \in \widehat{J}$, $\Gamma_{i-1}\cap\Gamma_i = \varnothing$.

Posons

$$D_1 = c_3|\mathcal{X}|^{-1}\sum_{\mathbf{\Gamma}_0\in\mathcal{X}}\ \sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}_0} f(\gamma).$$

Pour chaque $\mathbf{\Gamma}_0 \in \mathcal{X}$, on peut construire comme ci-dessus une distribution $D_0$ vérifiant la relation (1). D'après (13), $D_1$ est la moyenne de ces distributions. On en déduit :

(14) $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D_1)$ est un transfert à $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$ de $\phi_{\xi_1,1}^{\mathcal{H}_1}\otimes\phi_{\xi_2,1}^{\mathcal{H}_2}$.

Notons $\mathbf{\Gamma}$ l'ensemble des familles $(\gamma_i)_{i\in J}$ telles que :

• pour tout $i \in \{2k_2, \dots, k_1 + k_2 - 1\}$, $\gamma_i \in \Gamma_i$ ;
• pour tout $i \in \{2, \dots, 2k_2 - 1\}$, $\gamma_i \in \Theta$ ;
• pour tout $i \in \widehat{J}$, $\gamma_{i-1} \neq \gamma_i$.

On a $\mathbf{\Gamma}_0 \subset \mathbf{\Gamma}$ pour tout $\mathbf{\Gamma}_0 \in \mathcal{X}$, donc

$$D_1 = c_2 |\mathcal{X}|^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma} |\{\mathbf{\Gamma}_0 \in \mathcal{X} ; \gamma \in \mathbf{\Gamma}_0\}| f(\gamma).$$

Calculons $|\mathcal{X}|$. Choisir $\mathbf{\Gamma}_0 \in \mathcal{X}$ revient à choisir pour tout $i \in \widehat{J}$ :

• un sous-ensemble $\Gamma_i = \{\gamma_i^+, \gamma_i^-\} \subset \Theta$ tel que $\operatorname{sgn}(\gamma_i^+) = 1$, $\operatorname{sgn}(\gamma_i^-) = -1$ ; il y a $(q-1)^2/4$ choix possibles :

• un sous-ensemble $\Gamma_{i-1} = \{\gamma_{i-1}^+, \gamma_{i-1}^-\} \subset \Theta$ tel que $\operatorname{sgn}(\gamma_{i-1}^+) = 1$, $\operatorname{sgn}(\gamma_{i-1}^-) = -1$ et $\gamma_{i-1}^+ \neq \gamma_i^+$, $\gamma_{i-1}^- \neq \gamma_i^-$ ; il y a $(q-3)^2/4$ choix possibles.

Donc

$$|\mathcal{X}| = (2^{-2}(q-1)(q-3))^{2k_2-2}.$$

Soit $\gamma \in \Gamma$. Choisir $\mathbf{\Gamma}_0 \in \mathcal{X}$ tel que $\gamma \in \mathbf{\Gamma}_0$ revient à choisir pour tout $i \in \widehat{J}$ :

• un sous-ensemble $\Gamma_i = \{\gamma_i, \gamma_i'\} \subset \Theta$ tel que $\operatorname{sgn}(\gamma_i') = -\operatorname{sgn}(\gamma_i)$ et $\gamma_i' \neq \gamma_{i-1}$ ; il y a $(q-1)/2$ choix possibles si $\operatorname{sgn}(\gamma_i) = \operatorname{sgn}(\gamma_{i-1})$, $(q-3)/2$ si $\operatorname{sgn}(\gamma_i) = -\operatorname{sgn}(\gamma_{i-1})$ ; en tout cas, il y a $(q-2+\operatorname{sgn}(\gamma_{i-1}\gamma_i))/2$ choix possibles ;

• un sous-ensemble $\Gamma_{i-1} = \{\gamma_{i-1}, \gamma_{i-1}'\} \subset \Theta$ tel que $\operatorname{sgn}(\gamma_{i-1}') = -\operatorname{sgn}(\gamma_{i-1})$, $\gamma_{i-1}' \neq \gamma_i$ et $\gamma_{i-1}' \neq \gamma_i'$ ; il y a $(q-3)/2$ choix possibles.

Donc

$$|\{\mathbf{\Gamma}_0 \in \mathcal{X} ; \gamma \in \mathbf{\Gamma}_0\}| = 2^{2-2k_2}(q-3)^{k_2-1} \prod_{i \in \widehat{J}} (q-2+\operatorname{sgn}(\gamma_{i-1}\gamma_i)).$$

Pour $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$, posons

$$\sigma(\gamma) = \left[\prod_{i \in \widehat{J}} (q-2+\operatorname{sgn}(\gamma_{i-1}\gamma_i)) \operatorname{sgn}(\gamma_{i-1}\gamma_i(\gamma_{i-1}-\gamma_i))\right] \left[\prod_{j=2k_2}^{k_1+k_2-1} \operatorname{sgn}(-\gamma_j)\right]$$

et posons

$$c_4 = c_3 \, 2^{2k_2-2} (q-1)^{-2k_2+2} (q-3)^{-k_2+1}.$$

D'après les formules ci-dessus et la définition de $f$, on a l'égalité :

$$D_1 = c_4 \sum_{\gamma \in \mathbf{\Gamma}} \sigma(\gamma) \int_{A(\gamma)} \sum_{e \in \mathcal{E}} \kappa(e) \sigma_4(\gamma, a) \phi(Z(a, e), \cdot) \, da.$$

Notons $\mathcal{G}$ le sous-groupe des permutations de $J$ engendré par les symétries élémentaires permutant $i-1$ et $i$, pour $i \in \widehat{J}$. Ce groupe agit naturellement sur $\mathbf{\Gamma}$ et $\mathcal{E}$. Pour $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$, un élément $s$ de $\mathcal{G}$ définit une bijection naturelle de $A(\gamma)$ sur $A(s\gamma)$. Soit $s \in \mathcal{G}$. On peut remplacer $\gamma$ par $s^{-1}(\gamma)$ et $e$ par $s^{-1}(e)$ dans les deux sommations de l'égalité précédente. Par un changement de variables, on obtient l'égalité :

$$D_1 = c_4 \sum_{\gamma \in \mathbf{\Gamma}} \sigma(s(\gamma)) \int_{A(\gamma)} \sum_{e \in \mathcal{E}} \kappa(s(e)) \sigma_4(s(\gamma), s(a)) \phi(Z(s(a), s(e)), \cdot) \, da.$$

Soient $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$, $a \in A(\gamma)$ et $e \in \mathcal{E}$. En étendant $s$ en une permutation de $I$ fixant $I - J$, la classe de conjugaison de $Z(s(a), s(e))$ est paramétrisée par :

$$\Big(I, (a_{s^{-1}(i)})_{i\in I}, (c(s(a), s(e))_i)_{i\in I^*}\Big).$$

On a le droit de permuter les éléments de $I$, *cf.* I.7. La classe ci-dessus est donc aussi paramétrisée par :

$$\Big(I, (a_i)_{i\in I}, (c(s(a), s(e))_{s(i)})_{i\in I^*}\Big).$$

Il existe un unique élément $E(s, a, e) \in \mathcal{E}$ tel que cette classe soit celle de $Z(a, e + E(s, a, e))$. Cet élément est défini par les égalités

$$\operatorname{sgn}_{F_i/F_i^\#}\big(c(s(a), s(e))_{s(i)}\, c(a, e)_i^{-1}\big) = (-1)^{E(s,a,e)_i}$$

pour tout $i \in I^*$. En fait le membre de gauche est indépendant de $e$, donc $E(s, a, e)$ aussi ce qui autorise à noter simplement ce terme $E(s, a)$. On obtient alors :

$$D_1 = c_4 \sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}} \sigma(s(\gamma)) \int_{A(\gamma)} \sum_{e\in\mathcal{E}} \kappa(s(e - E(s, a)))\, \sigma_4(s(\gamma), s(a))\, \phi(Z(a, e), \cdot)\, da.$$

Notons $J(s)$ l'ensemble des $i \in J$ tels que $s(i) \neq i$. Pour $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$, $a \in A(\gamma)$ et $e \in \mathcal{E}$, posons

$$\varepsilon_{\gamma,a,e}(s) = \operatorname{sgn}(-1)^{|J(s)|/2} \prod_{i\in J(s)} (-1)^{e_i} \operatorname{sgn}_{F_i/F_i^\#}\big(c(a)_i \gamma_i^{k_1+k_2+1}\big).$$

On vérifie l'égalité :

$$\sigma(s(\gamma))\, \kappa(s(e - E(s, a)))\, \sigma_4(s(\gamma), s(a)) = \varepsilon_{\gamma,a,e}(s)\, \sigma(\gamma)\, \kappa(e)\, \sigma_4(\gamma, a).$$

D'où l'égalité :

$$D_1 = c_4 \sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}} \sigma(\gamma) \int_{A(\gamma)} \sum_{e\in\mathcal{E}} \varepsilon_{\gamma,a,e}(s)\, \kappa(e)\, \sigma_4(\gamma, a)\, \phi(Z(a, e), \cdot)\, da. \tag{15}$$

Pour $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$, $a \in A(\gamma)$ et $e \in \mathcal{E}$, la fonction $\varepsilon_{\gamma,a,e}$ est un caractère de $\mathcal{G}$. Notons $\mathcal{E}(\gamma, a)$ l'ensemble des $e \in \mathcal{E}$ tels que ce caractère soit trivial. On voit que $\mathcal{E}(\gamma, a)$ est l'ensemble des $e \in \mathcal{E}$ tels que pour tout $i \in \widehat{J}$, on ait l'égalité :

$$(-1)^{e_{i-1}-e_i} = \operatorname{sgn}_{F_{i-1}/F_{i-1}^\#}\big(c(a)_{i-1} \gamma_{i-1}^{k_1+k_2+1}\big) \operatorname{sgn}_{F_i/F_i^\#}\big( - c(a)_i \gamma_i^{k_1+k_2+1}\big).$$

En moyennant l'égalité (15) en $s \in \mathcal{G}$, on obtient l'égalité :

$$D_1 = c_4 \sum_{\gamma\in\mathbf{\Gamma}} \sigma(\gamma) \int_{A(\gamma)} \sum_{e\in\mathcal{E}(\gamma,a)} \kappa(e)\, \sigma_4(\gamma, a)\, \phi(Z(a, e), \cdot)\, da. \tag{16}$$

Soit $\iota_0 = (k', k'', \zeta)$ l'unique élément de $\mathcal{I}_0(\xi_1, \xi_2)$. Rappelons que $\zeta = (-1)^{k_1+k_2}$. Notons $\widetilde{\mathcal{E}}$ le sous-ensemble des $\widetilde{e} \in (\mathfrak{o}_F^\times/\mathfrak{o}_F^\times)^J$ tels que :

- pour tout $i \in \widehat{J}$, $\widetilde{e}_{i-1} = \widetilde{e}_i$ ;
- $\prod_{i=2k_2}^{k_1+k_2-1} \widetilde{e}_i = 1$.

Posons

$$\mathcal{E}(\xi(\iota_0)) = \begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{c(\boldsymbol{\mu}^1)}, & \text{si } k_1 \neq k_2, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^{c(\boldsymbol{\mu}^1)}, & \text{si } k_1 = k_2; \end{cases}$$

$$\alpha_3 = \begin{cases} \operatorname{sgn}(-1)^{(k_1+k_2)/2-1}, & \text{si } \zeta = 1, \\ (-1)^{c(\boldsymbol{\mu}^1)} \operatorname{sgn}\big((-1)^{(k_1+k_2-3)/2}\eta'(V)\big), & \text{si } \zeta = -1; \end{cases}$$

$$\beta_3 = \begin{cases} 1 - k_1 + k_2, & \text{si } k_1 \neq k_2, \\ 0, & \text{si } k_1 = k_2; \end{cases}$$

et

$$c_5 = \alpha_3\, 2^{\beta_3} (q-1)^{2-2k_2} (q-3)^{1-k_2} q^{\delta(\iota_0)}.$$

Avec des notations similaires à celles du cas symplectique, posons :

$$D(\iota_0) = c_5 \sum_{\gamma \in \boldsymbol{\Gamma}} \sigma(\gamma) \int_{A(\gamma)} \sum_{\widetilde{e} \in \widetilde{\mathcal{E}}} \sum_{e_0 \in \mathcal{E}(\xi(\iota_0))} \widetilde{\kappa}(\widetilde{e})\, \kappa(\iota_0)(e_0)\, \phi(X_T^{e_0,\iota_0}[a, \widetilde{e}], \cdot)\, da. \tag{17}$$

On a encore l'égalité (7).

Pour $\gamma \in \boldsymbol{\Gamma}$, définissons $\widetilde{c}(\gamma) \in (F^\times)^{I^*}$ par

$$\widetilde{c}(\gamma)_i = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in I_1^* \cup I_2^*, \\ (-1)^i \gamma_i, & \text{si } \zeta = 1 \text{ et } i \in J, \\ (-1)^{i+1}, & \text{si } \zeta = -1 \text{ et } i \in J - \{k_1 + k_2 - 1\}, \\ \eta' \nu^{c(\boldsymbol{\mu}^1)}, & \text{si } \zeta = -1 \text{ et } i = k_1 + k_2 - 1. \end{cases}$$

Identifions comme dans le cas symplectique $\{1, \ldots, c(\boldsymbol{\mu}^1)\}$ à $I_1^* \cup I_2^*$, $\mathcal{E}(\xi(\iota_0))$ à un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{I_1^* \cup I_2^*}$ et $\widetilde{\mathcal{E}}$ à un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$. Définissons une application :

$$\begin{aligned} \varphi : \widetilde{\mathcal{E}} \times \mathcal{E}(\xi(\iota_0)) &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (\widetilde{e}, e_0) &\longmapsto \varphi(\widetilde{e}, e_0) = e \end{aligned}$$

par :

- pour tout $i \in I_1^* \cup I_2^*$, $e_i = e_{0,i}$ ;
- pour tout $i \in J - \{k_1 + k_2 - 1\}$, $e_i = \widetilde{e}_i$ ;
- $e_{k_1+k_2-1} = \widetilde{e}_{k_1+k_2-1} + \sum_{j \in I_1^* \cup I_2^*} e_{0,j}$.

Grâce aux définitions de IV.2 on voit que pour $\gamma \in \boldsymbol{\Gamma}$, $a \in A(\gamma)$, $\widetilde{e} \in \widetilde{\mathcal{E}}$ et $e_0 \in \mathcal{E}(\xi(\iota_0))$, la classe de conjugaison par $G$ de $X_T^{e_0,\iota_0}[a, \widetilde{e}]$ est paramétrisée par des données

$$\big(I, (a_i)_{i \in I}, (c_i)_{i \in I^*}\big)$$

telles que, pour tout $i \in I^*$, on ait l'égalité

$$\operatorname{sgn}_{F_i/F_i^\#}(c_i\, \widetilde{c}(\gamma)_i^{-1}) = (-1)^{e_i},$$

où $e = \varphi(\widetilde{e}, e_0)$. On en déduit d'abord que l'on peut choisir pour famille $(c(a)_i)_{i\in I^*}$ la famille $(\widetilde{c}(\gamma)_i)_{i\in I^*}$. Ce choix étant fait, on voit que $X_T^{e_0,\iota_0}[a,\widetilde{e}]$ est conjugué à $Z(a,e)$ par un élément de $G$. On vérifie également que :

- quitte à remplacer $\kappa(\iota_0)$ par un caractère équivalent (*cf.* IV.9), on a l'égalité

$$\widetilde{\kappa}(\widetilde{e})\,\kappa(\iota_0)(e_0) = \kappa(e)\,;$$

- $\sigma_4(\gamma, a) = c_6$, où

$$c_6 = \begin{cases} 1, & \text{si } \zeta = 1, \\ \operatorname{sgn}(-1)^{k_2-1}, & \text{si } \zeta = -1\,; \end{cases}$$

- $\varphi$ est une bijection de $\widetilde{\mathcal{E}} \times \mathcal{E}(\xi(\iota_0))$ sur $\mathcal{E}(\gamma, a)$.

En utilisant ces propriétés et les égalités (16) et (17), on obtient l'égalité :

$$D_1 = c_4\,c_6\,c_5^{-1}\,D(\iota_0)\,.$$

On vérifie l'égalité

$$c_4\,c_6\,c_5^{-1} = c(\xi_1, \xi_2; \iota_0)\,.$$

Grâce à (7) et (14), on en déduit que $\phi^{\mathcal{H}}[\xi_1, \xi_2]$ est un transfert de $\phi^{\mathcal{H}_1}_{\xi_1,1} \times \phi^{\mathcal{H}_2}_{\xi_2,1}$.

Une démonstration analogue vaut si $k_1 < k_2$.

Le cas orthogonal pair se traite par les mêmes méthodes que celles utilisées dans les deux cas symplectique et orthogonal impair. On laisse le calcul au lecteur. □

**XII.4.** Supposons $(V, q_V)$ unitaire. Posons $\iota_0 = \iota_{1,0} = \iota_{2,0} = (0,0)$. Ce sont les uniques éléments de $\mathcal{I}_0(V)$, resp. $\mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V_1)$, $\mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V_2)$. Pour tout $n \in \{1,2\}$, soit $\rho_n \in \mathcal{R}(\iota_{n,0})$, *cf.* IX.6. On a défini en IX.8 l'élément de $\phi^{st,\mathcal{H}_n}_{\rho_n}$ de $\mathrm{res}_{\mathcal{H}_n}(\mathcal{D}_{n,\mathrm{ent}})$.

On a défini en IX.6 les groupes $W(\iota_0)$, $W(\iota_{1,0})$, $W(\iota_{2,0})$. Notons-les $W$, $W_1$, $W_2$. Posons $W^H = W_1 \times W_2$. Par définition d'un groupe endoscopique, $W^H$ se plonge naturellement dans $W$.

Soit $L$ un réseau presque autodual de $V$. On a défini en IX.6 le groupe $W_L(\iota_0)$. Posons $W' = W_{\ell'}(0)$, $W'' = W_{\ell''}(0)$, $W_L = W_L(\iota_0)$. On a $W_L = W' \times W''$ et $W_L$ se plonge naturellement dans $W$.

Posons

$$\begin{aligned} I &= \{1, \ldots, d\},\ \ I_1 = \{1, \ldots, d_1\},\ \ I_2 = \{d_1 + 1, \ldots, d\}, \\ I' &= \{d(\ell'')/2 + 1, \ldots, d - d(\ell'')/2\}, \\ I'' &= \{1, \ldots, d(\ell'')/2\} \cup \{d - d(\ell'')/2 + 1, \ldots, d\}. \end{aligned}$$

Alors $W$ s'identifie au groupe des permutations de $I$ et $W_1$, resp. $W_2$, $W'$, $W''$, au sous-groupe des éléments de $W$ qui fixent $I_2$, resp. $I_1$, $I''$, $I'$. Notons $w_\phi$, resp. $w_{1,\phi}$, $w_{2,\phi}$, $w'_\phi$, $w''_\phi$, les éléments de plus grande longueur de $W$, resp. $W_1$, $W_2$, $W'$, $W''$. On a $w_\phi = w'_\phi w''_\phi$. Le plongement $W_L \to W$ est équivariant pour l'action des Frobenius.

Le plongement $W^H \to W$ ne l'est pas. Toutefois, en notant $\phi$ et $\phi^H$ les actions de Frobenius sur $W$ et $W^H$ et en posant $w_{G,H} = w_\phi w_{1,\phi} w_{2,\phi}$, on a l'égalité

$$(1) \qquad \phi(w) = w_{G,H}\,\phi^H(w)\,w_{G,H}^{-1}$$

pour tout $w \in W^H$.

Soit $w \in W$. Posons $\sigma(w) = |w^{-1}(I'') \cap I_2|$ et

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)_w = \mathrm{ind}_{W_L \cap w W^H w^{-1}}^{W_L} \left( w \cdot \mathrm{res}^{W^H}_{w^{-1} W_L w \cap W^H} (\rho_1 \otimes \rho_2) \right).$$

Ces objets ne dépendent que de l'image de $w$ dans l'ensemble de doubles classes $W_L \setminus W / W^H$. On pose

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)_L = \sum_{w \in W_L \setminus W/W^H} (-1)^{\sigma(w)} (\rho_1 \otimes \rho_2)_w .$$

C'est une représentation virtuelle de $W_L$.

Posons $\mathcal{I}_L = \mathcal{I}(\ell') \times \mathcal{I}(\ell'')$.

Soit $\check{N} = (L, N', N'') \in \check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$. Posons :

$$f(\rho_1, \rho_2, \check{N}) = q^c \sum_{(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L} \langle (\rho_1 \otimes \rho_2)_L : \rho_{\iota'} \otimes \rho_{\iota''} \rangle_{W_L}\, q^{-b(\iota') - b(\iota'')} (\chi^\natural_{\iota'} \otimes \chi^\natural_{\iota''})(\overline{Y}_{\check{N}}),$$

où

$$c = d(\check{N}) - d/2 + \dim(\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{g}(L)}(\overline{Y}_{\check{N}}))/2,$$

*cf.* VIII.11, VIII.13, IX.2 et IX.4 pour les définitions. On a défini en IX.2 une fonction $h_{\check{N}}$.

***Proposition***. — *Pour tout $n \in \{1, 2\}$, soit $\rho_n \in \mathcal{R}(\iota_{n,0})$. Alors il existe un transfert $\phi^{\mathcal{H}}[\rho_1, \rho_2]$ de $\phi^{st,\mathcal{H}_1}_{\rho_1} \otimes \phi^{st,\mathcal{H}_2}_{\rho_2}$ à $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$ tel que pour tout $\check{N} \in \check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$, on ait l'égalité*

$$\phi^{\mathcal{H}}[\rho_1, \rho_2](h_{\check{N}}) = f(\rho_1, \rho_2, \check{N}).$$

On laisse la démonstration au lecteur. Elle est similaire à celle de la proposition XII.5 ci-dessous.

**XII.5.** Supposons $(V, q_V)$ symplectique ou orthogonal. Pour tout $n \in \{1, 2\}$, soient $\iota_{n,0} = (k'_n, k'_n) \in \mathcal{I}^{\mathrm{st}}_0(V_n)$ et $\rho_n \in \mathcal{R}(\iota_{n,0})^\phi$. On pose $k_n = \sup(k'_n, k''_n)$.

Soit $\iota_0 = (k', k'', \zeta) \in \mathcal{I}_0(\iota_{1,0}, \iota_{2,0})$, *cf.* XII.3. On pose $W = W(\iota_0) = W(k', k'')$ (*cf.* IX.6), $W_n = W(\iota_{n,0})$ pour $n \in \{1, 2\}$, $W^H = W_1 \times W_2$.

Soit $L$ un réseau presque autodual de $V$. Supposons $k' \in \mathcal{I}_{\ell'}(0)$, $k'' \in \mathcal{I}_{\ell''}(0)$. On a défini en IX.6 le groupe $W_L(k', k'')$ que l'on notera aussi $W_L(\iota_0)$ et ci-dessous simplement $W_L$. Posons $W' = W_{\ell'}(k')$, $W'' = W_{\ell''}(k'')$. On a l'égalité $W_L = W' \times W''$. Les groupes $W_L$ et $W^H$ se plongent naturellement dans $W$. Le plongement de $W_L$ dans $W$ est équivariant pour les actions de Frobenius. Celui de $W^H$ dans $W$ ne l'est pas toujours mais il existe un élément $w_{G,H}$ de $W$ tel que l'égalité XII.4 (1) soit vérifiée.

Explicitons la situation par exemple dans le cas $(V,q_V)$ symplectique. Posons

$$n'=(d(\ell')-k'(k'+1))/2,\quad n''=(d(\ell'')-k''(k''+1))/2,$$
$$n_1=d_1/2-k_1(k_1+1),\quad n_2=d_2/2-k_2^2,$$
$$n=n_1+n_2=n'+n'',$$
$$I=\{\pm1,\dots,\pm n\},\quad I_1=\{\pm1,\dots,\pm n_1\},\quad I_2=\{\pm(n_1+1),\dots,\pm n\},$$
$$I''=\{\pm1,\dots,\pm n''\},\quad I'=\{\pm(n''+1),\dots,\pm n\}.$$

Alors $W$ s'identifie au groupe des permutations $w$ de $I$ telles que $w(-i)=-w(i)$ pour tout $i\in I$ et $W'$, resp. $W''$, $W_1$, au sous-groupe des éléments de $W$ qui fixent $I''$, resp. $I'$, $I_2$. Si $k_2\neq 0$, $W_2$ s'identifie au sous-groupe des éléments de $W$ qui fixent $I_1$. Si $k_2=0$, notons $W_2^{\#}$ le sous-groupe ainsi décrit. Alors $W_2$ est le sous-groupe des éléments $w$ de $W_2^{\#}$ tels que $\mathrm{sgn}_{CD}(w)=1$, $\mathrm{sgn}_{CD}$ désignant le caractère de $W$ défini en II.3 ou sa restriction à $W_2^{\#}$. Si $k_2\neq 0$ ou si $(V_2,q_{V_2})$ est déployé, $w_{G,H}=1$. Si $k_2=0$ et $(V_2,q_{V_2})$ est non déployé, $w_{G,H}=w_{CD}$, *cf.* II.3 pour la définition de cet élément.

Une description similaire vaut dans les autres cas.

Supposons que $W$, $W'$, $W''$, $W_1$ et $W_2$ sont tous des groupes de Weyl de type $C$. Soit $w\in W$. On a l'égalité :

$$(1)\qquad w^{-1}W_Lw\cap W^H=$$
$$(w^{-1}W'w\cap W_1)(w^{-1}W'w\cap W_2)(w^{-1}W''w\cap W_1)(w^{-1}W''w\cap W_2).$$

Pour $u\in w^{-1}W_Lw\cap W^H$, on écrit $u=u_1'u_2'u_1''u_2''$ conformément à cette décomposition. On définit un caractère $\chi_w$ de $w^{-1}W_Lw\cap W^H$ par l'égalité :

$$\chi_w(u)=\begin{cases}\mathrm{sgn}_{CD}(u_2''), & \text{si } \zeta=1 \quad \text{et } k_1\geqslant k_2,\\ \mathrm{sgn}_{CD}(u_1''), & \text{si } \zeta=1 \quad \text{et } k_1<k_2,\\ \mathrm{sgn}_{CD}(u_2'), & \text{si } \zeta=-1 \quad \text{et } k_1\geqslant k_2,\\ \mathrm{sgn}_{CD}(u_1'), & \text{si } \zeta=-1 \quad \text{et } k_1<k_2,\end{cases}$$

pour tout $u\in w^{-1}W_Lw\cap W^H$. On pose

$$(\rho_1\otimes\rho_2)_w=\mathrm{ind}_{W_L\cap wW^Hw^{-1}}^{W_L}\left(w\cdot\left(\chi_w\,\mathrm{res}_{w^{-1}W_Lw\cap W^H}^{W^H}(\rho_1\otimes\rho_2)\right)\right).$$

Cette représentation ne dépend que de l'image de $w$ dans l'ensemble de doubles classes $W_L\setminus W/W^H$. On pose

$$(\rho_1\otimes\rho_2)_L=\sum_{w\in W_L\setminus W/W^H}(\rho_1\otimes\rho_2)_w.$$

C'est une représentation virtuelle de $W_L$. Pour $\rho'\in\mathcal{R}(W')$ et $\rho''\in\mathcal{R}(W'')$, on pose

$$m(\rho_1,\rho_2;\rho',\rho'')=\left\langle(\rho_1\otimes\rho_2)_L,\rho'\otimes\rho''\right\rangle_{W_L}.$$

Appelons cas exceptionnel le cas où $(V,q_V)$, $(V_1,q_{V_1})$ et $(V_2,q_{V_2})$ sont tous trois orthogonaux pairs déployés, $k_1=k_2=0$ et $\rho_1$ et $\rho_2$ sont toutes deux exceptionnelles, *i.e.* leurs induites aux groupes $W_1^{\#}$, resp. $W_2^{\#}$, sont irréductibles. Tous les groupes $W$, $W'$, $W''$, $W_1$, $W_2$ sont de type $D$. La décomposition (1) n'est plus valable mais on a une égalité analogue à (1) si l'on remplace tous les groupes $W'$, $W''$, $W_1$ et $W_2$ par $W'^{\#}$, $W''^{\#}$, $W_1^{\#}$, $W_2^{\#}$. Pour $w \in W$, cela permet de définir encore un caractère $\chi_w$ de $w^{-1}W_L w \cap W^H$. On définit alors $(\rho_1 \otimes \rho_2)_L$ et $m(\rho_1, \rho_2; \rho', \rho'')$ comme dans le cas précédent.

Supposons maintenant que certains des groupes $W$, $W'$, $W''$, $W_1$, $W_2$ soient de type $D$ mais excluons le cas exceptionnel ci-dessus. Si $\rho \in \mathcal{R}(W)$ est stable par l'action du Frobenius, posons

$$\widetilde{\rho} = \begin{cases} \rho, \text{ si } W \text{ est de type } C, \\ \operatorname{ind}_W^{W^{\#}}(\rho), \text{ si } W \text{ est de type } D \text{ et } (V, q_V) \text{ est déployé}, \\ \rho^{\#} - \rho^{b}, \text{ si } W \text{ est de type } D \text{ et } (V, q_V) \text{ n'est pas déployé}, \end{cases}$$

*cf.* VIII.4. Pour unifier la notation, on pose $W^{\#} = W$ si $W$ est de type $C$. On modifie alors la construction du cas général de la façon suivante :

- on remplace $W$, $W'$, $W''$, $W_1$, $W_2$ par $W^{\#}$, $W'^{\#}$, $W''^{\#}$, $W_1^{\#}$, $W_2^{\#}$ ;
- on remplace $\rho_1$ et $\rho_2$ par $\widetilde{\rho}_1$ et $\widetilde{\rho}_2$ ;
- pour $\rho' \in \mathcal{R}(W')$ et $\rho'' \in \mathcal{R}(W'')$, on pose

$$m(\rho_1, \rho_2; \rho', \rho'') = [W^{\#} : W]^{-1} \langle (\rho_1 \otimes \rho_2)_L, \widetilde{\rho}' \otimes \widetilde{\rho}'' \rangle_{W_L^{\#}},$$

où bien sûr $W_L^{\#} = W'^{\#} \times W''^{\#}$.

Soit $\check{N} = (L, N', N'') \in \check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$.

Si $k' \notin \mathcal{I}_0(\ell')$ ou $k'' \notin \mathcal{I}_0(\ell'')$, on pose $f(\iota_0; \rho_1, \rho_2, \check{N}) = 0$.

Supposons $k' \in \mathcal{I}_0(\ell')$ et $k'' \in \mathcal{I}_0(\ell'')$. On pose $\mathcal{I}_L(\iota_0)^{\phi} = \mathcal{I}_{\ell'}(k')^{\phi} \times \mathcal{I}_{\ell''}(k'')^{\phi}$,

$$c = d(\check{N}) + \delta(\iota_0)/2 - n(\iota_0)/2 + \dim(\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{g}(L)}(\overline{Y}_{\check{N}}))/2,$$

*cf.* IX.2, IX.4, IX.5 pour les définitions (on a posé $n(\iota_0) = n(k', k'')$), et

$$f(\iota_0; \rho_1, \rho_2, \check{N}) = c(\iota_0) q^c \sum_{(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L(\iota_0)^{\phi}} m(\rho_1, \rho_2; \rho_{\iota'}, \rho_{\iota''}) q^{-b(\iota') - b(\iota'')} (\chi_{\iota'}^{\natural} \otimes \chi_{\iota''}^{\natural})(\overline{Y}_{\check{N}}),$$

*cf.* VIII.11, VIII.13 et XII.3 pour les définitions.

On a défini en IX.2 une fonction $h_{\check{N}}$.

***Proposition***. — *Pour tout $n \in \{1, 2\}$, soient $\iota_{n,0} \in \mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V_n)$ et $\rho_n \in \mathcal{R}(\iota_{n,0})^{\phi}$. Alors il existe un transfert $\phi^{\mathcal{H}}[\rho_1, \rho_2]$ de $\phi_{\rho_1}^{st, \mathcal{H}_1} \otimes \phi_{\rho_2}^{st, \mathcal{H}_2}$ à $\operatorname{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$ tel que pour tout $\check{N} \in \check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$, on ait l'égalité :*

$$\phi^{\mathcal{H}}[\rho_1, \rho_2](h_{\check{N}}) = \sum_{\iota_0 \in \mathcal{I}_0(\iota_{1,0}, \iota_{2,0})} f(\iota_0; \rho_1, \rho_2, \check{N}).$$

*Démonstration.* — On traite seulement le cas $(V, q_V)$ symplectique. D'après les définitions de IX.7 et IX.8, on a l'égalité :

$$(2)\quad \phi^{st,\mathcal{H}_1}_{\rho_1} \otimes \phi^{st,\mathcal{H}_2}_{\rho_2} = |W_1|^{-1}|W_2|^{-1}\eta^{-1}q^{-(\delta(\iota_{1,0})+\delta(\iota_{2,0}))/2} \sum_{(w_1,w_2)\in W_1\times W_2} s_1(w_1)\,\mathrm{trace}(\rho_1(w_1)\otimes\rho_2(w_{2,\phi}w_2))\,\phi^{\mathcal{H}_1}_{\Lambda_{W_1}(w_1),1}\otimes\phi^{\mathcal{H}_2}_{\Lambda_{W_2}(w_2),1},$$

où

$$\eta = \begin{cases} 2, & \text{si } k_2 \neq 0, \\ 1, & \text{si } k_2 = 0, \end{cases}$$

et $s_1 = \mathrm{sgn}_{CD}^{k_1}$.

Pour $\iota_0 \in \mathcal{I}_0(\iota_{1,0}, \iota_{2,0})$, $w_1 \in W_1$ et $w_2 \in W_2$, notons $c(w_1, w_2; \iota_0)$, $\xi(w_1, w_2; \iota_0)$ et $\kappa(w_1, w_2; \iota_0)$ les termes notés $c(\xi_1, \xi_2; \iota_0)$, $\xi(\iota_0)$ et $\kappa(\iota_0)$ en XII.3, associés aux données $\xi_1 = \Lambda_{W_1}(w_1)$ et $\xi_2 = \Lambda_{W_2}(w_2)$. Posons

$$\phi^{\mathcal{H}}_{\iota_0} = |W_1|^{-1}|W_2|^{-1}\eta^{-1}q^{-(\delta(\iota_{1,0})+\delta(\iota_{2,0}))/2} \sum_{(w_1,w_2)\in W_1\times W_2} c(w_1,w_2;\iota_0)\,s_1(w_1)\,\mathrm{trace}(\rho_1(w_1)\otimes\rho_2(w_{2,\phi}w_2))\,\phi^{\mathcal{H}}_{\xi(w_1,w_2;\iota_0),\kappa(w_1,w_2;\iota_0)},$$

et

$$\phi^{\mathcal{H}}[\rho_1,\rho_2] = \sum_{\iota_0\in\mathcal{I}_0(\iota_{1,0},\iota_{2,0})} \phi^{\mathcal{H}}_{\iota_0}.$$

D'après (2) et la proposition XII.3, $\phi^{\mathcal{H}}[\rho_1,\rho_2]$ est un transfert de $\phi^{st,\mathcal{H}_1}_{\rho_1}\otimes\phi^{st,\mathcal{H}_2}_{\rho_2}$ à $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$.

Soient $\check{N} = (L, N', N'') \in \check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$ et $\iota_0 \in \mathcal{I}_0(\iota_{1,0}, \iota_{2,0})$. On va prouver l'égalité :

$$(3)\qquad \phi^{\mathcal{H}}_{\iota_0}(h_{\check{N}}) = f(\iota_0; \rho_1, \rho_2, \check{N}),$$

d'où s'ensuit l'égalité de l'énoncé.

Posons $\iota_0 = (k', k'', \zeta)$. On traite le cas $\zeta = 1$, le cas $\zeta = -1$ étant similaire. Soient $w_1 \in W_1$ et $w_2 \in W_2$. Posons $\Lambda_{W_2}(w_2) = (k_2, k_2, \boldsymbol{\mu}_2^0, \boldsymbol{\mu}_2^1)$ ou $(k_2, k_2, \boldsymbol{\mu}_2^0, \boldsymbol{\mu}_2^1, \varepsilon_2)$. Il résulte des descriptions de IX.6 et II.3 que

$$(-1)^{c(\boldsymbol{\mu}_2^1)} = \mathrm{sgn}_{CD}(w_{2,\phi}w_2).$$

Posons

$$\alpha_0 = \begin{cases} 1, & \text{si } k_1 \geqslant k_2, \\ \mathrm{sgn}(-1)^{[(k_1+k_2+1)/2]}, & \text{si } k_1 < k_2, \end{cases}$$

$$c_1 = |W_1|^{-1}|W_2|^{-1}\frac{\eta}{2}\alpha_0\,\mathrm{sgn}(\eta'(V_2))^{k_1}.$$

On vérifie l'égalité :

$$(4)\qquad |W_1|^{-1}|W_2|^{-1}\eta^{-1}q^{-\delta(\iota_{1,0})+\delta(\iota_{2,0}))/2}c(w_1,w_2;\iota_0) = c_1\,s_1(w_{2,\phi}w_2)\,q^{-\delta(\iota_0)/2}.$$

On pose

$$\kappa(w_1,w_2) = \kappa(w_1,w_2;\iota_0), \quad \mathcal{E}(w_1,w_2) = \mathcal{E}(\xi(w_1,w_2;\iota_0)),$$

*cf.* IV.6, et, pour $e \in \mathcal{E}(w_1, w_2)$,

$$\Theta(w_1, w_2, ; e) = \Theta(\theta(\xi(w_1, w_2; \iota_0), e), L)$$

*cf.* IV.6 et III.4.

Grâce à (4), à la définition de IV.9 et à la proposition IX.5, on a l'égalité :

$$\phi^{\mathcal{H}}_{\iota_0}(h_{\check{N}}) = c_1 q^c \sum_{(w_1,w_2)\in W_1\times W_2} s_1(w_1 w_{2,\phi} w_2)\ \mathrm{trace}(\rho_1(w_1)\otimes\rho_2(w_{2,\phi}w_2))$$
$$\sum_{e\in\mathcal{E}(w_1,w_2)} \kappa(w_1,w_2)(e) \sum_{(\theta',\theta'')\in\Theta(w_1,w_2,e)} [\theta',\theta'']^0 (Q^{\natural}_{\theta'}\otimes Q^{\natural}_{\theta''})(\overline{Y}_{\check{N}}),$$

où $c$ est le terme défini avant l'énoncé.

Si $k' \notin \mathcal{I}_0(\ell')$ ou $k'' \notin \mathcal{I}_0(\ell'')$, $\Theta(w_1, w_2, e)$ est vide pour tous $w_1, w_2, e$ et $\phi^{\mathcal{H}}_{\iota_0}(h_{\check{N}}) = 0$. On a aussi $f(\iota_0; \rho_1, \rho_2, \check{N}) = 0$, d'où l'égalité (3). Supposons $k' \in \mathcal{I}_0(\ell')$, $k'' \in \mathcal{I}_0(\ell'')$. Utilisons les notations introduites avant l'énoncé et introduisons les applications

$$\Lambda' : W' \longrightarrow \Theta(\ell'), \quad \Lambda'' : W'' \longrightarrow \Theta(\ell'')$$

de II.3. Pour $w \in W$, on note $\mathcal{O}_W(w)$ la classe de conjugaison de $w$ dans $W$. On introduit une notation similaire pour les groupes $W'$ et $W''$. Pour $w' \in W'$ et $w'' \in W''$, posons :

$$\mathcal{X}(w', w'') = \Big\{(w_1, w_2, e); w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2,\ e \in \mathcal{E}(w_1, w_2),\ w_1 w_{2,\phi} w_2 \in \mathcal{O}_W(w'w''),$$
$$(\Lambda'(w'), \Lambda''(w'')) \in \Theta(w_1, w_2, e)\Big\},$$

$$a(w', w'') = |\mathcal{O}_{W'}(w')|^{-1} |\mathcal{O}_{W''}(w'')|^{-1} [\Lambda'(w'), \Lambda''(w'')]^0$$
$$\sum_{(w_1,w_2,e)\in\mathcal{X}(w',w'')} s_1(w_1 w_{2,\phi} w_2)\, \kappa(w_1, w_2)(e)\, \mathrm{trace}(\rho_1(w_1)\otimes\rho_2(w_{2,\phi}w_2)).$$

On voit comme dans la preuve du lemme IX.7 que pour tous $w_1 \in W_1$, et $w_2 \in W_2$, on a l'égalité :

$$\bigcup_{e\in\mathcal{E}(w_1,w_2)} \Theta(w_2, w_2, e) = (\Lambda' \times \Lambda'')((W' \times W'') \cap \mathcal{O}_W(w_1 w_{2,\phi} w_2)).$$

On en déduit l'égalité :

$$(5) \qquad \phi^{\mathcal{H}}_{\iota_0}(h_{\check{N}}) = c_1 q^c \sum_{(w',w'')\in W'\times W''} a(w', w'')(Q^{\natural}_{w'} \otimes Q^{\natural}_{w''})(\overline{Y}_{\check{N}}).$$

Supposons $k_2 \neq 0$. Introduisons des ensembles $I$, $I_1$, $I_2$, $I'$, $I''$ comme avant l'énoncé. Soit $w' \in W'$. On peut définir des ensembles $J^0(w')$ et $J^1(w')$ disjoints et, pour tout $j \in J^0(w') \cup J^1(w')$, un sous ensemble $I'(j) \subset I'$, non vide et stable par l'application $i \mapsto -i$, de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

- $I'$ est union disjointe des $I'(j)$ pour $j \in J^0(w') \cup J^1(w')$ ;

• pour tout $j \in J^1(w')$, $I'(j)$ est stable par $w'$ et $I'(j)$ forme une seule orbite pour l'action du groupe engendré par $w'$ ;

• pour tout $j \in J^0(w')$, $I'(j)$ est stable par $w'$, $I'(j)$ est réunion de deux orbites pour l'action du groupe engendré par $w'$, qui se déduisent l'une de l'autre par l'application $i \mapsto -i$.

En posant $\Lambda'(w') = (k', \boldsymbol{\mu}'^0, \boldsymbol{\mu}'^1)$, on peut identifier $J^0(w')$ à $\{1, \ldots, c(\boldsymbol{\mu}'^0)\}$ et $J^1(w')$ à $\{1, \ldots, c(\boldsymbol{\mu}'^1)\}$ de sorte que pour tout $j \in J^0(w')$, resp. $j \in J^1(w')$, on ait l'égalité $|I'(j)| = 2\mu_j'^0$, resp. $|I'(j)| = 2\mu_j'^1$.

Pour tout $j \in J^0(w') \cup J^1(w')$, notons $w'_j$ l'élément de $W'$ qui agit comme $w'$ sur $I'(j)$ et fixe $I'(\ell)$ pour tout $\ell \neq j$. On a l'égalité

$$w' = \prod_{j \in J^0(w') \cup J^1(w')} w'_j .$$

Des définitions analogues valent pour les groupes $W''$, $W_1$ et $W_2$. Dans la suite, on suppose, ainsi qu'il est loisible, que les différents ensembles d'indices $J^0(w')$, $J^1(w')$, $J^0(w_1)$ etc. sont tous disjoints.

Pour $(w_1, w_2) \in W_1 \times W_2$, on a une identification naturelle :

$$\mathcal{E}(w_1, w_2) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{J^1(w_1) \cup J^1(w_2)}$$

et, quitte à remplacer $\kappa(w_1, w_2)$ par un caractère équivalent, on peut supposer

$$\kappa(w_1, w_2)_j = \begin{cases} 1, & \text{si } j \in J^1(w_1), \\ -1, & \text{si } j \in J^1(w_2). \end{cases}$$

Soient $w' \in W'$ et $w'' \in W''$. Posons

$$\mathcal{Y}(w', w'') = \{w \in W \,;\, w^{-1} w' w'' w \in W_1 \times W_2\}$$

et définissons une application

$$x : \mathcal{Y}(w', w'') \longrightarrow \{(w_1, w_2, e);\, w_1 \in W_1,\, w_2 \in W_2,\, e \in \mathcal{E}(w_1, w_2)\}$$

de la façon suivante. Soit $w \in \mathcal{Y}(w', w'')$. On note $w_1$, resp. $w_2$, l'élément de $W_1$, resp. $W_2$ tel que $w^{-1} w' w'' w = w_1 w_2$. On a alors l'égalité :

$$w^{-1}\Big(\prod_{j \in J^1(w')} w'_j\Big)\Big(\prod_{j \in J^1(w'')} w''_j\Big) w = \Big(\prod_{j \in J^1(w_1)} w_{1,j}\Big)\Big(\prod_{j \in J^1(w_2)} w_{2,j}\Big).$$

Il existe une unique bijection

$$t_w : J^1(w_1) \cup J^1(w_2) \longrightarrow J^1(w') \cup J^1(w'')$$

telle que pour tout $n \in \{1, 2\}$ et tout $j \in J^1(w_n)$, si $t_w(j) \in J^1(w^*)$ avec $* = \ '$ ou $''$, on ait

$$w^{-1} w^*_{t_w(j)} w = w_{n,j} .$$

On définit $e \in \mathcal{E}(w_1, w_2)$ par

$$e_j = \begin{cases} 0, & \text{si } t_w(j) \in J^1(w'), \\ 1, & \text{si } t_w(j) \in J^1(w''), \end{cases}$$

pour tout $j \in J^1(w_1) \cup J^1(w_2)$. On pose $x(w) = (w_1, w_2, e)$.

On vérifie que l'application $x$ a pour image $\mathcal{X}(w', w'')$. Ses fibres au-dessus de cette image ont le même nombre d'éléments : c'est le nombre des $w \in W$ qui commutent aux trois éléments

$$\Big(\prod_{j\in J^0(w')} w'_j\Big)\Big(\prod_{j\in J^0(w'')} w''_j\Big), \quad \prod_{j\in J^1(w')} w'_j, \quad \prod_{j\in J^1(w'')} w''_j.$$

Il est égal à

$$[\Lambda'(w'), \Lambda''(w'')]^0 \, |Z_{w'}(w')| \, |Z_{w''}(w'')|.$$

D'autre part, pour $w \in \mathcal{Y}(w', w'')$, l'élément $w^{-1}w''w$ de $W$ appartient à $W_1 \times W_2$. Notons $(w^{-1}w''w)_2$ sa composante dans $W_2$. En posant $x(w) = (w_1, w_2, e)$, on a l'égalité

$$\kappa(w_1, w_2)(e) = \operatorname{sgn}_{CD}((w^{-1}w''w)_2).$$

De la définition de $a(w', w'')$ résulte alors l'égalité :

$$a(w', w'') = |W'|^{-1}|W''|^{-1} s_1(w'w'') \sum_{w\in\mathcal{Y}(w',w'')} \operatorname{sgn}_{CD}((w^{-1}w''w)_2) \\ \operatorname{trace}\circ(\rho_1 \otimes \rho_2)(w^{-1}w'w''w). \tag{6}$$

On a défini en VIII.9 des caractères $W'$ et $W''$ que nous noterons $s'$ et $s''$. On a les égalités $s' = \operatorname{sgn}_{CD}^{k'}$, $s'' = \operatorname{sgn}_{CD}^{k''}$. Or $k' = k_1 + k_2 \equiv k_1 \bmod 2\mathbb{Z}$, donc $s' = s_1$. Si $k_1 \geqslant k_2$, on a $k'' = k_1 - k_2$ et $s'' = s_1$. Si $k_1 < k_2$, on a $k'' = k_2 - k_1 - 1 \equiv k_1 + 1 \bmod 2\mathbb{Z}$ et $s'' = s_1 \operatorname{sgn}_{CD}$. On déduit alors de l'égalité ci-dessus et de la définition de la représentation $(\rho_1 \otimes \rho_2)_L$ l'égalité :

$$a(w', w'') = |W_1||W_2||W'|^{-1}|W''|^{-1} s'(w')s''(w'') \operatorname{trace}\circ(\rho_1 \otimes \rho_2)_L(w'w'').$$

En reportant cette égalité dans la formule (5), on obtient :

$$\phi^{\mathcal{H}}_{\iota_0}(h_{\check{N}}) = c_2 q^c \sum_{(w',w'')\in W'\times W''} s'(w')s''(w'') \operatorname{trace}((\rho_1 \otimes \rho_2)_L(w'w''))(Q^\natural_{w'} \otimes Q^\natural_{w''})(\overline{Y}_{\check{N}}),$$

où

$$c_2 = \alpha_0 \operatorname{sgn}(\eta'(V_2))^{k_1} |W'|^{-1}|W''|^{-1}.$$

La même démonstration que celle du lemme IX.8 permet de déduire l'égalité (3) de l'égalité précédente.

Supposons maintenant $k_2 = 0$ et $(V_2, q_{V_2})$ déployé. Pour $w' \in W'$, $w'' \in W''$ et $w \in \mathcal{Y}(w', w'')$, l'élément $w^{-1}w''w$ de $W$ appartient à $W_1 \times W_2^\#$. On note $(w^{-1}w''w)_2$ sa composante dans $W_2^\#$. On démontre alors comme ci-dessus l'égalité (6). Remarquons que $\mathcal{Y}(w',w'')$ est stable par multiplication à droite par $W_1\times W_2^{\#}$. La fonction de $w$ que l'on somme dans (6) est invariante à droite par $W_1\times W_2$. On a donc l'égalité :

$$a(w',w'')=|W'|^{-1}|W''|^{-1}s_1(w'w'')\sum_{w\in\mathcal{Y}(w',w'')}\mathrm{sgn}_{CD}((w^{-1}w''w)_2)$$
$$\frac{1}{2}\sum_{u\in W_2^{\#}/W_2}\mathrm{trace}\circ(\rho_1\otimes\rho_2)(u^{-1}w^{-1}w'w''wu).$$

La dernière somme n'est autre que

$$\mathrm{trace}\circ(\rho_1\otimes\widetilde{\rho}_2)(w^{-1}w'w''w).$$

Posons

$$\mathcal{Y}^{\#}(w',w'')=\{w\in W;\, w^{-1}w'w''w\in W_1\times W_2^{\#}\}.$$

Puisque $\mathrm{trace}\circ\widetilde{\rho}_2$ est nulle sur $W_2^{\#}-W_2$, on peut remplacer $\mathcal{Y}(w',w'')$ par $\mathcal{Y}^{\#}(w',w'')$ dans l'égalité précédente et l'on obtient :

$$(7)\qquad a(w',w'')=\frac{1}{2}|W'|^{-1}|W''|^{-1}s_1(w'w'')\sum_{w\in\mathcal{Y}^{\#}(w',w'')}\mathrm{sgn}_{CD}((w'w''w)_2)$$
$$\mathrm{trace}\circ(\rho_1\otimes\widetilde{\rho}_2)(w^{-1}w'w''w).$$

On en déduit (3) comme précédemment (cette fois, $\eta=1$).

Supposons enfin $k_2=0$ et $(V_2,q_{V_2})$ non déployé. Dans ce cas $w_{2,\phi}=w_{CD}$ et, par définition

$$\rho_2(w_{2,\phi}w_2)=\rho_2^{\#}(w_{2,\phi}w_2)$$

pour tout $w_2\in W_2$, *cf.* VIII.11. Pour $w'\in W'$ et $w''\in W''$, posons

$$\mathcal{Y}(w',w'')=\{w\in W;\, w^{-1}w'w''w\in W_1\times(W_2^{\#}-W_2)\}.$$

On définit une application :

$$x:\mathcal{Y}(w',w'')\longrightarrow\mathcal{X}(w',w'')$$

de la façon suivante. Soit $w\in\mathcal{Y}(w',w'')$. On note $w_1$, resp. $w_2$, l'élément de $W_1$, resp. $W_2$, tel que $w^{-1}w'w''w=w_1w_{2,\phi}w_2$. Comme précédemment, on définit une bijection

$$t_w:J^1(w_1)\cup J^1(w_{2,\phi}w_2)\longrightarrow J^1(w')\cup J^1(w'')$$

puis un élément $e$ de $\mathcal{E}(w_1,w_2)$, ce dernier groupe étant maintenant égal à

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{J^1(w_1)\cup J^1(w_{2,\phi}w_2)}.$$

On pose $x(w)=(w_1,w_2,e)$. Grâce à cette application, on obtient une égalité analogue à (6) :

$$a(w',w'')=|W'|^{-1}|W''|^{-1}s_1(w'w'')\sum_{w\in\mathcal{Y}(w',w'')}\mathrm{sgn}_{CD}((w^{-1}w''w)_2)$$
$$\mathrm{trace}\circ(\rho_1\otimes\rho_2^{\#})(w^{-1}w'w''w).$$

Introduisons l'ensemble $\mathcal{Y}^{\#}(w',w'')$ ci-dessus et la représentation
$$\widetilde{\rho}_2 = \rho_2^{\#} - \rho_2^{b}.$$
La trace de $\widetilde{\rho}_2$ est nulle sur $W_2$ et égale à 2 fois celle de $\rho_2^{\#}$ sur $W_2^{\#} - W_2$. De l'égalité précédente se déduit donc l'égalité (7) et on en déduit (3) comme précédemment. Cela achève la démonstration. □

**XII.6.** Supposons $(V, q_V)$ unitaire. Pour tout $n \in \{1,2\}$, soit $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V_n) = \mathcal{P}(d_n)$. On définit une fonction
$$\gamma^{G,H}_{\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2} : \mathrm{Nil}(V) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
de la façon suivante. Elle est à support dans les éléments de la forme $(\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2, (q_i))$. Pour un tel élément et pour un entier $i \geqslant 1$, posons
$$s(i) = \boldsymbol{\lambda}_{2,c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2)}\,.$$
On pose
$$\gamma^{G,H}_{\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2}(\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2, (q_i)) = \prod_{i\geqslant 1}(-1)^{s(i)\,d''(q_i)}$$
*cf.* I.3 pour la notation.

On a défini en IX.9 une fonction $\gamma_{\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2}$ sur $\mathrm{Nil}(V)$. On pose
$$\gamma_{\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2} = \gamma_{\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2}\,\gamma^{G,H}_{\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2}\,.$$

***Proposition***. — *Pour tout $n \in \{1,2\}$, soit $\boldsymbol{\lambda}_n \in \mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V_n)$. Posons $\rho_n = \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\lambda}_n}$. Alors il existe un transfert $\phi^{\mathcal{H}}[\rho_1,\rho_2]$ de $\phi^{st,\mathcal{H}_1}_{\rho_1} \otimes \phi^{st,\mathcal{H}_2}_{\rho_2}$ à $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$ tel que pour tout $\check{N} \in \check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$, on ait les égalités suivantes, où l'on écrit $\check{\Lambda}(\check{N}) = (\boldsymbol{\mu}, (q_i))$ :*

(i) *si $\boldsymbol{\mu} \not\leqslant \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2$, $\phi^{\mathcal{H}}[\rho_1,\rho_2](h_{\check{N}}) = 0$ ;*

(ii) *si $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2$, $\phi^{\mathcal{H}}[\rho_1,\rho_2](h_{\check{N}}) = q^{d(\check{N})}\gamma_{\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2}(\boldsymbol{\mu},(q_i))$.*

*Démonstration.* — On pose $\check{N} = (L, N', N'')$, on introduit les ensembles $I$, $I_1$, $I_2$, $I'$ et $I''$ de XII.4. Pour tout partition $\boldsymbol{\beta}$ et tout $n \in \{1,2\}$, on définit une suite finie d'entiers $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{\beta})$ par les égalités :
$$\sigma_n(\boldsymbol{\beta})_j = \begin{cases} \lambda_{n,c_{\geqslant \beta_j}(\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2)}, & \text{pour tout } j \in \{1,\dots,c(\boldsymbol{\beta})\},\\ 0, & \text{pour tout } j \geqslant c(\boldsymbol{\beta})+1.\end{cases}$$
Cette suite est une partition. Posons :
$$\sigma_n(\boldsymbol{\beta}) = S(\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{\beta})) = \sum_{j\geqslant 1}\sigma_n(\boldsymbol{\beta})_j\,.$$

Fixons un couple de partitions $(\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\beta}'') \in \mathcal{P}(d(\ell'))\times\mathcal{P}(d(\ell''))$. On a défini en VIII.2 la représentation $\pi(\boldsymbol{\beta}')\otimes\pi(\boldsymbol{\beta}'')$ de $W_L$. Pour tout $w \in W$, on a défini en XII.4 la représentation $(\rho_1\otimes\rho_2)_w$ de $W_L$. On va démontrer les propriétés suivantes :
(1) soit $w \in W$, supposons $\langle(\rho_1\otimes\rho_2)_w, \pi(\boldsymbol{\beta}')\otimes\pi(\boldsymbol{\beta}'')\rangle_{W_L} \neq 0$ ; alors $\boldsymbol{\beta}'\cup\boldsymbol{\beta}'' \leqslant \boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2$.
Supposons $\boldsymbol{\beta}'\cup\boldsymbol{\beta}'' = \boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2$. Alors :

(2) l'ensemble des $w \in W$ tels que $\langle(\rho_1 \otimes \rho_2)_w, \pi(\boldsymbol{\beta}') \otimes \pi(\boldsymbol{\beta}'')\rangle_{W_L} \neq 0$ forme une unique double classe modulo $W_L$ à gauche et $W^H$ à droite ; pour $w$ dans cette double classe, on a $\langle(\rho_1 \otimes \rho_2)_w, \pi(\boldsymbol{\beta}') \otimes \pi(\boldsymbol{\beta}'')\rangle_{W_L} = 1$ et $\sigma(w) = \sigma_2(\boldsymbol{\beta}'')$

*cf.* XII.4 pour la définition de $\sigma(w)$. Fixons des sous-groupes $U'$ de $W'$ de type $\boldsymbol{\beta}'$ et $U''$ de $W''$ de type $\beta''$, *cf.* VIII.2. Soit $w \in W$. Posons

$$W_L(w) = W_L \cap wW^H w^{-1}, \quad W^H(w) = w^{-1}W_L w \cap W^H.$$

On a les égalités :

$$\begin{aligned}
(3) \qquad & \langle(\rho_1 \otimes \rho_2)_w, \pi(\boldsymbol{\beta}') \otimes \pi(\boldsymbol{\beta}'')\rangle_{W_L} \\
&= \Big\langle \operatorname{ind}_{W_L(w)}^{W_L}(w \cdot \operatorname{res}_{W^H(w)}^{W^H}(\rho_1 \otimes \rho_2)), \operatorname{ind}_{U'\times U''}^{W_L}(\mathbf{1}_{U'\times U''})\Big\rangle_{W_L} \\
&= \Big\langle w \cdot \operatorname{res}_{W^H(w)}^{W^H}(\rho_1 \otimes \rho_2), \operatorname{res}_{W_L(w)}^{W_L} \circ \operatorname{ind}_{U'\times U''}^{W_L}(\mathbf{1}_{U'\times U''})\Big\rangle_{W_L(w)} \\
&= \Big\langle \operatorname{res}_{W^H(w)}^{W^H}(\rho_1 \otimes \rho_2), w^{-1} \cdot \operatorname{res}_{W_L(w)}^{W_L} \circ \operatorname{ind}_{U'\times U''}^{W_L}(\mathbf{1}_{U'\times U''})\Big\rangle_{W^H(w)} \\
&= \Big\langle \rho_1 \otimes \rho_2, \operatorname{ind}_{W^H(w)}^{W^H}\Big(w^{-1} \cdot \operatorname{res}_{W_L(w)}^{W_L} \circ \operatorname{ind}_{U'\times U''}^{W_L}(\mathbf{1}_{U'\times U''})\Big)\Big\rangle_{W^H}.
\end{aligned}$$

Posons

$$I_1'(w) = I' \cap w(I_1), \;\; I_2'(w) = I' \cap w(I_2), \;\; I_1''(w) = I'' \cap w(I_1), \;\; I_2''(w) = I'' \cap w(I_2),$$
$$W'(w) = W_L(w) \cap W', \quad W''(w) = W_L(w) \cap W''.$$

Alors $W'(w)$ est l'ensemble des éléments de $W'$ qui conservent $I_1'(w)$ et $I_2'(w)$. Introduisons des sous-ensembles $K_j'$ de $I'$, pour $j \in \{1, \ldots, c(\boldsymbol{\beta}')\}$ de sorte que :

- $I'$ est union disjointe de ces $K_j'$ ;
- pour tout $j \in \{1, \ldots, c(\boldsymbol{\beta}')\}$, $|K_j'| = \beta_j'$ ;
- $U'$ est le sous-groupe des éléments de $W'$ qui conservent chaque $K_j'$.

Notons $\mathcal{Q}'(w)$ l'ensemble des couples $(\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2')$ de suites finies d'entiers $\geqslant 0$ telles que

- $S(\boldsymbol{\alpha}_1') = |I_1'(w)|$, $S(\boldsymbol{\alpha}_2') = |I_2'(w)|$,
- $\boldsymbol{\alpha}_1' + \boldsymbol{\alpha}_2' = \boldsymbol{\beta}'$.

Pour $w' \in W'$, définissons un couple $(\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2')$ de suites finies d'entiers $\geqslant 0$ par

$$\alpha_{n,j}' = \begin{cases} |w'(I_n'(w)) \cap K_j'|, & \text{pour tout } \; j \in \{1, \ldots, c(\boldsymbol{\beta}')\}, \\ 0, & \text{pour tout } \; j \geqslant c(\boldsymbol{\beta}') + 1, \end{cases}$$

pour tout $n \in \{1, 2\}$. Il est clair que $(\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2') \in \mathcal{Q}'(w)$. L'application ainsi définie de $W'$ dans $\mathcal{Q}'(w)$ se quotiente en une bijection :

$$U' \setminus W'/W'(w) \longrightarrow \mathcal{Q}'(w).$$

En appliquant la formule de Mackey (*cf.* VIII.1), on obtient l'égalité :

$$\operatorname{res}_{W'(w)}^{W'} \circ \operatorname{ind}_{U'}^{W'}(\mathbf{1}_{U'}) = \sum_{(\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2') \in \mathcal{Q}'(w)} \pi(p(\boldsymbol{\alpha}_1')) \otimes \pi(p(\boldsymbol{\alpha}_2')).$$

Un calcul analogue vaut en remplaçant les $'$ par des $''$. Définissons donc $\mathcal{Q}''(w)$ et posons $\mathcal{Q}(w) = \mathcal{Q}'(w) \times \mathcal{Q}''(w)$. Dans la suite, pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{Q}(w)$, on notera sans plus de commentaire $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}'_1, \boldsymbol{\alpha}'_2, \boldsymbol{\alpha}''_1, \boldsymbol{\alpha}''_2)$. Grâce aux formules ci-dessus, on a les égalités :

$$\mathrm{res}^{W_L}_{W_L(w)} \circ \mathrm{ind}^{W_L}_{U' \times U''}(\mathbf{1}_{U' \times U''}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{Q}(w)} \pi(p(\boldsymbol{\alpha}'_1)) \otimes \pi(p(\boldsymbol{\alpha}'_2)) \otimes \pi(p(\boldsymbol{\alpha}''_1)) \otimes \pi(p(\boldsymbol{\alpha}''_2)),$$

$$w^{-1} \cdot \mathrm{res}^{W_L}_{W_L(w)} \circ \mathrm{ind}^{W_L}_{U' \times U''}(\mathbf{1}_{U' \times U''}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{Q}(w)} \pi(p(\boldsymbol{\alpha}'_1)) \otimes \pi(p(\boldsymbol{\alpha}''_1)) \otimes \pi(p(\boldsymbol{\alpha}'_2)) \otimes \pi(p(\boldsymbol{\alpha}''_2)),$$

$$\mathrm{ind}^{W^H}_{W^H(w)} \Big(w^{-1} \cdot \mathrm{res}^{W_L}_{W_L(w)} \circ \mathrm{ind}^{W_L}_{U' \times U''}(\mathbf{1}_{U' \times U''})\Big) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{Q}(w)} \pi(p(\boldsymbol{\alpha}'_1) \cup p(\boldsymbol{\alpha}''_1)) \otimes \pi(p(\boldsymbol{\alpha}'_2) \cup p(\boldsymbol{\alpha}''_2)).$$

Notons $\mathcal{Q}_0(w)$ le sous-ensemble des $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{Q}(w)$ tels que :

$$p(\boldsymbol{\alpha}'_1) \cup p(\boldsymbol{\alpha}''_1) \leqslant \boldsymbol{\lambda}_1, \quad p(\boldsymbol{\alpha}'_2) \cup p(\boldsymbol{\alpha}''_2) \leqslant \boldsymbol{\lambda}_2.$$

Grâce à l'égalité précédente, à (3) et à VIII.2 (3), on a l'égalité :

$$\text{(4)} \qquad \langle (\rho_1 \otimes \rho_2)_w, \pi(\boldsymbol{\beta}') \otimes \pi(\boldsymbol{\beta}'') \rangle_{W_L} = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{Q}_0(w)} \Big\langle \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\lambda}_1} \otimes \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\lambda}_2}, \pi(p(\boldsymbol{\alpha}'_1) \cup p(\boldsymbol{\alpha}''_1)) \otimes \pi(p(\boldsymbol{\alpha}'_2) \cup p(\boldsymbol{\alpha}''_2)) \Big\rangle_{W^H}.$$

Supposons le membre de gauche non nul. Alors $\mathcal{Q}_0(w) \neq \varnothing$. Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{Q}_0(w)$. On a :

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\alpha}'_1 + \boldsymbol{\alpha}'_2 \leqslant p(\boldsymbol{\alpha}'_1) + p(\boldsymbol{\alpha}'_2), \ \ \boldsymbol{\beta}'' = \boldsymbol{\alpha}''_1 + \boldsymbol{\alpha}''_2 \leqslant p(\boldsymbol{\alpha}''_1) + p(\boldsymbol{\alpha}''_2), \\ p(\boldsymbol{\alpha}'_1) \cup p(\boldsymbol{\alpha}''_1) \leqslant \boldsymbol{\lambda}_1, \ \ p(\boldsymbol{\alpha}'_2) \cup p(\boldsymbol{\alpha}''_2) \leqslant \boldsymbol{\lambda}_2. \end{cases}$$

Ces inégalités entraînent $\boldsymbol{\beta}' \cup \boldsymbol{\beta}'' \leqslant \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2$. Cela démontre (1).

Supposons $\boldsymbol{\beta}' \cup \boldsymbol{\beta}'' = \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2$. Notons $\mathcal{Q}_0$ l'ensemble des quadruplets de partitions $\boldsymbol{\alpha}$ tels que

$$\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\alpha}'_1 + \boldsymbol{\alpha}'_2, \ \ \boldsymbol{\beta}'' = \boldsymbol{\alpha}''_1 + \boldsymbol{\alpha}''_2, \ \ \boldsymbol{\alpha}'_1 \cup \boldsymbol{\alpha}''_1 = \boldsymbol{\lambda}_1, \ \ \boldsymbol{\alpha}'_2 \cup \boldsymbol{\alpha}''_2 = \boldsymbol{\lambda}_2.$$

Notons $\Lambda$ l'ensemble des $i \in \mathbb{N}$ tels que $c_i(\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2) \neq 0$, avec la convention $c_0(\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2) = \infty$. Pour tout $i \in \Lambda$, notons $J(i)$, resp. $J'(i)$, $J''(i)$, l'ensemble des entiers $j \geqslant 1$ tels que $\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j} = i$, resp. $\beta'_j = i$, $\beta''_j = i$. La famille $(J(i))_{i \in \Lambda}$ est une partition de l'ensemble $\mathbb{N} - \{0\}$. Grâce à l'hypothèse $\boldsymbol{\beta}' \cup \boldsymbol{\beta}'' \leqslant \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2$, il en est de même des familles $(J'(i))_{i \in \Lambda}$ et $(J''(i))_{i \in \Lambda}$, certains de ces ensembles pouvant être vides. Pour $i \in \Lambda$, on a

$$|J(i)| = |J'(i)| + |J''(i)|.$$

D'autre part, puisque $\lambda_{1,j} + \lambda_{2,j}$ est constant pour $j \in J(i)$, il en est de même de $\lambda_{1,j}$ et $\lambda_{2,j}$. Notons $\ell_1(i)$ et $\ell_2(i)$ ces valeurs constantes. On a l'égalité

$$\text{(6)} \qquad \ell_1(i) + \ell_2(i) = i.$$

Démontrons la propriété suivante :

(7) soit $\boldsymbol{\alpha}$ un quadruplet de partitions; alors $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{Q}_0$ si et seulement si pour tout $i \in \Lambda$ et tout $j \in J'(i)$, resp. $j \in J''(i)$, on a les égalités :

$$\alpha'_{1,j} = \ell_1(i), \ \ \alpha'_{2,j} = \ell_2(i), \ \text{ resp. } \alpha''_{1,j} = \ell_1(i), \ \ \alpha''_{2,j} = \ell_2(i).$$

En effet, si $\boldsymbol{\alpha}$ vérifie cette propriété, pour tout $i \in \Lambda$ et tout $j \in J'(i)$, on a

$$\alpha'_{1,j} + \alpha'_{2,j} = \ell_1(i) + \ell_2(i) = i = \beta'_j.$$

Donc $\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\alpha}'_1 + \boldsymbol{\alpha}'_2$. *Idem* $\boldsymbol{\beta}'' = \boldsymbol{\alpha}''_1 + \boldsymbol{\alpha}''_2$. D'autre part :

$$\boldsymbol{\alpha}'_1 \cup \boldsymbol{\alpha}''_1 = \Big(\bigcup_{i \in \Lambda} (\ell_1(i))^{|J'(i)|}\Big) \cup \Big(\bigcup_{i \in \Lambda} (\ell_1(i))^{|J''(i)|}\Big) = \bigcup_{i \in \Lambda} (\ell_1(i))^{|J(i)|} = \boldsymbol{\lambda}_1.$$

*Idem* $\boldsymbol{\alpha}'_2 \cup \boldsymbol{\alpha}''_2 = \boldsymbol{\lambda}_2$. Donc $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{Q}_0$. Inversement, supposons $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{Q}_0$. Comme précédemment, l'égalité $\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\alpha}'_1 + \boldsymbol{\alpha}'_2$ implique que $\alpha'_{1,j}$ et $\alpha'_{2,j}$ sont constants pour $i \in \Lambda$ et $j \in J'(i)$. On note $a'_1(i)$ et $a'_2(i)$ ces valeurs constantes. Si $J'(i) = \varnothing$, ces valeurs ne sont pas définies mais elles n'interviendront pas vraiment dans les formules ci-dessous. On a l'égalité

$$a'_1(i) + a'_2(i) = i. \tag{8}$$

On définit de même $a''_1(i)$ et $a''_2(i)$. On a les égalités :

$$\bigcup_{i \in \Lambda} \Big((a'_1(i))^{|J'(i)|} \cup (a''_1(i))^{|J''(i)|}\Big) = \boldsymbol{\alpha}'_1 \cup \boldsymbol{\alpha}''_1 = \boldsymbol{\lambda}_1 = \bigcup_{i \in \Lambda} (\ell_1(i))^{|J(i)|}.$$

Démontrons la conclusion de (7) par récurrence descendante sur $i$. Soit $i \in \Lambda$. Par l'hypothèse de récurrence, on a $a'_1(k) = a''_1(k) = \ell_1(k)$ pour tout $k \in \Lambda$ tel que $k > i$. De l'égalité ci-dessus, on déduit :

$$\bigcup_{k \in \Lambda,\, k \leqslant i} \Big((a'_1(k))^{|J'(k)|} \cup (a''_1(k))^{|J''(k)|}\Big) = \bigcup_{k \in \Lambda,\, k \leqslant i} (\ell_1(k))^{|J(k)|}.$$

Supposons $J'(i) \neq \varnothing$. L'égalité précédente entraîne $a'_1(i) \leqslant \ell_1(i)$. *Idem* $a'_2(i) \leqslant \ell_2(i)$. Grâce à (6) et (8), ces inégalités sont des égalités. Ce sont les deux premières égalités de la conclusion de (7). On démontre de même les deux dernières. Cela démontre (7).

Pour $i \in \Lambda$, $j \in J'(i)$ et $n \in \{1, 2\}$, on a les égalités :

$$\ell_n(i) = \lambda_{n, c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2)} = \lambda_{n, c_{\geqslant \beta'_j}(\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2)} = \sigma_n(\boldsymbol{\beta}')_j.$$

Posons

$$\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}_1(\boldsymbol{\beta}'), \boldsymbol{\sigma}_2(\boldsymbol{\beta}'), \boldsymbol{\sigma}_1(\boldsymbol{\beta}''), \boldsymbol{\sigma}_2(\boldsymbol{\beta}'')).$$

De (7) résulte l'égalité :

$$\mathcal{Q}_0 = \{\boldsymbol{\sigma}\}.$$

Soit toujours $w \in W$. Supposons $\mathcal{Q}_0(w) \neq \varnothing$, soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{Q}_0(w)$. Les inégalités (5) sont vérifiées. Puisque $\boldsymbol{\beta}' \cup \boldsymbol{\beta}'' = \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2$, toutes ces inégalités doivent être des égalités. Donc $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{Q}_0$, *i.e.* $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\sigma}$. Par définition de $\mathcal{Q}(w)$, on a alors :

$$|I'_1(w)| = \sigma_1(\boldsymbol{\beta}'), \ \ |I'_2(w)| = \sigma_2(\boldsymbol{\beta}'), \ \ |I''_1(w)| = \sigma_1(\boldsymbol{\beta}''), \ \ |I''_2(w)| = \sigma_2(\boldsymbol{\beta}''). \tag{9}$$

Comme précédemment, l'application qui à $w$ associe $(|I_1'(w)|, |I_2'(w)|, |I_1''(w)|, |I_2''(w)|)$ se quotiente en une bijection de $W_L \backslash W / W^H$ sur l'ensemble des quadruplets d'entiers $(a_1', a_2', a_1'', a_2'')$ tels que

$$a_1' + a_2' = d(\ell'),\ \ a_1'' + a_2'' = d(\ell''),\ \ a_1' + a_1'' = d_1,\ \ a_2' + a_2'' = d_2 .$$

Notons $\dot{w}$ la double classe telle que pour $w \in \dot{w}$, on ait les égalités (9). Pour $w \in W - \dot{w}$, on a $\mathcal{Q}_0(w) = \varnothing$. Grâce à (4), on a donc :

$$\langle (\rho_1 \otimes \rho_2)_w, \pi(\boldsymbol{\beta}') \otimes \pi(\boldsymbol{\beta}'') \rangle_{W_L} = 0 .$$

Pour $w \in \dot{w}$, $\mathcal{Q}_0(w) = \mathcal{Q}_0 = \{\boldsymbol{\sigma}\}$. Grâce à (4) et VIII.2 (3), on a :

$$\langle (\rho_1 \otimes \rho_2)_w, \pi(\boldsymbol{\beta}') \otimes \pi(\boldsymbol{\beta}'') \rangle_{W_L} = 1 .$$

De plus, on a par définition $\sigma(w) = |I_2''(w)|$, donc $\sigma(w) = \sigma_2(\boldsymbol{\beta}'')$. Cela démontre (2).

Soient $\boldsymbol{\lambda}' \in \mathcal{P}(d(\ell'))$ et $\boldsymbol{\lambda}' \in \mathcal{P}(d(\ell''))$. Grâce à VIII.2 (2), les propriétés (1) et (2) restent vraies si l'on y substitue $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\lambda}'}$ à $\pi(\boldsymbol{\beta}')$ et $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\lambda}''}$ à $\pi(\boldsymbol{\beta}'')$. On en déduit :

(10) si $\langle (\rho_1 \otimes \rho_2)_L, \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\lambda}'} \otimes \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\lambda}''} \rangle_{W_L} \neq \{0\}$, alors $\boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}'' \leqslant \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2$. Supposons $\boldsymbol{\lambda}' \cup \boldsymbol{\lambda}'' = \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2$ ; alors $\langle (\rho_1 \otimes \rho_2)_L, \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\lambda}'} \otimes \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\lambda}''} \rangle_{W_L} = (-1)^{\sigma_2(\boldsymbol{\lambda}'')}$.

On démontre alors la proposition comme on a démontré la proposition IX.9, en utilisant bien sûr la proposition XII.4. Supposons $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2$. Il se glisse dans les calculs de IX.9 le terme $(-1)^{\sigma_2(\boldsymbol{\mu}'')}$, où $\boldsymbol{\mu}'' = \Lambda(N'')$. Il reste à prouver que :

$$(11) \qquad (-1)^{\sigma_2(\boldsymbol{\mu}'')} = \gamma^{G,H}_{\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2}(\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2, (q_i)) .$$

Or

$$\sigma_2(\boldsymbol{\mu}'') = \sum_{j \geqslant 1} \sigma_2(\boldsymbol{\mu}'')_j = \sum_{j \geqslant 1} \lambda_{2, c_{\geqslant \mu_j''}(\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2)} = \sum_{i \geqslant 1} c_i(\boldsymbol{\mu}'')\, \lambda_{2, c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2)} .$$

Pour tout entier $i \geqslant 1$, on a les relations :

$$\lambda_{2, c_{\geqslant i}(\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2)} = s(i) ,$$

$$c_i(\boldsymbol{\mu}'') \equiv d''(q_i) \bmod 2\mathbb{Z} .$$

On en déduit (11), ce qui achève la démonstration. □

**XII.7.** Supposons $(V, q_V)$ symplectique ou orthogonal. Pour tout $n \in \{1, 2\}$, soit $\iota_n = (\boldsymbol{\lambda}_n, \tau_n, \delta_n)$ ou $(\boldsymbol{\lambda}_n, \varepsilon_n, \tau_n, \delta_n)$ un élément de $\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V_n)$, *cf.* IX.10. Notons $\rho_n = \rho_{\iota_n}$, $\iota_{n,0} = (k_n', k_n'')$ l'élément de $\mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V_n)$ tel que $\rho_n \in \mathcal{R}(\iota_{n,0})^{\phi}$, $k_n = \sup(k_n', k_n'')$. On note $\boldsymbol{\lambda}$ la partition de $d$ induite par $\boldsymbol{\lambda}_1$ et $\boldsymbol{\lambda}_2$ (*cf.* XI.15). On a défini en XI.11 les ensembles $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ et $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ et en XI.21 les fonctions

$$\tau^{\pm} : \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ \ \delta^{\pm} : \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

On définit ci-dessous une fonction $\gamma_{\iota_1,\iota_2} : \mathrm{Nil}(V) \to \mathbb{Q}$. Elle est à support dans les éléments de la forme $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$ ou $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i), \varepsilon)$.

Supposons d'abord $(V, q_V)$ orthogonal pair et $\boldsymbol{\lambda}$ exceptionnelle. Alors $\boldsymbol{\lambda}_1$ et $\boldsymbol{\lambda}_2$ sont aussi exceptionnelles (corollaire XI.8). On pose :

$$\gamma_{\iota_1,\iota_2}(\boldsymbol{\lambda}, \varnothing, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{si } \varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2, \\ 0, & \text{si } \varepsilon = -\varepsilon_1\varepsilon_2. \end{cases}$$

Hormis ce cas, on commence par définir deux fonctions

$$\gamma^{\pm}_{\iota_1,\iota_2} : \mathrm{Nil}(V) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

à support dans les mêmes éléments que ci-dessus, en posant, pour $\varepsilon = \pm$,

$$\gamma^{\varepsilon}_{\iota_1,\iota_2}(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) = \begin{cases} 0, \ \text{s'il existe } \Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}) \text{ tel que } d''(q_{\geqslant\Delta}) \neq \delta^{-\varepsilon}(\Delta), \\ \displaystyle\prod_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \mathrm{sgn}(\eta'(q_\Delta))^{\tau^{\varepsilon}(\Delta)}\,\mathrm{sgn}(\eta''(q_\Delta))^{\tau^{-\varepsilon}(\Delta)}, \ \text{si } d''(q_{\geqslant\Delta}) = \delta^{-\varepsilon}(\Delta) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour tout } \Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}). \end{cases}$$

On pose

$$b(\iota_1,\iota_2) = \sum_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \Big[\delta^+(\Delta)(\delta^+(\Delta)-\delta^+(\Delta^+))\tau^+(\Delta)+\delta^-(\Delta)(\delta^-(\Delta)-\delta^-(\Delta^+))\tau^-(\Delta)\Big].$$

Si $(V, q_V)$ est symplectique, on pose :

$$\gamma_{\iota_1,\iota_2} = \begin{cases} \mathrm{sgn}(-1)^{b(\iota_1,\iota_2)}\,\mathrm{sgn}(\eta'(V_2))^{k_1}\big(\gamma^+_{\iota_1,\iota_2} + \mathrm{sgn}(\eta'(V_2))\gamma^-_{\iota_1,\iota_2}\big), \\ \qquad\qquad\qquad \text{si } \boldsymbol{\lambda}_2 \text{ n'est pas exceptionnelle}, \\ \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(-1)^{b(\iota_1,\iota_2)}(\gamma^+_{\iota_1,\iota_2} + \gamma^-_{\iota_1,\iota_2}), \ \text{si } \boldsymbol{\lambda}_2 \text{ est exceptionnelle}. \end{cases}$$

Rappelons que la partition $\varnothing$ est exceptionnelle.

Si $(V, q_V)$ est orthogonal impair, on pose :

$$\gamma_{\iota_1,\iota_2} = \mathrm{sgn}(-1)^{b(\iota_1,\iota_2)}\,\mathrm{sgn}(\eta'(V))^{k_2}\,\gamma^{\varepsilon}_{\iota_1,\iota_2}$$

où $\varepsilon = +$ si $k_1 + k_2$ est pair, $\varepsilon = -$ si $k_1 + k_2$ est impair.

Si $(V, q_V)$ est orthogonal pair, on pose

$$\gamma_{\iota_1,\iota_2} = \begin{cases} \mathrm{sgn}(-1)^{b(\iota_1,\iota_2)}\big(\gamma^+_{\iota_1,\iota_2} + \mathrm{sgn}(\eta'(V_2))\gamma^-_{\iota_1,\iota_2}\big), \ \text{si } \boldsymbol{\lambda}_1 \text{ et } \boldsymbol{\lambda}_2 \\ \qquad\qquad\qquad \text{sont toutes deux non exceptionnelles}, \\ \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(-1)^{b(\iota_1,\iota_2)}\big(\gamma^+_{\iota_1,\iota_2} + \mathrm{sgn}(\eta'(V_2))\gamma^-_{\iota_1,\iota_2}\big), \ \text{si l'une des partitions } \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \qquad\qquad\qquad \text{et } \boldsymbol{\lambda}_2 \text{ est exceptionnelle}. \end{cases}$$

On pose enfin

- si $(V, q_V)$ est symplectique ou orthogonal pair, $C(\iota_1,\iota_2) = 1$ ;

• si $(V, q_V)$ est orthogonal impair,

$$C(\iota_1,\iota_2)=\begin{cases}\operatorname{sgn}(-1)^{(k_1-k_2)/2}\operatorname{sgn}(\eta'(V_1))^{k_1+1}\operatorname{sgn}(\eta'(V_2))^{k_2+1}, \text{ si } k_1+k_2 \text{ est pair},\\ \operatorname{sgn}(-1)^{(k_1+k_2+1)/2}\operatorname{sgn}(\eta'(V_1))^{k_1+1}\operatorname{sgn}(\eta'(V_2))^{k_2+1},\\ \qquad\qquad \text{si } k_1+k_2 \text{ est impair}.\end{cases}$$

***Proposition***. — *Il existe un transfert $\phi^{\mathcal{H}}[\rho_1,\rho_2]$ de $\phi^{st,\mathcal{H}_1}_{\rho_1}\otimes\phi^{st,\mathcal{H}_2}_{\rho_2}$ à* $\operatorname{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\text{ent}})$ *tel que pour tout $\check{N}\in\check{\text{N}}\text{il}(V)$, on ait les égalités suivantes, où l'on écrit $\check{\Lambda}(\check{N})=(\boldsymbol{\mu},(q_i))$ ou $(\boldsymbol{\mu},(q_i),\varepsilon)$ :*

(i) *si $\boldsymbol{\mu}\not\leqslant\boldsymbol{\lambda}$, $\phi^{\mathcal{H}}[\rho_1,\rho_2](h_{\check{N}})=0$ ;*

(ii) *si $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\lambda}$, $\phi^{\mathcal{H}}[\rho_1,\rho_2](h_{\check{N}})=q^{d(\check{N})}C(\iota_1,\iota_2)\gamma_{\iota_1,\iota_2}\circ\check{\Lambda}(\check{N})$.*

*Démonstration*. — Ecrivons $\check{N}=(L,N',N'')$. Soit $\iota_0=(k',k'',\zeta)\in\mathcal{I}_0(\iota_{1,0},\iota_{2,0})$.

Supposons $(V,q_V)$ symplectique et $k_2>0$. Supposons $k'\in\mathcal{I}_0(\ell')$ et $k''\in\mathcal{I}_0(\ell'')$. Utilisons les notations introduites en XII.5. Soit $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_L(\iota_0)^{\phi}$. On a défini en XI.27 et XI.29 les ensembles $\mathcal{I}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$ et $\mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$. On va prouver les propriétés suivantes :

(1) si $m(\rho_1,\rho_2;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''})\neq 0$, alors $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$ ;

(2) supposons $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$ ; alors $m(\rho_1,\rho_2;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''})=1$.

Soient $(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')\in\mathcal{P}_2(n')$, resp. $(\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'')\in\mathcal{P}_2(n'')$ des couples de partitions paramétrisant $\rho_{\iota'}$, resp. $\rho_{\iota''}$. On a $\rho_{\iota'}=\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')$, $\rho_{\iota''}=\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'')$. En utilisant la définition de $m(\rho_1,\rho_2;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''})$ et les matrices introduites en VIII.3 (1), on a l'égalité :

$$(3)\; m(\rho_1,\rho_2;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''})=\sum_{w\in W_L\backslash W/W^H}\;\sum_{(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}')\in\mathcal{P}_2(n')}\;\sum_{(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'')\in\mathcal{P}_2(n'')} c(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}';\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')$$
$$c(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}''};\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'')\langle(\rho_1\otimes\rho_2)_w,\pi(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}')\otimes\pi(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'')\rangle_{W_L}.$$

Fixons $w\in W$, $(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}')\in\mathcal{P}_2(n')$ et $(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'')\in\mathcal{P}_2(n'')$. Comme dans le cas unitaire, et avec les mêmes notations (*cf.* XII.6), on a l'égalité :

$$(4)\quad \Big\langle(\rho_1\otimes\rho_2)_w,\pi(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}')\otimes\pi(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'')\Big\rangle_{W_L}$$
$$=\Big\langle\rho_1\otimes\rho_2,\operatorname{ind}_{W^H(w)}^{W^H}(\chi_w w^{-1}\cdot\operatorname{res}_{W_L(w)}^{W_L}\big(\pi(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}')\otimes\pi(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'')\big))\Big\rangle_{W^H}.$$

Rappelons qu'il existe des sous-groupes $U'_\alpha$ et $U'_\beta$ de $W'$ tels que :

• $U'_\alpha\simeq\prod_{j\geqslant 1}W(C_{\widetilde{\alpha}'_j})$, $U'_\beta\simeq\prod_{j\geqslant 1}W(C_{\widetilde{\beta}'_j})$,

• $\pi(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}')=\operatorname{ind}_{U'_\alpha\times U'_\beta}^{W'}\big(\mathbf{1}_{U'_\alpha}\otimes\operatorname{sgn}_{CD,U'_\beta}\big)$

*cf.* VIII.3 (on a noté $\operatorname{sgn}_{CD,U'_\beta}$ le produit des caractères $\operatorname{sgn}_{CD}$ des facteurs $W(C_{\widetilde{\beta}'_j})$ de $U'_\beta$). On a une description analogue de $\pi(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'')$. On calcule alors comme dans le cas unitaire le terme intervenant dans le membre de droite de (4). Définissons

$I_1'(w)$, $I_2'(w)$, $I_1''(w)$ et $I_2''(w)$. Notons $\mathcal{Q}(w,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}',\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'')$ l'ensemble des familles $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_1'',\boldsymbol{\alpha}_2'',\boldsymbol{\beta}_1',\boldsymbol{\beta}_2',\boldsymbol{\beta}_1'',\boldsymbol{\beta}_2'')$ de suites finies d'entiers $\geqslant 0$ telles que :

$$(5)\qquad \begin{cases} S(\boldsymbol{\alpha}_1') + S(\boldsymbol{\beta}_1') = |I_1'(w)|/2, & S(\boldsymbol{\alpha}_2') + S(\boldsymbol{\beta}_2') = |I_2'(w)|/2, \\ S(\boldsymbol{\alpha}_1'') + S(\boldsymbol{\beta}_1'') = |I_1''(w)|/2, & S(\boldsymbol{\alpha}_2'') + S(\boldsymbol{\beta}_2'') = |I_2''(w)|/2, \\ \boldsymbol{\alpha}_1' + \boldsymbol{\alpha}_2' = \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}', \ \ \boldsymbol{\alpha}_1'' + \boldsymbol{\alpha}_2'' = \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'', & \boldsymbol{\beta}_1' + \boldsymbol{\beta}_2' = \widetilde{\boldsymbol{\beta}}', \ \ \boldsymbol{\beta}_1'' + \boldsymbol{\beta}_2'' = \widetilde{\boldsymbol{\beta}}''. \end{cases}$$

On a alors l'égalité :

$$\begin{aligned} & w^{-1}\cdot \mathrm{res}_{W_L(w)}^{W_L}\left(\pi(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}')\otimes\pi(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'')\right) \\ = & \sum_{\boldsymbol{q}\in\mathcal{Q}(w,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}',\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'')} \pi(p(\boldsymbol{\alpha}_1'),p(\boldsymbol{\beta}_1'))\otimes\pi(p(\boldsymbol{\alpha}_1''),p(\boldsymbol{\beta}_1''))\otimes\pi(p(\boldsymbol{\alpha}_2'),p(\boldsymbol{\beta}_2'))\otimes\pi(p(\boldsymbol{\alpha}_2''),p(\boldsymbol{\beta}_2'')). \end{aligned}$$

Supposons pour fixer les notations $\zeta = 1$ et $k_1 \geqslant k_2$. Alors :

$$\begin{aligned} & \chi_w w^{-1}\cdot \mathrm{res}_{W_L(w)}^{W_L}\left(\pi(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}')\otimes\pi(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'')\right) \\ = & \sum_{\boldsymbol{q}\in\mathcal{Q}(w,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}',\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'')} \pi(p(\boldsymbol{\alpha}_1'),p(\boldsymbol{\beta}_1'))\otimes\pi(p(\boldsymbol{\alpha}_1''),p(\boldsymbol{\beta}_1''))\otimes\pi(p(\boldsymbol{\alpha}_2'),p(\boldsymbol{\beta}_2'))\otimes\pi(p(\boldsymbol{\beta}_2''),p(\boldsymbol{\alpha}_2'')), \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} (6)\quad & \mathrm{ind}_{W^H(w)}^{W^H}\left(\chi_w w^{-1}\cdot \mathrm{res}_{W_L(w)}^{W_L}\left(\pi(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}')\otimes\pi(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'')\right)\right) \\ = & \sum_{\boldsymbol{q}\in\mathcal{Q}(w,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}',\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'')} \pi(p(\boldsymbol{\alpha}_1')\cup p(\boldsymbol{\alpha}_1''),p(\boldsymbol{\beta}_1')\cup p(\boldsymbol{\beta}_1''))\otimes\pi(p(\boldsymbol{\alpha}_2')\cup p(\boldsymbol{\beta}_2''),p(\boldsymbol{\beta}_2')\cup p(\boldsymbol{\alpha}_2'')). \end{aligned}$$

Soient $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1)\in\mathcal{P}_2(n_1)$, resp. $(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)\in\mathcal{P}_2(n_2)$, les couples paramétrisant $\rho_1$, resp. $\rho_2$. Supposons $m(\rho_1,\rho_2;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''})\neq 0$. D'après (3), (4) et (6), il existe $w\in W$, $(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}')\in\mathcal{P}_2(n')$, $(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'')\in\mathcal{P}_2(n'')$ et $\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_1'',\boldsymbol{\alpha}_2'',\boldsymbol{\beta}_1',\boldsymbol{\beta}_2',\boldsymbol{\beta}_1'',\boldsymbol{\beta}_2'')\in\mathcal{Q}(w,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}',\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'')$ tels que :

- $c(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}';\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}')\neq 0$, $c(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'';\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'')\neq 0$,
- $\langle\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1),\,\pi(p(\boldsymbol{\alpha}_1)\cup p(\boldsymbol{\alpha}_1''),\,p(\boldsymbol{\beta}_1')\cup p(\boldsymbol{\beta}_1''))\rangle_{W_1}\neq 0$,
- $\langle\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2),\,\pi(p(\boldsymbol{\alpha}_2')\cup p(\boldsymbol{\beta}_2''),\,p(\boldsymbol{\beta}_2')\cup p(\boldsymbol{\alpha}_2''))\rangle_{W_2}\neq 0$.

D'après VIII.3 (1), ces relations entraînent :

- $\boldsymbol{\alpha}'\leqslant\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\boldsymbol{\beta}'\leqslant\widetilde{\boldsymbol{\beta}}',\ \boldsymbol{\alpha}''\leqslant\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\ \boldsymbol{\beta}''\leqslant\widetilde{\boldsymbol{\beta}}''$,
- $p(\boldsymbol{\alpha}_1')\cup p(\boldsymbol{\alpha}_1'')\leqslant\boldsymbol{\alpha}_1,\ p(\boldsymbol{\beta}_1')\cup p(\boldsymbol{\beta}_1'')\leqslant\boldsymbol{\beta}_1,\ p(\boldsymbol{\alpha}_2')\cup p(\boldsymbol{\beta}_2'')\leqslant\boldsymbol{\alpha}_2,\ p(\boldsymbol{\beta}_2')\cup p(\boldsymbol{\alpha}_2'')\leqslant\boldsymbol{\beta}_2$.

Grâce à (5), en posant :

$$\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\alpha}'',\boldsymbol{\beta}'',\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\boldsymbol{\alpha}_1'',\boldsymbol{\alpha}_2'',\boldsymbol{\beta}_1',\boldsymbol{\beta}_2',\boldsymbol{\beta}_1'',\boldsymbol{\beta}_2''),$$

on a alors $\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$, *cf.* XI.27. Donc $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$. Cela démontre (1).

Supposons $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$. Soit $\boldsymbol{p}$ l'unique élément de $\mathcal{P}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$ de la forme précédente (proposition XI.29 (ii)). Le même raisonnement montre que les seuls $w,(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}')$, $(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'',\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'')$ qui contribuent effectivement à l'expression (3) sont ceux pour lesquels

$$(\boldsymbol{\alpha}'_1, \boldsymbol{\alpha}'_2, \boldsymbol{\alpha}''_1, \boldsymbol{\alpha}''_2, \boldsymbol{\beta}'_1, \boldsymbol{\beta}'_2, \boldsymbol{\beta}''_1, \boldsymbol{\beta}''_2) \in \mathcal{Q}(w, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}', \widetilde{\boldsymbol{\beta}}', \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'', \widetilde{\boldsymbol{\beta}}'').$$

D'après les quatre premières relations de (5), la double classe de $w$ modulo $W_L$ à gauche et $W^H$ à droite est uniquement déterminée. Les quatre dernières relations de (5) déterminent uniquement $(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}', \widetilde{\boldsymbol{\beta}}')$ et $(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'', \widetilde{\boldsymbol{\beta}}'')$. Puisque $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$ (proposition XI.29 (ii)), la relation XI.27 (4) entraîne qu'en fait $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}' = \boldsymbol{\alpha}'$, $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}' = \boldsymbol{\beta}'$, $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'' = \boldsymbol{\alpha}''$, $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'' = \boldsymbol{\beta}''$. Donc

$$c(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}', \widetilde{\boldsymbol{\beta}}'; \boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}') = c(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}'', \widetilde{\boldsymbol{\beta}}''; \boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'') = 1$$

*cf.* VIII.3 (11)). De même grâce à XI.27 $(C_{\iota_0}^{\max})$,

$$\Big\langle \rho(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1), \pi\big(p(\boldsymbol{\alpha}'_1) \cup p(\boldsymbol{\alpha}''_1), p(\boldsymbol{\beta}'_1) \cup p(\boldsymbol{\beta}''_1)\big) \Big\rangle_{W_1} = 1,$$

$$\Big\langle \rho(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2), \pi(p(\boldsymbol{\alpha}'_2) \cup p(\boldsymbol{\beta}''_2), p(\boldsymbol{\beta}'_2) \cup p(\boldsymbol{\alpha}''_2)) \Big\rangle_{W_2} = 1$$

et les calculs précédents conduisent à l'égalité $m(\rho_1, \rho_2; \rho_{\iota'}, \rho_{\iota''}) = 1$. Cela démontre (2).

Grâce à (1) et à la proposition XI.28, on voit que

(7) $$f(\iota_0; \rho_1, \rho_2, \check{N}) = 0$$

si $\boldsymbol{\mu} \not\leq \boldsymbol{\lambda}$ (*cf.* XII.5 pour les définitions). On a supposé $k' \in \mathcal{I}_0(\ell')$ et $k'' \in \mathcal{I}_0(\ell'')$ mais la relation ci-dessus est triviale si ces conditions ne sont pas vérifiées.

Supposons $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda}$. Grâce à (1), (2) et à la proposition XI.29 (i), on a l'égalité :

$$f(\iota_0; \rho_1, \rho_2, \check{N}) = c(\iota_0) q^c \sum_{(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)} q^{-b(\iota') - b(\iota'')} (\chi_{\iota'}^{\natural} \otimes \chi_{\iota''}^{\natural})(\overline{Y}_{\check{N}}).$$

Cette relation est encore vraie si $k' \notin \mathcal{I}_0(\ell')$ ou $k'' \notin \mathcal{I}_0(\ell'')$, puisqu'alors on a $\mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0) = \varnothing$. Le calcul de l'expression ci-dessus s'effectue comme dans la démonstration de la proposition IX.12. On obtient :

(8) $$f(\iota_0; \rho_1, \rho_2, \check{N}) = q^{d(\check{N})} c(\iota_0) \operatorname{sgn}(-1)^{b' + b''} \gamma_{\iota_1, \iota_2}^{\zeta} \circ \check{\Lambda}(\check{N}),$$

où

$$b' = \sum_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} (k' + \delta^{\zeta}(\Delta))(\delta^{\zeta}(\Delta) - \delta^{\zeta}(\Delta^+)) \tau^{\zeta}(\Delta),$$

$$b'' = \sum_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} (k'' + \delta^{-\zeta}(\Delta))(\delta^{-\zeta}(\Delta) - \delta^{-\zeta}(\Delta^+)) \tau^{-\zeta}(\Delta)$$

(on a identifié $\zeta$ et $-\zeta$ à des signes). Pour $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, posons

$$b(\varepsilon) = \sum_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} (\delta^{\varepsilon}(\Delta) - \delta^{\varepsilon}(\Delta^+)) \tau^{\varepsilon}(\Delta).$$

Alors

$$b' + b'' = b(\iota_1, \iota_2) + k' b(\zeta) + k'' b(-\zeta).$$

Mais pour $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, on a la congruence :

$$\sum_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} (\delta^\varepsilon(\Delta) - \delta^\varepsilon(\Delta^+))\tau^\varepsilon(\Delta)$$

$$\equiv \frac{1}{4}\Big[\sum_{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \big(1-(-1)^{\tau^\varepsilon(\Delta)}\big)\big((-1)^{\delta^\varepsilon(\Delta)} - (-1)^{\delta^\varepsilon(\Delta^+)}\big)\Big] \bmod 2\mathbb{Z}.$$

Ces expressions sont calculées par le corollaire XI.24. Le calcul conduit à l'égalité :

$$b' + b'' \equiv \begin{cases} b(\iota_1, \iota_2) \bmod 2\mathbb{Z}, & \text{si } k_1 \geqslant k_2\,, \\ b(\iota_1, \iota_2) + [(k_1 + k_2 + 1)/2], & \text{si } k_2 > k_1\,. \end{cases}$$

Alors

$$c(\iota_0)\,\mathrm{sgn}(-1)^{b'+b''} = \mathrm{sgn}(-1)^{b(\iota_1,\iota_0)}\,\mathrm{sgn}(\eta'(V_2))^{k_1+e},$$

où

$$e = \begin{cases} 0, & \text{si } \zeta = 1, \\ 1, & \text{si } \zeta = -1. \end{cases}$$

On déduit alors de (8) l'égalité :

$$\sum_{\iota_0 \in \mathcal{I}_0(\iota_{1,0},\iota_{2,0})} f(\iota_0; \rho_1, \rho_2, \check{N}) = q^{d(\check{N})} \gamma_{\iota_1,\iota_2} \circ \check{\Lambda}(\check{N}).$$

Grâce à cette égalité et à l'égalité (7), l'énoncé résulte de la proposition XII.5.

Supposons maintenant $(V, q_V)$ symplectique et $k_2 = 0$. Supposons d'abord $\boldsymbol{\lambda}_2$ exceptionnelle. Nécessairement $(V_2, q_{V_2})$ est déployé et $\rho_2$ est paramétrisée par un couple de partitions de la forme $(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2)$. Dans la démonstration précédente, on doit remplacer $W_2$, par $W_2^\#$, $W^H$ par $W^{H\#}$ et $\rho_2$ par

$$\mathrm{ind}_{W_2}^{W_2^\#}(\rho_2)$$

qui est irréductible et encore paramétrisée par $(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2)$. Le calcul se fait alors comme ci-dessus. Il s'y glisse un facteur $1/2$ qui est contenu dans les constantes $c(\iota_0)$.

Supposons $\boldsymbol{\lambda}_2$ non exceptionnelle. Nous allons modifier les définitions de XII.5. Soit $\iota_0 = (k', k'', \zeta) \in \mathcal{I}_0(\iota_{1,0}, \iota_{2,0})$. Supposons $k' \in \mathcal{I}_0(\ell')$ et $k'' \in \mathcal{I}_0(\ell'')$. On définit une représentation $(\rho_1 \otimes \rho_2)_L^\natural$ de $W_L$ en remplaçant, dans les définitions du cas général de XII.5, $W_2$ par $W_2^\#$ et $\rho_2$ par $\rho_2^\#$ (et non pas par $\widetilde{\rho}_2$ comme on l'a fait en XII.5). Pour $\rho' \in \mathcal{R}(W')$ et $\rho'' \in \mathcal{R}(W'')$, on pose

$$m^\natural(\rho_1, \rho_2; \rho', \rho'') = 2\langle(\rho_1 \otimes \rho_2)_L^\natural, \rho' \otimes \rho''\rangle_{W_L}.$$

On définit alors $f^\natural(\iota_0; \rho_1, \rho_2, \check{N})$ en remplaçant $m(\rho_1, \rho_2; \rho', \rho'')$ par le terme ci-dessus dans les définitions de XII.5. Montrons que :

(9) la proposition XII.5 reste vraie si l'on y remplace les termes $f(\iota_0; \rho_1, \rho_2, \check{N})$ par $f^\natural(\iota_0; \rho_1, \rho_2, \check{N})$.

Posons

$$\iota_0^+ = (k_1, k_1, 1), \quad \iota_0^- = (k_1, k_1, -1).$$

Remarquons que

$$\mathcal{I}_0(\iota_{1,0},\iota_{2,0})=\{\iota_0^+,\iota_0^-\}.$$

Si $k_1\notin\mathcal{I}_0(\ell')$ ou $k_1\notin\mathcal{I}_0(\ell'')$, on a $f(\iota_0;\rho_1,\rho_2,\check{N})=f^\natural(\iota_0;\rho_1,\rho_2,\check{N})=0$ pour tout $\iota_0\in\mathcal{I}_0(\iota_{1,0},\iota_{2,0})$ et (9) est évident. Supposons $k_1\in\mathcal{I}_0(\ell')$ et $k_1\in\mathcal{I}_0(\ell'')$. Affectons d'un exposant $^+$, resp. $^-$, les objets définis en XII.5 ou ci-dessus, relatifs à $\iota_0^+$, resp. $\iota_0^-$. Remarquons que $W'^+=W'^-$, $W''^+=W''^-$. On note simplement $W'$ et $W''$ ces groupes et $W_L=W'\times W''$. Soit $w\in W_L\setminus W/W^H$, notons simplement

$$\mathrm{res}_w=\mathrm{res}^{W^H}_{w^{-1}W_L w\cap W^H}.$$

Rappelons que $\widetilde{\rho}_2=\rho_2^\#+\mathrm{sgn}(\eta'(V_2))\rho_2^b$ et $\rho_2^b=\mathrm{sgn}_{CD}\,\rho_2^\#$. Remarquons d'autre part que $\chi_w^-$ est le produit de $\chi_w^+$ par la restriction à $w^{-1}W_L w\cap W^H$ du caractère $\mathbf{1}_{W_1}\otimes\mathrm{sgn}_{CD,W_2}$ de $W^H$. On en déduit l'égalité :

$$\begin{aligned}\chi_w^+\,\mathrm{res}_w(\rho_1\otimes\widetilde{\rho}_2)&+\mathrm{sgn}(\eta'(V_2))\chi_w^-\,\mathrm{res}_w(\rho_1\otimes\widetilde{\rho}_2)\\&=2\chi_w^+\,\mathrm{res}_w(\rho_1\otimes\rho_2^\#)+2\,\mathrm{sgn}(\eta'(V_2))\chi_w^-\,\mathrm{res}_w(\rho_1\otimes\rho_2^\#).\end{aligned}$$

Des définitions résulte alors l'égalité :

$$(\rho_1\otimes\rho_2)_L^+ +\mathrm{sgn}(\eta'(V_2))(\rho_1\otimes\rho_2)_L^-=2(\rho_1\otimes\rho_2)_L^{\natural,+}+2\,\mathrm{sgn}(\eta'(V_2))(\rho_1\otimes\rho_2)_L^{\natural,-}.$$

En remarquant que

$$c(\iota_0^-)=\mathrm{sgn}(\eta'(V_2))\,c(\iota_0^+),$$

on en déduit que pour tous $\rho'\in\mathcal{R}(W')$ et $\rho''\in\mathcal{R}(W'')$, on a l'égalité :

$$\begin{aligned}c(\iota_0^+)m(\rho_1,\rho_2;\rho',\rho'')^+&+c(\iota_0^-)m(\rho_1,\rho_2;\rho',\rho'')^-\\&=c(\iota_0^+)m^\natural(\rho_1,\rho_2;\rho',\rho'')^+ +c(\iota_0^-)m^\natural(\rho_1,\rho_2;\rho',\rho'')^-.\end{aligned}$$

Il reste à remarquer que

$$\mathcal{I}_L(\iota_0^+)^\phi=\mathcal{I}_L(\iota_0^-)^\phi=\mathcal{I}_{\ell'}(k_1)\times\mathcal{I}_{\ell''}(k_1)$$

pour en déduire la relation (9). La démonstration du cas $k_2\neq 0$ s'applique en y remplaçant les termes $m(\rho_1,\rho_2;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''})$ par $m^\natural(\rho_1,\rho_2;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''})$. Le facteur 2 intervenant dans la définition de ce dernier terme se simplifie avec le 1/2 intervenant dans les constantes $c(\iota_0)$.

Supposons $(V,q_V)$ orthogonal impair, soit $\iota_0=(k',k'',\zeta)$ l'unique élément de $\mathcal{I}_0(\iota_{1,0},\iota_{2,0})$. Supposons d'abord $k_1\neq k_2$, donc $k''\neq 0$. La démonstration est analogue à celle du cas symplectique. Supposons $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\lambda}$. Comme dans la preuve de la proposition IX.12, on doit tenir compte des signes $\varepsilon(\iota')$, $\varepsilon(\iota'')$. Pour $\varepsilon\in\{\pm1\}$, définissons $b(\varepsilon)$ comme dans le cas symplectique. Posons

$$C_1=c(\iota_0)\,\mathrm{sgn}(-1)^{b(-\zeta)+(k'+k''-1)/2+b(\iota_1,\iota_2)}\,\mathrm{sgn}(\eta'(V))^{b(\zeta)+(k'-1)/2}.$$

On obtient l'égalité :

$$f(\iota_0;\rho_1,\rho_2,\check{N})=C_1\,q^{d(\check{N})}\,\gamma^\zeta_{\iota_1,\iota_2}\circ\check{\Lambda}(\check{N}).$$

On calcule $b(\zeta)$ et $b(-\zeta)$ grâce au corollaire XI.24. On en déduit l'égalité :

$$C_1 = C(\iota_1, \iota_2)\,\mathrm{sgn}(-1)^{b(\iota_1,\iota_2)}\,\mathrm{sgn}(\eta'(V))^{k_2},$$

d'où

$$f(\iota_0; \rho_1, \rho_2, \check{N}) = C(\iota_1, \iota_2) q^{d(\check{N})} \gamma_{\iota_1,\iota_2} \circ \check{\Lambda}(\check{N}),$$

puis, comme précédemment, le (ii) de l'énoncé.

Supposons maintenant $k_1 = k_2$. Alors $k'' = 0$ et $(\ell'', q_{\ell''})$ est orthogonal pair déployé. Supposons $k' \in \mathcal{I}_0(\ell')$ et soient $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L(\iota_0)^\phi$. La preuve des relations (1) et (2) doit être légèrement modifiée car $\rho_{\iota''}$ est remplacé dans les définitions par

$$\mathrm{ind}_{W''}^{W''\#}(\rho_{\iota''}).$$

Si cette représentation est irréductible, la preuve est sans changement. Si elle ne l'est pas, elle est alors égale à $\rho^{\#}_{\iota''} + \rho^{b}_{\iota''}$ et l'on a :

$$m(\rho_1, \rho_2; \rho_{\iota'}, \rho_{\iota''}) = \langle(\rho_1 \otimes \rho_2)_L, \rho_{\iota'} \otimes \rho^{\#}_{\iota''}\rangle_{W_L^{\#}} + \langle(\rho_1 \otimes \rho_2)_L, \rho_{\iota'} \otimes \rho^{b}_{\iota''}\rangle_{W_L^{\#}}.$$

A partir de cette formule, la preuve de (1) est analogue à celle du cas symplectique. Supposons $(\iota', \iota'') \in \mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1, \iota_2; \iota_0)$. En reprenant la démonstration de (2) et en utilisant le (iii) de la proposition XI.29, on voit que l'un des termes du membre de droite de l'égalité ci-dessus est égal à 1 et que l'autre est nul. Cela démontre encore (2). La suite de la démonstration est sans changement.

Supposons enfin $(V, q_V)$ orthogonal pair. On doit traiter séparément différents cas selon les valeurs de $k_1$ et $k_2$. Nous traiterons seulement le cas $k_1 = k_2 = 0$, en laissant les autres au lecteur. Posons

$$\iota_0^+ = (0, 0, 1), \quad \iota_0^- = (0, 0, -1).$$

Alors

$$\mathcal{I}_0(\iota_{1,0}, \iota_{2,0}) = \{\iota_0^+, \iota_0^-\}.$$

Remarquons que $0 \in \mathcal{I}_0(\ell')$ et $0 \in \mathcal{I}_0(\ell'')$. Les groupes $W'$, $W''$ et $W_L$ de XII.5 ne dépendent pas du choix de $\iota_0$ dans l'ensemble ci-dessus, ce qui les définit sans ambiguïté. Supposons d'abord que $\boldsymbol{\lambda}_1$ et $\boldsymbol{\lambda}_2$ ne sont pas toutes deux exceptionnelles. Soit $\iota_0 \in \mathcal{I}_0(\iota_{1,0}, \iota_{2,0})$. On définit une représentation $(\rho_1 \otimes \rho_2)^\natural_L$ de $W_L^{\#}$ en remplaçant, dans les définitions du cas général de XII.5, $W_1$, $W_2$, $W'$ et $W''$ par $W_1^{\#}$, $W_2^{\#}$, $W'^{\#}$ et $W''^{\#}$ et, pour $n \in \{1, 2\}$, $\rho_n$ par :

- $\mathrm{ind}_{W_n}^{W_n^{\#}}(\rho_n)$ si cette représentation est irréductible, *i.e.* si $\boldsymbol{\lambda}_n$ est exceptionnelle,
- $\rho_n^{\#}$, sinon.

Posons

$$c_1 = \begin{cases} 1, & \text{si } \boldsymbol{\lambda}_1 \text{ ou } \boldsymbol{\lambda}_2 \text{ est exceptionnelle,} \\ 2, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $\rho' \in \mathcal{R}(W')$ et $\rho'' \in \mathcal{R}(W'')$, posons :

$$m^\natural(\rho_1, \rho_2; \rho', \rho'') = c_1 \langle(\rho_1 \otimes \rho_2)^\natural_L, \widetilde{\rho'} \otimes \widetilde{\rho''}\rangle_{W_L^{\#}}.$$

On définit alors $f^\natural(\iota_0;\rho_1,\rho_2,\check{N})$ en remplaçant $m(\rho_1,\rho_2;\rho',\rho'')$ par le terme ci-dessus dans les définitions de XII.5. Montrons que la relation (9) reste vraie. Affectons d'un exposant $^+$, resp. $^-$, les objets définis en XII.5 ou ci-dessus, relatifs à $\iota_0^+$, resp. $\iota_0^-$. Des arguments similaires à ceux de la preuve de (9) démontrent l'égalité :

$$\begin{aligned}(\rho_1\otimes\rho_2)_L^+ + \operatorname{sgn}(\eta'(V_2))(\rho_1\otimes\rho_2)_L^- &= c_1(\rho_1\otimes\rho_2)_L^{\natural,+} + c_1\operatorname{sgn}(\eta'(V_2))(\rho_1\otimes\rho_2)_L^{\natural,-}\\ &+c_1\operatorname{sgn}(\eta'(V_1))\operatorname{sgn}_{CD}(\rho_1\otimes\rho_2)_L^{\natural,-} + c_1\operatorname{sgn}(\eta'(V_1)\eta'(V_2))\operatorname{sgn}_{CD}(\rho_1\otimes\rho_2)_L^{\natural,+}\end{aligned}$$

où $\operatorname{sgn}_{CD}$ est la restriction à $W_L^\#$ du caractère $\operatorname{sgn}_{CD}$ de $W^\#$. Soient $\rho'\in\mathcal{R}(W')$ et $\rho''\in\mathcal{R}(W'')$. On a les égalités :

$$\operatorname{sgn}_{CD}(\widetilde{\rho}'\otimes\widetilde{\rho}'') = \operatorname{sgn}(\eta(\ell')\eta(\ell''))(\widetilde{\rho}'\otimes\widetilde{\rho}''),$$
$$\eta(\ell'')=1,\ \eta(\ell')=\eta'(V)=\eta'(V_1)\eta'(V_2).$$

On en déduit l'égalité :

$$\begin{aligned}&\Big\langle(\rho_1\otimes\rho_2)_L^+ + \operatorname{sgn}(\eta'(V_2))(\rho_1\otimes\rho_2)_L^-,\widetilde{\rho}'\otimes\widetilde{\rho}''\Big\rangle_{W_L^\#}\\ &\qquad= 2c_1\Big\langle(\rho_1\otimes\rho_2)_L^{\natural,+} + \operatorname{sgn}(\eta'(V_2))(\rho_1\otimes\rho_2)_L^{\natural,-},\widetilde{\rho}'\otimes\widetilde{\rho}''\Big\rangle_{W_L^\#}.\end{aligned}$$

En se rappelant le terme $[W^\#:W]^{-1}$ de la définition de XII.5, l'égalité précédente s'écrit :

$$\begin{aligned}&m(\rho_1,\rho_2;\rho',\rho'')^+ + \operatorname{sgn}(\eta'(V_2))m(\rho_1,\rho_2;\rho',\rho'')^-\\ &\qquad= m^\natural(\rho_1,\rho_2;\rho',\rho'')^+ + \operatorname{sgn}(\eta'(V_2))m^\natural(\rho_1,\rho_2;\rho',\rho'')^-.\end{aligned}$$

On achève de prouver (9) comme précédemment.

Soient $\iota_0\in\mathcal{I}_0(\iota_{1,0},\iota_{2,0})$ et $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_L(\iota_0)^\phi=\mathcal{I}_{\ell'}(0)^\phi\times\mathcal{I}_{\ell''}(0)$. Avec les notations ci-dessus, on démontre la relation analogue à (1) :

(10) $\qquad$ si $m^\natural(\rho_1,\rho_2;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''})\neq 0$, alors $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$.

Supposons $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$. Si $\iota'$ n'est pas exceptionnel, on a défini en XI.29 l'élément $n'(\iota',\iota'')$ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si $\iota'$ est exceptionnel, on pose $n'(\iota',\iota'')=0$. Alors :

(11) supposons $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$ ; alors

$$m^\natural(\rho_1,\rho_2;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''}) = c_1\operatorname{sgn}(\eta'(V))^{n'(\iota',\iota'')}.$$

Supposons $\iota'$ et $\iota''$ tous deux non exceptionnels. On a l'égalité

$$\widetilde{\rho}_{\iota'}\otimes\widetilde{\rho}_{\iota''} = (\rho_{\iota'}^\# + \operatorname{sgn}(\eta'(V))\rho_{\iota'}^b)(\rho_{\iota''}^\# + \rho_{\iota''}^b).$$

Pour $*'=\#$ ou $b$ et $*''=\#$ ou $b$, posons

$$m(*',*'') = \langle(\rho_1\otimes\rho_2)_L^\natural,\rho_{\iota'}^{*'}\otimes\rho_{\iota''}^{*''}\rangle_{W_L^\#}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}(12)\quad & m^\natural(\rho_1,\rho_2;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''})\\ &= c_1(m(\#,\#)+m(\#,b)+\operatorname{sgn}(\eta'(V))m(b,\#)+\operatorname{sgn}(\eta'(V))m(b,b)).\end{aligned}$$

En reprenant la démonstration de (2) et en utilisant le (iii) de la proposition XI.29, on voit que un et un seul des termes

$$m(\#,\#),\ \ m(\#,b),\ \ m(b,\#),\ \ m(b,b)$$

vaut 1 et les autres sont nuls. En posant $n'=n'(\iota',\iota'')$, $n''=n''(\iota',\iota'')$, le terme non nul est :

- $m(\#,\#)$, si $(n',n'')=(0,0)$ ;
- $m(\#,b)$, si $(n',n'')=(0,1)$ ;
- $m(b,\#)$, si $(n',n'')=(1,0)$ ;
- $m(b,b)$, si $(n',n'')=(1,1)$.

On déduit (11) de ces formules et de l'égalité (12).

Le (i) de l'énoncé se déduit de (9), (10) et de la proposition XI.28 comme dans les cas précédents. Reprenons en détail la démonstration de (ii). On suppose $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\lambda}$. Ecrivons $N'=(\boldsymbol{\mu}',(q_i'))$ ou $(\boldsymbol{\mu}',(q_i'),\widetilde{\varepsilon}')$, $N''=(\boldsymbol{\mu}'',(q_i''))$ ou $(\boldsymbol{\mu}'',(q_i''),\widetilde{\varepsilon}'')$. Soit $\iota_0=(0,0,\zeta)\in\mathcal{I}_0(\iota_{1,0},\iota_{2,0})$. Notons $\mathcal{J}^\zeta$ le sous-ensemble des $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$ tels que, en posant $\iota'=(\boldsymbol{\lambda}',\boldsymbol{\varepsilon}')$ ou $(\boldsymbol{\lambda}',\varepsilon',\boldsymbol{\varepsilon}')$ et $\iota''=(\boldsymbol{\lambda}'',\boldsymbol{\varepsilon}'')$ ou $(\boldsymbol{\lambda}'',\varepsilon'',\boldsymbol{\varepsilon}'')$, on ait :

- $\boldsymbol{\lambda}'=\boldsymbol{\mu}'$ et $\boldsymbol{\lambda}''=\boldsymbol{\mu}''$ ;
- si $\boldsymbol{\mu}'$, resp. $\boldsymbol{\mu}''$, est exceptionnelle, $\varepsilon'=\widetilde{\varepsilon}'$, resp. $\varepsilon''=\widetilde{\varepsilon}''$.

Comme en IX.12 (17), on démontre l'égalité :

$$\begin{aligned}&f^\natural(\iota_0,\rho_1,\rho_2,\check{N})\\&\quad=c(\iota_0)q^c\sum_{(\iota',\iota'')\in\mathcal{J}^\zeta}m^\natural(\rho_1,\rho_2;\rho_{\iota'},\rho_{\iota''})^\zeta q^{-b(\iota')-b(\iota'')}\varepsilon(\iota')\varepsilon(\iota'')(\mathcal{Y}_{\iota'}\otimes\mathcal{Y}_{\iota''})(\overline{Y}_{\check{N}}),\end{aligned}$$

où $c$ est défini en XII.5. S'il existe $\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $d''(q_{\geqslant\Delta})\neq\delta^{-\zeta}(\Delta)$, on a $\mathcal{J}^\zeta=\mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1,\iota_2;\iota_0)=\varnothing$ (*cf.* XI.29) et $f^\natural(\iota_0;\rho_1,\rho_2,\check{N})=\gamma^\zeta_{\iota_1,\iota_2}\circ\check{\Lambda}(\check{N})=0$. Supposons que $d''(q_{\geqslant\Delta})=\delta^{-\zeta}(\Delta)$ pour tout $\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$. Dans ce cas $\mathcal{J}^\zeta$ est réduit à un élément : avec les notations ci-dessus, $\boldsymbol{\lambda}'$, $\boldsymbol{\lambda}''$ et, éventuellement, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, sont déterminés par les égalités ci-dessus et $\boldsymbol{\varepsilon}'$, $\boldsymbol{\varepsilon}''$ sont déterminés par les conditions de XI.29. On note $(\iota',\iota'')$ l'unique élément de $\mathcal{J}^\zeta$.

***Remarque***. — Les conditions $\iota'\in\mathcal{I}(\ell')^\phi$ et $\iota''\in\mathcal{I}(\ell'')^\phi$ imposées en XI.29 sont bien vérifiées : si $(\ell',q_{\ell'})$ n'est pas déployé, on a $a(\boldsymbol{\mu}')\neq\varnothing$ puisque $N'\in\mathrm{Nil}(\ell')$, donc $\iota'\in\mathcal{I}(\ell')^\phi$ puisque $\boldsymbol{\lambda}'=\boldsymbol{\mu}'$.

On a $\varepsilon(\iota')=\varepsilon(\iota'')=1$ et, comme en IX.12 (4) :

$$c-b(\iota')-b(\iota'')=d(\check{N}).$$

Le même calcul qui a conduit à l'égalité IX.12 (10) conduit maintenant à l'égalité :

$$(\mathcal{Y}_{\iota'}\otimes\mathcal{Y}_{\iota''})(\overline{Y}_{\check{N}})=\begin{cases}\operatorname{sgn}(-1)^{b(\iota_1,\iota_2)+b(1)+b(-1)}\gamma^\zeta_{\iota_1,\iota_2}\circ\check{\Lambda}(\check{N}), & \text{si } (V,q_V) \text{ est déployée},\\(-1)^{\tau^\zeta(\Delta'_{\max})}\operatorname{sgn}(-1)^{b(\iota_1,\iota_2)+b(1)+b(-1)}\gamma^\zeta_{\iota_1,\iota_2}\circ\check{\Lambda}(\check{N}), & \text{sinon},\end{cases}$$

où $b(1)$ et $b(-1)$ sont définis comme dans le cas symplectique et $\Delta'_{\max}$ est défini en XI.29. Grâce au corollaire XI.24, on montre que $b(1)+b(-1)=0$. D'autre part, on a l'égalité :

$$\operatorname{sgn}(\eta'(V))^{n'(\iota',\iota'')^{\zeta}} = \begin{cases} 1, & \text{si } (V,q_V) \text{ est déployée,} \\ (-1)^{\tau^{\zeta}(\Delta'_{\max})}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Grâce à (11) et aux formules ci-dessus, on obtient alors :

$$f^{\natural}(\iota_0;\rho_1,\rho_2,\check{N}) = q^{d(\check{N})} c_1\, c(\iota_0)\, \operatorname{sgn}(-1)^{b(\iota_1,\iota_2)} \gamma^{\zeta}_{\iota_1,\iota_2} \circ \check{\Lambda}(\check{N}).$$

On calcule immédiatement $c_1\, c(\iota_0)$ et l'on en déduit :

$$\sum_{\iota_0\in\mathcal{I}_0(\iota_{1,0},\iota_{2,0})} f^{\natural}(\iota_0;\rho_1,\rho_2,\check{N}) = q^{d(\check{N})}\gamma_{\iota_1,\iota_2}\circ\check{\Lambda}(\check{N}).$$

Le (ii) de l'énoncé se déduit de (9).

Supposons maintenant que $\boldsymbol{\lambda}_1$ et $\boldsymbol{\lambda}_2$ sont toutes deux exceptionnelles. Cela implique que $(V,q_V)$, $(V_1,q_{V_1})$ et $(V_2,q_{V_2})$ sont tous trois déployés et que $\boldsymbol{\lambda}$ est exceptionnelle. On doit modifier les preuves de (1) et (2). Soit $\iota_0\in\mathcal{I}_0(\iota_{1,0},\iota_{2,0})$. On a défini en XII.5 la représentation $(\rho_1\otimes\rho_2)_L$ de $W_L$. En remplaçant dans sa construction les groupes $W_1$, $W_2$, $W'$, $W''$ par $W_1^{\#}$, $W_2^{\#}$, $W'^{\#}$, $W''^{\#}$ et les représentations $\rho_1$ et $\rho_2$ par $\widetilde{\rho}_1$ et $\widetilde{\rho}_2$, on définit de même une représentation $(\rho_1\otimes\rho_2)_L^{\natural}$ de $W_L^{\#}$. L'élément $w_{CD}$ de $W$ (*cf.* II.3) appartient à $W_L^{\#}$. Notons $w_{CD}(\rho_1\otimes\rho_2)_L$ la représentation de $W_L$ déduite de $(\rho_1\otimes\rho_2)_L$ par conjugaison par $w_{CD}$. On vérifie que pour tous $\rho'\in\mathcal{R}(W')$ et $\rho''\in\mathcal{R}(W'')$, on a l'égalité :

$$\langle(\rho_1\otimes\rho_2)_L,\rho'\otimes\rho''\rangle_{W_L} + \langle w_{CD}(\rho_1\otimes\rho_2)_L,\rho'\otimes\rho''\rangle_{W_L} = \langle(\rho_1\otimes\rho_2)_L^{\natural},\widetilde{\rho}'\otimes\widetilde{\rho}''\rangle_{W_L^{\#}}.$$

On peut appliquer au membre de droite les mêmes arguments que l'on a utilisé dans la preuve de (1) et (2). Grâce à l'égalité ci-dessus, on en déduit encore (1). Supposons $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$. On a maintenant :

$$\langle(\rho_1\otimes\rho_2)_L,\rho_{\iota'}\otimes\rho_{\iota''}\rangle_{W_L} + \langle w_{CD}(\rho_1\otimes\rho_2)_L,\rho_{\iota'}\otimes\rho_{\iota''}\rangle_{W_L} = 1. \tag{13}$$

L'un des termes du membre de gauche est égal à 1, l'autre est nul. Puisque $\boldsymbol{\lambda}$ est exceptionnelle et $(\iota',\iota'')\in\mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$, $\iota'$ et $\iota''$ sont tous deux exceptionnels. Ecrivons $\iota'=(\boldsymbol{\lambda}',\varnothing,\varepsilon')$, $\iota''=(\boldsymbol{\lambda}'',\varnothing,\varepsilon'')$. On a $\boldsymbol{\lambda}'\cup\boldsymbol{\lambda}''=\boldsymbol{\lambda}$. On va montrer :

$$\langle(\rho_1\otimes\rho_2)_L,\rho_{\iota'}\otimes\rho_{\iota''}\rangle_{W_L} = 1 \text{ si et seulement si } \varepsilon'\varepsilon''=\varepsilon_1\varepsilon_2. \tag{14}$$

La démonstration de la proposition se poursuivra alors comme dans le cas symplectique.

Les termes de $\boldsymbol{\lambda}_1$, $\boldsymbol{\lambda}_2$, $\boldsymbol{\lambda}'$ et $\boldsymbol{\lambda}''$ sont tous pairs. Définissons des partitions $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}'$, $\boldsymbol{\alpha}''$ par :

$$\alpha_{1,j}=\lambda_{1,2j}/2,\ \ \alpha_{2,j}=\lambda_{2,2j}/2,\ \ \alpha'_j=\lambda'_{2j}/2,\ \ \alpha''_j=\lambda''_{2j}/2$$

pour tout entier $j \geqslant 1$. Grâce au lemme XI.4, on voit que :

$$\rho_1 = \boldsymbol{\rho}^{\varepsilon_1}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1), \ \ \rho_2 = \boldsymbol{\rho}^{\varepsilon_2}(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2), \ \ \rho_{\iota'} = \boldsymbol{\rho}^{\varepsilon'}(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}'), \ \ \rho_{\iota''} = \boldsymbol{\rho}^{\varepsilon''}(\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\alpha}'')$$

(*cf.* VIII.4). Rappelons la construction suivante (*cf.* VIII.3). Soient $\gamma \in \mathcal{P}(d(\ell')/2)$ et $\widetilde{\varepsilon}' \in \{\pm 1\}$. Fixons une famille $(K_j')_{j=1,\dots,c(\gamma)}$ de sous-ensembles de $I'$ (*cf.* VIII.5) telle que :

- pour tout $j \in \{1, \dots, c(\gamma)\}$, $|K_j'| = \gamma_j$ ;
- $I'$ est union disjointe des ensembles $K_j'$ et $-K_j'$ pour $j \in \{1, \dots, c(\gamma)\}$ ;
- en notant $e'$ le nombre d'éléments $> 0$ de $\bigcup_{j=1}^{c(\gamma)} K_j'$, on a $\widetilde{\varepsilon}' = (-1)^{e'}$. Notons

$M'$ le sous-groupe des éléments de $W'$ qui conservent chaque $K_j'$. On dira que $M'$ est associé à $(\gamma, \widetilde{\varepsilon}')$. Effectuons cette construction pour le couple $(2\boldsymbol{\alpha}', \varepsilon')$, où bien sûr $2\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{\alpha}'$. Cela définit donc une famille $(K_j')_{j=1,\dots,c(\boldsymbol{\alpha}')}$ et un groupe $M'$. Construisons de façon similaire une famille $(K_j'')_{j=1,\dots,c(\boldsymbol{\alpha}'')}$ et un groupe $M''$. Posons $M = M' \times M''$. D'après les définitions de VIII.4, on a l'égalité :

$$\langle \mathrm{res}_M^{W_L}(\rho_{\iota'} \otimes \rho_{\iota''}), \mathbf{1}_M \rangle_M = 1.$$

En vertu de (13), (14) résulte des assertions suivantes :

(15) • si $\langle \mathrm{res}_M^{W_L}(w_{CD}(\rho_1 \otimes \rho_2)_L), \mathbf{1}_M \rangle_M \geqslant 1$, alors $\varepsilon' \varepsilon'' = -\varepsilon_1 \varepsilon_2$ ;
• si $\langle \mathrm{res}_M^{W_L}(\rho_1 \otimes \rho_2)_L), \mathbf{1}_M \rangle_M \geqslant 1$, alors $\varepsilon' \varepsilon'' = \varepsilon_1 \varepsilon_2$.

Les preuves de ces deux assertions sont similaires. Prouvons seulement la seconde. Soit $w \in W$. On a les égalités :

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_M^{W_L}((\rho_1 \otimes \rho_2)_w) &= \mathrm{res}_M^{W_L} \, \mathrm{ind}_{W_L \cap w W^H w^{-1}}^{W_L} \left(w \cdot \chi_w \, \mathrm{res}_{w^{-1} W_L w \cap W^H}^{W^H} (\rho_1 \otimes \rho_2)\right) \\ &= \sum_{u \in M \backslash W_L / W_L \cap w W^H w^{-1}} \mathrm{ind}_{M \cap u w W^H w^{-1} u^{-1}}^{M} (\pi_u), \end{aligned}$$

où

$$\pi_u = uw \cdot \mathrm{res}_{w^{-1} u^{-1} M u w \cap W^H}^{w^{-1} W_L w \cap W^H} \left(\chi_w \, \mathrm{res}_{w^{-1} W_L w \cap W^H}^{W^H} (\rho_1 \otimes \rho_2)\right)$$

pour tout $u \in W_L$. Pour tout tel $u$, il est clair que la restriction à $w^{-1} u^{-1} M u w \cap W^H$ de $\chi_w$ est triviale. On a donc aussi :

$$\pi_u = uw \cdot \mathrm{res}_{w^{-1} u^{-1} M u w \cap W^H}^{W^H} (\rho_1 \otimes \rho_2).$$

On obtient

$$\mathrm{res}_M^{W_L}((\rho_1 \otimes \rho_2)_L) = \sum_{v \in M \backslash W / W^H} \mathrm{ind}_{M \cap v W^H v^{-1}}^{M} \left(v \cdot \mathrm{res}_{v^{-1} M v \cap W^H}^{W^H} (\rho_1 \otimes \rho_2)\right).$$

Pour tout $v \in W$, on a l'égalité

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathrm{ind}_{M \cap v W^H v^{-1}}^{M} \left(v \cdot \mathrm{res}_{v^{-1} M v \cap W^H}^{W^H} (\rho_1 \otimes \rho_2)\right), \mathbf{1}_M \right\rangle_M \\ &\qquad = \left\langle \mathrm{res}_{v^{-1} M v \cap W^H}^{W^H} (\rho_1 \otimes \rho_2), \mathbf{1}_{v^{-1} M v \cap W^H} \right\rangle_{v^{-1} M v \cap W^H}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \mathrm{res}_M^{W_L}((\rho_1\otimes\rho_2)_L),\mathbf{1}_M\Big\rangle_M \\
&\qquad = \sum_{v\in M\backslash W/W^H} \Big\langle \mathrm{res}^{W^H}_{v^{-1}Mv\cap W^H}(\rho_1\otimes\rho_2),\mathbf{1}_{v^{-1}Mv\cap W^H}\Big\rangle_{v^{-1}Mv\cap W^H}.
\end{aligned}$$

Supposons le membre de gauche $\geqslant 1$. Il existe alors $v\in W$ tel que

$$\Big\langle \mathrm{res}^{W^H}_{v^{-1}Mv}(\rho_1\otimes\rho_2),\mathbf{1}_{v^{-1}Mv\cap W^H}\Big\rangle_{v^{-1}Mv\cap W^H}\geqslant 1. \tag{16}$$

Fixons un tel $v$. Définissons une suite finie $\gamma_1'$ d'entiers $\geqslant 0$ par

$$\gamma'_{1,j}=\begin{cases} v(I_1)\cap K'_j, & \text{pour } j\in\{1,\dots,c(\boldsymbol{\alpha}')\},\\ 0, & \text{pour } j\geqslant c(\boldsymbol{\alpha}')+1.\end{cases}$$

Définissons de même des suites finies $\gamma_2'$, $\gamma_1''$, $\gamma_2''$. Notons $e_1$ le nombre d'éléments $>0$ de l'ensemble :

$$I_1\cap v^{-1}\bigg(\Big(\bigcup_{j=1}^{c(\boldsymbol{\alpha}')}K'_j\Big)\cup\Big(\bigcup_{j=1}^{c(\boldsymbol{\alpha}'')}K''_j\Big)\bigg),$$

posons $\widetilde{\varepsilon}_1=(-1)^{e_1}$. Définissons de même $\widetilde{\varepsilon}_2$. On vérifie qu'il existe des sous-groupes $M_1$ de $W_1$, resp. $M_2$ de $W_2$, associés comme ci-dessus à $(p(\gamma_1')\cup p(\gamma_1''),\widetilde{\varepsilon}_1)$, resp. $(p(\gamma_2')\cup p(\gamma_2''),\widetilde{\varepsilon}_2)$, tels que $v^{-1}Mv\cap W^H=M_1\times M_2$. D'après VIII.3 (3), la relation (16) implique :

$$p(\gamma_1')\cup p(\gamma_1'')\leqslant 2\boldsymbol{\alpha}_1,\quad p(\gamma_2')\cup p(\gamma_2'')\leqslant 2\boldsymbol{\alpha}_2. \tag{17}$$

On a a[illegible]ruction :

$$\gamma_1'+\gamma_2'=2\boldsymbol{\alpha}',\quad \gamma_1''+\gamma_2''=2\boldsymbol{\alpha}'',$$

$$\boldsymbol{\alpha}'\cup\boldsymbol{\alpha}''=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

Ces relations impliquent que les inégalités (17) sont des égalités. Donc $M_1$, resp. $M_2$, est associé à $(2\boldsymbol{\alpha}_1,\widetilde{\varepsilon}_1)$, resp. $(2\boldsymbol{\alpha}_2,\widetilde{\varepsilon}_2)$. D'après les définitions de VIII.4, la relation (16) implique $\widetilde{\varepsilon}_1=\varepsilon_1$, $\widetilde{\varepsilon}_2=\varepsilon_2$. Mais, par construction, on a l'égalité $\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_2=\varepsilon'\varepsilon''$. On en déduit l'égalité $\varepsilon_1\varepsilon_2=\varepsilon'\varepsilon''$. Cela achève la preuve de la deuxième assertion de (15), celle de (14) et finalement celle de la proposition. □

***Remarque***. — Il est évident que les valeurs de la fonction $\gamma_{\iota_1,\iota_2}$ appartiennent à $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. En fait, elles appartiennent à $\mathbb{Z}$.

*Démonstration*. — Il n'apparaît de facteur $1/2$ dans les définitions que s'il existe un et un seul $n\in\{1,2\}$ tel que $(V_n,q_{V_n})$ soit orthogonal pair et $\boldsymbol{\lambda}_n$ soit exceptionnelle. Supposons qu'il en soit ainsi et soit $n\in\{1,2\}$ vérifiant ces propriétés. Supposons $n=2$. Puisque $\boldsymbol{\lambda}_2$ est exceptionnelle, on voit que $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2$, $J=\varnothing$ et $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})=$

$\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_1)$. En utilisant les définitions de XI.21, on voit que $\delta^+ = \delta^-$ et $\tau^+ = \tau^-$. Donc $\gamma^+_{\iota_1,\iota_2} = \gamma^-_{\iota_1,\iota_2}$ et, puisque

$$\gamma_{\iota_1,\iota_2} = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(-1)^{b(\iota_1,\iota_2)}(\gamma^+_{\iota_1,\iota_2} + \gamma^-_{\iota_1,\iota_2}),$$

cette fonction est à valeurs entières. Supposons $n = 1$. Alors $(V, q_V)$ est orthogonal pair, $J = \varnothing$ et $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}) = \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda}_2)$. On voit que $\delta^+ = \delta^-$ et $\tau^+ = \tau^- + 1$. Soit $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) \in \mathrm{Nil}(V)$. S'il existe $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $d''(q_{\geqslant\Delta}) \neq \delta^+(\Delta) = \delta^-(\Delta)$, on a

$$\gamma^+_{\iota_1,\iota_2}(\boldsymbol{\lambda}, q_i)) = \gamma_{\iota_1,\iota_2}(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) = 0.$$

Supposons que pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, on ait $d''(q_{\geqslant\Delta}) = \delta^+(\Delta) = \delta^-(\Delta)$. Alors

$$\gamma^+_{\iota_1,\iota_2}(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) = \gamma^-_{\iota_1,\iota_2}(\boldsymbol{\lambda}, q_i)) \prod_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \operatorname{sgn}(\eta'(q_\Delta)\eta''(q_\Delta)).$$

Puisque

$$\bigoplus_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} q_\Delta \sim_a q_V,$$

on a

$$\prod_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \eta'(q_\Delta) = (-1)^{e'/2}\eta'(V), \quad \prod_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \eta''(q_\Delta) = (-1)^{e''/2},$$

où $e'$, resp. $e''$, est le nombre de $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tels que $d'(q_\Delta) = 1$, resp. $d''(q_\Delta) = 1$. Puisque $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}_2)$, $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda})$ est pair pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, et $d'(q_\Delta) = d''(q_\Delta)$. Donc $e' = e''$. D'après l'hypothèse, $e''$ est le nombre de $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tels que $\delta^+(\Delta) \neq \delta^+(\Delta^+)$. Puisque $\delta^+(\Delta_{\min}) = \delta^+(\Delta^+_{\max}) = 0$ (*cf.* XI.21), $e''$ est pair. On obtient :

$$\prod_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \operatorname{sgn}(\eta'(q_\Delta)\eta''(q_\Delta)) = \operatorname{sgn}(\eta'(V)) = \operatorname{sgn}(\eta'(V_2)).$$

D'où l'égalité :

$$\gamma^+_{\iota_1,\iota_2} = \operatorname{sgn}(\eta'(V_2))\gamma^-_{\iota_1,\iota_2}.$$

Puisque

$$\gamma_{\iota_1,\iota_2} = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(-1)^{b(\iota_1,\iota_2)}\big(\gamma^+_{\iota_1,\iota_2} + \operatorname{sgn}(\eta'(V_2))\gamma^-_{\iota_1,\iota_2}\big),$$

cette fonction est à valeurs entières. □

***XII.8. Lemme***. — *Soient $D \in \mathcal{D}$, $D^H \in \mathcal{D}^H$, $(D_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{D}$ et $(D_i^H)_{i\in\mathbb{Z}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{D}^H$. On suppose :*

- *$D_i \in \mathcal{D}[i]$ et $D_i^H \in \mathcal{D}^H[i]$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ ;*
- *$D_i = 0$ et $D_i^H = 0$ si $|i|$ est assez grand ;*
- *$\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D_i)$ et $\mathrm{res}_{\mathcal{H}^H}(D^H) = \sum_{i\in Z} \mathrm{res}_{\mathcal{H}^H}(D_i^H)$ ;*
- *$D$ est un transfert de $D^H$.*

*Alors pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $D_{i+\dim(\boldsymbol{g})-\dim(\boldsymbol{h})}$ est un transfert de $D_i^H$.*

*Démonstration.* — Soient $f \in C_c^\infty(g)$ et $f^H \in C_c^\infty(h)$. Supposons que $f^H$ soit un transfert de $f$. Soit $z \in F^\times$. Pour tout $Y \in h_{G-\mathrm{reg}}$, on vérifie la suite d'égalités :

$$\begin{aligned}\phi^{G,H}(Y, f^{z^2}) &= |z|_F^{\dim(\boldsymbol{h})-\dim(\boldsymbol{g})}\phi^{G,H}(z^2Y, f)\\ &= |z|_F^{\dim(\boldsymbol{h})-\dim(\boldsymbol{g})}\phi^{H,\mathrm{st}}(z^2Y, f^H)\\ &= |z|_F^{\dim(\boldsymbol{h})-\dim(\boldsymbol{g})}\phi^{H,\mathrm{st}}(Y, f^{H,z^2}).\end{aligned}$$

On en déduit que $|z|_F^{\dim(\boldsymbol{h})-\dim(\boldsymbol{g})} f^{H,z^2}$ est un transfert de $f^{z^2}$, donc

$$D^H(f^{H,z^2}) = |z|_F^{\dim(\boldsymbol{g})-\dim(\boldsymbol{h})} D(f^{z^2}).$$

Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in F^\times$ tel que $v_F(z) \geqslant N$, on ait $f^{z^2} \in \mathcal{H}$ et $f^{H,z^2} \in \mathcal{H}^H$. Pour tout tel $z$, on a :

$$\begin{aligned}D^H(f^{H,z^2}) &= \sum_{i\in Z}|z|_F^{-i} D_i^H(f^H),\\ D(f^{z^2}) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}}|z|_F^{-i} D_i(f).\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}|z|_F^{-i} D_i^H(f^H) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}|z|_F^{-i+\dim(\boldsymbol{g})-\dim(\boldsymbol{h})} D_i(f).$$

Cette égalité étant vraie pour tout $z \in F^\times$ tel que $v_F(z) \geqslant N$, on a :

$$D_i^H(f^H) = D_{i+\dim(\boldsymbol{g})-\dim(\boldsymbol{h})}(f)$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Cela achève la démonstration. □

**XII.9.** Pour tout $n \in \{1,2\}$, soit $\iota_n \in \mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V_n)$. On a défini en IX.13 une distribution $\phi_{\iota_n} \in \mathcal{D}_{\mathrm{nil}}^{G_n} \cap \mathcal{D}^{G_n,\mathrm{st}}$. En XII.6 dans le cas unitaire, en XII.7 dans les cas symplectique ou orthogonal, on a défini une fonction $\gamma_{\iota_1,\iota_2} : \mathrm{Nil}(V) \to \mathbb{Q}$. On définit une distribution $\phi_{\iota_1,\iota_2} \in \mathcal{D}_{\mathrm{nil}}$ par l'égalité :

$$\phi_{\iota_1,\iota_2} = \sum_{\mathcal{O}\in g_{\mathrm{nil}}/G} \gamma_{\iota_1,\iota_2} \circ \Lambda(\mathcal{O})\phi_{\mathcal{O}}.$$

***Théorème.*** — *Pour tout $(\iota_1,\iota_2) \in \mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V_1)\times\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V_2)$, la distribution $\phi_{\iota_1,\iota_2}$ est un transfert de $\phi_{\iota_1}\otimes\phi_{\iota_2}$.*

*Démonstration.* — Pour fixer les notations, on suppose $(V, q_V)$ symplectique ou orthogonal. Pour tout $n \in \{1,2\}$, notons $\boldsymbol{\lambda}_n$ la partition qui figure dans les données $\iota_n$ et $\rho_n = \rho_{\iota_n}$. Utilisons le lemme IX.13 et introduisons une famille $(D_{n,i})_{i\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{D}^{G_n}$ telle que :

- pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $D_{n,i} \in \mathcal{D}^{G_n}[i]$ ;
- $D_{n,i} = 0$ si $|i|$ est assez grand et si $i > \dim(\iota_n)$ ;
- $D_{n,\dim(\iota_n)} = C(\iota_n)\phi_{\iota_n}$,

- $\phi_{\rho_n}^{st,\mathcal{H}_n} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{res}_{\mathcal{H}_n}(D_{n,i})$.

Soit $\boldsymbol{\lambda}$ la partition induite par $\boldsymbol{\lambda}_1$ et $\boldsymbol{\lambda}_2$ (*cf.* XI.15), notons $\dim(\boldsymbol{\lambda})$ la dimension d'une orbite de $\boldsymbol{g}(\overline{F})$ paramétrisée par $\boldsymbol{\lambda}$ ou $(\boldsymbol{\lambda},\varepsilon)$. Introduisons l'élément $\phi^{\mathcal{H}}[\rho_1,\rho_2]$ de $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$ qui vérifie la proposition XII.7. La démonstration du lemme IX.13 s'applique. Introduisons donc une famille $(D_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ telle que :

- pour tout $i\in\mathbb{Z}$, $D_i\in\mathcal{D}[i]$ ;
- $D_i=0$ si $|i|$ est assez grand et si $i>\dim(\boldsymbol{\lambda})$ ;
- $D_{\dim(\boldsymbol{\lambda})} = C(\iota_1,\iota_2)\phi_{\iota_1,\iota_2}$ ;
- $\phi^{\mathcal{H}}[\rho_1,\rho_2] = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{res}_{\mathcal{H}}(D_i)$.

Puisque $\phi^{\mathcal{H}}[\rho_1,\rho_2]$ est un transfert à $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$ de $\phi_{\rho_1}^{st,\mathcal{H}_1}\otimes\phi_{\rho_2}^{st,\mathcal{H}_2}$, le lemme XII.8 implique que pour tout $i\in\mathbb{Z}$, $D_{i+\dim(\boldsymbol{g})-\dim(\boldsymbol{h})}$ est un transfert de :

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z},\, j+k=i} D_{1,j}\otimes D_{2,k}.$$

Appliquons cette propriété pour $i=\dim(\iota_1)+\dim(\iota_2)$. En utilisant la relation :

$$\dim(\boldsymbol{\lambda}) = \dim(\iota_1)+\dim(\iota_2)+\dim(\boldsymbol{g})-\dim(\boldsymbol{h})$$

(*cf.* lemme XI.16) et les propriétés des familles $(D_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $(D_{n,i})_{i\in\mathbb{Z}}$ pour $n\in\{1,2\}$, on obtient que $C(\iota_1,\iota_2)\phi_{\iota_1,\iota_2}$ est transfert de $C(\iota_1)C(\iota_2)\phi_{\iota_1}\otimes\phi_{\iota_2}$. On vérifie que

$$C(\iota_1,\iota_2)=C(\iota_1)C(\iota_2)\neq 0.$$

On en déduit l'énoncé. □

Grâce au théorème IX.15, le résultat ci-dessus décrit entièrement le transfert des distributions appartenant à l'espace $\mathcal{D}_{\mathrm{nil}}^{H}\cap\mathcal{D}^{H,\mathrm{st}}$.

***Remarque***. — Si $(V,q_V)$ est symplectique, le couple $((V_1,q_{V_1}),(V_2,q_{V_2}))$ est dissymétrique puisque $(V_1,q_{V_1})$ est symplectique et $(V_2,q_{V_2})$ orthogonal pair. Par contre si $(V,q_V)$ est orthogonal, on peut échanger les deux facteurs $(V_1,q_{V_1})$ et $(V_2,q_{V_2})$. Evidemment la distribution $\phi_{\iota_1,\iota_2}$ et la fonction $\gamma_{\iota_1,\iota_2}$ doivent être invariantes par cet échange. C'est un corollaire du théorème ci-dessus. Il est néanmoins rassurant de le vérifier directement. Comme il ne s'agit que d'une vérification, on n'en donne ci-dessous qu'une brève esquisse, en supposant $(V,q_V)$ orthogonal impair et $k_1+k_2$ impair. Posons

$$(\overline{V}_1,q_{\overline{V}_1})=(V_2,q_{V_2}),\ \ (\overline{V}_2,q_{\overline{V}_2})=(V_1,q_{V_1}),\ \ \overline{\iota}_1=\iota_2,\ \ \overline{\iota}_2=\iota_1,$$

et affectons de $^-$ tous les objets construits à partir des données $(\overline{V}_1,q_{\overline{V}_1})$, $(\overline{V}_2,q_{\overline{V}_2})$, $\overline{\iota}_1$, $\overline{\iota}_2$. On veut prouver que $\overline{\gamma}_{\overline{\iota}_1,\overline{\iota}_2}=\gamma_{\iota_1,\iota_2}$. Les termes $\boldsymbol{\lambda}$, $J$, $J^+$, $J^-$, $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ sont les mêmes pour les deux ensembles de données. Grâce aux définitions de XI.21, on vérifie les égalités suivantes :

- $\overline{\delta}^{+}=\delta^+$, $\overline{\delta}^{-}=\delta^-$ ;

(1) • pour tout $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $|J(\Delta)| \geqslant 2$, $\overline{\tau}^+(\Delta) = \tau^+(\Delta)$ et $\overline{\tau}^-(\Delta) = \tau^-(\Delta) + 1$ ;
(2) • pour tout $\Delta \in \widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $|J(\Delta)| = 1$,

$$\overline{\tau}^+(\Delta) = \tau^+(\Delta) + \delta^-(\Delta) - \delta^-(\Delta^+) \text{ et } \overline{\tau}^-(\Delta) = \tau^-(\Delta) + 1 + \delta^+(\Delta) - \delta^+(\Delta^+).$$

Soit $(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) \dot{\in} \mathrm{Nil}(V)$. S'il existe $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $d''(q_{\geqslant\Delta}) \neq \delta^+(\Delta)$, on a

$$\overline{\gamma}^-_{\overline{\iota}_1,\overline{\iota}_2}(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) = \gamma^-_{\iota_1,\iota_2}(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) = 0.$$

Supposons que pour tout $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, on a $d''(q_{\geqslant\Delta}) = \delta^+(\Delta)$. Soit $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $|J(\Delta)| = 1$, *i.e.* $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda}) = 1$. Les termes $\overline{\tau}^+(\Delta)$ et $\overline{\tau}^-(\Delta)$ interviennent dans la définition de $\overline{\gamma}^-_{\overline{\iota}_1,\overline{\iota}_2}(\boldsymbol{\lambda}, (q_i))$ *via* le produit

$$\mathrm{sgn}(\eta'(q_\Delta))^{\overline{\tau}^-(\Delta)} \,\mathrm{sgn}(\eta''(q_\Delta))^{\overline{\tau}^+(\Delta)}. \tag{3}$$

La forme $q_\Delta$ est de dimension 1 et $d''(q_\Delta) = \delta^+(\Delta) - \delta^+(\Delta^+)$. Si $\delta^+(\Delta) = \delta^+(\Delta^+)$, on a donc $\mathrm{sgn}(\eta''(q_\Delta)) = 1$. Grâce à (2), l'expression (3) est égale à :

$$\mathrm{sgn}(\eta'(q_\Delta))^{\tau^-(\Delta)+1} \,\mathrm{sgn}(\eta''(q_\Delta))^{\tau^+(\Delta)}. \tag{4}$$

Si $\delta^+(\Delta) = \delta^+(\Delta^+) + 1$, on a $\mathrm{sgn}(\eta'(q_\Delta)) = 1$. On a prouvé en XI.29 (4) que

$$\delta^+(\Delta) + \delta^-(\Delta) - \delta^+(\Delta^+) - \delta^-(\Delta^+) \equiv c_\Delta(\boldsymbol{\lambda}) \bmod 2\mathbb{Z}. \tag{5}$$

Donc $\delta^-(\Delta) = \delta^-(\Delta^+)$ et, grâce à (2), l'expression (3) est encore égale à (4). Si maintenant $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ vérifie $|J(\Delta)| \geqslant 2$, les expressions (3) et (4) sont encore égales grâce à (2). On en déduit l'égalité :

$$\overline{\gamma}^-_{\overline{\iota}_1,\overline{\iota}_2}(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) = \prod_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \mathrm{sgn}(\eta'(q_\Delta))^{\tau^-(\Delta)+1} \,\mathrm{sgn}(\eta''(q_\Delta))^{\tau^+(\Delta)},$$

d'où :

$$\overline{\gamma}^-_{\overline{\iota}_1,\overline{\iota}_2}(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) = \gamma^-_{\iota_1,\iota_2}(\boldsymbol{\lambda}, (q_i)) \prod_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \mathrm{sgn}(\eta'(q_\Delta)).$$

Puisque

$$\bigoplus_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} q_\Delta \sim_a q_V,$$

on a l'égalité

$$\prod_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \eta'(q_\Delta) = (-1)^{(e'-1)/2}\eta'(V),$$

où $e'$ est le nombre de $\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tels que $d'(q_\Delta) = 1$. Grâce à l'hypothèse sur $(\boldsymbol{\lambda}, q_i)$ et à la congruence (5), on a l'égalité :

$$e' = \big|\{\Delta \in \mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}) ; \delta^-(\Delta) \neq \delta^-(\Delta^+)\}\big|.$$

De ces calculs résulte l'égalité :

$$\overline{\gamma}^-_{\overline{\iota}_1,\overline{\iota}_2} = \mathrm{sgn}(\eta'(V)) \,\mathrm{sgn}(-1)^{(e'-1)/2}\gamma^-_{\iota_1,\iota_2}. \tag{6}$$

Grâce à (1) et (2), on a l'égalité :

$$\begin{aligned} b(\iota_1,\iota_2) = \sum_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})} \Big[&\delta^+(\Delta)(\delta^+(\Delta)-\delta^+(\Delta^+))\tau^+(\Delta) \\ &+\delta^-(\Delta)(\delta^-(\Delta)-\delta^-(\Delta^+))(\tau^-(\Delta)+1)\Big] \\ + \sum_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda}),\,|J(\Delta)|=1} \Big[&\delta^+(\Delta)(\delta^+(\Delta)-\delta^+(\Delta^+)(\delta^-(\Delta)-\delta^-(\Delta^+)) \\ &+\delta^-(\Delta)(\delta^-(\Delta)-\delta^-(\Delta^+))(\delta^+(\Delta)-\delta^+(\Delta^+))\Big]. \end{aligned}$$

Grâce à (5), on a

$$(\delta^+(\Delta)-\delta^+(\Delta^+))(\delta^-(\Delta)-\delta^-(\Delta^+))=0$$

pour tout $\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tel que $|J(\Delta)|=1$. La deuxième somme ci-dessus est donc nulle. La première vaut :

$$b(\iota_1,\iota_2)+\sum_{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})}\delta^-(\Delta)(\delta^-(\Delta)-\delta^-(\Delta^+)).$$

En posant

$$E' = \big|\{\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda});\,\delta^-(\Delta)\neq\delta^-(\Delta^+)\ \text{ et }\ \delta^-(\Delta)=1\}\big|,$$

on obtient

$$\operatorname{sgn}(-1)^{\overline{b}(\bar\iota_1,\bar\iota_2)} = \operatorname{sgn}(-1)^{E'+b(\iota_1,\iota_2)}. \tag{7}$$

Notons

$$\Delta_1\geqslant\cdots\geqslant\Delta_{e'}$$

les éléments $\Delta$ de $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tels que $\delta^-(\Delta)\neq\delta^-(\Delta^+)$. On a $\delta^-(\Delta_{e'})=\delta^-(\Delta_{\min})=0$. Alors l'ensemble des $\Delta\in\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$ tels que $\delta^-(\Delta)\neq\delta^-(\Delta^+)$ et $\delta^-(\Delta)=1$ n'est autre que $\{\Delta_2,\Delta_4,\dots,\Delta_{e'-1}\}$. Donc

$$E'=(e'-1)/2. \tag{8}$$

Rappelons que

$$\overline{\gamma}_{\bar\iota_1,\bar\iota_2} = \operatorname{sgn}(-1)^{\overline{b}(\bar\iota_1,\bar\iota_2)}\operatorname{sgn}(\eta'(V))^{\overline{k}_2}\,\overline{\gamma}^-_{\bar\iota_1,\bar\iota_2}.$$

Les égalités (6), (7) et (8), jointes aux relations

$$\overline{k}_2=k_1\equiv k_2+1 \bmod 2\mathbb{Z}$$

démontrent l'égalité cherchée $\overline{\gamma}_{\bar\iota_1,\bar\iota_2}=\gamma_{\iota_1,\iota_2}$.

# INDEX DES NOTATIONS


**I.1.** $\nu$, Lévi $(\boldsymbol{G})$, $\mathrm{Par}(\boldsymbol{M})$
3. $\eta(q_V)$, $K(L)$, $k(L)$, $K(L)^1$, $K(L)^0$
4. $q_g$, $E^G$, $\mathcal{O}(X)$
5. $\lambda_{\geqslant j}$, $\lambda_{\leqslant j}$, $S(\boldsymbol{\lambda})$, $S_\ell(\boldsymbol{\lambda})$, $c_i(\boldsymbol{\lambda})$, $c(\boldsymbol{\lambda})$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}(n)$, $\succ$, $p(\boldsymbol{\lambda})$
6. $\mathcal{P}(V)$, $\mathrm{Nil}(V)$, $\Lambda$
7. $\mathcal{O}^{\mathrm{st}}(Y)$, $\mathcal{O}(I,(a_i),(c_i))$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^J$
8. $\Theta_{\max}(V)$, $\mathcal{T}_{\max}$, $\Lambda_{\mathcal{T}}$
9. $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}$, $\mathcal{D}_{\mathrm{nil}}$, $g_{\mathrm{tn}}$, $g_{\mathrm{ent}}$, $\mathrm{res}_{\mathcal{H}}$, $\mathrm{res}_{\mathcal{H}_0}$

**II.2.** $\mathcal{I}_0(V)$, $\mathcal{T}$
3. $W(A_{n-1})$, $W(C_n)$, $W(D_n)$, $w_{CD}$, $\mathrm{sgn}_{CD}$, sgn, $\boldsymbol{T}(k)$, $\boldsymbol{M}(k)$, $W(k)$, $w_\phi$
4,5. ${}^o\boldsymbol{\lambda}$, ${}^o\mathcal{E}$, $\mathcal{O}^{\mathrm{alg}}({}^oX)$, ${}^of$, ${}^o\gamma$
6. $Q_T$, $Q_\theta$, $Q_w$
7. $\delta(G,T)$
9. $\gamma(\boldsymbol{T})$, $\gamma(\theta)$

**III.1.** $\mathcal{I}_0(V)$, $\Theta(V)$
2. ${}^of$, $\phi_\theta(X_T,\cdot)$
3. $\Theta(\theta,L)$, $[\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}]$, $[\theta',\theta'']^0$, $\eta(\theta',\theta'')$, $m(L)$
5. $\phi_\theta^{\mathcal{H}}$
6. $\mathrm{Ann}(\mathcal{D})$
7. $Q_\theta$, $\mathrm{Ann}_{\mathcal{H}}(\mathcal{D}_{\mathrm{ent}})$, $\mathrm{res}_{\mathcal{D}_{\mathrm{ent}}}$
8. $\delta(\iota_0)$, $\delta(\theta)$, $\gamma(\theta)$, $\Pi(\theta)$, $Z(\theta)$, $c(\theta)$

**IV.1**,2. $D_\theta[\Gamma,X_T]$
4. $\mathcal{M}$, $\mathrm{ind}_M^G$, $\boldsymbol{M}_X$
5. $\Delta_{G,H}$, $\phi^{G,H}(Y,\cdot)$, $C_c^\infty(g)^{H-\mathrm{inst}}$, $\mathcal{D}^{G,H}$, $\mathcal{E}(X)$, $\mathcal{K}(X)$, $\mathcal{K}^{G,H}(X)$, $\phi^{\mathrm{st}}(X,\cdot)$, $\mathcal{D}^{\mathrm{st}}$
6. $\Xi(V)$, $\Theta(V,\xi)$, $\mathcal{E}(\xi)$, $\theta(\xi,e)$, $c_i(\boldsymbol{\lambda},\kappa)$, $\mathcal{K}(\xi)$, $\overline{\mathcal{K}}(\xi)$, $\sim$, $\approx$, $\overline{\kappa}^0$
8. $P(\boldsymbol{\lambda},\kappa)$, $S(\theta,\kappa)$
9. $\phi_{\xi,\kappa}^{\mathcal{H}}$
10. $\phi_{\xi,\overline{\kappa}}^{\mathcal{H}}$
11. $Q_{\xi,\overline{\kappa}}$, $\boldsymbol{M}_\xi$
12. $\mathcal{I}_0^{\mathrm{st}}(V)$, $\Xi^{\mathrm{st}}(V)$
14. $\mathrm{Unip}(V)$
15. $f^z$, $\mathcal{D}[n]$

**V.1.** $\mathcal{Q}(W)$, $Q[X]$
4. $\varepsilon(\psi)$
5. $U_{\mathrm{orth}}(\mathcal{W})$
6. $U_{\mathrm{symp}}(\mathcal{W})$
7. $\boldsymbol{g}(2)^{\#}$

**VI.7.** $h(j',j)_i$
9. $h^{\#}(j',j)_i$
10. $t(j',j)$, $\theta(j',j)$
11. $k^1(j)$, $b(j)$
17. $k_n$
18. $z(Z)$
20. $z(x)$

**VII.1.** $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_{>n}$, $\mathcal{J}$, $\widehat{\mathcal{J}}$
2. $\mathcal{B}(\alpha)$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{J}^{\#}$, $\xi_j(\alpha,\beta)$
6. $h(\alpha,j',j)_i$
8. $h^{\#}(\alpha,j',j)_i$
9. $t^{\#}(\alpha,j',j)$, $\theta^{\#}(\alpha,j',j)$, $t(\alpha,j',j)$, $\theta(\alpha,j',j)$
10. $h(\alpha,j',j)^i$
17. $k_n$
18. $z(\alpha,Z)$

**VIII.1.** $\mathcal{R}(W)$, $\mathbf{1}_W$
2. $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha})$, $\pi(\boldsymbol{\beta})$
3. $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, $\pi(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, $\mathcal{P}_2(n)$
4. $W^{\#}$, $\rho^{\#}$, $\rho^{b}$, $\boldsymbol{\rho}^{+}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\rho}^{-}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$
6. $\overline{\mathrm{Nil}}(V)$, $a(\boldsymbol{\lambda})$, $A(\boldsymbol{\lambda})$, $\mathcal{I}(V)$, $\mathcal{R}(k)$, $\mathcal{I}(k)$, $\rho_\iota$
7. $[a,b]$, $[a,b]_2$, $\Psi_d$, $\psi_{\mathcal{P}}$, $\psi_W$, $\psi_{\mathrm{nil}}$, $\Psi'_d$, $\psi'_{\mathcal{P}}$, $\psi'_W$, $\psi'_{\mathrm{nil}}$
8. $K_k$
11. $\rho(w_\phi)$, $b(\iota)$, $\varepsilon(\iota)$, $a(\boldsymbol{\lambda})_{\mathrm{imp}}$, $a_{\max}$, $K_\iota$, $\chi_\iota$
13. $\mathcal{Y}_\iota$, $\chi_\iota^\natural$, $Q_T^\natural$, $Q_\theta^\natural$
14. $\Gamma_Y$
15. $\mathcal{S}_{n,D}$, $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{S}_n^+$
16,18,20. $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, $c_\Delta(\boldsymbol{\lambda})$, $\widetilde{a}(\boldsymbol{\lambda})$, $\Delta_{\min}$, $\Delta_{\max}$, $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$
17,19,21. $\mathcal{F}am(\boldsymbol{\lambda})$, fam

**IX.1.** $\check{\mathrm{N}}\mathrm{il}(V)$, $\check{\Lambda}$, $\mathcal{O}(\check{N})$
2. $h_{\check{N}}$, $\overline{Y}_{\check{N}}$
4. $d(\check{N})$
5. $n(\iota_0)$, $n(\theta)$
6. $Z_\phi(w)$, $\mathcal{O}_\phi(w)$, $\mathcal{R}(\iota_0)$, $W^L(\iota_0)$, $W_L(\iota_0)$, $\mathcal{R}_L(\iota_0)$, $\mathcal{I}_L(\iota_0)$
7. $\eta(\iota_0)$, $s$, $\phi_w^{st,\mathcal{H}}$
8. $\phi_\rho^{st,\mathcal{H}}$
9. $\gamma_{\boldsymbol{\lambda}}$
9,10. $\mathcal{R}^{\mathrm{st}}(V)$, $\mathcal{I}^{\mathrm{st}}(V)$
11. $c_\Delta(\boldsymbol{\mu})$, $c_{\geqslant\Delta}(\boldsymbol{\mu})$, $\mathcal{P}_L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, $\mathcal{I}_L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, $\mathcal{I}_L^{\max}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$
12. $C(\iota)$, $\gamma_\iota$
13. $\phi_\iota$

**X.7.** $P_X$, $C_i$

**XI.1.** $\theta$, $e(j)$
2. $E(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},a,b)$
6. $J$, $J^+$, $J^-$
9. $J(i)$
11. $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}^+$, $\mathcal{J}^-$, $\mathcal{I}nt(\boldsymbol{\lambda})$, $\widetilde{\mathcal{I}nt}(\boldsymbol{\lambda})$, $J(\Delta)$, $\Delta_n(\Delta)$
14. $I_n$
17. $k_n$, $N_n(i)$, $a_n(i)$, $b_n(i)$, $w_n(i)$, $\mathcal{F}_n$, $\boldsymbol{m}(f_n)$
18. $\mathcal{M}(\iota_n)$
20. $\Gamma(\iota_n)$
21. $\delta^+$, $\delta^-$, $\tau^+$, $\tau^-$
27. $\mathcal{I}_0(\iota_1,\iota_2)$, $\mathcal{P}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$, $\mathcal{I}_L(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$, $\mathcal{P}_L^{\max}(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$
29. $\mathcal{I}_L^{\max}(\iota_1,\iota_2;\iota_0)$

**XII.3.** $c(\iota_0)$, $\delta(\iota_0)$, $c(\xi_1,\xi_2;\iota_0)$, $\alpha$, $\beta$, $\xi(\iota_0)$
4,5. $(\rho_1\otimes\rho_2)_w$, $(\rho_1\otimes\rho_2)_L$
5. $\chi_w$
6. $\gamma_{\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2}$
7. $\gamma_{\iota_1,\iota_2}$, $C(\iota_1,\iota_2)$
9. $\phi_{\iota_1,\iota_2}$

# BIBLIOGRAPHIE


[A1] M. ASSEM. *On stability and endoscopic transfer of unipotent orbital integrals on p-adic symplectic groups,* Memoirs AMS **635** (1998).

[A2] ———. *Remarks on the transfer factors for unipotent orbital integrals in p-adic classical split groups,* prépublication 1996.

[BM] D. BARBASCH, A. MOY. *Local character expansions,* Annales Sc. ENS **30** (1997), 553–568.

[C] R. CARTER. *Finite groups of Lie type ; conjugacy classes and complex characters,* Wiley Interscience Publ. 1993.

[G] M. GECK. *Character sheaves and generalized Gelfand-Graev characters,* Proc. London Math. Soc. **78** (1999), 139–166.

[H] T. HALES. *Unipotent classes induced from endoscopic groups,* prépublication 1987.

[HCvD] HARISH-CHANDRA, VAN DIJK. *Harmonic analysis on reductive p-adic groups,* Springer L.N. **162**, 1970.

[HS] R. HOTTA, T. SPRINGER. *A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of unitary groups,* Inventiones Math. **41** (1977), 113–127.

[HW] G. HARDY, E. WRIGHT. *The theory of numbers,* Oxford-Clarendon Press 1971.

[Kaw1] N. KAWANAKA. *Fourier transforms of nilpotently supported invariant functions on a simple Lie algebra over a finite field,* Inventiones Math. **69** (1982), 411–435.

[Kaw2] ———. *Generalized Gelfand-Graev representations and Eunola duality,* in Algebraic groups and related topics, Adv. St. in Pure Math. **6** (1985), 175–206.

[Kaz] D. KAZHDAN. *Proof of Springer's hypothesis,* Israël J. Math. **28** (1977), 272–286.

[KL] D. KAZHDAN, G. LUSZTIG. *Fixed point varieties on affine flag manifolds,* Israël J. Math. **62** (1988), 129–168.

[Ke] G. KEMPKEN. *Induced conjugacy classes in classical Lie-algebras,* Math. Sem. der Univ. Hambourg, 1982.

[Ko] R. KOTTWITZ. *Stable trace formula : cuspidal tempered terms,* Duke Math. J. **51** (1984), 611–650.

[LL] J.-P. LABESSE, R. LANGLANDS. *L-indistinguishability for $SL(2)$,* J. Can. Math. **31** (1979), 726–785.

[Lan] R. LANGLANDS. *Les débuts d'une formule des traces stable,* Publ. Math. Univ. Paris VII, 1982.

[LS] ————, D. SHELSTAD. *On the definition of transfer factors,* Math. Ann. **278** (1987), 219–271.

[Lau] G. LAUMON. *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil,* Publ. Math. IHES **65** (1987), 131–210.

[Lu1] G. LUSZTIG. *Fourier transform on a semi-simple Lie algebra over $\mathbb{F}_q$,* in Algebraic groups, Utrecht 1986, Springer L.N. **1271** (1987), 177-188.

[Lu2] ————. *Green functions and characters sheaves,* Annals of Math. **131** (1990), 355–408.

[Lu3] ————. *Character sheaves I-V,* Adv. in Math. **56** (1985), 193–237 ; **57** (1985), 226–265 ; **57** (1985), 266–315 ; **59** (1986), 1–63 ; **61** (1986), 103–155.

[Lu4] ————. *Intersection cohomology complexes on a reductive group,* Inventiones Math. **75** (1984), 205–272.

[Lu5] ————. *A unipotent support for irreducible representations,* Adv. in Math. **94** (1992), 139–179.

[Lu6] ————. *On the character values of finite Chevalley groups at unipotent elements,* J. of Algebra **104** (1986), 146–194.

[Lu7] ————. *Irreducible representations of finite classical groups,* Inventiones Math. **43** (1977), 125–175.

[Sh1] T. SHOJI. *Unipotent characters of finite classical groups, in Finite reductive groups, related structures and representations,* M. Cabanes ed., Progress in Math. **141**, Birkhäuser, 1997.

[Sh2] ————. *On the Green polynomials of classical groups,* Inventiones Math. **74** (1983), 239–267.

[Sl] P. Slodowy. Simple singularities and semi-simple algebraic groups, Springer L.N. **815**, 1980.

[Spa] N. Spaltenstein. *Classes unipotentes et sous-groupes de Borel,* Springer L.N. **946**, 1982.

[Spr] T. Springer. *Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups,* Inventiones Math. **36** (1976), 173–207.

[W1] J.-L. Waldspurger. *Quelques résultats de finitude concernant les distributions invariantes sur les algèbres de Lie p-adiques,* prépublication.

[W2] ————. *Le lemme fondamental implique le transfert,* Compositio Math. **105** (1997), 153–236.

[W3] ————. *Transformation de Fourier et endoscopie,* Journal of Lie Th. **10** (2000), 195–206.

[Z] A.V. Zelevinsky. *Representations of finite classical groups, a Hopf algebra approach,* Springer L.N. **869**, 1981.