

Astérisque

CLAUDE SABBAH

**Équations différentielles à points singuliers irréguliers
et phénomène de Stokes en dimension 2**

Astérisque, tome 263 (2000)

http://www.numdam.org/item?id=AST_2000__263__R1_0

© Société mathématique de France, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ASTÉRIQUE 263

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
À POINTS SINGULIERS IRRÉGULIERS
ET PHÉNOMÈNE DE STOKES
EN DIMENSION 2

Claude Sabbah

Claude Sabbah

UMR 7640 du CNRS, Centre de Mathématiques, École polytechnique,
F-91128 Palaiseau cedex, France.

E-mail : sabbah@math.polytechnique.fr

Url : <http://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/sabbah.html>

Classification mathématique par sujets (1991). — 32C38, 32C45, 35A20, 35A27.

Mots clefs. — Connexion méromorphe, \mathcal{D} -module holonome, éclatement, éclatement réel, irrégularité, polygone de Newton, phénomène de Stokes.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À POINTS SINGULIERS IRRÉGULIERS ET PHÉNOMÈNE DE STOKES EN DIMENSION 2

Claude Sabbah

Résumé. — La théorie asymptotique des équations différentielles linéaires d'une variable complexe est comprise depuis longtemps et a fait l'objet de travaux récents autour de la multisommation. Par contre, la théorie asymptotique des systèmes différentiels holonomes de plusieurs variables est encore peu développée. Ce volume tente de combler partiellement cette lacune en introduisant les notions fondamentales et en montrant des conséquences d'une telle théorie.

On introduit la notion de bonne structure formelle pour un fibré méromorphe à connexion plate sur une surface analytique complexe et on conjecture l'existence d'une telle structure après une suite convenable d'éclatements ponctuels. On donne des conséquences de cette conjecture : semi-continuité de l'irrégularité de Malgrange-Komatsu pour une famille intégrable de connexions méromorphes sur une courbe complexe et construction et propriétés de la fibration de Stokes. La démonstration de cette conjecture est donnée notamment pour les fibrés de rang ≤ 5 .

On montre aussi qu'une bonne structure formelle se relève au niveau des développements asymptotiques sectoriels et on donne des applications à la conjugaison complexe des \mathcal{D} -modules holonomes.

Abstract (Differential equations with irregular singular points and Stokes phenomenon in dimension 2)

The asymptotic theory of holomorphic linear differential equations of one variable is well understood and has recently been renewed by the theory of multisummation. However, the asymptotic theory of holonomic differential systems of many complex variables is still not completely developed. This volume tries to fill the gap by introducing the fundamental notions and by showing some consequences of such a theory.

The notion of a good formal structure for a meromorphic vector bundle with a flat connection on a complex analytic surface is introduced. The existence of such a good formal structure on the pull-back by a suitable sequence of complex blowing-up of a meromorphic connection is conjectured. Some consequences of this conjecture are given: semi-continuity of the Malgrange-Komatsu irregularity index for an integrable family of meromorphic connections on a complex curve, and the construction and

some properties of the Stokes fibration. The proof of the conjecture is given, among others, for bundles of rank ≤ 5 .

The existence of a lifting of a good formal structure at the level of asymptotic expansions in bisectors is also shown. Applications are given to complex conjugation of holonomic \mathcal{D} -modules.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
I. Structure formelle des connexions méromorphes	5
1. Préliminaires sur les connexions méromorphes	5
1.1. Fonctions méromorphes et fonctions méromorphes formelles	5
1.2. Connexions méromorphes	6
1.3. Image inverse par éclatements	8
2. Bonne structure formelle	9
2.1. Modèles élémentaires et bonne structure formelle	9
2.2. Très bonne structure formelle	11
2.3. Existence générique d'une bonne structure formelle	13
2.4. Convergence des facteurs exponentiels	17
2.5. Existence après éclatements	19
3. Propriétés globales	21
3.1. Variétés r -caractéristiques	21
3.2. Semi-continuité de l'irrégularité	22
3.3. Variétés \mathfrak{h} -caractéristiques	27
3.4. Secteurs et fibration de Stokes	28
II. Structure analytique des connexions méromorphes	39
1. Préliminaires	39
1.1. Faisceaux sur l'éclaté réel	39
1.2. Théorèmes du type Malgrange-Sibuya	45
1.3. Théorème d'existence et d'unicité	47
2. Bonne \mathcal{A} -structure	50
2.1. Existence d'une bonne \mathcal{A} -structure	50
2.2. Classification locale des connexions méromorphes admettant une bonne \mathcal{A} -décomposition	57
3. Solutions distributions	63
3.1. Une conjecture de M. Kashiwara	63
3.2. Réductions préliminaires	65
3.3. Fin de la démonstration	68
3.4. Quelques applications	72

III. Bonne structure formelle après éclatements	75
0. Introduction	75
1. Préliminaires	80
1.1. Suites d'éclatements locaux et centres permis	81
1.2. Éclatements toriques	82
1.3. Première réduction	84
2. Cas particuliers de réduction	88
2.1. Connexions avec \mathcal{D}_1 régulier	88
2.2. Connexions de rang 1	90
2.3. Décomposition suivant les valeurs propres	91
2.4. Un cas particulier	93
2.5. Singularités inexistantes	94
3. Réduction logarithmique de 1-formes différentielles méromorphes	96
3.1. Formes méromorphes réduites	96
3.2. Démonstration du théorème 3.1.7 (préliminaires)	100
3.3. Réduction de l'invariant apparent	106
3.4. Fin de la démonstration du théorème 3.1.7	111
4. Réduction au cas d'une partie principale nilpotente	112
4.1. Réduction au cas nilpotent	112
4.2. Déterminant régulier	113
4.3. Réduction torique	114
4.4. Cas d'une partie principale nilpotente	118
4.5. Interlude: transformation de Fourier	118
5. Le cas nilpotent: préliminaires	127
5.1. Polygone de Newton et pondérations	127
5.2. Bases admissibles	133
5.3. Conséquences de la condition d'intégrabilité	142
5.4. Démonstration de l'énoncé 4.4.1 dans le cas favorable	145
5.5. Obstruction à la réduction de $\Omega^{\geq -1}$ dans une base admissible	148
6. La résonance nilpotente	153
6.1. Nouvelle apparence	155
6.2. Réduction à 0 de l'invariant apparent ${}^{\alpha}\mathcal{I}_i(\Omega^{\geq -1})$	156
6.3. Obstruction à la \mathfrak{p}_0 -réduction de $\Omega^{\geq -1}$ dans une base admissible	159
6.4. Démonstration de la proposition 6.0.2	162
6.5. Élimination de la résonance nilpotente	167
Appendice	171
A. Orbites de matrices nilpotentes	171
A.1. Jacobson-Morosov	171
A.2. Perturbation primitive et quasi-primitive	172
B. Fonctions C^∞ sur l'éclaté réel et développements asymptotiques	175
B.1. Le lemme de Borel-Ritt	175
B.2. Développements asymptotiques	178
B.3. Lemmes de Dolbeault-Grothendieck sur l'éclaté réel	179
B.4. Une suite exacte du type Mayer-Vietoris	180

Bibliographie	183
Index	189

INTRODUCTION

Une *connexion méromorphe* sur une variété analytique complexe X , à pôles le long d'un diviseur (réduit) $Z \subset X$ est un $\mathcal{O}_X[*Z]$ -module cohérent \mathcal{M} (où $\mathcal{O}_X[*Z]$ est le faisceau des fonctions méromorphes sur X à pôles le long de Z) muni d'une connexion plate $\nabla : \mathcal{M} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{M}$. Cette notion généralise celle de système différentiel linéaire en dimension 1 (voir [19]).

Dans la suite, nous supposerons en général que X est une surface et Z une courbe. En effet c'est seulement dans cette situation que nous pouvons donner des informations sur la structure formelle d'une telle connexion (après éclatements) au voisinage de tout point de Z . Des résultats analogues en toute dimension semblent pour le moment hors d'atteinte. Néanmoins on peut penser que les résultats obtenus ici en dimension 2 sont aussi vrais en toute dimension.

En dimension 2 une telle connexion est localement libre sur $\mathcal{O}[*Z]$ et la donnée de ∇ correspond, dans des coordonnées locales (x_1, x_2) , à la donnée de matrices $A_1(x_1, x_2)$ et $A_2(x_1, x_2)$ à pôles le long de Z satisfaisant la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial x_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 = [A_1, A_2].$$

Le cas où la connexion est régulière (on dit aussi à singularité régulière) est bien compris en toute dimension (voir [19], voir aussi [43] et [52]). On dispose en particulier d'une correspondance qui rend équivalente la catégorie de ces connexions avec celle des représentations linéaires de dimension finie du groupe fondamental de $X - Z$.

Pour les systèmes différentiels linéaires en dimension 1, le cas des singularités irrégulières est maintenant bien compris, après les travaux de Hukuhara, Turrittin, Sibuya, Malgrange, Ramis et bien d'autres auteurs (voir notamment le classique [64] et les articles d'exposition [32, 62, 63] pour des résultats plus récents). Alors que les solutions de systèmes linéaires à singularités régulières sont au plus à croissance modérée près du point singulier, celles des systèmes à singularités irrégulières peuvent

avoir des croissances de type exponentiel et l'analyse dans des secteurs autour du point singulier est essentielle : on met ainsi en lumière le *phénomène de Stokes*. Les travaux récents sur la resommation et la multi-sommabilité (la liste est nombreuse, voir notamment [13, 48, 7, 31] et le recueil [14]) ont permis de l'analyser très en détail. Enfin, Babbitt et Varadarajan [6] ont considéré le problème des modules pour les systèmes à singularités irrégulières.

L'objet des chapitres qui suivent est d'analyser la structure des singularités irrégulières en dimension 2. Il résulte d'un théorème de B. Malgrange [47] que la donnée d'une connexion méromorphe sur une variété X (de dimension quelconque) à pôles le long d'un diviseur Z est déterminée par celle de la connexion sur le complémentaire d'un ensemble de codimension 2 dans Z . La connaissance des propriétés de la connexion le long d'un ensemble de codimension 1 dans Z (qui est la situation étudiée ici avec des paramètres supplémentaires qu'on peut supposer «génériques») apporte donc beaucoup à la connaissance de la connexion partout.

Par ailleurs, une application des résultats obtenus ici pourrait être l'analyse du comportement asymptotique des solutions d'un système linéaire d'équations aux différences finies de deux variables, en utilisant la transformation de Mellin à deux variables.

En dimension 1, il est facile de donner des exemples de connexions régulières ou irrégulières. Le plus simple est de considérer un opérateur différentiel holomorphe et d'appliquer les critères usuels (par exemple le critère de Fuchs) pour déterminer si ses singularités sont régulières ou non. On peut aussi mettre l'accent sur les fonctions solutions de ce type d'opérateurs (fonctions spéciales).

En dimension plus grande, la condition d'intégrabilité imposée à la connexion fait qu'il est moins facile de donner des exemples explicites. De nombreux exemples de connexions régulières sont donnés par des constructions de géométrie algébrique (connexion de Gauss-Manin). La transformation de Fourier (totale ou partielle) fait passer de connexions régulières sur \mathbf{C}^n à des connexions éventuellement irrégulières sur \mathbf{C}^n (en tenant compte des singularités à l'infini).

Les connexions méromorphes sont en particulier des \mathcal{D}_X -modules holonomes. On peut donc leur appliquer les opérations de cette théorie (l'image directe notamment) puis localiser pour fabriquer de nouvelles connexions méromorphes.

La théorie des déformations isomonodromiques permet, à partir d'une connexion méromorphe sur la sphère de Riemann \mathbf{P}^1 de fabriquer des connexions sur une variété de dimension > 1 . Néanmoins cette façon de faire ne donne que des exemples bien particuliers (voir par exemple [25], [42]).

Le fil conducteur de ce travail est la compréhension du phénomène de Stokes qui se produit pour les solutions asymptotiques d'une telle connexion méromorphe. L'étude du phénomène de Stokes ne peut se faire que lorsque la structure formelle de la connexion est élémentaire (sinon l'analyse sous-jacente semble inextricable). Aussi

le premier chapitre développe la notion de *bonne structure formelle*, lorsque le lieu des pôles Z est un diviseur à croisements normaux. Le long de la partie lisse de ce diviseur on dispose alors d'une déformation transversalement isoformelle et l'on décrit le recollement formel au point de croisement du diviseur.

Étant donnée une connexion méromorphe irrégulière sur une surface X à pôles le long d'un diviseur Z , il existe un ouvert de Zariski (analytique) Z° de Z le long duquel la connexion admet une bonne structure formelle. Cependant, même si Z est à croisements normaux, elle n'en admet pas nécessairement partout le long de Z (contrairement au cas d'une connexion régulière, au moins si Z est à croisements normaux).

Le chapitre III est consacré à l'étude de la conjecture suivante : après une suite convenable d'éclatements ponctuels, la connexion image inverse admet une bonne structure formelle le long du diviseur image inverse de Z (supposé à croisements normaux, ce qui est loisible).

Cet énoncé est l'analogue en dimension 2 d'un théorème de Turrittin en dimension 1 (les éclatements sont réduits à l'identité en dimension 1). Paradoxalement, alors que ce résultat en dimension 1 n'est pas la partie la plus difficile de l'étude du phénomène de Stokes (il existe d'ailleurs plusieurs approches de ce théorème), c'est sans aucun doute la partie la plus délicate et la plus technique en dimension 2. L'analogue en dimension plus grande est encore hors d'atteinte et c'est une des raisons (mais pas la seule) qui restreint l'étude du phénomène de Stokes à la dimension 2. On se reportera au §2.5 du chapitre I pour les situations où cette conjecture est démontrée et à l'introduction du chapitre III pour une explication plus détaillée de la méthode de démonstration.

Revenons au chapitre I. Une fois admise la conjecture de forme normale formelle ci-dessus, nous considérons des invariants *globaux* d'une connexion méromorphe admettant une bonne structure formelle le long d'un diviseur à croisements normaux : ce sont les pentes et les variétés caractéristiques associées, qui généralisent la notion de polygone de Newton en dimension 1, ainsi que la fibration de Stokes. Nous reprenons essentiellement les résultats de [56] qui avaient été développés dans un cadre plus restreint (l'aspect global est important puisque l'étude locale d'une connexion méromorphe quelconque devrait se ramener, après éclatements, à une étude globale d'une connexion admettant une bonne structure formelle).

Au §I.3.2 nous montrons comment utiliser les variétés caractéristiques pour analyser le comportement de l'irrégularité de la restriction à une courbe d'une connexion méromorphe sur une surface. Ceci répond à une conjecture de B. Malgrange (voir [53, Conjecture 4.2.1]) dans les situations où la forme normale formelle peut être atteinte après éclatements.

Tous les résultats ci-dessus ne font intervenir que la structure formelle associée à la connexion méromorphe de départ. Le chapitre II est consacré à l'étude du phénomène de Stokes pour une connexion méromorphe admettant une bonne structure formelle.

Les résultats sont essentiellement de nature locale. Ils précisent dans ce cadre ceux de Majima [35]. Nous avons évité de développer la théorie des développements asymptotiques sectoriels, telle qu'elle est faite dans *loc. cit.*, car les notations deviennent vite compliquées. Nous avons préféré représenter les développements asymptotiques par des fonctions C^∞ sur l'éclaté réel des composantes du diviseur. L'aspect faisceautique n'en est que plus évident (ce qui est important pour comprendre globalement le phénomène de Stokes). On retrouve les développements asymptotiques et leur relations par des complexes du type Mayer-Vietoris.

La théorie locale se développe alors comme en dimension 1. On montre l'existence de relèvements asymptotiques d'une bonne décomposition formelle puis on donne une classification locale des connexions méromorphes admettant une bonne décomposition formelle donnée : c'est le phénomène de Stokes. Il manque ici

- la propriété de multisommabilité, au sens de [60], des solutions formelles d'une connexion méromorphe admettant une bonne structure formelle au sens du §I.2.1, propriété dont on peut s'attendre à ce qu'elle soit satisfaite,
- une théorie globale du phénomène de Stokes (par exemple une correspondance de type Riemann-Hilbert à l'aide de structures de Stokes pour une connexion méromorphe quelconque).

Nous donnons néanmoins une application de nature globale, à savoir la démonstration, modulo l'existence d'une bonne structure formelle après éclatements, d'une conjecture de Kashiwara sur les solutions distributions des \mathcal{D}_X -modules holonomes : nous pouvons la faire lorsque le support d'un tel module est de dimension ≤ 2 , pour pouvoir appliquer la théorie ci-dessus. Il s'agit alors de comprendre le comportement des matrices de Stokes par conjugaison complexe.

Les résultats de ce travail ont été annoncés dans [58]. Ils reprennent et développent ceux obtenus dans [56].

Remerciements. — J'ai bénéficié de nombreux conseils de B. Malgrange. Ils m'ont permis de simplifier certaines démonstrations. Plusieurs discussions avec F. Castro ont été stimulantes lors de l'élaboration d'une première version de ce travail. Je remercie P. Schapira pour m'avoir signalé quelques énoncés trop optimistes.

CHAPITRE I

STRUCTURE FORMELLE DES CONNEXIONS MÉROMORPHES

1. Préliminaires sur les connexions méromorphes

Les définitions ci-dessous s'étendent facilement en dimension quelconque, mais nous considérerons seulement la dimension 2 (et parfois la dimension 1).

1.1. Fonctions méromorphes et fonctions méromorphes formelles. — Soit X une surface analytique complexe et Z une courbe analytique fermée de X . Nous désignerons par $\mathcal{O}_X[*Z]$ le faisceau des fonctions méromorphes sur X à pôles le long de Z .

Soit $\mathcal{Z} = \cup_i Z_i$ une stratification analytique de Z : chaque strate est soit un point de Z , soit une composante connexe du complémentaire des strates ponctuelles. Les strates ne sont pas supposées lisses. La *stratification triviale* ne contient que Z comme strate. Nous définissons alors le complété formel $\mathcal{O}_{\widehat{X|Z}}$ comme une famille de faisceaux : sur chaque strate Z_i , c'est le faisceau $\mathcal{O}_{\widehat{X|Z_i}}$ complété formel de \mathcal{O}_X le long de Z_i . Nous le verrons comme un faisceau sur la stratification \mathcal{Z} (sans données de recollement entre les strates). Si Z_i est une strate ponctuelle, on obtient l'anneau des séries formelles de deux variables. Lorsque la stratification est triviale, le faisceau $\mathcal{O}_{\widehat{X|Z}}$ n'est autre que le faisceau $\mathcal{O}_{\widehat{X|Z}}$ sur Z . Si \mathcal{Z}' est une stratification de Z plus fine que \mathcal{Z} , $\mathcal{O}_{\widehat{X|Z'}}$ est plat sur $\mathcal{O}_{\widehat{X|Z}}$.

Si \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_X[*Z]$ -module, son formalisé relativement à la stratification \mathcal{Z} est le faisceau (sur \mathcal{Z}) $\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{O}_{\widehat{X|Z}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$.

Lorsque $Z = D$ est un diviseur à croisements normaux, la *stratification naturelle* de D est celle dont les strates de dimension 0 sont les points de croisement de D .

Si x° est un point de croisement de D (donc une strate de dimension 0 de la stratification naturelle), on a $\mathcal{O}_{\widehat{X|x^\circ}} \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{\mathcal{O}}_{x^\circ} = \mathbf{C}[[x_1, x_2]]$ dans des coordonnées locales x_1, x_2 (qu'il sera judicieux de choisir adaptées à D).

Si Y est une strate de dimension 1 de D (donc lisse) définie localement par l'équation $x_1 = 0$, le faisceau $\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}$ est défini par

$$U \longmapsto \mathcal{O}_Y(U) \llbracket x_1 \rrbracket$$

et le germe de ce faisceau en un point y° de Y est formé des séries formelles en x_1 à coefficients séries convergentes en x_2 (coordonnée sur Y) dont le rayon de convergence est minoré par un nombre > 0 .

Enfin, en un point de croisement x° de D , le germe $\mathcal{O}_{\widehat{X|D}, x^\circ}$ s'identifie au sous-anneau de $\mathbf{C} \llbracket x_1, x_2 \rrbracket$ intersection de $\mathcal{O}_{\widehat{X|D_1}, x^\circ}$ et $\mathcal{O}_{\widehat{X|D_2}, x^\circ}$, si D_1 et D_2 désignent les composantes locales de D .

1.1.1. Variante algébrique. — Soit U un ouvert de Zariski de la droite affine de coordonnée x_2 et \tilde{U} un revêtement fini étale de U , $(\mathcal{O}(\tilde{U}))$ est une extension finie non ramifiée de $\mathcal{O}(U) = \mathbf{C}[x_2, P^{-1}]$ où P est un polynôme non nul). Nous considérerons l'anneau $A = \mathcal{O}(\tilde{U}) \llbracket x_1 \rrbracket$.

1.2. Connexions méromorphes. — Une *connexion méromorphe à pôles le long de Z* est un $\mathcal{O}_X[*Z]$ -module cohérent \mathcal{M} muni d'une connexion $\nabla : \mathcal{M} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{M}$ qui est *plate*. On définit de manière analogue la notion de connexion méromorphe formelle relativement à la stratification \mathcal{Z} (voir [8] pour la notion de cohérence dans cette situation). Si \mathcal{M} est localement libre de rang d sur $\mathcal{O}_X[*Z]$ et si \mathbf{m} est une base de sections locales de \mathcal{M} , on peut écrire dans cette base $\nabla = d - \Theta$ où Θ est une matrice $d \times d$ de 1-formes à pôles le long de Z , qui satisfait la relation d'intégrabilité usuelle $d\Theta - \Theta \wedge \Theta = 0$. Si l'on change de base par une matrice $P \in \mathrm{GL}(d, \mathcal{O}_X[*Z])$, la nouvelle matrice est donnée par $\Theta' = P\Theta P^{-1} + dP \cdot P^{-1}$.

Dans la variante algébrique (§1.1.1), on choisit $f \in A$ non nul. Une $A[f^{-1}]$ -connexion est une $A[f^{-1}]$ -module de type fini M muni d'une *connexion plate* $\nabla : M \rightarrow \Omega_A^1 \otimes_A M$.

B. Malgrange m'a fait remarquer que l'hypothèse de liberté locale n'est pas restrictive :

Proposition 1.2.1. — Une $\mathcal{O}_X[*Z]$ -connexion (resp. une $\mathcal{O}_{\widehat{X|\mathcal{Z}}}[*Z]$ -connexion) est localement libre de type fini sur $\mathcal{O}_X[*Z]$ (resp. sur $\mathcal{O}_{\widehat{X|\mathcal{Z}}}[*Z]$).

Remarque. — La variante algébrique dit qu'une $A[f^{-1}]$ -connexion est localement (sur $\mathrm{Spec} A$) libre de type fini comme $A[f^{-1}]$ -module.

Démonstration. — Nous allons la faire dans le cas formel et lorsque la strate de \mathcal{Z} est de dimension 0, les autres cas se traitant de même. Nous noterons $\widehat{\mathcal{O}}$ l'anneau des séries formelles de deux variables et f une équation de Z . Il s'agit ici de montrer qu'une $\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}]$ -connexion est libre (de type fini).

Soit donc M une $\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}]$ -connexion et $M^\vee = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}]}(M, \widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}])$. Il suffit de montrer que le morphisme naturel $M \rightarrow M^{\vee\vee}$ est un isomorphisme, c'est-à-dire que

M est réflexif. En effet, soit alors $N \subset M$ un $\widehat{\mathcal{O}}$ -module de type fini tel que $M = \widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}] \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}} N$ (nous dirons que N est un *réseau* de M). Remarquons que le morphisme naturel

$$\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}] \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}} N^{\vee} \longrightarrow \left(\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}] \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}} N \right)^{\vee}$$

est un isomorphisme, (avec $N^{\vee} = \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}}(N, \widehat{\mathcal{O}})$) car c'est le cas lorsque N est libre. On a donc un morphisme

$$N^{\vee\vee} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}] \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}} N^{\vee\vee} \xrightarrow{\sim} \left(\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}] \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}} N \right)^{\vee\vee}$$

qui est injectif puisque $N^{\vee\vee}$ n'a pas de $\widehat{\mathcal{O}}$ -torsion. Ainsi $N^{\vee\vee}$ est naturellement un réseau de $M = M^{\vee\vee}$, de sorte qu'on peut supposer que N est réflexif. Alors N est libre puisque $\widehat{\mathcal{O}}$ est local régulier de dimension 2.

Montrons donc l'assertion. Soit \mathfrak{p}' un idéal premier non trivial de $\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}]$. Un tel idéal s'écrit $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}[f^{-1}]$ où \mathfrak{p} est un idéal premier de $\widehat{\mathcal{O}}$ ne contenant pas f et l'on a $\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}]_{\mathfrak{p}'} = \widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}$. Par ailleurs on a $(M^{\vee\vee})_{\mathfrak{p}'} = (M_{\mathfrak{p}'})^{\vee\vee}$. Aussi, il suffit de vérifier que l'assertion est satisfaite pour $M_{\mathfrak{p}'}$, quelque soit l'idéal premier \mathfrak{p}' et, pour cela, il suffit de vérifier que $M_{\mathfrak{p}'}$ est $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}$ -libre de type fini.

On procède comme dans le cas analytique : soient $m_1, \dots, m_r \in M_{\mathfrak{p}'}$ dont les classes dans $M_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}'M_{\mathfrak{p}'}$ forment une base sur $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}$. Si l'on a une relation non triviale $\sum a_i m_i = 0$ avec $a_i \in \widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}$, on a $a_i \in \mathfrak{p}\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}$ pour tout i . Appelons ordre d'une telle relation l'entier $\max \{ \ell \mid a_i \in \mathfrak{p}^{\ell} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}} \forall i \}$ et considérons une relation non triviale d'ordre minimal ℓ_0 . Soit i_0 tel que $a_{i_0} \in \mathfrak{p}^{\ell_0} - \mathfrak{p}^{\ell_0+1}$ dans une telle relation. En dérivant successivement cette relation et en utilisant la minimalité de ℓ_0 on voit que pour tout i et tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, on a

$$\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} a_i \in \mathfrak{p}^{\ell_0}.$$

En appliquant ceci à a_{i_0} pour un α convenable, on trouve une contradiction, ce qui prouve que le morphisme surjectif défini par m_1, \dots, m_r

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^r \longrightarrow M_{\mathfrak{p}'}$$

est aussi injectif et donc $M_{\mathfrak{p}'}$ est $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}$ -libre. □

Remarques 1.2.2

- (1) En dimension ≥ 3 , B. Malgrange montre qu'une connexion méromorphe est localement stablement libre (voir [45], [47]).
- (2) B. Malgrange montre aussi (voir *loc. cit.*) que toute connexion méromorphe admet un réseau, c'est-à-dire un sous- \mathcal{O}_X -module cohérent qui l'engendre sur $\mathcal{O}_X[*Z]$.

1.3. Image inverse par éclatements

1.3.1. *Éclatements.* — Soit \mathbf{C}^2 le plan affine $\text{Spec } \mathbf{C}[x_1, x_2]$ (muni de coordonnées x_1, x_2) et soit $e : \widetilde{\mathbf{C}^2} \rightarrow \mathbf{C}^2$ l'éclatement de l'origine. La variété $\widetilde{\mathbf{C}^2}$ est recouverte par deux cartes $\text{Spec } \mathbf{C}[x'_1, x'_2]$ et $\text{Spec } \mathbf{C}[x''_1, x''_2]$, avec

$$(1.3.2) \quad \begin{cases} x_1 = x'_1 \\ x_2 = x'_1 x'_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 = x''_1 x''_2 \\ x_2 = x''_1. \end{cases}$$

Le diviseur exceptionnel est défini, suivant la carte, par $\{x'_1 = 0\}$ où $\{x''_1 = 0\}$. La première carte sera appelée carte (0) : son origine est l'intersection du diviseur exceptionnel et de $\{x'_2 = 0\}$, transformé strict de l'axe $\{x_2 = 0\}$ par e . La deuxième carte est appelée carte (∞). De manière analogue, pour $\eta \in \mathbf{C}$, on translate les coordonnées de la première carte en $(0, \eta)$ et on définit ainsi la carte (η).

Soit $\pi : X \rightarrow \mathbf{C}^2$ une suite d'éclatements ponctuels au-dessus de l'origine de \mathbf{C}^2 et $E = \pi^{-1}(0)$ le diviseur exceptionnel d'idéal \mathcal{I}_E . Le choix de coordonnées (x_1, x_2) sur \mathbf{C}^2 permet de définir un recouvrement de X par des cartes affines du type précédent. Nous noterons $\widehat{X, E}$ l'espace E muni du faisceau

$$\mathcal{O}_{\widehat{X, E}} = \varprojlim_n \mathcal{O}_X / \mathcal{I}_E^n.$$

On a un morphisme de schémas formels $\widehat{\pi} : \widehat{X, E} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}^2, 0}$ (voir par exemple [24] pour ces notions).

Soit \mathcal{U} une carte affine $\text{Spec } \mathbf{C}[y_1, y_2]$ de X avec $U = \mathcal{U} \cap E = \{y_1 = 0\}$ et soit \mathcal{V} l'ouvert affine $\text{Spec } \mathbf{C}[y_1, y_2, Q(y_1, y_2)^{-1}]$ avec $Q \notin (y_1)$ et $V = \mathcal{V} \cap E$. Alors, en posant $P(y_2) = Q(0, y_2)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\widehat{X, E}}(V) &= \varprojlim_n \mathbf{C}[y_1, y_2, Q(y_1, y_2)^{-1}] / (y_1^n) \\ &= \mathbf{C}[y_2, P(y_2)^{-1}] \llbracket y_1 \rrbracket = \mathcal{O}_E(V) \llbracket y_1 \rrbracket. \end{aligned}$$

Si $U = \{y_1 y_2 = 0\}$ et $Q \notin (y_1)$, $Q \notin (y_2)$ (sinon on a un résultat analogue au précédent), alors

$$\mathcal{O}_{\widehat{X, E}}(V) = \mathbf{C}[y_1] \llbracket y_2 \rrbracket \cap \mathbf{C}[y_2] \llbracket y_1 \rrbracket \subset \mathbf{C} \llbracket y_1, y_2 \rrbracket$$

et en particulier le complété formel de $\mathcal{O}_{\widehat{X, E}}$ le long de $y_1 = y_2 = 0$ est égal à $\mathbf{C} \llbracket y_1, y_2 \rrbracket$.

Nous utiliserons le résultat suivant :

Proposition 1.3.3 (Résolution des courbes algébroides planes). — Soit $f \in \widehat{\mathcal{O}}$ une série formelle de deux variables. Il existe une suite d'éclatements ponctuels π au-dessus de l'origine telle que $f \circ \pi$ définisse un diviseur à croisements normaux. \square

Image inverse d'une connexion méromorphe. — Soit X' une variété analytique complexe (de dimension 1 ou 2) et $\pi : X' \rightarrow X$ une application analytique. Supposons que $Z' = \pi^{-1}(Z)$ soit partout de codimension 1 dans X' . On peut alors définir la connexion image inverse $\pi^+ \mathcal{M}$ sur X' à pôles le long de Z' : en tant que $\mathcal{O}_{X'}[*Z']$ -module, c'est $\pi^* \mathcal{M}$; la matrice de la connexion dans une base locale est la matrice $\pi^* \Theta$. Dans le cas formel, on a une notion analogue en prenant pour Z' la stratification de Z' dont les strates sont les composantes connexes des images inverse de celles de Z , ou une stratification plus fine que celle-ci. Nous aurons à considérer essentiellement le cas où π est une suite d'éclatements ou bien le cas où π est la normalisation d'un germe de courbe de X non contenu dans Z . On déduit de la proposition 1.3.3 :

Corollaire 1.3.4. — *Soit M une $\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}]$ -connexion. Il existe une suite d'éclatements ponctuels π au-dessus de l'origine de \mathbf{C}^2 telle que la connexion image inverse $\pi^+ M$ ait pour lieu des pôles un diviseur à croisements normaux.* \square

2. Bonne structure formelle

Nous supposons dans cette section que $Z = D$ est un diviseur à croisements normaux.

2.1. Modèles élémentaires et bonne structure formelle

2.1.1. Connexions régulières. — Nous nous plaçons ici dans une situation locale. Si Y est une strate de la stratification naturelle de D nous choisissons des coordonnées locales x_1, x_2 de sorte qu'au voisinage de l'origine de ces coordonnées, si $\dim Y = 1$, on ait $D = Y = \{x_1 = 0\}$ et si $\dim Y = 0$ on ait $D = \{x_1 x_2 = 0\}$.

Nous dirons qu'une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion \mathcal{R} est *régulière* s'il existe un espace vectoriel V de dimension finie sur \mathbf{C} , muni d'un endomorphisme δ_1 (et δ_2 si $\dim Y = 0$, avec $[\delta_1, \delta_2] = 0$), de sorte que \mathcal{R} soit localement isomorphe à la connexion $\mathcal{O}_X[*D] \otimes_{\mathbf{C}} V$, où

$$\begin{aligned} x_i \partial_{x_i} (f \otimes v) &= x_i \partial_{x_i} (f) \otimes v + f \otimes \delta_i(v) \quad i = 1 \text{ (et } i = 2 \text{ si } \dim Y = 0) \\ \partial_{x_2} (f \otimes v) &= \partial_{x_2} (f) \otimes v \quad \text{si } \dim Y = 1. \end{aligned}$$

Toute connexion régulière est (localement) extension successive de connexions régulières de rang 1 et une telle connexion sera notée " x^a " avec $a \in \mathbf{C}^2$ (avec $a_2 = 0$ si $\dim Y = 1$).

Variante algébrique. — Soit $A = \mathcal{O}(\widetilde{U})[[x_1]]$ et M une $A[x_1^{-1}]$ -connexion. Nous dirons que M est *régulière* s'il existe, au voisinage de tout point fermé de $\text{Spec } A$, une base de M dans laquelle les coefficients de Θ relatifs à $(dx_1/x_1, dx_2)$ sont dans A .

Lemme 2.1.2. — *Soit $\widehat{\mathcal{M}}$ une $\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}[*D]$ -connexion (resp. M une $A[x_1^{-1}]$ -connexion) et ρ une ramification cyclique de degré p_1 ou de bidegré p_1, p_2 autour du diviseur des*

pôles de \mathcal{M} (resp. de M). Si $\rho^+ \mathcal{M}$ (resp. $\rho^+ M$) est régulière, il en est de même de \mathcal{M} (resp. M).

Démonstration. — Faisons-la dans le second cas. On vérifie d'abord que M est régulière si et seulement s'il existe, au voisinage de tout point fermé de $\text{Spec } A$, un réseau N stable par $x_1 \partial_{x_1}$ et ∂_{x_2} (resp. $x_1 \partial_{x_1}$ et $x_2 \partial_{x_2}$) : en effet, le réseau $N^{\vee\vee}$ (cf. prop. 1.2.1) satisfait la même propriété et est localement libre. Par ailleurs on a $M \subset M' = \rho^* M$ et M s'obtient à partir de M' comme partie invariante sous l'action du groupe de Galois du revêtement. Si N' est un réseau de M' stable par $y_1 \partial_{y_1}$ et ∂_{y_2} (resp. $y_1 \partial_{y_1}$ et $y_2 \partial_{y_2}$), alors le réseau N de M' engendré par tous les conjugués de N' sous l'action de groupe de Galois est aussi un réseau de M , stable par $y_1 \partial_{y_1} = p_1 x_1 \partial_{x_1}$ et $\partial_{y_2} = \partial_{x_2}$ (resp. $p_1 x_1 \partial_{x_1}$ et $p_2 x_2 \partial_{x_2}$). \square

2.1.3. Modèles élémentaires locaux. — Soit φ une section locale de $\mathcal{O}_X[*D]$. Nous notons \mathcal{E}^φ la $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion libre de rang 1, munie d'une base dans laquelle la matrice de la connexion est $d\varphi$. La classe d'isomorphisme de cette connexion ne dépend que de la classe de φ dans $\mathcal{O}_X[*D]/\mathcal{O}_X$, que nous noterons de la même manière.

Un modèle élémentaire local $\mathcal{M}^{\text{él}}$ est une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion isomorphe à une somme directe

$$\bigoplus_{\alpha \in A} (\mathcal{E}^{\varphi_\alpha} \otimes \mathcal{R}^\alpha)$$

où $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille finie de sections de $\mathcal{O}_X[*D]/\mathcal{O}_X$ et $(\mathcal{R}^\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexions régulières.

Nous dirons que le modèle élémentaire est *bon* s'il admet une telle décomposition pour laquelle la famille des φ_α satisfait la propriété (B) ci-dessous :

2.1.4. Condition (B)

- Si $\alpha \neq \beta$, alors $\varphi_\alpha \neq \varphi_\beta$ dans $\mathcal{O}_X[*D]/\mathcal{O}_X$; il existe donc au plus un $\alpha \in A$ tel que $\varphi_\alpha = 0$ et on le note α_0 ;
- les diviseurs $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A - \{\alpha_0\}}$ et $(\varphi_\alpha - \varphi_\beta)_{\alpha \neq \beta \in A}$ ont leur support dans D et sont ≤ 0 ; en particulier les diviseurs $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ sont totalement ordonnés.

Un modèle élémentaire local admet donc une décomposition en somme directe de connexions élémentaires $\mathcal{E}^{\varphi_\alpha} \otimes \mathcal{R}^\alpha$ et, si la propriété (B) est satisfaite, on peut voir que cette décomposition est unique. Si le modèle élémentaire n'est pas bon, il suffit d'effectuer une suite convenable d'éclatements pour qu'il le devienne. En effet, lorsque $\dim Y = 1$, un modèle élémentaire en $x^o \in Y$ est bon sur un voisinage ouvert de x^o dans Y , privé éventuellement de x^o .

Si $\mathcal{M}^{\text{él}}$ est un bon modèle élémentaire et si $\varphi_\alpha \neq 0$ est un exposant intervenant dans la bonne décomposition, la connexion $\mathcal{E}^{-\varphi_\alpha} \otimes \mathcal{M}^{\text{él}}$ est encore un bon modèle élémentaire.

Ces notions se transposent mot pour mot pour les connexions sur $\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}[*D]$ lorsque Y est une strate de D . Il faut noter qu'alors les $\widehat{\varphi}$ sont des sections de $\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}[*D]/\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}$ et que si $\dim Y = 0$ la connexion $\widehat{\mathcal{E}}^{\widehat{\varphi}}$ ne provient pas nécessairement d'une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion.

2.1.5. Reprenons la situation globale. Soit \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion. Soit Y une strate de D . Notons $\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{O}_{\widehat{X|Y}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$. Nous dirons qu'une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion \mathcal{M} admet une *bonne décomposition formelle* le long de (D, Y) en $0 \in Y$ s'il existe un bon modèle élémentaire local $\mathcal{M}^{\text{él}}$ au voisinage de 0 et un isomorphisme

$$\widehat{\mathcal{M}} \simeq \widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}.$$

Un tel modèle est alors unique à isomorphisme près.

Nous dirons que \mathcal{M} admet une *bonne structure formelle* le long de (D, Y) en $0 \in Y$ si après un revêtement ρ ramifié cycliquement autour des composantes de D , défini au voisinage de 0, la connexion image inverse $\rho^+ \mathcal{M}$ admet une bonne décomposition formelle le long de (D', Y) en 0.

Enfin nous dirons que \mathcal{M} admet une *bonne structure formelle* le long de D si pour toute strate Y de la stratification naturelle de D elle admet une bonne structure formelle le long de (D, Y) en tout point de Y .

2.1.6. Partons maintenant d'une connexion formelle $\widehat{\mathcal{M}}$ relativement à la stratification naturelle \mathcal{D} de D (elle ne provient pas nécessairement d'une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion). Nous pouvons définir la notion de *bonne décomposition* et de *bonne structure* (formelles bien entendu) en considérant des bons modèles élémentaires $\widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}$ définis sur $\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}[*D]$ pour toute strate de D .

Il est alors nécessaire de distinguer *a priori* les deux propriétés suivantes pour une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion : la connexion a une bonne structure formelle le long de Y d'une part, et sa formalisée $\widehat{\mathcal{M}}$ a une bonne structure le long de Y d'autre part. Dans le deuxième cas le modèle élémentaire n'est pas *a priori* défini sur $\mathcal{O}_X[*D]$. Nous verrons cependant (proposition 2.4.1) que les deux propriétés sont équivalentes (c'est clair si $\dim Y = 1$).

2.1.7. *Variante algébrique.* — Plaçons-nous dans la variante algébrique (§1.1.1) et supposons que $f = x_1$, i.e. considérons l'anneau $A[f^{-1}] = \mathcal{O}(\widetilde{U})[[x_1]][x_1^{-1}]$. Par voisinage d'un point de \widetilde{U} nous entendrons *voisinage étale*. On peut alors transposer sans difficulté les définitions ci-dessus.

2.2. **Très bonne structure formelle.** — Nous avons considéré dans [56] la propriété plus forte de *très bonne structure formelle* le long de D . Rappelons que dans ce cas on demande qu'après ramification locale autour des branches de D , on ait

$$(2.2.1) \quad \mathcal{O}_{\widehat{X|D}, x^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_{\widehat{X|D}, x^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M}^{\text{él}}.$$

Ici, on ne stratifie pas D . La différence avec la notion précédente n'a lieu qu'aux points de croisement de D : pour une bonne décomposition on impose seulement, en ces points, l'existence d'un isomorphisme

$$(2.2.2) \quad \mathcal{O}_{\widehat{X, x^0}} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^0}} \mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_{\widehat{X, x^0}} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^0}} \mathcal{M}^{\text{él}}$$

où, dans des coordonnées locales adaptées à D , on a $\mathcal{O}_{\widehat{X, x^0}} = \mathbf{C}[[x_1, x_2]]$.

Contrairement à ce qui se passe pour la propriété de bonne structure formelle (voir la conjecture 2.5.1 ci-dessous), il n'est pas vrai que l'on puisse obtenir une très bonne structure formelle après une suite d'éclatements : on peut montrer sur l'exemple ci-dessous qu'après une suite d'éclatement au-dessus de l'origine de \mathbf{C}^2 , il existe toujours un point où la connexion image inverse n'admet pas de très bonne structure formelle. Cette notion, bien que plus naturelle apparemment, n'est donc pas suffisante pour analyser la structure des connexions méromorphes.

Lemme 2.2.3. — Soit $D = \{x_1 x_2 = 0\} \subset (\mathbf{C}^2, 0) = X$ et \mathcal{N} une $\mathbf{C}\{x_1\}[x_1^{-1}]$ -connexion non isomorphe à son modèle élémentaire $\mathcal{N}^{\text{él}}$ (à une variable). Soit p la projection $(x_1, x_2) \mapsto x_1$. Posons $\mathcal{M} = (p^+ \mathcal{N})[*D]$. Alors \mathcal{M} n'admet pas de très bonne structure formelle en $0 \in \mathbf{C}^2$.

Démonstration. — Notons $D_i = \{x_i = 0\}$, ($i = 1, 2$). L'anneau $\mathcal{O}_{\widehat{X|D}, 0}$ est l'intersection dans $\mathcal{O}_{\widehat{X}, 0} = \mathbf{C}[[x_1, x_2]]$ des deux sous-anneaux $\mathcal{O}_{\widehat{X|D_1}, 0}$ et $\mathcal{O}_{\widehat{X|D_2}, 0}$. Rappelons que $\mathcal{O}_{\widehat{X|D_1}, 0}$ est le sous-anneau de $\mathbf{C}\{x_2\}[[x_1]]$ des séries formelles en x_1 à coefficients dans $\mathbf{C}\{x_2\}$ dont le rayon de convergence est minoré par un nombre > 0 . Si la connexion \mathcal{M} admet une décomposition de la forme (2.2.1), elle en admet aussi de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\widehat{X|D_1}, 0} \otimes_{\mathcal{O}_{X, 0}} \mathcal{M} &\simeq \mathcal{O}_{\widehat{X|D_1}, 0} \otimes_{\mathcal{O}_{X, 0}} \mathcal{M}^{\text{él}} \\ \mathcal{O}_{\widehat{X|D_2}, 0} \otimes_{\mathcal{O}_{X, 0}} \mathcal{M} &\simeq \mathcal{O}_{\widehat{X|D_2}, 0} \otimes_{\mathcal{O}_{X, 0}} \mathcal{M}^{\text{él}}. \end{aligned}$$

Dans l'exemple considéré, si l'on prend le noyau de ∂_{x_2} dans la seconde décomposition, on déduit un isomorphisme $\mathcal{N} \simeq \mathcal{N}^{\text{él}}$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse faite. \square

Nous montrerons cependant au § II.2.2.7 le critère suivant (on se place en un point de croisement de D) :

Théorème 2.2.4. — Si le bon modèle élémentaire $\mathcal{M}^{\text{él}}$ est tel que pour tout couple (φ, ψ) d'éléments distincts de $\mathcal{O}_X[*D]/\mathcal{O}_X$ pour lesquels les facteurs \mathcal{E}^φ et \mathcal{E}^ψ apparaissent dans la décomposition de $\mathcal{M}^{\text{él}}$, la différence $\varphi - \psi$ a des pôles sur les deux composantes de D , alors toute connexion \mathcal{M} admettant $\mathcal{M}^{\text{él}}$ comme bon modèle élémentaire l'admet aussi comme très bon modèle élémentaire.

On en déduit une propriété de minimalité :

Corollaire 2.2.5. — Soit $X = (\mathbf{C}^2, 0)$ et $D = \{x_1 = 0\}$. Soit \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion et $\mathcal{M}^{\text{él}}$ un bon modèle élémentaire. On suppose que pour une suite d'éclatements $e : (X', E) \rightarrow (X, 0)$ la connexion $e^+\mathcal{M}$ admette une bonne décomposition le long de $D' = e^{-1}(D)$ en tout point de E , avec pour bon modèle en un tel point le germe de $e^+\mathcal{M}^{\text{él}}$. Alors \mathcal{M} admet une bonne décomposition le long de D en 0 avec pour modèle $\mathcal{M}^{\text{él}}$.

Démonstration. — On vérifie d'abord par récurrence sur le nombre d'éclatements que $e^+\mathcal{M}^{\text{él}}$ est un bon modèle élémentaire le long de D' en chaque point de E et que de plus il satisfait en tout tel point l'hypothèse du théorème 2.2.4. Il s'agit alors de vérifier que les isomorphismes, locaux sur E ,

$$\mathcal{O}_{\widehat{X'|D'}} \otimes e^+\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\widehat{X'|D'}} \otimes e^+\mathcal{M}^{\text{él}}$$

permettent de définir globalement sur E un isomorphisme du même type. En appliquant e_* on obtient alors le résultat voulu.

Ces isomorphismes locaux définissent un 1-cocycle sur E à valeurs dans le faisceau $\text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X'|D'}}}(e^+\mathcal{M}^{\text{él}})$ restreint à E . Il s'agit de voir que c'est un cobord. Comme il n'y a pas de morphisme local non trivial de $e^+(\mathcal{E}^{\varphi_\alpha} \otimes \mathcal{R}^\alpha)$ dans $e^+(\mathcal{E}^{\varphi_\beta} \otimes \mathcal{R}^\beta)$ pour $\beta \neq \alpha$, ce faisceau est égal au produit des faisceaux $\text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X'|D'}}}(e^+\mathcal{R}^\alpha)$. Le H^1 d'un tel faisceau classe les $\mathcal{O}_{\widehat{X'|D'}}[*D']$ -connexions qui sont localement sur E isomorphes à $e^+\mathcal{R}^\alpha$. Puisque \mathcal{R}^α est régulière, on peut remplacer $\mathcal{O}_{\widehat{X'|D'}}[*D']$ par $\mathcal{O}_{X'}[*D']$ ci-dessus. Comme le groupe fondamental de $X' - D'$ est égal à celui de $X - D$, la seule telle connexion est $e^+\mathcal{R}^\alpha$ à isomorphisme global près, autrement dit le H^1 est réduit à l'identité. Ceci donne l'assertion cherchée. \square

2.3. Existence générique d'une bonne structure formelle

Existence générique locale. — Soit $x^\circ \in X$ et choisissons des coordonnées locales x_1, x_2 centrées en x° . Posons $D_i = \{x_i = 0\}$ et supposons que $D = D_1$ ou $D = D_1 \cup D_2$. Ainsi, x_2 est la coordonnée sur D_1 .

Théorème 2.3.1. — Soit \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion. Alors pour tout $x^\circ \in D$, il existe un voisinage ouvert Δ de x° dans D tel que \mathcal{M} admette une bonne structure formelle le long de $\Delta - \{x^\circ\}$.

Existence générique globale. — Nous considérons ici la notion de bonne structure formelle sur des voisinages ouverts de Zariski (voir le §2.1.7).

Théorème 2.3.2. — Soit U un ouvert de Zariski non vide de $\text{Spec } \mathbf{C}[x_2]$ et M une $\mathcal{O}(U)[[x_1]][x_1^{-1}]$ -connexion. Il existe un ouvert de Zariski non vide $V \subset U$ tel que M admette une bonne structure formelle en tout point de V .

Démonstration du théorème 2.3.1. — Il suffit de montrer le théorème lorsque $D = D_1 \cup D_2$, ce que nous supposons dans la suite. Considérons l'anneau

$$A \stackrel{\text{déf}}{=} (\mathcal{O}[*D_2])_{\widehat{X|D_1, x_0}} = \varinjlim_{\Delta_1} \mathcal{O}(\Delta_1)[x_2^{-1}][x_1]$$

où Δ_1 est un disque centré à l'origine de D_1 , muni de la coordonnée x_2 . Les éléments de cet anneau sont les séries formelles en x_1 à coefficients séries de Laurent en x_2 de rayon de convergence minoré par un réel > 0 mais d'ordre du pôle en 0 non borné. Notons k le corps $\mathbf{C}\{x_2\}[x_2^{-1}]$. On a une inclusion stricte $A \subset k[[x_1]]$. Néanmoins il est clair que le corps des fractions K de A n'est autre que $A[x_1^{-1}]$. L'anneau A et le corps K sont munis d'une dérivation ∂_{x_1} de corps des constantes égal à k . On peut définir la notion de (K, ∂_{x_1}) -connexion et on a une description analogue à celle des $(k[[x_1]][x_1^{-1}], \partial_{x_1})$ -connexions (les démonstrations sont identiques, voir par exemple [44]). On commence par définir la notion de (K, ∂_{x_1}) -connexion régulière : c'est une connexion qui admet une base dans laquelle la matrice de $x_1 \partial_{x_1}$ est à éléments dans A . On peut alors montrer (il s'agit de voir que, dans la démonstration des propositions analogues pour les $(k[[x_1]][x_1^{-1}], \partial_{x_1})$ -connexions, on peut minorer le rayon de convergence en le paramètre x_2 des coefficients des changements de bases si ceux de la matrice de $x_1 \partial_{x_1}$ le sont) :

Proposition 2.3.3. — Une (K, ∂_{x_1}) -connexion régulière R_K admet une base dans laquelle la matrice de $x_1 \partial_{x_1}$ est à éléments dans k et dont les valeurs propres (dans une extension convenable de k) ne diffèrent pas d'un entier $\neq 0$. Autrement dit, il existe un k -espace vectoriel V_k muni d'un endomorphisme δ_1 tel que $R_K = K \otimes_k V_k$ et $x_1 \partial_{x_1}(f \otimes v) = (x_1 \partial_{x_1} f) \otimes v + f \otimes \delta_1(v)$. \square

Proposition 2.3.4. — Soit M_K une (K, ∂_{x_1}) -connexion. Il existe $\nu_1, \nu_2 \in \mathbf{N}$ tels que si l'on pose $x_1 = x_1^{\nu_1}$, $x_2 = x_2^{\nu_2}$ et $A' = (\mathcal{O}[*D_2'])_{\widehat{X|D'_1, 0}}$, $K' = A'[x_1^{-1}]$, la $(K', \partial_{x'_1})$ -connexion $M_{K'} \stackrel{\text{déf}}{=} K' \otimes_K M_K$ admette une décomposition

$$M_{K'} \simeq \bigoplus_{\beta \in B} \left[E_{K'}^{\psi_\beta} \otimes R_{K'}^\beta \right]$$

où les $R_{K'}^\beta$ sont des $(K', \partial_{x'_1})$ -connexions régulières et les ψ_β sont dans K'/A' et sont deux à deux distincts. \square

Remarque. — On a $K'/A' = k'[x_1'^{-1}]/k'$.

L'anneau A et le corps K sont munis aussi d'une seconde dérivation ∂_{x_2} . On peut donc définir la notion de $(K, \partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ -connexion (les deux dérivations doivent commuter).

Proposition 2.3.5. — Soit M_K une $(K, \partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ -connexion. Alors les $R_{K'}^\beta$, qui interviennent dans la décomposition (2.3.4) sont des $(K', \partial_{x'_1}, \partial_{x'_2})$ -connexions (qui sont $\partial_{x'_1}$ -régulières).

Démonstration. — Comme les $E_{K'}^{\psi\beta}$ sont clairement munis d'une structure naturelle de $(K', \partial_{x'_1}, \partial_{x'_2})$ -connexion, il suffit de vérifier que la partie $\partial_{x'_1}$ -régulière de $M_{K'}$ (i.e. le terme $R_{K'}^\beta$, pour $\psi_\beta = 0$) est une $(K', \partial_{x'_1}, \partial_{x'_2})$ -connexion. S'il n'existe pas de tel β , on le crée en tensorisant par un E^ψ convenable. Écrivons $M_{K'} = M_{K'}^{(r)} \oplus M_{K'}^{(i)}$ la décomposition en partie $\partial_{x'_1}$ -régulière et purement $\partial_{x'_1}$ -irrégulière. Il suffit de montrer la stabilité de cette décomposition par $\partial_{x'_2}$. La démonstration est alors identique à celle faite pour le théorème 2.3.2, voir plus loin. \square

Nous pouvons analyser la structure des $(K, \partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ -connexions ∂_{x_1} -régulières :

Proposition 2.3.6. — *Soit R_K une $(K, \partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ -connexion qui est ∂_{x_1} -régulière. Il existe une (k, ∂_{x_2}) -connexion N_k munie d'un endomorphisme δ_1 telle que*

$$R_K = K \otimes_k N_k,$$

où l'action de ∂_{x_2} est induite par celle de ∂_{x_2} sur N_k et celle de ∂_{x_1} par l'endomorphisme δ_1 de N_k .

Démonstration. — Écrivons $R_K = K \otimes_k V_k$, où V_k est muni d'un endomorphisme δ_1 comme dans la proposition 2.3.3 et supposons aussi que pour tout $p \in \mathbf{Z} - \{0\}$, $\text{ad } \delta_1 - p \text{Id}$ soit inversible sur $\text{End}_k(V_k)$. Soit \mathbf{m} une base de V_k et A_i la matrice de $x_i \partial_{x_i}$ dans cette base ($i = 1, 2$). Montrons que A_2 est à éléments dans k , i.e. que V_k est préservé par $x_2 \partial_{x_2}$. La relation de commutation de ∂_{x_1} et ∂_{x_2} s'écrit

$$x_1 \partial_{x_1}(A_2) - x_2 \partial_{x_2}(A_1) = [A_1, A_2].$$

Si on pose $B_2 = x_1 \partial_{x_1}(A_2)$, on voit que $x_1 \partial_{x_1}(B_2) = [A_1, B_2]$ puisque A_1 est une matrice constante. Soit $B_{2,i}$ le coefficient de x_1^i dans B_2 . On en déduit que pour tout i on a $(\text{ad } A_1 - i \text{Id})B_{2,i} = 0$, donc $B_{2,i} = 0$ pour $i \neq 0$ et de même $A_{2,i} = 0$ pour $i \neq 0$. Par suite $A_2 = A_{2,0}$ est à éléments dans k .

On note alors $N_k = V_k$ muni de l'action induite par ∂_{x_2} . C'est la (k, ∂_{x_2}) -connexion cherchée. \square

Définition 2.3.7. — Nous dirons qu'une $\mathcal{O}_{\widehat{X|D_1}, x^\circ}[*D]$ -connexion est D_1 -élémentaire si elle est isomorphe à une connexion $\mathcal{E}^\psi \otimes_{\mathcal{O}_{D_1, x^\circ}} N$ où

- $\psi \in \mathcal{O}_{\widehat{X|D_1}, x^\circ}[*D] / \mathcal{O}_{\widehat{X|D_1}, x^\circ} (= k[x_1^{-1}] / k)$;
- N est une $\mathcal{O}_{D_1, x^\circ}[* (D_1 \cap D_2)]$ -connexion munie d'un endomorphisme δ_1 .

Un modèle D_1 -élémentaire est une somme directe de tels objets.

On déduit des résultats précédents :

Corollaire 2.3.8. — *Soit $\mathcal{M}_{\widehat{X|D_1}}$ une $\mathcal{O}_{\widehat{X|D_1}, x^\circ}[*D]$ -connexion. Il existe un modèle D_1 -élémentaire $\mathcal{N}_{\widehat{X|D_1}} = \bigoplus_{\beta \in B} (\mathcal{E}^{\psi_\beta} \otimes_{\mathcal{O}_{D_1, x^\circ}} N^\beta)$ (après ramification autour de D) tel que*

$$K' \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{X|D_1}, x^\circ}} \mathcal{M}_{\widehat{X|D_1}} \simeq K' \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{X|D_1}, x^\circ}} \mathcal{N}_{\widehat{X|D_1}}. \quad \square$$

Par définition de K et K' , les objets et morphismes sont définis au voisinage de x^o sur D'_1 , de sorte que $\mathcal{N}_{\widehat{X'|D'_1}}$ est un modèle élémentaire (au sens du § 2.1.3) en tout $y'^o \in D'_1 - \{x'^o\}$ assez voisin de x'^o . En utilisant le même argument pour D_2 à la place de D_1 , on obtient le théorème 2.3.1. \square

Démonstration du théorème 2.3.2. — Soit $k = \mathbf{C}(x_2)$ et \bar{k} la clôture algébrique de k . On applique la théorie à une variable à la $(\bar{k}[[x_1]][x_1^{-1}], \partial_{x_1})$ -connexion

$$M_{\bar{k}} = \bar{k}[[x_1]] \otimes_{\mathbf{C}[[x_2]][[x_1]]} M.$$

Plus précisément, on vérifie qu'il existe une ramification $x_1 = y_1^{p_1}$, un ouvert de Zariski $V \subset U$ et un revêtement étale $\tilde{V} \rightarrow V$ tels que la connexion $\mathcal{O}(\tilde{V})[[y_1]][y_1^{-1}] \otimes M$ image inverse de M admette une bonne décomposition formelle. Montrons que la proposition est satisfaite pour ce choix de V : posons $A' = \mathcal{O}(\tilde{V})[[y_1]]$, où y_1 est défini ci-dessus et montrons que $M' = A'[y_1^{-1}] \otimes_{A[[x_1^{-1}]]} M$ admet une bonne décomposition formelle.

Si l'on oublie l'action de ∂_{x_2} , il résulte des choix faits que M' est somme directe de sous-modules isomorphes à $\mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R}$, où \mathcal{R} est ∂_{y_1} -régulier (*i.e.* admet localement un réseau stable par $y_1 \partial_{y_1}$) et \mathcal{E}^φ est la ∂_{y_1} -connexion de rang 1 engendrée par $\exp \varphi$ avec $\varphi \in A'[y_1^{-1}]$.

Il suffit alors de montrer que cette décomposition est stable par ∂_{x_2} . En effet, une fois ceci montré, chaque terme $\mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R}$ est muni d'une structure de $A'[y_1^{-1}]$ -connexion et, puisque \mathcal{E}^φ est naturellement stable par ∂_{x_2} , il en est de même pour \mathcal{R} . On peut alors appliquer la proposition 2.3.9 ci-dessous, qui montre que \mathcal{R} est une $A'[y_1^{-1}]$ -connexion régulière.

Revenons donc à la stabilité de la décomposition par ∂_{x_2} . Écrivons $M' = M'^{(r)} \oplus M'^{(i)}$ la décomposition en partie ∂_{y_1} -régulière et purement ∂_{y_1} -irrégulière. Il suffit de montrer la stabilité de cette décomposition par ∂_{x_2} (en tensorisant par une exponentielle convenable, on se ramène au cas où $M'^{(r)} \neq \{0\}$ et on raisonne par récurrence sur le rang de M'). Soient $\mathbf{m}^{(r)}$ et $\mathbf{m}^{(i)}$ des bases de $M'^{(r)}$ et $M'^{(i)}$ respectivement et soit $A^{(i)}$ la matrice de ∂_{y_1} dans la base $\mathbf{m}^{(i)}$. On a dans M' :

$$\partial_{y_1}(\partial_{x_2} \mathbf{m}^{(i)}) = \partial_{x_2}(\partial_{y_1} \mathbf{m}^{(i)}) = \partial_{x_2}(A^{(i)}) \cdot \mathbf{m}^{(i)} + A^{(i)} \partial_{x_2} \mathbf{m}^{(i)}$$

de sorte que si on prend les images dans $M'/M'^{(i)}$ on voit que la sous- ∂_{y_1} -connexion engendrée par $\partial_{x_2} \mathbf{m}^{(i)}$ dans $M'/M'^{(i)}$ est l'image d'une connexion purement ∂_{y_1} -irrégulière. Puisque $M'/M'^{(i)} \simeq M'^{(r)}$ est ∂_{y_1} -régulière, cette sous-connexion est nulle, ce qui prouve que $\partial_{x_2} \mathbf{m}^{(i)} \subset M'^{(i)}$. Un argument analogue montre l'inclusion $\partial_{x_2} \mathbf{m}^{(r)} \subset M'^{(r)}$. \square

Proposition 2.3.9. — Soit \mathcal{R} une $\mathcal{O}(\tilde{U})[[x_1]][x_1^{-1}]$ -connexion libre admettant une base \mathbf{m} dans laquelle la matrice A de $x_1 \partial_{x_1}$ est à coefficients dans $\mathcal{O}(\tilde{U})[[x_1]]$. Alors \mathcal{R} est régulière.

Démonstration. — Il suffit de montrer que tout point de \tilde{U} admet un voisinage ouvert (de Zariski) sur lequel \mathcal{R} admet une base \mathbf{m} satisfaisant le fait que $\text{ad } A|_{x_1=0} - p \text{Id}$ est inversible sur $M_d(K)$ pour tout $p \in \mathbf{Z} - \{0\}$, où K est le corps des fractions de $\mathcal{O}(\tilde{U})$. En effet, soit B la matrice de ∂_{x_2} dans cette base et supposons que B ait un pôle le long de $x_1 = 0$. On écrit

$$B = B_{-r_1} x_1^{-r_1} + \dots$$

avec $r_1 > 0$ et la relation de commutation s'écrit

$$x_1 \partial_{x_1}(B) - \partial_{x_2}(A) = [A, B]$$

de sorte qu'en considérant le coefficient de $x_1^{-r_1}$ dans cette relation on en déduit que $(\text{ad } A|_{x_1=0} + r_1 \text{Id})(B_{-r_1}) = 0$ et par suite $B_{-r_1} = 0$ dans $M_d(K)$, donc $B_{-r_1} = 0$.

L'existence d'une telle base (sur un ouvert convenable) se montre par le même procédé qu'en dimension 1 (voir par exemple [39], démonstration de 6.1). \square

2.4. Convergence des facteurs exponentiels. — Soit x° un point de croisement de D et soit \mathcal{M} une connexion méromorphe à pôles le long de D . Supposons que la formalisée $\widehat{\mathcal{M}}_{x^\circ} = \widehat{\mathcal{O}}_{x^\circ} \otimes \mathcal{M}_{x^\circ}$ admette une bonne décomposition (voir § 2.1.6). Le modèle élémentaire $\widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}$ en x° n'est *a priori* pas défini sur \mathcal{O}_{X,x° mais seulement sur $\widehat{\mathcal{O}}_{x^\circ}$, c'est-à-dire que les facteurs exponentiels qui interviennent dans la décomposition ne sont pas *a priori* convergent. Nous allons montrer que tel est cependant le cas.

Proposition 2.4.1. — *Soit x° un point de croisement de D et \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion au voisinage de x° . Supposons que $\widehat{\mathcal{M}} = \widehat{\mathcal{O}}_{x^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x^\circ}} \mathcal{M}$ admette une décomposition*

$$\widehat{\mathcal{M}} \simeq \bigoplus_{\alpha \in A} \left[\widehat{\mathcal{E}}^{\widehat{\varphi}_\alpha} \otimes \widehat{\mathcal{R}}^\alpha \right]$$

où les $\widehat{\varphi}_\alpha$ sont dans $\widehat{\mathcal{O}}_{x^\circ}[*D]/\widehat{\mathcal{O}}_{x^\circ}$ et sont deux à deux distincts et les \mathcal{R}^α sont des $\mathcal{O}_X[*D]$ connexions régulières. Alors les $\widehat{\varphi}_\alpha$ sont dans $\mathcal{O}_{X,x^\circ}[*D]/\mathcal{O}_{X,x^\circ}$.

Ainsi il existe un modèle élémentaire local $\mathcal{M}^{\text{él}}$ défini sur $\mathcal{O}_X[*D]$ tel que

$$\widehat{\mathcal{M}} \simeq \widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}.$$

Démonstration de la proposition 2.4.1. — Elle se fait par comparaison des structures formelles. Notons d'abord qu'il suffit de la montrer après une ramification autour de D , de sorte que dans la suite on se permettra de telles ramifications si nécessaire.

2.4.2. Soit $\widehat{k} = \mathbf{C}[[x_2]][x_2^{-1}]$ et $\widehat{K} = \widehat{k}[[x_1]][x_1^{-1}]$. On a $\mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_1^{-1}, x_2^{-1}] \subsetneq \widehat{K}$ et c'est le fait que cette inclusion soit stricte qui fait toute la difficulté de la conjecture 2.5.1 énoncée plus loin. Soit donc \mathcal{M} telle que $\widehat{\mathcal{M}}$ admette une décomposition

$$\widehat{\mathcal{M}} \simeq \bigoplus_{\alpha \in A} \left(\widehat{\mathcal{E}}^{\widehat{\varphi}_\alpha} \otimes \widehat{\mathcal{R}}^\alpha \right)$$

où les $\widehat{\varphi}_\alpha$ sont deux à deux distincts dans $\mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_1^{-1}, x_2^{-1}]/\mathbf{C}[[x_1, x_2]]$. On a donc aussi

$$\widehat{K} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M} \simeq \bigoplus_{\alpha \in A} \left[E_{\widehat{K}}^{\widehat{\varphi}_\alpha} \otimes R_{\widehat{K}}^\alpha \right]$$

avec des notations évidentes. Mais on a aussi

$$\widehat{K} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M} = \widehat{K} \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{X|D_1}, x^\circ}} \mathcal{M}_{\widehat{X|D_1}}$$

avec $\mathcal{M}_{\widehat{X|D_1}} = \mathcal{O}_{\widehat{X|D_1}, x^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M}$. Il existe donc, d'après les propositions 2.3.4 et 2.3.5, une décomposition

$$\widehat{K} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M} \simeq \bigoplus_{\beta \in B} \left[E_{\widehat{K}}^{\psi_\beta} \otimes_{\mathbf{C}[[x_2]]} N_{\widehat{k}}^\beta \right]$$

où les ψ_β sont dans $k[x_1^{-1}]/k$ et deux à deux distincts et $N_{\widehat{k}}^\beta = \widehat{k} \otimes_k N^\beta$ où N^β est une (k, ∂_{x_2}) -connexion munie d'un endomorphisme δ_1 . D'après le théorème de Turrittin de décomposition des connexions formelles d'une variable, chaque $N_{\widehat{k}}^\beta$ admet, après une ramification éventuelle en x_2 que nous omettrons, une décomposition stable par δ_1

$$N_{\widehat{k}}^\beta = \bigoplus_{\gamma \in C_\beta} \left[E_{\widehat{k}}^{\lambda_{\beta\gamma}} \otimes_{\mathbf{C}} V_{\beta\gamma} \right]$$

où $V_{\beta\gamma}$ est un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension finie muni de deux endomorphismes δ_1 et δ_2 qui commutent, et les $\lambda_{\beta\gamma}$ sont dans $\mathbf{C}\{x_2\}[x_2^{-1}]/\mathbf{C}\{x_2\}$ et sont deux à deux distincts (l'action de ∂_{x_2} est définie comme dans la proposition 2.3.3). On en déduit donc que

$$\widehat{K} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M} \simeq \bigoplus_{\beta \in B} \bigoplus_{\gamma \in C_\beta} \left[E_{\widehat{K}}^{\psi_\beta + \lambda_{\beta\gamma}} \otimes_{\mathbf{C}} V_{\beta\gamma} \right].$$

Unicité de la décomposition. — Soit $M_{\widehat{K}}$ une $(\widehat{K}, \partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ -connexion admettant une décomposition

$$M_{\widehat{K}} = \bigoplus_{i \in I} \left[E_{\widehat{K}}^{\psi_i} \otimes_{\mathbf{C}} V_i \right]$$

où les V_i sont munis d'endomorphismes δ_1 et δ_2 et $\psi_i \in \mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_1^{-1}, x_2^{-1}]$. Alors la décomposition est unique si on impose que les ψ_i soient deux à deux distincts modulo $\mathbf{C}[[x_1, x_2]] + x_1 \mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_2^{-1}]$. En effet, par une réduction simple on se ramène à montrer que pour un tel ψ , $E_{\widehat{K}}^\psi$ est régulière si et seulement si $\psi \in \mathbf{C}[[x_1, x_2]] + x_1 \mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_2^{-1}]$. Pour cela il suffit de reprendre avec \widehat{K} la démonstration sur la structure des K -connexions : par définition $E_{\widehat{K}}^\psi$ est $(\widehat{K}, \partial_{x_1})$ -régulière si et seulement si $\psi \in \mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_2^{-1}]$. Posons alors $\psi = \sum_{\ell \geq 0} x^\ell \psi_\ell$. On montre comme à la proposition 2.3.6 que $E_{\widehat{K}}^\psi \simeq \widehat{K} \otimes_{\widehat{k}} E_{\widehat{k}}^{\psi_0}$. Par suite $E_{\widehat{K}}^\psi$ est $(\widehat{K}, \partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ -régulière si et seulement si de plus $\psi_0 \in \mathbf{C}[[x_2]]$. \square

Fin de la démonstration de la proposition 2.4.1. — Par unicité de la décomposition et du fait que les $\psi_\beta + \lambda_{\beta\gamma}$ ($\beta \in B$, $\gamma \in C_\beta$) sont deux à deux distincts modulo $\mathbf{C}\{x_1, x_2\} + x_1\mathbf{C}\{x_1, x_2\}[x_2^{-1}]$, on voit que si l'on note \simeq la relation sur A définie par

$$\alpha \simeq \alpha' \iff \widehat{\varphi}_\alpha - \widehat{\varphi}_{\alpha'} \in \mathbf{C}[[x_1, x_2]] + x_1\mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_2^{-1}]$$

et si l'on pose $(BC)' = A/\simeq$ et $(BC) = \cup_{\beta \in B}(\beta, C_\beta)$, on a $(BC)' = (BC)$ et si $A_{\beta\gamma}$ désigne l'ensemble des $\alpha \in A$ de classe (β, γ) , on a

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_\alpha &= \psi_\beta + \lambda_{\beta\gamma} \pmod{\mathbf{C}[[x_1, x_2]] + x_1\mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_2^{-1}]} \quad \text{si } \alpha \in A_{\beta\gamma}, \\ (V_{\beta\gamma}, \delta_1, \delta_2) &= \bigoplus_{\alpha \in A_{\beta\gamma}} (V_\alpha, \delta_1, \delta_2). \end{aligned}$$

Par suite, pour tout $\alpha \in A$, la partie de $\widehat{\varphi}_\alpha$ qui s'écrit

$$\sum_{\ell \geq 1} \frac{a_{\alpha, \ell}(x_2)}{x_1^\ell}$$

est à coefficients $a_{\alpha, \ell}$ dans $\mathbf{C}\{x_2\}[x_2^{-1}]$. En inversant les rôles de x_1 et x_2 on en déduit que les $\widehat{\varphi}_\alpha$ sont dans $\mathbf{C}\{x_1, x_2\}[x_1^{-1}, x_2^{-1}]/\mathbf{C}\{x_1, x_2\}$. \square

On peut résumer les résultats obtenus comme suit (en notant encore \mathcal{D} la stratification naturelle de D) :

Corollaire 2.4.3. — *Soit \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion. Si $\mathcal{M}_{\widehat{X|\mathcal{D}}}$ admet une bonne décomposition (resp. structure) en $x^\circ \in D$ alors \mathcal{M} admet une bonne décomposition (resp. structure) formelle (relativement à \mathcal{D}) au voisinage de x° ; de plus, dans le premier cas, un (bon) modèle élémentaire en x° est un (bon) modèle au voisinage de x° .*

Démonstration. — L'assertion est non tautologique aux points de croisement de D . Le premier point est exactement la proposition 2.4.1 et le second résulte de la comparaison des structures formelles faite dans la démonstration de celle-ci. \square

2.5. Existence après éclatements. — Soit X une surface lisse, Z une courbe de X et $x^\circ \in Z$. Soit \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*Z]$ -connexion au voisinage de x° .

Conjecture 2.5.1. — *Il existe une suite d'éclatements ponctuels $e : X' \rightarrow X$ au-dessus de x° telle que, au-dessus d'un voisinage de x° :*

- (1) $D = e^{-1}(Z)$ est un diviseur à croisements normaux;
- (2) la connexion formalisée $\mathcal{O}_{\widehat{X'|\mathcal{D}}} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} e^+ \mathcal{M}$ relativement à la stratification naturelle \mathcal{D} de D admet une bonne structure le long de D .

La conjecture est aussi valable pour les connexions formelles du type $\widehat{\mathcal{M}}_{x^\circ}$ sur $\widehat{\mathcal{O}}_{x^\circ}[*Z]$. Aussi, en général, il n'est pas possible d'obtenir plus de précision. Néanmoins, lorsque \mathcal{M} est une $\mathcal{O}_X[*Z]$ -connexion, nous avons vu (proposition 2.4.1) que si

la conjecture est satisfaite pour $\widehat{\mathcal{M}}_{x^\circ}$, alors $e^+\mathcal{M}$ admet une bonne structure formelle le long de D (i.e. les modèles formels sont définis sur $\mathcal{O}_{X'}$).

Le chapitre III est consacré à la démonstration de cette conjecture dans un certain nombre de situations.

Théorème 2.5.2. — *La conjecture 2.5.1 est vraie si le rang de \mathcal{M} est ≤ 5 .*

La situation suivante a été considérée par B. Malgrange [47] : on suppose que Z est lisse en x° et que la matrice de la connexion dans une base locale et dans des coordonnées locales telles que $Z = \{x_1 = 0\}$ a la forme

$$\Theta = x^{-r_1} \left[A(x_1, x_2) \frac{dx_1}{x_1} + B(x_1, x_2) dx_2 \right]$$

où A, B sont à coefficients holomorphes, $r_1 \text{ est } > 0$ et $A_0 = A(0, 0) \neq 0$ est une matrice régulière (i.e. son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique). Alors \mathcal{M} admet une décomposition formelle qui devient bonne après éclatements éventuels.

Ce résultat peut être utilisé pour montrer (voir § III.2.4) que la conjecture est vraie si Z est à croisement normal en x° et si dans une base locale et dans des coordonnées locales pour lesquelles $Z = \{x_1 x_2 = 0\}$, la matrice de la connexion a la forme

$$\Theta = x^{-r_1} \left[A(x_1, x_2) \frac{dx_1}{x_1} + B(x_1, x_2) \frac{dx_2}{x_2} \right]$$

avec $(r_1, r_2) \in \mathbf{N}^2 - \{0\}$, A, B comme ci-dessus et pour tous $n_1, n_2 \in \mathbf{N} - \{0\}$, la matrice $n_1 A(0, 0) + n_2 B(0, 0)$ est régulière et non nulle (remarquer que $A(0, 0)$ et $B(0, 0)$ commutent du fait de la condition d'intégrabilité).

Le théorème 2.5.2 permet de voir que dans l'une des situations ci-dessus, si l'on suppose seulement que pour chaque valeur propre, l'espace propre généralisé de $A(0, 0)$ (ou, dans le second cas, de $B(0, 0)$) est de taille ≤ 5 , la conjecture est encore vraie.

Voici enfin une autre famille d'exemples pour lesquels la conjecture est vraie. Soit U un voisinage ouvert de 0 dans \mathbf{C} de coordonnée x_2 . On pourra rétrécir ce voisinage si besoin. Soit M un $\mathcal{O}_U[x_1]\langle \partial_{x_1}, \partial_{x_2} \rangle$ -module holonome à singularités régulières y compris en $x_1 = \infty$. Posons $\xi_1 = \partial_{x_1}$ et $\partial_{\xi_1} = -x_1$; ainsi les anneaux d'opérateurs différentiels $\mathcal{O}_U[x_1]\langle \partial_{x_1}, \partial_{x_2} \rangle$ et $\mathcal{O}_U[\xi_1]\langle \partial_{\xi_1}, \partial_{x_2} \rangle$ sont isomorphes. Notons $\mathcal{F}M$ le module M considéré comme un $\mathcal{O}(U)[\xi_1]\langle \partial_{\xi_1}, \partial_{x_2} \rangle$ -module : c'est le transformé de Fourier de M dans la direction x_1 (voir [44]). C'est aussi un module holonome, qui n'est pas nécessairement régulier. Son lieu singulier est réunion de composantes du diviseur $\{\xi_1 = 0, \infty\} \cup \{x_2 = 0\}$. Après localisation de $\mathcal{F}M$ le long de son lieu singulier et analytisation, on obtient une connexion méromorphe $(\mathcal{F}M)_{\text{loc}}$ sur $\mathbf{P}^1 \times U$ avec pôles le long de ce lieu singulier. Alors (cf. § III.4.5)

Théorème 2.5.3. — *Sous ces hypothèses, la conjecture 2.5.1 est vraie pour $(\mathcal{F}M)_{\text{loc}}$.*

3. Propriétés globales

3.1. Variétés r -caractéristiques. — Nous rappelons ici, pour que l'exposé se suffise à lui-même, la notion de variété r -caractéristique d'un \mathcal{D} -module holonome le long d'une hypersurface lisse, introduite par Y. Laurent [28]. Ce qui suit résume essentiellement le § 4 de [56] auquel nous renvoyons d'une manière générale. Nous allons l'utiliser pour donner un sens intrinsèque et global aux exposants $\widehat{\varphi}_\alpha$ qui apparaissent dans la bonne décomposition formelle locale d'une connexion méromorphe (lorsqu'elle en admet une).

Soit X une variété analytique complexe (une surface dans cet article) et Y une hypersurface lisse de X . Notons $N_Y X$ le fibré normal de Y dans X . L'espace cotangent $T^*(N_Y X)$ est muni d'une action de $(\mathbf{C}^*)^2$: celle d'un facteur \mathbf{C}^* est l'action cotangente de l'action de \mathbf{C}^* dans les fibres de $N_Y X \rightarrow X$ et celle de l'autre facteur \mathbf{C}^* est celle dans les fibres de $T^*(N_Y X) \rightarrow N_Y X$. Il existe de plus une fonction holomorphe, dite *fonction d'Euler*

$$\Theta : T^*(N_Y X) \longrightarrow \mathbf{C}$$

telle que, dans toute carte locale où Y est définie par $t = 0$, si τ désigne la coordonnée cotangente correspondante, on ait $\Theta = t\tau$.

Soit r un rationnel > 0 . On associe à tout \mathcal{D}_X -module cohérent \mathcal{M} une *variété r -caractéristique* relativement à Y , notée $\text{Ch}_{Y,r}(\mathcal{M})$: c'est un sous-ensemble involutif du fibré cotangent au fibré normal $N_Y X$ de Y dans X ; il est homogène pour une action de \mathbf{C}^* sur $T^*(N_Y X)$ définie à l'aide de r à partir de l'action de $(\mathbf{C}^*)^2$ décrite plus haut. Y. Laurent a montré que la dimension de $\text{Ch}_{Y,r}(\mathcal{M})$ est au plus égale à celle de la variété caractéristique usuelle $\text{Ch}(\mathcal{M})$. En particulier, si \mathcal{M} est holonome, toutes les composantes de $\text{Ch}_{Y,r}(\mathcal{M})$ sont lagrangiennes. On peut aussi définir un *cycle r -caractéristique* noté $\text{CCh}_{Y,r}(\mathcal{M})$ et de support égal à $\text{Ch}_{Y,r}(\mathcal{M})$.

Les composantes de $\text{Ch}_{Y,r}(\mathcal{M})$ qui sont bihomogènes relativement à l'action naturelle de $(\mathbf{C}^*)^2$ sur $T^*(N_Y X)$ ne jouent pas un rôle important dans la suite. Aussi désignerons-nous par Ch' la réunion des composantes non bihomogènes de Ch et par CCh' le cycle correspondant. On a alors les propriétés suivantes :

- (1) invariance par localisation le long de Y : $\text{CCh}'_{Y,r}(\mathcal{M}[*Y]) = \text{CCh}'_{Y,r}(\mathcal{M})$;
- (2) invariance par formalisation : $\text{CCh}'_{Y,r}(\mathcal{O}_{\widehat{X|Y}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}) = \text{CCh}'_{Y,r}(\mathcal{M})$;
- (3) bon comportement par revêtement cyclique ramifié le long de Y (cf. [56, Prop. 4.17]).

Propriétés des variétés r -caractéristiques d'une connexion admettant une bonne structure formelle le long de Y . — Nous supposons que \mathcal{M} est une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion admettant une bonne structure formelle le long d'une strate Y de dimension 1 de D . Alors \mathcal{M} est en particulier un \mathcal{D}_X -module holonome égal à son localisé le long

de Y . La proposition qui suit précise un peu [56, Prop. 4.20]. La démonstration est identique.

Proposition 3.1.1. — Soit $r > 0$ tel que $\text{Ch}'_{Y,r}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$. Alors

- (1) $\text{Ch}'_{Y,r}(\mathcal{M})$ est lisse et pour chaque composante connexe C de $\text{Ch}'_{Y,r}(\mathcal{M})$, la projection $p : C \rightarrow N_Y X$ est un isomorphisme sur $N_Y X - Y$;
- (2) $\text{Ch}'_{Y,r}(\mathcal{M}) \subset \Theta^{-1}(\mathbf{C}^*)$ et $\Theta : \text{Ch}'_{Y,r}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{C}^*$ est partout de rang 1.
- (3) L'application $(p, \Theta) : \text{Ch}'_{Y,r}(\mathcal{M}) \rightarrow (N_Y X - Y) \times \mathbf{C}^*$ est un isomorphisme sur son image $\Sigma_{Y,r}$. □

Si on munit $(N_Y X - Y) \times \mathbf{C}^*$ de l'action naturelle de $(\mathbf{C}^*)^2$, la sous-variété $\Sigma_{Y,r}$ est r -homogène et (p, Θ) est \mathbf{C}^* -équivariant.

3.2. Semi-continuité de l'irrégularité

3.2.1. Irrégularité et polygone de Newton en dimension 1 (rappels). — Soit $\widehat{\mathcal{N}}$ une $\mathbf{C}[[z]][z^{-1}]$ -connexion. Il existe alors un vecteur cyclique de $\widehat{\mathcal{N}}$ (voir par exemple [19, 40, 44]). Soit $P(z, \partial_z)$ l'opérateur différentiel de degré minimal en ∂_z annihilant ce vecteur cyclique. On associe à cet opérateur un polygone de Newton : si on écrit

$$P = \sum_{i=0}^d a_i(z)(z\partial_z)^i,$$

le polygone $N(P)$ est l'enveloppe convexe des quadrants $(i, v(a_i)) + (-\mathbf{N}, \mathbf{N})$, où $v(a_i)$ est la valuation de $a_i \in \mathbf{C}[[z]][z^{-1}]$. Ce polygone ne dépend pas du vecteur cyclique choisi, à translation entière verticale près, et ne dépend que de la connexion $\widehat{\mathcal{N}}$ (voir par exemple [40], [44, Chap. III], voir aussi [57, § 5.1]). Il est à sommets entiers et on peut le normaliser de sorte que le côté horizontal soit porté par le premier axe de coordonnées.

La hauteur de ce polygone est l'irrégularité de $\widehat{\mathcal{N}}$ à l'origine, notée $\text{ir}_0 \widehat{\mathcal{N}}$. Si $\widehat{\mathcal{N}} = \mathbf{C}[[z]][z^{-1}] \otimes_{\mathbf{C}\{z\}} \mathcal{N}$, où \mathcal{N} est une $\mathbf{C}\{z\}[z^{-1}]$ -connexion, on a $\text{ir}_0 \widehat{\mathcal{N}} = \text{ir}_0 \mathcal{N}$, où $\text{ir}_0 \mathcal{N}$ est l'indice d'irrégularité de Malgrange-Komatsu de la connexion analytique \mathcal{N} , à savoir la caractéristique d'Euler du complexe des solutions de \mathcal{N} dans le quotient $\mathbf{C}[[z]]/\mathbf{C}\{z\}$.

3.2.2. Reprenons la situation du § 1.1 : soit X une surface analytique complexe, Z un diviseur réduit de X et \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*Z]$ -connexion. Il existe un ouvert de Zariski non vide Z° de Z (i.e. $Z - Z^\circ$ est un fermé analytique de Z) tel que, pour tout germe de courbe lisse (Γ, z°) transverse à Z° en $z^\circ \in Z^\circ$, l'irrégularité en z° de la restriction de \mathcal{M} à Γ (qui est donc une connexion méromorphe d'une variable à pôle à l'origine, et l'irrégularité est celle définie dans [39], c'est un entier ≥ 0) soit localement constante quand z° varie sur Z° (on peut raisonner comme dans [50, § 2.4]).

Soit maintenant x° un point quelconque de Z et notons $(Z, x^\circ) = \cup_{i \in I} (Z_i, x^\circ)$ la décomposition en composantes irréductibles du germe (Z, x°) . Soit $\gamma : (\mathbf{C}, 0) \rightarrow$

(X, x°) un germe de courbe analytique d'image non contenue dans (Z, x°) et soit $\gamma^+ \mathcal{M}$ la connexion image inverse sur $(\mathbf{C}, 0)$ à pôle en 0. Notons $(\gamma, Z_i)_{x^\circ}$ la multiplicité d'intersection en x° de $\gamma(\mathbf{C}, 0)$ et (Z_i, x°) , i.e. la valuation de l'idéal $\gamma^* \mathcal{J}_{Z_i, x^\circ}$. Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 3.2.3. — *Si la conjecture 2.5.1 est vraie pour \mathcal{M} , l'irrégularité de $\gamma^+ \mathcal{M}$ en 0 satisfait l'inégalité*

$$\text{ir}_0(\gamma^+ \mathcal{M}) \leq \sum_{i \in I} (\gamma, Z_i)_{x^\circ} \cdot \text{ir}_{Z_i}(\mathcal{M})$$

où $\text{ir}_{Z_i}(\mathcal{M})$ désigne l'irrégularité de la restriction de \mathcal{M} à un germe de courbe transverse à Z_i° .

Remarque. — L'inégalité peut être stricte et le terme de gauche peut être nul (i.e. la restriction par γ peut être régulière) sans que le terme de droite le soit. En voici un exemple : on considère la connexion de rang 1 égale à $\mathbf{C}[x, x^{-1}, t] \cdot e^{t/x}$ à pôles le long de $x = 0$ et on prend pour γ la courbe $t = 0$. Le théorème montre donc que les phénomènes de confluence de singularités régulières en singularités irrégulières ne peuvent pas être produits par une famille intégrable de connexions méromorphes.

Démonstration d'une conjecture de B. Malgrange. — Nous allons déduire de cette inégalité un énoncé de semi-continuité de l'irrégularité en dimension quelconque, qui avait été conjecturé par B. Malgrange (voir [53, Conjecture 4.2.1]).

Soit $(Z, 0)$ un germe de diviseur de $(\mathbf{C}^n, 0)$ et soit \mathcal{M} une $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n, 0}[*Z]$ -connexion. Soit $p : (\mathbf{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^{n-1}, 0)$ un germe d'application lisse, finie en restriction à $(Z, 0)$. Pour $x \in Z$, soit $\text{ir}_x \mathcal{M}_{p(x)}$ l'irrégularité en x de la restriction de la connexion \mathcal{M} à la fibre $p = p(x)$. C'est une connexion sur un ouvert de \mathbf{C} à pôles aux points $Z \cap p^{-1}(p(x))$. Notons, pour $s \in (\mathbf{C}^{n-1}, 0)$

$$\Psi(s) = \sum_{x \in Z \cap p^{-1}(s)} \text{ir}_x \mathcal{M}_s.$$

Corollaire 3.2.4 (Semi-continuité de l'irrégularité). — *Si la conjecture 2.5.1 est vraie, la fonction Ψ est semi-continue inférieurement sur $(\mathbf{C}^{n-1}, 0)$.*

Démonstration. — On se ramène au cas où $n = 2$ en restreignant la situation à une droite de $(\mathbf{C}^{n-1}, 0)$. Le résultat est alors un cas particulier du théorème précédent : on prend pour γ la fibre $p^{-1}(0)$ et on voit que pour $s \neq 0$ assez voisin de 0, la fibre $p^{-1}(s)$ peut être utilisée pour calculer $\text{ir}_{Z_i}(\mathcal{M})$. \square

Démonstration du théorème 3.2.3. — Soit donc \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*Z]$ -connexion au voisinage de $x^\circ \in Z$, $e : \mathcal{X} \rightarrow X$ une suite d'éclatements ponctuels au-dessus de x° donnée par la conjecture 2.5.1. Notons $E = e^{-1}(x^\circ) = \cup_{j \in J} E_j$ le diviseur exceptionnel, où les E_j sont des \mathbf{P}^1 et soit $\mathcal{Z} = \cup_{i \in I} Z_i$ la transformée stricte de Z , où les Z_i sont les

normalisées des composantes Z_i de Z . Notons enfin E_j° l'ouvert de E_j qui est lisse dans $E \cup Z$.

Nous allons considérer les variétés r -caractéristiques de la connexion image inverse $e^+ \mathcal{M}$ le long des courbes lisses E_j° , ainsi que les cycles r -caractéristiques correspondants.

Soit $\text{CCh}'_{E_j^\circ}(e^+ \mathcal{M}) = \sum_{r>0} \text{CCh}'_{E_j^\circ, r}(e^+ \mathcal{M})$ la somme de ces cycles caractéristiques le long de E_j° . C'est un cycle algébrique de $T^*(N_{E_j^\circ} \mathcal{X})$, fibré cotangent au fibré normal à E_j° dans \mathcal{X} . Il existe par ailleurs une application naturelle $\Theta : T^*(N_{E_j^\circ} \mathcal{X}) \rightarrow \mathbf{C}$, dont la restriction à $\text{CCh}'_{E_j^\circ}(e^+ \mathcal{M})$ ne s'annule pas (proposition 3.1.1-(2)). Notons

- $C_j'^\circ = \Theta^{-1}(1)$ (c'est un cycle, *i.e.* une courbe munie de multiplicités sur chaque composante irréductible),
- $C_j^\circ \subset N_{E_j^\circ} \mathcal{X}$: image de $C_j'^\circ$ par la projection $T^*(N_{E_j^\circ} \mathcal{X}) \rightarrow N_{E_j^\circ} \mathcal{X}$,
- C_j : adhérence de C_j° dans l'adhérence projective $\mathbf{P}(N_{E_j^\circ} \mathcal{X} + \mathbf{1})$.

Nous allons montrer les propriétés suivantes :

Lemme 3.2.5. — *Sous les hypothèses faites sur la suite d'éclatements e ,*

- (1) *la projection $C_j'^\circ \rightarrow C_j^\circ$ est un isomorphisme au niveau des supports et $C_j^\circ \rightarrow E_j^\circ$ est finie étale; soit n_j son degré (en tenant compte des multiplicités du cycle);*
- (2) *le nombre n_j est l'irrégularité en 0 de la connexion $\gamma_j^+(\mathcal{M})$, si $\gamma_j : (\mathbf{C}, 0) \rightarrow (X, x^0)$ est un germe de courbe analytique qui se relève dans \mathcal{X} en une courbe transverse à E_j en un point de E_j° ;*
- (3) *C_j ne coupe pas la section nulle (0) de $\mathbf{P}(N_{E_j} \mathcal{X} + \mathbf{1})$;*
- (4) *C_j coupe la section (∞) au-dessus des points de $E_j - E_j^\circ$ au plus et la multiplicité d'intersection dans $\mathbf{P}(N_{E_j} \mathcal{X} + \mathbf{1})$ de ces deux diviseurs satisfait*

$$(3.2.6) \quad C_j \cdot (\infty) \leq \sum_{\{k \neq j\} E_k \cap E_j \neq \emptyset} n_k + \sum_{\{i\} Z_i \cap E_j \neq \emptyset} \text{ir}_{Z_i}(\mathcal{M}).$$

Nous utiliserons alors les deux lemmes ci-dessous. Soit A la matrice d'intersection des composantes de E . On sait que c'est une matrice symétrique définie négative dont les termes diagonaux sont les $\text{deg}_{E_j} N_{E_j} \mathcal{X}$.

Lemme 3.2.7. — *Soit Y une courbe projective lisse, $L \rightarrow Y$ un fibré en droites et $\mathbf{P}(L + \mathbf{1})$ son adhérence projective, munie des diviseurs (0) et (∞) ; Soit $C \subset \mathbf{P}(L + \mathbf{1})$ une courbe projective telle que la projection $p : C \rightarrow Y$ soit finie. Nous supposons aussi qu'aucune composante de C n'est contenue dans (0) ou (∞) . Alors*

$$C \cdot (0) - C \cdot (\infty) = \text{deg } p \cdot \text{deg}_Y L. \quad \square$$

L'inégalité (3.2.6) peut alors se réécrire $-A \cdot \mathbf{n} \leq \mathbf{ir}$, où \mathbf{n} est le vecteur des n_j ($j \in J$) et \mathbf{ir}_j étant la deuxième somme dans (3.2.6), l'inégalité des vecteurs signifiant une inégalité entre les composantes correspondantes.

Lemme 3.2.8. — La matrice $-A^{-1}$ est la matrice des multiplicités d'intersection $(\gamma_j, \gamma_k)_{x^\circ}$, les γ_j étant comme au lemme 3.2.5.

En particulier, la matrice $-A^{-1}$ a tous ses éléments ≥ 0 , donc l'inégalité (3.2.6) implique que $\mathbf{n} \leq (-A^{-1}) \cdot \mathbf{ir}$. Ainsi

$$n_j \leq \sum_k (\gamma_j, \gamma_k)_{x^\circ} \cdot \mathbf{ir}_k.$$

On remarque que si $\mathbf{ir}_k \neq 0$, les composantes Z_i qui coupent E_k sont des courbes transverses à E_k aux points de $E_k - \cup_{\ell \neq k} E_\ell$, de sorte que $(\gamma_j, \gamma_k)_{x^\circ}$ est aussi égal à $(\gamma_j, Z_i)_{x^\circ}$ pour toute telle composante. On en déduit donc que pour tout $j \in J$ on a

$$n_j \leq \sum_{i \in I} (\gamma_j, Z_i)_{x^\circ} \cdot \mathbf{ir}_{Z_i}(\mathcal{M}).$$

Si enfin $\gamma : (\mathbf{C}, 0) \rightarrow (X, x^\circ)$ est un germe de courbe quelconque d'image non contenue dans Z , on choisit une suite d'éclatements e de sorte que la conjecture 2.5.1 soit satisfait et que la relevée de γ coupe le diviseur exceptionnel transversalement en un point lisse de l'image inverse de Z . On peut alors appliquer l'inégalité précédente pour obtenir le théorème. \square

Démonstration du lemme 3.2.5. — Considérons d'abord la situation sur E_j° . Quitte à faire une ramification cyclique le long de E_j° (ce qui est possible globalement sur E_j°) nous pouvons nous ramener au cas où \mathcal{M} admet une bonne décomposition formelle le long de E_j° (cf. [56, Prop. 4.17 et cor. 4.18] pour le comportement du cycle caractéristique $\text{CCh}'_{E_j^\circ}$) puis au cas où \mathcal{M} est élémentaire de rang 1. Alors $\text{CCh}'_{E_j^\circ}$ a localement des équations du type suivant (cf. [56, Lem. 4.21]⁽¹⁾) :

$$\begin{cases} x_1^{m_1} \Theta + m_1 u(0, x_2) = 0 \\ x_1^{m_1} \xi_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(0, x_2) = 0 \end{cases}$$

où l'on a posé $E_j^\circ = \{x_1 = 0\}$, $\Theta = x_1 \xi_1$, (x_1, x_2, ξ_1, ξ_2) sont les coordonnées sur $T^*(N_{E_j^\circ} \mathcal{X})$ et u est une unité locale. La courbe C_j° a alors pour équation locale

$$x_1^{m_1} + m_1 u(0, x_2) = 0$$

et les deux premiers points sont clairs, de même que le fait qu'au-dessus de E_j° on a $C_j^\circ \cap (0) = \emptyset$ et $C_j^\circ \cap (\infty) = \emptyset$.

On se place ensuite en un point d'intersection $E_j \cap E_k$ ou $E_j \cap Z_i$. Ici encore, on commence par effectuer une ramification bi-cyclique autour des deux branches du diviseur exceptionnel pour se ramener au cas d'un modèle élémentaire. Il est important de savoir que ce modèle est aussi un modèle en tout point voisin du point d'intersection (corollaire 2.4.3). On se ramène alors au cas d'un modèle de rang 1 de la forme $\mathcal{O}[(x_1 x_2)^{-1}] \cdot e^{v(x)x^{-m}} x^\alpha$, avec $m = (m_1, m_2)$, $m_1, m_2 \geq 0$ et v est une unité locale.

⁽¹⁾L'énoncé de ce lemme comporte une coquille : il faut y remplacer $m + 1$ par m .

Si $m_1 = 0$, c'est que $C_j^\circ = \emptyset$, et la contribution locale à l'intersection avec (∞) est nulle, donc $\leq m_2$, qui est l'irrégularité du modèle élémentaire le long de la branche distincte de E_j .

Si $m_1 > 0$, on voit par le même argument que plus haut que la courbe C_j° a pour équation

$$x^m + m_1 v(0, x_2) = 0$$

ce qui donne le point (3). De plus la contribution locale à l'intersection avec (∞) est égale à m_2 .

En revenant à \mathcal{M} , on voit que la contribution locale à $C_j \cdot (\infty)$ est inférieure à l'irrégularité de \mathcal{M} le long de la deuxième branche. En sommant ces contributions locales, on obtient l'inégalité (3.2.6). \square

Démonstration du lemme 3.2.8. — Ce résultat est classique, nous allons en indiquer rapidement la démonstration pour être complet. Elle se fait par récurrence sur le nombre d'éclatements (donc de composantes du diviseur exceptionnel). On suppose que ces composantes sont E_1, \dots, E_ℓ . On note γ_i un germe de courbe transverse à E_i en un point lisse. On éclate un point sur E_ℓ et on note E'_i les transformés stricts des E_i et $E'_{\ell+1}$ la composante créée. On note γ'_i un germe de courbe transverse à E'_i en un point lisse ($i = 1, \dots, \ell + 1$). Nous noterons (E_i, E_j) la multiplicité d'intersection des diviseurs E_i et E_j (qui vaut 0 ou 1 si $i \neq j$ et $\deg_{E_i} N_{E_i} \mathcal{X}$ si $i = j$) et de même pour (E'_i, E'_j) . Nous noterons aussi (γ_i, γ_j) la multiplicité d'intersection en x^o des images de γ_i et γ_j dans X , et de même pour (γ'_i, γ'_j) .

Le centre d'éclatement est lisse sur E_ℓ . — On a les relations suivantes

$$\begin{aligned} (E'_i, E'_j) &= (E_i, E_j) \quad \text{si } i, j \neq \ell + 1 \text{ et sauf si } i = j = \ell \\ (E'_\ell, E'_\ell) &= (E_\ell, E_\ell) - 1 \\ (E'_\ell, E'_{\ell+1}) &= 1 \\ (E'_{\ell+1}, E'_{\ell+1}) &= -1 \\ (\gamma'_i, \gamma'_j) &= (\gamma_i, \gamma_j) \quad \text{si } i, j \neq \ell + 1 \\ (\gamma'_i, \gamma'_{\ell+1}) &= (\gamma_i, \gamma_\ell) \quad \text{si } i \neq \ell + 1 \\ (\gamma'_{\ell+1}, \gamma'_{\ell+1}) &= (\gamma_\ell, \gamma_\ell) + 1. \end{aligned}$$

Le centre d'éclatement est $E_\ell \cap E_{\ell-1}$. — On a dans ce cas les relations

$$\begin{aligned} (E'_i, E'_j) &= (E_i, E_j) \quad \text{si } i, j \neq \ell + 1 \text{ et sauf si } i, j = \ell, \ell - 1 \\ (E'_\ell, E'_\ell) &= (E_\ell, E_\ell) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E'_{\ell-1}, E'_{\ell-1}) &= (E_{\ell-1}, E_{\ell-1}) - 1 \\
(E'_\ell, E'_{\ell-1}) &= 0 \\
(E'_\ell, E'_{\ell+1}) &= 1 \\
(E'_{\ell-1}, E'_{\ell+1}) &= 1 \\
(E'_{\ell+1}, E'_{\ell+1}) &= -1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(\gamma'_i, \gamma'_j) &= (\gamma_i, \gamma_j) \quad \text{si } i, j \neq \ell + 1 \\
(\gamma'_i, \gamma'_{\ell+1}) &= (\gamma_i, \gamma_\ell) + (\gamma_i, \gamma_{\ell-1}) \quad \text{si } i \neq \ell + 1 \\
(\gamma'_{\ell+1}, \gamma'_{\ell+1}) &= (\gamma'_\ell, \gamma'_{\ell+1}) + (\gamma'_{\ell-1}, \gamma'_{\ell+1}) + 1 \\
&= (\gamma_\ell, \gamma_\ell) + 2(\gamma_\ell, \gamma_{\ell-1}) + (\gamma_{\ell-1}, \gamma_{\ell-1}) + 1.
\end{aligned}$$

On vérifie dans les deux situations que si l'on suppose

$$\sum_{j=1}^{\ell} (E_i, E_j) \cdot (\gamma_j, \gamma_k) = -\delta_{ik}$$

pour tous $i, k = 1, \dots, \ell$, on a aussi

$$\sum_{j=1}^{\ell+1} (E'_i, E'_j) \cdot (\gamma'_j, \gamma'_k) = -\delta_{ik}$$

pour tous $i, k = 1, \dots, \ell + 1$. □

3.3. Variétés \mathfrak{h} -caractéristiques. — Soit \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion admettant une bonne structure formelle le long de D . Pour chaque composante irréductible (supposée lisse) de D nous avons construit les variétés r -caractéristiques $\text{Ch}'_{D_i, r} \subset T^*N_{D_i}X$. Pour construire la fibration de Stokes au § 3.4 nous serons amenés à recoller les quotients de ces variétés par l'action de \mathbf{R}_+^* qui existe du fait de la r -homogénéité, au-dessus d'un point d'intersection de deux composantes D_i et D_j de D . À cette fin, il faut introduire des variétés caractéristiques associées à la paire (D_i, D_j) . C'est cette notion que nous allons rappeler dans cette section en renvoyant à [56, § 5] pour plus de détails. La terminologie « pente » pour les rationnels r pour lesquels $\text{Ch}'_{D_i, r} \neq \emptyset$ provient du fait qu'on peut en fait définir naturellement un polygone dont ce sont les pentes des faces (voir [28]). De la même manière les droites \mathfrak{h} introduites plus bas jouent le rôle de direction des faces d'un polyèdre.

Dans la suite, nous identifions X à un voisinage ouvert de $0 = x^o$ dans \mathbf{C}^2 , muni de coordonnées x_1, x_2 telles que $D = \{x_1x_2 = 0\}$.

Si (x_1, x_2, ξ_1, ξ_2) sont les coordonnées sur $T^*\mathbf{C}^2$, on dispose des fonctions d'Euler $\Theta_i = x_i\xi_i$ ($i = 1, 2$).

De la même manière qu'au § 3.1 on peut associer à tout \mathcal{D}_X -module cohérent un cycle r -caractéristique $\text{CCh}_{D_1, D_2, r}$ de support la variété r -caractéristique $\text{Ch}_{D_1, D_2, r}$:

c'est une variété (involutive) \mathbf{r} -homogène de $T^*\mathbf{C}^2$. Les composantes non tri-homogènes qui ne sont pas contenues dans l'image inverse de $x_1x_2 = 0$ forment la variété Ch' ou le cycle CCh' .

Le cycle $\text{CCh}'_{D_1, D_2, \mathbf{r}}(\mathcal{M})$ est invariant par localisation le long de D et par formalisation à l'origine ; il a un bon comportement par revêtement bicyclique ramifié le long de D (voir [56, § 5]).

Supposons maintenant que \mathcal{M} soit une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion admettant une bonne structure formelle le long de D en 0. Si $\mathbf{r} = (r_1, r_2) \in (\mathbf{Q}_+^*)^2$, nous posons $\mathbf{r}^{-1} = (1/r_1, 1/r_2)$. Nous avons (voir [56, Prop. 5.5]) :

Proposition 3.3.1. — *Soit C une composante irréductible de $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathbf{r}}(\mathcal{M})$ (si cette variété est non vide). Alors*

- (1) *Il existe une unique droite affine \mathfrak{h} de \mathbf{Q}^2 d'équation $m_1s_1 + m_2s_2 = m_0$ avec $m_0 \neq 0$ et m_1 ou $m_2 \neq 0$, $(m_0, m_1, m_2) \in \mathbf{N}^3$ premiers entre eux, telle que $\mathbf{r}^{-1} \in \mathfrak{h}$ et que C soit une orbite du sous-tore $(\mathbf{C}^*)^2 = H \subset (\mathbf{C}^*)^3$ défini par $\lambda_1 = t_1^{m_0}$, $\lambda_2 t_2^{m_0}$, $\lambda_0 = t_1^{m_1} t_2^{m_2}$, via l'action de $(\mathbf{C}^*)^3$ sur $T^*\mathbf{C}^2$ définie par*

$$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \cdot (x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = (\lambda_1^{-1}x_1, \lambda_2^{-1}x_2, \lambda_0\lambda_1\xi_1, \lambda_0\lambda_2\xi_2);$$

- (2) *La projection $C \rightarrow N_{\{0\}}X$ est un isomorphisme sur un ouvert de $N_{\{0\}}X \simeq \mathbf{C}^2$. \square*

Dans la suite il sera plus simple d'indexer les composantes des variétés \mathbf{r} -caractéristiques par les droites \mathfrak{h} correspondantes plutôt que par \mathbf{r} . Le cycle \mathfrak{h} -caractéristique $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}$ est la somme des composantes de $\bigoplus_{\mathbf{r}} \text{CCh}'_{D_1, D_2, \mathbf{r}}$ qui sont \mathfrak{h} -homogènes et la variété \mathfrak{h} -caractéristique $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}$ la réunion des composantes de $\bigcup_{\mathbf{r}} \text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathbf{r}}$ qui sont \mathfrak{h} -homogènes.

Remarques

- (1) Si \mathfrak{h} a pour équation $m_1s_1 + m_2s_2 = m_0$, on a toujours sur $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}$ (si \mathcal{M} admet une bonne structure formelle en 0) l'égalité

$$m_2\Theta_{1|\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}} = m_1\Theta_{2|\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}}.$$

- (2) La variété $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}$ est lisse, *i.e.* ses différentes composantes irréductibles ne se coupent pas dans $T^*\mathbf{C}^2$. En effet, $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}$ est une réunion d'orbites sous l'action d'un même tore.

3.4. Secteurs et fibration de Stokes. — Soit $\varphi = x_1^{-m_1}u(x_1, x_2)$ où u est une fonction holomorphe avec $u(0, 0) \neq 0$ et soit \mathcal{R} une connexion régulière à pôles le long de $D = \{x_1 = 0\}$ au voisinage de l'origine. Considérons la connexion $\mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R}$. Les secteurs de Stokes associés à cette connexion sont les domaines, sur le fibré en cercle associé au fibré normal à D sur lesquels e^φ est à décroissance rapide, autrement dit où $\text{Ré}(\varphi) < 0$. Classiquement on considère les secteurs associés à chaque composante élémentaire de la connexion $\text{End}(\mathcal{M})$, si \mathcal{M} est une connexion admettant une bonne

décomposition (ou structure formelle) locale le long de D en 0. Il faut noter qu'une telle construction est locale.

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons montrer comment définir *globalement* les secteurs de Stokes pour une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion \mathcal{M} admettant une bonne structure formelle le long de D (nous faisons la construction pour \mathcal{M} , mais il faudra l'appliquer à $\text{End}(\mathcal{M})$ pour faire le lien avec les résultats classiques).

Nous reprenons avec plus de détails le § 6 de [56].

Soit donc \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion sur la surface X admettant une bonne structure formelle le long du diviseur à croisements normaux D . Nous supposons que chaque composante irréductible de D est lisse. Notons D° la partie lisse de D . Soit $\pi^{-1}(D)$ l'image inverse du diviseur D par l'éclatement réel $\pi : \tilde{X}(D) \rightarrow X$ des composantes de D . Au-dessus de D° , l'espace $\pi^{-1}(D)$ s'identifie au fibré en cercle associé au fibré normal de D° dans X . Au voisinage d'un point de croisement de D , l'espace $\tilde{X}(D)$ est isomorphe à $(\mathbf{R}_+)^2 \times (S^1)^2$ et l'application π est donnée par $(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2) \mapsto (\rho_1 e^{\theta_1}, \rho_2 e^{\theta_2})$. C'est donc une variété à coins. La fibre au-dessus d'un point de croisement est un tore $(S^1)^2$. Dans ces coordonnées, l'espace $\pi^{-1}(D)$ est défini par $\rho_1 \rho_2 = 0$. C'est donc une variété (au sens PL).

Nous allons construire l'espace de Stokes $\widetilde{\text{St}}_D(\mathcal{M})$. C'est un sous-ensemble semi-analytique réel de $\pi^{-1}(D) \times S^1 \subset \tilde{X}(D) \times S^1$. On dispose donc de deux applications analytiques réelles

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\text{St}}_D(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{S}\Theta}} & S^1 \\ \downarrow & & \\ \pi^{-1}(D) & & \end{array}$$

Définition 3.4.1. — Les secteurs de Stokes sont les images des composantes connexes de $\widetilde{\mathcal{S}\Theta}^{-1}]\pi/2, 3\pi/2[$ par la projection $\widetilde{\text{St}}_D(\mathcal{M}) \rightarrow \pi^{-1}(D)$. La surface de Stokes est le sous-ensemble semi-analytique réel $\widetilde{\mathcal{S}\Theta}^{-1}(e^{i\pi})$ de $\pi^{-1}(D)$.

La surface de Stokes peut être singulière.

Nous allons aussi construire l'espace de Stokes déployé $\text{St}_D(\mathcal{M})$, qui est semi-analytique réel et muni d'une application analytique réelle et finie sur $\widetilde{\text{St}}_D(\mathcal{M})$, qui désingularise l'espace de Stokes au-dessus de D° . L'espace de Stokes déployé peut être singulier au-dessus des points de croisement de D au plus. Il est muni (par composition) d'une application $\mathcal{S}\Theta$ sur S^1 , qui permet de définir une fibration topologique localement triviale, de fibre la surface de Stokes déployée, lisse au-dessus des points de D° .

Construction de $\text{St}_{D^\circ}(\mathcal{M})$ et $\widetilde{\text{St}}_{D^\circ}(\mathcal{M})$. — Commençons la construction sur la partie lisse D° de D . On peut appliquer les résultats du § 3.1 et notamment la proposition 3.1.1 pour $Y = D^\circ$. Pour tout $r \in \mathbf{Q}_+^*$, la variété r -caractéristique $\text{Ch}'_{D^\circ, r}(\mathcal{M})$ est

r -homogène, donc munie d'une action de \mathbf{C}^* . Cette action est induite par une action sur $T^*N_{D^\circ}X$.

L'espace de Stokes déployé de pente r au-dessus de D° , noté $\text{St}_{D^\circ,r}(\mathcal{M})$ est par définition le quotient $\text{Ch}'_{D^\circ,r}(\mathcal{M})/\mathbf{R}_+^*$. Il est isomorphe au quotient $\Sigma_{Y,r}/\mathbf{R}_+^*$, donc est muni d'une application naturelle

$$(\mathcal{S}p, \mathcal{S}\Theta) : \text{St}_{D^\circ,r}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{S}N_{D^\circ}X \times S^1$$

si $\mathcal{S}N_{D^\circ}X$ désigne le fibré en cercle associé au fibré normal $N_{D^\circ}X$, qu'on identifie à $\pi^{-1}(D^\circ) \subset \tilde{X}(D)$. On note $\widetilde{\text{St}}_{D^\circ,r}(\mathcal{M})$ l'image de cette application : c'est l'espace de Stokes de pente r au-dessus de D° .

L'espace de Stokes déployé $\text{St}_{D^\circ}(\mathcal{M})$ est la réunion disjointe des $\text{St}_{D^\circ,r}(\mathcal{M})$. L'espace de Stokes $\widetilde{\text{St}}_{D^\circ}(\mathcal{M})$ est l'image dans $\pi^{-1}(D^\circ) \times S^1$ de l'espace de Stokes déployé : c'est la réunion des $\widetilde{\text{St}}_{D^\circ,r}(\mathcal{M})$ dans $\pi^{-1}(D^\circ) \times S^1$.

Proposition 3.4.2. — *Supposons que \mathcal{M} admette une bonne structure formelle le long de D .*

- (1) *L'espace de Stokes déployé $\text{St}_{D^\circ,r}(\mathcal{M})$ est une variété analytique réelle (lisse) orientable et l'application $\text{St}_{D^\circ,r}(\mathcal{M}) \rightarrow \pi^{-1}(D^\circ) \times S^1$ est propre et finie sur son image $\widetilde{\text{St}}_{D^\circ,r}(\mathcal{M})$ et partout de rang maximum ;*
- (2) *$\mathcal{S}\Theta$ est partout de rang 1 ;*
- (3) *Les fibres de $\mathcal{S}\Theta$ sont des surfaces analytiques réelles lisses orientables et la projection d'une fibre sur D° par composition de*

$$\text{St}_{D^\circ,r}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{S}N_{D^\circ}X \longrightarrow D^\circ$$

est un revêtement fini. □

La démonstration est analogue à celle de la proposition 3.1.1. L'orientabilité est conséquence du dernier point. Le calcul fait ci-dessous explicitera les deux premiers points.

L'espace de Stokes $\widetilde{\text{St}}_D(\mathcal{M})$. — C'est l'adhérence dans $\pi^{-1}(D) \times S^1$ de $\widetilde{\text{St}}_{D^\circ}(\mathcal{M})$.

Proposition 3.4.3. — *Supposons que \mathcal{M} admette une bonne structure formelle le long de D . Alors l'espace de Stokes $\widetilde{\text{St}}_D(\mathcal{M})$ est semi-analytique réel dans $\tilde{X}(D) \times S^1$.*

Démonstration. — Le problème est local et seul le cas des points de croisement de D mérite qu'on s'y arrête. On se ramène d'abord au cas où \mathcal{M} admet une bonne décomposition formelle. Soit donc $\rho : X' \rightarrow X$ une ramification cyclique autour de deux composantes locales D_1 et D_2 de D et notons encore ρ l'application induite $\tilde{X}'(D') \rightarrow \tilde{X}(D)$ donnée en coordonnées locales par

$$\rho(r'_1, \theta'_1 r'_2, \theta'_2) = (r_1^{\nu_1}, \nu_1 \theta'_1, r_2^{\nu_2}, \nu_2 \theta'_2).$$

On a aussi un revêtement

$$\begin{array}{ccc} T^*N_{D_i^\circ}X' - [T^*N_{D_i^\circ}X']|_{D_i^\circ} & \xleftarrow{\sim} & \rho^*T^*N_{D_i^\circ}X - [\rho^*T^*N_{D_i^\circ}X]|_{D_i^\circ} \\ & \searrow \rho & \downarrow \rho \\ & & T^*N_{D_i^\circ}X - [T^*N_{D_i^\circ}X]|_{D_i^\circ} \end{array}$$

et on sait (prop. 3.1.13) que $\text{Ch}'_{D_i^\circ}(\rho^+\mathcal{M}) = \rho^{-1}\text{Ch}'_{D_i^\circ}(\mathcal{M})$. De plus, à une constante > 0 près, Θ'_i et $\Theta_i \circ \rho$ coïncident, de sorte que $\mathcal{S}\Theta'_i = \mathcal{S}\Theta_i \circ \mathcal{S}\rho$. Ainsi

$$\text{St}_{D_i^\circ, \nu_i r}(\rho^+\mathcal{M}) = \mathcal{S}\rho^{-1}\text{St}_{D_i^\circ, r}(\mathcal{M})$$

et $\mathcal{S}\Theta'_i : \text{St}_{D_i^\circ, \nu_i r}(\rho^+\mathcal{M}) \rightarrow S^1$ est la composée de $\mathcal{S}\rho$ et $\mathcal{S}\Theta_i$.

On en déduit que $\widetilde{\text{St}}_D(\mathcal{M}) = \rho(\widetilde{\text{St}}_{D'}(\rho^+\mathcal{M}))$ et la semi-analyticité de $\widetilde{\text{St}}_D(\mathcal{M})$ résulte de celle de $\widetilde{\text{St}}_{D'}(\rho^+\mathcal{M})$ puisque que ρ est finie.

Supposons maintenant que \mathcal{M} admette une bonne décomposition formelle au voisinage du point de croisement x° de D . Soit $\mathcal{M}^{\text{él}}$ une $\mathcal{O}[*D]$ -connexion somme directe de connexions élémentaires, avec $\widehat{\mathcal{M}}_{x^\circ} \simeq \widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}_{x^\circ}$. On sait alors (corollaire 2.4.3) que pour tout $y^\circ \in D$ voisin de x° , on a

$$\mathcal{O}_{\widehat{X|D}, y^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{X, y^\circ}} \mathcal{M}_{y^\circ} \simeq \mathcal{O}_{\widehat{X|D}, y^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{X, y^\circ}} \mathcal{M}_{y^\circ}^{\text{él}}$$

et par suite on a $\text{Ch}'_{D^\circ, r}(\mathcal{M}) = \text{Ch}'_{D^\circ, r}(\mathcal{M}^{\text{él}})$ pour tout $r > 0$ (au voisinage de x°). Il suffit donc de prouver la proposition pour $\mathcal{M}^{\text{él}}$.

Soit $\mathcal{M}_\varphi^{\text{él}} = \mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R}_\varphi$ une composante élémentaire de $\mathcal{M}^{\text{él}}$ ($\varphi \in \mathcal{O}_{X, x^\circ}[*D]/\mathcal{O}_{X, x^\circ}$). Considérons l'application

$$\text{St}_{D^\circ}(\mathcal{M}_\varphi^{\text{él}}) \xrightarrow{(\mathcal{S}p, \mathcal{S}\Theta)} \mathcal{S}N_{D^\circ}X \times S^1$$

où $p : T^*N_{D^\circ}X \rightarrow N_{D^\circ}X$ est la projection. Il résulte du calcul fait au lemme 4.21 de [56] que cette application est injective. Plus précisément, si $\varphi = x^{-m}u(x_1, x_2)$ ($m = (m_1, m_2) \in \mathbf{N}^2 - \{0\}$ et $u(0, 0) \neq 0$), soit $a : N_{D^\circ}X \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $a = -x^{-m}u|_{D^\circ}$ (on note de la même manière les coordonnées de X avec celles de $N_{D^\circ}X$). Si $m_i \neq 0$ (pour $i = 1$ ou 2), la variété $\text{St}_{D_i^\circ}(\mathcal{M}_\varphi^{\text{él}})$ n'est pas vide et son image par l'application ci-dessus est le graphe de

$$\mathcal{S}a : \mathcal{S}N_{D_i^\circ}X \rightarrow S^1$$

(si par exemple $i = 1$, on a $\mathcal{S}a(\arg x_1, x_2) = -m_1 \arg x_1 + \arg(-x_2^{-m_2}u(0, x_2))$).

Définissons alors $\mathcal{S}a_{12} : \pi^{-1}(x^\circ) = (S^1)^2 \rightarrow S^1$ par

$$\mathcal{S}a_{12}(\theta_1, \theta_2) = \arg(-u(0, 0)) - m_1\theta_1 - m_2\theta_2.$$

Ces fonctions se recollent en une fonction $\mathcal{S}a$ lisse (au sens PL, car $\pi^{-1}(D)$ est une variété PL) sur $\pi^{-1}(D) \subset \widetilde{X}(D)$ à valeurs dans S^1 si m_1 et $m_2 \neq 0$ et en une fonction lisse sur $\pi^{-1}(D_1)$ (resp. sur $\pi^{-1}(D_2)$) si $m_1 \neq 0$ et $m_2 = 0$ (resp. $m_2 \neq 0$ et $m_1 = 0$).

Ainsi on a $\widetilde{\mathcal{S}t}_D(\mathcal{M}_\varphi^{\text{él}}) = \text{graphe } \mathcal{S}a$. Notons que dans les deux derniers cas, l'ensemble $\widetilde{\mathcal{S}t}_D(\mathcal{M}_\varphi^{\text{él}})$ est une variété à bord et dans le premier une variété lisse (PL) et dans tous les cas c'est une variété orientable. De plus, c'est un sous-ensemble analytique fermé dans $\pi^{-1}(D) \times S^1$ (qui est semi-analytique) et il est muni d'une fonction analytique réelle $\widetilde{\mathcal{S}\Theta}$ à valeurs dans S^1 , à savoir la restriction de la projection sur S^1 . Enfin on a $\mathcal{S}t_D(\mathcal{M}_\varphi^{\text{él}}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{S}t}_D(\mathcal{M}_\varphi^{\text{él}})$.

Finalement, puisque l'on a $\widetilde{\mathcal{S}t}_D(\mathcal{M}^{\text{él}}) = \cup_\varphi \widetilde{\mathcal{S}t}_D(\mathcal{M}_\varphi^{\text{él}})$, la proposition est démontrée pour $\mathcal{M}^{\text{él}}$. \square

Construction de $\mathcal{S}t_D(\mathcal{M})$ au-dessus des points de croisement de D . — Nous allons décrire d'abord les fibres de $\mathcal{S}t_D(\mathcal{M})$ au-dessus des points de croisement de D . Nous effectuerons le recollement ensuite. Plaçons-nous en point de croisement x° de deux composantes locales D_1 et D_2 . Nous noterons alors $\mathcal{S}t_{D_1, D_2}(\mathcal{M})$ la fibre au-dessus de x° de $\mathcal{S}t_D(\mathcal{M})$. Soit \mathfrak{h} une droite affine de \mathbf{Q}^2 telle que $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$. Soit H le sous-tore $(\mathbf{C}^*)^2$ de $(\mathbf{C}^*)^3$ associé à \mathfrak{h} (voir proposition 3.3.1) et $H_{\mathbf{R}}$ sa partie non compacte $(\mathbf{R}_+^*)^2$. Nous poserons

$$\mathcal{S}t_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}(\mathcal{M}) = \text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}(\mathcal{M})/H_{\mathbf{R}}.$$

Puisque $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}(\mathcal{M})$ est réunion d'orbites (non singulières) sous H agissant dans $T^*N_{\{0\}}X$, on voit que $\mathcal{S}t_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}(\mathcal{M})$ est réunion disjointe de tores réels $(S^1)^2$. Par ailleurs, nous avons vu aussi que si l'une des applications Θ_1 ou Θ_2 n'est pas identiquement nulle sur $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}(\mathcal{M})$, elle est non constante et à valeurs dans \mathbf{C}^* , donc définit $\mathcal{S}\Theta_1$ ou $\mathcal{S}\Theta_2 : \mathcal{S}t_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}(\mathcal{M}) \rightarrow S^1$. De plus, si les deux sont définies, elles coïncident. Nous noterons $\mathcal{S}\Theta_{12}$ cette application. Enfin nous poserons

$$\mathcal{S}t_{D_1, D_2}(\mathcal{M}) = \coprod_{\mathfrak{h}} \mathcal{S}t_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}(\mathcal{M})$$

Par définition, $\mathcal{S}t_{D_1, D_2}(\mathcal{M})$ est aussi réunion disjointe de tores réels $(S^1)^2$. On dispose de plus d'une application de $\mathcal{S}t_{D_1, D_2}(\mathcal{M})$ dans le tore $(S^1)^2 = \pi^{-1}(x^\circ)$ induite par l'application naturelle $\text{Ch}'_{D_1, D_2, \mathfrak{h}}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{C}^2$ (projection sur (x_1, x_2)).

Proposition 3.4.4

- (1) La réunion disjointe $\mathcal{S}t_D(\mathcal{M})$ des variétés $\mathcal{S}t_{D^\circ, r}(\mathcal{M})$ (de dimension 3) et des surfaces toriques $\mathcal{S}t_{D_i, D_j, \mathfrak{h}}(\mathcal{M})$ (pour $r > 0$, tout couple (D_i, D_j) et toute droite \mathfrak{h} comme plus haut) peut être munie naturellement d'une structure d'espace semi-analytique réel rendant analytique réelle la projection $\mathcal{S}t_D(\mathcal{M}) \rightarrow \pi^{-1}(D)$.
- (2) Les fonctions $\mathcal{S}\Theta$ et $\mathcal{S}\Theta_{i,j}$ se recollent en une fonction analytique réelle $\mathcal{S}\Theta : \mathcal{S}t_D(\mathcal{M}) \rightarrow S^1$.
- (3) L'application $\mathcal{S}t_D(\mathcal{M}) \rightarrow \pi^{-1}(D) \times S^1$ est finie sur son image $\widetilde{\mathcal{S}t}_D(\mathcal{M})$.

Démonstration. — Au vu de la proposition 3.4.2, la question est locale en un point de croisement x^o de D . Aussi nous reprenons la situation ci-dessus. Commençons par le cas où \mathcal{M} admet une bonne décomposition formelle. De même que dans la démonstration de la proposition 3.4.3, on voit que l'on peut identifier $\text{St}_D(\mathcal{M})$ à $\text{St}_D(\mathcal{M}^{\text{él}})$.

Soit C une composante irréductible de $\text{Ch}'_{D_1, D_2}(\mathcal{M}^{\text{él}})$. Alors C est définie par la donnée de $m \in \mathbf{N}^2 - \{0\}$ et de $c \in \mathbf{C}^*$ (prendre les équations du lemme 5.6 de [56] avec $u(0, 0) = c$). Notons $\mathcal{M}_C^{\text{él}}$ la somme des connexions $\mathcal{M}_\varphi^{\text{él}}$ pour les φ correspondant à C . Pour toutes ces connexions, la fibre de $\text{St}_D(\mathcal{M}_\varphi^{\text{él}})$ au-dessus de x^o est égale à $\mathbf{C}/(\mathbf{R}_+^*)^2$.

Pour $\varphi = x^{-m}u(x_1, x_2)$ et $\psi = x^{-m}v(x_1, x_2)$ correspondant à C , donc telles que $u(0, 0) = v(0, 0)$, notons $\varphi \sim_1 \psi$ si $\widetilde{\text{St}}_{D_1^o}(\mathcal{M}_\varphi^{\text{él}}) = \widetilde{\text{St}}_{D_1^o}(\mathcal{M}_\psi^{\text{él}})$, c'est-à-dire encore si l'on a $\arg u(0, x_2) \equiv \arg v(0, x_2)$. Ceci équivaut au fait que $u/v(0, x_2)$ ne prend que des valeurs réelles > 0 , donc est constante, et comme $u(0, 0) = v(0, 0)$, on a $u(0, x_2) \equiv v(0, x_2)$, autrement dit $\text{Ch}'_{D_1^o}(\mathcal{M}_\varphi^{\text{él}}) = \text{Ch}'_{D_1^o}(\mathcal{M}_\psi^{\text{él}})$.

L'espace $\text{St}_D(\mathcal{M}_C^{\text{él}})$ est alors obtenu ainsi : on prend la réunion disjointe indexée par les classes $[\varphi]_1$ modulo \sim_1 des $\text{St}_D(\mathcal{M}_\varphi^{\text{él}})_{|D_1}$ ainsi que l'analogie pour \sim_2 et la restriction à D_2 . On identifie la fibre au-dessus de $x^o = D_1 \cap D_2$ de chacun de ces espaces au même espace $\text{St}_{D_1, D_2}(\mathcal{M}_C^{\text{él}})$. D'après ce qui précède, la restriction $\text{St}_D(\mathcal{M}_C^{\text{él}})_{|D_1^o}$ est égale à $\text{St}_{D_1^o}(\mathcal{M}_C^{\text{él}})$ (et de même pour la restriction à D_2^o).

Alors $\text{St}_D(\mathcal{M}_C^{\text{él}})$ peut être muni d'une structure d'espace semi-analytique réel, pour laquelle chaque inclusion $\text{St}_D(\mathcal{M}_\varphi^{\text{él}}) \hookrightarrow \text{St}_D(\mathcal{M}_C^{\text{él}})$ est analytique réelle et l'application $\text{St}_D(\mathcal{M}_C^{\text{él}}) \rightarrow \pi^{-1}(D) \times S^1$ l'est aussi : comme $\pi^{-1}(D_1)$ est décrit par l'équation $\rho_1 = 0$ dans $(\mathbf{R}_+^*)^2 \times (S^1)^2$, l'espace de Stokes $\text{St}_D(\mathcal{M}_C^{\text{él}})$ peut être réalisé (localement sur X) comme sous-ensemble analytique réel de $\Delta \times (S^1)^2 \times S^1 \subset \widetilde{X}(D) \times S^1$, où Δ est une réunion de demi-droites de $(\mathbf{R}_+^*)^2$ indexée par les classes $[\varphi]_1$ et $[\varphi]_2$.

Enfin, nous posons

$$\text{St}_D(\mathcal{M}^{\text{él}}) = \coprod_C \text{St}_D(\mathcal{M}_C^{\text{él}}) \quad (\text{réunion disjointe}).$$

Notons que les composantes connexes des $\text{St}_{D_1^o, r}(\mathcal{M}^{\text{él}})$ et des $\text{St}_{D_i, D_j, h}(\mathcal{M}^{\text{él}})$ forment une stratification de Whitney de $\text{St}_D(\mathcal{M}^{\text{él}})$ et que $\text{St}_D(\mathcal{M}^{\text{él}})$ est singulier au plus au-dessus des points de croisement de D . Ceci donne donc la structure de $\text{St}_D(\mathcal{M})$ lorsque \mathcal{M} admet une bonne décomposition formelle.

Lorsque \mathcal{M} admet une bonne structure formelle, $\text{St}_{D'}(\rho^+ \mathcal{M})$ est muni d'une action (analytique réelle) du groupe $\mathbf{Z}/\nu_1 \times \mathbf{Z}/\nu_2$ et on prend pour $\text{St}_D(\mathcal{M})$ le quotient de $\text{St}_{D'}(\rho^+ \mathcal{M})$ par cette action. \square

Fibration de Stokes. — Soit maintenant Z un diviseur réduit quelconque de X , $x^o \in Z$ et \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*Z]$ -connexion. Choisissons une suite d'éclatements (complexes) $e : X' \rightarrow X$ à centres au-dessus de x^o , tels que $D = e^{-1}(Z)$ soit, au voisinage de l'image

inverse de x° , un diviseur à croisements normaux et que $e^+\mathcal{M}$ admette une bonne structure formelle le long de $e^{-1}(Z)$ sur ce voisinage (conjecture 2.5.1). Le résultat principal de ce paragraphe est alors :

Théorème 3.4.5. — *Si la conjecture 2.5.1 est vraie pour \mathcal{M} , alors pour toute boule B assez petite centrée en x° dans X , la restriction de $\mathbf{S}\Theta$ à $\text{St}_{e^{-1}(Z \cap B)}(e^+\mathcal{M})$ est une fibration topologique sur S^1 . De plus, si $B' \subset B$ est une autre telle boule, les deux fibrations sont topologiquement équivalentes. Enfin, si e' est une autre suite d'éclatements telle que $e'^+\mathcal{M}$ admette une bonne structure formelle, les fibrations correspondant à e et e' sont équivalentes.*

Lorsque $\text{St}_D(\mathcal{M})$ est lisse, on peut préciser le théorème 3.4.5 :

Proposition 3.4.6. — *Dans la situation du théorème 3.4.5, supposons de plus que $\text{St}_{e^{-1}(Z \cap B)}(\mathcal{M})$ soit lisse (au sens PL). Alors toutes les composantes connexes de cette variété ont un bord non vide.*

Les fibres de $\mathbf{S}\Theta$ sont alors des surfaces réelles lisses (PL) orientables à bord non vide, donc leurs composantes connexes ont le type d'homotopie d'un bouquet de cercles. Ceci peut être vu comme un analogue topologique du théorème de perversité de [53].

Exemple 3.4.7. — Soit f un germe en $0 \in \mathbf{C}^2$ de fonction analytique avec $f(0) = 0$ et soit $\mathcal{M} = \mathcal{E}^{1/f}$ la $\mathcal{O}_X[1/f]$ -connexion de rang 1 engendrée par $e^{1/f}$. On obtient une bonne décomposition formelle après éclatement en prenant une résolution des singularités de f (et il n'y a qu'un terme dans la décomposition). Alors l'application $\mathbf{S}\Theta : \text{St}_D(e^+\mathcal{M}) \rightarrow S^1$ est une fibration topologique, qui est topologiquement équivalente à la fibration de Milnor de f en 0 composée avec l'application antipodale $S^1 \rightarrow S^1$: cela résulte des lemmes 4.21 et 5.6 de [56], et de [3, § 2].

Analogie de la semi-continuité de l'irrégularité. — Lorsque \mathcal{M} est une connexion méromorphe régulière sur une variété X , à pôles le long d'un diviseur Z , on sait que si $e : X' \rightarrow X$ est une modification propre, la connexion $e^+\mathcal{M}$ est régulière le long de toute composante irréductible de $e^{-1}(Z)$. On ne crée donc pas d'irrégularité par éclatement. La démonstration de ce fait passe par la construction, lorsque $e^{-1}(Z)$ est à croisements normaux, de modèles canoniques (Deligne) et par un théorème de prolongement des morphismes de connexions régulières modulo codimension 2.

L'analogie de ce résultat pour les connexions irrégulières peut s'exprimer de la manière suivante en dimension 2 :

Proposition 3.4.8. — *Dans la situation du théorème 3.4.5, l'espace $\text{St}_D(e^+\mathcal{M})$, qui est muni d'une application naturelle dans D , n'a pas de composante connexe dont l'image dans Z via $\text{St}_D(e^+\mathcal{M}) \rightarrow D \rightarrow Z$ soit ponctuelle.*

Autrement dit, on ne crée pas de « nouvelles » lignes de Stokes par éclatement.

Démonstration du théorème 3.4.5. — La construction précédente montre facilement que la stratification de $\text{St}_D(\mathcal{M})$ donnée par les $\text{St}_{D_i^*}(\mathcal{M})$ et $\text{St}_D(\mathcal{M})|_{D_i \cap D_j}$ est une stratification de Whitney (semi-analytique). De plus l'application $\mathbf{S}\Theta$ est transverse aux strates de même qu'à $e^{-1}(Z \cap \partial B)$. On en déduit que $\mathbf{S}\Theta$ induit une fibration topologique sur $\text{St}_{e^{-1}(Z \cap B)}(\mathcal{M})$. Le fait qu'elle ne dépende pas de $B' \subset B$ assez petite se montre de même. Pour montrer que cette fibration ne dépend pas du choix de e , il suffit de comparer les fibrations pour e et $\varepsilon \circ e$, où ε est l'éclatement d'un point de $e^{-1}(0) = D$. Nous allons traiter le cas de l'éclatement d'un point lisse de D , le cas d'un point de croisement est analogue.

Supposons que ε soit l'éclatement d'un point lisse de $D = D_1$ et considérons d'abord le cas où $\widehat{\mathcal{M}}$ est élémentaire. Soit $\mathcal{M}^{\text{él}} = \mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R}$ un modèle convergent. Si $\varepsilon : X' \rightarrow X$ est l'éclatement de l'origine et $D_1 = \{x_1 = 0\}$, on pose $D' = \varepsilon^{-1}(D_1)$ et $\widetilde{X}'(D')$ l'éclaté réel de X' le long des composantes de D' . On a une application

$$\widetilde{\varepsilon} : \widetilde{X}'(D') \longrightarrow \widetilde{X}(D).$$

Pour la décrire, considérons des coordonnées (x_1, x_2) sur X avec $D_1 = \{x_1 = 0\}$. Les coordonnées sur $\widetilde{X}(D) \simeq \mathbf{R}_+ \times S^1 \times D_1$ sont (r_1, θ_1, x_2) où D_1 est un disque de \mathbf{C} . Alors \widetilde{X}' est recouvert par deux cartes : la première est munie de coordonnées $(r'_1, \theta'_1, r'_2, \theta'_2)$ de sorte que

$$\widetilde{\varepsilon}(r'_1, \theta'_1, r'_2, \theta'_2) = (r'_1 r'_2, \theta'_1 + \theta'_2, r'_2 e^{i\theta'_2})$$

et la seconde de coordonnées $(r''_1, \theta''_1, x''_2)$ avec

$$\widetilde{\varepsilon}(r''_1, \theta''_1, x''_2) = (r''_1, \theta''_1, r''_1 e^{i\theta''_1} x''_2)$$

Soit E le diviseur exceptionnel de ε . Dans la première carte, $\pi'^{-1}(E)$ est isomorphe à $S^1 \times S^1 \times \mathbf{R}_+$, donc est muni de coordonnées $(\theta'_1, \theta'_2, \rho'_1)$, et on l'identifie à $S^1 \times S^1 \times \mathbf{R}_+$ avec les coordonnées $(\theta'_1 + \theta'_2, \theta'_2, \rho'_1)$ de sorte que la projection $\pi'^{-1}(D') \rightarrow \pi^{-1}(D)$ induit $\pi'^{-1}(E) \rightarrow \pi^{-1}(0)$ qui n'est autre que la première projection $S^1 \times S^1 \times \mathbf{R}_+ \rightarrow S^1$.

De même, dans la deuxième carte, $\pi'^{-1}(E)$ est isomorphe à $S^1 \times \mathbf{C}$ avec les coordonnées (θ''_1, x''_2) et l'application $\pi'^{-1}(E) \rightarrow \pi^{-1}(0)$ est la première projection. On en déduit que $\pi'^{-1}(E)$ est difféomorphe à $S^1 \times \text{disque}$ et que $\pi'^{-1}(E) \rightarrow \pi^{-1}(0)$ est la projection sur le premier facteur.

Par ailleurs, soit D'_1 le transformé strict de D_1 par ε . Alors $\pi'^{-1}(D'_1) = S^1 \times S^1 \times \mathbf{R}_+$ avec les coordonnées $(\theta', \theta'_2, r'_2)$, l'application sur $\pi^{-1}(D_1)$ est donnée par

$$(\theta', \theta'_2, r'_2) \longmapsto (\theta', r'_2 e^{i\theta'_2})$$

et le recollement de $\pi'^{-1}(E)$ et $\pi'^{-1}(D'_1)$ se fait le long de $S^1 \times S^1$: c'est l'identité sur le premier facteur et sur le second on identifie *via* $\theta'_1 \mapsto \theta' - \theta'_2$.

Enfin l'application $\mathbf{S}\Theta'$ définie par $\varepsilon^+ \mathcal{M}^{\text{él}}$ est composée de $\mathbf{S}\Theta$ et de la projection $\pi'^{-1}(D') \rightarrow \pi^{-1}(D_1)$ (lorsqu'on identifie les variétés de Stokes St au graphe des

applications Sa et Sa'). Ainsi

$$\pi'^{-1}(D') \simeq [S^1 \times \text{disque}] \prod_{S^1 \times S^1} [S^1 \times (S^1 \times \mathbf{R}_+)]$$

est difféomorphe à $\pi^{-1}(D_1)$ et le difféomorphisme est compatible aux applications $S\Theta$ et $S\Theta'$ (qui se factorisent par la projection sur le premier facteur). On en déduit l'assertion dans ce cas.

Lorsque $\mathcal{M}^{\text{él}}$ est somme directe de connexions élémentaires, on raisonne de même. Dans le cas général, on relève un revêtement cyclique autour de D_1 à un revêtement cyclique autour de D' , on applique le résultat précédent puis on quotient par le groupe \mathbf{Z}/ν_1 : comme cette action ne porte que sur le premier facteur S^1 , on peut appliquer le même raisonnement au quotient. \square

Démonstration de la proposition 3.4.6. — Soit Z' le transformé strict de Z par e et E le diviseur exceptionnel de e , $E = e^{-1}(x^o)$, avec les notations utilisées dans le théorème 3.4.5. On a donc $e^{-1}(Z) = Z' \cup E$. Si \mathcal{S} est une composante connexe de $\text{St}_{e^{-1}(B \cap Z)}(\mathcal{M})$, la projection de \mathcal{S} sur X' (éclaté de X) est un sous-arbre de l'arbre associé naturellement à $e^{-1}(Z)$. Il résulte de la construction précédente que lorsque \mathcal{S} est lisse, \mathcal{S} a un bord non vide si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- (1) le sous-arbre correspondant à \mathcal{S} a une composante dans Z' (et alors \mathcal{S} a une composante de bord dont l'image est une composante de $\partial B \cap Z$);
- (2) le sous-arbre correspondant à \mathcal{S} a une composante E_i de E et il existe une composante D_j de $e^{-1}(Z)$ qui n'est pas dans ce sous-arbre et qui coupe E_i (\mathcal{S} admet alors un bord au-dessus du point d'intersection $E_i \cap D_j$).

Alors, si le sous-arbre correspondant à \mathcal{S} est celui associé à $e^{-1}(Z)$ on applique le premier point, sinon on utilise la connexité de ce dernier et on applique le second point. \square

Remarque. — Supposons que \mathcal{M} admette une bonne décomposition formelle au voisinage de x^o (et pas seulement une bonne structure formelle). Supposons de plus que pour tous $\varphi \neq \psi \in \mathcal{O}_X[*D]/\mathcal{O}_X$ telles que $\mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R}_\varphi$ et $\mathcal{E}^\psi \otimes \mathcal{R}_\psi$ soient deux composantes de $\mathcal{M}^{\text{él}}$, si $(\varphi) = (\psi) \neq (\varphi - \psi)$, c'est-à-dire si $\varphi = x^{-m}u(x_1, x_2)$, $\psi = x^{-m}v(x_1, x_2)$ et $u(0, 0) = v(0, 0) \neq 0$, alors $\varphi - \psi = x^{-m+n}w(x_1, x_2)$ avec $w(0, 0) \neq 0$ et $n_1, n_2 > 0$. Alors $\text{St}_D(\mathcal{M})$ est lisse au voisinage de l'image inverse de x^o .

Démonstration de la proposition 3.4.8. — Nous ne savons pas généraliser à ce cas la démonstration du cas régulier : bien que le théorème de prolongement des morphismes soit montré par Malgrange [45], la construction *globale sur D* de modèles de connexions méromorphes étendant une connexion définie au voisinage de la transformée

stricte de Z pose des problèmes délicats (il s'agit d'avoir des énoncés globaux du type de ceux du §2.2).

Néanmoins, on peut appliquer la même technique que dans la démonstration du théorème 3.2.3. Pour cela, notons n'_j le degré de la projection définie au lemme 3.2.5 lorsqu'on se restreint aux composantes de $C_j^{\prime o}$ dont le support est contenu dans une composante connexe donnée de $St_D(e^+\mathcal{M})$. On définit de même ir'_j . On montre alors que le lemme 3.2.5 et en particulier l'inégalité (3.2.6) sont valables lorsqu'on remplace n_k par n'_k , ir_j par ir'_j et C_j par sa partie supportée par la composante considérée de $St_D(e^+\mathcal{M})$. Si la composante connexe a une image ponctuelle dans Z , c'est que le vecteur \mathbf{ir}' correspondant est nul. L'inégalité (3.2.6) et le fait que $-A^{-1}$ soit à éléments ≥ 0 montrent que les degrés n'_j sont nuls, autrement dit que la composante est vide. \square

CHAPITRE II

STRUCTURE ANALYTIQUE DES CONNEXIONS MÉROMORPHES

1. Préliminaires

Dans cette section, X désigne une variété analytique complexe, D un diviseur à croisements normaux de X dont toutes les composantes sont lisses. Lorsque nous considérerons une situation locale, nous utiliserons les notations suivantes : $X = V \times Y$ où V est un voisinage de 0 dans \mathbf{C}^n et Y un voisinage de 0 dans \mathbf{C}^p ; la variété X est munie de coordonnées $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p$ et nous noterons $D = \{x_1 \cdots x_n = 0\}$. Nous identifierons Y à $\{0\} \times Y \subset X$.

1.1. Faisceaux sur l'éclaté réel. — Notons $\pi : \tilde{X}(D) \rightarrow X$ l'application obtenue en composant les éclatements réels orientés des composantes irréductibles (lisses) de D . On a localement $\tilde{X}(D) \simeq (\mathbf{R}_+)^n \times (S^1)^n \times Y$.

Quelques rappels. — Soit $Z \subset X$ un sous-ensemble analytique fermé d'une variété analytique complexe X . Soit $\mathcal{P}_X^{<Z}$ le faisceau des fonctions C^∞ sur X , plates le long de Z (i.e. dont toutes les dérivées s'annulent identiquement sur Z , voir par exemple [38]). Considérons le complexe de Dolbeault plat $(\mathcal{P}_X^{<Z} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,*}, \bar{\partial})$ où \mathcal{E}_X est l'anneau des fonctions C^∞ sur X et $\mathcal{E}_X^{p,q}$ le faisceau des (p, q) -formes C^∞ . Soit par ailleurs $\mathcal{O}_{\widehat{X|Z}}$ le complété formel de \mathcal{O}_X le long de Z . Le résultat qui suit est montré dans [8].

Proposition 1.1.1. — *Le complexe $(\mathcal{P}_X^{<Z} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{0,*}, \bar{\partial})$ est quasi-isomorphe au complexe*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{X|Z}} \longrightarrow 0$$

où \mathcal{O}_X est placé en degré 0. □

1.1.2. Soit $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_X$ le faisceau des distributions sur X , dual du faisceau des formes C^∞ de degré maximum, et $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod } Z}$ le faisceau (sur X) des distributions sur $X - Z$ à croissance modérée le long de Z . C'est le dual de $\mathcal{P}_X^{<Z} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{E}_X^{n+p, n+p}$. De plus (voir [38,

chap. VII, § 1]), c'est l'image de $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_X$ par le morphisme naturel $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_X \rightarrow j_* \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{X-Z}$, où $j : X - Z \hookrightarrow X$ désigne l'inclusion. On a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{X,Z} \longrightarrow \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X \longrightarrow \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod } Z} \rightarrow 0$$

où $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_{X,Z}$ désigne le faisceau des distributions à support dans Z .

Si Z est un diviseur de X , d'équation locale f , on voit que f et \bar{f} agissent de manière inversible sur $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod } Z}$. En utilisant l'injectivité de $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_X$ sur \mathcal{O}_X , on vérifie que

$$\mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod } Z} = \mathcal{O}_X[*Z] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X = \mathcal{O}_{\bar{X}}[*\bar{Z}] \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}}} \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X.$$

On en déduit alors le lemme de Dolbeault-Grothendieck pour $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod } Z}$:

$$(1.1.3) \quad \text{DR}_{\bar{X}}(\mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod } Z}) = \mathcal{O}_X[*Z]$$

en utilisant la structure naturelle de $\mathcal{D}_{\bar{X}}$ -module à gauche sur $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod } Z}$.

1.1.4. Soit $\mathcal{E}_{\tilde{X}(D)}$ le faisceau des fonctions C^∞ sur $\tilde{X}(D)$. Il est muni naturellement d'une action des opérateurs différentiels logarithmiques $\pi^{-1}\mathcal{D}_X\langle \log D \rangle$ et leurs conjugués $\pi^{-1}\mathcal{D}_{\bar{X}}\langle \log \bar{D} \rangle$ (localement engendrés par les champs de vecteurs logarithmiques). On pose

$$\mathcal{A}_{\tilde{X}(D)} = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker } \bar{x}_i \bar{\partial}_{x_i} \cap \bigcap_{j=1}^p \text{Ker } \bar{\partial}_{y_j} \subset \mathcal{E}_{\tilde{X}(D)}.$$

C'est un faisceau de $\pi^{-1}\mathcal{D}_X$ -modules à gauche (voir par exemple [56, § 2]). Par suite $\mathcal{A}_{\tilde{X}(D)}[*D] \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \mathcal{A}_{\tilde{X}(D)} \otimes \pi^{-1}\mathcal{O}_X[*D]$ est un $\pi^{-1}\mathcal{D}_X[*D]$ -module à gauche.

1.1.5. Soit $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{X}(D)}^{\text{mod } D}$ le faisceau (sur $\tilde{X}(D)$) des distributions sur $X - D$ qui sont à croissance modérée le long de $\pi^{-1}(D)$. C'est (localement sur X) le dual de $\mathcal{P}_{\tilde{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)}$, faisceau des fonctions C^∞ sur $\tilde{X}(D)$, plates sur $\pi^{-1}(D)$. C'est aussi l'image de $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{X}(D)}$ par le morphisme $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{X}(D)} \rightarrow \tilde{j}_* \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{X-D}$, si $\tilde{j} : X - D \hookrightarrow \tilde{X}(D)$ désigne l'inclusion (voir [38, chap. VII, § 1]). On a aussi $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{X}(D)}^{\text{mod } D} = \pi^{-1}\mathcal{O}_X[*D] \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_X} \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{X}(D)}$. C'est enfin un $\pi^{-1}\mathcal{D}_X[*D]$ et un $\pi^{-1}\mathcal{D}_{\bar{X}}[*\bar{D}]$ -module à gauche.

1.1.6. Soit aussi $\mathcal{A}_{\tilde{X}(D)}^{\text{mod } D}$ le faisceau (sur $\tilde{X}(D)$) des fonctions qui sont holomorphes sur $X - D$ et qui sont à croissance modérée le long de $\pi^{-1}(D)$. C'est un sous-faisceau de $\tilde{j}_*\mathcal{O}_{X-D}$. C'est un $\pi^{-1}\mathcal{D}_X[*D]$ -module à gauche. Ici cependant, $\mathcal{A}_{\tilde{X}(D)}^{\text{mod } D}$ n'est pas égal à $\mathcal{A}_{\tilde{X}(D)}[*D]$ (car par exemple pour tout $\alpha \in \mathbf{C}^n$ toute branche locale de x^α est modérée).

Toute section de $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{X}(D)}^{\text{mod } D}$ sur un ouvert Ω de $\tilde{X}(D)$ qui est holomorphe sur $\Omega - \pi^{-1}(D)$ est une section de $\mathcal{A}_{\tilde{X}(D)}^{\text{mod } D}$ sur cet ouvert (cela résulte des formules intégrales

de Cauchy par un argument classique). On a

$$\mathbf{R}\pi_* \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{X}(D)}^{\text{mod } D} = \pi_* \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{X}(D)}^{\text{mod } D} = \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod } D} \quad \text{et} \quad \pi_* \mathcal{A}_{\tilde{X}}^{\text{mod } D} = \mathcal{O}_X[*D].$$

Proposition 1.1.7 (Dolbeault-Grothendieck sur $\tilde{X}(D)$). — On a

$$\text{DR}_{\tilde{X}(D)}^{\sim} \left(\mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{X}(D)}^{\text{mod } D} \right) \stackrel{\text{déf}}{=} \pi^{-1} \Omega_{\tilde{X}}^* \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_{\tilde{X}}} \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{X}(D)}^{\text{mod } D} = \mathcal{A}_{\tilde{X}}^{\text{mod } D}.$$

La démonstration est donnée en appendice au § B.3.1. On en déduit immédiatement

Corollaire 1.1.8. — $\mathbf{R}\pi_* \mathcal{A}_{\tilde{X}}^{\text{mod } D} = \mathcal{O}_X[*D]$. □

Fonctions plates. — Si Z est un sous-espace fermé de D , nous considérerons le faisceau $\mathcal{A}_{\tilde{X}(D)}^{\leq Z}$ intersection de $\mathcal{A}_{\tilde{X}(D)}$ et $\mathcal{P}_{\tilde{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(Z)}$ (fonctions C^∞ sur $\tilde{X}(D)$, plates sur $\pi^{-1}(Z)$, voir [38]). Nous aurons à considérer surtout le cas où Z est une sous-variété lisse de D ou le cas $Z = D$. Considérons le cas où $Z = D$. Alors $\mathcal{P}_{\tilde{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)}$ est un faisceau mou et on a

$$(1.1.9) \quad \mathbf{R}\pi_* \mathcal{P}_{\tilde{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)} = \pi_* \mathcal{P}_{\tilde{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)} = \mathcal{P}_X^{\leq D}.$$

Soit $\bar{x}^o \in \pi^{-1}(x^o)$. On peut caractériser $f \in \mathcal{P}_{\tilde{X}(D), \bar{x}^o}^{\leq \pi^{-1}(D)}$ comme suit, en prenant les coordonnées locales ci-dessus : f est définie et C^∞ sur un voisinage ouvert Ω de \bar{x}^o , nulle sur $\pi^{-1}(D)$ et

$$(1.1.10) \quad \forall K \text{ compact } \subset \Omega, \forall N \in \mathbf{N}^n, \exists C_{K,N} > 0 \text{ tel que} \\ \|f\|_{\infty, K} \leq C_{K,N} \rho^N = C_{K,N} \rho_1^{N_1} \cdots \rho_n^{N_n}.$$

On voit alors que $\mathcal{P}_{\tilde{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)}$ est un $\pi^{-1} \mathcal{O}_X[*D]$ -module et un $\pi^{-1} \overline{\mathcal{O}_X[*D]}$ -module. Par ailleurs l'action des opérateurs différentiels logarithmiques le long de D sur les fonctions C^∞ préserve $\mathcal{P}_{\tilde{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)}$. Par suite $\mathcal{P}_{\tilde{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)}$ est muni d'une action de $\pi^{-1} \mathcal{D}_X[*D]$ et de $\pi^{-1} \overline{\mathcal{D}_X[*D]}$.

On en déduit que

$$\mathcal{A}_{\tilde{X}(D)}^{\leq D} = \text{Ker } \bar{\partial} : \mathcal{P}_{\tilde{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)} \longrightarrow \mathcal{P}_{\tilde{X}(D)}^{\leq \pi^{-1}(D)} \otimes \pi^{-1} \mathcal{E}_X^{0,1}.$$

On peut aussi caractériser $\mathcal{A}_{\tilde{X}(D)}^{\leq D}$ comme suit :

Proposition 1.1.11. — Une section du faisceau $\mathcal{A}_{\tilde{X}(D)}^{\leq D}$ sur un ouvert Ω de $\tilde{X}(D)$ est une fonction holomorphe φ sur $\Omega - \pi^{-1}(D)$ qui, pour tout compact K de Ω et tout $N \in \mathbf{N}^n$, satisfait sur $K - \pi^{-1}(D)$ une estimation

$$|\varphi(x)| \leq C_{K,N} \left| x_1^{N_1} \cdots x_n^{N_n} \right|.$$

Démonstration. — On montre d’abord que les dérivées $\partial_{x_i}\varphi$ et $\partial_{y_j}\varphi$ ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p$) de φ sur $\Omega - \pi^{-1}(D)$ (et donc toutes les dérivées successives par récurrence) satisfont pour tout K des estimations du même type : on peut supposer que

$$K = \prod_i K_i \times \prod_j \bar{\Delta}_j$$

est un produit de secteurs fermés

$$K_i = \{x_i \mid |x_i| < r \text{ et } \arg x_i \in [\alpha_i, \beta_i]\}$$

et de disques fermés $\bar{\Delta}_j = \{|y_j| \leq \rho\}$; en posant $\varphi = x^N\psi$ et en remplaçant ψ par φ , il suffit de montrer que les dérivées de φ sont bornées sur K ; on utilise pour cela la majoration pour φ sur $K' \subset \Omega$ un peu plus grand que K et la formule de Cauchy pour obtenir

$$\|\partial_{x_i}\varphi\|_K \leq \frac{C_{K',1_i}}{a_i} \quad \text{et} \quad \|\partial_{y_j}\varphi\|_K \leq \frac{C_{K',0}}{\rho'}$$

où $a_i > 0$ est tel que pour tout $x_i \in K_i$, le disque de rayon $a_i|x_i|$ centré en x_i est contenu dans K'_i .

Puisque les dérivées de φ sur $\pi^{-1}(D)$ existent et sont nulles de manière évidente, ce qui précède montre que φ est C^k pour tout k . □

Développements asymptotiques et Borel-Ritt. — Pour $f \in \mathcal{C}^\infty_{\bar{X}(D)}$ on peut considérer, au voisinage d’un point de $\pi^{-1}(Y)$, différents développements de Taylor, suivant que l’on considère certaines variables comme paramètres. Si Z est défini par $x_1 = \dots = x_r = 0$, un développement de Taylor le long de Z aura des coefficients C^∞ en $(\rho_{r+1}, \dots, \rho_n, \theta_{r+1}, \dots, \theta_n, y_1, \dots, y_p)$. L’application qui à f associe son développement de Taylor le long de Z commute aux dérivations.

Si f est une section de $\mathcal{A}_{\bar{X}(D)}$, le développement de Taylor de f le long de Z ne dépend des ρ_i, θ_i que *via* les $x_i = \rho_i e^{i\theta_i}$. Ainsi ce développement s’écrit

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} f_\alpha(\xi, y) x^\alpha,$$

si $x = (x_1, \dots, x_r)$ et $\xi = (x_{r+1}, \dots, x_n)$. Les f_α sont des sections locales de $\mathcal{A}_{\bar{Z}}$ si \tilde{Z} est l’éclaté réel de Z le long des composantes D_{r+1}, \dots, D_n .

De la même manière, les approximations par différents types de développements de Taylor s’expriment uniquement en fonction des x_i . Par exemple, pour $r = 1$, le développement le long de D_1 donne l’approximation

$$\left| f(x) - \sum_{\alpha=0}^m f_\alpha(\xi, y) x_1^\alpha \right| \leq C_{K,m} |x_1|^{m+1}$$

sur un compact K . Cette approximation est stable par dérivation (quitte à changer les constantes).

On peut définir des développements asymptotiques plus généraux. Pour cela, si Z est un sous-espace analytique fermé de X , nous notons

$$\mathcal{A}_{\widehat{X|Z}} = \varprojlim_k \mathcal{A}_{\widehat{X}} / \mathcal{J}_Z^k \mathcal{A}_{\widehat{X}}$$

le complété formel de $\mathcal{A}_{\widehat{X}}$ le long de (l'image inverse de) Z et notons $T_Z : \mathcal{A}_{\widehat{X}} \rightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X|Z}}$ l'application naturelle. Nous considérerons essentiellement le cas où Z est obtenu par réunion et intersection des composantes de D .

Dans la situation locale, lorsque Z est défini par $x_1 = \dots = x_r = 0$, la restriction à Z du faisceau $\mathcal{O}_{\widehat{X|Z}}$ (qui est nul hors de Z) est le faisceau défini par

$$U \mapsto \mathcal{O}_Z(U) \llbracket x_1, \dots, x_r \rrbracket$$

(séries formelles en x_1, \dots, x_r à coefficients dans $\mathcal{O}_Z(U)$). De même, soit \widetilde{Z} l'éclaté réel de Z le long de $x_{r+1} = 0, \dots, x_n = 0$. On a une application $p : \pi^{-1}(Z) \rightarrow \widetilde{Z}$ de fibre $(S^1)^r$: en coordonnées polaires, la projection $\pi : \widetilde{X}(D) \rightarrow X$ est donnée par $x_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ pour tout $j = 1, \dots, n$, $\pi^{-1}(Z)$ est défini par $\rho_j = 0$ pour tout $j = 1, \dots, r$ et p est l'oubli des arguments θ_j pour $j = 1, \dots, r$. Soit $\mathcal{A}_{\widetilde{Z}} \llbracket x_1, \dots, x_r \rrbracket$ le faisceau sur \widetilde{Z} défini par

$$(1.1.12) \quad \widetilde{U} \mapsto \mathcal{A}_{\widetilde{Z}}(\widetilde{U}) \llbracket x_1, \dots, x_r \rrbracket$$

(séries formelles à coefficients dans $\mathcal{A}_{\widetilde{Z}}(\widetilde{U})$). Alors $\mathcal{A}_{\widehat{X|Z}} = p^{-1} \mathcal{A}_{\widetilde{Z}} \llbracket x_1, \dots, x_r \rrbracket$ (ce qu'on voit en considérant les développements de Taylor ci-dessus) et $\pi_* \mathcal{A}_{\widehat{X|Z}} = \mathcal{O}_{\widehat{X|Z}}$. On voit de même que l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X}}^{<Z} \rightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X}} \xrightarrow{T_Z} \mathcal{A}_{\widehat{X|Z}}.$$

Lorsque $Z = Y$, on a $\mathcal{A}_{\widehat{X|Y}} = \pi^{-1} \mathcal{O}_{\widehat{X|Y}}$.

Le faisceau $\mathcal{A}_{\widehat{X|D}}$ s'analyse à l'aide du complexe de Mayer-Vietoris :

Lemme 1.1.13. — *Les complexes de Mayer-Vietoris*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{X|D}} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{\widehat{X|D_i}} \rightarrow \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_{\widehat{X|D_i \cap D_j}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{X|Y}} \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X|D}} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{A}_{\widehat{X|D_i}} \rightarrow \bigoplus_{i,j} \mathcal{A}_{\widehat{X|D_i \cap D_j}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X|Y}} \rightarrow 0$$

sont exacts.

Démonstration. — Par une récurrence simple sur le nombre n de composantes de D , on se ramène (en notant $D_{\neq 1} = \cup_{i \neq 1} \{x_i = 0\}$) à montrer l'exactitude des suites

$$(1.1.14) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{X|D}} \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{X|D_1}} \oplus \mathcal{O}_{\widehat{X|D_{\neq 1}}} \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{X|D_1 \cap D_{\neq 1}}} \rightarrow 0$$

et

$$(1.1.15) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X|D}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X|D_1}} \oplus \mathcal{A}_{\widehat{X|D_{\neq 1}}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X|D_1 \cap D_{\neq 1}}} \longrightarrow 0$$

qui résulte du fait que pour $f \in \mathcal{O}_X$ ou $f \in \mathcal{A}_{\widehat{X}}$, si f est multiple de x_1 et de $x_2 \cdots x_n$, alors f est multiple de $x_1 \cdots x_n$ (voir par exemple [23, p. 41]). \square

On déduit alors de ce lemme que $\pi_* \mathcal{A}_{\widehat{X|D}} = \mathcal{O}_{\widehat{X|D}}$ et que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X}}^{<D} \longrightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X}} \xrightarrow{T_D} \mathcal{A}_{\widehat{X|D}}$$

est exacte. La proposition qui suit (lemme de Borel-Ritt) complète ces résultats. Elle est démontrée en appendice au § B.1.

Proposition 1.1.16 (Majima [35]). — *Pour Z intersection de composantes de D la suite*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X}}^{<Z} \longrightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X}} \xrightarrow{T_Z} \mathcal{A}_{\widehat{X|Z}} \longrightarrow 0$$

est exacte, et il en est de même de la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X}}^{<D} \longrightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X}} \xrightarrow{T_D} \mathcal{A}_{\widehat{X|D}} \longrightarrow 0.$$

Solutions « plates » et complexe de de Rham « plat » sur l'éclaté réel. — Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module à gauche et $\mathrm{DR}_X(\mathcal{M}) = (\Omega_X^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}, d)$ le complexe de de Rham holomorphe. Nous allons considérer le complexe

$$\mathrm{DR}_{\widehat{X}(D)}^{<D}(\mathcal{M}) = \left(\mathcal{A}_{\widehat{X}(D)}^{<D} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_X} \pi^{-1} \mathrm{DR}_X(\mathcal{M}), d \right)$$

sur $\widehat{X}(D)$. Nous considérerons aussi les solutions sectorielles plates de \mathcal{M} , c'est-à-dire le complexe

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \left(\pi^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{A}_{\widehat{X}(D)}^{<D} \right).$$

Proposition 1.1.17 ([36]). — *Dans $D^b(\mathcal{D}_X)$ le complexe $\mathbf{R}\pi_* \mathcal{A}_{\widehat{X}(D)}^{<D}$ est isomorphe au complexe*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{X|D}} \longrightarrow 0$$

où \mathcal{O}_X est en degré 0.

Démonstration. — Si $(\mathcal{E}_X^{0,\bullet}, \bar{\partial})$ désigne le complexe de Dolbeault sur X , considérons le complexe de Dolbeault sur $\widehat{X}(D)$

$$\left(\mathcal{P}_{\widehat{X}(D)}^{<\pi^{-1}(D)} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{C}^\infty_X} \pi^{-1}\mathcal{E}_X^{0,\bullet}, \bar{\partial} \right).$$

La proposition résulte du lemme ci-dessous (démontré en appendice, au § B.3.2), du fait de (1.1.9) et de la proposition 1.1.1. \square

Lemme 1.1.18 ([36]). — Le complexe $\left(\mathcal{P}_{\widehat{X}(D)}^{<\pi^{-1}(D)} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{C}^\infty_X} \pi^{-1}\mathcal{E}_X^{0,*}, \bar{\partial} \right)$ est une résolution de $\mathcal{A}_{\widehat{X}(D)}^{<D}$.

Corollaire 1.1.19

- (1) $\mathbf{R}\pi_* \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \left(\pi^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{A}_{\widehat{X}(D)}^{<D} \right) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X} \left(\mathcal{M}, \left\{ \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{X}(D)} \right\} \right)$ dans la catégorie dérivée $D^+(\mathbf{C}_X)$.
- (2) Si \mathcal{M} est localement libre sur $\mathcal{O}_X[*D]$ ou si $\dim X = 2$, $\mathbf{R}\pi_* \mathbf{D}\mathcal{R}_{\widehat{X}(D)}^{<D}(\mathcal{M})$ est isomorphe (dans $D^+(\mathbf{C}_X)$) au complexe simple associé au complexe double
$$\mathbf{D}\mathcal{R}_X(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbf{D}\mathcal{R}_{\widehat{X}(D)}(\mathcal{M}).$$

Démonstration. — Le premier point résulte de la formule de projection ainsi que le second sous l’hypothèse de liberté locale de \mathcal{M} . Dans l’autre cas, on utilise le résultat suivant (cf. [56, Prop. 2.8]) :

Proposition 1.1.20. — Si $\dim X = 2$, $\mathcal{A}_{\widehat{X}(D)}^{<D}$ est un $\pi^{-1}\mathcal{O}_X$ -module plat. □

□

Remarquons qu’en utilisant Mayer-Vietoris 1.1.13, on obtient aussi

Corollaire 1.1.21. — Si $\dim X = 2$, $\mathcal{A}_{\widehat{X}}$ est un $\pi^{-1}\mathcal{O}_X$ -module plat. □

1.2. Théorèmes du type Malgrange-Sibuya. — Nous nous plaçons dans la situation locale indiquée au début de cette section. Soit $\mathrm{GL}_d(\mathcal{A}_{\widehat{X}})$ le faisceau en groupes de germe $\mathrm{GL}_d(\mathcal{A}_{\widehat{X}_{\tilde{x}^o}})$ en $\tilde{x}^o \in \pi^{-1}(x^o)$. Nous considérons aussi le sous-faisceau $\mathrm{GL}_{d,D}(\mathcal{A}_{\widehat{X}})$ des germes qui ont une restriction égale à l’identité sur $\pi^{-1}(D)$, le sous-faisceau $\mathrm{GL}_d^{<Y}(\mathcal{A}_{\widehat{X}})$ des germes qui ont un développement asymptotique égal à l’identité le long de Y , et leur intersection $\mathrm{GL}_{d,D}^{<Y}(\mathcal{A}_{\widehat{X}})$. Nous restreindrons ces faisceaux à $\pi^{-1}(0)$. Un germe en $\theta^o \in \pi^{-1}(0)$ de section de $\mathrm{GL}_{d,D}(\mathcal{A}_{\widehat{X}})$ s’écrit $\mathrm{Id} + M$ avec $M \in \mathrm{End}((x_1 \cdots x_n \mathcal{A}_{\widehat{X}})_{\theta^o}^d)$. Ce germe est dans $\mathrm{GL}_{d,D}^{<Y}(\mathcal{A}_{\widehat{X}})$ si $M \in \mathrm{End}((x_1 \cdots x_n \mathcal{A}_{\widehat{X}})_{\theta^o}^{<Y})^d$.

Le résultat suivant⁽¹⁾ est une variante d’un théorème de Majima ([35], [34]) qui lui-même est une généralisation d’un théorème de Malgrange-Sibuya. Nous renvoyons à [20] ou à [6, pp. 110-123] pour les principales propriétés utilisées de la cohomologie H^1 à coefficient dans un faisceau de groupes non abéliens.

Théorème 1.2.1. — L’image de

$$H^1(\pi^{-1}(0), \mathrm{GL}_{d,D}(\mathcal{A}_{\widehat{X}})) \longrightarrow H^1(\pi^{-1}(0), \mathrm{GL}_d(\mathcal{A}_{\widehat{X}}))$$

est l’identité.

On en déduit, puisque $\mathrm{GL}_d^{<D}(\mathcal{A}_{\widehat{X}})$ est un sous-faisceau de $\mathrm{GL}_{d,D}(\mathcal{A}_{\widehat{X}})$:

⁽¹⁾Dans l’énoncé 2.2.2 de [58] manque l’indice D .

Corollaire 1.2.2

- L'image de $H^1(\pi^{-1}(0), \text{GL}_d^{<D}(\mathcal{A}_{\bar{X}})) \rightarrow H^1(\pi^{-1}(0), \text{GL}_d(\mathcal{A}_{\bar{X}}))$ est l'identité.
- L'image de $H^1(\pi^{-1}(0), \text{GL}_{d,D}^{<Y}(\mathcal{A}_{\bar{X}})) \rightarrow H^1(\pi^{-1}(0), \text{GL}_d(\mathcal{A}_{\bar{X}}))$ est l'identité. □

Remarque 1.2.3. — On en déduit en particulier que les applications d'ensembles pointés

$$H^1(\pi^{-1}(0), \text{GL}_d(\mathcal{A}_{\bar{X}})) \longrightarrow H^1\left(\pi^{-1}(0), \text{GL}_d(\widehat{\mathcal{A}_{\bar{X}|D}})\right) \text{ et}$$

$$H^1(\pi^{-1}(0), \text{GL}_d(\mathcal{A}_{\bar{X}}[*D])) \longrightarrow H^1\left(\pi^{-1}(0), \text{GL}_d(\widehat{\mathcal{A}_{\bar{X}|D}}[*D])\right)$$

ont pour noyau l'identité (au sens des morphismes d'ensembles pointés).

Démonstration. — Elle est analogue à celle de [41, Appendice] en dimension 1.

Lemme 1.2.4. — On a $H^1(\pi^{-1}(0), \text{GL}_{d,D}(\mathcal{E}_{\bar{X}})) = 0$.

Démonstration. — La suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{GL}_{d,D}(\mathcal{E}_{\bar{X}}) \longrightarrow \text{GL}_d(\mathcal{E}_{\bar{X}}) \longrightarrow \text{GL}_d(\mathcal{E}_{\bar{X}}/x_1 \cdots x_n \mathcal{E}_{\bar{X}}) \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte analogue sur les sections globales sur $\pi^{-1}(0)$, en utilisant une partition de l'unité. Ainsi l'application naturelle

$$H^1(\pi^{-1}(0), \text{GL}_{d,D}(\mathcal{E}_{\bar{X}})) \longrightarrow H^1(\pi^{-1}(0), \text{GL}_d(\mathcal{E}_{\bar{X}}))$$

a pour noyau l'identité. De ce fait, on identifie $H^1(\pi^{-1}(0), \text{GL}_{d,D}(\mathcal{E}_{\bar{X}}))$ à l'ensemble des germes le long de $\pi^{-1}(0)$ de $\mathcal{E}_{\bar{X}}$ -modules localement libres de rang d (i.e. des fibrés C^∞) qui admettent une trivialisaton en restriction à $\pi^{-1}(D)$. Il s'agit de montrer qu'une telle trivialisaton s'étend, au voisinage de $\pi^{-1}(0)$, en une trivialisaton du fibré.

Pour cela, il suffit de montrer qu'une section C^∞ du fibré restreint à $\pi^{-1}(D)$ se relève en une section C^∞ au voisinage de $\pi^{-1}(0)$. Localement c'est possible, et on recolle à l'aide d'une partition de l'unité. □

On peut maintenant raisonner comme dans [41, Appendice]. Soit α une classe dans $H^1(\pi^{-1}(0), \text{GL}_{d,D}(\mathcal{A}_{\bar{X}}))$ représentée par un cocycle (α_{ij}) sur un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)$. D'après le lemme précédent, on a $H^1(\mathcal{U}, \text{GL}_{d,D}(\mathcal{E}_{\bar{X}})) = 0$ pour tout recouvrement \mathcal{U} de $\pi^{-1}(0)$, et par suite on a $\alpha_{ij} = \beta_i^{-1} \beta_j$, où β_i est une section sur U_i de $\text{GL}_{d,D}(\mathcal{E}_{\bar{X}})$.

On peut définir l'opérateur $\bar{\partial} : x_1 \cdots x_n \mathcal{E}_{\bar{X}} \rightarrow \mathcal{E}_{\bar{X}}^{0,1}$ dont le noyau est $x_1 \cdots x_n \mathcal{A}_{\bar{X}}$. Ainsi, $\bar{\partial} \beta_i$ est une section bien définie de $\text{End}((\mathcal{E}_{\bar{X}})^d) \otimes_{\mathcal{E}_{\bar{X}}} \mathcal{E}_{\bar{X}}^{0,1}$. On pose

$$\gamma_i = \bar{\partial} \beta_i \cdot \beta_i^{-1}.$$

Alors $\gamma_i = \gamma_j$ sur $U_i \cap U_j$ et les γ_i définissent une matrice γ de 1-formes à coefficients dans \mathcal{E}_X , et de type $(0, 1)$. De plus, les γ_i (donc γ) satisfont

$$\bar{\partial}\gamma_i + \gamma_i \wedge \gamma_i = 0$$

puisque cette égalité est satisfaite hors de $\pi^{-1}(D)$, où $\bar{\partial}\gamma_i$ est bien définie. Le théorème 1 de [37, Chap. X] permet de trouver au voisinage de $0 \in X$ une section φ de $\mathrm{GL}_d(\mathcal{E}_X)$ satisfaisant $\bar{\partial}\varphi = -\varphi \cdot \gamma$ et φ inversible au voisinage de 0. Alors pour tout i on a $\bar{\partial}(\varphi\beta_i) = 0$, de sorte que $\varphi\beta_i$ est une section sur U_i de $\mathrm{GL}_d(\mathcal{A}_{\tilde{X}})$ et $\alpha_{ij} = (\varphi\beta_i)^{-1} \cdot (\varphi\beta_j)$, autrement dit l'image de α dans $H^1(\mathcal{U}, \mathrm{GL}_d(\mathcal{A}_{\tilde{X}}))$ est l'identité. \square

1.3. Théorème d'existence et d'unicité. — Nous nous plaçons dans la situation locale indiquée au début de cette section. Nous rappelons un théorème de Majima [35] (nous suivons ici [56, Appendice]).

1.3.1. Les données. — Notons comme plus haut $\pi : \tilde{X}(D) \rightarrow X$ l'éclatement réel des composantes de D . Soit $\theta^\circ \in (S^1)^n$, tore qu'on identifie à

$$\pi^{-1}(0) \subset \tilde{X}(D) \simeq (\mathbf{R}_+)^n \times (S^1)^n \times Y.$$

Soit d un entier (rang du système (Σ) considéré plus bas) et soit \mathcal{V} un voisinage ouvert de 0 dans \mathbf{C}^d . On considère dans $X \times \mathcal{V}$ le diviseur image inverse de D par la projection $X \times \mathcal{V} \rightarrow X$, diviseur encore noté D . On a alors

$$\widetilde{X \times \mathcal{V}(D)} = \tilde{X}(D) \times \mathcal{V}.$$

Donnons-nous :

- (1) pour tout $i = 1, \dots, n$ des éléments $F_i \in (\mathcal{A}_{\tilde{X}(D) \times \mathcal{V}, \theta^\circ})^d$ et pour tout $j = 1, \dots, p$ des éléments $\Phi_j \in (\mathcal{A}_{\tilde{X}(D) \times \mathcal{V}, \theta^\circ})^d$;
- (2) pour tout $k = 1, \dots, d$ des germes de fonctions $\Lambda^{(k)} \in \mathcal{A}_{\tilde{X}(D), \theta^\circ}[*D]$ de la forme

$$\Lambda^{(k)}(r, \theta, y) = \lambda^{(k)}(y) \cdot x^{-m^{(k)}} \cdot \mathcal{U}^{(k)}(r, \theta, y)$$

où

- $\lambda^{(k)} \in \mathcal{O}(Y)$ est soit *inversible*, soit *identiquement nulle* ;
- $\mathcal{U}^{(k)} \in \mathcal{A}_{\tilde{X}(D), \theta^\circ}$ satisfait $\mathcal{U}^{(k)}(0, y) \equiv 1$;
- on peut écrire $n = n' + n''$ avec $n', n'' \geq 0$ de sorte que si l'on pose $m^{(k)} = (m_1^{(k)}, \dots, m_n^{(k)}) \in \mathbf{N}$ et si $\lambda^{(k)} \neq 0$, alors *pour tout* $i \leq n'$ on a $m_i^{(k)} = 0$ et *pour tout* $i \in [n' + 1, n]$ on a $m_i^{(k)} > 0$.
Si $n' \neq 0$, nous dirons que nous sommes dans le cas *régulier* (cas (REG)), et si $n' = 0$ dans le cas *purement irrégulier* (cas (PIR)).

Remarque. — Le cas (PIR) contient comme cas dégénéré le cas où $\lambda^{(k)} \equiv 0$ pour tout k , qui est en fait régulier.

Nous noterons Λ la matrice $d \times d$ diagonale de $k^{\text{ème}}$ terme diagonal $\Lambda^{(k)}$. On voit ainsi que Λ n'a de pôles que le long du sous-diviseur $D' \subset D$ défini par $x_{n'+1} \cdots x_n = 0$.

Dans le cas (PIR) nous utiliserons les notations suivantes :

- \mathcal{K} désigne l'ensemble des $k \in \{1, \dots, d\}$ pour lesquels $\lambda^{(k)} \neq 0$.
- Soit $k \in \mathcal{K}$. Nous noterons $\omega^{(k)}(y) = \arg \lambda^{(k)}(y)$. Pour $\theta^o \in (S^1)^n$ nous noterons $\mathcal{K}_{<0}(\theta^o)$ l'ensemble des $k \in \mathcal{K}$ tels que l'on ait

$$\cos \left(\sum_{i=n'+1}^n m_i^{(k)} \theta_i^o - \omega^{(k)}(0) \right) < 0.$$

1.3.2. *Le système* (Σ) . — Nous allons considérer le système d'équations (Σ) portant sur les fonctions inconnues $u(r, \theta, y) = (u^{(1)}(r, \theta, y), \dots, u^{(d)}(r, \theta, y))$ pour $k = 1, \dots, d$, avec $u^{(k)} \in \mathcal{A}_{\tilde{X}(D), \theta^o}$:

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Sigma_1) \quad x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} = x_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1}(r, \theta, y) \cdot u + F_1(r, \theta, y, u) \\ \vdots \\ (\Sigma_n) \quad x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = x_n \frac{\partial \Lambda}{\partial x_n}(r, \theta, y) \cdot u + F_n(r, \theta, y, u) \\ (\Sigma_{n+1}) \quad \frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{\partial \Lambda}{\partial y_1}(r, \theta, y) \cdot u + \Phi_1(r, \theta, y, u) \\ \vdots \\ (\Sigma_{n+p}) \quad \frac{\partial u}{\partial y_p} = \frac{\partial \Lambda}{\partial y_p}(r, \theta, y) \cdot u + \Phi_p(r, \theta, y, u) \end{array} \right.$$

1.3.3. *Intégrabilité du système* (Σ) . — Nous supposons (quitte à restreindre l'ouvert Y et l'ouvert V) que les F_i et les Φ_j sont définis sur un voisinage $U \times Y \times \mathcal{V}$ de θ^o dans $\tilde{X}(D) \times \mathcal{V}$ (rappelons que l'on note θ^o le point de

$$\tilde{X}(D) \times \mathcal{V} \simeq (S^1)^n \times (\mathbf{R}_+)^n \times Y \times \mathcal{V}$$

dont toutes les coordonnées sauf θ^o sont nulles). Nous noterons aussi

$$U^* = U \cap \tilde{X}(D)^* = U \cap (\tilde{X}(D) - \pi^{-1}(D)).$$

Considérons sur $V(r^o) \times \Delta(\rho^o) \times \mathcal{V}(R^o)$ la famille de formes différentielles holomorphes, pour $k = 1, \dots, d$:

$$\eta^{(k)} = du^{(k)} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Lambda^{(k)}}{\partial x_i} \cdot u^{(k)} + \frac{F_i^{(k)}}{x_i} \right) \cdot dx_i - \sum_{j=1}^p \left(\frac{\partial \Lambda^{(k)}}{\partial y_j} \cdot u^{(k)} + \Phi_j^{(k)} \right) \cdot dy_j$$

où $F_i^{(k)}$, $\Phi_j^{(k)}$ sont les composantes de F_i , Φ_j .

Dire que (Σ) est intégrable sur $U \times Y \times \mathcal{V}$ c'est dire que cette famille définit au voisinage de tout point de $U^* \times Y \times \mathcal{V}$ un feuilletage de codimension d (donc de dimension $n + p$). Expliciteons cette propriété : on doit avoir pour tous $i_1, i_2 = 1, \dots, n$ et tout $k = 1, \dots, d$

$$(1.3.4) \quad x_{i_1} \frac{\partial \Lambda^{(k)}}{\partial x_{i_1}} \cdot F_{i_2}^{(k)} + x_{i_2} \frac{\partial F_{i_1}^{(k)}}{\partial x_{i_2}} + \sum_{\ell=1}^k \frac{\partial F_{i_1}^{(k)}}{\partial u^{(\ell)}} \cdot \left[x_{i_2} \frac{\partial \Lambda^{(\ell)}}{\partial x_{i_2}} \cdot u^{(\ell)} + F_{i_2}^{(\ell)} \right] \\ = x_{i_2} \frac{\partial \Lambda^{(k)}}{\partial x_{i_2}} \cdot F_{i_1}^{(k)} + x_{i_1} \frac{\partial F_{i_2}^{(k)}}{\partial x_{i_1}} + \sum_{\ell=1}^k \frac{\partial F_{i_2}^{(k)}}{\partial u^{(\ell)}} \cdot \left[x_{i_1} \frac{\partial \Lambda^{(\ell)}}{\partial x_{i_1}} \cdot u^{(\ell)} + F_{i_1}^{(\ell)} \right]$$

et des égalités analogues entre les F_i et les Φ_j et entre les Φ_j .

1.3.5. Systèmes partiels. — Nous considérerons aussi des *systèmes partiels intégrables* : un tel système (Σ') est un système du type de (Σ) privé de quelques équations (nous supposons qu'il existe toujours une équation (Σ_i) avec $i \leq n$). Nous dirons qu'un système partiel est de type (REG) s'il admet une équation (Σ_i) régulière, avec $i \leq n$, c'est-à-dire pour laquelle $m_i^{(k)} = 0$ pour tout k . Dans le cas contraire nous dirons qu'il est de type (PIR). La condition d'intégrabilité ne porte que sur les équations composant (Σ') . Notons que tout sous-système d'un système (PIR) l'est aussi, alors qu'un sous-système d'un système (REG) peut être (REG) ou (PIR). Nous noterons $(\Sigma_{I,J})$ le système partiel intégrable du type de (Σ) dans lequel manquent les équations (Σ_i) , ($i \in I$) et (Σ_{n+j}) , ($j \in J$). Les variables x_i , $i \in I$ et y_j , $j \in J$ sont « libres ». Nous avons donc $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$ et $J \subset \{1, \dots, p\}$.

La démonstration du théorème ci-dessous est donnée dans l'appendice de [56].

Théorème 1.3.6 (Majima). — *Supposons que dans le système (Σ) les F_i et les Φ_j satisfont*

$$F_i(r, \theta, y, 0), \Phi_j(r, \theta, y, 0) \in (\mathcal{A}_{\tilde{X}(D), \theta^0}^{<D})^d.$$

Il existe alors une solution $u \in (\mathcal{A}_{\tilde{X}(D), \theta^0}^{<D})^d$ de (Σ) . De plus, si (Σ) est de type (REG) ou si (Σ) est de type (PIR) et $\mathcal{K}_{<0}(\theta^0) = \emptyset$, une telle solution est unique. Si (Σ) est de type (PIR), si $\mathcal{K}_{<0} \neq \emptyset$ et si u_1 et u_2 sont deux telles solutions dont les composantes $u_1^{(k)}$ et $u_2^{(k)}$ coïncident, pour $k \in \mathcal{K}_{<0}(\theta^0)$, en restriction au germe de demi-droite réelle $y = 0$, $\arg x_i = \theta_i^0$, $0 < |x_1| = \dots = |x_n| < \varepsilon$, alors $u_1 = u_2$.

Remarque 1.3.7. — On dispose d'un théorème tout à fait analogue pour un système partiel $(\Sigma_{I,J})$: l'hypothèse ne porte que sur les F_i avec $i \notin I$ et les Φ_j avec $j \notin J$; pour avoir l'unicité dans le cas (PIR) et $\mathcal{K}_{<0}(\theta^0) \neq \emptyset$, il faut imposer que les deux solutions $u_1^{(k)}$ et $u_2^{(k)}$ coïncident sur le germe

$$\left[\bigcap_{j \notin J} \{y_j = 0\} \right] \cap \left[\bigcap_{i \notin I} \{\arg x_i = \theta_i^0\} \right] \cap \{0 < |x_{i_1}| = \dots = |x_{i_q}| < \varepsilon\}$$

si $\{1, \dots, n\} - I = \{i_1, \dots, i_q\}$.

2. Bonne \mathcal{A} -structure

Nous revenons à la situation où X est de dimension 2.

2.1. Existence d'une bonne \mathcal{A} -structure

Notion de bonne \mathcal{A} -décomposition et de bonne \mathcal{A} -structure. — Soit \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion. Notons

$$\mathcal{M}_{\widehat{X}} = \mathcal{A}_{\widehat{X}(D)} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_X} \pi^{-1}\mathcal{M},$$

qui est un $\mathcal{A}_{\widehat{X}(D)}[*D]$ -module localement libre de type fini muni d'une action compatible de l'anneau $\mathcal{D}_{\widehat{X}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{A}_{\widehat{X}(D)} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_X} \pi^{-1}\mathcal{D}_X$. Soit Y une strate de D (donc de dimension 1 ou 0). Nous dirons que \mathcal{M} admet une *bonne \mathcal{A} -décomposition* le long de (D, Y) en $x^\circ \in Y$ s'il existe un bon modèle élémentaire local $\mathcal{M}^{\text{él}}$ au voisinage de x° et pour tout $\theta^\circ \in \pi^{-1}(x^\circ)$ un isomorphisme

$$\mathcal{M}_{\widehat{X}, \theta^\circ} \simeq \mathcal{M}_{\widehat{X}, \theta^\circ}^{\text{él}}$$

induisant un isomorphisme formel $\widehat{\mathcal{M}} \simeq \widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}$ indépendant de $\theta^\circ \in \pi^{-1}(x^\circ)$ (rappelons que l'on note $\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{O}_{\widehat{X}|Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ et que sur $\pi^{-1}(Y)$ on a $\mathcal{A}_{\widehat{X}|Y} = \pi^{-1}\mathcal{O}_{\widehat{X}|Y}$). En particulier \mathcal{M} admet une bonne décomposition formelle le long de (D, Y) en x° .

Nous dirons que \mathcal{M} admet une *bonne \mathcal{A} -structure* le long de (D, Y) en $x^\circ \in Y$ si après une ramification convenable ρ autour de D laissant fixe Y , la connexion image inverse $\rho^+\mathcal{M}$ admet une bonne \mathcal{A} -décomposition le long de (D', Y) en x° .

Enfin nous dirons que \mathcal{M} admet une *bonne \mathcal{A} -structure* le long de D si pour toute strate Y de D elle admet une bonne \mathcal{A} -structure le long de (D, Y) en tout point de Y . En particulier \mathcal{M} admet une bonne structure formelle le long de D .

Théorème 2.1.1. — *Si \mathcal{M} admet une bonne décomposition formelle (resp. une bonne structure formelle) le long de (D, Y) en $x^\circ \in Y$, alors \mathcal{M} y admet une bonne \mathcal{A} -décomposition (resp. structure).*

On déduit de ceci, du corollaire I.2.4.3 et du théorème I.2.5.1 le résultat suivant :

Théorème 2.1.2. — *Soit X une surface analytique complexe, Z un diviseur de X et \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*Z]$ -connexion. Si la conjecture I.2.5.1 est vraie pour \mathcal{M} , il existe une suite d'éclatements ponctuels $e : X' \rightarrow X$ telle que $e^{-1}(Z)$ soit un diviseur à croisements normaux dont toutes les composantes sont lisses et que la connexion image inverse $e^+\mathcal{M}$ admette une bonne \mathcal{A} -structure le long de $e^{-1}(Z)$. \square*

Si $\dim X = 1$, la modification e est l'identité et le théorème est un résultat de Hukuhara-Turrittin (voir par exemple [44, 64]).

Remarque 2.1.3. — On déduit aussi du théorème 2.1.1 que les résultats sur le faisceau d'irrégularité montrés dans [56, §7] en présence d'une très bonne structure formelle s'appliquent aussi en présence d'une bonne structure formelle.

La démonstration du théorème 2.1.1 se fait en deux temps. Le premier point est une conséquence des travaux de Majima [35] :

Théorème 2.1.4. — Soit $x^\circ \in D$ et $\theta^\circ \in \pi^{-1}(x^\circ) \subset \tilde{X}(D)$. Soit \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion au voisinage de x° et supposons donné un isomorphisme

$$\mathcal{A}_{\widehat{\tilde{X}|D, \theta^\circ}} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\widehat{\tilde{X}|D, \theta^\circ}} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M}^{\text{él}}$$

où $\mathcal{M}^{\text{él}}$ est un bon modèle élémentaire. Alors cet isomorphisme se relève en un isomorphisme

$$\mathcal{A}_{\tilde{X}, \theta^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\tilde{X}, \theta^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M}^{\text{él}}.$$

Lorsque x° n'est pas un point de croisement de D , le théorème ci-dessus est dû à Sibuya et implique le théorème 2.1.1. En effet, puisque \mathcal{M} admet une bonne décomposition formelle, il existe $\mathcal{M}^{\text{él}}$ élémentaire avec

$$(2.1.5) \quad \mathcal{O}_{\widehat{\tilde{X}|D, x^\circ}} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_{\widehat{\tilde{X}|D, x^\circ}} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M}^{\text{él}}$$

et puisque $\mathcal{A}_{\widehat{\tilde{X}|D}} = \pi^{-1}\mathcal{O}_{\widehat{\tilde{X}|D}}$ au voisinage de $\pi^{-1}(x^\circ)$, on en déduit immédiatement pour tout $\theta^\circ \in \pi^{-1}(x^\circ)$ un isomorphisme (indépendant de θ°)

$$(2.1.6) \quad \mathcal{A}_{\widehat{\tilde{X}|D, \theta^\circ}} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M} \simeq \mathcal{A}_{\widehat{\tilde{X}|D, \theta^\circ}} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M}^{\text{él}}$$

et par suite un isomorphisme (dépendant éventuellement de θ°)

$$(2.1.7) \quad \mathcal{A}_{\tilde{X}, \theta^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M} \simeq \mathcal{A}_{\tilde{X}, \theta^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M}^{\text{él}}$$

relevant (2.1.6) donc (2.1.5).

Lorsque x° est un point de croisement, ce résultat n'est plus suffisant pour montrer le théorème 2.1.1. Nous pouvons cependant ramener la démonstration de celui-ci au résultat précédent à l'aide de la

Proposition 2.1.8. — Soit \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion au voisinage d'un point de croisement x° admettant un bon modèle élémentaire $\mathcal{M}^{\text{él}}$ en x° , i.e. munie d'un isomorphisme $\widehat{\mathcal{M}} \simeq \widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}$. Alors pour tout $\theta^\circ \in \pi^{-1}(x^\circ)$, cet isomorphisme se relève en un isomorphisme (dépendant éventuellement de θ°)

$$\mathcal{A}_{\widehat{\tilde{X}|D, \theta^\circ}} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M} \simeq \mathcal{A}_{\widehat{\tilde{X}|D, \theta^\circ}} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M}^{\text{él}}.$$

Nous avons posé ici $\widehat{\mathcal{M}} = \widehat{\mathcal{O}}_{x^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{x^\circ}} \mathcal{M}$. Du fait du lemme 1.1.13, il est équivalent de trouver des relèvements

$$(2.1.9) \quad \mathcal{A}_{\widehat{X}|D_i, \theta^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M} \simeq \mathcal{A}_{\widehat{X}|D_i, \theta^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M}^{\text{él}}$$

pour $i = 1, 2$.

Démonstration du théorème 2.1.4. — Pour les besoins de la récurrence nous allons démontrer le résultat non seulement pour les connexions \mathcal{M} mais aussi pour les $\mathcal{A}_{\widehat{X}(D)}[*D]$ -connexions : par définition, une $\mathcal{A}_{\widehat{X}(D)}[*D]$ -connexion est un $\mathcal{A}_{\widehat{X}(D)}[*D]$ -module localement libre de type fini, muni d'une connexion plate

$$\nabla : \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \rightarrow \pi^{-1} \Omega_X^1 \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_X} \mathcal{M}_{\mathcal{A}}.$$

L'énoncé du théorème garde un sens dans ce cadre. Pour simplifier les notations nous noterons $\widehat{}$ l'opération $\mathcal{A}_{\widehat{X}|D} \otimes_{\mathcal{A}_{\widehat{X}(D)}}$.

Structure des \mathcal{A} -connexions régulières. — Nous dirons qu'une $\mathcal{A}_{\widehat{X}(D)}[*D]$ -connexion $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ localement libre est *régulière* si sa formalisée $\widehat{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}$ est de la forme $\mathcal{A}_{\widehat{X}|D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}$ où \mathcal{R} est une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion régulière.

Proposition 2.1.10. — *Soit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ une $\mathcal{A}_{\widehat{X}(D)}[*D]$ -connexion régulière. Alors il existe (localement sur D) une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion régulière \mathcal{R} et un isomorphisme au voisinage de tout $\theta^\circ \in \pi^{-1}(x^\circ)$:*

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}, \theta^\circ} \xrightarrow{\sim} \left(\mathcal{A}_{\widehat{X}(D)} \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_X)} \pi^{-1} \mathcal{R} \right)_{\theta^\circ}.$$

Démonstration. — Soit $\theta^\circ \in \pi^{-1}(x^\circ)$ et soit m' une base de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}, \theta^\circ}$, \widehat{m}' la base induite de $\widehat{\mathcal{R}}_{\mathcal{A}, \theta^\circ}$. Il existe alors une base \widehat{m} dans laquelle la matrice \widehat{A}_i de $x_i \partial_{x_i}$ est constante, avec $i = 1, 2$ si D a deux composantes et $i = 1$ si D n'en a qu'une et dans ce dernier cas la matrice \widehat{B}_2 de ∂_{x_2} est nulle. Soit $\widehat{\Phi}$ la matrice de changement de base $\widehat{m} = \widehat{\Phi} \cdot \widehat{m}'$ et relevons-la en $\Phi \in \text{GL}_d(\mathcal{A}_{\widehat{X}(D), \theta^\circ}[*D])$ en utilisant Borel-Ritt (1.1.16). Considérons enfin la base $m = \Phi \cdot m'$. La matrice A_i de $x_i \partial_{x_i}$ satisfait $A_i = A_i^o + C_i$ avec $\widehat{C}_i = 0$ et A_i^o constante, et la matrice B_2 de ∂_{x_2} satisfait $\widehat{B}_2 = 0$. Cherchons une matrice $\Psi \in \text{GL}_d(\mathcal{A}_{\widehat{X}(D), \theta^\circ})$ telle que $\widehat{\Psi} = \text{Id}$ et telle qu'après le changement de base $m_1 = \Psi \cdot m$ la matrice de $x_i \partial_{x_i}$ soit A_i^o et celle de ∂_{x_2} soit nulle. La matrice Ψ cherchée est donnée par une solution du système

$$x_i \partial_{x_i} \Psi = \text{ad}_{A_i^o}(\Psi) - \Psi \cdot C_i \quad (i = 1, 2)$$

ou de

$$\begin{aligned} x_1 \partial_{x_1} \Psi &= \text{ad}_{A_1^o}(\Psi) - \Psi \cdot C_1 \\ \partial_{x_2} \Psi &= \Psi \cdot B_2 \end{aligned}$$

qui relève $\widehat{\Psi} = \text{Id}$. On voit que $\Psi - \text{Id}$ est solution d'un système (Σ) de type (REG) et le théorème 1.3.6 donne l'existence (et l'unicité) d'une solution $\Psi \in \text{GL}_d(\mathcal{A}_{\widehat{X}(D), \theta^o})$ telle que $\widehat{\Psi} = \text{Id}$. \square

Fin de la démonstration du théorème 2.1.4. — Elle est analogue à celle du cas d'une variable, aussi nous ne ferons que l'esquisser (*voir* par exemple [44, p.210]). Elle se fait par récurrence sur le couple (d, r) , où d est le rang de la connexion et r l'ordre maximum du pôle des facteurs exponentiels de la bonne décomposition de $\mathcal{M}^{\text{él}}$. Notons celle-ci $\mathcal{M}^{\text{él}} = \bigoplus_{\alpha \in A} \mathcal{E}^{\varphi_\alpha} \otimes \mathcal{R}^\alpha$. Soit donc \mathcal{M}_A une $\mathcal{A}[*D]$ -connexion telle que $\widehat{\mathcal{M}}_{\theta^o} \simeq \widehat{\mathcal{M}}_{\theta^o}^{\text{él}}$ avec $\theta^o \in \pi^{-1}(x^o)$. Nous omettrons l'indice θ^o dans la suite.

On pose, pour tout α , $\varphi_\alpha = h_\alpha \cdot x^{-m_\alpha} \cdot \widehat{U}_\alpha(x, y)$ avec $\widehat{U}_\alpha(0, 0) = 1$ et on relève \widehat{U}_α en \mathcal{U}_α . Fixons $\alpha_0 \in A$ tel que $m_{\alpha_0} = \max \{m_\alpha \mid \alpha \in A\}$ (rappelons que les m_α sont totalement ordonnés pour l'ordre partiel de \mathbf{N}^2 , c'est une conséquence de l'hypothèse de bonne décomposition). Notons

$$A_{\alpha_0} = \{\alpha \in A \mid m_\alpha = m_{\alpha_0} \text{ et } h_\alpha = h_{\alpha_0}\}.$$

Supposons d'abord que $A_{\alpha_0} \neq A$. Nous allons relever à $\mathcal{A}_{\widehat{X}(D), \theta^o}$ la décomposition de $\widehat{\mathcal{M}}$ relative à la décomposition de A en $A_{\alpha_0} \cup (A - A_{\alpha_0})$. Il existe donc une base de la connexion dans laquelle la matrice Ω s'écrit

$$\begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix}$$

où $\widehat{\Omega}_{12} = 0$, $\widehat{\Omega}_{21} = 0$, $\widehat{\Omega}_{11}$ (*resp.* $\widehat{\Omega}_{22}$) est formée de blocs diagonaux du type

$$\text{Id} \cdot d\varphi_\alpha + (a_1 \text{Id} + N_1)dx_1 + (a_2 \text{Id} + N_2)dx_2$$

avec $\alpha \in A_{\alpha_0}$ (*resp.* $\alpha \in A - A_{\alpha_0}$), $a_1, a_2 \in \mathbf{C}$ de partie réelle dans $[0, 1[$ par exemple et N_1, N_2 sont des matrices nilpotentes. On est amené à résoudre les systèmes portant sur les matrices inconnues S_{12} (de la taille de Ω_{12}) et S_{21} (de celle de Ω_{21}) :

$$dS_{12} = -\Omega_{12} + (\Omega_{11}S_{12} - S_{12}\Omega_{22}) + S_{12}\Omega_{21}S_{12}$$

$$dS_{21} = -\Omega_{21} + (\Omega_{22}S_{21} - S_{21}\Omega_{11}) + S_{21}\Omega_{12}S_{21}$$

avec de plus $\widehat{S}_{12} = 0$ et $\widehat{S}_{21} = 0$. On vérifie que ces systèmes sont intégrables (du fait de l'intégrabilité de Ω). On peut les écrire sous la forme du système (Σ) du § 1.3.2. Les $\Lambda^{(k)}$ sont ici de la forme $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ avec $\alpha \in A_{\alpha_0}$ et $\beta \in A - A_{\alpha_0}$; en particulier on a $m^{(k)} = m_{\alpha_0}$ pour tout k (en prenant les notations du § 1.3.1). L'hypothèse de bonne décomposition formelle implique que l'hypothèse du théorème 1.3.6 est satisfaite car Ω_{12} et Ω_{21} sont à éléments dans $\mathcal{A}_{\widehat{X}(D), \theta^o}^{<D}$. On peut donc trouver des solutions S_{12} et S_{21} qui satisfont $\widehat{S}_{12} = 0$ et $\widehat{S}_{21} = 0$.

Si $A = A_{\alpha_0}$, on remplace \mathcal{M}_A par $\mathcal{E}^{-\varphi_{\alpha_0}} \otimes \mathcal{M}_A$, qui satisfait l'hypothèse de bonne décomposition formelle. Alors r diminue strictement. Si cette connexion est régulière, on applique la proposition 2.1.10. \square

Démonstration de la proposition 2.1.8. — Nous allons montrer l'existence d'un relèvement (2.1.9) de l'isomorphisme

$$\widehat{\Psi} : \widehat{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}$$

le long de D_1 , le cas de D_2 est similaire. Notons $\mathcal{A}_{\frac{*D_2}{\bar{X}|D_1}}$ le faisceau image inverse par l'application $\pi^{-1}(D_1) \rightarrow \widetilde{D}_1$ du faisceau sur \widetilde{D}_1 défini par

$$U_1 \mapsto \mathcal{A}_{\widetilde{D}_1}(U_1)[x_2^{-1}][[x_1]].$$

Une section de ce dernier faisceau est une série formelle en x_1 à coefficients dans $\mathcal{A}_{\widetilde{D}_1}[x_2^{-1}]$ définis sur un ouvert fixe, mais dont l'ordre du pôle en x_2 n'est pas contrôlé. Nous allons d'abord utiliser les résultats du §I.2.4 (dont nous reprenons les notations) pour montrer

Lemme 2.1.11. — *Si $\mathcal{M}^{\text{él}}$ est un bon modèle élémentaire, l'isomorphisme*

$$\widehat{K} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x^0}} \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \widehat{K} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x^0}} \mathcal{M}^{\text{él}}$$

se relève, pour tout $\theta^0 \in \pi^{-1}(x^0)$, en un isomorphisme

$$\mathcal{A}_{\frac{*D_2}{\bar{X}|D_1,\theta^0}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x^0}} \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\frac{*D_2}{\bar{X}|D_1,\theta^0}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x^0}} \mathcal{M}^{\text{él}}.$$

Démonstration. — Notons \sim la relation sur A définie par

$$\alpha \sim \alpha' \iff \varphi_\alpha - \varphi_{\alpha'} \in \mathbf{C}\{x_1, x_2\}[x_2^{-1}]$$

et soit $B = A/\sim$. Pour $\beta \in B$ notons A_β l'image inverse de β dans A . Soit \approx la relation sur A_β définie par

$$\alpha \approx \alpha' \iff \varphi_\alpha - \varphi_{\alpha'} \in \mathbf{C}\{x_1, x_2\} + x_1\mathbf{C}\{x_1, x_2\}[x_2^{-1}]$$

et $C_\beta = A_\beta/\approx$. Enfin, pour $\gamma \in C_\beta$, soit $A_{\beta\gamma}$ l'image inverse de γ dans A_β . Si la décomposition de $\mathcal{M}^{\text{él}}$ est bonne, $A_{\beta\gamma}$ est réduit à un seul élément pour tous β, γ . En effet, si α et α' sont dans $A_{\beta\gamma}$, on a $\varphi_\alpha - \varphi_{\alpha'} \in \mathbf{C}\{x_1, x_2\} + x_1\mathbf{C}\{x_1, x_2\}[x_2^{-1}]$ et la condition (B) implique que $\varphi_\alpha - \varphi_{\alpha'} \in \mathbf{C}\{x_1, x_2\}$ et donc $\alpha = \alpha'$.

La décomposition formelle du §I.2.4.2 peut donc s'écrire

$$\widehat{K} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x^0}} \mathcal{M} \simeq \bigoplus_{\alpha \in A} E_{\widehat{K}}^{\varphi_\alpha} \otimes_{\mathbf{C}} V_\alpha \simeq \bigoplus_{\beta \in B} \bigoplus_{\gamma \in C_\beta} \left(E_{\widehat{K}}^{\psi_\beta} \otimes_{\widehat{k}} E_{\widehat{k}}^{\theta_{\beta\gamma}} \right) \otimes_{\mathbf{C}} V_{\beta\gamma}$$

où $(V_\alpha, \delta_1, \delta_2) = (V_{\beta\gamma}, \delta_1, \delta_2)$ et $\psi_\beta + \theta_{\beta\gamma}$ est la classe de φ_α modulo $\mathbf{C}\{x_1, x_2\} + x_1\mathbf{C}\{x_1, x_2\}[x_2^{-1}]$.

D'autre part, puisque $K \subset \mathcal{A}_{\widehat{X}|D_1, \theta^\circ}^{*D_2}$ et d'après le corollaire I.2.3.8, on a pour tout θ°

$$\mathcal{A}_{\widehat{X}|D_1, \theta^\circ}^{*D_2} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\beta \in B} \left[\mathcal{A}_{\widehat{X}|D_1, \theta^\circ}^{*D_2} \otimes_K \left(E_K^{\psi_\beta} \otimes_{\mathcal{O}_{D_1, x^\circ}} N^\beta \right) \right].$$

Enfin, d'après le théorème de Hukuhara-Turritin (voir par exemple [64] ou [44]), il existe pour tout $\theta_2^\circ \in \pi_1^{-1}(x^\circ) \subset \widetilde{D}_1$ et pour tout $\beta \in B$ un isomorphisme

$$\mathcal{A}_{\widetilde{D}_1, \theta_2^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{D_1, x^\circ}} N^\beta \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\gamma \in C_\beta} \left[\mathcal{A}_{\widetilde{D}_1, \theta_2^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{D_1, x^\circ}} \left(E_k^{\theta_{\beta\gamma}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\beta\gamma} \right) \right]$$

relevant l'isomorphisme

$$\widehat{k} \otimes_k N^\beta \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\gamma \in C_\beta} \left[E_k^{\theta_{\beta\gamma}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\beta\gamma} \right].$$

On en déduit pour tout $\theta^\circ \in \pi^{-1}(x^\circ)$ un isomorphisme (puisque $K \subset \mathcal{A}_{\widehat{X}|D_1, \theta^\circ}^{*D_2}$)

$$\mathcal{A}_{\widehat{X}|D_1, \theta^\circ}^{*D_2} \otimes_K \left(E_K^{\psi_\beta} \otimes_{\mathcal{O}_{D_1, x^\circ}} N^\beta \right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\widehat{X}|D_1, \theta^\circ}^{*D_2} \otimes_K \left[\bigoplus_{\gamma \in C_\beta} \left(E_K^{\psi_\beta + \theta_{\beta\gamma}} \otimes_{\mathbb{C}} V_{\beta\gamma} \right) \right].$$

On obtient donc l'isomorphisme cherché. \square

Fin de la démonstration de 2.1.8. — Commençons par remarquer qu'il suffit de montrer l'existence d'un isomorphisme

$$\Phi : \mathcal{A}_{\widehat{X}|D_1, \theta^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\widehat{X}|D_1, \theta^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x^\circ}} \mathcal{M}^{\text{él}}.$$

En effet, soit $\widehat{\Phi}$ l'isomorphisme formel induit par Φ . Soit $\widehat{\Theta} = \widehat{\Psi} \circ \widehat{\Phi}^{-1}$. C'est un automorphisme de la connexion $\widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}$. Un tel automorphisme préserve la décomposition de $\widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}$ et induit un automorphisme de chaque connexion formelle régulière $\widehat{\mathcal{R}}^\alpha$. Dans une base convenable de $\widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}$, $\widehat{\Theta}$ a une matrice constante et en particulier se relève en un automorphisme Θ de $\mathcal{M}^{\text{él}}$. L'isomorphisme $\Theta \circ \Phi$ répond alors au problème.

Soit \mathbf{m}' une base de \mathcal{M} et Ω' la matrice de la connexion dans cette base. Soit $\widehat{\mathbf{m}}'$ la base induite dans $\widehat{\mathcal{M}}$ et $\widehat{\Omega}'$ la matrice correspondante. Il existe une matrice $\widehat{R} \in \text{GL}_d(\widehat{\mathcal{O}}[x_1^{-1}, x_2^{-1}])$ telle qu'après le changement de base de matrice \widehat{R} la matrice $\widehat{\Omega}'$ soit transformée en ${}^0\Omega$, où ${}^0\Omega$ est la matrice diagonale par blocs indexés par $\alpha \in A$ et

$${}^0\Omega_\alpha = \text{Id}_\alpha \otimes d\varphi_\alpha + M_{\alpha,1} \frac{dx_1}{x_1} + M_{\alpha,2} \frac{dx_2}{x_2}$$

où $M_{\alpha,1}$ et $M_{\alpha,2}$ sont des matrices constantes. En relevant \widehat{R} par une matrice R dans $\text{GL}_d(\mathcal{A}_{\widehat{X}|D_1, \theta^\circ}[x_1^{-1}, x_2^{-1}])$ (d'après Borel-Ritt), on trouve une base \mathbf{m} de $\mathcal{A}_{\widehat{X}|D_1, \theta^\circ} \otimes \mathcal{M}$ dans laquelle la matrice Ω de la connexion satisfait $\widehat{\Omega} = {}^0\Omega$.

D'autre part, d'après le lemme 2.1.11, il existe $Q \in \text{GL}_d(\mathcal{A}_{\widehat{X|D_1, \theta^\circ}}^{*D_2}[x_1^{-1}])$ telle qu'après le changement de base de matrice Q à partir de \mathbf{m}' on trouve une base \mathbf{m}'' dans laquelle la matrice de la connexion est aussi ${}^0\Omega$.

Soit $P \in \text{GL}_d(\mathcal{A}_{\widehat{X|D_1, \theta^\circ}}^{*D_2}[x_1^{-1}])$ le changement de base faisant passer de \mathbf{m} à \mathbf{m}'' . On a donc

$$P^{-1}dP + P^{-1}{}^0\Omega P = {}^0\Omega$$

et par suite P est solution de l'équation

$$(2.1.12) \quad dP = P \cdot {}^0\Omega - \Omega \cdot P.$$

On sait de plus que Ω est à éléments dans $\mathcal{A}_{\widehat{X|D_1, \theta^\circ}}[x_1^{-1}, x_2^{-1}]$ et que ${}^0\Omega - \Omega$ est à éléments dans $\mathcal{A}_{\widehat{X|D_1, \theta^\circ}}^{<D_2}[x_1^{-1}, x_2^{-1}]$ (i.e. les éléments ont un développement asymptotique nul dans $\mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_1^{-1}, x_2^{-1}]$).

Nous allons vérifier que sous ces conditions la matrice P est à éléments dans l'anneau $\mathcal{A}_{\widehat{X|D_1, \theta^\circ}}[x_1^{-1}, x_2^{-1}]$, ce qui donnera l'isomorphisme Φ cherché. Décomposons P en blocs $(P_{\alpha\alpha'})$ pour $\alpha, \alpha' \in A$ et posons

$$P_{\alpha\alpha'} = \sum_{i \geq i_0} P_{\alpha\alpha'}^{(i)}(x_2)x_1^i$$

avec $P_{\alpha\alpha'}^{(i)}(x_2) \in \mathcal{A}_{\widetilde{D}_1}(U_1)[x_2^{-1}]$, où U_1 est un voisinage ouvert assez petit de θ_2° . Remarquons que, puisque les $P^{(i)}$ ont au plus des pôles en x_2 et que $({}^0\Omega - \Omega)^{(i)}$ est à éléments dans $\mathcal{A}_{\widetilde{D}_1}^{<(D_1 \cap D_2)}(U_1)$ (si U_1 est assez petit), $[({}^0\Omega - \Omega)P]^{(i)}$ est aussi à éléments dans $\mathcal{A}_{\widetilde{D}_1}^{<(D_1 \cap D_2)}(U_1)$, de sorte que $({}^0\Omega - \Omega)P$ est à éléments dans $\mathcal{A}_{\widehat{X|D_1}}^{<D_2}(p^{-1}(U_1))$ si p est la projection $\pi^{-1}(D_1) \rightarrow \widetilde{D}_1$.

La composante de l'équation (2.1.12) sur $x_1^i \frac{dx_1}{x_1}$ s'écrit (pour le bloc $(\alpha\alpha')$), en tenant compte de la forme de ${}^0\Omega$ et en posant $\varphi_\alpha = x^{-m_\alpha} u_\alpha(x_1, x_2)$ avec $u_\alpha(0, 0) \neq 0$ ou bien $u_\alpha \equiv 0$,

$$iP_{\alpha\alpha'}^{(i)} + M_{\alpha,1}P_{\alpha\alpha'}^{(i)} - P_{\alpha\alpha'}^{(i)}M_{\alpha',1} = x_2^{-m_{\alpha,2}} [m_{\alpha,1}u_\alpha(x) + x_1\partial_{x_1}u_\alpha(x)] P_{\alpha\alpha'}^{(i+m_{\alpha,1})}(x_2) - x_2^{-m_{\alpha',2}} [m_{\alpha',1}u_{\alpha'}(x) + x_1\partial_{x_1}u_{\alpha'}(x)] P_{\alpha\alpha'}^{(i+m_{\alpha',1})}(x_2) + N^{(i)}(x_2)$$

où $N^{(i)}(x_2)$ est à éléments dans $\mathcal{A}_{\widetilde{D}_1}^{<(D_1 \cap D_2)}(U_1)$.

- Si $\alpha \neq \alpha'$,

- si $m_{\alpha,1} \neq m_{\alpha',1}$, supposons par exemple que $m_{\alpha,1} > m_{\alpha',1}$. On peut exprimer $P_{\alpha\alpha'}^{(i+m_{\alpha,1})}(x_2)$ en fonction des $P_{\alpha\alpha'}^{(j)}(x_2)$, $j < i + m_{\alpha,1}$ et des $N^{(j)}(x_2)$ pour $j \leq i + m_{\alpha,1}$, de sorte qu'on en déduit par récurrence que

$P_{\alpha\alpha'}^{(i)}(x_2)$ est à éléments dans $\mathcal{A}_{\bar{D}_1}^{<(D_1 \cap D_2)}(U_1)$, puisque $P_{\alpha\alpha'}^{(j)} = 0$ pour $j \ll 0$, quitte à rétrécir U_1 ;

- si $m_{\alpha,1} = m_{\alpha',1}$ et $m_{\alpha,2} \neq m_{\alpha',2}$ on raisonne de même ;
- si $m_\alpha = m_{\alpha'}$, on sait par hypothèse de bonne décomposition que $u_\alpha(x) - u_{\alpha'}(x)$ est de la forme $x^{n_{\alpha\alpha'}} v_{\alpha\alpha'}(x)$ avec $u_{\alpha\alpha'}(0) \neq 0$ et $m_\alpha - n_{\alpha\alpha'} > 0$, de sorte qu'on peut encore appliquer le même raisonnement.

– Si $\alpha = \alpha'$, l'équation s'écrit

$$(i \text{ Id} + \text{ad } M_{\alpha,1})(P_{\alpha\alpha}^{(i)}(x_2)) = N^{(i)}(x_2)$$

et donc pour tout $i \in \mathbf{Z}$ sauf un nombre fini, on a $P_{\alpha\alpha}^{(i)} \in \mathcal{A}_{\bar{D}_1}^{<(D_1 \cap D_2)}(U_1)$.

Ainsi tous les $P^{(i)}(x_2)$ sauf peut-être un nombre fini de $P_{\alpha\alpha}^{(j)}$ sont à éléments dans $\mathcal{A}_{\bar{D}_1}^{<(D_1 \cap D_2)}(U_1)$. D'autre part $P_{\alpha\alpha}^{(j)}$ est à éléments dans $\mathcal{A}_{\bar{D}_1}(U_1)[x_2^{-1}]$ pour tout j . Par suite P est à éléments dans $\mathcal{A}_{\widehat{\bar{X}}|D_1, \theta^\circ}[x_1^{-1}, x_2^{-1}]$. \square

Remarque. — Nous avons utilisé l'hypothèse que la connexion $\mathcal{A}_{\widehat{\bar{X}}|D_1, \theta^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{x, x^\circ}} \mathcal{M}$ provient d'une connexion $\mathcal{M}_{\widehat{\bar{X}}|D_1}$ définie sur $\mathcal{O}_{\widehat{\bar{X}}|D_1, x^\circ}$ (à savoir ici la connexion $\mathcal{O}_{\widehat{\bar{X}}|D_1, x^\circ} \otimes \mathcal{M}$). Cette hypothèse est importante : si l'on part d'une $\mathcal{A}_{\widehat{\bar{X}}|D_1, \theta^\circ}[*D]$ -connexion \mathcal{N} munie d'un isomorphisme formel $\widehat{\mathcal{N}} \simeq \widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}$, il n'est pas vrai en général que cet isomorphisme se relève en un isomorphisme de $\mathcal{A}_{\widehat{\bar{X}}|D_1, \theta^\circ}[*D]$ -connexions

$$\mathcal{N} \simeq \mathcal{A}_{\widehat{\bar{X}}|D_1, \theta^\circ} \otimes_{\mathcal{O}_{x, x^\circ}} \mathcal{M}^{\text{él}}.$$

Par exemple on peut prendre pour \mathcal{N} la $\mathcal{A}_{\widehat{\bar{X}}|D_1, \theta^\circ}[*D]$ -connexion $\mathcal{E}^{a(x_2)/x_1}$ de rang 1 où $a(x_2) \not\equiv 0$ a un développement asymptotique nul au voisinage de la direction θ_2° (i.e. est dans $\mathcal{A}_{\bar{D}_1, \theta_2^\circ}^{<(D_1 \cap D_2)}$). Alors $\widehat{\mathcal{N}} = \widehat{\mathcal{O}_X}[*D]$ mais $\mathcal{N} \not\cong \mathcal{A}_{\widehat{\bar{X}}|D_1, \theta^\circ}[*D]$ (car \mathcal{N} est irrégulière en tout point de $D_1 - \{x^\circ\}$ dans un secteur centré autour de la direction θ_2° , alors que $\mathcal{A}_{\widehat{\bar{X}}|D_1, \theta^\circ}[*D]$ est régulière). L'hypothèse a été utilisée sous la forme du lemme 2.1.11, qui nous fournit une solution d'un certain type de l'équation (2.1.12) et en particulier une solution dans un secteur de $D_1 - \{x^\circ\}$. Il se peut en général qu'une telle équation n'ait pas de solution, comme le montre l'exemple précédent. Ceci est dû au fait que ${}^0\Omega - \Omega$ peut aussi avoir des pôles en x_1 (bien qu'à coefficients asymptotiquement nuls en x_2) et on ne peut pas appliquer les théorèmes d'existence du type de ceux de Majima [35] ou [56, Appendice].

Notons aussi que les arguments développés s'appliquent car le point de croisement est de codimension 2 dans X . Il y a une difficulté ici pour étendre en toute codimension le théorème 2.1.1.

2.2. Classification locale des connexions méromorphes admettant une bonne \mathcal{A} -décomposition. — Nous nous plaçons ici dans une situation locale et nous

choisissons des coordonnées x_1, x_2 sur X de sorte que

$$D = \{x_1\} = 0 \quad \text{ou} \quad D = \{x_1 x_2 = 0\}.$$

Soit \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion admettant une bonne \mathcal{A} -décomposition le long de (D, Y) en $0 \in Y$ et soit $\mathcal{M}^{\text{él}}$ un bon modèle élémentaire local. On peut lui associer

- un isomorphisme formel $\widehat{f} : \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}$;
- des relèvements $f_{\theta^\circ} : \mathcal{M}_{\widehat{X}, \theta^\circ} \rightarrow \mathcal{M}_{\widehat{X}, \theta^\circ}^{\text{él}}$ de \widehat{f} pour tout $\theta^\circ \in \pi^{-1}(0)$.

Nous dirons que deux couples $(\mathcal{M}, \widehat{f})$ et $(\mathcal{M}', \widehat{f}')$ sont équivalents si (au voisinage de $0 \in Y$) il existe un isomorphisme de $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexions $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'$ tel que le composé

$$\widehat{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{M}'} \xrightarrow{\widehat{f}'} \widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}$$

soit égal à \widehat{f} . Comme en dimension 1 (voir [41]) on peut associer à un tel couple une classe dans $H^1\left(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}})\right)$ dont l'image dans

$$H^1\left(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}|Y}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}|Y}^{\text{él}})\right) = H^1\left(\pi^{-1}(0), \pi^{-1} \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}|Y}[*D]}(\widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}})\right)$$

est (la classe de) l'identité.

Lemme 2.2.1. — *Les applications*

$$\begin{aligned} \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}}) &\longrightarrow \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}|Y}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}|Y}^{\text{él}}), \\ \text{Aut}_{\mathcal{D}_X[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él}}) &\longrightarrow \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}|Y}[*D]}(\widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}) \end{aligned}$$

sont surjectives.

Nous noterons les noyaux $\text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}[*D]}^{<Y}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}})$ et $\text{Aut}_{\mathcal{D}_X[*D]}^{<Y}(\mathcal{M}^{\text{él}})$.

Démonstration. — Il suffit de montrer la surjectivité de la deuxième flèche puisque

$$\text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}|Y}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}|Y}^{\text{él}}) = \pi^{-1} \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}|Y}[*D]}(\widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}).$$

Commençons par montrer le résultat pour End à la place de Aut . On identifie le faisceau $\text{End}_{\mathcal{D}_X[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él}})$ à celui des sections horizontales de la connexion $\mathcal{N}^{\text{él}} = \text{End}_{\mathcal{O}_X[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él}})$ qui se décompose aussi en somme de connexions élémentaires. Il suffit donc de montrer que pour une connexion élémentaire $\mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R}$, les sections horizontales de la formalisée se relèvent en des sections horizontales de la connexion. Notons que, puisque le modèle $\mathcal{M}^{\text{él}}$ est bon, on peut supposer que $\varphi = x^{-m}u(x, y)$ avec $m_i \geq 0$ pour tout $i = 1, 2$ ($m_2 = 0$ si $D = \{x_1 = 0\}$) et u est une unité si au moins un des m_i est > 0 , sinon $u \equiv 0$. Alors on vérifie que $\widehat{\mathcal{E}}^\varphi \otimes \widehat{\mathcal{R}}$ n'a de section horizontale que si $\varphi \equiv 0$ et on est ramené au cas régulier qui est facile.

Une section locale de $\text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}|Y}[*D]}(\widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}})$ se relève alors en une section inversible de $\text{End}_{\mathcal{D}_X[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él}})$, ce qu'on voit en considérant les déterminants. \square

Il résulte de ce lemme que l'on a une suite exacte d'ensembles pointés

$$\begin{aligned} \text{Id} &\longrightarrow H^1\left(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\leq Y}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}})\right) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^1\left(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}})\right) \longrightarrow H^1\left(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}|Y}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}|Y}^{\text{él}})\right) \end{aligned}$$

et on en déduit une application de l'ensemble des classes $(\mathcal{M}, \widehat{f})$ (pointé par la classe $(\mathcal{M}^{\text{él}}, \text{Id})$) vers $H^1\left(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\leq Y}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}})\right)$.

Théorème 2.2.2. — *L'ensemble $H^1\left(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\leq Y}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}})\right)$ classe les couples $(\mathcal{M}, \widehat{f})$ à équivalence près, autrement dit l'application ainsi définie est bijective.*

L'injectivité se démontre comme en dimension 1 (voir [41]), aussi nous allons considérer ci-dessous seulement la surjectivité.

2.2.3. Donnons d'abord comme dans *loc. cit.* une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe λ dans l'ensemble $H^1\left(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\leq Y}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}})\right)$ provienne d'un couple $(\mathcal{M}, \widehat{f})$: il faut et il suffit que son image dans $H^1\left(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{A}_{\widehat{X}}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}})\right)$ soit l'identité. En effet, si λ provient d'une connexion $(\mathcal{M}, \widehat{f})$, c'est qu'il existe un recouvrement (U_i) de $\pi^{-1}(0)$ et des isomorphismes de $\mathcal{A}_{\widehat{X}}[*D]$ -connexions $f_i : \mathcal{M}_{\widehat{X}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}}$ induisant \widehat{f} tels que λ provienne du cocycle (λ_{ij}) avec $\lambda_{ij} = f_i f_j^{-1}$ sur $U_i \cap U_j$. Si on fixe une base de \mathcal{M} et une base de $\mathcal{M}^{\text{él}}$, l'égalité des matrices correspondantes montre que (λ_{ij}) est un cobord de $\text{GL}_d(\mathcal{A}_{\widehat{X}}[*D]) = \text{Aut}_{\mathcal{A}_{\widehat{X}}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}})$.

Inversement, si pour un recouvrement (U_i) convenable le cocycle (λ_{ij}) est un cobord de $\text{Aut}_{\mathcal{A}_{\widehat{X}}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}})$, i.e. $\lambda_{ij} = f_i f_j^{-1}$, on définit une nouvelle connexion ∇' sur $\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}}$ en conjuguant ∇ par f_i sur U_i , et la \mathcal{D} -linéarité de λ_{ij} montre que celle-ci est globalement définie, donc définit une nouvelle structure de $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion sur le $\mathcal{O}_X[*D]$ -module $\mathcal{M}^{\text{él}}$. De plus $\widehat{f}_i = \widehat{f}_j$ sur $U_i \cap U_j$ de sorte que les isomorphismes formels

$$(\mathcal{M}_{\widehat{X}|Y}^{\text{él}}, \nabla') \xrightarrow{\widehat{f}_i} (\mathcal{M}_{\widehat{X}|Y}^{\text{él}}, \nabla)$$

se recollent en un isomorphisme $\widehat{f} : (\widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}, \nabla') \xrightarrow{\sim} (\widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}, \nabla)$.

2.2.4. *Démonstration du théorème 2.2.2 lorsque $\dim Y = 1$.* — On a ici $Y = D$ et $\mathcal{A}_{\widehat{X}}^{\leq D}[*D] = \mathcal{A}_{\widehat{X}}^{\leq D}$, donc $\text{GL}_d^{\leq D}(\mathcal{A}_{\widehat{X}}[*D]) = \text{GL}_d^{\leq D}(\mathcal{A}_{\widehat{X}})$.

Comme l'image de λ dans $H^1\left(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{A}_{\widehat{X}}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}})\right)$ provient d'un élément de $H^1\left(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{A}_{\widehat{X}}^{\leq D}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}})\right)$, le théorème 1.2.1 montre que celle-ci est l'identité. \square

Avant de passer à la démonstration du théorème pour $\dim Y = 0$, donnons quelques résultats plus simples. On peut considérer les \mathcal{M} qui admettent une *très bonne* structure formelle le long de D (au sens du § 2.2) avec $\mathcal{M}^{\text{él}}$ comme modèle élémentaire.

On cherche à classer les couples $(\mathcal{M}, \widehat{f}_D)$, où $\widehat{f}_D : \mathcal{O}_{\widehat{X|D}} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{X|D}} \otimes \mathcal{M}^{\text{él}}$ est un isomorphisme, l'équivalence étant définie comme plus haut.

Proposition 2.2.5. — *L'ensemble $H^1(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\leq D}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}}))$ classe les couples $(\mathcal{M}, \widehat{f}_D)$ à équivalence près.*

Démonstration. — C'est la même que ci-dessus pour $\dim Y = 1$. □

Un critère d'existence d'une très bonne structure formelle. — Soit \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion admettant une bonne décomposition formelle en un point de croisement x° de D . Nous allons donner un critère pour que \mathcal{M} admette aussi une très bonne décomposition (voir le § I.2.2) et en déduire le théorème I.2.2.4. On pose $x^\circ = 0$ et on prend pour Y la strate $\{0\}$.

Proposition 2.2.6

(1) *L'application naturelle d'ensembles pointés*

$$H^1(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\leq D}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}})) \longrightarrow H^1(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X},0}^{\leq 0}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}}))$$

a pour noyau l'identité.

(2) *Soit \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion munie d'un isomorphisme formel (I.2.2.2). Cette donnée définit une classe $\lambda_{\mathcal{M}}$ dans $H^1(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\leq 0}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}}))$. Alors l'isomorphisme se relève en un isomorphisme (I.2.2.1) si et seulement si la classe $\lambda_{\mathcal{M}}$ est dans l'image de $H^1(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\leq D}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}}^{\text{él}}))$.*

Démonstration. — Le premier point est clair puisque

$$H^0(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}|D}^{\leq 0}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}|D}^{\text{él}})) = \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}|D}^{\leq 0}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}|D,0}^{\text{él}}) = \{\text{Id}\}.$$

D'après la proposition ci-dessus, l'isomorphisme (I.2.2.2) se relève en (I.2.2.1) si et seulement si l'image de $\lambda_{\mathcal{M}}$ dans $H^1(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}|D}^{\leq 0}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}|D}^{\text{él}}))$ est l'identité. Notons par ailleurs que la flèche

$$H^1(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}|D}^{\leq 0}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}|D}^{\text{él}})) \longrightarrow H^1(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}|D}^{\leq D}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}|D}^{\text{él}}))$$

a pour noyau l'identité car

$$\begin{array}{ccc} H^0(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}|D}^{\leq 0}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}|D}^{\text{él}})) & \longrightarrow & H^0(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X},0}^{\leq 0}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X},0}^{\text{él}})) \\ \parallel & & \parallel \\ \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X}|D}^{\leq 0}[*D]}(\mathcal{M}_{\widehat{X}|D,0}^{\text{él}}) & \longrightarrow & \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\widehat{X},0}^{\leq 0}[*D]}(\widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}) \end{array}$$

est surjective (cela résulte du lemme 2.2.1). On en déduit le second point. □

2.2.7. *Démonstration du théorème I.2.2.4.* — Il suffit de montrer, sous l'hypothèse du théorème, l'égalité des faisceaux sur $\pi^{-1}(0)$:

$$\text{Aut}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}[*D]}^{<0}(\mathcal{M}_{\tilde{X}}^{\text{él}}) = \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}[*D]}^{<D}(\mathcal{M}_{\tilde{X}}^{\text{él}}).$$

Elle résulte immédiatement du lemme facile ci-dessous.

Lemme 2.2.8. — *Soit $\varphi \in \mathcal{O}_X[*D]/\mathcal{O}_X$ de la forme $\varphi(x_1, x_2) = x^{-m}u(x_1, x_2)$ avec $m_1, m_2 > 0$ et $u(0, 0) \neq 0$, ou bien $\varphi \equiv 0$, et soit \mathcal{R} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion régulière. Alors sur $\pi^{-1}(0)$, le faisceau des sections horizontales de $\mathcal{A}_{\tilde{X}}^{<0} \otimes (\mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R})$ est égal à celui des sections horizontales de $\mathcal{A}_{\tilde{X}}^{<D} \otimes (\mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R})$. \square*

Démonstration du théorème 2.2.2 pour $\dim Y = 0$. — Elle se fait en deux étapes. Soit donc λ une classe dans $H^1\left(\pi^{-1}(0), \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}[*D]}^{<Y}(\mathcal{M}_{\tilde{X}}^{\text{él}})\right)$. Soit A l'ensemble fini indexant les facteurs exponentiels (modulo $\mathbf{C}\{x_1, x_2\}$) de $\mathcal{M}^{\text{él}}$. Pour tout $\alpha \in A$, soit $\mathcal{E}^{\varphi_\alpha} \otimes \mathcal{R}^\alpha$ la composante de $\mathcal{M}^{\text{él}}$ correspondant au facteur exponentiel φ_α . On écrit \mathcal{R}^α sous la forme $\mathcal{R}^\alpha = \mathcal{O}_X[*D] \otimes_{\mathbf{C}} V^\alpha$, où V^α est un espace vectoriel de dimension finie muni d'endomorphismes δ_1 et δ_2 dont les valeurs propres ne diffèrent pas d'un entier $\neq 0$ (ceci est toujours possible), et la connexion sur $\mathcal{O}_X[*D] \otimes_{\mathbf{C}} V^\alpha$ est définie comme au §I.2.1.1.

Sur un recouvrement de $\pi^{-1}(0)$ assez fin pour que les fonctions

$$\cos(m_1 \arg x_1 + m_2 \arg x_2 - \arg u_{\alpha\beta}(x_1, x_2))$$

gardent un signe constant sur les ouverts U_k du recouvrement, le cocycle (λ_{kl}) représentant λ a des composantes $\lambda_{kl}^{\alpha\beta}$ qui sont des sections horizontales de

$$\mathcal{A}_{\tilde{X}}^{<Y}[*D] \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_X[*D]} \pi^{-1}(\mathcal{E}^{\varphi_\beta - \varphi_\alpha} \otimes \text{Hom}_{\mathcal{O}_X[*D]}(\mathcal{R}^\alpha, \mathcal{R}^\beta)).$$

Si on fixe une base des V^α , la matrice de λ_{kl} a donc des blocs $\alpha\beta$ du type $e^{\varphi_\alpha - \varphi_\beta} C^{\alpha\beta}$, où $C^{\alpha\beta}$ est une matrice constante, nulle si $e^{\varphi_\alpha - \varphi_\beta}$ n'est pas plate le long de $\pi^{-1}(0) \cap U_k \cap U_\ell$. Enfin, si $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ a des pôles le long de D_1 (resp. D_2 , resp. $D_1 \cup D_2$), il résulte de la propriété (B) que $e^{\varphi_\alpha - \varphi_\beta}$ est plate le long de $\pi^{-1}(0) \cap U_k \cap U_\ell$ si et seulement si elle l'est le long de $\pi^{-1}(D_1) \cap U_k \cap U_\ell$ (resp. $\pi^{-1}(D_2) \cap U_k \cap U_\ell$, resp. $\pi^{-1}(D_1 \cup D_2) \cap U_k \cap U_\ell$).

Première étape. — On suppose que les φ_α qui interviennent dans le modèle élémentaire $\mathcal{M}^{\text{él}}$ n'ont de pôle que le long de D_1 . Notons $\mathcal{M}_1^{\text{él}} = \bigoplus_{\alpha \in A} \mathcal{E}^{\varphi_\alpha} \otimes_{\mathbf{C}} V^\alpha$, où ici $\mathcal{E}^{\varphi_\alpha} = \mathcal{O}_X[*D_1]e^{\varphi_\alpha}$ et V^α est muni de l'endomorphisme δ_1 . On voit $\mathcal{M}_1^{\text{él}}$ comme une $\mathcal{O}_X[*D_1]$ -connexion en posant $\partial_{x_2}(1 \otimes v) = 0$ pour $v \in V^\alpha$.

Soit $\pi_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ l'éclaté réel de D_1 et $p : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}_1$ l'éclaté réel de l'image inverse de D_2 , de sorte que $\pi = \pi_1 \circ p$. Alors λ définit un élément de

$$H^1\left(\mathcal{U}, p^{-1} \text{Aut}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}_1}[*D_1]}^{<D_1}(\mathcal{M}_{1, \tilde{X}_1}^{\text{él}})\right).$$

Il suffit de montrer que l'image de λ dans $H^1\left(\pi^{-1}(0), p^{-1}\mathrm{GL}_d(\mathcal{A}_{\tilde{X}_1}[*D_1])\right)$ est l'identité, lorsqu'on exprime λ dans une base de $\mathcal{M}_1^{\mathrm{él}}$ construite à l'aide de \mathbf{C} -bases des V^α , puisqu'alors l'image de λ dans $H^1\left(\pi^{-1}(0), \mathrm{GL}_d(\mathcal{A}_{\tilde{X}}[*D])\right)$ est aussi l'identité, et on conclut à l'aide du § 2.2.3. Pour cela, on utilise la suite exacte du § B.4 de l'appendice, avec $\mathcal{G} = \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}_1}^{<D_1}[*D_1]}(\mathcal{M}_{1, \tilde{X}_1}^{\mathrm{él}})$. L'image de $H^0\left(S^1, \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}_1}^{<D_1}[*D_1]}(\mathcal{M}_{1, \tilde{X}_1}^{\mathrm{él}})\right)$ dans $H^0\left(S^1, \mathrm{GL}_d(\mathcal{A}_{\tilde{X}_1}[*D_1])\right)$ est l'identité, puisque l'application se factorise par

$$H^0\left(S^1, \mathrm{GL}_d^{<D_1}(\mathcal{A}_{\tilde{X}_1}[*D_1])\right) = \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\tilde{X}, 0}^{<D_1}[*D_1]) = \mathrm{Id}.$$

D'autre part on a

$$\mathrm{image}\left[H^1\left(S^1, \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}_1}^{<D_1}[*D_1]}(\mathcal{M}_{1, \tilde{X}_1}^{\mathrm{él}})\right) \rightarrow H^1\left(S^1, \mathrm{GL}_d(\mathcal{A}_{\tilde{X}_1}[*D_1])\right)\right] = \mathrm{Id}$$

d'après les §§ 2.2.3 et 2.2.4. On en déduit le résultat voulu. \square

Deuxième étape. — Indiquons d'abord le principe de la démonstration. Tout germe \mathcal{M}' de connexion méromorphe de modèle formel $\mathcal{M}^{\mathrm{él}}$ définit une classe $\lambda_{\mathcal{M}'}$ dans l'ensemble $H^1\left(\pi^{-1}(0), \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}^{<Y}[*D]}(\mathcal{M}_{\tilde{X}}^{\mathrm{él}})\right)$. Fixons-nous un tel germe. Alors la donnée de λ est équivalente à la donnée du cocycle $\lambda' \in H^1\left(\pi^{-1}(0), \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}^{<Y}[*D]}(\mathcal{M}'_{\tilde{X}})\right)$ obtenu en «tordant» λ par $\lambda_{\mathcal{M}'}$ (voir par exemple [6, Prop. 1.3.2, p. 115]). Nous allons construire \mathcal{M}' pour que, dans une base convenable de \mathcal{M}' , l'image de λ' dans l'ensemble $H^1\left(\pi^{-1}(0), \mathrm{GL}_d(\mathcal{A}_{\tilde{X}}[*D])\right)$ provienne d'une classe dans l'ensemble $H^1\left(\pi^{-1}(0), \mathrm{GL}_{d,D}(\mathcal{A}_{\tilde{X}})\right)$. Le théorème 1.2.1 montre que l'image de λ' dans l'ensemble $H^1\left(\pi^{-1}(0), \mathrm{GL}_d(\mathcal{A}_{\tilde{X}}[*D])\right)$ est l'identité. On peut alors modifier, à l'aide de λ' , la connexion ∇ sur \mathcal{M}' en une connexion ∇' comme indiqué au § 2.2.3.

Construction de \mathcal{M}' . — On décompose A en réunion disjointe finie d'ensembles A_i ($i \in I$) de sorte que $\alpha, \beta \in A_i$ si et seulement si

$$\varphi_\alpha - \varphi_\beta \in \mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_1^{-1}] + \mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_2^{-1}].$$

Notons que, du fait de la condition (B), on a, pour chaque $i \in I$ fixé et pour tous $\alpha, \beta \in A_i$, l'une et l'une seulement des propriétés

$$\varphi_\alpha - \varphi_\beta \in \mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_1^{-1}] \quad \text{ou} \quad \varphi_\alpha - \varphi_\beta \in \mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_2^{-1}].$$

Choisissons alors pour chaque i un élément, noté $\alpha(i)$, dans A_i . Soit

$$\mathcal{M}_i^{\mathrm{él}} = \sum_{\alpha \in A_i} \mathcal{E}^{\varphi_\alpha} \otimes V^\alpha$$

et soit $\lambda(i)$ le bloc de λ correspondant à $\mathcal{M}_i^{\mathrm{él}}$. Comme λ , et donc $\lambda(i)$, ne dépend des φ_α *via* leurs différences deux à deux, on peut translater ceux-ci simultanément par $\varphi_{\alpha(i)}$. Ainsi $\lambda(i)$ est aussi un cocycle de $\mathrm{Aut}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}^{<Y}[*D]}(\mathcal{E}^{-\varphi_{\alpha(i)}} \otimes \mathcal{M}_i^{\mathrm{él}})$. On se trouve

maintenant, d'après ce qui précède, dans la situation de la première étape. Il existe donc \mathcal{M}'_i de cocycle associé $\lambda(i)$ et de modèle formel \mathcal{M}'_i . On pose $\mathcal{M}' = \oplus_i \mathcal{M}'_i$.

Comme pour $\alpha \in A_i$ et $\beta \in A_j$ avec $i \neq j$ la fonction $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ a des pôles le long de D_1 et D_2 , on voit que $e^{\varphi_\alpha - \varphi_\beta}$ est plate le long de $\pi^{-1}(0)$ au voisinage de θ° si et seulement si elle est plate le long de $\pi^{-1}(D)$ au voisinage de θ° . Par suite, la restriction de λ à $x_1 x_2 = 0$ est aussi égale à celle de $\oplus_i \lambda(i)$. Autrement dit, le cocycle λ' obtenu en tordant λ par $\lambda_{\mathcal{M}'} = \oplus_i \lambda(i)$ a pour restriction l'identité le long de $\pi^{-1}(D)$. \square

3. Solutions distributions

3.1. Une conjecture de M. Kashiwara. — Soit X une variété analytique complexe et \overline{X} la variété complexe conjuguée (i.e. X munie du faisceau $\mathcal{O}_{\overline{X}} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}_X}$). Le lemme de Dolbeault-Grothendieck peut s'exprimer par l'égalité

$$\mathcal{O}_{\overline{X}} = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X)$$

où $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_X = \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\overline{X}}$ est le faisceau des distributions sur la variété C^∞ sous-jacente à X , muni d'actions (qui commutent) des opérateurs différentiels linéaires holomorphes \mathcal{D}_X et antiholomorphes $\mathcal{D}_{\overline{X}}$. Dans [26], M. Kashiwara a considéré le *foncteur de dualité hermitienne* pour les \mathcal{D}_X -modules à gauche :

$$C_X(\mathcal{M}) = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X).$$

Soit $D(\mathcal{D}_X)$ la catégorie dérivée de celle des \mathcal{D}_X -modules à gauche et $D_h^b(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie pleine des complexes bornés à cohomologie holonome. M. Kashiwara a conjecturé l'énoncé suivant (voir *loc. cit.*, remarque 3.5) :

Conjecture

- (1) C_X est un foncteur de $D_h^b(\mathcal{D}_X)$ dans la catégorie opposée $D_h^b(\mathcal{D}_{\overline{X}})^\circ$;
- (2) $C_{\overline{X}} \circ C_X \simeq \text{Id}$ et C_X est une équivalence de catégories.

Cet énoncé est montré dans *loc. cit.* pour la catégorie $D_{hr}^b(\mathcal{D}_X)$ des complexes bornés à cohomologie holonome régulière. De plus il est conséquence du résultat suivant :

Conjecture bis. — Pour tout \mathcal{D}_X -module holonome \mathcal{M} , on a $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_X}^i(\mathcal{M}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X) = 0$ pour $i \neq 0$ et $C_X(\mathcal{M}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X)$ est $\mathcal{D}_{\overline{X}}$ -holonome.

On déduit aussi l'analogie de (2) : si la conjecture bis est vraie, C_X est une équivalence entre $\text{Modhol}(\mathcal{D}_X)$ et $\text{Modhol}(\mathcal{D}_{\overline{X}})^\circ$.

Démonstration de « conjecture bis \Leftrightarrow conjecture ». — On remarque qu'un faisceau est X -constructible si et seulement s'il est \overline{X} -constructible, de sorte que les deux sous-catégories pleines $D_c^b(\mathbf{C}_X)$ et $D_c^b(\mathbf{C}_{\overline{X}})$ de $D(\mathbf{C}_X)$ (catégorie dérivée de celle des faisceaux de \mathbf{C}_X -espaces vectoriels), chacune formée des complexes bornés à cohomologie \mathbf{C}_X (resp. $\mathbf{C}_{\overline{X}}$)-constructibles, coïncident.

Soit ${}^p\text{DR}_{\overline{X}}$ le foncteur de de Rham $\mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_{\overline{X}}}(\mathcal{O}_{\overline{X}}, *)$ de $D^+(\mathcal{D}_{\overline{X}})$ vers $D^+(\mathbf{C}_X)$ et $\text{Sol}_X(*) = \mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_X}(*, \mathcal{O}_X)$ de $D^+(\mathcal{D}_X)$ vers $D^+(\mathbf{C}_X)$. Rappelons que si $\text{DR}_X(\mathcal{M})$ désigne le complexe de de Rham de \mathcal{M} où \mathcal{M} est placé en degré 0, on a ${}^p\text{DR} = \text{DR}[\dim X]$, de sorte que c'est $\Omega_{\overline{X}}^{\dim X}(\mathcal{M})$ qui est placé en degré 0 dans ${}^p\text{DR}(\mathcal{M})$.

On a un isomorphisme de foncteurs (voir [26, §2])

$${}^p\text{DR}_{\overline{X}} \circ C_X \simeq \text{Sol}_X$$

et de plus ${}^p\text{DR}_{\overline{X}}$ (resp. Sol_X) envoie $D_h^b(\mathcal{D}_{\overline{X}})$ (resp. $D_h^b(\mathcal{D}_X)$) dans $D_c^b(\mathbf{C}_X)$.

Démonstration de \Leftarrow . — Elle se fait comme dans *loc. cit.* : il suffit de voir que le complexe $C_X(\mathcal{M})$ de $D_h^b(\mathcal{D}_{\overline{X}})$ n'a de cohomologie qu'en degré 0. On utilise pour cela le fait que ${}^p\text{DR}_{\overline{X}}(C_X(\mathcal{M})) \simeq \text{Sol}_X(\mathcal{M})$ est pervers sur \overline{X} , le fait que si ${}^p\mathcal{H}$ désigne la cohomologie perverse, on a ${}^p\mathcal{H}^i {}^p\text{DR}(\mathcal{M}) = {}^p\text{DR}(\mathcal{H}^i \mathcal{M})$ pour un complexe borné à cohomologie holonome \mathcal{M} et enfin le fait que si \mathcal{M} est un \mathcal{D} -module holonome $\neq 0$, ${}^p\text{DR}(\mathcal{M})$ n'est pas isomorphe à 0. \square

Démonstration de \Rightarrow . — Il est facile d'obtenir le point (1) de la conjecture à partir de la conjecture bis. Montrons d'abord que l'analogie du point (2) de la conjecture pour la catégorie des modules holonome est satisfait. Si \mathcal{M} est un \mathcal{D}_X -module holonome, on a un morphisme naturel

$$\mathcal{M} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_{\overline{X}}}(\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathfrak{D}\mathbf{b}_X), \mathfrak{D}\mathbf{b}_X) = C_{\overline{X}} \circ C_X(\mathcal{M}).$$

Montrons d'abord que celui-ci est injectif. Remarquons que C_X anti-préserve les suites exactes de modules holonomes, du fait de cette propriété (1). Soit u une section locale de \mathcal{M} et supposons que pour tout $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathfrak{D}\mathbf{b}_X)$ on ait $\varphi(u) = 0$. Ceci implique que le morphisme injectif

$$C_X(\mathcal{M}/\mathcal{D}_X u) \longrightarrow C_X(\mathcal{M})$$

est aussi surjectif. Par suite on a $C_X(\mathcal{D}_X u) = 0$. On en déduit que

$$\text{Sol}_X(\mathcal{D}_X u) = {}^p\text{DR}_{\overline{X}}(C_X(\mathcal{D}_X u)) = 0$$

et donc $\mathcal{D}_X u = 0$ par un argument déjà utilisé.

Montrons maintenant la surjectivité. Soit \mathcal{Q} le quotient $C_{\overline{X}} \circ C_X(\mathcal{M})/\mathcal{M}$. C'est aussi un \mathcal{D}_X -module holonome. On a donc une suite exacte de faisceaux pervers

$$0 \longrightarrow {}^p\text{DR}_X(\mathcal{M}) \longrightarrow {}^p\text{DR}_X(C_{\overline{X}} \circ C_X(\mathcal{M})) \longrightarrow {}^p\text{DR}_X(\mathcal{Q}) \longrightarrow 0$$

et il suffit de montrer que ${}^p\text{DR}_X(\mathcal{Q}) = 0$. Mais on sait par ailleurs que ${}^p\text{DR}_X(\mathcal{M}) \simeq {}^p\text{DR}_X(C_{\overline{X}} \circ C_X(\mathcal{M}))$ (voir [26, §2]) : en effet on montre que

$${}^p\text{DR}_X(C_{\overline{X}} \circ C_X(\mathcal{M})) \simeq \text{Sol}_{\overline{X}}(C_X(\mathcal{M})) \simeq \mathbf{R}Hom_{\mathbf{C}_X}(\text{Sol}_X(\mathcal{M}), \mathbf{C}_X) \simeq {}^p\text{DR}_X(\mathcal{M}).$$

Le résultat est donc conséquence immédiate du lemme suivant :

Lemme 3.1.1. — *Soit $0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux pervers sur X . Si \mathcal{G} est isomorphe à \mathcal{F} , alors $\mathcal{H} = 0$ et le morphisme $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Par additivité du cycle caractéristique (cf. [27, prop. 9.4.5]), celui de \mathcal{H} est nul, donc \mathcal{H} est nul. \square

Enfin la propriété (2) de la conjecture s'obtient à partir des résultats précédents : pour \mathcal{M} dans $D_h^b(\mathcal{D}_X)$, on a

$$\mathcal{H}^j(C_{\overline{X}} \circ C_X(\mathcal{M})) = C_{\overline{X}} \circ C_X(\mathcal{H}^j(\mathcal{M}))$$

et donc le morphisme naturel $\mathcal{M} \rightarrow C_{\overline{X}} \circ C_X(\mathcal{M})$ est un isomorphisme. \square

Théorème 3.1.2. — *Si la conjecture I.2.5.1 est vraie, la conjecture de Kashiwara est vraie pour les modules (ou les complexes bornés) dont le support est de dimension ≤ 2 .*

La suite de cette section est consacrée à la démonstration de ce théorème.

3.2. Réductions préliminaires. — Nous aurons à utiliser à plusieurs reprises le lemme suivant d'algèbre homologique, qui s'adapte simplement pour les faisceaux. Soient A et B deux anneaux commutatifs unitaires et $A \rightarrow B$ un morphisme. Soit D_A un anneau unitaire contenant A comme sous-anneau et posons $D_B = B \otimes_A D_A$. Soit M un D_A -module à gauche, F un D_B -module à gauche, muni d'une action d'un anneau unitaire C qui commute à la précédente (i.e. F est un $D_B \times C$ -module à gauche).

Lemme 3.2.1. — *On a un morphisme dans $D^+(C)$*

$$\mathbf{RHom}_{D_B} \left(D_B \otimes_{D_A}^L M, F \right) \longrightarrow \mathbf{RHom}_{D_A}(M, F)$$

qui est un isomorphisme si M admet une résolution par des D_A -modules libres de type fini. Supposons que D_A soit A -libre. Si de plus M est A -libre ou B est A -plat, on a $D_B \otimes_{D_A}^L M = B \otimes_A M$ et donc un isomorphisme

$$\mathbf{RHom}_{D_B}(B \otimes_A M, F) \longrightarrow \mathbf{RHom}_{D_A}(M, F). \quad \square$$

Nous utiliserons ci-dessous les notations du §1.1.2. Soit donc X une variété analytique complexe, Z un diviseur de X et $j : X - Z \hookrightarrow X$ l'inclusion ouverte. Si \mathcal{M} est \mathcal{D}_X -holonome, notons $j_+j^+\mathcal{M} = \mathcal{M}[*Z]$ et soit j_+j^+ le foncteur adjoint par dualité.

Proposition 3.2.2. — *On a dans $D^b(\mathcal{D}_X)$*

$$\begin{aligned} \mathbf{RHom}_{\mathcal{D}_X} \left(\mathcal{M}, \mathfrak{Db}_X^{\text{mod } Z} \right) &= \mathbf{RHom}_{\mathcal{D}_X} \left(j_+j^+\mathcal{M}, \mathfrak{Db}_X^{\text{mod } Z} \right) \\ &= \mathbf{RHom}_{\mathcal{D}_X} \left(j_+j^+\mathcal{M}, \mathfrak{Db}_X \right) \end{aligned}$$

Démonstration. — On remarque d'abord que (voir par exemple le lemme 3.2.1)

$$\mathbf{RHom}_{\mathcal{D}_X} \left(\mathcal{M}, \mathfrak{Db}_X^{\text{mod } Z} \right) = \mathbf{RHom}_{\mathcal{D}_X[*Z]} \left(\mathcal{M}[*Z], \mathfrak{Db}_X^{\text{mod } Z} \right),$$

ce qui permet de voir que pour \mathcal{M} à support dans Z , $\mathbf{RHom}_{\mathcal{D}_X} \left(\mathcal{M}, \mathfrak{Db}_X^{\text{mod } Z} \right) = 0$. Ceci permet d'obtenir la première égalité de la proposition. Il reste à voir que

$\mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_X}(j_+j^+\mathcal{M}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{X,Z}) = 0$. Pour cela, on remarque aussi que pour un \mathcal{D}_X -module à droite holonome \mathcal{N} , on a $\mathcal{N}[*Z] \otimes_{\mathcal{D}_X}^L \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{X,Z} = 0$ (on prend une résolution locale de $\mathcal{N}[*Z]$ par des $\mathcal{D}_X[*Z]$ -modules libres et l'on est ramené à montrer que $\mathcal{D}_X[*Z] \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{X,Z} = 0$). Alors, par bidualité pour les modules holonomes, $\mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_X}(j_+j^+\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)$ est isomorphe à $\mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)[*Z]$ et on peut appliquer ce qui précède. \square

Par un argument déjà utilisé par Kashiwara [26], la conjecture de Kashiwara pour les modules et les complexes bornés à support de dimension $\leq n$ est conséquence de l'énoncé suivant :

3.2.3. — *Si X est une variété analytique de dimension $\leq n$ et D est un diviseur à croisements normaux, si \mathcal{M} est une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion, $C_X(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{D}_{\bar{X}}$ -module holonome.*

Pour la démonstration du théorème, nous allons procéder comme suit : nous considérons le foncteur $C_X^{\text{mod } D}(\ast) = \mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_X}(\ast, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod } D})$. Montrons d'abord par récurrence sur $\dim X$ que l'énoncé 3.2.3 est conséquence de l'énoncé suivant :

3.2.4. — *Si X est une variété analytique de dimension $\leq n$ et D est un diviseur à croisements normaux, si \mathcal{M} est une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion, $C_X^{\text{mod } D}(\mathcal{M})$ est une $\mathcal{O}_{\bar{X}}[*\bar{D}]$ -connexion.*

Notons d'abord que ces énoncés sont de nature locale sur X . Supposons que l'on ait montré l'holonomie de $C_X^{\text{mod } D}(\mathcal{M})$. Pour montrer 3.2.3, il suffit de montrer que $C_X(\mathcal{M})$ est un complexe borné à cohomologie holonome, par un argument vu au § 3.1. Mais d'après la proposition 3.2.2, on a $C_X^{\text{mod } D}(\mathcal{M}) = C_X(j_+j^+\mathcal{M})$. De plus l'hypothèse de récurrence montre que le complexe $C_X(\mathcal{M} \rightarrow j_+j^+\mathcal{M})$ est à cohomologie $\mathcal{D}_{\bar{X}}$ -holonome. Ceci implique donc qu'il en est de même de $C_X(\mathcal{M})$. \square

Au vu du théorème 2.1.2, le théorème 3.1.2 est conséquence de la proposition ci-dessous.

Proposition 3.2.5. — *Soit D un diviseur à croisements normaux dans une variété analytique X de dimension ≤ 2 et \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion. Si \mathcal{M} admet une bonne \mathcal{A} -structure le long de D , $C_X^{\text{mod } D}(\mathcal{M})$ est une $\mathcal{O}_{\bar{X}}[*\bar{D}]$ -connexion.*

L'énoncé est local sur X . Nous allons faire les démonstrations dans le cas où X est une surface, le cas d'une courbe étant analogue et plus simple. Nous allons commencer par réduire la preuve de cette proposition à celle de la proposition suivante, qui sera montrée plus loin.

Proposition 3.2.6. — *Si la $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion \mathcal{M} admet une bonne \mathcal{A} -décomposition le long de D , alors*

$$(1) \text{Ext}_{\mathcal{D}_{\bar{X}(D)}[*D]}^i(\mathcal{M}_{\bar{X}}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\bar{X}(D)}^{\text{mod } D}) = 0 \text{ pour } i \neq 0;$$

(2) *il existe localement en $0 \in X$ une $\mathcal{O}_{\bar{X}}[*\bar{D}]$ -connexion $\bar{\mathcal{N}}$ avec*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\bar{X}(D)}[*D]}(\mathcal{M}_{\bar{X}}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\bar{X}(D)}^{\mathrm{mod} D}) = \bar{\mathcal{A}}_{\bar{X}}^{\mathrm{mod} D} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\bar{X}}[*\bar{D}]} \pi^{-1}\bar{\mathcal{N}}.$$

Démonstration de (3.2.6) \Rightarrow (3.2.5). — Nous allons d’abord remplacer l’anneau \mathcal{D}_X (resp. $\mathcal{D}_{\bar{X}}$) par $\mathcal{D}_X[*D]$ (resp. $\mathcal{D}_{\bar{X}}[*\bar{D}]$). On a en effet

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\mathrm{mod} D}) = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X[*D]}(\mathcal{M}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\mathrm{mod} D})$$

comme $\mathcal{D}_{\bar{X}}$ -modules et aussi comme $\mathcal{D}_{\bar{X}}[*\bar{D}]$ -modules : on applique le lemme 3.2.1 en remarquant que $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X[*D] \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ et en utilisant la platitude de $\mathcal{O}_X[*D]$ sur \mathcal{O}_X .

Réduction au cas d’une bonne \mathcal{A} -décomposition. — Soit $\rho : X' \rightarrow X$ une ramification multi-cyclique autour de D : en coordonnées locales,

$$\rho(x_1, x_2) = (x_1^{\nu_1}, x_2^{\nu_2})$$

avec $D = \{x_1 = 0\}$ (et dans ce cas $\nu_2 = 0$) ou $D = \{x_1 x_2 = 0\}$. Alors $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\mathrm{mod} D}$ est facteur direct, *via* la trace, de $\rho_* \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{X'}^{\mathrm{mod} D'} = \mathbf{R}\rho_* \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{X'}^{\mathrm{mod} D'}$.

Si \mathcal{M} est une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion, on note $\rho^+ \mathcal{M}$ la connexion image inverse par ρ (on a $\rho^+ \mathcal{M} = \rho^* \mathcal{M}$ comme $\mathcal{O}_{X'}[*D']$ -module). Supposons la proposition 3.2.5 vraie pour $\rho^+ \mathcal{M}$. Alors, puisque ρ est finie, $\rho_* \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X'}[*D']}(\rho^+ \mathcal{M}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{X'}^{\mathrm{mod} D'})$ est une $\mathcal{O}_{\bar{X}}[*\bar{D}]$ -connexion. Mais on a (localement sur X)

$$(3.2.7) \quad \rho_* \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X'}[*D']}(\rho^+ \mathcal{M}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{X'}^{\mathrm{mod} D'}) = \mathbf{R}\rho_* \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X'}[*D']}(\rho^+ \mathcal{M}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{X'}^{\mathrm{mod} D'})$$

$$(3.2.8) \quad = \mathbf{R}\rho_* \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X'}[*D']}(\rho^+ \mathcal{M}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{X'}^{\mathrm{mod} D'})$$

$$(3.2.9) \quad = \mathbf{R}\rho_* \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\rho^{-1}\mathcal{D}_X[*D]}(\rho^{-1} \mathcal{M}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\mathrm{mod} D'})$$

$$(3.2.10) \quad = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X[*D]}(\mathcal{M}, \rho_* \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\mathrm{mod} D}).$$

En effet, (3.2.7) provient du fait que ρ est finie ; (3.2.8) résulte de la proposition 3.2.5 pour $\rho^+ \mathcal{M}$; (3.2.9) résulte du lemme 3.2.1 puisque $\mathcal{O}_{X'}[*D']$ est localement libre sur $\rho^{-1}\mathcal{O}_X[*D]$; (3.2.10) est la formule de projection.

Par conséquent, $C_X^{\mathrm{mod} D}(\mathcal{M})$ est facteur direct de la connexion

$$\rho_* \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{X'}[*D']}(\rho^+ \mathcal{M}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{X'}^{\mathrm{mod} D'}).$$

La proposition 3.2.5 est donc aussi vraie pour \mathcal{M} .

Ainsi, il suffit de prouver cette proposition dans le cas où \mathcal{M} admet une bonne \mathcal{A} -décomposition, ce que nous supposons dans la suite. Si la proposition 3.2.6 est

montrée, on a (localement sur X)

$$(3.2.11) \quad \begin{aligned} \mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_X[*D]}(\mathcal{M}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod } D}) &= \mathbf{R}\pi_* \mathbf{R}Hom_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X[*D]}(\pi^{-1}\mathcal{M}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{X}(D)}^{\text{mod } D}) \\ &= \mathbf{R}\pi_* \mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_{\tilde{X}(D)}[*D]}(\mathcal{M}_{\tilde{X}}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{X}(D)}^{\text{mod } D}) \end{aligned}$$

$$(3.2.12) \quad \begin{aligned} &= \mathbf{R}\pi_* (\overline{\mathcal{A}}_{\tilde{X}}^{\text{mod } D} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\tilde{X}}[*\overline{D}]} \pi^{-1}\overline{\mathcal{N}}) \\ &= \mathbf{R}\pi_* (\overline{\mathcal{A}}_{\tilde{X}}^{\text{mod } D} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\tilde{X}}[*\overline{D}]} \pi^{-1}\overline{\mathcal{N}}) \end{aligned}$$

$$(3.2.13) \quad \begin{aligned} &= (\mathbf{R}\pi_* \overline{\mathcal{A}}_{\tilde{X}}^{\text{mod } D}) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}[*\overline{D}]} \overline{\mathcal{N}} \\ &= \mathcal{O}_{\tilde{X}}[*\overline{D}] \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}[*\overline{D}]} \overline{\mathcal{N}} \\ &= \overline{\mathcal{N}}. \end{aligned}$$

En effet, (3.2.11) est conséquence du lemme 3.2.1 puisque \mathcal{M} est localement libre sur $\mathcal{O}_X[*D]$; (3.2.12) résulte de la projectivité locale de \mathcal{N} sur $\mathcal{O}_X[*D]$ (voir [45, prop. (1.1)] ou proposition I.1.2.1) et (3.2.13) n'est autre que le corollaire 1.1.8. \square

3.3. Fin de la démonstration. — Il s'agit de montrer la proposition 3.2.6. Le premier point de (3.2.6) est local sur $\pi^{-1}(0) \subset \tilde{X}(D)$ tandis que le second est global. Nous allons démontrer d'abord la proposition pour un modèle élémentaire $\mathcal{M}^{\text{él}}$. Du fait de l'isomorphisme local $\mathcal{M}_{\tilde{X}, \theta^o} \simeq \mathcal{M}_{\tilde{X}, \theta^o}^{\text{él}}$ nous obtiendrons le premier point pour toute connexion \mathcal{A} -décomposable \mathcal{M} de modèle local $\mathcal{M}^{\text{él}}$. Pour le second point nous utiliserons le théorème de classification 2.2.2.

Démonstration pour les modèles élémentaires. — Commençons par le cas d'une connexion $\mathcal{E}^\varphi \otimes "x^a"$ de rang 1. Une telle connexion admet une résolution explicite sur $\mathcal{D}_X[*D]$: c'est la résolution de Koszul associée aux opérateurs (qui commutent deux à deux) $P_i = x_i \partial_{x_i} - a_i - x_i \partial_{x_i}(\varphi)$, $i = 1, 2$ si $D = \{x_1 x_2 = 0\}$, ou P_1 et $Q_2 = \partial_{x_2} - \partial_{x_2}(\varphi)$ si $D = \{x_1 = 0\}$. On remarque de plus que les fonctions $|x|^{2a}$ et $e^{\varphi - \overline{\varphi}}$ sont des multiplieurs sur $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod } D}$ et $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{X}(D)}^{\text{mod } D}$, car à croissance lente ainsi que toutes leurs dérivées. On peut donc conjuguer par $|x|^{2a} e^{\varphi - \overline{\varphi}}$ les opérateurs de bord des complexes

$$\mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_X[*D]}(\mathcal{E}^\varphi \otimes "x^a", \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod } D}) \quad \text{et} \quad \mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}[*D]}((\mathcal{E}^\varphi \otimes "x^a")_{\tilde{X}}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{X}(D)}^{\text{mod } D})$$

sans changer la cohomologie de ces complexes. Après conjugaison on trouve les complexes

$$\mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_X[*D]}(\mathcal{O}_X[*D], \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod } D}) \quad \text{et} \quad \mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}[*D]}(\mathcal{A}_{\tilde{X}}[*D], \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\tilde{X}(D)}^{\text{mod } D})$$

qui n'ont de cohomologie qu'en degré 0, d'après Dolbeault-Grothendieck (1.1.3) ou (1.1.7). Par ailleurs il est facile d'identifier $\mathbf{R}Hom_{\mathcal{D}_X[*D]}(\mathcal{E}^\varphi \otimes "x^a", \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod } D})$ à la

$\mathcal{O}_{\bar{X}}[*\bar{D}]$ -connexion $\mathcal{E}^{-\bar{\varphi}} \otimes \overline{x^a}$ et $\text{Hom}_{\mathcal{D}_{\bar{X}}[*D]}((\mathcal{E}^\varphi \otimes \overline{x^a})_{\bar{X}}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\bar{X}(D)}^{\text{mod } D})$ à la $\overline{\mathcal{A}_{\bar{X}}^{\text{mod } D}}$ -connexion $\overline{\mathcal{A}_{\bar{X}}^{\text{mod } D}} \otimes \pi^{-1}(\mathcal{E}^{-\bar{\varphi}} \otimes \overline{x^a})$ (cette dernière est d'ailleurs localement isomorphe sur $\pi^{-1}(0)$ à $\overline{\mathcal{A}_{\bar{X}}^{\text{mod } D}} \otimes \mathcal{E}_{\bar{X}}^{-\bar{\varphi}}$, puisque toute branche locale de \bar{x}^a est dans $\overline{\mathcal{A}_{\bar{X}}^{\text{mod } D}}$). Ainsi, lorsque $\mathcal{M}^{\text{él}} = \mathcal{E}^\varphi \otimes \overline{x^a}$, les propriétés suivantes sont satisfaites :

- $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_X[*D]}^i(\mathcal{M}^{\text{él}}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod } D}) = 0$ pour $i \neq 0$;
- $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\bar{X}}[*D]}^i(\mathcal{M}_{\bar{X}}^{\text{él}}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\bar{X}(D)}^{\text{mod } D}) = 0$ pour $i \neq 0$;
- $\text{Hom}_{\mathcal{D}_X[*D]}(\mathcal{M}^{\text{él}}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod } D}) = C_X^{\text{mod } D}(\mathcal{M}^{\text{él}})$ est une $\mathcal{O}_{\bar{X}}[*\bar{D}]$ -connexion ;
- $\text{Hom}_{\mathcal{D}_{\bar{X}}[*D]}(\mathcal{M}_{\bar{X}}^{\text{él}}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\bar{X}(D)}^{\text{mod } D}) \stackrel{\text{déf}}{=} C_{\bar{X}}^{\text{mod } D}(\mathcal{M}_{\bar{X}}^{\text{él}})$ est une $\overline{\mathcal{A}_{\bar{X}}^{\text{mod } D}}$ -connexion ;
- Le morphisme induit par $\pi^{-1} \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X^{\text{mod } D} \rightarrow \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\bar{X}(D)}^{\text{mod } D}$

$$\overline{\mathcal{A}_{\bar{X}}^{\text{mod } D}} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\bar{X}}[*\bar{D}]} C_X^{\text{mod } D}(\mathcal{M}^{\text{él}}) \longrightarrow C_{\bar{X}}^{\text{mod } D}(\mathcal{M}_{\bar{X}}^{\text{él}})$$

est un isomorphisme de $\overline{\mathcal{A}_{\bar{X}}^{\text{mod } D}}$ -connexions.

Ces propriétés sont stables par extensions de connexions, de sorte qu'elles sont encore satisfaites pour tout modèle élémentaire $\mathcal{M}^{\text{él}}$. Notons pour terminer que $C_X^{\text{mod } D}(\mathcal{M}^{\text{él}})$ est somme directe de connexions élémentaires et que si $\mathcal{M}^{\text{él}}$ est un bon modèle, il en est de même de $C_X^{\text{mod } D}(\mathcal{M}^{\text{él}})$. \square

Démonstration du second point de la proposition 2.1.8. — Soit Y une strate de \widehat{D} . Nous nous plaçons au voisinage de $0 \in Y$. Fixons un isomorphisme $\widehat{\mathcal{M}} \simeq \widehat{\mathcal{M}}^{\text{él}}$ et choisissons un 1-cocycle (λ_{ij}) d'un recouvrement (U_i) de $\pi^{-1}(0)$ à valeurs dans $\text{Aut}_{\mathcal{D}_{\bar{X}}[*D]}^{<Y}(\mathcal{M}_{\bar{X}}^{\text{él}})$ définissant \mathcal{M} muni de cet isomorphisme formel. À la connexion $\text{Hom}_{\mathcal{D}_{\bar{X}}[*D]}(\mathcal{M}_{\bar{X}}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_{\bar{X}(D)}^{\text{mod } D})$ est alors associé un cocycle sur le recouvrement (U_i) ci-dessus à valeurs dans le faisceau $\text{Aut}_{\mathcal{D}_{\bar{X}}[*\bar{D}]}(C_{\bar{X}}^{\text{mod } D}(\mathcal{M}_{\bar{X}}^{\text{él}}))$, à savoir le cocycle transposé de λ noté ${}^t\lambda$.

Lemme 3.3.1. — *Dans ces conditions, le cocycle ${}^t\lambda$ est à valeurs dans le faisceau $\text{Aut}_{\mathcal{D}_{\bar{X}}[*\bar{D}]}^{<Y}(C_{\bar{X}}^{\text{mod } D}(\mathcal{M}_{\bar{X}}^{\text{él}}))$.*

Ce lemme montre donc qu'il existe une connexion \mathcal{N} avec

$$C_X^{\text{mod } D}(\mathcal{M}_{\bar{X}}) = \overline{\mathcal{A}_{\bar{X}}^{\text{mod } D}} \otimes \pi^{-1}\overline{\mathcal{N}}$$

d'après le théorème 2.2.2, puisque $C_X^{\text{mod } D}(\mathcal{M}^{\text{él}})$ est un bon modèle élémentaire. De plus on voit aussi que $\overline{\mathcal{N}}$ est $\overline{\mathcal{A}}$ -décomposable avec $C_X^{\text{mod } D}(\mathcal{M}^{\text{él}})$ pour modèle élémentaire.

Démonstration. — Nous aurons besoin de quelques résultats simples sur les connexions régulières. Soit \mathcal{S} une telle connexion, $\mathcal{S} = \mathcal{O}_X[*D] \otimes_{\mathbf{C}} V$; on peut supposer que les valeurs propres de δ_1 (ou δ_1 et δ_2) sont dans l'image d'une section σ de $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/\mathbf{Z}$

avec $\sigma(0) = 0$. On a alors les propriétés suivantes (croissance modérée des sections horizontales asymptotiques) :

- Les sections horizontales de $\tilde{\mathcal{J}}_* \mathcal{O}_{X-D} \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_X} \pi^{-1} \mathcal{S}$ sont les sections horizontales de $\mathcal{A}_{\tilde{X}}^{\text{mod } D} \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_X} \pi^{-1} \mathcal{S}$.
- Si $D = \{x_1 = 0\}$, les sections horizontales de $\mathcal{A}_{\tilde{X}, \theta^\circ} \otimes \mathcal{S}_0$ sont celles de \mathcal{S}_0 .
- Si $D = \{x_1 x_2 = 0\}$ et si une section horizontale de $(\tilde{\mathcal{J}}_* \mathcal{O}_{X-D} \otimes \pi^{-1} \mathcal{S})_{\theta^\circ}$ s'étend en une section de $\mathcal{A}_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{S}$ au-dessus d'un secteur ouvert de $D_1 - \{0\}$ centré sur la direction de θ_2° , c'est une section horizontale de $p^{-1} \mathcal{A}_{\tilde{D}_1}^{\text{mod } Y} \otimes_{\mathbb{C}} V$, si $p : \pi^{-1}(D_1) \rightarrow \tilde{D}_1$ est la projection.

Lorsque $D = \{x_1 x_2 = 0\}$, on décompose V suivant les valeurs propres de δ_1 et δ_2 et on se ramène au cas où δ_1 et δ_2 sont nilpotents en tensorisant par un " x^{-a} " convenable. On choisit une base $(v_{j,k})$ de V , où j parcourt l'ensemble des blocs de Jordan de δ_1 et k est un entier majoré par la taille du bloc j , satisfaisant $\delta_1 v_{j,k} = -v_{j,k+1}$. Une section horizontale $h = \sum h_{j,k} v_{j,k}$ à coefficients dans $\tilde{\mathcal{J}}_* \mathcal{O}_{X-D}$ peut s'écrire

$$h_{j,k} = \frac{(\log x_1)^k}{k!} \cdot \ell_{j,k}(x_2)$$

où $\ell(x_2) = \sum \ell_{j,k} v_{j,k}$ est solution de $x_2 \partial_{x_2} \ell = M_2 \ell$, si M_2 est la matrice de δ_2 dans la base $(v_{j,k})$. Ainsi la première assertion est claire. Pour la seconde, on voit que la section h s'étend en une section horizontale locale de $\mathcal{A}_{\tilde{X}} \otimes \pi^{-1} \mathcal{S}$ si et seulement si $h_{j,k} = 0$ pour tous j et tous $k \neq 0$. Enfin, le même raisonnement donne le troisième point. \square

Nous allons maintenant considérer les propriétés des sections horizontales d'une connexion $\mathcal{E}^{\psi-\varphi} \otimes \mathcal{S}$ où $\psi - \varphi = x^{-m} u(x, y)$ avec $u(0, 0) \neq 0$, $m_1 > 0$ si $D = \{x_1 = 0\}$ et $m_1, m_2 \geq 0$ non tous deux nuls si $D = \{x_1 x_2 = 0\}$.

Lemme 3.3.2. — *Soit $\theta^\circ \in \pi^{-1}(0)$. Sous ces conditions,*

- (1) si $D = \{x_1 = 0\}$ et $m_1 > 0$ ou si $D = \{x_1 x_2 = 0\}$ et $m_1, m_2 > 0$,
 - si $\cos(m_1 \theta_1^\circ + m_2 \theta_2^\circ - \arg u(0)) > 0$, les sections horizontales de la connexion $(\tilde{\mathcal{J}}_* \mathcal{O}_{X-D})_{\theta^\circ} \otimes (\mathcal{E}^{\psi-\varphi} \otimes \mathcal{S})_0$ sont dans $\mathcal{A}_{\tilde{X}, \theta^\circ}^{\leq D} \otimes (\mathcal{E}^{\psi-\varphi} \otimes \mathcal{S})_0$;
 - si $\cos(m_1 \theta_1^\circ + m_2 \theta_2^\circ - \arg u(0)) \leq 0$, les sections horizontales de la connexion $\mathcal{A}_{\tilde{X}, \theta^\circ}^{\text{mod } D} \otimes (\mathcal{E}^{\psi-\varphi} \otimes \mathcal{S})_0$ sont nulles.
- (2) si $D = \{x_1 x_2 = 0\}$ et $m_1 = 0, m_2 > 0$,
 - si $\cos(m_2 \theta_2^\circ - \arg u(0)) > 0$, les sections horizontales de la connexion $(\tilde{\mathcal{J}}_* \mathcal{O}_{X-D})_{\theta^\circ} \otimes (\mathcal{E}^{\psi-\varphi} \otimes \mathcal{S})_0$ qui se prolongent en des sections de $\mathcal{A}_{\tilde{X}} \otimes (\mathcal{E}^{\psi-\varphi} \otimes \mathcal{S})$ au-dessus d'un secteur de $D_1 - \{0\}$ dans la direction θ_2° sont dans $\mathcal{A}_{\tilde{X}, \theta^\circ}^{\leq D_2} \otimes (\mathcal{E}^{\psi-\varphi} \otimes \mathcal{S})_0$;
 - si $\cos(m_2 \theta_2^\circ - \arg u(0)) \leq 0$, les sections horizontales de la connexion $\mathcal{A}_{\tilde{X}, \theta^\circ}^{\text{mod } D} \otimes (\mathcal{E}^{\psi-\varphi} \otimes \mathcal{S})_0$ sont nulles.

Démonstration. — Notons ε la base de $\mathcal{E}^{\psi-\varphi}$ pour laquelle la matrice de la connexion est $d(\psi - \varphi)$. Une section horizontale h de $(\tilde{\mathcal{J}}_* \mathcal{O}_{X-D})_{\theta^o} \otimes (\mathcal{E}^{\psi-\varphi} \otimes \mathcal{S})_0$ peut s'écrire sur un voisinage de θ^o sous la forme $e^{\varphi-\psi} \varepsilon \otimes \ell$, où ℓ est une section horizontale de $(\tilde{\mathcal{J}}_* \mathcal{O}_{X-D})_{\theta^o} \otimes \mathcal{S}_0$, donc à croissance modérée. On en déduit facilement le premier point de (1) puisque dans ce cas $e^{\varphi-\psi}$ est exponentiellement plate le long de D .

Pour le premier point de (2), on voit que sous l'hypothèse faite, la section ℓ s'étend en une section de $\mathcal{A}_{\tilde{X}} \otimes \mathcal{S}$ au-dessus d'un secteur de $D_1 - \{0\}$. Si $\mathcal{S} = \mathcal{O}_X[*D] \otimes V$ comme plus haut, la section ℓ est donc dans $\mathcal{A}_{\tilde{D}_1, \theta_2^o}^{\text{mod } D_1 \cap D_2} \otimes V$. De plus $e^{\varphi-\psi}$ est une section de $\mathcal{A}_{\tilde{X}, \theta^o}^{< D_2}$. On en déduit l'assertion.

Pour les seconds points de (1) et (2), on se ramène, en considérant une projection sur un quotient de rang 1 de \mathcal{S} , à montrer que la fonction $x^a e^{\varphi-\psi}$ n'est pas à croissance modérée au voisinage de θ^o sous l'hypothèse faite. \square

Revenons maintenant à la démonstration du lemme 3.3.1. Fixons une intersection $U_i \cap U_j$ et notons $\lambda = \lambda_{ij}$. Soient $\mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R}$ et $\mathcal{E}^\psi \otimes \mathcal{R}'$ deux composantes élémentaires de $\mathcal{M}^{\text{él}}$ et soit μ le bloc correspondant de $\lambda - \text{Id}$, qui est un morphisme de connexions sur $U_i \cap U_j$

$$\mathcal{A}_{\tilde{X}}[*D]_{\pi^{-1} \mathcal{O}_X[*D]} \otimes \pi^{-1}(\mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{A}_{\tilde{X}}[*D]_{\pi^{-1} \mathcal{O}_X[*D]} \otimes \pi^{-1}(\mathcal{E}^\psi \otimes \mathcal{R}')$$

c'est-à-dire une section horizontale de

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\tilde{X}}[*D]_{\pi^{-1} \mathcal{O}_X[*D]} \otimes \pi^{-1} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X[*D]}((\mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R}), (\mathcal{E}^\psi \otimes \mathcal{R}')) \\ = \mathcal{A}_{\tilde{X}}[*D]_{\pi^{-1} \mathcal{O}_X[*D]} \otimes \pi^{-1} (\mathcal{E}^{\psi-\varphi} \otimes \text{Hom}_{\mathcal{O}_X[*D]}(\mathcal{R}, \mathcal{R}')). \end{aligned}$$

Par hypothèse μ est une section horizontale sur $U_i \cap U_j$ de

$$\mathcal{A}_{\tilde{X}}^{< Y}[*D]_{\pi^{-1} \mathcal{O}_X[*D]} \otimes \pi^{-1} (\mathcal{E}^{\psi-\varphi} \otimes \text{Hom}_{\mathcal{O}_X[*D]}(\mathcal{R}, \mathcal{R}')).$$

Si $\varphi = \psi$ on a $\mu = 0$ puisqu'une connexion régulière n'a pas de section horizontale non nulle plate le long de Y . Si $\varphi \neq \psi$, l'hypothèse de bonne \mathcal{A} -décomposition montre que $\psi - \varphi = x^{-m} u(x, y)$ satisfait les hypothèses du lemme ci-dessus. Maintenant ${}^t \mu$ est une section horizontale sur $U_i \cap U_j$ de la connexion

$$\overline{\mathcal{A}}_{\tilde{X}}^{\text{mod } D} \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_{\tilde{X}}[*\bar{D}]} \pi^{-1} \left(\mathcal{E}^{(-\bar{\varphi}) - (-\bar{\psi})} \otimes \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}[*\bar{D}]}(C_X^{\text{mod } D} \mathcal{R}', C_X^{\text{mod } D} \mathcal{R}) \right).$$

Notons que $\psi - \varphi$ et $\bar{\psi} - \bar{\varphi}$ ont même partie réelle. Si $D = \{x_1 = 0\}$ ou $D = \{x_1 x_2 = 0\}$ et $m_1, m_2 > 0$, le lemme ci-dessus montre en particulier que ${}^t \mu$ est une section horizontale sur $U_i \cap U_j$ de

$$\overline{\mathcal{A}}_{\tilde{X}}^{< Y}[*\bar{D}] \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_{\tilde{X}}[*\bar{D}]} \pi^{-1} \left(\mathcal{E}^{(-\bar{\varphi}) - (-\bar{\psi})} \otimes \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}[*\bar{D}]}(C_X^{\text{mod } D} \mathcal{R}', C_X^{\text{mod } D} \mathcal{R}) \right)$$

d'où le résultat.

Si $D = \{x_1 x_2 = 0\}$ et $m_1 = 0, m_2 > 0$, on peut appliquer le même raisonnement si l'on sait que ${}^t\mu$ s'étend en une section horizontale de

$$\bar{\mathcal{A}}_{\bar{X}}[*\bar{D}] \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\bar{X}}[*\bar{D}]} \pi^{-1} \left(\mathcal{E}^{(-\bar{\nu})-(-\bar{\nu})} \otimes \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\bar{X}}[*\bar{D}]}(C_{\bar{X}}^{\text{mod } D} \mathcal{R}', C_{\bar{X}}^{\text{mod } D} \mathcal{R}) \right)$$

dans un secteur de $D_1 - \{0\}$. Par hypothèse l'assertion analogue est vraie pour μ . D'autre part, sur un tel secteur la partie \mathcal{E} de la connexion est régulière. Il s'agit donc de vérifier que si \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont deux connexions régulières, si $D = \{x_1 = 0\}$ et si ν est un morphisme des connexions

$$\nu : \mathcal{A}_{\bar{X}, \theta^\circ} \otimes \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{A}_{\bar{X}, \theta^\circ} \otimes \mathcal{R}'$$

le transposé de ν est aussi défini sur $\mathcal{A}_{\bar{X}, \theta^\circ}$ (et pas seulement sur $\mathcal{A}_{\bar{X}}^{\text{mod } D}$). Mais puisque si \mathcal{S} est régulière les sections horizontales de $\mathcal{A}_{\bar{X}} \otimes \mathcal{S}$ sont celles de \mathcal{S} , on voit que ν provient d'un morphisme de connexions $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ et par suite ${}^t\nu$ du morphisme transposé $C_{\bar{X}}^{\text{mod } D}(\mathcal{R}') \rightarrow C_{\bar{X}}^{\text{mod } D}(\mathcal{R})$, ce qui donne le résultat. \square

3.4. Quelques applications. — Nous allons donner quelques conséquences de la conjecture de Kashiwara, lorsque celle-ci est vraie. Nous renvoyons à [26] ainsi qu'à [10, chap. 7] pour d'autres conséquences de celle-ci. Celles-ci sont données pour les distributions holonomes régulières mais plusieurs s'appliquent aux distributions holonomes si la conjecture de Kashiwara est vraie. Nous allons donner ci-dessous quelques résultats globaux qui se déduisent de cette conjecture. Si l'on remplace dans les corollaires ci-dessous « holonome » par « holonome régulier » ou par « holonome à support de dimension ≤ 2 », ceux-ci sont vrais du fait de [26] ou du théorème 3.1.2 (modulo la conjecture I.2.5.1).

Le théorème de B. Malgrange. — Si X est une variété analytique complexe et \mathcal{M} est un \mathcal{D}_X -module holonome, B. Malgrange a montré (voir [45, 47] et [46]) que \mathcal{M} admet un réseau, i.e. un \mathcal{O}_X -sous-module cohérent \mathcal{N} tel que $\mathcal{D}_X \cdot \mathcal{N} = \mathcal{M}$. Ceci permet d'appliquer à \mathcal{M} certains résultats classiques sur les \mathcal{O}_X -modules cohérents. Nous utiliserons les conséquences suivantes :

- Si K est un compact de Stein d'une variété analytique, alors $H^i(K, \mathcal{M}) = 0$ pour $i \neq 0$.
- Si X est projective, le théorème GAGA s'applique aux modules holonomes.

Nous noterons ci-dessous $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $\partial_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$.

Corollaire 3.4.1. — *Soit U un ouvert de \mathbf{C}^n , \mathcal{M} un \mathcal{D}_U -module holonome et supposons que \mathcal{M} admette une résolution finie par des \mathcal{D}_U -modules libres*

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_U^{p_m} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}_U^{p_i} \xrightarrow{A_i} \mathcal{D}_U^{p_{i-1}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}_U^{p_0} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$$

Alors, si la conjecture de Kashiwara est vraie pour \mathcal{M} , pour tout compact de Stein $K \subset U$, le complexe

$$0 \rightarrow \mathfrak{D}\mathfrak{b}(K)^{p_0} \xrightarrow{A_1} \mathfrak{D}\mathfrak{b}(K)^{p_1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathfrak{D}\mathfrak{b}(K)^{p_m} \rightarrow 0$$

n'a de cohomologie qu'en degré 0.

Corollaire 3.4.2. — Soit M un $\mathbf{C}[x]\langle\partial_x\rangle$ -module holonome, muni d'une résolution libre

$$0 \longrightarrow \mathbf{C}[x]\langle\partial_x\rangle^{p_n} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbf{C}[x]\langle\partial_x\rangle^{p_i} \xrightarrow{A_i} \mathbf{C}[x]\langle\partial_x\rangle^{p_{i-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbf{C}[x]\langle\partial_x\rangle^{p_0} \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Alors, si la conjecture de Kashiwara est vraie pour le $\mathcal{D}_{\mathbf{P}^n}$ -module $\mathcal{M} = j_+M$, le complexe des solutions dans $S'(\mathbf{C}^n)$ (distributions tempérées)

$$0 \rightarrow S'(\mathbf{C}^n)^{p_0} \xrightarrow{A_1} S'(\mathbf{C}^n)^{p_1} \rightarrow \dots \rightarrow S'(\mathbf{C}^n)^{p_n} \rightarrow 0$$

n'a de cohomologie qu'en degré 0 et le H^0 est un $\mathbf{C}[\bar{x}]\langle\partial_{\bar{x}}\rangle$ -module holonome.

Remarque. — On en déduit, modulo la conjecture de Kashiwara, que si on se donne $P_1, \dots, P_\ell \in \mathbf{C}[x]\langle\partial_x\rangle$ qui définissent un système holonome, il existe alors une distribution tempérée v sur \mathbf{C}^n telle que les solutions tempérées de $P_1u = 0, \dots, P_\ell u = 0$ soient les distributions de la forme $Q(\bar{x}, \partial_{\bar{x}}) \cdot v$ (avec $Q \in \mathbf{C}[\bar{x}]\langle\partial_{\bar{x}}\rangle$).

Démonstrations. — Le complexe des solutions distributions sur K considéré dans le corollaire n'est autre que $\mathbf{R}\Gamma(K, \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{M}, \mathcal{D}\mathbf{b}_U))$ puisque $H^i(K, \mathcal{D}\mathbf{b}_U) = 0$ si $i \neq 0$. Ce complexe est donc égal à $\mathbf{R}\Gamma(K, C_U(\mathcal{M}))$. Si la conjecture de Kashiwara est vraie, $C_U(\mathcal{M})$ est $\overline{\mathcal{D}}_U$ -holonome et le théorème de Malgrange montre que le complexe est égal à $\Gamma(K, C_U(\mathcal{M}))$.

Montrons maintenant le corollaire 3.4.2. Notons ici $U = \mathbf{C}^n$ et j l'inclusion de U dans \mathbf{P}^n . Reprenons les notations de la proposition 3.2.2 avec $X = \mathbf{P}^n$, $U = \mathbf{C}^n$ et $Z = \mathbf{P}^n - \mathbf{C}^n$. Le module M définit un $\mathcal{D}_{\mathbf{P}^n}^{\text{alg}}$ -module holonome j_+M qui satisfait $j_+M[*Z] = j_+M$ et l'on a $M = \Gamma(X, j_+M)$. Nous noterons aussi j_+ le foncteur adjoint de j_+ par dualité. On a $(j_+M)^{\text{an}} = j_+j^+(j_+M)^{\text{an}}$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X[*Z]} \left((j_+M)^{\text{an}}, \mathcal{D}\mathbf{b}_X^{\text{mod } Z} \right) &= \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X} \left((j_+M)^{\text{an}}, \mathcal{D}\mathbf{b}_X^{\text{mod } Z} \right) \\ &= \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X} \left((j_+M)^{\text{an}}, \mathcal{D}\mathbf{b}_X \right) \\ &= C_X((j_+M)^{\text{an}}) = j_+j^+C_X((j_+M)^{\text{an}}). \end{aligned}$$

Or par GAGA il existe un unique $\mathcal{D}_{\mathbf{P}^n}^{\text{alg}}$ -module holonome, qu'on notera $C_X(j_+M)$ tel que $C_X((j_+M)^{\text{an}}) = C_X(j_+M)^{\text{an}}$. On a donc $C_X(j_+M) = C_X(j_+M)[*Z]$ et il existe un unique $\mathbf{C}[\bar{x}]\langle\partial_{\bar{x}}\rangle$ -module holonome noté $C_U(M)$ tel que $C_X(j_+M) = j_+C_U(M)$: on prend $C_U(M) = \Gamma(X, C_X(j_+M))$. La résolution donnée de M induit une résolution libre de $(j_+M)^{\text{an}}$ comme $\mathcal{D}_X[*Z]$ -module et le complexe des solutions tempérées n'est autre que

$$\mathbf{R}\Gamma \left(X, \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X[*Z]} \left((j_+M)^{\text{an}}, \mathcal{D}\mathbf{b}_X^{\text{mod } Z} \right) \right).$$

Il est donc égal à

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\Gamma(X, C_X((j_+M)^{\text{an}})[*Z]) &= \mathbf{R}\Gamma(X, C_X(j_+M)[*Z]) \\ &= \mathbf{R}\Gamma(X, j_+C_U(M)) \\ &= C_U(M). \end{aligned}$$

□

Exemple en dimension 1. — Dans ce cas, le théorème 3.1.2 montre que la conjecture de Kashiwara est vraie. Si X est un ouvert de \mathbf{C} et $P \in \mathcal{D}_X(X)$ est un opérateur différentiel non nul à coefficients holomorphes, l'action de P induit un morphisme surjectif $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_X \rightarrow \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X$: on applique le théorème 3.1.2 à $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X \cdot P$ qui admet la présentation

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_X \xrightarrow{\cdot P} \mathcal{D}_X \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

de sorte que $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X)$ est représenté par le complexe

$$\{0 \longrightarrow \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X \xrightarrow{P} \mathfrak{D}\mathfrak{b}_X \longrightarrow 0\}.$$

Si $P \in \mathbf{C}[x]\langle \partial_x \rangle$, P agit surjectivement sur $\mathcal{S}'(\mathbf{C})$.

Un analogue réel de ce résultat est démontré dans [39].

CHAPITRE III

BONNE STRUCTURE FORMELLE APRÈS ÉCLATEMENTS

0. Introduction

La classification des connexions méromorphes formelles d'une variable est bien connue et il en existe plusieurs approches (voir [61], [29], [55], [40], [4], [62]). Dans [5] est aussi traité le cas « avec paramètres ».

Nous considérons dans ce chapitre le cas de deux variables et nous allons montrer les résultats énoncés au § I.2.5. Il se trouve que la démonstration que nous proposons est très technique et nettement plus compliquée que la démonstration analogue en dimension 1. C'est essentiellement dû à la présence d'un phénomène qui n'apparaît pas en dimension 1, *la résonance nilpotente*. Aussi nous allons indiquer ci-dessous les étapes de la démonstration.

Une méthode possible pour montrer la conjecture I.2.5.1 consiste à tenter de prolonger la bonne structure formelle qui existe génériquement sur le diviseur Z , comprendre ce qui empêche le prolongement, puis éclater ce qui est nécessaire. Pour simplifier, on commence par éclater pour rendre Z à croisements normaux. Un énoncé de *réduction torique* (cf. § 4.3) permet même de ramener l'étude au cas où Z est lisse au voisinage d'un point où la bonne structure formelle générique ne se prolonge pas. Les résultats de [5] permettent de préciser la cause du non prolongement : les facteurs exponentiels et leurs différences deux à deux acquièrent des zéros ou des singularités au point considéré (voir § 2.5). Il est alors naturel d'essayer d'éclater le point singulier pour éliminer ces singularités. La difficulté consiste en le contrôle des nouveaux facteurs exponentiels génériques qui apparaissent le long des différentes composantes du diviseur exceptionnel ainsi créé. Nous ne disposons pas de technique pour prévoir *a priori* leur comportement. Cette méthode peut cependant être menée à terme dans le cas où la connexion irrégulière est obtenue par transformation de Fourier partielle à partir d'une connexion régulière (§ 4.5). Aussi, en général, nous suivrons la démarche utilisée en dimension 1.

Revenons sur les démonstrations en dimension 1. Elles sont essentiellement de deux types : ou bien on privilégie la structure de $\widehat{\mathcal{O}}[x^{-1}]$ -module, *i.e.* de $\widehat{\mathcal{O}}[x^{-1}]$ -espace vectoriel (ici $\widehat{\mathcal{O}} = \mathbf{C}[[x]]$) et on traite la dérivation comme un opérateur dont on essaye de simplifier la matrice dans une base convenable, ou bien on privilégie la structure de $\widehat{\mathcal{D}}$ -module ($\widehat{\mathcal{D}} = \widehat{\mathcal{O}}\langle \partial_x \rangle$) et on essaye de simplifier la structure de l'opérateur différentiel annihilant un « vecteur cyclique » de la connexion. Cet opérateur est un analogue non commutatif du polynôme minimal de la matrice de la connexion.

Cette deuxième méthode est plus rapide en ce sens qu'elle fournit immédiatement des informations sur la connexion (pentes du polygone de Newton,...). Elle s'étend d'ailleurs lorsqu'on considère des connexions à paramètres et donne l'existence d'une décomposition sur un ouvert dense de l'espace des paramètres (cependant la seule démonstration de ce fait existant dans la littérature est celle de [5], qui utilise l'autre méthode et est plus compliquée). Cette méthode est aussi plus simple dans la mesure où l'on adapte des techniques d'algèbre commutative, notamment les techniques de division. Néanmoins il semble difficile de l'étendre au cas de plusieurs variables : elle privilégie en effet *au départ* un opérateur de dérivation. Lorsqu'on effectue des éclatements, les opérateurs de dérivation se mélangent et on perd les informations sur l'opérateur de départ.

La première méthode est de nature plus compliquée pour deux raisons. D'abord, si l'on se donne la matrice de la connexion, il n'est pas possible de lire sur cette donnée des informations sur la connexion (comme l'irrégularité, *etc.*) ; il faut pour cela effectuer certains changements de base au préalable. Ensuite, la réduction fait intervenir l'algèbre des matrices et pas seulement l'algèbre des polynômes. Il est donc difficile d'extraire des invariants susceptibles de diminuer après éclatement, lorsqu'on se trouve en dimension 2. Néanmoins, cette méthode traite la matrice de connexion comme une matrice de *formes différentielles* et c'est pour cette raison qu'elle peut s'adapter en dimension 2 (ou plus).

En dimension 1, M est une connexion sur $\mathbf{C}[[x]][x^{-1}]$. C'est un module de rang d sur cet anneau (qui est un corps). En dimension 2, on se ramène par éclatements au cas de l'anneau $\mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_1^{-1}]$ ou de $\mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_1^{-1}, x_2^{-1}]$. Alors M est un module libre de rang d sur cet anneau. On choisit une base de ce module libre et on dispose de la matrice Θ de la connexion, qui est une matrice $d \times d$ de 1-formes méromorphes (à pôles le long de $x = 0$, *resp.* $x_1 = 0$, *resp.* $x_1 x_2 = 0$). Soit $\det M$ le déterminant de la connexion. C'est une connexion de rang 1, elle est donc élémentaire. On peut alors trouver une connexion N de rang 1 telle que $\det(M \otimes N)$ soit régulière. De cette manière, on se ramène à montrer I.2.5.1 pour les connexions à déterminant régulier.

En dimension 1, on peut écrire

$$\Theta = x^{-r} A(x) \frac{dx}{x}, \quad A(0) \neq 0$$

et on peut supposer $r \geq 1$, sinon la connexion est régulière. En particulier on dispose de la *partie principale logarithmique* $x^{-r}A(0)\frac{dx}{x}$.

En dimension 2, une telle partie principale n'existe pas nécessairement : il faut la créer par éclatements. C'est ce qui est fait à la section 3. C'est un analogue du théorème de Seidenberg [59] sur la réduction des 1-formes différentielles holomorphes en dimension 2. La démonstration que nous donnons est cependant plus compliquée que nécessaire, dans le but de pouvoir s'adapter simplement à une étape ultérieure de la preuve. Par ailleurs, nous utilisons l'existence d'une bonne structure formelle générique le long d'un diviseur ; par conséquent les singularités du problème sont en nombre fini sur tout diviseur (c'est la notion de centre M -permis du § 1.1). Néanmoins, dans la pratique, la détermination de ces centres permis n'est pas immédiate. Nous sommes ainsi ramenés à considérer un nombre fini de points sur le diviseur exceptionnel de l'éclatement, où la matrice de la connexion a l'une des formes suivantes dans des coordonnées adaptées au diviseur des pôles :

$$\Theta = x_1^{-r_1} \left[A \frac{dx_1}{x_1} + B dx_2 \right], \quad A(0) \neq 0, \quad r_1 > 0$$

$$\Theta = x_1^{-r_1} x_2^{-r_2} \left[A \frac{dx_1}{x_1} + B \frac{dx_2}{x_2} \right], \quad A(0) \neq 0, \quad r_1 > 0 \text{ et } r_2 \geq 0.$$

On dispose maintenant d'une partie principale logarithmique

$$x_1^{-r_1} A(0) \frac{dx_1}{x_1} \quad \text{ou} \quad x_1^{-r_1} x_2^{-r_2} \left[A(0) \frac{dx_1}{x_1} + B(0) \frac{dx_2}{x_2} \right].$$

En dimension 1, puisque M est à déterminant régulier, on voit que si $r \geq 1$, $A(0)$ est de trace nulle. Si $A(0)$ a deux valeurs propres distinctes, on montre que M est somme directe de deux connexions de rang $< d$, de sorte que la conclusion de I.2.5.1 est vraie pour M par récurrence sur d . Sinon, $A(0)$ est nilpotente.

En dimension 2, le même raisonnement vaut pour $A(0)$ et $B(0)$. On utilise ici une première fois la condition d'intégrabilité sur Θ (i.e. $d\Theta = \Theta \wedge \Theta$). Ceci est expliqué au § 2.3.

Décrivons maintenant la méthode de [4] en dimension 1. Puisque $A_0 \stackrel{\text{déf}}{=} A(0)$ est nilpotente, on peut compléter A_0 en un \mathfrak{sl}_2 -triplet $A_0 = Y, H, X$ (avec $[H, A_0] = -2A_0$, $[H, X] = 2X$ et $[X, A_0] = H$). On dispose de la notion de *poids* : une matrice P à éléments dans \mathbf{C} est de poids w si et seulement si $[H, P] = wP$ et on sait que les poids sont entiers. Il s'agit alors d'effectuer un changement de base de matrice $x^{-\delta H}$, pour $\delta \in \mathbf{Q}$ convenable, de sorte qu'après ce changement de base, la nouvelle partie principale logarithmique soit de la forme $x^{-r'} A'_0 \frac{dx}{x}$ avec $A'_0 = A_0 + Z$, où Z est une matrice *primitive* (au sens de la décomposition de Lefschetz), i.e. satisfait $[X, Z] = 0$. On conclut comme suit :

- Si $r' \leq 0$, la connexion M est régulière ;
- Si $r' \geq 1$, A'_0 est de trace nulle (car $\det M$ est régulière) et
 - ou bien A'_0 n'est pas nilpotente, donc a deux valeurs propres distinctes et M se décompose : on conclut par récurrence sur le rang d de M ;
 - ou bien A'_0 est nilpotente et dans ce cas la dimension ν' de l'orbite de A'_0 sous l'action adjointe de $\mathrm{GL}(d, \mathbf{C})$ est strictement supérieure à celle de A_0 , car Z est primitive ; on effectue donc une récurrence sur la dimension de cette orbite.

Pour réaliser ce programme et trouver δ , on commence par effectuer un changement de base pour rendre la base *admissible* : dans une telle base la matrice de la connexion s'écrit

$$\Theta = x^{-r} A'(x) \frac{dx}{x} = x^{-r} \left(A'(0) + \sum_{k \geq 1} A'_k x^k \right) \frac{dx}{x}$$

avec $A'(0) = A(0)$ et pour tout $k \geq 1$, A'_k est *primitive*. Pour cela on utilise la décomposition de l'espace des matrices en $\mathrm{Ker} \mathrm{ad} X \oplus \mathrm{Im} \mathrm{ad} A_0$. On ré-écrit alors la matrice Θ en décomposant suivant les poids :

$$\Theta = x^{-r} \left[A_0 + \sum_{w \geq 0} \sum_{k \geq 1} A_k^{(w)} x^k \right] \frac{dx}{x}$$

(les poids sont ≥ 0 puisque les matrices sont primitives). Le *degré pondéré* de $A_k^{(w)} x^k$ est par définition le rationnel $k/(w+2)$. Considérons le terme de degré pondéré minimum δ . Il s'écrit

$$\sum_{\{(k,w) | k/(w+2) = \delta\}} A_k^{(w)} x^k.$$

C'est la *partie principale pondérée* de Θ . On effectue le changement de base de matrice $x^{-\delta H}$ (en ramifiant d'abord si δ n'est pas entier) et la matrice Z ci-dessus n'est autre que $\sum A_k^{(w)}$, somme des coefficients de la partie principale pondérée.

En dimension 2, cette méthode s'adapte assez simplement si, une fois la partie principale logarithmique créée, la matrice nilpotente $A(0)$ est *régulière* (i.e. son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique). Cela découle d'un résultat de B. Malgrange que nous rappelons au § 2.4. Si le lieu des pôles de la connexion est lisse, il n'est pas nécessaire d'éclater plus, une fois cette partie principale obtenue.

En général cependant, un premier problème se pose si le diviseur des pôles a deux composantes, i.e. s'écrit $x_1 x_2 = 0$: si la partie principale logarithmique de la connexion est

$$x_1^{-r_1} x_2^{-r_2} \left(A_0 \frac{dx_1}{x_1} + B_0 \frac{dx_2}{x_2} \right)$$

alors après éclatement elle s'écrira, en un point générique du diviseur exceptionnel

$$x_1'^{-(r_1+r_2)} (A_0 + B_0) \frac{dx_1'}{x_1'}$$

de sorte qu'on peut avoir à considérer la nouvelle matrice nilpotente $A_0 + B_0$ et ainsi de suite dans des éclatements successifs. Il n'est donc pas possible au départ de choisir un \mathfrak{sl}_2 -triplet valable après tout éclatement. Aussi une première étape consiste à faire en sorte que B_0 soit un multiple non résonant de A_0 , *i.e.* de la forme αA_0 avec $\alpha \notin -\mathbf{N}^*$. Il suffit de faire en sorte qu'après éclatements la connexion admette une bonne structure formelle en tous les points de croisement du diviseur des pôles. C'est ce qui est fait à la section 4 à l'aide de la proposition 4.3.1 de *réduction torique*. On peut alors fixer un \mathfrak{sl}_2 -triplet, à une constante multiplicative près pour A_0 et X . En particulier les notions de poids et de matrice primitive sont bien définies et ne changeront pas après éclatement.

Un deuxième problème rend les choses compliquées : il n'est pas *a priori* possible de trouver un changement de base de sorte que dans la nouvelle base les matrices coefficients de $\frac{dx_1}{x_1}$ et dx_2 (*resp.* et $\frac{dx_2}{x_2}$) soient primitives. Aussi la notion de *base admissible* est plus faible : on impose seulement que le coefficient de $\frac{dx_1}{x_1}$ (mis à part A_0) soit formé de matrices primitives, *i.e.* commute à X . La conséquence est que cette notion *n'est pas stable par éclatement*.

L'étape suivante consiste alors à créer une partie principale *pondérée* pour la matrice de connexion, *dans une base admissible*. Pour cela, on essaye de trouver une suite d'éclatements telle qu'en tout point singulier du problème (centre M -permis) sur le diviseur exceptionnel, il existe un changement de base rendant la base admissible et dans laquelle la matrice de la connexion ait la forme

$$x_1^{-r_1} \left[(A_0 + A(x_1, x_2)) \frac{dx_1}{x_1} + (B_0 + B(x_1, x_2)) dx_2 \right]$$

resp. $x_1^{-r_1} x_2^{-r_2} \left[(A_0 + A(x_1, x_2)) \frac{dx_1}{x_1} + (B_0 + B(x_1, x_2)) \frac{dx_2}{x_2} \right]$

avec $A(0, 0) = B(0, 0) = 0$ et de sorte que la partie

$$x_1^{-r_1} \left(A(x_1, x_2) \frac{dx_1}{x_1} + B(x_1, x_2) dx_2 \right)$$

(*resp.*...) ait elle-même une partie principale pondérée. Lorsque c'est possible, on obtient en fait cette forme en composant à chaque étape éclatement et changement de base rendant la base admissible. Il faut alors s'assurer que la méthode de la section 3 permettant de créer une partie principale peut être perturbée par ce type de changement de base.

On peut mener à terme ce programme lorsqu'il n'y a pas de *résonance nilpotente*. C'est l'objet de la section 5. C'est en particulier le cas si la matrice A_0 n'a pas deux blocs de Jordan dont les tailles diffèrent de 1. En général, il peut cependant apparaître une «résonance nilpotente» au cours de la «réduction pondérée» de la matrice de la connexion. C'est ce qui est analysé en détail au §6 où l'on précise les situations possibles lorsque la réduction pondérée n'aboutit pas. Ceci est dû au fait que la condition d'intégrabilité ne donne pas suffisamment d'information en ce qui concerne la partie de la matrice Θ qui commute à A_0 .

Plus précisément, il est important de contrôler les matrices sur la partie Bdx_2 (*resp.* $B\frac{dx_2}{x_2}$) de Θ qui sont de poids ≥ -1 (relativement à H). La condition d'intégrabilité ne donne pas de contrôle convenable sur celles qui commutent à A_0 ; celles-ci sont de poids 0 ou -1 . En poids 0 elles sont primitives et ne posent pas trop de problème. En poids -1 elles existent seulement si A_0 admet deux blocs de Jordan dont les tailles diffèrent de 1. Elles sont de la forme $[A_0, S]$ où S est primitive de poids 1. On dit alors qu'il y a résonance nilpotente si, lorsque le lieu des pôles est $\{x_1 = 0\}$, la matrice Θ de la connexion s'écrit

$$\Theta = x_1^{-r_1} \left[A_0 \frac{dx_1}{x_1} + x_1^{\rho_1} R dx_2 + \text{termes de poids} \leq -2 \right. \\ \left. + \text{termes de poids} \geq -1 \text{ et de degré} > \rho_1 \right]$$

où R est de poids -1 , commute à A_0 et est telle que $A_0 + R$ est conjuguée à A_0 (voir le début du §6 pour une définition plus précise).

Lorsqu'on se trouve dans la situation de résonance nilpotente, la stratégie décrite plus haut devient inopérante du fait de la présence du terme $x_1^{\rho_1} R dx_2$. Nous décrivons au §6.5 une méthode pour éliminer dans certains cas une telle résonance. Elle s'applique notamment à toute connexion de rang ≤ 5 .

Pour terminer, indiquons les articles [17] et [30] qui considèrent des situations où les éclatements sont inutiles.

1. Préliminaires

Nous reprenons les notations du §I.1. Nous allons considérer dans la suite des anneaux A du type suivant :

- $A = \mathbf{C}[[x_1, x_2]]$ noté aussi $\widehat{\mathcal{O}}$;
- $A = \mathcal{O}(\widetilde{U})[[x_1]]$ (voir §I.1.1.1)

et la notion de $A[f^{-1}]$ -connexion, pour $f \in A - \{0\}$ (voir §I.1.2). On peut passer de la seconde situation à la première par complétion formelle en un idéal maximal de A .

Soit M une $\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}]$ -connexion, avec $f \in \widehat{\mathcal{O}}$ et soit π une suite d'éclatements ponctuels au-dessus de l'origine. Alors π^*M est un $\widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{X}, \widehat{E}}[(f \circ \pi)^{-1}]$ -module libre, muni d'une connexion $\pi^+\nabla$: si Θ est la matrice de ∇ dans une base \mathbf{m} de M , $\pi^+\nabla$ admet pour matrice dans la base image inverse la matrice $\pi^*\Theta$ de 1-formes sur \widehat{X}, \widehat{E} . Nous noterons π^+M la $\widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{X}, \widehat{E}}[(f \circ \pi)^{-1}]$ -connexion ainsi obtenue. Pour $x^o \in E$, nous noterons $(\pi^+M)_{x^o}$ la connexion formalisée en x^o $\widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{X}, \widehat{E}, x^o} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{\widehat{X}, \widehat{E}, x^o}} \pi^*M_{x^o}$.

Remarque. — Dans la suite de ce chapitre, nous serons amenés, à cause du corollaire I.1.3.4, à ne considérer que des $A[f^{-1}]$ -connexions (libres) du type suivant :

$$(1.0.3) \quad \begin{cases} A = \mathbf{C} \llbracket x_1, x_2 \rrbracket, & f = x_1 \text{ ou } f = x_1 x_2 \\ A = \mathcal{O}(\widetilde{U}) \llbracket x_1 \rrbracket, & f = x_1. \end{cases}$$

1.1. Suites d'éclatements locaux et centres permis

Éclatements locaux. — Soit $\mathcal{O} = \mathbf{C} \{x_1, x_2\}$ et $\widehat{\mathcal{O}} = \mathbf{C} \llbracket x_1, x_2 \rrbracket$. Un *éclatement local* (resp. un *éclatement local formel*) est une application $\varpi^* : \mathcal{O} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}$ (resp. $\widehat{\mathcal{O}} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}$) induite par l'éclatement $e : (\widetilde{\mathbf{C}^2}, e^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ et la restriction $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{C}^2}|e^{-1}(0)} \rightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{C}^2}, x^o}$ (resp. $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{C}^2}|e^{-1}(0)} \rightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{C}^2}, x^o}$), où $x^o \in e^{-1}(0)$.

Nous noterons aussi $\varpi : (\widetilde{\mathbf{C}^2}, x^o) \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ (resp. $\varpi : (\widetilde{\mathbf{C}^2}, x^o) \rightarrow (\widetilde{\mathbf{C}^2}, 0)$) un éclatement local.

La notion de *suite d'éclatements locaux (formels)* est alors claire.

Centres permis. — Donnons-nous un procédé \mathcal{P} qui sélectionne, pour toute suite

$$\pi_n = \varpi_n \circ \dots \circ \varpi_1 : X_n \rightarrow \mathbf{C}^2$$

d'éclatements ponctuels au-dessus de l'origine, un nombre fini non nul de points dans le diviseur exceptionnel \mathcal{E}_n qui se contracte sur un point par ϖ_n . Par exemple on peut choisir les points de croisement de $\pi_n^{-1}(\{x_1 x_2 = 0\})$ qui sont sur \mathcal{E}_n . Si on se donne une $\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}]$ -connexion M , on peut choisir les points de \mathcal{E}_n où la connexion image inverse π_n^+M n'admet pas une bonne structure formelle (ce qui est licite, d'après le théorème I.2.3.2).

Les points du diviseur $\pi_n^{-1}(0)$ ainsi sélectionnés (de manière successive) sont appelés *centres permis pour \mathcal{P}* .

On peut alors définir par récurrence la notion de *suite d'éclatements à centres permis*, ainsi que celle de *suite d'éclatements locaux (formels) à centres permis*. Dans le premier exemple ci-dessus on dit que la suite est torique et dans le second exemple que la suite est à centres M -permis.

Pour une propriété donnée, qui est locale ou locale formelle et stable par éclatement, les énoncés suivants sont équivalents :

- (i) il existe une suite finie d'éclatements à centres permis $\pi : X, E \rightarrow \mathbf{C}^2, 0$ telle que la propriété soit satisfaite en tout centre permis sur E ;
- (ii) pour toute suite infinie $(\varpi_1, \dots, \varpi_n, \dots)$ d'éclatements locaux (formels) à centres permis au-dessus de l'origine, où $\varpi_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ est l'éclatement de $x^{(n-1)} \in X_{n-1}$, il existe n_0 tel que la propriété soit satisfaite en $x^{(n_0)}$.

1.2. Éclatements toriques

1.2.1. Éventails et éclatements toriques. — Considérons le plan \mathbf{C}^2 muni de coordonnées (x_1, x_2) et par conséquent d'un diviseur $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$. Une suite d'éclatements ponctuels au-dessus de l'origine est dite *torique* (relativement au diviseur \mathcal{P}) si les centres successifs sont toujours des points de croisement du diviseur image inverse de \mathcal{P} . Il sera commode, dans la suite, d'utiliser le langage des éventails pour contrôler le comportement d'une connexion après éclatements toriques. Nous allons rapidement rappeler les principales propriétés (voir [18] pour plus de détails).

Soit $\pi : X \rightarrow \mathbf{C}^2$ une telle suite d'éclatements. Alors X est recouvert par un nombre fini de cartes affines, chacune centrée en un point de croisement du diviseur $\pi^{-1}(\mathcal{P})$. Pour chaque carte, on dispose de coordonnées (x'_1, x'_2) et il existe des entiers $a, b, c, d \geq 0$ avec

$$\begin{aligned} x_1 \circ \pi &= x_1'^a x_2'^b \\ x_2 \circ \pi &= x_1'^c x_2'^d \end{aligned}$$

et le fait que π soit un isomorphisme hors de $x'_1 x'_2 = 0$ équivaut au fait que $ad - bc = \pm 1$.

La donnée de la suite d'éclatements équivaut alors à la donnée d'un *éventail* Σ , c'est-à-dire d'une subdivision du premier quadrant de \mathbf{R}^2 (muni de son réseau standard $N = \mathbf{N}^2$) en cônes rationnels de sommets l'origine, n'ayant que des arêtes en commun. Chaque cône correspond à une carte et si l'on suppose, avec les notations précédentes, que $ad - bc = 1$, la carte correspondant à (a, b, c, d) est donnée par le cône représenté sur la figure 1. L'éventail correspondant à π est *régulier*, c'est-à-dire

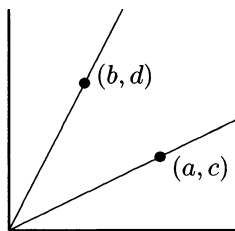


FIGURE 1

que pour chaque cône, les deux vecteurs du réseau N qui engendrent chaque arête engendrent aussi le réseau (le déterminant de leur composantes est égal à ± 1).

Plus généralement, un éventail est une telle subdivision qui ne satisfait pas nécessairement la condition de régularité ci-dessus. Un tel éventail permet de définir une variété X_Σ munie d'une application propre et génériquement bijective (modification) sur \mathbf{C}^2 . Cette variété est lisse si et seulement si l'éventail est régulier.

Si Σ' est une subdivision de l'éventail Σ les modifications se factorisent :

$$X_{\Sigma'} \longrightarrow X_\Sigma \longrightarrow \mathbf{C}^2.$$

Si l'éventail Σ est régulier, la modification $X_\Sigma \rightarrow \mathbf{C}^2$ est une suite d'éclatements toriques.

Tout éventail peut être subdivisé en un éventail régulier, de sorte que toute modification $X_\Sigma \rightarrow \mathbf{C}^2$ peut être dominée par une suite d'éclatements toriques.

Nous aurons besoin des résultats simples suivants.

Lemme 1.2.2. — *Soit x^r un monôme rationnel ($r \in \mathbf{Z}^2$). Il existe une suite d'éclatements toriques π telle que dans chaque carte on ait $x^r \circ \pi = x^{r'}$ avec ou bien $r' \in \mathbf{N}^2$, ou bien $r' \in -\mathbf{N}^2$.*

Démonstration. — Facile. □

Lemme 1.2.3. — *Soit R un anneau commutatif et soit $a = \sum_{m \in \mathbf{N}^2} a_m x^m$ une série formelle dans $R[[x_1, x_2]]$. Soit $N(a)$ le polygone de Newton de a , bord de l'enveloppe convexe de $\bigcup_{\{m \in \mathbf{N}^2 \mid a_m \neq 0\}} [m + (\mathbf{R}_+)^2]$. Soient $(m_j)_{j \in J}$ les sommets de $N(a)$. Il existe une suite d'éclatements toriques π telle qu'au centre de chaque carte, $a \circ \pi$ ait pour polygone de Newton (dans les coordonnées naturelles de la carte) un quadrant, le coefficient correspondant au sommet étant l'un des a_{m_j} .*

Démonstration. — On considère l'éventail dual du polygone de Newton : les arêtes sont formées des directions des cotés de ce polygone. On vérifie que tout éventail régulier subdivisant celui-ci convient. □

Un argument tout à fait analogue permet de montrer aussi le lemme suivant :

Lemme 1.2.4. — *Soit $(a_i)_{i=1, \dots, q}$ une famille finie de séries formelles en x_1, x_2 à coefficients dans R et soit k_i ($i = 1, \dots, q$) un entier ≥ 1 . Il existe une suite d'éclatements toriques π telle que dans chaque carte naturelle, de coordonnées (y_1, y_2) , on puisse écrire*

$$a_i \circ \pi = a_i^o y^{m_i} \cdot u_i(y_1, y_2)$$

avec $a_i^o \neq 0$, $m_i \in \mathbf{N}^2$, $u_i(0, 0) = 1$ et de sorte que dans chaque carte, l'ensemble $\{m_i/k_i \mid i = 1, \dots, q\}$ admette un minimum pour l'ordre partiel naturel de \mathbf{Q}^2 . □

1.2.5. *Connexions et éclatements toriques.* — Soit M une $\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}]$ -connexion, avec $f = x_1 x_2$. Soit $\pi : \widehat{X, E} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}^2, 0}$ une suite d'éclatements toriques et x° un point de croisement du diviseur $(f \circ \pi)^{-1}(0)$. Soient x'_1, x'_2 les coordonnées naturelles de la carte centrées en x° et considérons la connexion $(\pi^+ M)_{x^\circ}$. Soit \mathbf{m} une base de M et notons de même la base image inverse par π . Soit Θ la matrice de la connexion dans cette base et $(\pi^* \Theta)_{x^\circ}$ la matrice dans la base image inverse. Si l'on pose

$$\Theta = A(x_1, x_2) \frac{dx_1}{x_1} + B(x_1, x_2) \frac{dx_2}{x_2},$$

A (resp. B) est la matrice de l'opérateur $\mathcal{D}_1 = x_1 \partial_{x_1}$ (resp. $\mathcal{D}_2 = x_2 \partial_{x_2}$) dans la base \mathbf{m} . On peut écrire, si la carte en x° est décrite par le cône $(a, c), (b, d)$:

$$(\pi^* \Theta)_{x^\circ} = A' \frac{dx'_1}{x'_1} + B' \frac{dx'_2}{x'_2}$$

avec $A' = aA \circ \pi + cB \circ \pi$ et $B' = bA \circ \pi + dB \circ \pi$ et A' (resp. B') est la matrice de \mathcal{D}'_1 (resp. \mathcal{D}'_2). On peut faire agir sur $(\pi^+ M)_{x^\circ}$ les opérateurs \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 en inversant ces formules :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} d\mathcal{D}'_1 - c\mathcal{D}'_2 \\ \mathcal{D}_2 &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} -b\mathcal{D}'_1 + a\mathcal{D}'_2 \end{aligned}$$

si l'on suppose par exemple que $ad - bc = 1$. La matrice de \mathcal{D}_1 dans la base image inverse n'est autre que $A \circ \pi$ et celle de \mathcal{D}_2 est $B \circ \pi$. Il est important de remarquer que les coefficients de $(\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2)$ sur $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ correspondent exactement aux vecteurs primitifs sur les ar\u00eatres du c\u00f4ne correspondant \u00e0 la carte consid\u00e9r\u00e9e.

1.3. Premi\u00e8re r\u00e9duction. — Nous allons montrer comment ramener l'\u00e9nonc\u00e9 I.2.5.1 \u00e0 celle de l'\u00e9nonc\u00e9 plus faible 1.3.1 ci-dessous. Il s'agit d'une part d'affaiblir les conditions sur les exponentielles donn\u00e9es dans la d\u00e9finition de bonne d\u00e9composition formelle et d'autre part de permettre des suites compos\u00e9es d'\u00e9clatements et de ramifications. Introduisons d'abord quelques notions.

\u00c9clatement local formel. — Soit \mathcal{X} un ensemble fini. Un *\u00e9clatement local formel* $\varpi_{\mathcal{X}, 0}^*$ de centre 0 et point\u00e9 en \mathcal{X} est la donn\u00e9e, pour tout $x \in \mathcal{X}$, d'une application $\varpi_{x, 0}^* : \widehat{\mathcal{O}} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}$ satisfaisant la propri\u00e9t\u00e9 suivante : soit $e : \widehat{\mathbf{C}^2, e^{-1}(0)} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}^2, 0}$ l'\u00e9clatement de l'origine. Il existe alors une inclusion $\mathcal{X} \subset e^{-1}(0)$ de sorte que pour tout $x \in \mathcal{X}$, $\varpi_{x, 0}^*$ soit \u00e9gale \u00e0 l'application induite par e^* en $x \in \mathcal{X}$.

Si M est une $\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}]$ -connexion, nous dirons que l'\u00e9clatement local formel est *complet* relativement \u00e0 M si tout centre permis relativement \u00e0 M sur $e^{-1}(0)$ est contenu dans \mathcal{X} .

Ramification locale formelle autour d'un diviseur. — Soit $f \in \widehat{\mathcal{O}}$. Une *ramification locale formelle* autour de (f) est la donn\u00e9e d'une application $\varpi^* : \widehat{\mathcal{O}} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}$ telle que :

- si f ne d\u00e9finit pas un diviseur \u00e0 croisement normaux, ϖ^* est l'identit\u00e9 ;

- si f définit un diviseur à croisements normaux, ϖ^* est une ramification (cyclique ou bicyclique) autour de la (ou des) composante(s) de (f) .

Suite composée d'éclatements et de ramifications. — Nous allons définir par récurrence sur n la notion de suite de longueur n composée d'éclatements locaux formels et de ramifications locales formelles. À une telle suite est associé un ensemble fini \mathcal{X}_n et pour chaque $x \in \mathcal{X}_n$ un diviseur (f_x) , avec $f_x \in \widehat{\mathcal{O}}$.

- Si $n = 0$, la donnée d'une telle suite est simplement la donnée de $\mathcal{X}_0 = \{0\}$ et de $f = f_0 \in \widehat{\mathcal{O}}$.
- Pour $n \geq 1$, c'est la donnée d'une suite de longueur $n - 1$ (donc aussi de \mathcal{X}_{n-1} et pour tout $x \in \mathcal{X}_{n-1}$ de $f_x \in \widehat{\mathcal{O}}$) et, pour tout $x \in \mathcal{X}_{n-1}$,
 - soit la donnée d'un ensemble fini \mathcal{X}_x et d'un éclatement local formel $\varpi_{\mathcal{X}_x, x}^*$ de centre x et pointé en \mathcal{X}_x ,
 - soit la donnée d'une ramification locale formelle ϖ_x^* en x autour de (f_x) (dans ce cas on posera $\mathcal{X}_x \stackrel{\text{déf}}{=} \{x\}$).

Nous définissons alors $\mathcal{X}_n = \coprod_{x \in \mathcal{X}_{n-1}} \mathcal{X}_x$, qui est un ensemble fini muni d'une application surjective dans \mathcal{X}_{n-1} et, pour tout $y \in \mathcal{X}_n$, d'image x dans \mathcal{X}_{n-1} on pose $f_y = \varpi_{y,x}^*(f_x)$.

Si $x \in \mathcal{X}_n$, on note $\pi_x : \widehat{\mathcal{O}} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}$ la composée des applications ϖ à partir de x . Si M est une $\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}]$ -connexion, on note $(\pi_x^+ M)_x$ la $\widehat{\mathcal{O}}[f_x^{-1}]$ -connexion image inverse de M .

Une telle suite est dite *complète* si tous les éclatements locaux qui la composent le sont.

Par exemple, si on se donne une suite d'éclatements ponctuels au-dessus de l'origine, on peut en faire une suite d'éclatements locaux formels en prenant pour \mathcal{X}_n à l'étape n la famille des points de croisements du diviseur exceptionnel. Si on prend à chaque étape la famille des centres M -permis, on obtient une suite complète relativement à M .

Conjecture 1.3.1. — *Soit M une $\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}]$ -connexion. Il existe une suite M -complète de longueur finie N composée d'éclatements locaux formels et de ramifications locales formelles telle que, pour tout $x \in \mathcal{X}_N$, f_x définit un diviseur à croisements normaux et que la connexion $(\pi_x^+ M)_x$ admette une décomposition en somme directe de $\widehat{\mathcal{O}}[f_x^{-1}]$ -connexions formelles élémentaires.*

1.3.2. La suite de cette section sera consacrée à la preuve (1.3.1) \Rightarrow (I.2.5.1). Nous allons procéder en deux temps : d'abord trouver une suite M -complète telle que la décomposition soit en fait une *bonne* décomposition formelle ; puis montrer qu'une telle suite peut être dominée par une suite M -complète où on effectue d'abord les éclatements et, à la fin, les ramifications. On utilise alors le théorème I.2.3.2 pour conclure.

Pour le premier point, on peut supposer que M satisfait la conclusion de 1.3.1. Soient $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ les exposants distincts (mod $\widehat{\mathcal{O}}$) des facteurs exponentiels d'une décomposition de M . Il existe une suite d'éclatements au-dessus de l'origine telle que l'image inverse de

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \varphi_\alpha \prod_{\alpha \neq \beta} (\varphi_\alpha - \varphi_\beta)$$

définisse un diviseur à croisements normaux (on écrit un tel produit f/g avec f et g dans $\widehat{\mathcal{O}}$ et on applique 1.3.3).

Au-dessus de chaque point de croisement de ce diviseur, il existe une suite d'éclatements toriques telle que, dans chaque carte torique, la famille des exposants $-m_\alpha$ des φ_α et $-m_{\alpha,\beta}$ des $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ soit contenue dans $\mathbf{N}^2 \cup (-\mathbf{N}^2)$ (lemme 1.2.2) et soit totalement ordonnée pour l'ordre partiel de \mathbf{Z}^2 (lemme 1.2.4).

Alors l'image inverse de M par cette suite d'éclatements π admet une bonne décomposition formelle en tout point de $\pi^{-1}(0)$ et en prenant la suite locale formelle complète qui lui est associée comme indiqué plus haut, on obtient l'assertion voulue. \square

Pour montrer le deuxième point, le lemme suivant sera l'outil essentiel.

Lemme 1.3.3. — Soit $\rho : \widehat{\mathbf{C}^2, 0} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}^2, 0}$ une ramification locale autour de $(f) = (x_1)$ ou $(f) = (x_1 x_2)$ et soit e l'éclatement l'origine. Il existe alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{Y', E'} & \xrightarrow{\rho'} & \widehat{X', E'} \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ \widehat{Y, F} & & \widehat{\mathbf{C}^2, 0} \\ \downarrow e & & \downarrow \rho \\ \widehat{\mathbf{C}^2, 0} & \xrightarrow{\rho} & \widehat{\mathbf{C}^2, 0} \end{array}$$

où π est une suite (globale) d'éclatements ponctuels, ρ' est un revêtement sur un ouvert de $\widehat{X', E'}$ complémentaire d'une réunion de composantes de E' , ramifié cyclique autour de $(\pi^* f)$ et enfin $\widehat{Y', F'}$ est lisse et π' est surjective.

Démonstration. — Considérons des coordonnées (z_1, z_2) sur $\widehat{\mathbf{C}^2, 0}$ et des coordonnées (y_1, y_2) dans une carte de $\widehat{Y, F}$ de sorte que ρ soit définie par $x_1 = z_1^{\alpha_1}$, $x_2 = z_2^{\alpha_2}$ et e par $z_1 = y_1 y_2$, $z_2 = y_2$ (si $(f) = (x_1)$ on a $\alpha_2 = 1$). Notons $\widehat{Y_0, F}$ cette carte de Y . Le raisonnement est analogue pour l'autre carte de Y . L'application $\rho \circ e$ est donc donnée par $x_1 = y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_1}$, $x_2 = y_2^{\alpha_2}$.

Soit X_0 la variété torique affine correspondant au cône dessiné sur la figure 2, lorsque \mathbf{Q}^2 est muni de son réseau standard \mathbf{Z}^2 . La variété Y_0 est la variété lisse

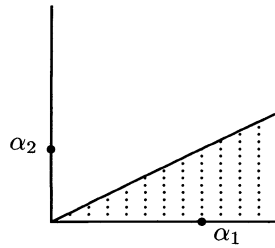
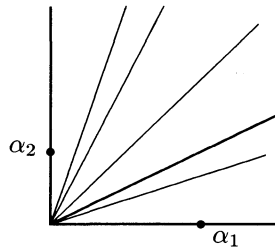


FIGURE 2

correspondant au même cône lorsque \mathbf{Q}^2 est muni du réseau engendré par les vecteurs $(\alpha_1, 0)$ et (α_1, α_2) . L'inclusion des réseaux définit un morphisme fini $Y_0 \rightarrow X_0$. La variété X_0 n'est pas nécessairement lisse. Choisissons une subdivision Σ de l'éventail (formé de deux cônes de dimension 2) de la figure 2 telle que tout cône de dimension 2 de Σ soit régulier. Cette subdivision définit un morphisme $X' \rightarrow \mathbf{C}^2$ qui est une suite d'éclatements ponctuels au-dessus de l'origine.

FIGURE 3. L'éventail Σ

Chaque arête de Σ correspond à un diviseur de X' et si cette arête est de pente > 0 et $\neq \infty$, ce diviseur a pour image 0 dans \mathbf{C}^2 . Le complémentaire X'_0 dans X' des diviseurs dont les arêtes correspondantes ne sont pas dans le cône $\langle (\alpha_1, 0), (\alpha_1, \alpha_2) \rangle$ est muni d'une application $X'_0 \rightarrow X_0$ dont la composée avec $X_0 \rightarrow \mathbf{C}^2$ est la restriction à X'_0 de la suite d'éclatements $X' \rightarrow \mathbf{C}^2$.

On note de même Y' et Y'_0 les espaces obtenus à partir de Σ en utilisant le réseau de base $(\alpha_1, 0)$ et (α_1, α_2) et on dispose d'un morphisme fini $\rho' : Y'_0 \rightarrow X'_0$. Dans chaque carte correspondant à un cône de dimension 2 de Σ , ce morphisme est un revêtement cyclique ou bicyclique ramifié le long du diviseur correspondant aux arêtes de ce cône. Sur chaque arête, l'ordre de ramification est l'entier n tel que $v = n \cdot u$, si u est le plus petit vecteur du réseau \mathbf{Z}^2 sur cette arête et v celui du réseau de base $(\alpha_1, 0)$ et (α_1, α_2) .

On fait de même pour l'autre carte de e : on a $z_1 = y_1$, $z_2 = y_1 y_2$ et le cône correspondant est

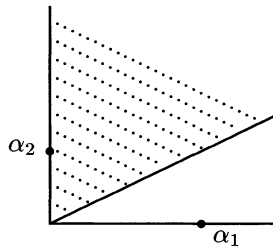
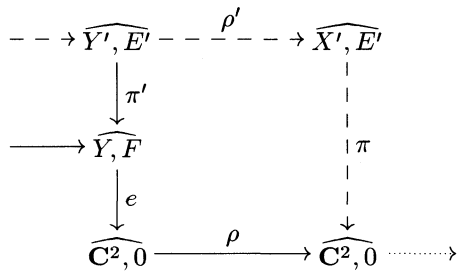


FIGURE 4

On remarque que si $\alpha_2 = 1$, il n'est pas nécessaire d'effectuer une ramification autour du diviseur de X' correspondant à l'arête verticale, qui est le transformé strict par π de $\{y_2 = 0\}$. Autrement dit, le lieu de ramification de ρ est bien $(\pi^*(f))$.

Terminons la preuve du second point. On remplace la suite de départ (flèches simples dans le diagramme ci-dessous) par la suite des flèches en tirets.



Notons $\mathcal{Y}_0 \subset e^{-1}(0)$ l'ensemble fini pointant l'éclatement local e . La suite à partir de Y' est définie comme transformée stricte par π' de la suite à partir de Y (*i.e.* produit fibré privé des composantes irréductibles non dominantes sur Y). Il reste à définir les nouveaux ensembles finis successifs \mathcal{Y}'_0, \dots . On prend l'image inverse des ensembles correspondants sur la suite issue de Y . Si l'image inverse d'un point est un diviseur, on la remplace par l'ensemble des centres M -permis sur ce diviseur.

Si la suite de départ est M -complète, la nouvelle suite l'est encore.

En itérant le procédé un nombre fini de fois, on obtient une suite M -complète où les éclatements sont effectués au début et les ramifications à la fin. □

2. Cas particuliers de réduction

2.1. Connexions avec \mathcal{D}_1 régulier. — Nous considérons ici l'anneau

$$R = \mathbb{C}[[x_1, x_2]][x_1^{-1}] \quad (\text{resp. } \mathbb{C}[[x_1, x_2]][x_1^{-1}, x_2^{-1}]).$$

Nous désignerons par M_R une R -connexion que nous supposons ici R -libre de rang d . Nous supposons enfin qu'il existe une base \mathbf{m} de M_R dans laquelle la matrice A_1 de $\mathcal{D}_1 \stackrel{\text{déf}}{=} x_1 \partial_{x_1}$ est à éléments dans $\mathbf{C}[[x_1, x_2]] = \widehat{\mathcal{O}}$.

Proposition 2.1.1

- (1) Si $R = \mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_1^{-1}]$, il existe une base \mathbf{n} de M_R dans laquelle la matrice de \mathcal{D}_1 est constante et pour laquelle on a $\partial_{x_2} \cdot \mathbf{n} = 0$.
- (2) Si $R = \mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_1^{-1}, x_2^{-1}]$, alors quitte à faire une ramification par rapport à x_2 , la connexion M_R est somme directe de connexions élémentaires.

Démonstration. — Dans les deux cas, la démonstration utilise le lemme suivant (voir par exemple [39]) :

Lemme 2.1.2. — Il existe une base \mathbf{m}' de M_R dans laquelle la matrice A'_1 de \mathcal{D}_1 est à éléments dans $\mathbf{C}[[x_2]]$ et $\text{ad } A'_1 - p \text{Id}$ est inversible sur $\text{End}(\mathbf{C}[[x_2]]^d)$ pour tout $p \in \mathbf{Z} - \{0\}$.

Démonstration. — On peut appliquer le même procédé que dans le cas d'une variable (cf. loc. cit. prop. 6.1) pour trouver une base \mathbf{m}' dans laquelle $A'_1 = A_1(0, x_2)$ si $\text{ad } A_1(0, x_2) - p \text{Id}$ est inversible sur $\text{End}(\mathbf{C}[[x_2]]^d)$ pour tout $p \in \mathbf{Z} - \{0\}$. Cette condition est satisfaite si et seulement si elle l'est en restriction à $x_2 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si les valeurs propres de $A_1(0, 0)$ ne diffèrent pas d'un entier non nul. Si cette condition n'est pas satisfaite, on décale les valeurs propres de $A_1(0, 0)$ par un changement de base $\mathbf{m}'' = B \cdot \mathbf{m}'$, où B est dans $\text{GL}(d, \mathbf{C}[[x_1]][x_1^{-1}])$ (cf. loc. cit. démonstration de 6.1). \square

Notons A'_2 la matrice de ∂_{x_2} (resp. de $\mathcal{D}_2 \stackrel{\text{déf}}{=} x_2 \partial_{x_2}$) dans la base \mathbf{m}' donnée par le lemme. Puisque $\mathcal{D}_1 \partial_{x_2} = \partial_{x_2} \mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1$), on doit avoir la relation :

$$\begin{aligned} \partial_{x_2}(A'_1) - \mathcal{D}_1(A'_2) &= [A'_1, A'_2] \\ (\text{resp. } \mathcal{D}_2(A'_1) - \mathcal{D}_1(A'_2)) &= [A'_1, A'_2]. \end{aligned}$$

Posons $B'_2 = \mathcal{D}_1(A'_2)$. On doit alors avoir

$$-\mathcal{D}_1(B'_2) = [A'_1, B'_2].$$

On développe cette relation suivant les puissances de x_1 et on utilise le fait que $\text{ad } A'_1 - p \text{Id}$ est inversible sur $\text{End}(\mathbf{C}[[x_2]]^d)$ pour tout $p \in \mathbf{Z} - \{0\}$ pour en déduire que $B'_2 = 0$ et donc A'_2 est à éléments dans $\mathbf{C}[[x_2]]$ (resp. dans $\mathbf{C}[[x_2]][x_2^{-1}]$).

Dans le premier cas, posons $M_2 = \mathbf{C}[[x_2]] \cdot \mathbf{m}'$, qui est un $\mathbf{C}[[x_2]]$ -module libre de rang d avec action de ∂_{x_2} (de matrice A'_2). Cette $(\mathbf{C}[[x_2]], \partial_{x_2})$ -connexion est aussi munie d'un endomorphisme \mathcal{D}_1 . Il existe une base horizontale sur $\mathbf{C}[[x_2]]$, c'est-à-dire une base \mathbf{n} dans laquelle la matrice de ∂_{x_2} est nulle. La matrice (encore notée $A_1(x_2)$) de \mathcal{D}_1 dans cette base doit satisfaire maintenant

$$\mathcal{D}_2(A_1) = 0$$

donc A_1 est constante. Puisque $M_R = R \otimes_{\mathbf{C}[[x_2]]} M_2$, on en déduit le premier point de la proposition.

Dans le deuxième cas, on pose $M_2 = \mathbf{C}[[x_2]][x_2^{-1}] \cdot \mathbf{m}'$. C'est une $(\mathbf{C}[[x_2]][x_2^{-1}], \mathcal{D}_2)$ -connexion munie d'un endomorphisme \mathcal{D}_1 . Distinguons encore deux cas.

Si M_2 est régulière, il existe une base \mathbf{n} dans laquelle la matrice A_2 de \mathcal{D}_2 est constante et $\text{ad } A_2 - p \text{Id}$ est inversible sur $\text{End}(\mathbf{C}^d)$ pour tout $p \in \mathbf{Z} - \{0\}$. Notons encore A_1 la matrice de \mathcal{D}_1 dans cette base, qui est à éléments dans $\mathbf{C}[[x_2]][x_2^{-1}]$ (les pôles en x_2 provenant d'un éventuel décalage des valeurs propres de A_2). Si on développe la relation de commutation

$$\mathcal{D}_2(A_1) = [A_1, A_2]$$

relativement aux puissances de x_2 , on trouve que $A_1 = A_1(0)$ et $[A_1(0), A_2] = 0$. La connexion M_R est alors régulière.

Si M_2 n'est pas régulière, alors, après une ramification convenable $x_2 = x_2'^n$, la connexion image inverse M_2' est somme directe de $(\mathbf{C}[[x_2']][x_2'^{-1}], \mathcal{D}_2')$ -connexions élémentaires inéquivalentes. L'endomorphisme \mathcal{D}_1 se relève de manière naturelle à M_2' et il s'agit de voir qu'il préserve la décomposition en somme directe. Ce dernier point provient du fait qu'il n'y a pas de morphisme non trivial d'une connexion purement irrégulière vers une connexion régulière (d'une variable x_2') ou inversement : en effet, le polygone de Newton de la connexion irrégulière élémentaire ainsi que celui de chaque sous-quotient ont une seule pente, qui n'est pas nulle ; on conclut en utilisant que tout morphisme « préserve les pentes » (cf. [44, chap. III, prop. (1.4)]). Soit $R' = \mathbf{C}[[x_1, x_2']][x_1^{-1}, x_2'^{-1}]$. Alors $M_{R'}$ est somme directe de R' -connexions libres $M_{R'}^{(j)}$, chacune admettant une base $\mathbf{n}^{(j)}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- la matrice A_1 de \mathcal{D}_1 est à éléments dans $\mathbf{C}[[x_2']][x_2'^{-1}]$,
- pour tout j il existe une fraction rationnelle $\varphi_j(x_2')$ telle que, pour la connexion $M_{R'}^{(j)} \otimes \exp(\varphi_j)$, munie de la base $\mathbf{n}^{(j)} \otimes \exp(\varphi_j)$, la matrice de \mathcal{D}_2' soit constante, ses valeurs propres ne différant pas d'un entier non nul.

La relation de commutation entre \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2' implique comme plus haut que dans la base $\mathbf{n}^{(j)}$ la matrice de \mathcal{D}_1 est constante, ce qui termine la preuve de la proposition 2.1.1. \square

2.2. Connexions de rang 1

Proposition 2.2.1. — Soit M_R une R -connexion libre de rang $d = 1$. Il existe $\varphi \in R$ et une R -connexion régulière \mathcal{R}_R de rang 1 tels que M_R soit isomorphe à $\mathcal{E}^\varphi \otimes \mathcal{R}_R$.

Démonstration. — Supposons que $R = \mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_1^{-1}, x_2^{-1}]$. Soit \mathbf{m} une base de M_R et posons

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 \cdot \mathbf{m} &= \varphi_1 \cdot \mathbf{m} \\ \mathcal{D}_2 \cdot \mathbf{m} &= \varphi_2 \cdot \mathbf{m} \end{aligned}$$

avec $\varphi_1, \varphi_2 \in R$. On doit avoir $\mathcal{D}_2(\varphi_1) = \mathcal{D}_1(\varphi_2)$. Quitte à tensoriser M_R par $\mathcal{E}^{\alpha(x_1) \cdot \beta(x_2)}$, avec $\alpha \in \mathbf{C}[[x_1]][x_1^{-1}]$ et $\beta \in \mathbf{C}[[x_2]][x_2^{-1}]$ convenablement choisis, on peut supposer que $\varphi_1(x_1, 0) \equiv 0$ et $\varphi_2(0, x_2) \equiv 0$. Dans ces conditions $\varphi_1, \mathcal{D}_2(\varphi_1) = \mathcal{D}_1(\varphi_2)$ et φ_2 ont même polygone de Newton. Après tensorisation par $\mathcal{E}^{\gamma(x_1, x_2)}$, avec $\gamma \in R$ convenablement choisi de support ce polygone, on diminue la distance de ce polygone au quadrant \mathbf{N}^2 . Ainsi, par récurrence, on peut se ramener au cas où φ_1 et φ_2 sont dans $\mathbf{C}[[x_1, x_2]]$ et conclure (par un argument analogue à celui utilisé dans la preuve du cas 2 de la proposition 2.1.1). Les autres cas de la proposition se traitent de même. \square

On a aussi une caractérisation simple de la régularité en rang 1 :

Lemme 2.2.2. — *Soit M une R -connexion de rang 1. Alors M est régulière si et seulement si dans toute base \mathbf{m} de M , on peut écrire $\mathcal{D}_1 \mathbf{m} = \varphi_1 \mathbf{m}$ et $\partial_{x_2} \mathbf{m} = \varphi_2 \mathbf{m}$ (resp. $\mathcal{D}_2 \mathbf{m} = \varphi_2 \mathbf{m}$) avec $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{C}[[x_1, x_2]]$. \square*

2.3. Décomposition suivant les valeurs propres. — Le théorème de réduction des connexions méromorphes en dimension 1 repose sur la possibilité de décomposer en somme directe non triviale une connexion méromorphe pour laquelle la matrice (dans une base convenable) a une partie principale avec deux valeurs propres distinctes. Nous allons adapter l'argument (sous certaines conditions) en dimension 2.

Soit M une $\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}]$ -connexion avec $f = x_1$ ou $f = x_1 x_2$. Nous supposons ici qu'il existe une base \mathbf{m} de M dans laquelle la matrice A de $\mathcal{D}_1 \stackrel{\text{déf}}{=} x_1 \partial_{x_1}$ s'écrit

$$A = x^{-r} \cdot \sum_{m \in \mathbf{N}^2} A_m x^m$$

où A_0 est une matrice (constante) non nulle. Nous avons posé $r = (r_1, r_2)$ et $x^{-r} = x_1^{-r_1} x_2^{-r_2}$. Lorsque $f = x_1$ nous supposons que $r_1 > 0$ et $r_2 = 0$ et, lorsque $f = x_1 x_2$, nous supposons que $r_1, r_2 \geq 0$ non tous deux nuls. Soit Λ l'ensemble des valeurs propres de A_0 .

Proposition 2.3.1. — *Sous ces conditions, il existe une décomposition de M en une somme directe $\oplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ de $\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}]$ -connexions M_λ telle que, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, il existe une base \mathbf{m}_λ de M_λ pour laquelle la matrice de \mathcal{D}_1 a la même forme que ci-dessus et sa partie principale a pour seule valeur propre λ .*

Remarque. — L'argument ci-dessous sur la stabilité par ∂_{x_2} m'a été fourni par B. Malgrange et simplifie un argument initial qui donnait un résultat moins précis.

Démonstration. — Nous allons reprendre un argument de [61] (cf. aussi [4, § 6.2 lemme 1]). Soit $P_n = (\text{Id} + x^n T_n)$ avec $n = (n_1, n_2) \in \mathbf{N}^2 - \{0\}$ et T_n une matrice

constante de taille d égal au rang de M . Considérons l'effet du changement de base de matrice P_n sur A . On a

$$A' = P_n A P_n^{-1} + \mathcal{D}_1(P_n) P_n^{-1}$$

ce qui s'écrit

$$x^r(A' - A) = \sum_{m \in \mathbf{N}^2} \sum_{k \geq 0} (-1)^k x^{m+(k+1)n} [T_n, A_m] T_n^k + n_1 \sum_{k \geq 0} (-1)^k x^{r+(k+1)n} T_n^k$$

Les coefficients A'_m ne diffèrent de A_m que pour $m \geq n$ (au sens de l'ordre partiel naturel de \mathbf{N}^2) et on a

$$A'_n = A_n + [T_n, A_0].$$

Considérons sur \mathbf{N}^2 un ordre total \preceq tel que $m \leq n \Rightarrow m \preceq n$. Il sera commode de supposer aussi que pour tout n , l'ensemble des $m \preceq n$ est fini. On peut par exemple utiliser l'ordre suivant :

$$n \prec m \iff n_1 + n_2 < m_1 + m_2 \quad \text{ou} \quad n_1 + n_2 = m_1 + m_2 \text{ et } n_1 < m_1.$$

On peut donc écrire

$$A' = x^{-r} \sum_{m \in \mathbf{N}^2} A'_m x^m$$

avec A'_m défini ci-dessus et $A'_m = A_m$ si $m \prec n$.

Supposons que pour tout $m \prec n$ on ait trouvé T_m tel que, après le changement de base de matrice $P_{\prec n} = \prod_{0 \prec m \prec n} P_m$ la matrice A' de \mathcal{D}_1 soit telle que, pour tout $m \prec n$, la matrice A'_m préserve la décomposition spectrale de $A'_0 = A_0$. On choisit alors T_n pour qu'il en soit de même pour la matrice $A''_n \stackrel{\text{déf}}{=} A'_n + [T_n, A_0]$: on utilise le fait que l'espace $M_d(\mathbf{C})$ des matrices de taille d sur \mathbf{C} admet une décomposition en somme directe $M_d(\mathbf{C}) = M_d(\mathbf{C})_S \oplus M_d(\mathbf{C})^S$, où S est la partie semi-simple de A_0 , $M_d(\mathbf{C})_S$ est l'espace des matrices préservant la décomposition spectrale et $M_d(\mathbf{C})^S$ est l'image de $\text{ad } S$; de plus, $\text{ad } A_0$ préserve cette décomposition et est bijective sur $M_d(\mathbf{C})^S$ (voir par exemple [4, preuve du lemme 1, §6.2]). On peut donc écrire la décomposition de A'_n : $A'_n = A''_n + \text{ad } S(T'_n)$ et il existe T_n avec $\text{ad } S(T'_n) = \text{ad } A_0(T_n)$.

Finalement, après le changement de base formel de matrice $\prod_{m \succ 0} P_m$ (produit pris dans l'ordre \prec), on obtient une base $\mathbf{m}' = (\mathbf{m}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ et une décomposition $M = \oplus M_\lambda$ en $\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}]$ -modules libres stables par \mathcal{D}_1 , où la matrice de \mathcal{D}_1 a la forme voulue.

Il reste à voir que cette décomposition est stable par ∂_{x_2} . Pour cela, notons $B = \sum_{n \geq n_0} B_n x^n$ la matrice de ∂_{x_2} dans la base \mathbf{m}' . Il s'agit de voir que chaque B_n préserve la décomposition spectrale de A_0 . Nous allons le montrer par récurrence sur

n (pour l'ordre \prec). Remarquons que cette propriété est satisfaite par B_n si elle l'est par $\text{ad } A_0(B_n)$ d'après ce qu'on a vu plus haut. Écrivons alors la relation d'intégrabilité

$$\mathcal{D}_1(B) - \partial_{x_2}(A) = [A, B].$$

Pour tout $p \geq n_0$ on trouve, en identifiant les coefficients de x^{p-r} :

$$(p_1 - r_1)B_{p-r} - (p_2 - r_2 + 1)A_{p+(0,1)} = \sum_{m+n=p} [A_m, B_n].$$

On remarque que, vu les hypothèses faites sur r , on a $p-r \prec p$ et ainsi, par récurrence, $[A_0, B_p]$ préserve la décomposition spectrale de A_0 , d'où le résultat. \square

Remarque. — Cette proposition permet de montrer que, dans la définition de bonne décomposition formelle pour une $\hat{\mathcal{O}}[f^{-1}]$ -connexion, on aurait pu imposer seulement le fait que M soit *extension* de connexions élémentaires $\mathcal{E}^{\varphi_\alpha} \otimes \mathcal{R}^\alpha$, les φ_α satisfaisant les propriétés données dans la définition. En effet, une telle extension se scinde si les φ_α sont distinctes mod. $\hat{\mathcal{O}}$.

2.4. Un cas particulier. — Nous restons dans la situation du §2.3 et nous supposons de plus que le lieu des pôles $\mathcal{P}(M)$ de la connexion M est $\{x_1 = 0\}$ et que A_0 est une matrice *régulière*, i.e. que son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique.

Théorème 2.4.1 (Malgrange [47]). — *Dans ces conditions, après une éventuelle ramification autour du diviseur $\mathcal{P}(M)$, la connexion M se décompose en somme directe de connexions élémentaires formelles.* \square

Remarques

- (1) Il n'est pas nécessaire ici d'éclater pour obtenir la conclusion de 1.3.1.
- (2) La démonstration de Malgrange est donnée dans le cas analytique, mais le cas formel est tout à fait analogue.
- (3) Cet énoncé se généralise en toute dimension.

Corollaire 2.4.2. — *La conclusion de 1.3.1 est vraie si le rang de M est ≤ 2 .*

Démonstration. — On peut supposer d'abord que le lieu des pôles est un diviseur à croisements normaux, d'après le corollaire 1.3.4. Ensuite, en appliquant la proposition 4.3.1 démontrée plus loin, on se ramène au cas où aux centres M -permis le diviseur des pôles est lisse. Puisqu'en rang 2 une matrice est régulière, on peut appliquer le théorème de Malgrange ci-dessus. \square

De la même manière on en déduit

Corollaire 2.4.3. — *Si le lieu des pôles $\mathcal{P}(M)$ de la connexion M est $\{x_1 x_2 = 0\}$ et si dans une base convenable la matrice Θ de la connexion a la forme*

$$\Theta = x^{-r} \left[A(x_1, x_2) \frac{dx_1}{x_1} + B(x_1, x_2) \frac{dx_2}{x_2} \right]$$

où $r = (r_1, r_2) \in \mathbf{N}^2 - \{0\}$, A et B sont sans pôle et pour tous $n_1, n_2 \in \mathbf{N} - \{0\}$ la matrice $n_1A(0, 0) + n_2B(0, 0)$ est régulière et non nulle, alors la conclusion de 1.3.1 est vraie. \square

2.5. Singularités inexistantes. — Nous allons expliciter dans ce paragraphe les résultats de [5] (dans le cadre que nous nous sommes fixés). Il se trouve que la notion « well-behaved » de *loc. cit.* p. 87 est un peu trop contraignante (elle est plus forte que la condition (B) introduite au § I.2.1.4). Aussi nous allons reformuler certains résultats de *loc. cit.* en termes de la condition (B). Les démonstrations sont obtenues par une petite modification de la récurrence faite dans *loc. cit.*

Soit $A = \mathcal{O}(\tilde{U})[[x_1]]$ (voir § I.1.1.1) k le corps des fractions de $\mathcal{O}(\tilde{U})$ et $K = k[[x_1]][x_1^{-1}]$ celui de A .

Théorème 2.5.1 (Babbitt-Varadarajan [5, § 7]). — Soit M une $A[x_1^{-1}]$ -connexion libre telle que la connexion M_K admette une bonne décomposition. Supposons que tous les facteurs φ_α qui interviennent dans cette décomposition sont dans le quotient $A[x_1^{-1}]/A = \mathcal{O}(\tilde{U})[[x_1^{-1}]]/\mathcal{O}(\tilde{U})$ et satisfont la condition (B) sur \tilde{U} . Alors M admet une bonne décomposition sur un voisinage (de Zariski) de tout point de \tilde{U} .

On a une version locale de ce théorème. Soit X une surface analytique complexe, $x^\circ \in X$ et x_1, x_2 des coordonnées locales en x° . Soit $D_1 = \{x_1 = 0\}$.

Théorème 2.5.2 ([5, § 10]). — Soit $\mathcal{M}_{\widehat{X|D_1}}$ une $\mathcal{O}_{\widehat{X|D_1}, x^\circ}[*D_1]$ -connexion. Supposons que tous les ψ_β du modèle élémentaire donné par I.2.3.8 sont définis au voisinage de x° (i.e. sont dans $\mathcal{O}_{X, x^\circ}[*D_1]/\mathcal{O}_{X, x^\circ}$) et satisfont la condition (B). Alors $\mathcal{M}_{\widehat{X|D_1}}$ admet une bonne décomposition formelle le long de D_1 au voisinage de x° .

Corollaire 2.5.3. — Soit $D = \{x_1 x_2 = 0\}$ et \mathcal{M} une $\mathcal{O}_X[*D]$ -connexion telle que $\mathcal{M}[*D]$ admette une bonne structure formelle en $(D, 0)$ (i.e. sur $\mathbf{C}[[x_1, x_2]][*D]$). Alors \mathcal{M} admet une bonne structure formelle le long de D_1 au voisinage de 0.

Démonstration. — Commençons par supposer que $\mathcal{M}[*D]$ admet une bonne décomposition formelle en 0. Alors le modèle élémentaire est de la forme $\mathcal{M}^{\text{él}} = \mathcal{M}_1[*D]$, où \mathcal{M}_1 est un modèle élémentaire à pôles le long de D_1 , autrement dit les φ_α n'ont de pôle que le long de D_1 , et les \mathcal{R}'_α sont de la forme $\mathcal{R}^\alpha[*D]$ avec \mathcal{R}^α à pôles le long de D_1 . En particulier les φ_α satisfont la condition (B) au voisinage de l'origine. De plus, d'après le corollaire I.2.4.3, $\mathcal{M}^{\text{él}}$ est un bon modèle élémentaire au voisinage de 0. Ainsi, on peut appliquer le théorème 2.5.2 ci-dessus pour obtenir la décomposition le long de D_1 .

Pour terminer, il suffit de montrer que si \mathcal{M} admet une bonne décomposition le long de D_1 après ramification ρ donnée par $x_2 = \rho(x'_2) = x'^{\nu}_2$, alors \mathcal{M} admet une bonne décomposition le long de D_1 . Soit \mathcal{M}' l'image inverse de \mathcal{M} par cette ramification. Alors le germe \mathcal{M}'_0 de \mathcal{M}' en 0 est muni d'une action du groupe $\mathbf{Z}/\nu\mathbf{Z}$, qui échange

les facteurs exponentiels du modèle élémentaire. Si un facteur exponentiel n'est pas invariant par cette action, on voit que la condition (B) ne peut être satisfaite. Par suite les facteurs exponentiels sont de la forme $\varphi_\alpha(x_2) \circ \rho$ et les φ_α satisfont la condition (B). Les parties régulières \mathcal{R}'_α sont alors aussi invariantes par $\mathbf{Z}/\nu\mathbf{Z}$ et par suite le modèle élémentaire de \mathcal{M}' est image inverse par ρ d'un bon modèle élémentaire $\mathcal{M}^{\text{él}}$.

Il reste à voir que l'isomorphisme $\widehat{\mathcal{M}'} \simeq \widehat{\mathcal{M}'^{\text{él}}}$ provient d'un isomorphisme $\widehat{\mathcal{M}} \simeq \widehat{\mathcal{M}^{\text{él}}}$. Si on se donne des bases locales de \mathcal{M} et $\mathcal{M}^{\text{él}}$, et si Θ et $\Theta^{\text{él}}$ sont les matrices de connexion, on dispose donc d'une matrice $P'(x_1, x'_2) \in \text{GL}_d(\mathcal{O}_{\widehat{X|D_1, 0}})$ telle que

$$dP' = \rho^* \Theta \cdot P' - P' \cdot \rho^* \Theta^{\text{él}}.$$

La matrice $\text{tr } P'$ (trace de P') donne l'isomorphisme voulu. \square

Démonstration du théorème 2.5.1. — C'est une petite modification de celle de [5, th. 1, p. 93]. Elle se fait par récurrence sur le couple (d, r_1) ordonné lexicographiquement, où d est rang de la connexion et r_1 l'ordre maximum du pôle le long de $x_1 = 0$ des facteurs exponentiels φ_α . On montre d'abord ([5, th. 2, p. 88]) qu'il existe une base de M dans laquelle la matrice de $x_1 \partial_{x_1}$ n'a pas de pôle (en x_1) ou bien n'est pas nilpotente. Dans le premier cas, on peut appliquer la proposition I.2.3.9. Dans le second cas, soit r_1 l'ordre du pôle et A_{r_1} le coefficient de $x_1^{-r_1}$. Les valeurs propres de A_{r_1} sont les $\varphi_\alpha^{(r_1)}$ (coefficient de $x_1^{-r_1}$ dans φ_α , si les φ_α sont les facteurs exponentiels). Alors, par hypothèses, si $\alpha \neq \beta$, on a $\varphi_\alpha^{(r_1)} \equiv \varphi_\beta^{(r_1)}$ ou bien $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ est une unité locale, de sorte que A_{r_1} est « well-behaved » au sens de [5, p. 76].

S'il existe α, β tels que $\varphi_\alpha^{(r_1)} \neq \varphi_\beta^{(r_1)}$, on peut appliquer le même argument que dans la proposition 2.3.1, en développant seulement par rapport à x_1 et en utilisant [5, cor. A.1.2 p. 129] (voir *loc. cit.*, cor. 6.7.3, p. 81) pour obtenir une décomposition de M .

Sinon, si $r_1 > 0$, on tensorise par $\mathcal{E}^{-\varphi_\alpha}$ et r_1 diminue strictement. Si $r_1 = 0$, on se trouve dans le cas génériquement régulier déjà traité. \square

Démonstration du théorème 2.5.2. — Elle se fait en deux temps, en suivant la démarche de [5]. Soit $k = \mathbf{C}\{x_2\}[x_2^{-1}]$ et considérons la $k[[x_1]][x_1^{-1}]$ -connexion obtenue à partir de M . Elle admet aussi une décomposition, obtenue par tensorisation avec celle de I.2.3.8. L'hypothèse sur les ψ_β permet de voir, comme dans la démonstration ci-dessus, que \mathcal{M} admet une décomposition analogue après tensorisation par $\mathbf{C}\{x_2\}[[x_1]][x_1^{-1}]$.

Il s'agit ensuite de contrôler le rayon de convergence en x_2 des changements de base effectués pour passer de la connexion formelle à son modèle élémentaire. On peut alors adapter à la condition (B) la démonstration de [5, lem. 10.2.1, p. 117] faite avec l'hypothèse « well-behaved ». \square

3. Réduction logarithmique de 1-formes différentielles méromorphes

3.1. Formes méromorphes réduites. — Soit Θ une 1-forme différentielle méromorphe formelle à valeurs dans un espace vectoriel V de dimension finie (dans les sections suivantes, on prendra $V = M_d(\mathbf{C})$) : si on se donne une base (v_i) de V , on peut écrire $\Theta = \sum \omega_i v_i$ où les ω_i sont des 1-formes à coefficients dans $\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}]$ et (f) est le *diviseur réduit* des pôles de Θ . Nous le noterons aussi $\mathcal{P}(\Theta)$.

Remarque. — Les résultats de cette section s'appliquent aussi bien aux germes méromorphes convergents et les démonstrations sont identiques. Seul le cas formel nous sera utile.

3.1.1. Nous dirons que Θ est *faiblement réduite* (resp. *fortement réduite*) si $\mathcal{P}(\Theta) = \emptyset$ ou s'il existe des coordonnées (x_1, x_2) dans lesquelles $f = x_1$ ou $f = x_1 x_2$ (i.e. f définit un diviseur à croisements normaux) et si l'une des propriétés suivantes est satisfaite :

- (1) Θ est au plus à pôles logarithmiques ;
- (2) Si $\mathcal{P}(\Theta) = \{x_1 = 0\}$, il existe $s_1 > 0$ et $A, B \in \widehat{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbf{C}} V$ avec

$$\Theta = x_1^{-s_1} \left[A \frac{dx_1}{x_1} + B dx_2 \right] \text{ et (non résonance) } A_0 \stackrel{\text{déf}}{=} A(0, 0) \neq 0;$$

- (3) si $\mathcal{P}(\Theta) = \{x_1 x_2 = 0\}$, il existe $s_1, s_2 \geq 0$, non tous deux nuls, et $A, B \in \widehat{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbf{C}} V$ avec

$$\Theta = x_1^{-s_1} x_2^{-s_2} \left[A \frac{dx_1}{x_1} + B \frac{dx_2}{x_2} \right]$$

et les conditions de *non résonance*

- pour tous $n_1, n_2 \in \mathbf{N} - \{0\}$, on a $n_1 A_0 + n_2 B_0 \neq 0$,
- (pour le cas fortement réduit uniquement) $s_1 A_0 + s_2 B_0 \neq 0$.

Remarque. — Ces conditions ne dépendent pas du choix des coordonnées, tant que celles-ci sont adaptées au diviseur $\mathcal{P}(\Theta)$.

Après un éclatement e , on n'a pas nécessairement égalité dans l'inclusion (évidente) $\mathcal{P}(e^* \Theta) \subset e^{-1}(\mathcal{P}(\Theta))$. Aussi il sera utile de ne pas imposer que le diviseur de référence soit celui des pôles de la forme méromorphe.

3.1.2. Donnons-nous donc un diviseur réduit \mathcal{P} à croisements normaux (formel) sur l'anneau $\mathbf{C}[[x_1, x_2]]$. Nous supposons que les coordonnées sont choisies de sorte que $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ ou $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$. Donnons-nous aussi un diviseur effectif D à support dans \mathcal{P} : nous dirons alors que le couple (\mathcal{P}, D) est *admissible*. Nous noterons $D = (x^r)$ avec $r = (r_1, r_2) \in \mathbf{N}^2 - \{0\}$ et nous avons $r_2 = 0$ dans le premier cas. Si e est l'éclatement de l'origine, $e^{-1}\mathcal{P}$ désigne le diviseur réduit image inverse de \mathcal{P} et e^*D le diviseur image inverse de D par e . Le couple $(e^{-1}\mathcal{P}, e^*D)$ est admissible si (\mathcal{P}, D) l'est et la multiplicité de e^*D le long de $e^{-1}(0)$ est $r_1 + r_2$.

3.1.3. Soit $\Omega \in V \otimes \Omega_{\mathcal{O}}^1(\log \mathcal{P})$ une 1-forme logarithmique le long de \mathcal{P} à coefficients dans $V \otimes \widehat{\mathcal{O}}$. Si l'on se donne de plus un couple admissible (\mathcal{P}, D) , on peut associer une 1-forme méromorphe formelle (à valeurs dans V)

$$\Theta = \Omega(-D) \stackrel{\text{déf}}{=} x^{-r} \Omega$$

et l'on a $\mathcal{P}(\Theta) \subset \mathcal{P}$. Inversement, à une forme méromorphe Θ dont le diviseur réduit des pôles $\mathcal{P}(\Theta)$ est à croisements normaux on associe un unique diviseur $D(\Theta)$ à support dans $\mathcal{P} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{P}(\Theta)$ et une 1-forme $\Omega \in \Omega_{\widehat{\mathcal{O}}}^1(\log \mathcal{P})$ comme suit :

- Si $\mathcal{P}(\Theta) = \{x_1 = 0\}$, il existe $s_1 \geq 0$ et $A, B \in \widehat{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbb{C}} V$ uniques avec

$$\Theta = x_1^{-s_1} \left[A \frac{dx_1}{x_1} + B dx_2 \right]$$

et A et B non simultanément divisibles par x_1 ; on pose alors $D(\Theta) = (x_1^{s_1})$ et $\Omega = x_1^{s_1} \Theta$.

- Si $\mathcal{P}(\Theta) = \{x_1 x_2 = 0\}$, il existe $s_1, s_2 \geq 0$ et $A, B \in \widehat{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbb{C}} V$ uniques avec

$$\Theta = x_1^{-s_1} x_2^{-s_2} \left[A \frac{dx_1}{x_1} + B dx_2 \right]$$

et A et B non simultanément divisibles par x_1 ou x_2 ; on pose alors $D(\Theta) = (x_1^{s_1} x_2^{s_2})$ et $\Omega = x_1^{s_1} x_2^{s_2} \Theta$.

3.1.4. Nous dirons que Ω est *faiblement* (resp. *fortement*) réduite relativement au couple (admissible) (\mathcal{P}, D) si l'une des propriétés suivantes est satisfaite, en posant $D = (x^r)$:

- (1') $x^{-r} \Omega$ est au plus à pôles logarithmiques le long de \mathcal{P} ;
- (2') si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, il existe $o_1(\Omega) = o_1(\Omega, \mathcal{P}, D) \geq 0$ et $A, B \in \widehat{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbb{C}} V$ avec

$$\Omega = x_1^{o_1(\Omega)} \left[A \frac{dx_1}{x_1} + B dx_2 \right] \text{ et (non résonance) } A_0 \stackrel{\text{déf}}{=} A(0, 0) \neq 0;$$

- (3') si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$, il existe $o_1(\Omega) = o_1(\Omega, \mathcal{P}, D)$, $o_2(\Omega) = o_2(\Omega, \mathcal{P}, D)$ avec $0 \leq o_1(\Omega) \leq r_1$, $0 \leq o_2(\Omega) \leq r_2$ et $A, B \in \widehat{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbb{C}} V$ avec

$$\Omega = x_1^{o_1(\Omega)} x_2^{o_2(\Omega)} \left[A \frac{dx_1}{x_1} + B \frac{dx_2}{x_2} \right]$$

satisfaisant les conditions de *non résonance*

- pour tous $n_1, n_2 \in \mathbb{N} - \{0\}$, on a $n_1 A_0 + n_2 B_0 \neq 0$,
- (pour le cas fortement réduit uniquement) $r_1 A_0 + r_2 B_0 \neq 0$.

Les conditions ne dépendent pas du choix de coordonnées tant que celles-ci sont adaptées à \mathcal{P} . D'autre part nous omettrons la dépendance par rapport à (\mathcal{P}, D) lorsque ce couple est fixé. Dans le premier cas, il sera utile de poser $o_2(\Omega) = 0$.

Définition 3.1.5. — Lorsque Ω est (faiblement) réduite et n'est pas à pôles au plus logarithmiques, la *partie principale* de Ω est la forme

$$A_0 \frac{dx_1}{x_1} \quad \text{si } \mathcal{P} = \{x_1 = 0\} \quad \text{et} \quad A_0 \frac{dx_1}{x_1} + B_0 \frac{dx_2}{x_2} \quad \text{si } \mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}.$$

On vérifie facilement que si e est l'éclatement de l'origine et si Ω est faiblement (*resp.* fortement) réduite, il en est de même de $e^*\Omega$ (relativement à $(e^{-1}\mathcal{P}, e^*D)$, nous le sous-entendrons toujours) en tout point x^o de $e^{-1}(0)$ et que la partie principale de cette dernière est l'image inverse par e de celle de Ω .

Si Θ est une forme méromorphe faiblement (*resp.* fortement) réduite au sens du § 3.1.1, on pose $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Theta)$ et $D = D(\Theta)$; alors $\Omega \stackrel{\text{déf}}{=} \Theta(D)$ est faiblement (*resp.* fortement) réduite *rel.* (\mathcal{P}, D) .

Si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ et Ω est faiblement réduite, alors Ω est aussi fortement réduite (nous dirons simplement que Ω est réduite). De plus, Ω est réduite *rel.* (\mathcal{P}, D) si et seulement si $\Theta = \Omega(-D)$ est réduite au sens du § 3.1.1. On a alors $D(\Theta) = D$.

Si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$ il se peut que Ω soit faiblement réduite *rel.* (\mathcal{P}, D) sans être fortement réduite *rel.* (\mathcal{P}, D) ou sans que Θ soit faiblement ou fortement réduite : par exemple pour le premier cas on prend $r_1 > 0$, $r_2 = 0$ et $\Omega = x_1^{o_1} x_2^{o_2} B \frac{dx_2}{x_2}$ avec $B_0 \neq 0$ et pour le second on prend $r_1 = 1$, $r_2 = 0$ et $\Omega = dx_2 = x_2 \left[\frac{dx_2}{x_2} \right]$ ($o_2 = 1$). Néanmoins on a

Lemme 3.1.6. — Soit $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$, (\mathcal{P}, D) un couple admissible et Ω faiblement réduite *rel.* (\mathcal{P}, D) . Il existe une suite d'éclatements ponctuels $\pi : \widehat{X, E} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}^2, 0}$ telle que

- (1) $\pi^*\Omega$ soit fortement réduite *rel.* $\pi^*(\mathcal{P}, D)$ en tout $x^o \in \pi^{-1}(0)$;
- (2) $\pi^*\Theta \stackrel{\text{déf}}{=} \pi^*(x^{-r}\Omega)$ soit fortement réduite en tout $x^o \in \pi^{-1}(0)$.

Démonstration. — Le problème se pose en un point de croisement de \mathcal{P} uniquement. On utilise une suite d'éclatements toriques pour faire en sorte qu'en chaque point de croisement du diviseur image inverse, les nombres $r_1 - o_1$ et $r_2 - o_2$ soient de même signe. Alors (l'image inverse de) Θ est faiblement réduite en ces points de croisement. Un autre éclatement torique permet d'éliminer la résonance éventuelle, indésirable dans le cas fortement réduit. \square

Théorème 3.1.7. — Soit Θ une 1-forme méromorphe à valeurs dans V . Pour toute suite infinie $(\varpi_1, \dots, \varpi_n, \dots)$ d'éclatements locaux (formels) au-dessus de l'origine, avec $\varpi_n : (X_n, x^{(n)}) \rightarrow (X_{n-1}, x^{(n-1)})$ et $\pi_n = \varpi_n \circ \dots \circ \varpi_1$, il existe n_0 tel que $\pi_{n_0}^*\Theta$ soit fortement réduite en $x^{(n_0)}$.

Nous utiliserons ce résultat sous la forme suivante (en reprenant la notion de centre M -permis du § 1.1) :

Corollaire 3.1.8. — *Soit Θ une 1-forme méromorphe à valeurs dans V et soit M une connexion méromorphe. Il existe une suite finie d'éclatements $\pi : \widehat{X, E} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}^2, 0}$ à centres M -permis telle que $\pi^*\Theta$ soit fortement réduite en tout centre M -permis sur E . □*

Remarques

- (1) Supposons que Θ soit définie sur un anneau $\mathcal{O}(U) \llbracket x_1 \rrbracket [x_1^{-1}]$. On écrit Θ sous forme logarithmique

$$\Theta = x_1^{-r_1} \left[A \frac{dx_1}{x_1} + B dx_2 \right]$$

avec $A, B \in \mathcal{O}(U) \llbracket x_1 \rrbracket \otimes V$. Il n'est pas vrai que Θ soit réduite en tout point d'un ouvert de Zariski de U (prendre par exemple $\Theta = x_1^{-1} dx_2$). C'est pourquoi on ne peut imposer la réduction qu'en un nombre fini de points du diviseur exceptionnel. Il sera commode plus tard de choisir justement les centres permis relatifs à la connexion définie par Θ .

- (2) On peut démontrer ce théorème en partant du théorème de Seidenberg concernant la réduction des 1-formes holomorphes ou formelles (sans pôle) (cf. [59], voir aussi [49]). Cependant, nous allons en donner une démonstration directe, inspirée en partie de celle que donne F. Cano pour le théorème de Seidenberg ([16]). En fait, la démonstration que nous donnons est plus compliquée que nécessaire, le recours aux invariants apparents du § 3.2.5 étant inutile pour démontrer uniquement le théorème 3.1.7 (on peut remplacer ${}^a\tilde{m}$ par \tilde{m} dans la proposition 3.3.1). Néanmoins, cette démonstration aura l'avantage de pouvoir subir sans trop de dommages des perturbations dues aux changements de base quand nous traiterons au § 5 du cas nilpotent.
- (3) On peut supposer, en utilisant la proposition 1.3.3, que $\mathcal{P}(\Theta)$ est à croisements normaux. Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Theta)$ (supposé non vide), $D = D(\Theta) = (x^r)$ et $\Omega = \Theta(D) = x^r \Theta$. Il suffit alors de montrer l'existence de π telle que $\pi^*\Omega$ soit faiblement réduite (rel. $(\pi^{-1}\mathcal{P}, \pi^*D)$) en tout centre M -permis, d'après le lemme 3.1.6.

Lemme 3.1.9. — *Soit (\mathcal{P}, D) un couple admissible et $\Omega \in V \otimes \Omega_{\mathcal{O}}^1(\log \mathcal{P})$.*

- (1) *Considérons une suite infinie d'éclatements*

$$\dots \xrightarrow{\varpi_{n+1}} \widehat{X_n, E_n} \xrightarrow{\varpi_n} \dots \xrightarrow{\varpi_1} \widehat{\mathbb{C}^2, 0}$$

où ϖ_n est l'éclatement de $x^{(n-1)} \in E_{n-1}$ et $E_n = \varpi_n^{-1}(E_{n-1})$, et supposons que pour tout n , $x^{(n)}$ est un point lisse de $\pi_n^{-1}\mathcal{P}$ (où π_n est la composée des ϖ_i pour $i \leq n$). Il existe alors n_0 tel que $\pi_{n_0}^*\Omega$ soit réduite en $x^{(n_0)}$.

- (2) Supposons que $\mathcal{P} = \{x_1x_2 = 0\}$. Il existe alors une suite finie d'éclatements toriques π relativement à \mathcal{P} telle que $\pi^*\Omega$ soit réduite en tout point de croisement du diviseur $\pi^{-1}\mathcal{P}$.
- (3) Si $\mathcal{P} = \{x_1x_2 = 0\}$, pour toute suite infinie (ϖ_n) d'éclatements toriques relativement à \mathcal{P} , il existe n_0 tel que $\pi_{n_0}^*\Omega$ soit réduite en $x^{(n_0)}$.

Démonstration. — Pour le premier point, on vérifie que, si $\pi_n^*\Omega$ n'est pas réduite en $x^{(n)}$, l'ordre du zéro de $\pi_{n+1}^*\Omega$ en $x^{(n+1)}$ est strictement supérieur à celui de $\pi_n^*\Omega$ en $x^{(n)}$ alors que celui de l'image inverse de D reste fixe.

Montrons que (2) \Rightarrow (3). Une suite d'éclatements toriques correspond à une subdivision du premier quadrant de \mathbf{R}^2 (voir le § 1.2) : si la subdivision est définie à l'étape $n - 1$, le point $x^{(n-1)}$ correspond au choix d'un cône de cette subdivision et l'éclatement de ce point à la subdivision de ce cône obtenue en ajoutant la bissectrice comme nouvelle arête. Si n est assez grand, le cône correspondant à $x^{(n)}$ est un cône de la subdivision donnée par le point (2). Alors $\pi_n^*\Omega$ est réduite en $x^{(n)}$ et l'on peut appliquer le lemme 3.1.6.

Montrons enfin le point (2). En appliquant les lemmes 1.2.2 et 1.2.4 (avec tous les poids égaux à 1) aux éléments A_{ij} du coefficient A de dx_1/x_1 et B_{ij} du coefficient B de dx_2/x_2 , on peut trouver π telle que dans chaque carte torique (x'_1, x'_2) , on ait

$$\begin{aligned} A \circ \pi &= x'^{s'} [A_0 + A_1(x'_1, x'_2)] \\ B \circ \pi &= x'^{s'} [B_0 + B_1(x'_1, x'_2)] \end{aligned}$$

avec $s' \in \mathbf{N}^2$, A_0 et B_0 non toutes deux nulles et $A_1(0,0) = B_1(0,0) = 0$. Il existe alors au plus un couple (n_1, n_2) d'entiers > 0 premiers entre eux tel que l'on ait $n_1A_0 + n_2B_0 = 0$. Si un tel couple existe, on subdivise l'éventail en introduisant l'arête portant le vecteur (n_1, n_2) (pour chaque carte torique) puis on subdivise encore si besoin pour obtenir un éventail régulier. Montrons que cet éventail convient. Nous sommes maintenant ramenés au cas où, dans un carte comme ci-dessus, il n'y a plus de résonance entre A_0 et B_0 . Les coefficients de $\pi^*\Omega$ s'expriment dans la carte considérée comme combinaison à coefficients dans \mathbf{N} de $A \circ \pi$ et $B \circ \pi$ (cf. § 1.2.5). On en déduit le résultat. \square

3.2. Démonstration du théorème 3.1.7 (préliminaires)

3.2.1. Polygones. — Dans la suite, « polygone » désigne l'enveloppe convexe d'un ensemble de quadrants $m + \mathbf{N}^2$ avec $m \in \mathbf{N}^2$. On note N un tel polygone. Nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} o_1(N) &= \text{abscisse du côté vertical de } N \\ o_2(N) &= \text{ordonnée du côté horizontal de } N \\ m(N) &= \inf_{n \in N} n_1 + n_2 \quad (\text{multiplicité}) \\ \tilde{m}(N) &= m(N) - (o_1(N) + o_2(N)) \quad (\text{multiplicité réduite}) \end{aligned}$$

Considérons sur \mathbf{N}^2 l'ordre lexicographique $\text{lex}((n_1, n_2))$ est plus petit que (n'_1, n'_2) si $n_1 < n'_1$ ou $n_1 = n'_1$ et $n_2 < n'_2$. Nous pouvons définir alors l'entier $\tilde{b}(N)$: le sommet de N sur l'axe vertical, c'est-à-dire encore $\min_{\text{lex}} N$ est par définition le point de coordonnées

$$(o_1(N), o_2(N)) + (0, \tilde{b}(N)).$$

Nous considérons aussi le « bord compact » ∂N : c'est la réunion des arêtes compactes et des sommets du bord de N . Nous noterons aussi

- (1) $\partial_{\Delta} N$ l'arête fermée ou le sommet d'appui de la droite $n_1 + n_2 = m(N)$ et $h(N)$ la longueur horizontale (ou verticale) de $\partial_{\Delta} N$ (éventuellement $h(N) = 0$).
- (2) $\partial^0 N$ la réunion des arêtes fermées de ∂N qui sont de pente dans $] -1, 0[$ et du sommet sur le côté horizontal ;
- (3) $\partial^{\infty} N$ la réunion des arêtes de pente dans $] -\infty, -1[$ et du sommet sur l'axe vertical.

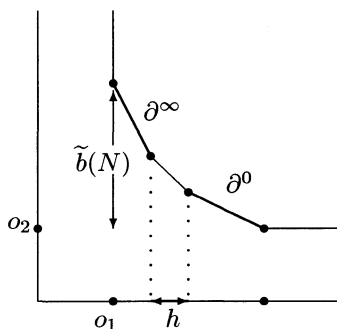


FIGURE 5. Exemple de polygone N

On a les inégalités

$$(3.2.2) \quad h(N) \leq \tilde{m}(N) \leq \tilde{b}(N).$$

Notons $L_0 : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}^2$ la forme linéaire $L_0(n_1, n_2) = (n_1 + n_2, n_2)$ et de même $L_{\infty}(n_1, n_2) = (n_1 + n_2, n_1)$.

Lemme 3.2.3. — On a $\tilde{m}(L_0(N) + \mathbf{N}^2) \leq \tilde{m}(N)$ et de même pour L_{∞} .

Démonstration. — On remarque d'abord que $L_0(N) + \mathbf{N}^2$ est égal à $L_0(\partial^0 N) + \mathbf{N}^2$. Posons $N^0 = \partial^0 N + \mathbf{N}^2$. On a $o_2(N^0) = o_2(N)$, $o_1(N^0) \geq o_1(N)$ et $m(N^0) = m(N)$, donc $\tilde{m}(N^0) \leq \tilde{m}(N)$, donc il suffit de montrer le résultat lorsque $N = N^0$. Dans ce cas, si on pose $n = (n_1, n_2) = \min_{\text{lex}} N$, on a $n_1 = o_1$ et

$$\tilde{m}(N) = (n_1 + n_2) - (o_1 + o_2) = n_2 - o_2 = \tilde{b}(N).$$

Comme on a de manière évidente $\tilde{b}(L_0(N) + \mathbf{N}^2) \leq \tilde{b}(N)$, on en déduit l'assertion. Le cas de L_{∞} se fait en changeant l'ordre lexicographique. \square

3.2.4. *Polygone de Newton.* — Soit (\mathcal{P}, D) un couple admissible et $\Omega \in V \otimes \Omega_{\mathcal{O}}^1(\log \mathcal{P})$. On note $D = (x^r)$ et on reprend les notations du §3.1.3.

Si l'on pose, pour $m \in \mathbf{N}^2$, $\Omega_m = A_m dx_1/x_1 + B_m dx_2$ (resp. $+B_m dx_2/x_2$) avec $A = \sum A_m x^m$ et $B = \sum B_m x^m$, on définit le *polygone de Newton* $N(\Omega)$ comme l'enveloppe convexe dans \mathbf{N}^2 des quadrants $m + \mathbf{N}^2$ pour lesquels $\Omega_m \neq 0$. Nous noterons alors $m(\Omega)$ au lieu de $m(N(\Omega))$, etc.

Lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, nous poserons cependant $o_2(\Omega) = 0$ et nous définissons \tilde{m} et \tilde{b} avec cette valeur de o_2 , de sorte que \tilde{b} est l'ordonnée du sommet $\min_{\text{lex}} N(\Omega)$.

Nous poserons de plus

$$m^+(\Omega) = \begin{cases} \min(m(A), m(B) + 1) & \text{si } \mathcal{P} = \{x_1 = 0\} \\ m(\Omega) & \text{si } \mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\} \end{cases}$$

$$\tilde{m}^+(\Omega) = \begin{cases} m^+(\Omega) - o_1(\Omega) & \text{si } \mathcal{P} = \{x_1 = 0\} \\ \tilde{m}(\Omega) & \text{si } \mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}. \end{cases}$$

Dans le cas $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, on a

$$m^+(\Omega) = m(\Omega) \iff m(A) \leq m(B) \\ \iff m(\Omega) = m(A)$$

$$m^+(\Omega) > m(\Omega) \iff m(A) \geq m(B) + 1 \\ \iff m(\Omega) = m(B) < m(A).$$

Supposons choisi un axe privilégié lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$. Nous ferons en sorte que ce soit l'axe $\{x_1 = 0\}$ pour simplifier les notations. On peut alors considérer aussi l'ordre lexicographique comme au §3.2.1 et les invariants qui lui sont attachés.

3.2.5. *Polygone de Newton apparent.* — Soit (\mathcal{P}, D) un couple admissible et $\Omega \in V \otimes \Omega_{\mathcal{O}}^1(\log \mathcal{P})$ comme ci-dessus avec $D = (x^r)$. Définissons $N'(\Omega)$ comme l'enveloppe convexe de $N(\Omega)$ et du quadrant $r + \mathbf{N}^2$. Nous allons maintenant définir les invariants «apparents».

Soit $\partial' N'(\Omega)$ la réunion des arêtes fermées et des sommets de $\partial N(\Omega)$ qui ne contiennent pas r . S'il est non vide, cet ensemble est formé d'une ou deux composantes connexes (toujours une composante lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$). Nous noterons ${}^a N(\Omega)$ la réunion disjointe des $C + \mathbf{N}^2$ où C parcourt l'ensemble des composantes connexes de $\partial' N'(\Omega)$. On a donc par définition

$$\partial {}^a N(\Omega) = \partial' N'(\Omega).$$

Supposons, lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$, que l'on ait choisi un axe privilégié, par exemple $\{x_1 = 0\}$. Nous pouvons considérer les sommets $\min_{\text{lex}} \partial' N'(\Omega)$ ainsi que $\max_{\text{lex}} \partial' N'(\Omega)$, comme au §3.2.1.

Définition 3.2.6

- (1) Si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, $\tilde{a}b(\Omega) = \tilde{b}(N'(\Omega))$ est l'ordonnée du point $\min_{\text{lex}} \partial' N'(\Omega)$ si $\partial' N'(\Omega) \neq \emptyset$ et $\tilde{a}b(\Omega) = 0$ sinon.
- (2) Si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$,
 - $\tilde{a}b(\Omega)$ est la distance verticale entre $\min_{\text{lex}} \partial' N'(\Omega)$ et $\max_{\text{lex}} \partial' N'(\Omega)$ si $\partial' N'(\Omega) \neq \emptyset$ et $\tilde{a}b(\Omega) = 0$ sinon ;
 - ${}^a h(\Omega)$ est la longueur (verticale ou horizontale) de l'arête de pente -1 de $\partial' N'(\Omega)$ si elle existe, ${}^a h(\Omega) = 0$ sinon ;
 - ${}^a \tilde{m}(\Omega) = \max_C \tilde{m}(C + \mathbf{N}^2)$, où C parcourt l'ensemble des composantes de $\partial' N'(\Omega)$ si $\partial' N'(\Omega) \neq \emptyset$, ${}^a \tilde{m}(\Omega) = 0$ sinon.

Nous utiliserons dans la suite l'invariant apparent

$${}^a I(\Omega) = \begin{cases} \tilde{a}b(\Omega) & \text{si } \mathcal{P} = \{x_1 = 0\} \\ {}^a \tilde{m}(\Omega) & \text{si } \mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\} \end{cases}$$

On définit

$$\partial^0 [{}^a N(\Omega)] = \partial^0 N'(\Omega) \cap \partial' N'(\Omega)$$

et $\partial^\infty [{}^a N(\Omega)]$ de même. Des exemples sont donnés dans les figures 6 et 7.

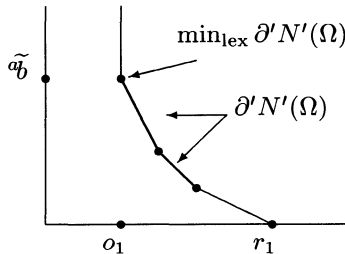


FIGURE 6. Exemple de polygone $N'(\Omega)$ lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$

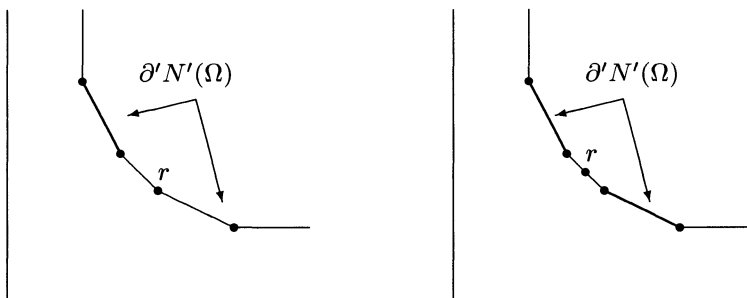


FIGURE 7. Exemples de polygones $N'(\Omega)$

3.2.7. *Quelques propriétés.* — On a $\partial'N'(\Omega) = \emptyset$ si et seulement si $N(\Omega)$ est contenu dans le quadrant de sommet r , i.e. $x^{-r}\Omega$ est au plus à pôles logarithmiques le long de \mathcal{P} .

Si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, on a ${}^a\tilde{b}(\Omega) = 0$ si et seulement si ${}^aN(\Omega)$ est vide ou un quadrant de sommet $(m_1, 0)$ avec $m_1 < r_1$. Si ${}^aN(\Omega) \neq \emptyset$, on a $\min_{\text{lex}} {}^aN(\Omega) = \min_{\text{lex}} N(\Omega)$ et ${}^a\tilde{b}(\Omega) = \tilde{b}(\Omega)$.

Si $\mathcal{P} = \{x_1x_2 = 0\}$, on a

- ${}^ah(\Omega) \leq h(\Omega)$ et égalité si ${}^ah \neq 0$, puisque les arêtes de $\partial'N'(\Omega)$ sont des arêtes de $\partial N(\Omega)$. Si $m(\Omega) < r_1 + r_2$ on a aussi ${}^ah = h$: en effet, si ${}^ah = 0$ et $h \neq 0$, c'est que l'arête de pente -1 de $\partial N(\Omega)$ n'est pas une arête de $\partial'N'(\Omega)$; la droite qui porte cette arête est donc au-dessus point (r_1, r_2) ; mais ceci est exclu car on aurait alors $m(\Omega) \geq r_1 + r_2$.
- On a ${}^a\tilde{m}(\Omega) \leq \tilde{m}(\Omega)$. De plus, ${}^a\tilde{m}(\Omega) = 0$ si et seulement si chaque composante de ${}^aN(\Omega)$ est un quadrant ou si ${}^aN(\Omega)$ est vide.
- On a ${}^ah(\Omega) \leq {}^a\tilde{m}(\Omega) \leq {}^a\tilde{b}(\Omega) \leq \tilde{b}(\Omega)$.
- Ω est réduite *rel.* (\mathcal{P}, D) si et seulement si ${}^aN(\Omega)$ est vide ou est un quadrant égal à $N'(\Omega)$, dont les coefficients au sommet sont non résonants.

3.2.8. *Comportement par éclatement.* — Nous reprenons les notations du §I.1.3.1 pour les notations des cartes dans un éclatement. Les formules qui suivent seront utilisées plus loin.

$\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, $D = (x_1^{r_1})$, *carte* $(\eta) \neq \infty$. — Supposons d'abord que $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ et $D = (x_1^{r_1})$. Notons $\mu = m(A)$ et $\nu = m(B)$. Dans la *carte* (η) de l'éclaté de coordonnées x'_1, x'_2 avec $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_1(x'_2 + \eta)$, on a

$$(3.2.9) \quad e^*\Omega = x_1'^{m^+(\Omega)} \left[A' \frac{dx'_1}{x'_1} + B' dx'_2 \right] \quad \text{et} \quad e^*D = (x_1'^{r_1})$$

où x'_1 ne divise pas simultanément A' et B' et

$$(3.2.10) \quad \begin{cases} A' = \tilde{A}(x'_1, x'_2) + x_1'^{\nu+1-\mu}(x'_2 + \eta)\tilde{B}(x'_1, x'_2) \\ B' = x_1'^{\nu+1-\mu}\tilde{B}(x'_1, x'_2) \end{cases}$$

où \tilde{A} et \tilde{B} désignent les transformés stricts de A et B par e ($\tilde{A} = x_1'^{-\mu}A \circ e$, $\tilde{B} = x_1'^{-\nu}B \circ e$);

– si $\mu \geq \nu + 1$

$$(3.2.11) \quad \begin{cases} A' = x_1'^{\mu-(\nu+1)}\tilde{A}(x'_1, x'_2) + (x'_2 + \eta)\tilde{B}(x'_1, x'_2) \\ B' = \tilde{B}(x'_1, x'_2). \end{cases}$$

Notons A_μ (*resp.* B_ν) la partie homogène de degré μ de A (*resp.* de degré ν de B). On a ainsi

$$(3.2.12) \quad A'(0, x'_2) \frac{dx'_1}{x'_1} + B'(0, x'_2) dx'_2 = \begin{cases} A_\mu(1, x'_2 + \eta) \frac{dx'_1}{x'_1} & \text{si } \mu \leq \nu, \\ [A_\mu(1, x'_2 + \eta) + (x'_2 + \eta)B_\nu(1, x'_2 + \eta)] \frac{dx'_1}{x'_1} + B_\nu(1, x'_2 + \eta) dx'_2 & \text{si } \mu = \nu + 1, \\ B_\nu(1, x'_2 + \eta) \left[(x'_2 + \eta) \frac{dx'_1}{x'_1} + dx'_2 \right] & \text{si } \mu > \nu + 1. \end{cases}$$

$\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, $D = (x_1^{r_1})$, *carte* ∞ . — Considérons maintenant la carte de coordonnées x''_1, x''_2 avec $x_1 = x''_1 x''_2$ et $x_2 = x''_1$. On a

$$(3.2.13) \quad e^* \Omega = x_1^{m^+(\Omega)} x_2^{o_1(\Omega)} \left[A'' \frac{dx''_1}{x''_1} + B'' \frac{dx''_2}{x''_2} \right] \quad \text{et} \quad e^* D = (x_1^{r_1} x_2^{r_1})$$

avec A'' et B'' non simultanément divisibles par x''_1 ou x''_2 et

– si $\mu \leq \nu$

$$(3.2.14) \quad \begin{cases} A'' = \tilde{A} + x_1^{\nu+1-\mu} \tilde{B} \\ B'' = \tilde{A} \end{cases}$$

– si $\mu \geq \nu + 1$

$$(3.2.15) \quad \begin{cases} A'' = x_1^{\mu-(\nu+1)} \tilde{A} + \tilde{B} \\ B'' = x_1^{\mu-(\nu+1)} \tilde{A}. \end{cases}$$

Il sera utile ici de privilégier l'axe $x''_1 = 0$ (diviseur exceptionnel) et de considérer l'ordre lex introduit plus haut. Nous allons donc calculer la restriction à $x''_1 = 0$. On a, avec les mêmes notations que ci-dessus :

$$(3.2.16) \quad A''(0, x''_2) \frac{dx''_1}{x''_1} + B''(0, x''_2) dx''_2 = \begin{cases} A_\mu(x''_2, 1) \left(\frac{dx''_1}{x''_1} + \frac{dx''_2}{x''_2} \right) & \text{si } \mu \leq \nu \\ [A_\mu(x''_2, 1) + B_\nu(x''_2, 1)] \frac{dx''_1}{x''_1} + A_\mu(x''_2, 1) \frac{dx''_2}{x''_2} & \text{si } \mu = \nu + 1 \\ B_\nu(x''_2, 1) \frac{dx''_1}{x''_1} & \text{si } \mu > \nu + 1 \end{cases}$$

On a dans les deux cas :

$$(3.2.17) \quad o_1(e^* \Omega) = m^+(\Omega)$$

et dans la carte (∞)

$$(3.2.18) \quad o_2(e^*\Omega) = o_1(\Omega).$$

$\mathcal{P} = \{x_1x_2 = 0\}$, $D = (x^r)$, carte (η) $\neq \infty$. — Supposons maintenant $\mathcal{P} = \{x_1x_2 = 0\}$ et plaçons-nous dans la carte (η), pour $\eta \neq \infty$. On a

$$(3.2.19) \quad e^*\Omega = x_1'^{m(\Omega)}(x_2' + \eta)^{o_2(\Omega)} \left[A' \frac{dx_1'}{x_1'} + B' \frac{dx_2'}{x_2' + \eta} \right]$$

avec $D = (x_1'^{r_1+r_2})$ si $\eta \neq 0$ et $D = (x_1'^{r_1+r_2}x_2'^{r_2})$ si $\eta = 0$ et dans les deux cas

– si $\mu < \nu$

$$(3.2.20) \quad \begin{cases} A' = \tilde{A} + x_1'^{\nu-\mu} \tilde{B} \\ B' = x_1'^{\nu-\mu} \tilde{B} \end{cases}$$

– si $\mu \geq \nu$

$$(3.2.21) \quad \begin{cases} A' = x_1'^{\mu-\nu} \tilde{A} + \tilde{B} \\ B' = \tilde{B} \end{cases}$$

et par suite

$$(3.2.22) \quad A'(0, x_2') \frac{dx_1'}{x_1'} + B'(0, x_2') \frac{dx_2'}{x_2' + \eta} = \begin{cases} A_\mu(1, x_2' + \eta) \frac{dx_1'}{x_1'} & \text{si } \mu < \nu, \\ [A_\mu(1, x_2' + \eta) + B_\nu(1, x_2' + \eta)] \frac{dx_1'}{x_1'} + B_\nu(1, x_2' + \eta) \frac{dx_2'}{x_2' + \eta} & \text{si } \mu = \nu, \\ B_\nu(1, x_2' + \eta) \left[\frac{dx_1'}{x_1'} + \frac{dx_2'}{x_2' + \eta} \right] & \text{si } \mu \geq \nu + 1. \end{cases}$$

On a donc

$$(3.2.23) \quad o_1(e^*\Omega) = m(\Omega) \quad \text{et} \quad o_2(e^*\Omega) = \begin{cases} o_2(\Omega) & \text{si } \eta = 0, \\ 0 & \text{si } \eta \neq 0. \end{cases}$$

$\mathcal{P} = \{x_1x_2 = 0\}$, $D = (x^r)$, carte ∞ . — Enfin on a une expression analogue dans la carte (∞) avec ici

$$(3.2.24) \quad o_1(e^*\Omega) = m(\Omega) \quad \text{et} \quad o_2(e^*\Omega) = o_1(\Omega).$$

3.3. Réduction de l'invariant apparent

Proposition 3.3.1. — Soient (\mathcal{P}, D) un couple admissible et $\Omega \in V \otimes \Omega_{\mathcal{O}}^1(\log \mathcal{P})$. Pour toute suite infinie $(\varpi_1, \dots, \varpi_n, \dots)$ d'éclatements locaux (formels) au-dessus de l'origine, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait l'une des deux possibilités suivantes en $x^{(n)}$ (relativement à $(\pi_n^{-1}\mathcal{P}, \pi_n^*D)$) :

- $\pi_n^* \Omega$ est réduite,
- ${}^a I(\pi_n^* \Omega) = 0$.

Démonstration. — Nous supposons dans la suite que ${}^a N(\Omega) \neq \emptyset$. Nous allons considérer les propriétés suivantes pour Ω , lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$:

- (1) on a $m(\Omega) = m^+(\Omega)$ et chacune de ces multiplicités est atteinte au sommet $\min_{\text{lex}} N'(\Omega)$;
- (2) on a $m(\Omega) < m^+(\Omega)$ et chacune de ces multiplicités est atteinte au sommet $\min_{\text{lex}} N'(\Omega)$;
- (3) $m(\Omega) = m^+(\Omega)$, $m(\Omega)$ est atteinte au sommet $\min_{\text{lex}} N'(\Omega)$ mais pas m^+ .

Dire que $m(\Omega)$ est atteinte au sommet $\min_{\text{lex}} N'(\Omega)$ équivaut à dire que $\tilde{b}(\Omega) = \tilde{m}(\Omega)$. Nous dirons que Ω a un *type* si l'une de ces trois propriétés est satisfaite.

Commençons par montrer :

Lemme 3.3.2. — Soit (\mathcal{P}, D) un couple admissible, $\Omega \in V \otimes \Omega_{\mathcal{O}}^1(\log \mathcal{P})$ et e l'éclatement de l'origine. On a, pour tout $x^o \in e^{-1}(0)$, l'inégalité

$${}^a I(e^* \Omega_{x^o}) \leq {}^a I(\Omega).$$

Si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ et si ${}^a I(\Omega) \geq 1$, il y a égalité en au plus un point $y^o \in e^{-1}(0)$; si un tel y^o existe, Ω a un type : c'est le type (1) ou (2) si et seulement si y^o est un point lisse de $e^{-1}(0)$; de plus

- (i) si Ω est de type (1) (donc y^o est un point lisse de $e^{-1}\mathcal{P}$) et si $e^* \Omega$ a un type en y^o , c'est le type (1) ;
- (ii) si Ω est de type (3) (donc y^o est un point de croisement de $e^{-1}\mathcal{P}$), on a $\tilde{m}(\Omega) = 1$; de plus, si ε est l'éclatement de y^o , il existe au plus un point $z^o \in \varepsilon^{-1}(y^o)$ où ${}^a I(\varepsilon^* e^* \Omega) = {}^a I(\Omega)$; si z^o existe, c'est un point lisse de $\varepsilon^{-1}e^{-1}\mathcal{P}$, et si $\varepsilon^* e^* \Omega$ a un type en z^o , c'est le type (1).

La proposition résulte immédiatement de ce lemme et du lemme 3.1.9. En effet, considérons une suite infinie d'éclatements locaux pour laquelle l'invariant ${}^a I$ est constant et non nul. D'après le lemme 3.1.9-(1), si la première conclusion de 3.3.1 n'est jamais satisfaite, c'est qu'un des centres est un point lisse et le suivant un point de croisement du diviseur image inverse de \mathcal{P} . Le lemme précédent montre qu'en ce premier centre la forme Ω est de type (3). De plus, le centre suivant est un point de croisement, le suivant un point de type (1) et tous les suivants des points de type (1). On peut donc encore appliquer 3.1.9-(1) pour conclure qu'une telle suite infinie n'existe pas. \square

Démonstration du lemme 3.3.2. — On voit d'abord que si le polygone ${}^a N(\Omega)$ est vide, alors ${}^a N(e^* \Omega) = \emptyset$ dans toute carte. Si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ cela résulte du fait que $o_1(e^* \Omega) = m^+(\Omega) \geq o_1(\Omega) \geq r_1$ et si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$ du fait que $m(\Omega) \geq o_1(\Omega) + o_2(\Omega) \geq r_1 + r_2$.

Nous supposons que ${}^a N(\Omega)$ et ${}^a N(e^* \Omega_{x^o})$ sont non vides, sinon le résultat est clair.

Supposons que $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$.

• Si x^o est le centre d'une carte $(\eta) \neq (\infty)$, la formule (3.2.12) montre que la restriction à $x'_1 = 0$ de $e^* \Omega_{x^o}$ a au moins une composante qui est un polynôme de degré $\leq \tilde{m}(\Omega)$ en x'_2 . Par ailleurs, puisque ${}^a N(\Omega) \neq \emptyset$, on a

$$\tilde{m}(\Omega) \leq \tilde{b}(\Omega) = \tilde{\mathfrak{b}}(\Omega) = {}^a I(\Omega).$$

On a donc, puisque ${}^a N(e^* \Omega_{x^o}) \neq \emptyset$,

$${}^a I(e^* \Omega_{x^o}) = \tilde{\mathfrak{b}}(e^* \Omega_{x^o}) = \tilde{b}(e^* \Omega_{x^o}) \leq \tilde{m}(\Omega) \leq {}^a I(\Omega).$$

S'il y a égalité, c'est que, en reprenant les notations de (3.2.12),

- (a) si $\mu \leq \nu$, $A_\mu(1, x'_2 + \eta) = \star x_2'^\mu$, c'est-à-dire $A = \star(x_2 + \eta x_1)^\mu + \text{ordre} \geq \mu + 1$,
- (b) si $\mu \geq \nu + 1$, $B_\nu(1, x'_2 + \eta) = \star x_2'^\nu$, c'est-à-dire $B = \star(x_2 + \eta x_1)^\nu + \text{ordre} \geq \nu + 1$.

En tout autre $\eta' \neq \infty$ on a alors $\tilde{\mathfrak{b}} = 0$ et le calcul ci-dessous dans la carte (∞) montre qu'on ne peut avoir égalité en (∞) . Donc s'il existe y^o où l'on a égalité et si y^o est lisse sur $e^{-1}\mathcal{P}$, cet y^o est unique. On en déduit l'assertion d'unicité.

Dans le cas $\mu \leq \nu$, on voit que Ω est de type (1).

Dans le cas $\mu \geq \nu + 1$, Ω est de type (2).

Nous verrons ci-dessous que si y^o existe et est un point de croisement de $e^{-1}\mathcal{P}$, Ω est de type (3).

Ainsi y^o est lisse sur $e^{-1}\mathcal{P}$ si et seulement si Ω est de type (1) ou (2). De plus, si Ω est de type (1) et si $e^* \Omega$ a un type en y^o , c'est qu'on est dans le cas (a) ci-dessus et $\mu = \tilde{b}(e^* \Omega_{y^o}) = \tilde{m}(e^* \Omega_{y^o})$. On en déduit que $e^* \Omega$ est de type (1) en y^o .

• Si x^o est le centre de la carte (∞) , supposons d'abord que $m(\Omega) \geq r_1$. Alors on a aussi $m^+(\Omega) \geq r_1$, $\tilde{m}(\Omega) \geq r_1 - o_1(\Omega)$ et $e^* \Omega_{x^o}$ a un polygone du type indiqué sur la figure 8. En particulier ${}^a N(e^* \Omega_{x^o})$ n'a qu'une composante. On a

$${}^a I(e^* \Omega_{x^o}) = {}^a \tilde{m}(e^* \Omega_{x^o}) \leq \tilde{\mathfrak{b}}(e^* \Omega_{x^o}) < r_1 - o_1(\Omega) \leq \tilde{m}(\Omega) \leq \tilde{b}(\Omega) = \tilde{\mathfrak{b}}(\Omega) = {}^a I(\Omega).$$

Il y a donc toujours inégalité stricte dans ce cas.

Supposons maintenant que $m(\Omega) < r_1$. On a encore, d'après la formule (3.2.16)

$${}^a I(e^* \Omega_{x^o}) = {}^a \tilde{m}(e^* \Omega_{x^o}) \leq \tilde{\mathfrak{b}}(e^* \Omega_{x^o}) \leq \tilde{b}(e^* \Omega_{x^o}) \leq \tilde{m}(\Omega) \leq \tilde{\mathfrak{b}}(\Omega) = {}^a I(\Omega).$$

S'il y a égalité et si ${}^a I(\Omega) \geq 1$, c'est que $\tilde{b}(e^* \Omega_{x^o}) = \tilde{m}(\Omega)$ et la formule (3.2.16) montre que

$$\begin{aligned} A &= \star x_1^\mu + \text{ordre} \geq \mu + 1 & \text{si } \mu \leq \nu \\ B &= \star x_1^\nu + \text{ordre} \geq \nu + 1 & \text{si } \mu \geq \nu + 1. \end{aligned}$$

Dans le second cas, c'est-à-dire lorsque $\mu \geq \nu + 1$, le polygone $N(\Omega)$ a un seul sommet de multiplicité $m(\Omega) = \nu + o_1(\Omega)$, à savoir le point $(m(\Omega), 0)$, et il est porté

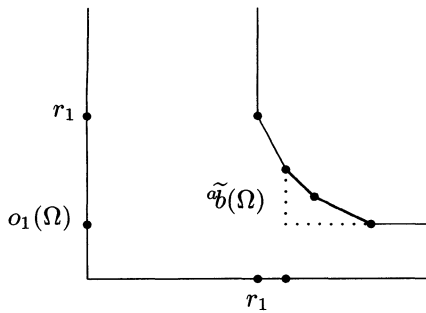


FIGURE 8

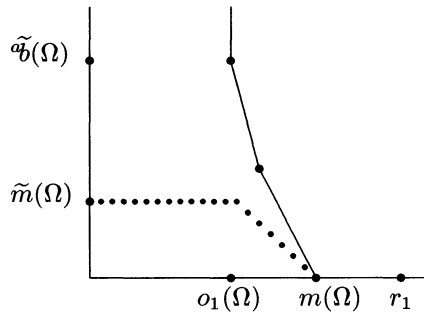


FIGURE 9

par dx_2 . Le polygone de Ω a donc le type de celui indiqué sur la figure 9 et on a $\tilde{m}(\Omega) < \tilde{b}(\Omega)$. Ainsi ${}^aI(e^*\Omega_{x^o}) < {}^aI(\Omega)$ dans ce cas.

Dans le premier cas, on voit de même que s'il y a égalité ${}^aI(e^*\Omega_{x^o}) = {}^aI(\Omega)$ c'est que $\mu = \nu = \tilde{m}(\Omega)$ et

$$A = \alpha_\mu x_1^\mu + \text{ordre} \geq \mu + 1 \quad \text{et} \quad B = \beta_\mu (x_2 + \lambda x_1)^\mu + \text{ordre} \geq \mu + 1,$$

avec $\alpha_\mu, \beta_\mu \neq 0$. On voit aussi que Ω est de type (3) comme annoncé plus haut. Alors les formules (3.2.16) montrent que

$$\begin{aligned} A''(x_1'', x_2'') &= A_\mu(x_2'', 1) + x_1'' [A_{\mu+1}(x_2'', 1) + B_\mu(x_2'', 1)] + \dots \\ B''(x_1'', x_2'') &= A_\mu(x_2'', 1) + x_1'' A_{\mu+1}(x_2'', 1) + \dots \end{aligned}$$

Puisque $B_\mu(0, 1) = \beta_\mu \neq 0$, on a $\tilde{m}(e^*\Omega_{x^o}) \leq 1$. Il n'y a donc égalité ${}^aI(e^*\Omega_{x^o}) = {}^aI(\Omega)$ que si de plus $\mu = 1$. Alors la partie homogène de degré 1 de $e^*\Omega_{x^o}$ s'écrit

$$\alpha_1 x_2'' \left(\frac{dx_1''}{x_1''} + \frac{dx_2''}{x_2''} \right) + x_1'' \left[(\alpha_2 + \beta_1) \frac{dx_1''}{x_1''} + \alpha_2 \frac{dx_2''}{x_2''} \right]$$

avec $\alpha_1 x_2'' = A_1(x_2'', 1)$, $\alpha_2 = A_2(0, 1)$ et $\beta_1 = B_1(0, 1)$. Après l'éclatement ε de x^o , on vérifie que la multiplicité réduite est nulle aux points de croisement de $\varepsilon^{-1}e^{-1}\mathcal{P}$ qui sont sur $\varepsilon^{-1}(x^o)$. Soit alors z^o un point lisse de $\varepsilon^{-1}e^{-1}\mathcal{P}$ sur $\varepsilon^{-1}(x^o)$, centre de la carte $(\eta) \neq (0), (\infty)$. Les formules (3.2.22) montrent que $\tilde{b}(\varepsilon^*e^*\Omega_{z^o}) \neq 0$ si et seulement si

$$2\alpha_1\eta + 2\alpha_2 + \beta_1 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_2 + \beta_1 = 0.$$

Si ces conditions sont satisfaites, on a $\tilde{b}(\varepsilon^*e^*\Omega_{z^o}) = 1$ et le coefficient de $\varepsilon^*e^*\Omega_{z^o}$ correspondant au sommet $\min_{\text{lex}} N(\varepsilon^*e^*\Omega_{z^o})$ est $\alpha_1 z_2 \left(2 \frac{dz_1}{z_1} + \frac{dz_2}{z_2 + \eta} \right)$ (dans des coordonnées (z_1, z_2) centrées en z^o). La forme $\varepsilon^*e^*\Omega$ a donc le type (1) en z^o .

Supposons maintenant que $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$. Plaçons-nous en un point $x^o \in e^{-1}(0)$ qui n'est pas un point de croisement de e^*D .

Si $m(\Omega) \geq r_1 + r_2$, on a ${}^aN(e^*\Omega_{x^o}) = \emptyset$ en tout tel x^o et donc ${}^aI(e^*\Omega_{x^o}) = 0$.

Supposons donc $m(\Omega) < r_1 + r_2$. On a ${}^a\tilde{b}(e^*\Omega_{x^o}) = \tilde{b}(e^*\Omega_{x^o})$ et ${}^ah(\Omega) = h(\Omega)$. Ainsi, il suffit de vérifier que $\tilde{b}(e^*\Omega_{x^o}) \leq h(\Omega)$. On utilise pour cela les formules 3.2.22 pour $\eta \neq 0, \infty$.

Plaçons-nous maintenant au centre x^o d'une des carte (0) ou (∞), $x^o = 0$ par exemple. On remarque d'abord que les formes

$$(A + B) \circ e \frac{dx'_1}{x'_1} + B \circ e \frac{dx'_2}{x'_2} \quad \text{et} \quad A \circ e \frac{dx'_1}{x'_1} + B \circ e \frac{dx'_2}{x'_2}$$

ont même polygone de Newton. On en déduit que

$$N(e^*\Omega_{x^o}) = L_0(N(\Omega)) + \mathbf{N}^2$$

et

$$N'(e^*\Omega_{x^o}) = L_0(N'(\Omega)) + \mathbf{N}^2$$

donc

$$\partial N'(e^*\Omega_{x^o}) = L_0(\partial^0 N'(\Omega))$$

et

$$\partial' N'(e^*\Omega_{x^o}) = L_0(\partial' N'(\Omega)) = L_0(\partial' N'(\Omega) \cap \partial^0 N'(\Omega))$$

donc $\partial [{}^aN(e^*\Omega_{x^o})] = L_0(\partial^0 [{}^aN(\Omega)])$. Le lemme 3.2.3 montre alors que

$${}^aI(e^*\Omega_{x^o}) = {}^a\tilde{m}(e^*\Omega_{x^o}) \leq {}^a\tilde{m}(\Omega) = {}^aI(\Omega). \quad \square$$

Corollaire 3.3.3

- (1) Soit e l'éclatement de l'origine et $x^o \in e^{-1}(0)$.
 - (a) Si ${}^aI(\Omega) = 0$, on a aussi ${}^aI(e^*\Omega) = 0$.
 - (b) Si $N'(\Omega)$ est un quadrant, il en est de même de $N'(e^*\Omega)$.
- (2) Sous les conditions de la proposition 3.3.1, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\pi_n^*\Omega$ soit réduite ou $N'(\pi_n^*\Omega)$ soit un quadrant en $x^{(n)}$.

Démonstration. — La stabilité par éclatement de la condition ${}^aI = 0$ résulte immédiatement du lemme 3.3.2.

Lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, $N'(\Omega)$ est un quadrant si et seulement si ${}^aI(\Omega) = 0$. D'autre part, l'énoncé (b) se vérifie facilement si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$. Il reste donc à considérer le cas où $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ et x^o est le centre de la carte (∞). On peut supposer que ${}^aN(\Omega) \neq \emptyset$, sinon l'assertion est claire. Les formules (3.2.16) montrent alors que $N(e^*\Omega_{x^o})$ est le quadrant de sommet $(m^+(\Omega), o_1(\Omega))$: de plus, ici, $o_1(\Omega) = m(\Omega)$ et $m^+(\Omega) = m(\Omega)$ ou $m(\Omega) + 1$. Enfin $N'(e^*\Omega_{x^o})$ est le polygone engendré par $N(e^*\Omega)$ et le quadrant de sommet (r_1, r_1) .

Si $m^+(\Omega) \leq r_1$, on a $(r_1, r_1) \in N(e^*\Omega_{x^o})$ donc $N'(e^*\Omega_{x^o}) = N(e^*\Omega_{x^o})$ est un quadrant.

Si $m^+(\Omega) > r_1$, c'est que $m(\Omega) \geq r_1$, donc $N'(e^*\Omega_{x^o})$ est le quadrant de sommet (r_1, r_1) .

Pour le second point, on se ramène, d'après (3.3.1), au cas où ${}^aI(\Omega) = 0$ et on utilise la réduction torique 3.1.9-(3) pour se ramener au cas où de plus $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$. Alors le résultat est clair. \square

3.4. Fin de la démonstration du théorème 3.1.7. — Nous pouvons supposer, d'après le corollaire 3.3.3, que $N'(\Omega)$ est un quadrant. Si $N'(\Omega)$ a pour sommet r , la forme $\Omega(-D)$ est au plus à pôles logarithmiques le long de \mathcal{P} , donc Ω est réduite. Nous supposons donc que N' a pour sommet $o(\Omega) < r$, donc est égal à aN .

Il reste à réduire les trois cas non réduits suivants :

(I-a) $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, $\Omega = x_1^{o_1(\Omega)} \left[A \frac{dx_1}{x_1} + B dx_2 \right]$ avec $A(0) = 0$, $B(0) \neq 0$, et si on pose $A = x_1 A_1 + x_2 A_2$ alors

(non résonance) $\forall n_1, n_2 \in \mathbf{N} - \{0\}$, $n_1 A_2(0) + n_2 B(0) \neq 0$.

(I-b) Même situation résonante :

(résonance) $\exists n_1, n_2 \in \mathbf{N} - \{0\}$, $n_1 A_2(0) + n_2 B(0) = 0$.

(II) $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$, $\Omega = x_1^{o_1} x_2^{o_2} \left[A \frac{dx_1}{x_1} + B \frac{dx_2}{x_2} \right]$, avec $A(0) \neq 0$, $B(0) \neq 0$ et

(résonance) $\exists n_1, n_2 \in \mathbf{N} - \{0\}$, $n_1 A(0) + n_2 B(0) = 0$.

3.4.1. Réduction faible dans le cas (I-a). — Soit e l'éclatement de l'origine. Dans la carte (∞) on a

$$e^* \Omega = x_1''^{o_1+1} x_2''^{o_1} \left[(x_2'' A_1 \circ e + A_2 \circ e + B \circ e) \frac{dx_1''}{x_1''} + (x_2'' A_1 \circ e + A_2 \circ e) \frac{dx_2''}{x_2''} \right]$$

et $e^* \Omega$ est faiblement réduite en ce point par hypothèse de non résonance.

Dans la carte (η) , $\eta \in \mathbf{C}$, on a

$$e^* \Omega = x_1'^{o_1+1} \left[(A_1 \circ e + (x_2' + \eta)(A_2 \circ e + B \circ e)) \frac{dx_1'}{x_1'} + (B \circ e) dx_2' \right].$$

Il existe au plus un point η où $e^* \Omega$ est non réduite : c'est le point η_0 tel que

$$A_1(0) + \eta_0(A_2(0) + B(0)) = 0.$$

Alors $A_1 \circ e + \eta_0(A_2 \circ e + B \circ e)$ est multiple de x_1' et en ce point $e^* \Omega$ est encore de type (I-a). On réduit donc Ω après $r_1 - o_1(\Omega)$ éclatements ponctuels (si $o_1(\Omega) < r_1$, sinon Ω est déjà réduite).

3.4.2. *Réduction faible dans le cas (II).* — Notons $(\text{II})_{n_1, n_2}$ la situation (II) avec

$$n_1 A(0) + n_2 B(0) = 0 \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(n_1, n_2) = 1.$$

Si $(n_1, n_2) \neq (1, 1)$, $e^* \Omega$ est réduite en tout point de $e^{-1}(0)$ qui n'est pas un point de croisement de $e^{-1} \mathcal{P}$ et aux points de croisement, le type est $(\text{II})_{n_1 - n_2, n_2}$ ou $(\text{II})_{n_1, n_2 - n_1}$. L'un des deux cas est faiblement réduit et on se ramène ainsi au cas où $(n_1, n_2) = (1, 1)$.

Si $(n_1, n_2) = (1, 1)$, $e^* \Omega$ est réduite aux points de croisement de $e^{-1} \mathcal{P}$. Considérons alors la carte (η) avec $\eta \in \mathbf{C} - \{0\}$. On a

$$e^* \Omega = x_1^{o_1 + o_2} \left[(A + B) \circ e \frac{dx'_1}{x'_1} + B \circ e \frac{dx'_2}{x'_2 + \eta} \right]$$

et puisque $A(0) + B(0) = 0$, $(A + B) \circ e$ est multiple de x'_1 , de sorte que le centre de cette carte est de type (I-a). Il est ainsi possible, d'après l'étude précédente, de réduire les points de $e^{-1}(0)$ qui sont des centres M -permis (on se restreint ici aux centres M -permis pour n'avoir qu'un nombre fini de points à réduire).

3.4.3. *Réduction faible dans le cas (I-b).* — Elle se fait par récurrence sur l'ordre du zéro $o_1 > 0$. Après l'éclatement e , $e^* \Omega$ est de type I (a ou b) et d'ordre $\geq o_1 + 1$ en tout point de $e^{-1}(0)$ qui n'est pas un point de croisement de $e^{-1} \mathcal{P}$. Par ailleurs, $e^* \Omega$ est faiblement réductible au point de croisement, d'après ce qu'on vient de voir. Ceci termine la preuve du théorème 3.1.7. \square

4. Réduction au cas d'une partie principale nilpotente

En ce qui concerne la conjecture 1.3.1, nous pouvons supposer que M est une $\widehat{\mathcal{O}}[f^{-1}]$ -connexion pour laquelle $\mathcal{P}(M) = \{f = 0\}$ est un diviseur à croisements normaux : il existe en effet une suite d'éclatements $\pi : \widehat{X, E} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}^2, 0}$ telle que $f \circ \pi$ définisse un diviseur à croisements normaux. Grâce au théorème I.2.3.2 il suffit de montrer que la conclusion de 1.3.1 est satisfaite en tout centre M -permis sur E . Nous allons réduire la démonstration de 1.3.1 à celle de l'énoncé 4.4.1 ci-dessous.

Dans la suite, nous poserons donc $R = \mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_1^{-1}]$ ou $\mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_1^{-1}, x_2^{-1}]$ et nous supposons que M est une R -connexion.

Soit $(1.3.1)_d$ l'énoncé 1.3.1 pour les connexions de rang $\leq d$. Puisque $(1.3.1)_1$ est vrai (prop. 2.2.1), il suffit de montrer $(1.3.1)_{d-1} \Rightarrow (1.3.1)_d$ pour $d \geq 2$.

4.1. Réduction au cas nilpotent. — Nous allons montrer dans ce paragraphe le résultat suivant :

Proposition 4.1.1. — *Si l'énoncé $(1.3.1)_{d-1}$ est vrai, il suffit de montrer $(1.3.1)_d$ pour les R -connexions M de rang d à déterminant régulier et satisfaisant l'une des propriétés ci-dessous :*

- (1) Si $\mathcal{P}(M) = \{x_1 = 0\}$, il existe une base \mathbf{m} dans laquelle la matrice Θ de la connexion s'écrit

$$\Theta = x_1^{-r_1} \left[A \frac{dx_1}{x_1} + B dx_2 \right]$$

avec $r_1 > 0$, $A = A_0 + x_1 A'$ et $B = f(x_2)A_0 + x_1 B'$, $A', B' \in M_d(\mathbf{C}[[x_1, x_2]])$, $A_0 \stackrel{\text{déf}}{=} A(0, 0) \neq 0$ nilpotente et $f(x_2) \in \mathbf{C}[[x_2]]$.

- (2) Si $\mathcal{P}(M) = \{x_1 x_2 = 0\}$, il existe une base \mathbf{m} dans laquelle la matrice Θ de la connexion s'écrit (quitte à échanger x_1 et x_2)

$$\Theta = x^{-r} \left[A \frac{dx_1}{x_1} + B \frac{dx_2}{x_2} \right],$$

avec $r_1 > 0$, $r_2 \geq 0$, $A, B \in M_d(\mathbf{C}[[x_1, x_2]])$, $A_0 \stackrel{\text{déf}}{=} A(0, 0) \neq 0$ nilpotente, $B_0 \stackrel{\text{déf}}{=} B(0, 0) = \alpha A_0$ avec $\alpha \in \mathbf{C} - \mathbf{Q}_{<0}$.

Démonstration. — Notons d'abord que la situation de la proposition est stable par éclatements. Après tensorisation par une connexion de rang 1, on peut supposer que M est à déterminant régulier (lemme 4.2.1 ci-dessous). Ensuite, en utilisant le théorème de réduction 3.1.7, nous pouvons de plus supposer que la matrice Θ de la connexion dans une base \mathbf{m} est fortement réduite. On effectue une suite d'éclatements toriques et une réduction de M aux points de croisement du diviseur exceptionnel (voir la proposition 4.3.1 ci-dessous). Aux seuls centres permis restant à considérer pour montrer l'énoncé (1.3.1)_d, le diviseur $\mathcal{P}(M)$ est lisse. Si la partie principale A_0 n'est pas nilpotente, elle a deux valeurs propres distinctes (lemme 4.2.2 ci-dessous) et nous pouvons appliquer la proposition 2.3.1 pour conclure par récurrence. Si A_0 est nilpotente, on se ramène aux situations (1) et (2) après éclatement. \square

4.2. Déterminant régulier. — Soit M une R -connexion. Son déterminant $\det M$ est un R -module libre de rang 1, naturellement muni d'une connexion : si Θ est la matrice de ∇ dans la base \mathbf{m} de M , $\omega = \text{tr } \Theta$ est la matrice de ∇ dans la base $m_1 \wedge \cdots \wedge m_d$ de $\det M$. Nous dirons que M est à déterminant régulier si $\det M$ est une connexion régulière. Si M est à déterminant régulier, il en est de même pour toute image inverse de M par éclatement ou ramification locale autour du diviseur de ses pôles.

Lemme 4.2.1. — Pour toute R -connexion M il existe une connexion N de rang 1 telle que $M \otimes_R N$ soit à déterminant régulier.

Démonstration. — Soit N une R -connexion de rang 1. Soit \mathbf{m} une base de M , \mathbf{n} une base de N , Θ la matrice de ∇_M , ω celle de ∇_N . Alors la matrice de $\nabla_{M \otimes_R N}$ dans la base $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$ est $\Theta \otimes 1 + \text{Id} \otimes \omega$ et la matrice de $\nabla_{\det M \otimes N}$ est $\text{tr } \Theta + d \cdot \omega$, ce qu'on écrit $\det(M \otimes N) = (\det M) \otimes N^{\otimes d}$. Puisque $\det M$ est de rang 1, on peut appliquer la proposition 2.2.1 : il existe $\varphi \in R$ tel que $\mathcal{E}^\varphi \otimes \det M$ soit régulière. Il suffit alors de prendre $N = \mathcal{E}^{\varphi/d}$. \square

Lemme 4.2.2. — Soit M une R -connexion à déterminant régulier. On suppose qu'il existe une base \mathbf{m} de M dans laquelle Θ est réduite et n'est pas à pôles au plus logarithmiques le long de $\mathcal{P}(M)$:

$$\Theta = x_1^{-r_1} \left[A \frac{dx_1}{x_1} + B dx_2 \right] \text{ resp. } \Theta = x^{-r} \left[A \frac{dx_1}{x_1} + B \frac{dx_2}{x_2} \right].$$

Alors $\text{tr } A_0 = 0$ (resp. $\text{tr } A_0 = \text{tr } B_0 = 0$).

Démonstration. — La matrice de $\det M$ dans la base $m_1 \wedge \cdots \wedge m_d$ est

$$\text{tr } \Theta = x_1^{-r_1} \left[\text{tr } A \frac{dx_1}{x_1} + \text{tr } B dx_2 \right] \text{ resp. } \text{tr } \Theta = x^{-r} \left[\text{tr } A \frac{dx_1}{x_1} + \text{tr } B \frac{dx_2}{x_2} \right].$$

Si Θ n'est pas à pôles logarithmiques, on a $r_1 > 0$ dans le premier cas, r_1 ou $r_2 > 0$ dans le second. L'hypothèse $\det M$ régulière et le lemme 2.2.2 montrent alors que $x_1^{-r_1} \text{tr } A \in \mathbf{C}[[x_1, x_2]]$ (resp. $x^{-r} \text{tr } A$ et $x^{-r} \text{tr } B \in \mathbf{C}[[x_1, x_2]]$), d'où le résultat. \square

4.3. Réduction torique. — Nous allons montrer une version torique de la conjecture I.2.5.1. Nous supposons dans ce §4.3 que $R = \mathbf{C}[[x_1, x_2]][x_1^{-1}, x_2^{-1}]$.

Proposition 4.3.1. — Soit M une R -connexion. Il existe une suite d'éclatements toriques $\pi : \widehat{X, E} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}^2, 0}$ telle que la connexion $\pi^+ M$ admette une bonne structure formelle en tout point de croisement du diviseur $\pi^{-1}(\{x_1 x_2 = 0\})$.

On en déduit de manière analogue à celle du lemme 3.1.9 :

Corollaire 4.3.2. — Pour toute suite infinie (ϖ_n) d'éclatements toriques, il existe n_0 tel que $\pi_{n_0}^+ M$ admette une bonne structure formelle au centre $x^{(n_0)}$. \square

Démonstration. — Notons d'abord que si l'on impose aux ramifications locales d'être de même degré autour de chaque composante de $\mathcal{P}(M)$, éclatements toriques et ramifications locales commutent. Ainsi il est plus facile ici de se ramener à montrer l'existence d'une suite complète composée d'éclatements toriques locaux et de ramifications locales pour laquelle l'image inverse de M admet une bonne décomposition formelle en chaque centre (ici, suite complète signifie qu'on garde comme centres tous les points de croisement de l'image inverse de $\{x_1 x_2 = 0\}$). La démonstration se fait alors par récurrence sur le rang de M , le cas $d = 1$ étant satisfait.

Soit donc M de rang $d \geq 2$. On peut supposer d'après le lemme 4.2.1 que M est à déterminant régulier. De plus, d'après l'énoncé de réduction torique 3.1.9-(2), on peut supposer que dans une base \mathbf{m} la matrice Θ est (fortement) réduite. Si M n'est pas régulière, c'est que la partie principale logarithmique de Θ a la forme suivante :

$$x_1^{-r_1} A_0 \frac{dx_1}{x_1} \quad \text{ou} \quad x^{-r} \left(A_0 \frac{dx_1}{x_1} + B_0 \frac{dx_2}{x_2} \right)$$

avec $r_1 > 0$ dans le premier cas ($\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$) et $r \geq 0$ et $r \neq 0$ dans le second ($\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$). D'après la proposition 2.3.1 on peut se ramener au cas où A_0 et B_0

n'ont qu'une valeur propre et celle-ci est nulle puisque M est à déterminant régulier (lemme 4.2.2). On est ainsi ramené au cas où A_0 et B_0 sont nilpotentes. la condition d'intégrabilité et le fait que $r \neq 0$ montrent que A_0 et B_0 commutent.

Nous allons appliquer la méthode de Turrittin revue dans [4] à l'opérateur $\mathcal{D}(\lambda) = \mathcal{D}_1 + \lambda \mathcal{D}_2$, où λ est une nouvelle variable, et nous allons travailler sur un localisé $\mathbf{C}[\lambda]_F$ de $\mathbf{C}[\lambda]$ pour un ensemble fini $F \subset \mathbf{C}$ bien choisi : on se permet d'inverser les $\lambda - \lambda_0$ pour tout $\lambda_0 \in F$.

En général, soit $F \subset \mathbf{C}$ un ensemble fini et $R_{\lambda,F} = \mathbf{C}[\lambda]_F \llbracket x_1, x_2 \rrbracket [x_1^{-1}, x_2^{-1}]$ l'anneau des séries de Laurent à coefficients dans $\mathbf{C}[\lambda]_F$. Nous appellerons $R_{\lambda,F}$ -connexion un $R_{\lambda,F}$ -module libre de type fini muni d'une action compatible de la dérivation $\mathcal{D}(\lambda)$. Par exemple, $R_{\lambda,F} \otimes_R M$ est une $R_{\lambda,F}$ -connexion, munie d'une base « constante » $1 \otimes \mathbf{m}$, dans laquelle la matrice de $\mathcal{D}(\lambda)$ est $x^{-r}[A + \lambda B]$. Si $M_{\lambda,F}$ est une $R_{\lambda,F}$ -connexion, alors pour tout $\lambda_0 \notin F$, le R -module

$$M_{\lambda_0,F} \stackrel{\text{déf}}{=} M_{\lambda,F}/(\lambda - \lambda_0)M_{\lambda,F}$$

est libre de même rang que $M_{\lambda,F}$ et est muni d'une action compatible de la dérivation $\mathcal{D}(\lambda_0) = \mathcal{D}_1 + \lambda_0 \mathcal{D}_2$.

Lemme 4.3.3. — *Soit $M_{\lambda,F}$ une $R_{\lambda,F}$ -connexion munie d'une base dans laquelle la matrice de $\mathcal{D}(\lambda)$ s'écrit $x^{-r}[A_0(\lambda) + C(\lambda)]$ avec $r_1, r_2 \geq 0$ non tous deux nuls, $A_0(\lambda)$ nilpotente et $C(\lambda)$ à éléments dans $(x_1, x_2)\mathbf{C}[\lambda]_F \llbracket x_1, x_2 \rrbracket$. Il existe alors une suite complète composée d'éclatements toriques et de ramifications locales, un ensemble fini $F_1 \supset F$ et, dans chaque carte torique, une base $\mathbf{m}(\lambda)$ de l'image inverse de M_{λ,F_1} dans laquelle la matrice de $\mathcal{D}(\lambda)$ n'a pas de pôle ou s'écrit, dans les coordonnées toriques de la carte, sous la forme $x'^{-r'}[A'_0(\lambda) + C'(\lambda)]$ avec r' comme ci-dessus, $C'(\lambda)$ à éléments dans $(y_1, y_2)\mathbf{C}[\lambda]_{F_1} \llbracket y_1, y_2 \rrbracket$ et pour tout $\lambda_0 \notin F_1$, $A'_0(\lambda_0)$ n'est pas nilpotente.*

Montrons d'abord comme ce lemme permet d'achever la preuve de la proposition 4.3.1. Nous allons l'appliquer à $M_{\lambda,\emptyset} = \mathbf{C}[\lambda] \otimes_{\mathbf{C}} M$ muni de la dérivation $\mathcal{D}(\lambda)$. Nous nous sommes déjà ramenés au cas où M est munie d'une base dans laquelle la matrice de $\mathcal{D}(\lambda)$ a la forme donnée dans le lemme. Notons que la conclusion du lemme est stable par éclatement torique. Nous pouvons donc supposer de plus que la suite d'éclatements toriques donnée par le lemme correspond à un éventail Σ subdivisant le premier quadrant de $(\mathbf{Q}_+)^2$ qui satisfait la propriété suivante : tout cône de dimension 2 de Σ possède une arête dont le vecteur primitif (a, c) est tel que $c/a \notin F_1$ et pour laquelle le diviseur correspondant est une composante du lieu polaire de $\mathcal{D}(\lambda)$ si celui-ci est non vide dans la carte correspondant à ce cône (on subdivise pour cela les cônes de l'éventail donné par le lemme lorsque les pentes de leurs deux arêtes sont dans F_1).

Considérons donc une carte de coordonnées (x'_1, x'_2) . Il existe alors une ramification ρ d'ordre β après laquelle la conclusion du lemme est satisfaite. Posons $x'_1 = y_1^\beta$,

$x'_2 = y_2^\beta$ et supposons que x'_1 correspond à une arête de Σ dont la pente $\lambda_0 = c/a$ n'est pas dans F_1 . Considérons la base $\mathbf{m}(\lambda_0)$ de l'image inverse de M , restriction à $\lambda = \lambda_0$ de la base $\mathbf{m}(\lambda)$ de M_{λ, F_1} fournie par le lemme dans cette carte. On a $\mathcal{D}(\lambda_0) = \mathcal{D}_1 + \lambda_0 \mathcal{D}_2 = (1/\beta) \mathcal{D}_{y_1}$, d'après le § 1.2.5. La matrice de \mathcal{D}_{y_1} est donc soit sans pôle, ce qui permet de conclure par récurrence sur le rang de M d'après la proposition 2.1.1, soit de la forme $y^{-s} [A'_0(\lambda_0) + C'(\lambda_0)]$ avec $s_1 > 0$, $s_2 \geq 0$, $C'(\lambda_0) \in (y_1, y_2) \mathbf{C}[[y_1, y_2]] \otimes M_d(\mathbf{C})$ et $A'_0(\lambda_0)$ non nilpotente. D'après le lemme 4.2.2, puisque M est à déterminant régulier, on a $\text{tr } A'_0(\lambda_0) = 0$ et par suite $A'_0(\lambda_0)$ a au moins deux valeurs propres distinctes. On conclut ici encore par récurrence sur le rang de M en appliquant la proposition 2.3.1. \square

Démonstration du lemme 4.3.3. — Elle suit celle de [4, § 6]. Remarquons que si $A_0(\lambda)$ est dans $\mathbf{C}[\lambda]_F \otimes M_d(\mathbf{C})$,

- Si $A_0(\lambda)$ est non nilpotente, il existe $F' \supset F$ fini tel que $A_0(\lambda_0)$ soit non nilpotente pour tout $\lambda_0 \notin F'$;
- Si $A_0(\lambda)$ est nilpotente, alors $A_0(\lambda_0)$ est nilpotente pour tout $\lambda_0 \notin F$ et il existe $F' \supset F$ fini tel que la dimension de l'orbite $\nu(A_0(\lambda_0))$ soit indépendante de $\lambda_0 \notin F'$. Nous la noterons $\nu(A_0(\lambda))$.

Nous allons montrer que, sous les hypothèses du lemme, nous pouvons trouver une suite complète d'éclatements toriques et de ramifications locales après laquelle, si la conclusion du lemme n'est pas satisfaite, le nombre $\nu(A_0(\lambda))$ a strictement augmenté. Nous allons construire cette suite en vue de préparer la matrice $\mathcal{D}(\lambda)$ à la transformation d'élagage (« shearing transformation »).

Lemme 4.3.4. — *Soit $M_{\lambda, F}$ une $R_{\lambda, F}$ -connexion munie d'une base comme dans le lemme 4.3.3. Quitte à remplacer F par un ensemble fini un peu plus gros, il existe une base de $M_{\lambda, F}$ dans laquelle la matrice $x^{-r} [A_0(\lambda) + C'(\lambda)]$ de $\mathcal{D}(\lambda)$ satisfait de plus le fait que toutes les composantes de $C'(\lambda)$ sont primitives relativement à $A_0(\lambda)$.*

Démonstration. — Nous utiliserons les résultats de l'appendice, § A.1. Écrivons

$$C(\lambda) = \sum_{m \in \mathbf{N} - \{0\}} C_m(\lambda) x^m.$$

Montrons par récurrence sur l'ordre \prec utilisé dans la preuve de la proposition 2.3.1 que l'on peut trouver une base avec $C'_m(\lambda) \in \text{Ker ad } X(\lambda)$ pour tout m . Quitte à augmenter F , on peut supposer que, pour tout m , $C_m(\lambda)$ se décompose sur $\text{Ker ad } X(\lambda) \oplus \text{Im ad } A_0(\lambda)$:

$$C_m(\lambda) = C'_m(\lambda) + [T_m(\lambda), A_0(\lambda)]$$

et soit $P_m(\lambda) = [\text{Id} + x^m T_m(\lambda)]$. C'est une matrice dans $\text{GL}(d, \mathbf{C}[\lambda]_F[[x_1, x_2]])$. Si l'on suppose que $C'_{m'}(\lambda) = C_{m'}(\lambda)$ pour tout $m' \prec m$, on voit qu'après le changement de base de matrice $P_m(\lambda)$ les termes de degré $m' \prec m$ n'ont pas changé, donc sont dans $\text{Ker ad } X(\lambda)$ et le nouveau terme de degré m est $C'_m(\lambda)$. \square

Choisissons maintenant $F' \supset F$ pour pouvoir appliquer la théorie de Jacobson-Morosov avec bonne restriction sur $\mathbf{C}[\lambda]_{F'}$ (voir l'appendice § A.1). Nous pouvons alors écrire $C'(\lambda) = \sum_{i=1}^q a_i(\lambda) Z_i(\lambda)$ sur la base des vecteurs de plus haut poids, où l'on a $a_i(\lambda) \in \mathbf{C}[\lambda]_{F'} \llbracket x_1, x_2 \rrbracket$. Nous pouvons appliquer le lemme 1.2.4 aux éléments $a_i(\lambda)$ munis des poids $k_i = 2 + w_i$, où w_i est le poids de $Z_i(\lambda)$. Le lemme fournit une suite complète d'éclatements toriques π après laquelle on peut écrire la matrice de $\mathcal{D}(\lambda)$ comme dans le lemme précédent avec de plus le fait que dans chaque carte, pour tout $i = 1, \dots, q$, on a

$$a_i(\lambda) = a_i^o(\lambda) x'^{m_i} u_i(\lambda)(x'_1, x'_2)$$

avec les $a_i^o(\lambda)$ non tous nuls, $u_i(\lambda)(0, 0) = 1$ et l'ensemble

$$\left\{ \frac{r}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{m_i}{w_i + 2} \mid i = 1, \dots, q \right\} \subset (\mathbf{Q}_+)^2$$

admet un minimum $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ pour l'ordre partiel de \mathbf{Q}^2 .

Dans chaque carte, la matrice de $\mathcal{D}(\lambda)$ est alors préparée pour la transformation d'élagage que nous allons effectuer maintenant. Fixons une telle carte, avec des coordonnées (x'_1, x'_2) et soit $\alpha \in \mathbf{N} - \{0\}$ avec $\alpha \cdot \delta \in \mathbf{N}^2$. Considérons la ramification ρ définie par $x'_1 = y_1^\alpha$, $x'_2 = y_2^\alpha$ et le changement de base de $\rho^+ M_{\lambda, F'}$ de matrice $y^{\alpha \delta H(\lambda)} = y_1^{\alpha \delta_1 H(\lambda)} \cdot y_2^{\alpha \delta_2 H(\lambda)}$, où $H(\lambda)$ est l'élément semi-simple du \mathfrak{sl}_3 -triplet construit à partir de $A_0(\lambda)$ (pour donner un sens à cette expression, on effectue d'abord un changement de base constant sur M pour obtenir une base dans laquelle $H(\lambda)$ est diagonal et à valeurs propres entières, donc indépendantes de λ). Soit $\mathbf{m}'(\lambda)$ la base obtenue après cette transformation d'élagage. La matrice de $\mathcal{D}(\lambda)$ s'écrit alors (cf. [4, (4.12) et § 4.6]) :

$$y^{-\alpha(r-2\delta)} \left[A_0(\lambda) + \sum_{i \in I} a_i^o(\lambda) Z_i(\lambda) + C''(\lambda) \right] + E(\lambda)$$

où $I \subset \{1, \dots, q\}$ est l'ensemble des i tels que $m_i/(w_i + 2) = \delta$, $C''(\lambda)$ est à éléments dans $(y_1, y_2)\mathbf{C}[\lambda]_{F'} \llbracket y_1, y_2 \rrbracket$ et $E(\lambda)$ dans $\mathbf{C}[\lambda]_{F'} \llbracket y_1, y_2 \rrbracket$.

On voit que si $\delta = r/2$, la matrice de $\mathcal{D}(\lambda)$ est sans pôle. Sinon, si $A_0(\lambda) + \sum_{i \in I} a_i^o(\lambda) Z_i(\lambda)$ est non nilpotente, il existe $F_1 \supset F'$ fini telle que la conclusion du lemme 4.3.3 soit satisfaite. Supposons donc que cette matrice soit nilpotente. Alors, par construction de F' , $Z_i(\lambda_0)$ est un vecteur de plus haut poids pour $A_0(\lambda_0)$ si $\lambda_0 \notin F'$, de sorte que pour tout $\lambda_0 \notin F'$ on a

$$\nu \left(A_0(\lambda_0) + \sum_{i \in I} a_i^o(\lambda_0) Z_i(\lambda_0) \right) > \nu(A_0(\lambda_0)) = \nu(A_0(\lambda))$$

et donc

$$\nu \left(A_0(\lambda) + \sum_{i \in I} a_i^o(\lambda) Z_i(\lambda) \right) > \nu(A_0(\lambda)).$$

En itérant le procédé, on se ramène au cas où la conclusion du lemme est satisfaite, puisque $\nu(A_0(\lambda))$ est borné. \square

4.4. Cas d'une partie principale nilpotente. — Revenons au cas général considéré au début de cette section 4. Considérons une R -connexion M de rang d à déterminant régulier et munie d'une base \mathbf{m} dans laquelle la matrice Θ est réduite et satisfait suivant les cas une des propriétés (1) ou (2) de la proposition 4.1.1. Notons $\nu(\Theta) = \nu(A_0)$ (= dimension de l'orbite de A_0). L'implication $(1.3.1)_{d-1} \Rightarrow (1.3.1)_d$ est conséquence de l'énoncé

Conjecture 4.4.1. — *Dans ces conditions, si l'énoncé $(1.3.1)_{d-1}$ est vrai, il existe une suite M -complète de longueur finie $(\varpi_n, \mathcal{X}_n)_{n \leq N}$ composée d'éclatements locaux formels et de ramifications locales formelles telle que, pour tout $x \in \mathcal{X}_N$, la connexion $(\pi^+ M)_x$ satisfait l'une des propriétés suivantes, en notant π la composée des ϖ_n :*

- $(\pi^+ M)_x$ admet une bonne décomposition formelle ;
- $(\pi^+ M)_x$ admet une base dans laquelle la matrice $'\Theta$ de la connexion a une partie principale non nilpotente ;
- $(\pi^+ M)_x$ admet une base dans laquelle la matrice $'\Theta$ de la connexion satisfait les mêmes propriétés que Θ et de plus $\nu(' \Theta) > \nu(\Theta)$.

Nous proposons aux §§ 5 et 6 une démonstration de cet énoncé dans certaines situations, notamment pour $d \leq 5$.

La démonstration consiste à effectuer un changement de base (transformation d'élagage ou « shearing transformation », voir [61] ou [4]) qui perturbe la partie principale en lui ajoutant une partie sous-principale primitive, comme plus haut pour le cas torique. Aussi, la difficulté essentielle consiste à créer une telle partie sous-principale.

4.5. Interlude : transformation de Fourier. — Nous allons montrer ici comment on peut utiliser directement la proposition 4.3.1 pour obtenir la conclusion de l'énoncé 1.3.1 dans le cas où la connexion irrégulière est obtenue par transformation de Fourier partielle dans une direction à partir d'une connexion à singularités régulières.

Soit donc U un voisinage ouvert de 0 dans \mathbf{C} muni de la coordonnée x_2 ; dans la suite nous permettrons de rétrécir U suivant les besoins. Soit M un module holonome sur l'anneau $\mathcal{O}_U[x_1]\langle \partial_{x_1}, \partial_{x_2} \rangle$ (voir par exemple [9]), à singularités régulières y compris à l'infini en x_1 . La donnée de M est équivalente à la donnée d'un module holonome \mathcal{M} sur $\mathbf{P}^1 \times U$, égal à son localisé le long du diviseur $\{\infty\} \times U$, où \mathbf{P}^1 est l'adhérence projective de la droite affine \mathbf{A}^1 de coordonnée x_1 , et $\{\infty\} = \{x_1 = \infty\} = \{y_1 = 0\} \subset \mathbf{P}^1$ où y_1 est la coordonnée de \mathbf{P}^1 au voisinage ∞ , avec $y_1 = 1/x_1$ sur $\mathbf{P}^1 - \{0, \infty\}$ (voir par exemple [1, 2]).

Posons $\xi_1 = \partial_{x_1}$ et $\partial_{\xi_1} = -x_1$, de sorte que $\mathcal{O}_U[x_1]\langle \partial_{x_1}, \partial_{x_2} \rangle = \mathcal{O}_U[\xi_1]\langle \partial_{\xi_1}, \partial_{x_2} \rangle$. On note⁽¹⁾ \widehat{M} le module M vu comme $\mathcal{O}_U[\xi_1]\langle \partial_{\xi_1}, \partial_{x_2} \rangle$ -module. C'est le transformé de Fourier de M dans la direction x_1 . C'est encore un module holonome, mais il n'est plus nécessairement régulier. On note aussi $\widehat{\mathcal{M}}$ le module holonome sur $\widehat{\mathbf{P}}^1 \times U$ qui lui correspond, où $\widehat{\mathbf{P}}^1$ est la droite projective adhérence de la droite affine $\widehat{\mathbf{A}}^1$ de coordonnée ξ_1 . Par construction, le module $\widehat{\mathcal{M}}$ est localisé le long de $\{\xi_1 = \infty\} = \{\eta_1 = 0\}$.

Lemme 4.5.1. — *Si U est assez petit, le lieu singulier \widehat{D}' de $\widehat{\mathcal{M}}$ est contenu dans le diviseur $\widehat{D} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\xi_1 = 0\} \cup \{\xi_1 = \infty\} \cup \{x_2 = 0\}$ et $\widehat{\mathcal{M}}$ est régulier de long de $\{\xi_1 = 0\}$ sur $U^* \stackrel{\text{déf}}{=} U - \{0\}$.*

Démonstration. — Le résultat se voit par un calcul générique sur U^* , en se ramenant au cas de la dimension 1, où on peut appliquer les calculs de [44] (voir par exemple [1, 2, th. 1.6]). \square

Le localisé $\widehat{\mathcal{M}}[\ast\widehat{D}']$ du module $\widehat{\mathcal{M}}$ le long de son lieu singulier \widehat{D}' est une connexion méromorphe sur $\widehat{\mathbf{P}}^1 \times U$ à pôle le long de \widehat{D}' . Nous allons montrer dans la suite de ce paragraphe que l'énoncé 1.3.1 est vrai pour cette connexion méromorphe que l'on supposera non nulle dans la suite. On notera alors \widehat{r} son rang.

Lemme 4.5.2. — *Il suffit de montrer l'énoncé 1.3.1 pour la connexion localisée le long de \widehat{D} .*

Démonstration. — C'est une conséquence du corollaire 2.5.3 appliqué après une suite d'éclatements donnant une bonne structure formelle à $\widehat{\mathcal{M}}[\ast\widehat{D}]$ (le seul point où il faut appliquer ce corollaire est le point d'intersection du transformé strict de $\{x_2 = 0\}$ avec le diviseur exceptionnel de la suite d'éclatements). \square

Considérons donc la connexion $\widehat{\mathcal{M}}[\ast\widehat{D}]$. Elle correspond (*via* la correspondance indiquée ci-dessus) au $\mathcal{O}_U[x_1]\langle \partial_{x_1}, \partial_{x_2} \rangle$ -module holonome $\widehat{M}[\xi_1^{-1}, x_2^{-1}]$, qui lui-même est le transformé de Fourier partiel du module holonome $M[\partial_{x_1}^{-1}, x_2^{-1}]$. Dans la suite, nous supposons donc que $M = M[\partial_{x_1}^{-1}, x_2^{-1}]$.

Le cycle caractéristique du $\mathcal{D}_{\mathbf{P}^1 \times U}$ -module holonome régulier \mathcal{M} admet l'expression suivante :

$$(4.5.3) \quad \text{CCh } \mathcal{M} = r \cdot T_{\mathbf{P}^1 \times U}^*(\mathbf{P}^1 \times U) + m \cdot T_{\{x_2=0\}}^*(\mathbf{P}^1 \times U) \\ + m_\infty \cdot T_{\{x_1=\infty\}}^*(\mathbf{P}^1 \times U) + \sum_{i \in I} m_i \cdot T_{Z_i}^*(\mathbf{P}^1 \times U)$$

⁽¹⁾Dans ce § 4.5 nous n'utilisons pas de séries formelles, de sorte que la notation (traditionnelle) \widehat{M} pour le transformé de Fourier n'entrera pas en conflit avec la notation du formalisé utilisée dans le reste de cet article.

où I est un ensemble fini d'indices, Z_i est une courbe analytique fermée irréductible dans $\mathbf{P}^1 \times U$ distincte de $\{x_2 = 0\}$ et $\{x_1 = \infty\}$, $r \geq 0$ est le rang générique de \mathcal{M} , et m, m_∞ et les m_i sont des entiers ≥ 0 . Le rang générique \widehat{r} de $\widehat{\mathcal{M}}$ est alors égal à $\sum_{i \in I} m_i d_i$, si d_i désigne le degré de la projection $Z_i \rightarrow U$.

Le résultat suivant est facile :

Lemme 4.5.4. — *Après une ramification $\rho : x'_2 \mapsto x_2 = x'^2_2$ pour N convenable, le degré de la projection sur U^1 de chaque composante irréductible de $\rho^{-1}(Z_i)$ (pour tout $i \in I$) est égal à 1.* \square

Dans la suite nous supposons qu'une telle ramification est effectuée (ce qui est loisible, étant donné la définition de bonne structure formelle) et nous supposons dès le début que tous les d_i sont égaux à 1. On note alors

$$(4.5.5) \quad x_1 = \varphi_i(x_2)$$

une équation de Z_i , où $\varphi_i(x_2) = x_2^{\nu_i} u_i(x_2)$, $u_i(0) \neq 0$ et $\nu_i \in \mathbf{Z}$. La conclusion de 1.3.1 pour $\widehat{\mathcal{M}}$ résulte alors de la proposition 4.3.1 et du lemme ci-dessous. \square

Lemme 4.5.6. — *Pour toute suite e d'éclatements toriques au-dessus des points $\xi_1 = 0, x_2 = 0$ et $\xi_1 = \infty, x_2 = 0$, la connexion image inverse $e^+ \widehat{\mathcal{M}}$ admet une bonne décomposition formelle le long de la partie lisse de $e^{-1}(\widehat{D})$.*

Démonstration. — Commençons par en indiquer le principe. Soit \widehat{E} une composante irréductible de $e^{-1}(\{\xi_1 = 0, x_2 = 0\})$ ou de $e^{-1}(\{\xi_1 = \infty, x_2 = 0\})$ et \widehat{E}° la partie de \widehat{E} qui est lisse dans $e^{-1}(\widehat{D})$. Nous allons calculer explicitement les facteurs exponentiels qui interviennent dans la décomposition générique de $e^+ \widehat{\mathcal{M}}$ le long de \widehat{E}° et vérifier que les propriétés mentionnées dans le théorème 2.5.2 sont satisfaites le long de \widehat{E}° . On peut alors appliquer les arguments de [5] *via* le théorème 2.5.2 pour en conclure que la décomposition a lieu le long de \widehat{E}° (et pas seulement sur un ouvert).

Pour vérifier qu'un facteur exponentiel φ intervient dans la décomposition formelle générique de $e^+ \widehat{\mathcal{M}}$ le long de \widehat{E}° , il suffit de voir que, génériquement sur \widehat{E}° , la connexion $e^+ \widehat{\mathcal{M}} \otimes \mathcal{E}^{-\varphi}$, une fois formalisée le long de \widehat{E}° , a une partie régulière non triviale. Le calcul de cette partie régulière peut se faire directement (*i.e.* sans passer au formalisé), en utilisant le foncteur de cycles proches modérés ψ_g^{mod} , si g est une équation de \widehat{E}° (nous renvoyons par exemple à [54] pour les propriétés de ce foncteur). Alors $\psi_g^{\text{mod}}(e^+ \widehat{\mathcal{M}} \otimes \mathcal{E}^{-\varphi})$ est, génériquement sur \widehat{E}° , une connexion méromorphe de rang $\widehat{r}_\varphi > 0$.

On est sûr d'avoir obtenu tous les facteurs exponentiels (supposés distincts mod. $\widehat{\mathcal{O}}$) intervenant dans la décomposition formelle générique dès que $\sum_\varphi \widehat{r}_\varphi = \widehat{r}$ (rang générique de $\widehat{\mathcal{M}}$).

Considérons donc une suite d'éclatements toriques e au-dessus du point $\xi_1 = 0, x_2 = 0$. Toute carte possède des coordonnées ξ'_1, x'_2 de sorte que la suite d'éclatement est décrite dans cette carte par les formules

$$\xi_1 \circ e = \xi_1^a x_2^b \quad x_2 \circ e = \xi_1^c x_2^d$$

où $a, b, c, d \in \mathbf{N}$ satisfont $ad - bc = \pm 1$. On peut supposer, quitte à changer les notations, que b et d sont non nuls et que \widehat{E} est défini par $x'_2 = 0$.

On décrit de la même manière une carte d'une suite d'éclatements toriques e au-dessus de $\xi'_1 = \infty, x'_2 = 0$. On peut écrire

$$\xi_1 \circ e = \xi_1^a x_2'^b \quad x_2 \circ e = \xi_1^{-c} x_2'^d$$

avec a, b, c, d comme ci-dessus et on peut supposer b et d non nuls et $\widehat{E} = \{x'_2 = 0\}$.

Fixons une telle carte. Dans les deux cas on note $I_{\widehat{E}} = \{i \in I \mid \pm b + \nu_i d < 0\}$, où on choisit $+$ pour le premier cas et $-$ pour le second. Ainsi, $i \in I_{\widehat{E}}$ si et seulement si $(\xi_1 \varphi_i) \circ e$ a un pôle le long de \widehat{E} dans la carte considérée.

On considère la relation suivante dans $I_{\widehat{E}}$: on a $i \sim j$ si

- (a) $\nu_i = \nu_j$ et
- (b) si $u_i(x_2) - u_j(x_2) = x_2^{\nu_{ij}} v_{ij}(x_2)$ avec $v_{ij}(0) \neq 0$ et $\nu_{ij} \in \mathbf{N}$, alors $\pm b + \nu_i d + \nu_{ij} d \geq 0$.

On note $[i]$ la classe de $i \in I_{\widehat{E}}$. On a alors $i \sim j$ si et seulement si $(\xi_1 \varphi_i) \circ e$ et $(\xi_1 \varphi_j) \circ e$ sont égaux mod. \mathcal{O} génériquement le long de \widehat{E} . On notera $[(\xi_1 \varphi_i) \circ e]$ la classe correspondante.

Au vu des considérations faites plus haut, le lemme 4.5.6 résulte alors de la

Proposition 4.5.7. — *Génériquement sur \widehat{E}^o , on a*

$$\text{rg } \psi_{x'_2}^{\text{mod}}(e^+ \widehat{\mathcal{M}}) = \sum_{j \in I - I_{\widehat{E}}} m_j \quad \text{et} \quad \forall i \in I_{\widehat{E}} \quad \text{rg } \psi_{x'_2}^{\text{mod}}(e^+ \widehat{\mathcal{M}} \otimes \mathcal{E}^{(\xi_1 \varphi_i) \circ e}) = \sum_{j \in [i]} m_j.$$

Cette proposition montre en effet que les facteurs exponentiels qui interviennent dans la décomposition formelle générique de $e^+ \widehat{\mathcal{M}}$ sont les $(\xi_1 \varphi_i) \circ e$. Cette famille de facteurs satisfait la condition (B) sur \widehat{E}^o puisque le coefficient de $x_2'^{\pm b + \nu_i d}$ dans $(\xi_1 \varphi_i) \circ e$ ne s'annule qu'en $\xi'_1 = 0$ ou $\xi'_1 = \infty$ au plus, et il en est de même pour le coefficient des différences $(\xi_1 \varphi_i) \circ e - (\xi_1 \varphi_j) \circ e$ si $i, j \in I_{\widehat{E}}$ ne sont pas équivalents.

Démonstration. — Il suffit de calculer $\psi_{x'_2}^{\text{mod}}$ pour la restriction de $e^+ \widehat{\mathcal{M}}$ ou $e^+ \widehat{\mathcal{M}} \otimes \mathcal{E}^{(\xi_1 \varphi_i) \circ e}$ à un germe de courbe $\xi'_1 = \eta$ avec $\eta \neq 0$ assez général. Si $p' : \mathbf{P}^1 \times U' \rightarrow U'$ désigne la projection et $\rho : U' \rightarrow U$ la ramification $x'_2 \mapsto x_2 = \eta^c x_2^d$, on a alors

$$e^+ \widehat{\mathcal{M}}|_{\xi'_1 = \eta} = p'_+ \left(\rho^+ \mathcal{M} \otimes \mathcal{E}^{-\eta^a x_1 x_2'^{\pm b}} \right)$$

et

$$\left(e^+ \widehat{\mathcal{M}} \otimes \mathcal{E}^{(\xi_1 \varphi_i) \circ e} \right)|_{\xi'_1 = \eta} = p'_+ \left(\rho^+ \mathcal{M} \otimes \mathcal{E}^{-\eta^a x_2'^{\pm b} (x_1 - \varphi_i(x_2))} \right)$$

où p'_+ désigne l'image directe au sens des \mathcal{D} -modules.

Montrons par exemple la première égalité dans le cas +. Soient

$$q : \mathbf{P}^1 \times \widehat{\mathbf{P}}^1 \times U \rightarrow \mathbf{P}^1 \times U \quad \text{et} \quad p : \mathbf{P}^1 \times \widehat{\mathbf{P}}^1 \times U \rightarrow \widehat{\mathbf{P}}^1 \times U$$

les projections. Alors $\widehat{\mathcal{M}} = p_+(q^+ \mathcal{M}[\xi_1^{-1}] \otimes e^{-x_1 \xi_1})$, autrement dit, si l'on pose $M[\xi_1] = M \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[\xi_1]$, l'application $\mathbf{C}\{x_2\}[\xi_1]$ -linéaire

$$M[\xi_1] \xrightarrow{\partial_{x_1} - \xi_1} M[\xi_1]$$

est injective et a pour conoyau \widehat{M} . Comme M est plat sur $\mathbf{C}\{x_2\}$ (puisque sans torsion par hypothèse), on voit que $M[\xi_1]$ est plat sur $\mathbf{C}\{x_2\}[\xi_1]$ et il en est de même de $\mathbf{C}\{x_2, \xi_1\} \otimes M[\xi_1]$ sur l'anneau $\mathbf{C}\{x_2, \xi_1\}$. De plus, $\widehat{\mathcal{M}} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{C}\{x_2, \xi_1\} \otimes \widehat{M}$ est aussi plat sur $\mathbf{C}\{x_2, \xi_1\}$ puisque c'est une connexion méromorphe. L'égalité voulue s'obtient alors par changement de base.

Puisque les nombres ν'_i associés à $\rho^+ \mathcal{M}$ ne sont autres que les $\nu_i d$, on peut supposer dès le début que $d = 1$ et $\rho = \text{Id}$ pour simplifier les notations. On posera alors $x'_2 = x_2$. On peut maintenant reformuler la proposition sous la forme suivante :

Proposition 4.5.8. — *Soit M un $\mathcal{O}_U[x_1](\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ -module holonome régulier (y compris à l'infini en x_1) sur lequel la multiplication par x_2 est inversible. On suppose que le cycle caractéristique de \mathcal{M} a la forme (4.5.3) où les Z_i , $i \in I$ ont pour équation (4.5.5). Soit $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$. On a alors*

$$\dim \psi_{x_2}^{\text{mod}} p_+ \left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}^{\lambda x_1 x_2^{\pm b}} \right) = \sum_{\{j \in I | \nu_j \geq \mp b\}} m_j$$

et, pour tout i tel que $\nu_i < \mp b$,

$$\dim \psi_{x_2}^{\text{mod}} p_+ \left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}^{\lambda x_2^{\pm b} (x_1 - \varphi_i(x_2))} \right) = \sum_{\{j \in I | [j] = [i]\}} m_j.$$

Commençons par vérifier le lemme lorsque \mathcal{M} est à support dans une des courbes Z_i , que nous noterons Z_k , de sorte que $I = \{k\}$ et nous pouvons prendre x_2 comme coordonnée sur cette courbe. Alors la restriction de \mathcal{M} à cette courbe est une connexion méromorphe d'une variable à singularité régulière à l'origine. Par un argument d'extension on peut supposer que celle-ci est de rang 1, donc de la forme " x_2^α " et par suite $m_k = 1$. Dans ce cas le lemme est satisfait puisque l'on a

$$\dim \psi_{x_2}^{\text{mod}} \left("x_2^\alpha" \otimes \mathcal{E}^{\lambda x_2^{\pm b} \varphi_k(x_2)} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu_k \pm b < 0 \\ 1 & \text{si } \nu_k \pm b \geq 0 \end{cases}$$

et, si $\nu_k \pm b < 0$, on a $\dim \psi_{x_2}^{\text{mod}} ("x_2^\alpha") = 1$.

Pour \mathcal{M} quelconque, on peut, du fait de la vérification ci-dessus, localiser le long des courbes Z_i , autrement dit supposer que \mathcal{M} est une connexion méromorphe, ce que nous ferons dans la suite. Notons que dans ce cas on a $m_i = r = \text{rg } \mathcal{M}$ pour tout $i \in I$ puisque \mathcal{M} est régulière.

Nous allons utiliser les propriétés suivantes du foncteur ψ^{mod} (voir par exemple [54]) :

- soit f un germe de fonction analytique sur un ouvert X de \mathbf{C}^2 et \mathcal{N} un \mathcal{D}_X -module holonome régulier ; alors $\psi_f^{\text{mod}}(\mathcal{N})$ est un \mathcal{D}_X -module holonome à support dans $f = 0$ (si f est lisse, on peut aussi le définir comme un $\mathcal{D}_{f=0}$ -module holonome) ;
- ce foncteur commute à l'image directe propre ;
- soit \mathbf{n} un générateur local de \mathcal{N} et considérons une équation fonctionnelle de Bernstein $b(s)\mathbf{n}f^s = P(x, \partial_x, s)\mathbf{n}f^{s+1}$ avec $b \not\equiv 0$ de degré minimal ; alors si b est constant, on a $\psi_f^{\text{mod}}(\mathcal{N}) = 0$;
- si f est non singulière et \mathcal{N} est régulier le long de $f = 0$ on a ${}^p\text{DR}^{\text{an}}\psi_f^{\text{mod}}\mathcal{N} = {}^n\psi_f{}^p\text{DR}^{\text{an}}\mathcal{N}$, où ψ désigne le foncteur des cycles proches pour les faisceaux (voir par exemple [27]), ${}^n\psi \stackrel{\text{déf}}{=} \psi[-1]$ désigne le même foncteur décalé de -1 , DR^{an} est le complexe de de Rham à coefficients analytiques et sur une variété X on pose ${}^p\text{DR}^{\text{an}} \stackrel{\text{déf}}{=} \text{DR}^{\text{an}}[\dim X]$.

Par ailleurs on a

Lemme 4.5.9. — Soit \mathcal{N} un germe en 0 de connexion méromorphe régulière de rang r de deux variables, à pôles le long d'une courbe d'équation réduite $fg = 0$. Alors

- (1) $\psi_f^{\text{mod}}(\mathcal{N} \otimes \mathcal{E}^{1/f^k})_0 = 0$;
- (2) $\chi\left({}^p\text{DR}^{\text{an}}\psi_f^{\text{mod}}(\mathcal{N})\right)_0 = r \cdot [(Y \cdot Z)_0 - 1]$, où $(Y \cdot Z)_0$ désigne la multiplicité d'intersection en 0 de $Y = \{f = 0\}$ et $Z = \{g = 0\}$.

Démonstration. — Le premier point résulte du fait que si \mathbf{n} est une section locale de \mathcal{N} , le polynôme de Bernstein de $\mathbf{n}e^{1/f^n}f^s$ est constant (voir [15]). Le second utilise le calcul topologique de ${}^p\text{DR}^{\text{an}}\psi_f^{\text{mod}}\mathcal{N}$ indiqué ci-dessus. □

Lemme 4.5.10. — Soit \mathcal{N} une connexion méromorphe à pôles le long de $x_1x_2 = 0$ et à singularités régulières. Soient $m = (m_1, m_2) \in \mathbf{N}^2 - \{0\}$ et $n = (n_1, n_2) \in (\mathbf{N} - \{0\})^2$ et $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$. Alors

- (1) $\chi\left({}^p\text{DR}^{\text{an}}\psi_{x_1}^{\text{mod}}\mathcal{N}\right)_0 = 0$,
- (2) $\psi_{x_1}^{\text{mod}}(\mathcal{N} \otimes \mathcal{E}^{\lambda/x_1^n})_0 = 0$ et
- (3) $\chi\left({}^p\text{DR}^{\text{an}}\psi_{x_1}^{\text{mod}}\left(\mathcal{N} \otimes \mathcal{E}^{\lambda/x_1^{n_1}}\right)\right)_0 = rm_2n_1$.

Démonstration. — On peut supposer que \mathcal{N} est de rang 1 puisque \mathcal{N} est extension de connexions de rang 1. On notera $\mathcal{N} = "x^\alpha"$ avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in [-1, 0]^2$.

Le premier point est alors immédiat puisque la fibre de Milnor de la fonction x^m dans un tore a le type d'homotopie d'une réunion de cercles S^1 .

Pour le second, on vérifie facilement que le polynôme de Bernstein de $x^\alpha e^{\lambda x^n} x^{ms}$ est égal à 1.

Montrons le troisième point. On voit d'abord que $\psi_{x^m}^{\text{mod}}("x^\alpha" \otimes \mathcal{E}^{\lambda/x_1^{n_1}})$ est à support dans $x_2 = 0$, puisque le long de $x_1 = 0$ et si $x_2 \neq 0$ on peut appliquer le premier point du lemme 4.5.9. Nous allons montrer que $\psi_{x^m}^{\text{mod}}("x^\alpha" \otimes \mathcal{E}^{\lambda/x_1^{n_1}})$ est (l'image directe par l'inclusion $\{x_2 = 0\} \hookrightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ d') une connexion méromorphe sur $x_2 = 0$, à pôle le long de $x_1 = 0$, telle que $\mathcal{E}^{-\lambda/x_1^{n_1}} \otimes \psi_{x^m}^{\text{mod}}("x^\alpha" \otimes \mathcal{E}^{\lambda/x_1^{n_1}})$ est régulière. Cette connexion est de rang générique m_2 puisqu'il en est de même de $\psi_{x^m}^{\text{mod}}("x^\alpha")$ le long de $x_2 = 0$ pour $x_1 \neq 0$ (c'est ici un calcul topologique). L'assertion voulue est alors conséquence du théorème de l'indice pour les connexions irrégulières (voir [39]).

Pour calculer le module $\psi_{x^m}^{\text{mod}}("x^\alpha" \otimes \mathcal{E}^{\lambda/x_1^{n_1}})$, on considère le $\mathbf{C}\{x\}[t]\langle\partial_x, \partial_t\rangle$ -module $\mathbf{C}\{x\}[x^{-1}, \partial_t] \cdot \varepsilon$, avec $\varepsilon = "x^\alpha" e^{\lambda/x_1^{n_1}} \delta(t - x^m)$, image directe par l'inclusion $(\mathbf{C}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbf{C}^3, 0)$, associée au graphe de la fonction x^m , de $"x^\alpha" \otimes \mathcal{E}^{\lambda/x_1^{n_1}}$. On remarque que la multiplication par t est inversible sur ce module : c'est vrai sur le gradué de la filtration par le degré en ∂_t puisque $t\delta(t - x^m) = x^m\delta(t - x^m)$ et on en déduit que c'est vrai sur le module lui-même.

Il suffit alors de montrer que pour une filtration $U_\bullet(\mathbf{C}\{x\}[x^{-1}, \partial_t] \cdot \varepsilon)$ bonne relativement à la V -filtration de $\mathbf{C}\{x\}[t]\langle\partial_x, \partial_t\rangle$ relative à $t = 0$, le quotient U_0/tU_0 est l'image directe par l'inclusion $\{x_2 = 0\} \hookrightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ d'une connexion méromorphe du type voulu. Il s'agit donc de calculer

$$\Psi = \mathbf{C}\{x\}[t]\langle\partial_x, t\partial_t\rangle \cdot \varepsilon / t\mathbf{C}\{x\}[t]\langle\partial_x, t\partial_t\rangle \cdot \varepsilon.$$

On a les relations

$$(4.5.11) \quad (x_1\partial_{x_1} - \alpha_1) \cdot \varepsilon = \left(-\frac{\lambda n_1}{x_1^{n_1}} - m_1\partial_t\right) \cdot \varepsilon$$

et

$$(4.5.12) \quad \partial_{x_2}^{m_2} x_2^{m_2} \varepsilon = (-1)^{m_2} \prod_{k=0}^{m_2-1} (m_2 t \partial_t - \alpha_2 + k) \cdot \varepsilon.$$

La première relation montre que $\varepsilon = Q(x_1\partial_{x_1}, t\partial_t) \cdot x_1^{n_1} \varepsilon$, où Q est un polynôme à coefficients constants. On déduit alors de la deuxième relation que le polynôme de Bernstein $b(t\partial_t)$ de ε relativement à $t = 0$ divise $\prod_{k=0}^{m_2-1} (m_2 t \partial_t - \alpha_2 + k)$ et on voit aussi que la multiplication par x_1 est inversible sur Ψ . Si $[\varepsilon]$ désigne la classe de ε dans Ψ , on a $0 = t[\varepsilon] = x^m[\varepsilon]$, donc $x_2^{m_2}[\varepsilon] = 0$ et Ψ est à support dans $x_2 = 0$. Comme $t\partial_t$ est un endomorphisme de Ψ admettant b pour polynôme minimal, la relation (4.5.11) montre que $\mathcal{E}^{-\lambda/x_1^{n_1}} \otimes \Psi$ est une connexion méromorphe régulière. \square

Remarque 4.5.13. — Notons que si \mathcal{N} est comme dans le lemme 4.5.9 et si $f = x_2$, on a aussi, pour une telle connexion, $\psi_{x_2}^{\text{mod}}(\mathcal{N}[x_1^{-1}] \otimes \mathcal{E}^{\lambda/x_1^{n_1}} x_2^b)_0 = 0$ si $a, b > 0$: on se ramène, après éclatements rendant le diviseur $x_1 x_2 g = 0$ à croisements normaux, à la situation considérée au premier point du lemme 4.5.9 ou au deuxième point du lemme 4.5.10.

Revenons à la démonstration de la proposition 4.5.8 lorsque \mathcal{M} est une connexion méromorphe. On a

$$\begin{aligned} \psi_{x_2}^{\text{mod}} p_+ \left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}^{\lambda x_1 x_2^{\pm b}} \right) &= p_+ \psi_{x_2}^{\text{mod}} \left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}^{\lambda x_1 x_2^{\pm b}} \right) \\ &= R\Gamma \left(\mathbf{P}^1; {}^p\text{DR}^{\text{an}} \psi_{x_2}^{\text{mod}} \left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}^{\lambda x_1 x_2^{\pm b}} \right) \right). \end{aligned}$$

La dimension cherchée est donc la caractéristique d'Euler de ce dernier complexe. On peut calculer celle-ci de manière locale puisque ${}^p\text{DR}^{\text{an}} \psi_{x_2}^{\text{mod}} \left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}^{\lambda x_1 x_2^{\pm b}} \right)$ est un complexe à cohomologie constructible sur \mathbf{P}^1 .

Dans le cas $+$ on écrit

$$\begin{aligned} \chi \left(\mathbf{P}^1; {}^p\text{DR}^{\text{an}} \psi_{x_2}^{\text{mod}} \left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}^{\lambda x_1 x_2^b} \right) \right) &= \chi \left(\mathbf{A}^1; {}^p\text{DR}^{\text{an}} \psi_{x_2}^{\text{mod}} \left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}^{\lambda x_1 x_2^b} \right) \right) \\ &\quad + \chi \left({}^p\text{DR}^{\text{an}} \psi_{x_2}^{\text{mod}} j_+ \left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}^{\lambda x_1 x_2^b} \right) \right)_{x_1=\infty} \end{aligned}$$

et puisque dans ce cas $\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}^{\lambda x_1 x_2^b}$ est régulière le long de $\mathbf{A}^1 \times \{0\}$, le point (2) du lemme 4.5.9 montre que

$$\begin{aligned} \chi \left(\mathbf{A}^1; {}^p\text{DR}^{\text{an}} \psi_{x_2}^{\text{mod}} \left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}^{\lambda x_1 x_2^b} \right) \right) &= \chi \left(\mathbf{A}^1; {}^p\text{DR}^{\text{an}} \psi_{x_2}^{\text{mod}} \mathcal{M} \right) = r \cdot (\#(I - I_\infty) - 1) \\ \text{où } I_\infty &= \{i \in I \mid \nu_i < 0\}. \end{aligned}$$

Dans le cas $-$, le premier point du lemme 4.5.9 (pour $\mathbf{A}^1 - \{0\}$) et la remarque 4.5.13 (pour $x_1 = \infty$) montrent que $\psi_{x_2}^{\text{mod}} \left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{E}^{\lambda x_1 x_2^{-b}} \right)$ est à support l'origine de \mathbf{A}^1 .

Ainsi, pour montrer la première égalité de la proposition 4.5.8, tout revient à montrer les deux propriétés suivantes (quitte à faire un changement de coordonnées) :

Si \mathcal{N} est un germe en $x_1 = x_2 = 0$ de connexion méromorphe régulière à pôles le long de $x_2 = 0$ et $\cup_i Z_i$ où Z_i a pour équation $x_1 = x_2^{\nu_i} u_i(x_2)$ avec $u_i(0) \neq 0$ et $\nu_i > 0$, on a

$$(4.5.14) \quad \chi \left({}^p\text{DR}^{\text{an}} \psi_{x_2}^{\text{mod}} \left(\mathcal{N} \otimes \mathcal{E}^{\lambda x_1/x_2^b} \right)_0 \right) = r \cdot \#\{i \mid \nu_i \geq b\}.$$

Si \mathcal{N} est à pôles le long de $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $\cup_i Z_i$, on a

$$(4.5.15) \quad \chi \left({}^p\text{DR}^{\text{an}} \psi_{x_2}^{\text{mod}} \left(\mathcal{N} \otimes \mathcal{E}^{\lambda x_2^b/x_1} \right)_0 \right) = r \cdot (\#\{i \mid \nu_i \leq b\} + 1).$$

On choisit une suite d'éclatements toriques $\pi : X \rightarrow \mathbf{C}^2$ au-dessus de l'origine de \mathbf{C}^2 donnée par un éventail qui contient la demi-droite engendré par le vecteur $(\alpha, \gamma) = (b, 1)$ (nous reprenons ici les notations du § 1.2.1 en y remplaçant a, b, c, d par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$). Nous supposons de plus que les transformées strictes des courbes Z_i ($i \in I$) par π coupent le diviseur $\pi^{-1}(\{x_1 x_2 = 0\})$ en des points lisses de celui-ci uniquement (l'existence d'une telle suite se montre facilement en utilisant le lemme 1.2.2). Les composantes du diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ de π correspondent aux arêtes de cet éventail de vecteur directeur (α, γ) avec $\alpha, \gamma > 0$ premiers entre eux. La transformée

stricte de Z_i par π coupe alors une unique composante $E_{(\alpha,\gamma)}^o$, à savoir celle pour laquelle $(\alpha, \gamma) = (\nu_i, 1)$, et elle la coupe transversalement.

En utilisant la commutation de ψ^{mod} avec l'image directe propre, on voit qu'il s'agit de calculer

$$(4.5.16) \quad \chi \left(\pi^{-1}(0); {}^p\text{DR}^{\text{an}} \psi_{x_2 \circ \pi}^{\text{mod}} \left(\pi^+ \mathcal{N} \otimes \mathcal{E}^{\lambda(x_1/x_2) \circ \pi} \right) \right)$$

et

$$(4.5.17) \quad \chi \left(\pi^{-1}(0); {}^p\text{DR}^{\text{an}} \psi_{x_2 \circ \pi}^{\text{mod}} \left(\pi^+ \mathcal{N} \otimes \mathcal{E}^{\lambda(x_2^b/x_1) \circ \pi} \right) \right)$$

où, dans le second cas, on impose de plus que $\mathcal{N} = \mathcal{N}[x_1^{-1}]$. Si $E_{(\alpha,\gamma)}$ est la composante (isomorphe à \mathbf{P}^1) de $\pi^{-1}(0)$ correspondant à (α, γ) , on note $E_{(\alpha,\gamma)}^o$ la partie de $E_{(\alpha,\gamma)}$ (isomorphe à \mathbf{C}^*) qui est lisse dans $\pi^{-1}(\{x_1 x_2 = 0\})$. Nous allons calculer les χ sur les $E_{(\alpha,\gamma)}^o$, puis aux points de croisement du diviseur $\pi^{-1}(\{x_1 x_2 = 0\})$.

Commençons par (4.5.16). Le lemme 4.5.9 montre que

$$\begin{aligned} \chi \left(E_{(\alpha,\gamma)}^o; {}^p\text{DR}^{\text{an}} \psi_{x_2 \circ \pi}^{\text{mod}} \left(\pi^+ \mathcal{N} \otimes \mathcal{E}^{\lambda(x_1/x_2) \circ \pi} \right) \right) \\ = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha - b\gamma < 0 \\ r \cdot \#\{i \mid (\alpha, \gamma) = (\nu_i, 1)\} & \text{si } \alpha - b\gamma \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\sum_{(\alpha,\gamma)} \chi \left(E_{(\alpha,\gamma)}^o; {}^p\text{DR}^{\text{an}} \psi_{x_2 \circ \pi}^{\text{mod}} \left(\pi^+ \mathcal{N} \otimes \mathcal{E}^{\lambda(x_1/x_2) \circ \pi} \right) \right) = r \cdot \#\{i \mid \nu_i \geq b\}.$$

Considérons maintenant les points de croisement. Dans la carte qui contient la transformée stricte de $x_2 = 0$, on a des coordonnées x'_1, x'_2 dans lesquelles π est donnée par $x_1 = x'_1 x'^{\beta}_2$, $x_2 = x'_2$ pour un certain $\beta \geq b$. Au voisinage de l'origine de cette carte, on a $(\pi^+ \mathcal{N} \otimes \mathcal{E}^{\lambda(x_1/x_2) \circ \pi}) \simeq \pi^+ \mathcal{N}$, et c'est une connexion régulière à pôles le long de $x'_2 = 0$. De plus $x_2 \circ \pi = x'_2$. On vérifie alors que $\chi \left({}^p\text{DR}^{\text{an}} \psi_{x_2 \circ \pi}^{\text{mod}} \left(\pi^+ \mathcal{N} \otimes \mathcal{E}^{c(x_1/x_2) \circ \pi} \right)_0 \right) = -r$.

Considérons maintenant un point de croisement de $\pi^{-1}(\{x_1 x_2 = 0\})$ centre d'une carte de coordonnées x'_1, x'_2 où π s'écrit $x_1 = x'^{\alpha}_1 x'^{\beta}_2$, $x_2 = x'^{\gamma}_1 x'^{\delta}_2$, avec $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ et (puisque ce cas a été déjà traité) $(\alpha, \gamma) \neq (1, 0)$. Nous supposons par exemple que $\alpha/\gamma > \beta/\delta$, donc $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Si $\beta/\delta \geq b$, on peut appliquer le premier point du lemme 4.5.10 pour voir que $\chi = 0$ au centre de cette carte. De même, si $\alpha/\gamma < b$, on applique le second point pour obtenir $\chi = 0$. Enfin, si $\alpha/\gamma = b$ on a $\alpha = b$ et $\gamma = 1$, donc $b\delta - \beta = 1$ et $\delta = 1$, $\beta = b - 1$. On doit calculer ${}^p\text{DR}^{\text{an}} \psi_{x'_1 x'^{\delta}_2}^{\text{mod}} (\pi^+ \mathcal{N} \otimes \mathcal{E}^{c/x_2})_0$. Le χ est alors égal à r , d'après le dernier point du lemme 4.5.10.

La démonstration de (4.5.17) se fait de la même manière, ainsi que celle de la deuxième égalité dans la proposition 4.5.8, et nous la laissons au lecteur. \square

5. Le cas nilpotent : préliminaires

Nous notons dans cette section $\mathcal{P} = \mathcal{P}(M)$ le lieu des pôles de la connexion M et nous supposons que M est à déterminant régulier et que la matrice Θ de la connexion dans la base \mathbf{m} de M satisfait les conditions de la proposition 4.1.1. Elle s'écrit donc

$$\Theta = x^{-r}\Omega = x^{-r} \left[\Omega_0 + \sum_{m \in \mathbf{N}^2 - \{0\}} \Omega_m x^m \right]$$

où $r = (r_1, r_2)$ est tel que $r_1 > 0$ et $r_2 \geq 0$ (ou $r_2 = 0$ si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$), et Ω_0 est la partie principale de Ω :

$$\Omega_0 = \begin{cases} A_0 \left(\frac{dx_1}{x_1} + \alpha dx_2 \right) & (\alpha \in \mathbf{C}) \text{ si } \mathcal{P} = \{x_1 = 0\} \\ A_0 \left(\frac{dx_1}{x_1} + \alpha \frac{dx_2}{x_2} \right) & (\alpha \notin \mathbf{Q}_{<0}) \text{ si } \mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\} \end{cases}$$

et

$$\Omega_m = A_m \frac{dx_1}{x_1} + B_m dx_2 \quad (\text{resp. } A_m \frac{dx_1}{x_1} + B_m \frac{dx_2}{x_2}).$$

Notons aussi que, si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, les termes $\Omega_{(0, m_2)}$ sont de la forme $\alpha_{m_2} A_0 dx_2$. Nous supposons que A_0 est nilpotente non nulle et nous fixons un \mathfrak{sl}_2 -triplet $Y = A_0$, X, H . Nous posons $D = D(\Theta) = (x^r)$; si e est un éclatement, on a $e^*D(\Theta) = D(e^*\Theta)$.

Le but de cette section est de créer une partie principale pour la 1-forme $\Omega^{\geq -1}$ (rel. (\mathcal{P}, D)) en tenant compte de la pondération par le poids relativement à A_0 . Nous voulons de plus imposer que cette partie principale soit primitive. Pour nous assurer de ce fait, nous nous restreignons aux bases qui sont admissibles (voir le § 5.2), ce qui crée des difficultés, étant donné que cette notion n'est pas stable par éclatement. Nous serons ainsi amenés à effectuer des éclatements suivis de changements de base. Dans la suite, lorsqu'aucune précision n'est donnée, nous sous-entendons que les changements de base considérés *préservent* les propriétés de la matrice de connexion décrites ci-dessus et n'en modifient pas la partie principale logarithmique. De fait, sauf au § 5.4, les changements de base considérés ont pour matrice un produit de matrices de la forme $\text{Id} + x^m T$ avec $m \in \mathbf{N}^2 - \{0\}$.

Nous allons montrer la conclusion de 4.4.1 au § 5.4, lorsque la matrice A_0 n'a pas deux blocs de Jordan dont les tailles diffèrent de 1 (cas favorable). Plus précisément nous verrons comment une hypothèse de réduction sur Ω permet aussi d'arriver à ce résultat.

5.1. Polygone de Newton et pondérations

5.1.1. *Axe privilégié.* — Nous appellerons *axe privilégié*

- l'axe $\{x_1 = 0\}$ si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$,
- et le ou les axes $\{x_i = 0\}$ ($i = 1, 2$) pour lesquels $r_i \neq 0$, si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$.

Nous supposons que M (satisfaisant les hypothèses du début de cette section) est munie d'un choix d'axe privilégié (s'il y a lieu de faire un choix). Nous choisirons les coordonnées de sorte que $\{x_1 = 0\}$ soit l'axe privilégié.

Soit e l'éclatement de l'origine. Alors en chaque point de croisement du diviseur $e^{-1}\mathcal{P}$ qui est sur $e^{-1}(0)$ nous choisirons comme axe privilégié le diviseur exceptionnel $e^{-1}(0)$ (on vérifie que ce choix est licite, vu les hypothèses faites sur Θ). L'écriture des coordonnées au § 3.2.8 est compatible avec ce choix et la convention ci-dessus.

5.1.2. Réduction relative à un triplet admissible. — Nous pouvons introduire la notion de triplet admissible $(\mathcal{P}, D, \{x_1 = 0\})$ en imposant que $\{x_1 = 0\}$ soit un axe privilégié et la notion de 1-forme logarithmique Ξ *réduite relativement* à un tel triplet : au lieu de la condition forte de (3') au § 3.1, on impose $A(0) \neq 0$ (ce qui implique la condition forte puisque $r_1 > 0$). Dans la suite, nous avons un triplet admissible après chaque éclatement en tout point du diviseur exceptionnel par le choix indiqué plus haut.

Le théorème 3.1.7 n'est pas vrai pour la réduction relativement à ce choix de triplet admissible, mais le corollaire 3.1.8 est vrai : le seul cas à considérer est celui d'un point de croisement de coordonnées (x_1, x_2) , d'axe privilégié $\{x_1 = 0\}$ et où la partie principale logarithmique de la forme considérée (supposée réduite *rel.* (\mathcal{P}, D)) est du type $B_0 \frac{dx_2}{x_2}$. Après éclatement, la partie principale au centre de la carte (∞) est du même type, mais la forme est réduite relativement au triplet admissible au centre de toute autre carte. Le corollaire 3.1.8 pour cette notion de réduction résulte alors de la proposition 4.3.1.

5.1.3. Structure de poids. — La donnée du \mathfrak{sl}_2 -triplet (A_0, H, X) permet de décomposer l'espace des matrices en somme directe d'espaces propres pour $\text{ad } H$. Une matrice A satisfaisant $[H, A] = vA$ est dite pure de poids v relativement à H . Plus généralement, une *structure de poids* \mathcal{H} relativement à (A_0, H, X) est un endomorphisme semi-simple \mathcal{H} à valeurs propres entières, qui commute à H et pour lequel A_0 est pure de poids -2 . Autrement dit, si l'on pose $K = \mathcal{H} - H$, l'endomorphisme K commute au \mathfrak{sl}_2 -triplet (A_0, H, X) , est semi-simple et à valeurs propres entières. L'espace des matrices se décompose en somme directe d'espaces propres relativement à $\text{ad } \mathcal{H}$ et une matrice A satisfaisant $[\mathcal{H}, A] = wA$ sera dite pure de poids w (relativement à \mathcal{H}).

Dans la suite nous fixons une structure de poids \mathcal{H} et la notion de poids sera relative à \mathcal{H} .

Si A est une matrice, nous notons $A^{(w)}$ sa composante pure de poids w et l'on a $A = \sum_{w \in \mathbf{Z}} A^{(w)}$.

Soit $\Theta = x^{-r}\Omega$ la matrice de la connexion comme au début de cette section. Notons que Ω_0 est pure de poids -2 . Nous écrirons aussi $\Omega = \Omega_0 + \Omega^{\leq -2} + \Omega^{\geq -1}$.

5.1.4. *Partie \mathfrak{p} -négligeable.* — Nous pouvons écrire

$$\Omega = \Omega_0 + \sum_w \sum_{m \in \mathbb{N}^2 - \{0\}} \Omega_m^{(w)} x^m.$$

Pour $w \geq -1$ nous posons $\mathfrak{p}(w) = w + 2$. Nous dirons que le terme non nul $\Omega_m^{(w)}$ est *\mathfrak{p} -négligeable dans Ω* si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- $w \leq -2$;
- $w \geq -1$ et $\frac{m}{\mathfrak{p}(w)} \geq \frac{r}{2}$.

Plus généralement, si L est une forme linéaire à coefficients ≥ 0 , nous dirons que $\Omega_m^{(w)}$ est *L - \mathfrak{p} -négligeable dans Ω* si $w \leq -2$ ou $w \geq -1$ et $\frac{L(m)}{\mathfrak{p}(w)} \geq \frac{L(r)}{2}$.

Lemme 5.1.5. — *Supposons que $\Omega^{\geq -1}$ soit \mathfrak{p} -négligeable dans Ω . Alors M est régulière.*

Démonstration. — On effectue le changement de base de matrice $P = x^{r\mathcal{H}/2}$ qui nécessite éventuellement une ramification d'ordre 2 autour des composantes de \mathcal{P} . Dans $P\Theta P^{-1}$ le terme $\Omega_m^{(w)} x^m$ est transformé en $\Omega_m^{(w)} x^{m-wr/2}$ (cf. [4, (4.12)]) et par hypothèse on a pour tous m et w l'inégalité $m - wr/2 \geq r$. De plus, le terme dPP^{-1} est à pôles logarithmiques. Par suite, la transformée de Θ est à pôles logarithmiques. On conclut à l'aide du lemme I.2.1.2. □

Remarques

- (1) Si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, on obtient la conclusion du lemme en supposant seulement $A^{\geq -1}$ \mathfrak{p} -négligeable. En effet, après ramification et changement de base comme ci-dessus, on obtient une base où \mathcal{D}_1 est régulier. On peut alors appliquer le (1) de la proposition 2.1.1 puis le lemme I.2.1.2.
- (2) Si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$ et si l'on suppose seulement $A^{\geq -1}$ \mathfrak{p} -négligeable, le même argument que ci-dessus montre que, après ramification locale, M se décompose en somme directe de connexions élémentaires, d'après le (2) de 2.1.1. Ainsi M satisfait la conclusion de 1.3.1.

Notons l'analogie du lemme 3.1.9 :

Lemme 5.1.6. — *Soit M une connexion méromorphe formelle à pôles le long d'un diviseur à croisements normaux.*

- (1) *Considérons une suite infinie d'éclatements*

$$\dots \xrightarrow{\varpi_{n+1}} \widehat{X_n, E_n} \xrightarrow{\varpi_n} \dots \xrightarrow{\varpi_1} \widehat{\mathbb{C}^2, 0}$$

où ϖ_n est l'éclatement de $x^{(n-1)} \in E_{n-1}$ et $E_n = \varpi_n^{-1}(E_{n-1})$, et supposons que pour tout n , $x^{(n)}$ est un point lisse de $\pi_n^{-1}\mathcal{P}$ (où π_n est la composée des ϖ_i pour $i \leq n$). Il existe alors n_0 tel que $\pi_{n_0}^+ M$ admette une bonne décomposition formelle en $x^{(n_0)}$.

- (2) *Supposons que $\mathcal{P} = \{x_1x_2 = 0\}$. Il existe alors une suite d'éclatements toriques π telle que π^+M admette une bonne structure formelle en tout point de croisement du diviseur $\pi^{-1}\mathcal{P}$.*
- (3) *Pour toute suite infinie (ϖ_n) d'éclatements toriques, il existe n_0 tel que $\pi_{n_0}^+M$ admette une bonne structure formelle en $x^{(n_0)}$.*

Démonstration. — Pour le premier point, on montre comme à la section précédente qu'il suffit de vérifier l'énoncé lorsque Θ satisfait les hypothèses du début de cette section. On vérifie que l'ordre du zéro de $\Omega^{\geq -1}$ augmente strictement par le type d'éclatement considéré et le lemme précédent montre que la connexion devient régulière pour un n_0 convenable. Le deuxième point n'est qu'une reformulation de la proposition 4.3.1. Enfin, (2) \implies (3) se montre comme au lemme 3.1.9. □

5.1.7. Polygone de Newton pondéré et nombres associés. — Rappelons que l'on a un triplet admissible $(\mathcal{P}, D, \{x_1 = 0\})$. Nous l'omettrons dans les notations. Le polygone de Newton pondéré $N(\Omega^{\geq -1})$ est l'enveloppe convexe des quadrants $\frac{m}{\mathbf{p}(w)} + (\mathbf{Q}_+)^2$ pour les $w \geq -1$ et les $m \in \mathbf{N}^2 - \{0\}$ tels que $\Omega_m^{(w)} \neq 0$. Lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, ce polygone dépend du choix de la coordonnée x_2 mais lorsque $\mathcal{P} = \{x_1x_2 = 0\}$ il ne dépend pas du choix de coordonnées adaptées au diviseur \mathcal{P} . Ce polygone est à sommets rationnels et il existe un entier N ne dépendant que de d (= rang de la connexion) et de la structure de poids \mathcal{H} tel que $N \cdot N(\Omega^{\geq -1})$ soit à sommets entiers. Le polygone pondéré $N(\Omega^{\geq -1})$ ne dépend que de la filtration par le poids induite par \mathcal{H} sur l'espace des matrices : si on écrit $\Omega = \Omega_0 + \sum \Omega_m x^m$, le polygone pondéré $N(\Omega^{\geq -1})$ est l'enveloppe convexe des quadrants $\frac{m}{\mathbf{p}(w)} + (\mathbf{Q}_+)^2$ où m et w sont tels que $w \geq -1$ et $\Omega_m \neq 0$ et de poids w (si on perturbe Ω_m par des termes de poids plus petit, on ne change pas le quadrant considéré).

On peut alors définir

- l'ordre pondéré $\mathbf{o}_1(\Omega^{\geq -1})$ le long de $\{x_1 = 0\}$ comme l'abscisse du coté vertical de $N(\Omega^{\geq -1})$ et de manière analogue \mathbf{o}_2 lorsque $\mathcal{P} = \{x_1x_2 = 0\}$;
- la multiplicité pondérée $\mathbf{m}(\Omega^{\geq -1}) = \inf_{(\rho_1, \rho_2) \in N(\Omega^{\geq -1})} \rho_1 + \rho_2$;
- la multiplicité pondérée réduite $\widetilde{\mathbf{m}}(\Omega^{\geq -1})$:

$$\widetilde{\mathbf{m}}(\Omega^{\geq -1}) = \begin{cases} \mathbf{m}(\Omega^{\geq -1}) - \mathbf{o}_1(\Omega^{\geq -1}) & \text{si } \mathcal{P} = \{x_1 = 0\} \\ \mathbf{m}(\Omega^{\geq -1}) - (\mathbf{o}_1(\Omega^{\geq -1}) + \mathbf{o}_2(\Omega^{\geq -1})) & \text{si } \mathcal{P} = \{x_1x_2 = 0\}. \end{cases}$$

Ces nombres s'obtiennent aussi de la manière suivante : si $w \geq -1$, soit $m(\Omega^{(w)})$ la multiplicité de $\Omega^{(w)}$ relativement au diviseur \mathcal{P} (introduite au §3.2.4) et $\mathbf{o}_1(\Omega^{(w)})$

(resp. $o_2(\Omega^{(w)})$) l'ordre le long de $x_1 = 0$ (resp. $x_2 = 0$). Alors

$$o_1(\Omega^{\geq -1}) = \min_{w \geq -1} \frac{o_1(\Omega^{(w)})}{\mathbf{p}(w)} \quad o_2(\Omega^{\geq -1}) = \min_{w \geq -1} \frac{o_2(\Omega^{(w)})}{\mathbf{p}(w)}$$

$$\mathbf{m}(\Omega^{\geq -1}) = \min_{w \geq -1} \mathbf{m}(\Omega^{(w)}) = \min_{w \geq -1} \frac{\mathbf{m}(\Omega^{(w)})}{\mathbf{p}(w)}.$$

Lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ nous poserons aussi

$$\mathbf{m}^+(\Omega^{\geq -1}) = \min_{w \geq -1} \mathbf{m}^+(\Omega^{(w)}) = \min_{w \geq -1} \frac{\mathbf{m}^+(\Omega^{(w)})}{\mathbf{p}(w)}$$

$$= \min_{w \geq -1} \left[\min \left(\frac{\mathbf{m}(A^{(w)})}{\mathbf{p}(w)}, \frac{\mathbf{m}(B^{(w)}) + 1}{\mathbf{p}(w)} \right) \right]$$

et si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$ nous poserons $\mathbf{m}^+ = \mathbf{m}$.

Enfin nous noterons

$$\mathbf{W}(\Omega^{\geq -1}) = \left\{ w \geq -1 \mid \mathbf{m}(\Omega^{(w)}) = \mathbf{m}(\Omega^{\geq -1}) \right\}$$

$$\mathbf{W}^+(\Omega^{\geq -1}) = \left\{ w \geq -1 \mid \mathbf{m}^+(\Omega^{(w)}) = \mathbf{m}^+(\Omega^{\geq -1}) \right\}$$

et $w^\circ = \min \mathbf{W}$. Si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$, ces deux ensembles coïncident, mais ils peuvent être distincts si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$. L'ensemble $\mathbf{W}(\Omega^{\geq -1})$ est l'ensemble des *poids sous-principaux* de Ω .

5.1.8. Polygone de Newton pondéré apparent. — Nous pouvons définir, de manière analogue à celle du § 3.2.5 les analogues apparents du polygone pondéré. On commence par définir le polygone $\mathbf{N}'(\Omega^{\geq -1})$ comme enveloppe convexe de $\mathbf{N}(\Omega^{\geq -1})$ et du quadrant $\frac{r}{2} + (\mathbf{Q}_+)^2$. On définit alors ${}^a\mathbf{N}(\Omega^{\geq -1})$ et ${}^a\widetilde{\mathbf{m}}(\Omega^{\geq -1})$. Puisqu'on dispose d'un axe privilégié, on peut aussi définir ${}^a\widetilde{\mathbf{b}}(\Omega^{\geq -1})$ à partir des composantes de ${}^a\mathbf{N}(\Omega^{\geq -1})$. On définit aussi ${}^a\mathbf{h}$ comme longueur horizontale de l'arête de pente -1 de ${}^a\mathbf{N}(\Omega^{\geq -1})$. On voit que ${}^a\mathbf{N}(\Omega^{\geq -1}) = \emptyset$ si et seulement si $\Omega^{\geq -1}$ est \mathbf{p} -négligeable. Enfin l'invariant pondéré apparent ${}^a\mathbf{I}$ est défini par

$${}^a\mathbf{I}(\Omega^{\geq -1}) = \begin{cases} {}^a\widetilde{\mathbf{b}}(\Omega^{\geq -1}) & \text{si } \mathcal{P} = \{x_1 = 0\} \\ {}^a\widetilde{\mathbf{m}}(\Omega^{\geq -1}) & \text{si } \mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}. \end{cases}$$

5.1.9. Réduction pondérée. — Supposons que le polygone pondéré apparent soit un quadrant de sommet $\mathbf{m}^\circ < r/2$. On peut écrire alors

$$\Omega^{\geq -1} = \sum_{w \geq -1} \Omega_{\mathbf{p}(w)\mathbf{m}^\circ}^{(w)} \cdot x^{\mathbf{p}(w)\mathbf{m}^\circ} + \text{termes d'exposant pondéré} > \mathbf{m}^\circ$$

où $x^{\mathbf{p}(w)\mathbf{m}^\circ} = 0$ si $\mathbf{p}(w)\mathbf{m}^\circ$ n'est pas entier. Les termes apparaissant dans la somme forment la *partie principale pondérée* de $x^{-r}\Omega^{\geq -1}$.

Nous dirons que $\Omega^{\geq -1}$ est \mathbf{p} -réduite rel. $(\mathcal{P}, D, \{x_1 = 0\})$ si le polygone pondéré apparent ${}^a\mathbf{N}(x^{-r}\Omega^{\geq -1})$ est vide ou est un quadrant de sommet $\mathbf{m}^\circ < r/2$ et de plus,

dans ce dernier cas, pour tout $w \in \mathbf{W}$, la forme $\Omega^{(w)}$ est réduite rel. $(\mathcal{P}, D, \{x_1 = 0\})$. Le résultat suivant est alors un des pivots de la démonstration de 4.4.1 :

Lemme 5.1.10. — Soit Ω comme au début de cette section. Alors la conclusion de 4.4.1 est vraie si $\Omega^{\geq -1}$ est \mathbf{p} -réduite avec une partie principale logarithmique primitive.

Démonstration. — Supposons d'abord que $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$. Nous allons montrer que la conclusion de 4.4.1 est satisfaite en reprenant le procédé de Turrittin.

Soit $\mathbf{m}^o = (\mathbf{m}_1^o, 0)$ le sommet de ${}^a\mathbf{N}(\Omega^{\geq -1})$ (qui est supposé non vide, sinon la connexion est régulière, d'après le lemme 5.1.5). On effectue après ramification éventuelle autour de \mathcal{P} le changement de base de matrice $x_1^{\mathbf{m}_1^o \mathcal{H}}$. Après ce changement de base, on a toujours $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ et la matrice $'\Omega$ s'écrit

$$' \Omega_0 + ' \Omega^{\leq -2} + ' \Omega^{\geq -1}$$

où $' \Omega^{\leq -2}$ et $' \Omega^{\geq -1}$ sont à coefficients dans $(x_1, x_2)\mathbf{C}[[x_1, x_2]]$ et

$$' \Omega_0 = (A_0 + Z) \frac{dx_1}{x_1} + \star dx_2$$

où $Z \neq 0$ est une matrice primitive :

$$Z = \sum_{\{w \geq -1 \mid \mathbf{p}(w) \cdot \mathbf{m}_1^o \in \mathbf{N}\}} A_{\mathbf{p}(w) \cdot \mathbf{m}_1^o}^{(w)}$$

Alors, si $A_0 + Z$ est nilpotente, on a $\nu(' \Omega) > \nu(\Omega)$ et on obtient la conclusion de 4.4.1.

Si on a $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$, on peut se ramener au cas où $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ en utilisant la réduction torique (prop. 4.3.1). □

5.1.11. Les pondérations intermédiaires. — Nous aurons besoin d'utiliser de nouvelles pondérations \mathbf{p}_i entre la pondération \mathbf{p} et la pondération triviale \mathbf{p}_{-1} définie par $\mathbf{p}_{-1}(w) = 1$ pour tout $w \geq -1$. On pose, pour $i \geq -1$ et $w \geq -1$

$$\mathbf{p}_i(w) = \min(w + 2, i + 2) = \begin{cases} w + 2 & \text{si } w \leq i \\ i + 2 & \text{si } w \geq i. \end{cases}$$

On a donc $\mathbf{p} = \mathbf{p}_i$ pour $i \gg 0$. On a $\mathbf{p}_i(0) = 1$ si $i = -1$ et $= 2$ si $i \geq 0$. Pour tout i la fonction \mathbf{p}_i est croissante et si $i \leq j$ on a $\mathbf{p}_i \leq \mathbf{p}_j$. On vérifie de plus les inégalités suivantes :

$$(5.1.12) \quad \mathbf{p}_i(w + w') \leq \mathbf{p}_i(w) + w' \quad \text{si } w \geq -1 \text{ et } w' \geq 0$$

$$(5.1.13) \quad \mathbf{p}_i(w + w' + 2) \leq \mathbf{p}_i(w) + \mathbf{p}_i(w') \quad \text{si } w, w' \geq -1.$$

On peut alors définir pour tout $i \geq -1$ le polygone pondéré $\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ comme enveloppe convexe des quadrants $\frac{m}{\mathbf{p}_i(w)} + \mathbf{Q}_+^2$ tels que $\Omega_m^{(w)} \neq 0$ pour $w \geq -1$.

Le polygone $\mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ est l'enveloppe convexe de $\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ et $r/\mathbf{p}_i(0) + \mathbf{Q}_+^2$.

Le polygone ${}^a\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ est alors défini de la même manière qu'au § 3.2.5.

Les invariants correspondants seront notés avec des lettres gothiques : multiplicité \mathfrak{m}_i , multiplicité réduite $\tilde{\mathfrak{m}}_i$, multiplicité réduite apparente ${}^a\tilde{\mathfrak{m}}_i$, etc. De même, on note

$$\mathfrak{W}_i = \left\{ w \geq -1 \mid \mathfrak{m}_i(\Omega^{(w)}) = \mathfrak{m}_i(\Omega^{\geq -1}) \right\}$$

et on définit aussi \mathfrak{W}_i^+ , puis $\mathfrak{m}_i^o = \min \mathfrak{W}_i$. Nous dirons que le terme $\Omega_m^{(w)}$ est \mathfrak{p}_i -négligeable si $w \leq -2$ ou $w \geq -1$ et $\frac{m}{\mathfrak{p}_i(w)} \geq \frac{r}{\mathfrak{p}_i(0)}$. On a de même la notion de terme L - \mathfrak{p}_i -négligeable. Enfin l'invariant pondéré apparent ${}^a\mathcal{J}_i$ est défini par

$${}^a\mathcal{J}_i(\Omega^{\geq -1}) = \begin{cases} {}^a\tilde{\mathfrak{b}}_i(\Omega^{\geq -1}) & \text{si } \mathcal{P} = \{x_1 = 0\} \\ {}^a\tilde{\mathfrak{m}}_i(\Omega^{\geq -1}) & \text{si } \mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}. \end{cases}$$

Nous dirons que $\Omega^{\geq -1}$ est \mathfrak{p}_i -réduite rel. $(\mathcal{P}, D, \{x_1 = 0\})$ si ${}^a\mathfrak{N}_i$ est vide ou un quadrant de sommet $\mathfrak{m}_i^o (< r/\mathfrak{p}_i(0))$ et dans ce cas si $\Omega^{(w)}$ est réduite relativement à $(\mathcal{P}, D, \{x_1 = 0\})$ pour tout $w \in \mathfrak{W}_i$.

5.2. Bases admissibles. — Dans ce paragraphe 5.2, nous fixons une structure de poids \mathcal{H} quelconque. Nous désignerons par A' la partie primitive de la matrice A et A'' la partie non primitive : la décomposition de A sur $\text{Ker ad } X \oplus \text{Im ad } A_0$ est donc $A = A' + A''$. Soit \mathfrak{m} une base de M et $\Theta = x^{-r}\Omega = x^{-r} [\Omega_0 + \Omega^{\leq -2} + \Omega^{\geq -1}]$ comme au début de cette section la matrice de la connexion dans cette base. Nous dirons que la base \mathfrak{m} est *admissible* si, outre les propriétés supposées au début de cette section, Ω satisfait de plus la propriété suivante :

Si $\{x_1 = 0\}$ désigne l'axe privilégié,

$$(5.2.1) \quad \text{le coefficient de } \frac{dx_1}{x_1} \text{ dans } \Omega^{\leq -2} + \Omega^{\geq -1} \text{ est primitif (ou nul).}$$

Cette propriété ne dépend pas de la structure de poids \mathcal{H} choisie, puisqu'elle porte sur toute la matrice Ω et pas seulement sur la partie de \mathcal{H} -poids ≥ -1 . Notons cependant que lorsque $\mathcal{H} = H$, cette propriété implique que toute la partie de H -poids < 0 (sauf Ω_0) de Ω est portée par dx_2 (resp. $\frac{dx_2}{x_2}$).

5.2.2. Changements de base élémentaires. — Considérons l'effet d'un changement de base de matrice $P_n = (\text{Id} + x^n T)$ avec $n \in \mathbb{N}^2 - \{0\}$ et $T \neq 0$ pure de poids $w(T)$. La nouvelle matrice est $'\Omega = P_n(\Omega) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} P_n \Omega P_n^{-1} + x^r dP_n P_n^{-1}$. Nous allons calculer la perturbation $x^r['\Omega - \Omega]$. On a

$$(5.2.3) \quad [P_n \Omega P_n^{-1} - \Omega] = \sum_{k \geq 0} (-1)^k x^{(k+1)n} [T, \Omega_0] T^k + \sum_w \sum_{m \in \mathbb{N}^2 - \{0\}} \sum_{k \geq 0} (-1)^k x^{m+(k+1)n} [T, \Omega_m^{(w)}] T^k.$$

Dans cette écriture, les termes non nuls sont purs : le terme $[T, \Omega_0] T^k$ est de poids $(k+1)w(T) - 2$ (ou nul) et $[T, \Omega_m^{(w)}] T^k$ de poids $(k+1)w(T) + w$ (ou nul).

D'autre part, si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ posons $\varepsilon = 0$ si $n_2 = 0$ et $\varepsilon = 1$ si $n_2 \geq 1$. Alors, dans ce cas,

$$(5.2.4) \quad x^r dP_n P_n^{-1} = \left(\sum_{k \geq 1} (-1)^k x_1^{r_1 + kn_1} x_2^{kn_2 - \varepsilon} T^k \right) \left(n_1 x_2^\varepsilon \frac{dx_1}{x_1} + n_2 dx_2 \right).$$

Si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$ on a

$$(5.2.5) \quad x^r dP_n P_n^{-1} = \left(\sum_{k \geq 1} (-1)^k x^{r+kn} T^k \right) \left(n_1 \frac{dx_1}{x_1} + n_2 \frac{dx_2}{x_2} \right).$$

Mis à part le coefficient de dx_2 dans (5.2.4), tous les monômes intervenant dans la perturbation sont d'exposant $\geq n$. L'unique terme de degré n dans cette perturbation est $x^n [T, \Omega_0]$.

Lemme 5.2.6 (poids ≤ -2). — Soit Ω comme au début de cette section ; soit T une matrice de poids $w(T) \leq 0$, $n \in \mathbb{N}^2 - \{0\}$, $P_n = \text{Id} + x^n T$ et ${}'\Omega = P_n(\Omega)$. Alors pour tout $i \geq -1$ on a

(a_i) $\mathfrak{N}'_i({}'\Omega^{\geq -1}) = \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ et pour tout $\mathfrak{m} \in \partial [{}^a\mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})]$ et tout $w \geq -1$ on a

$${}'\Omega_{\mathfrak{p}_i(w)\mathfrak{m}}^{(w)} = \Omega_{\mathfrak{p}_i(w)\mathfrak{m}}^{(w)}.$$

Démonstration. — Par hypothèse T est somme de matrices pures de poids ≤ 0 . On remarque alors que $x^r dP_n P_n^{-1}$ est de poids ≤ 0 . De plus, si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, tous les monômes apparaissant dans ce terme ont un degré \mathfrak{p}_i -pondéré $\geq r_1/\mathfrak{p}_i(0)$ en x_1 et si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$ ils ont un degré \mathfrak{p}_i -pondéré $\geq r/\mathfrak{p}_i(0)$. Ainsi le terme considéré est \mathfrak{p}_i -négligeable. Son adjonction n'est donc pas susceptible de modifier $\mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ non plus que la restriction de $\Omega^{\geq -1}$ au bord de ce polygone.

Considérons l'autre partie (5.2.3) de la perturbation. Les termes non nuls de la forme $x^{(k+1)n} [T, \Omega_0] T^k$ sont de poids ≤ -2 . De plus, si une composante pure d'un terme $x^{m+(k+1)n} [T, \Omega_m^{(w)}] T^k$ est de poids $w + W \geq -1$ avec $W \leq (k+1)w(T) \leq 0$, on a $w \geq -1$ et $\Omega_m^{(w)} \neq 0$. Alors, puisque l'on a $\mathfrak{p}_i(w+W) \leq \mathfrak{p}_i(w)$, on a aussi

$$\frac{m + (k+1)n}{\mathfrak{p}_i(w+W)} \geq \frac{m + (k+1)n}{\mathfrak{p}_i(w)} > \frac{m}{\mathfrak{p}_i(w)}$$

donc

$$\frac{m + (k+1)n}{\mathfrak{p}_i(w+W)} \in \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1}) - \partial \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1}).$$

Ainsi la perturbation satisfait (a_i). □

Si $\mathfrak{m}^o \neq r/\mathfrak{p}_i(0)$ est un sommet de $\mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$, resp. le sommet $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, notons

$$q(\mathfrak{m}^o) = \min \left\{ w \geq -1 \mid \exists m, \frac{m}{\mathfrak{p}_i(w)} = \mathfrak{m}^o \text{ et } A_m^{(w)} \neq 0 \right\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{m}^o = \mathfrak{p}_i(q) \cdot \mathfrak{m}^o.$$

Lemme 5.2.7 (poids ≥ -1). — Soit Ω comme au début de cette section ; soit T pure de poids $w(T) \stackrel{\text{déf}}{=} p+2 \geq 1$, $n \in \mathbf{N}^2 - \{0\}$, $P_n = \text{Id} + x^n T$ et $'\Omega = P_n(\Omega)$. Soit $i \geq -1$ et faisons les hypothèses suivantes :

- (1) $\frac{n}{\mathfrak{p}_i(p)} \in \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$,
- (2) si de plus $\frac{n}{\mathfrak{p}_i(p)}$ est un sommet m° de ${}^a\mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ (resp. est égal au sommet $m^\circ = \min_{\text{lex}} {}^a\mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$), on a $p \geq q(m^\circ)$.

Alors

- (b_i) si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ on a $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(' \Omega^{\geq -1}) \geq_{\text{lex}} \min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1}) = m^\circ$ et s'il y a inégalité stricte, on a nécessairement

$$p = q(m^\circ) < i, \quad \frac{n}{\mathfrak{p}_i(p)} = m^\circ \text{ (i.e. } n = m^\circ), \quad \frac{n_1}{\mathfrak{p}_i(p)} < \frac{r_1}{2} \text{ et } A_{m^\circ}^{(q(m^\circ))} = 0;$$

- (c_i) si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$ on a $\mathfrak{N}'_i(' \Omega^{\geq -1}) \subset \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ et si l'inclusion est stricte, c'est qu'il existe un sommet $m^\circ \neq r/\mathfrak{p}_i(0)$ de $\mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ tel que l'on ait

$$p = q(m^\circ) < i, \quad \frac{n}{\mathfrak{p}_i(p)} = m^\circ \text{ (i.e. } n = m^\circ), \quad \text{et } A_{m^\circ}^{(q(m^\circ))} = 0;$$

les autres sommets de $\mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ sont aussi des sommets de $\mathfrak{N}'_i(' \Omega^{\geq -1})$ et en ces sommets, sauf éventuellement $r/\mathfrak{p}_i(0)$, les coefficients de $\Omega^{\geq -1}$ et $'\Omega^{\geq -1}$ coïncident.

Démonstration. — Remarquons que si $w(T) \geq 1$, les exposants pondérés apparaissant dans la formule (5.2.3) satisfont les propriétés suivantes :

- si $w \leq -2$ et $w + (k+1)w(T) \geq -1$, alors $\frac{m + (k+1)n}{\mathfrak{p}_i(w + (k+1)w(T))} > \frac{n}{\mathfrak{p}_i(p)}$:
 en effet, si $w + (k+1)w(T) \leq i$ on a (puisque $m > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{m + (k+1)n}{\mathfrak{p}_i(w + (k+1)w(T))} &= \frac{m + (k+1)n}{w + (k+1)w(T) + 2} \\ &> \max \left(\frac{n}{w(T)}, \frac{n}{i+2} \right) \\ &= \frac{n}{\min(p+2, i+2)} = \frac{n}{\mathfrak{p}_i(p)} \end{aligned}$$

et si $w + (k+1)w(T) \geq i$ on a aussi $(k+1)w(T) \geq i+2$ puisque $w+2 \leq 0$, donc si de plus $p \geq i$ on a

$$\frac{m + (k+1)n}{\mathfrak{p}_i(w + (k+1)w(T))} = \frac{m + (k+1)n}{i+2} > \frac{n}{i+2} = \frac{n}{\mathfrak{p}_i(p)}$$

et si $p \leq i$,

$$\frac{m + (k+1)n}{\mathfrak{p}_i(w + (k+1)w(T))} = \frac{m + (k+1)n}{i+2} \geq \frac{m + (k+1)n}{(k+1)w(T)} > \frac{n}{w(T)} = \frac{n}{\mathfrak{p}_i(p)};$$

– si $w \geq -1$, le point $\frac{m + (k+1)n}{\mathfrak{p}_i(w + (k+1)w(T))}$ est dans le polygone engendré par les quadrants de sommets $\frac{m}{\mathfrak{p}_i(w)}$ et $\frac{n}{\mathfrak{p}_i(p)}$; ce n'est un sommet de ce polygone que si ces deux points sont confondus et si $w, p < i$:

en effet, si $p > i$ (resp. si $w > i$) on a aussi $w + (k+1)w(T) > i$, donc

$$\frac{m + (k+1)n}{\mathfrak{p}_i(w + (k+1)w(T))} = \frac{m + (k+1)n}{i+2} > \frac{n}{\mathfrak{p}_i(p)} \quad (\text{resp. } > \frac{m}{\mathfrak{p}_i(w)});$$

supposons donc que $p, w \leq i$ et ainsi $\mathfrak{p}_i(p) = w(T)$ et $\mathfrak{p}_i(w) = w+2$; si l'on a $w + (k+1)w(T) \leq i$, on a aussi $\mathfrak{p}_i(w + (k+1)w(T)) = w + (k+1)w(T) + 2$, ainsi que $w < i$ et $p < i$; par suite le point considéré est à l'intérieur du segment joignant $\frac{m}{\mathfrak{p}_i(w)}$ et $\frac{n}{\mathfrak{p}_i(p)}$ si ces deux points sont distincts et égal à ceux-ci s'ils sont confondus; si $w + (k+1)w(T) > i$ on a $\mathfrak{p}_i(w + (k+1)w(T)) = i+2$ et

$$\begin{aligned} \frac{m + (k+1)n}{\mathfrak{p}_i(w + (k+1)w(T))} &= \frac{m + (k+1)n}{i+2} \\ &> \frac{m + (k+1)n}{w+2 + (k+1)w(T)} \\ &= \frac{m + (k+1)n}{\mathfrak{p}_i(w) + (k+1)\mathfrak{p}_i(p)} \end{aligned}$$

de sorte que le point est à l'intérieur du polygone considéré.

On voit de même que si $i = -1$, les exposants apparaissant dans (5.2.4) et dans (5.2.5) sont \mathfrak{p}_i -négligeables. Si $i \geq 0$ (on rappelle qu'alors $\mathfrak{p}_i(0) = 2$) les premiers satisfont :

$$\frac{r_1 + kn_1}{\mathfrak{p}_i(kw(T))} \geq \min \left(\frac{n_1}{\mathfrak{p}_i(p)}, \frac{r_1}{\mathfrak{p}_i(0)} \right) \quad \text{avec égalité seulement si } p \leq i \text{ et } \frac{n_1}{\mathfrak{p}_i(p)} = \frac{r_1}{\mathfrak{p}_i(0)}$$

et les seconds satisfont le fait que le point $\frac{r + kn}{\mathfrak{p}_i(kw(T))}$ est dans le polygone engendré par $\frac{r}{\mathfrak{p}_i(0)}$ et $\frac{n}{\mathfrak{p}_i(p)}$; c'est un sommet de ce polygone seulement si $p \leq i$ et si ces deux points sont confondus.

L'assertion d'inégalité dans (b_i) (resp. d'inclusion dans (c_i)) est alors conséquence immédiate de la première hypothèse du lemme. De même, s'il y a inégalité stricte (resp. inclusion stricte), c'est que $n/\mathfrak{p}_i(p)$ est égal à m° (resp. à un sommet $m^\circ \neq r/\mathfrak{p}_i(0)$). On vérifie alors sur la formule (5.2.3) que si $p > q(m^\circ)$, le coefficient $A_{m^\circ}^{(q(m^\circ))}$ est inchangé par la perturbation, de sorte que $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ reste égal à m° (resp. $\mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1}) = \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$). La seconde hypothèse implique donc que $p = q(m^\circ)$. \square

5.2.8. Changement de base de Turritin. — Nous allons maintenant définir par récurrence le changement de base \mathcal{T}_Ω . Soit W la valeur propre maximum de $\text{ad } \mathcal{H}$. Nous

poserons

$$\mathcal{T}_\Omega \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{n \in \mathbb{N}^2 - \{0\}} \prod_{w=-2}^w (\text{Id} + x^n T_{n,w})$$

où le produit sur n est pris dans l'ordre \prec introduit dans la preuve de la proposition 2.3.1. Supposons avoir défini $T_{n',w'}$ pour tout $n' \prec n$ et tout w' , notons

$$\mathcal{T}_\Omega^{\prec n} = \prod_{0 \neq n' \prec n} \prod_{w'=-2}^w (\text{Id} + x^{n'} T_{n',w'})$$

et posons $\Omega(\prec n) = \mathcal{T}_\Omega^{\prec n}(\Omega)$; nous supposons que les $T_{n',w'}$ sont choisis de sorte que le coefficient non primitif $A(\prec n)_k''$ de $\Omega(\prec n)$ sur $x^k \frac{dx_1}{x_1}$ est nul pour tout $k \neq 0$, $k \prec n$. Nous allons définir par récurrence sur w les $T_{n,w}$:

- on choisit $T_{n,-2}$ de sorte que $[A_0, T_{n,-2}] = A(\prec n)''_{\leq -2}$ si ce dernier terme est non nul (on pose $T_{n,-2} = 0$ sinon) et on pose $\Omega(n, -2) = (\text{Id} + x^n T_{n,-2})(\Omega(\prec n))$; on a par construction $A(n, -2)_k'' = 0$ pour tout $k \prec n$ et $A(n, -2)''_{\leq -2} = 0$;

- si l'on a défini $T_{n,p}$ pour tout p avec $-2 \leq p < w$ de sorte que si l'on pose

$$\Omega(n, w-1) = \left[\prod_{p=-2}^{w-1} (\text{Id} + x^n T_{n,p}) \right] (\Omega(\prec n))$$

on ait $A(n, w-1)_k'' = 0$ pour tout $k \prec n$ et $A(n, w-1)''_n^{(p)} = 0$ pour tout $p \leq w-1$, on choisit $T_{n,w}$ de sorte que $[A_0, T_{n,w}] = A(n, w-1)''_n^{(w)}$ si ce dernier terme est non nul (on pose $T_{n,w} = 0$ sinon).

Par construction, on peut appliquer le lemme 5.2.6 pour $\Omega(\prec n)$ et $\Omega(n, -2)$ et le lemme 5.2.7 pour $\Omega(n, p)$ et $\Omega(n, p+1)$ car les hypothèses de ce lemme sont satisfaites. On obtient alors par application itérée de ces lemmes :

Proposition 5.2.9. — Soit Ω comme au début de cette section, \mathcal{T}_Ω le changement de base de Turrittin et $'\Omega = \mathcal{T}_\Omega(\Omega)$. Soit $i \geq -1$. Alors

- (b_i) si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ on a $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(''\Omega^{\geq -1}) \geq_{\text{lex}} \min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathfrak{m}^o$ et s'il y a inégalité stricte, on a nécessairement $A_{\mathfrak{m}^o}^{(q(\mathfrak{m}^o))} = 0$;
- (c_i) si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$ on a $\mathfrak{N}'_i(''\Omega^{\geq -1}) \subset \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ et si l'inclusion est stricte, c'est qu'il existe un sommet $\mathfrak{m}^o \neq r/\mathfrak{p}_i(0)$ de $\mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ tel que $A_{\mathfrak{m}^o}^{(q(\mathfrak{m}^o))} = 0$. □

On déduit de même

Lemme 5.2.10. — Soit Ω comme au début de cette section et fixons $i \geq -1$. Soit \mathfrak{m}^o un sommet de $\mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ (resp. le sommet $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$) si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$

(resp. si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$). Supposons que $A_{m^o}^{(q(m^o))} \neq 0$. Alors m^o est un sommet de $\mathfrak{N}'_i(' \Omega^{\geq -1})$, $'q^o = q^o$ (où $'q^o \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} 'q(m^o)$ est d\u00e9fini comme $q^o \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} q(m^o)$ pour $'\Omega$) et

$$' \Omega_{m^o}^{(q^o)} = \Omega_{m^o}^{(q^o)} \quad \text{et en particulier} \quad 'A_{m^o}^{(q^o)} = A_{m^o}^{(q^o)}.$$

5.2.11. Bases admissibles et \u00e9clatements. — Supposons que \mathbf{m} soit une base admissible et soit e l'\u00e9clatement de l'origine. Alors la base image inverse de e^+M n'est plus n\u00e9cessairement admissible pour la connexion image inverse (on le voit sur les formules du \u00a7 3.2.8). Nous allons d'abord contr\u00f4ler le comportement des situations « r\u00e9duites » par \u00e9clatement et changement de base \mathcal{T} . Puisque la notion de base admissible est li\u00e9e au choix d'un axe privil\u00e9gi\u00e9, nous utiliserons la notion de r\u00e9duction relativement \u00e0 $(\mathcal{P}, D, \{x_1 = 0\})$ si $\{x_1 = 0\}$ est l'axe privil\u00e9gi\u00e9. Bien entendu, il n'y a de distinction par rapport \u00e0 la notion de r\u00e9duction (forte ou faible) *rel.* (\mathcal{P}, D) qu'en un point de croisement de \mathcal{P} .

Lemme 5.2.12. — *Supposons que la base de M soit admissible et que $\Omega^{\geq -1}$ soit \mathfrak{p}_i -r\u00e9duite rel. $(\mathcal{P}, D, \{x_1 = 0\})$ pour un $i \geq -1$. Soit e l'\u00e9clatement de l'origine, $x^o \in e^{-1}(0)$ et $'\Omega = \mathcal{T}_{(e^*\Omega)_{x^o}}(e^*\Omega)$. Alors $'\Omega^{\geq -1}$ est \mathfrak{p}_i -r\u00e9duite relativement au triplet $(e^{-1}\mathcal{P}, e^*D, \{y_1 = 0\})$.*

D\u00e9monstration. — Imm\u00e9diate \u00e0 partir du lemme 5.2.10 appliqu\u00e9 \u00e0 $e^*\Omega$. \(\square\)

Revenons au comportement du polygone pond\u00e9r\u00e9 apparent apr\u00e8s \u00e9clatement et changement de base \mathcal{T} dans le cas g\u00e9n\u00e9ral.

Proposition 5.2.13. — *Fixons $i \geq -1$. Soit \mathbf{m} une base admissible pour la connexion et $\Theta = x^{-r}\Omega = x^{-r}[\Omega_0 + \Omega^{\leq -2} + \Omega^{\geq -1}]$ la matrice de la connexion dans cette base. Soit e l'\u00e9clatement de l'origine et $x^o \in e^{-1}(0)$ et (y) les coordonn\u00e9es centr\u00e9es en x^o . Notons $'\Omega = \mathcal{T}_{(e^*\Omega)_{x^o}}(e^*\Omega)$, $e^*D = (y^s)$ et soit $(e^{-1}\mathcal{P}, e^*D, \{y_1 = 0\})$ le triplet admissible apr\u00e8s \u00e9clatement. Alors*

- (1) si $e^{-1}\mathcal{P} = \{y_1 = 0\}$, $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(' \Omega^{\geq -1}) = \min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(e^*\Omega^{\geq -1})$;
- (2) si $e^{-1}\mathcal{P} = \{y_1 y_2 = 0\}$, $\mathfrak{N}'_i(' \Omega^{\geq -1}) = \mathfrak{N}'_i(e^*\Omega^{\geq -1})$.

De plus, le poids minimum des termes non nuls de $e^*\Omega^{\geq -1}$ et $'\Omega^{\geq -1}$ au sommet $\min_{\text{lex}} {}^a\mathfrak{N}_i$ (resp. en chaque sommet de ${}^a\mathfrak{N}_i$) est le m\u00eame.

Corollaire 5.2.14. — *Sous les hypoth\u00e8ses de 5.2.13, on a en x^o*

- (1) si $e^{-1}\mathcal{P} = \{y_1 = 0\}$, ${}^a\tilde{\mathfrak{b}}_i(' \Omega^{\geq -1}) = {}^a\tilde{\mathfrak{b}}_i(e^*\Omega^{\geq -1})$;
- (2) si $e^{-1}\mathcal{P} = \{y_1 y_2 = 0\}$,

$$\partial [{}^a\mathfrak{N}_i(' \Omega^{\geq -1})] = \partial [{}^a\mathfrak{N}_i(e^*(\Omega^{\geq -1}))] \quad \text{donc} \quad {}^a\tilde{\mathfrak{m}}_i(' \Omega^{\geq -1}) = {}^a\tilde{\mathfrak{m}}_i(e^*\Omega^{\geq -1}).$$

\(\square\)

Remarque. — L'introduction des invariants *apparents* est justifiée ici : en effet, ils sont nécessités par la présence du terme $x^r dPP^{-1}$ dans le changement de base de matrice P . Ce terme peut ajouter des points qui ne sont pas dans le polygone de Newton de $\Omega^{\geq -1}$ mais restent dans le polygone $N'(\Omega^{\geq -1})$, dans le cas non pondéré ($i = -1$). Il en est de même pour le cas pondéré. Aussi les lemmes 5.2.6 et 5.2.7 ne contrôlent que les polygones apparents. Ce sont donc les invariants apparents qui sont utilisés dans 5.2.14.

Démonstration de la proposition 5.2.13. — Fixons $i \geq -1$. Soit m^o un sommet du polygone $\mathfrak{N}'_i(e^*\Omega^{\geq -1})$ si \mathcal{P} a deux composantes, ou $m^o = \min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(e^*\Omega^{\geq -1})$ si \mathcal{P} n'a qu'une composante. Notons $\mathcal{A}''_m(w_0)$ le coefficient non primitif de $(e^*\Omega^{\geq -1})_m$ sur dy_1/y_1 de poids minimum $w_0 \geq -1$. Le changement de base $\mathcal{T}_{e^*\Omega}$ ne perturbe au sommet m^o que les termes de $e^*\Omega^{\geq -1}$ qui sont de poids $\geq w_0$ d'après les lemmes 5.2.6 et 5.2.7. Si w_0 est strictement supérieur au poids minimum des termes de $e^*\Omega^{\geq -1}$ au sommet m_0 , le résultat voulu est clair. Aussi, dans la suite nous supposons que w_0 est égal à ce poids minimum que nous noterons q_0 .

Alors, pour obtenir le résultat cherché, il suffit de vérifier que m^o reste égal à $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i$ (resp. reste un sommet de \mathfrak{N}'_i) et que le poids minimum reste égal à q_0 , si l'on applique le changement de base $P_{m^o, q^o} = \text{Id} + x^{m^o} T$ à $e^*\Omega$, en posant $m^o = p_i(q^o) \cdot m^o$ et où T est tel que $[A_0, T] = \mathcal{A}''_{m^o}(q^o)$.

Nous allons donc calculer l'effet de ce changement de base.

- Supposons d'abord que $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$. Écrivons

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + \Omega^{\leq -2} + \Omega^{\geq -1} \quad \text{avec} \\ \Omega^{\geq -1} &= A \frac{dx_1}{x_1} + B dx_2 \quad \text{et} \\ \Omega_0 &= A_0 \left(\frac{dx_1}{x_1} + \alpha dx_2 \right), \quad \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Puisque la base est admissible, A est primitive. Soit e l'éclatement de l'origine.

5.2.15. *Carte* $(\eta) \neq (\infty)$, $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_1(x'_2 + \eta)$. — On a

$$\begin{aligned} e^*\Omega &= e^*\Omega_0 + e^*\Omega^{\leq -2} + e^*\Omega^{\geq -1} \\ &= A_0 \frac{dx'_1}{x'_1} + (\text{poids} \leq -2) + e^*\Omega^{\geq -1} \\ \text{et} \\ e^*\Omega^{\geq -1} &= (A \circ e + x'_1(x'_2 + \eta)B \circ e) \frac{dx'_1}{x'_1} + (x'_1 B \circ e) dx'_2. \end{aligned}$$

La partie non primitive de $(e^*\Omega^{\geq -1})$ s'écrit (puisque A est primitive)

$$\left(x'_1 B'' \circ e \left[(x'_2 + \eta) \frac{dx'_1}{x'_1} + dx'_2 \right] \right)$$

et le coefficient correspondant au sommet \mathfrak{m}° est de la forme (avec la convention que $x^\ell = 0$ si $\ell \notin \mathbf{N}$)

$$(5.2.16) \quad \sum_{w \geq q^\circ} x^{p_i(w) \cdot \mathfrak{m}^\circ} C''(w) \left[\eta \frac{dx'_1}{x'_1} + dx'_2 \right]$$

pour des matrices $C''(w) \in \text{Im ad } A_0$ calculées à partir de $B''(w) \circ e$. D'après le lemme 5.2.10 il suffit de considérer le cas où $C''(q^\circ) \neq 0$. Considérons l'effet du changement de base de matrice $P = \text{Id} + x'^{\mathfrak{m}^\circ} T$ avec $[A_0, T] = \eta C''(q^\circ)$. Après ce changement de base l'entier $'q^\circ$ correspondant à q° satisfait $'q^\circ > q^\circ$ et le coefficient non primitif en \mathfrak{m}° est

$$C''(q^\circ) dx'_2 + \text{poids} \geq 'q^\circ.$$

Par suite \mathfrak{m}° est encore un point de $\mathfrak{N}'_i(' \Omega \geq -1)$, donc égal à $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(' \Omega \geq -1)$ du fait des lemmes 5.2.6 et 5.2.7.

5.2.17. *Carte* (∞). — On a

$$e^* \Omega = A_0 \left(\frac{dx''_1}{x''_1} + \frac{dx''_2}{x''_2} \right) + (\text{poids} \leq -2) + e^* \Omega \geq -1$$

$$e^* \Omega \geq -1 = \left[(A \circ e + x''_1 B \circ e) \frac{dx''_1}{x''_1} + A \circ e \frac{dx''_2}{x''_2} \right].$$

Ainsi la partie non primitive s'écrit

$$(x''_1 B'' \circ e) \frac{dx''_1}{x''_1}.$$

On raisonne comme ci-dessus en un sommet $\mathfrak{m}^\circ \neq r/p_i(0)$ de $\mathfrak{N}'_i(e^* \Omega \geq -1)$. On choisit T telle que $[A_0, T] = C''(q^\circ)$ et après le changement de base de matrice $\text{Id} + x'^{\mathfrak{m}^\circ} T$, le terme non primitif en poids q° est $-C''(q^\circ) \frac{dx''_2}{x''_2}$.

- Supposons maintenant que $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$. On a donc

$$\Omega_0 = A_0 \left(\frac{dx_1}{x_1} + \alpha \frac{dx_2}{x_2} \right) \quad \text{avec } \alpha \notin \mathbf{Q}_{<0}.$$

5.2.18. *Carte* ($\eta \neq (0), (\infty)$). — On a

$$(e^* \Omega)_0 = A_0 \left[(1 + \alpha) \frac{dx'_1}{x'_1} + \frac{\alpha}{\eta} dx'_2 \right]$$

et

$$e^* \Omega \geq -1 = (A \circ e + B \circ e) \frac{dx'_1}{x'_1} + B \circ e \frac{dx'_2}{x'_2 + \eta}$$

de sorte que la partie non primitive s'écrit

$$(B'' \circ e) \left[\frac{dx'_1}{x'_1} + \frac{dx'_2}{x'_2 + \eta} \right].$$

Le coefficient non primitif en $\mathfrak{m}^o = \min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(e^* \Omega^{\geq -1})$ s'écrit

$$\left(\sum_{w \geq q^o} x^{i \cdot \mathfrak{p}_i(w) \cdot \mathfrak{m}^o} C''(w) \right) \left[\frac{dx'_1}{x'_1} + \frac{dx'_2}{\eta} \right].$$

On raisonne comme au § 5.2.15. Supposons $C''(q^o) \neq 0$. Après le changement de base de matrice $\text{Id} + x'^{\mathfrak{m}^o} T$ avec $[(1 + \alpha)A_0, T] = C''(q^o)$, le nouveau coefficient non primitif en \mathfrak{m}^o est

$$\frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right) C''(q^o) dx'_2 + \text{poids} > q^o$$

et on conclut comme plus haut.

5.2.19. *Carte (0)*. — On a

$$\begin{aligned} (e^* \Omega)_0 &= A_0 \left[(1 + \alpha) \frac{dx'_1}{x'_1} + \alpha \frac{dx'_2}{x'_2} \right] \\ \text{et} \\ e^* \Omega^{\geq -1} &= (A \circ e + B \circ e) \frac{dx'_1}{x'_1} + B \circ e \frac{dx'_2}{x'_2} \end{aligned}$$

de sorte que la partie primitive s'écrit $(B'' \circ e) \left(\frac{dx'_1}{x'_1} + \frac{dx'_2}{x'_2} \right)$. En un sommet \mathfrak{m}^o de \mathfrak{N}'_i , la partie non primitive s'écrit

$$\sum_{w \geq q^o} x^{i \cdot \mathfrak{p}_i(w) \cdot \mathfrak{m}^o} C''(w) \left(\frac{dx'_1}{x'_1} + \frac{dx'_2}{x'_2} \right).$$

Si $C''(q^o)$ n'est pas nul, on choisit T tel que $[(1 + \alpha)A_0, T] = C''(q^o)$. Le nouveau coefficient non primitif en ce sommet est

$$\begin{aligned} x'^{\mathfrak{m}^o} \left(C''(q^o) \left(\frac{dx'_1}{x'_1} + \frac{dx'_2}{x'_2} \right) + [T, (e^* \Omega_0)] \right) + \text{poids} > q^o \\ = x'^{\mathfrak{m}^o} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right) C''(q^o) \frac{dx'_2}{x'_2} + \text{poids} > q^o \neq 0. \end{aligned}$$

5.2.20. *Carte (∞)*. — On a

$$\begin{aligned} (e^* \Omega)_0 &= A_0 \left[(1 + \alpha) \frac{dx''_1}{x''_1} + \frac{dx''_2}{x''_2} \right] \\ \text{et} \\ e^* \Omega^{\geq -1} &= (A \circ e + B \circ e) \frac{dx''_1}{x''_1} + A \circ e \frac{dx''_2}{x''_2} \end{aligned}$$

de sorte que la partie non primitive s'écrit $(B'' \circ e) \frac{dx''_1}{x''_1}$. On applique un argument analogue à celui employé ci-dessus. Ceci termine la preuve de la proposition 5.2.13. \square

5.3. Conséquences de la condition d'intégrabilité. — Nous supposons dans ce paragraphe que la structure de poids \mathcal{H} est la structure standard H . Nous allons donner des conséquences de la condition d'intégrabilité sur les coefficients au sommet du polygone apparent ${}^a\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ pour tout $i \geq -1$.

Proposition 5.3.1. — Soit m° un sommet de ${}^aN(\Omega^{\geq -1})$ (supposé non vide) tel que le coefficient de $\frac{dx_1}{x_1}$ dans $\Omega_{m^\circ}^{\geq -1}$ soit primitif ou nul. Si, pour $w \geq -1$, le terme $B_{m^\circ}^{(w)} dx_2$ (resp. $B_{m^\circ}^{(w)} \frac{dx_2}{x_2}$) n'est pas nul, alors l'une des propriétés suivantes est satisfaite :

- $w = -1$ et $B_{m^\circ}^{(-1)} \in \text{Ker ad } A_0$ (et $A_{m^\circ}^{(-1)} = 0$) ;
- $w = 0$ et $B_{m^\circ}^{(0)}$ est une matrice primitive ;
- $w \geq 1$ et $B_{m^\circ}^{(w)} = \alpha A_{m^\circ}^{(w)}$ où α est défini par $\Omega_0 = A_0 \left(\frac{dx_1}{x_1} + \alpha \left(dx_2 \text{ ou } \frac{dx_2}{x_2} \right) \right)$.

Démonstration. — Explicitons la condition d'intégrabilité :

Si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ on a, pour tout $w \in \mathbf{Z}$, tout $m \in \mathbf{N}^2 - \{0\}$ et en posant $r = (r_1, 0)$ et donc $r_2 = 0$

$$(5.3.2) \quad \text{ad } A_0(B_m^{(w)} - \alpha A_m^{(w)}) + \sum_{k, \ell \neq 0, k+\ell=m} [A_k, B_\ell]^{(w-2)} = (m_1 - 2r_1)B_{m-r}^{(w-2)} - (m_2 + 1)A_{(m_1-r_1, m_2+1)}^{(w-2)}$$

et si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$

$$(5.3.3) \quad \text{ad } A_0(B_m^{(w)} - \alpha A_m^{(w)}) + \sum_{k, \ell \neq 0, k+\ell=m} [A_k, B_\ell]^{(w-2)} = (m_1 - 2r_1)B_{m-r}^{(w-2)} - (m_2 - 2r_2)A_{m-r}^{(w-2)}.$$

Lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ et $m = m^\circ$ est un sommet de ${}^aN(\Omega^{\geq -1})$, on a $m_1^\circ - r_1 < 0$, donc le second membre de (5.3.2) est nul. Par ailleurs, pour $k, \ell \neq 0$ avec $k + \ell = m^\circ$, on a $k_1 < m_1^\circ$ ou $\ell_1 < m_1^\circ$, de sorte que si un terme $[A_k, B_\ell]^{(w-2)}$ n'est pas nul, c'est que A_k et B_ℓ sont de poids ≤ -2 , ce qui est impossible si $w \geq -1$.

Lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$ on raisonne de manière analogue en utilisant une forme linéaire L à coefficients positifs telle que $L(m^\circ) < L(r)$ et que la droite $L = L(m^\circ)$ ne coupe ${}^aN(\Omega^{\geq -1})$ qu'au sommet m° .

Ainsi, pour $w \geq -1$ et $m = m^\circ$, la condition (5.3.2) s'écrit $\text{ad } A_0(B_{m^\circ}^{(w)} - \alpha A_{m^\circ}^{(w)}) = 0$. Si $w = -1$, on a $A_{m^\circ}^{(-1)} = 0$ puisque les matrices $A_{m^\circ}^{(w)}$ sont primitives, donc de poids ≥ 0 et, par suite, $B_{m^\circ}^{(-1)} \in \text{Ker ad } A_0$, c'est-à-dire $B_{m^\circ}^{(-1)}$ est quasi-primitive. Si $w = 0$, on voit de même que $B_{m^\circ}^{(0)}$ est primitive et enfin, si $w \geq 1$, on voit que $B_{m^\circ}^{(w)} = \alpha A_{m^\circ}^{(w)}$ puisque $\text{ad } A_0$ est injective sur les matrices de poids > 0 . \square

Proposition 5.3.4. — Soit $i \geq 0$. Supposons qu'en un sommet m° de ${}^a\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ (resp. au sommet $m^\circ = \min_{\text{lex}} {}^a\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$) le coefficient de $\frac{dx_1}{x_1}$ dans

$\Omega_{\mathfrak{p}_i(w)\mathfrak{m}^o}^{(w)}$ est primitif ou nul pour tout w . Alors si, pour $w \geq -1$, le terme $B_{\mathfrak{m}^o(w)}^{(w)} dx_2$ (resp. $B_{\mathfrak{m}^o(w)}^{(w)} \frac{dx_2}{x_2}$) n'est pas nul (avec $\mathfrak{m}^o(w) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathfrak{p}_i(w) \cdot \mathfrak{m}^o$), l'une des propriétés suivantes est satisfaite :

- $w = -1$ et $B_{\mathfrak{m}^o(-1)}^{(-1)} \in \text{Ker ad } A_0$ (et $A_{\mathfrak{m}^o(-1)}^{(-1)} = 0$) ;
- $w = 0$ et $B_{\mathfrak{m}^o(0)}^{(0)}$ est une matrice primitive ;
- $w \geq 1$ et
 - $B_{\mathfrak{m}^o(w)}^{(w)} = \alpha A_{\mathfrak{m}^o(w)}^{(w)}$ ou
 - $w \leq i$, $B_{\mathfrak{m}^o(-1)}^{(-1)} \neq 0$ et il existe $w' < w$ tel que $A_{\mathfrak{m}^o(w')}^{(w')} \neq 0$.

Démonstration. — Nous utiliserons l'inégalité (5.1.13) sous la forme suivante : si $w \geq 1$ on a $\mathfrak{p}_i(w) \leq \mathfrak{p}_i(0) + \mathfrak{p}_i(w - 2)$ et on a $\mathfrak{p}_i(0) = 2$ puisque $i \geq 0$.

Supposons que $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$. Soit $\mathfrak{m}^o = \min_{\text{lex}} \mathfrak{a} \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ et $\mathfrak{m}^o(w) = \mathfrak{p}_i(w) \cdot \mathfrak{m}^o$. Si $w = -1$, on a $m_1^o(-1) < r_1/2$ et si $w = 0$, on a $m_1^o(0) < r_1$, donc dans les deux cas le second membre de (5.3.2) est nul. Si $w \geq 1$, on a

$$\frac{m_1^o(w)}{\mathfrak{p}_i(w)} \geq \frac{m_1^o(w)}{\mathfrak{p}_i(0) + \mathfrak{p}_i(w - 2)} \geq \min \left(\frac{r_1}{2}, \frac{m_1^o(w) - r_1}{\mathfrak{p}_i(w - 2)} \right)$$

avec égalité si et seulement si tous les termes sont égaux, ce qui est impossible puisque $m_1^o(w)/\mathfrak{p}_i(w) < r_1/2$. Ainsi on a

$$\frac{m_1^o(w) - r_1}{\mathfrak{p}_i(w - 2)} < \frac{m_1^o(w)}{\mathfrak{p}_i(w)}$$

et le second membre de (5.3.2) est encore nul, par définition de $\min_{\text{lex}} \mathfrak{a} \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$.

Considérons les termes $[A_k, B_\ell]^{(w-2)}$. On écrit $[A_k, B_\ell]^{(w-2)} = \sum_p [A_k^{(p)}, B_\ell^{(w-2-p)}]$. Alors

$$[A_k^{(p)}, B_\ell^{(w-2-p)}] \neq 0 \implies 0 \leq p \leq w - 1 < i \text{ et } \mathfrak{m}^o = \frac{m^o(w)}{\mathfrak{p}_i(w)} = \frac{k}{\mathfrak{p}_i(p)} = \frac{\ell}{\mathfrak{p}_i(w-p)}.$$

En effet, choisissons une forme linéaire L à coefficients positifs telle que la droite $L = L(\mathfrak{m}^o)$ ne coupe le polygone $\mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ qu'au sommet \mathfrak{m}^o . Si $p \geq w \geq -1$, on a $k/\mathfrak{p}_i(p) < m^o(w)/\mathfrak{p}_i(w)$, donc $A_k^{(p)} = 0$; de même, si $p \leq -2$ on a $B_\ell^{(w-2-p)} = 0$; supposons donc que $-1 \leq p \leq w - 1$; on a, puisque $k + \ell = m$ et d'après (5.1.13), l'inégalité

$$L(\mathfrak{m}^o) = \frac{L(m^o(w))}{\mathfrak{p}_i(w)} \geq \frac{L(m^o(w))}{\mathfrak{p}_i(p) + \mathfrak{p}_i(w-p-2)} \geq \min \left(\frac{L(k)}{\mathfrak{p}_i(p)}, \frac{L(\ell)}{\mathfrak{p}_i(w-p-2)} \right)$$

avec égalité si et seulement si tous les termes sont égaux. Ainsi on a $[A_k^{(p)}, B_\ell^{(w-2-p)}] \neq 0$ seulement si

(5.3.5)

$$L(\mathfrak{m}^o) = \frac{L(m^o(w))}{\mathfrak{p}_i(w)} = \frac{L(k)}{\mathfrak{p}_i(p)} = \frac{L(\ell)}{\mathfrak{p}_i(w-p-2)} \text{ et } \mathfrak{p}_i(w) = \mathfrak{p}_i(p) + \mathfrak{p}_i(w-p-2).$$

On en déduit l'assertion par le choix de la forme L et puisque $A_{\mathfrak{m}^o(-1)}^{(-1)} = 0$.

Supposons donc que $B_{m^o(w)}^{(w)} \neq 0$. Si $w = -1$ on en déduit que $B_{m^o(-1)}^{(-1)} \in \text{Ker ad } A_0$, c'est-à-dire est une matrice quasi-primitive et si $w = 0$, on a $\text{ad } A_0(B_{m^o(0)}^{(0)} - \alpha A_{m^o(0)}^{(0)}) = 0$, donc $B_{m^o(0)}^{(0)}$ est primitive ou nulle. Enfin si $w \geq 1$ et si $B_{m^o(w)}^{(w)} \neq \alpha A_{m^o(w)}^{(w)}$, c'est qu'un terme $[A_k^{(p)}, B_\ell^{(w-2-p)}]$ donc aussi $B_\ell^{(w-2-p)}$ a une partie non primitive non nulle, avec $0 \leq p \leq w - 1 < i$ et (5.3.5). On en déduit l'assertion par récurrence sur w .

Un raisonnement analogue vaut si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$ en considérant une forme linéaire L à coefficients positifs telle que la droite $L = L(m^o)$ ne coupe le polygone $\mathfrak{N}_i'(\Omega^{\geq -1})$ qu'au sommet m^o , pour montrer que le second membre de (5.3.2) est nul ou pour obtenir un analogue de (5.3.5). \square

Remarque. — Si, lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, on suppose que la base est *admissible*, la conclusion de la proposition 5.3.4 est satisfaite en chaque sommet de ${}^a\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ et pas seulement au sommet $\min_{\text{lex}} {}^a\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$: on considère pour cela la composante (5.3.2)'' de (5.3.2) sur $\text{Im ad } A_0$; elle ne fait plus intervenir le terme $A_{(m_1-r_1, m_2+1)}^{(w-2)}$ qui est primitif et on peut alors raisonner à l'aide d'une forme linéaire L pour en déduire qu'en chaque sommet m^o , le second membre de (5.3.2)'' est nul si $w \geq -1$.

Corollaire 5.3.6. — Soit $i \geq -1$. Supposons que $\Omega^{\geq -1}$ soit \mathfrak{p}_i -réduite dans une base admissible.

- (1) Soit m^o un sommet de ${}^a\mathfrak{N}(\Omega^{\geq -1})$ et w_0 le poids minimal des termes portés par ce sommet. Soit $m^o = \mathfrak{p}(w_0) \cdot m^o$. Alors $w_0 \geq 0$, $A_{m^o}^{(w_0)} \neq 0$ et si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$, $A_{m^o}^{(w_0)}$ et $B_{m^o}^{(w_0)}$ ne sont pas en résonance.
- (2) Si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ et si $\mathfrak{m}(\Omega^{\geq -1}) < r_1/2$, on a $\mathbf{W}^+(\Omega^{\geq -1}) \subset \mathbf{W}(\Omega^{\geq -1})$ et pour tout $w \in \mathbf{W}^+(\Omega^{\geq -1})$, on a $\mathfrak{m}^+(\Omega^{(w)}) = \mathfrak{m}(\Omega^{(w)})$.

Démonstration. — Si $w_0 = -1$, le point m^o est à coordonnées entières et c'est un sommet de ${}^a\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$. Ceci implique, vu l'hypothèse de réduction, que $A_{m^o}^{(-1)} \neq 0$, ce qui est impossible puisque la base est admissible, i.e. les termes A sont primitifs donc de poids ≥ 0 . On a donc $w_0 \geq 0$.

Si $\Omega^{\geq -1}$ est \mathfrak{p}_i -réduite et ${}^a\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1}) \neq \emptyset$, le poids minimum q_0 au sommet du quadrangle ${}^a\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ est donc ≥ 0 , pour la même raison. Tous les sommets de ${}^a\mathfrak{N}(\Omega^{\geq -1})$ ont alors un poids minimum $\geq q_0$ et l'égalité n'a lieu qu'en un sommet au plus, qui est nécessairement sommet commun de ${}^a\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ et ${}^a\mathfrak{N}(\Omega^{\geq -1})$. Donc si $w_0 = 0$ en un sommet m^o de ${}^a\mathfrak{N}(\Omega^{\geq -1})$, on a $q_0 = 0$ et l'hypothèse de réduction montre que $A_{m^o}^{(0)} \neq 0$. Si $w_0 \geq 1$, on peut appliquer la proposition 5.3.4 (pour $i \gg 0$) pour obtenir le premier point.

Si maintenant ${}^a\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1}) = \emptyset$ et si m^o est un sommet de ${}^a\mathfrak{N}(\Omega^{\geq -1})$ (resp. le sommet $\min_{\text{lex}} {}^a\mathfrak{N}(\Omega^{\geq -1})$), on doit avoir $w_0 \geq 1$ si $i = -1$ et $w_0 \geq i + 1$ si $i \geq 0$ et on peut encore appliquer la proposition 5.3.4.

Pour le second point, commençons par vérifier que si l'on a $\mathbf{m}(\Omega^{\geq -1}) < r_1/2$, alors $\mathbf{m}(B^{\geq -1}) \geq \mathbf{m}(A^{\geq -1})$: l'hypothèse montre que la multiplicité \mathbf{m} est atteinte en un sommet $\neq (r_1/2, 0)$ de $N'(\Omega^{\geq -1})$, de sorte que l'assertion découle du premier point. Ainsi on a $\mathbf{m}^+(\Omega^{\geq -1}) = \mathbf{m}(\Omega^{\geq -1}) = \mathbf{m}(A^{\geq -1})$: en effet, par définition, $\mathbf{m}(\Omega^{\geq -1}) = \min(\mathbf{m}(A^{\geq -1}), \mathbf{m}(B^{\geq -1}))$ et $\mathbf{m}^+(\Omega^{\geq -1}) = \min(\mathbf{m}(A^{\geq -1}), \mathbf{m}^+(B^{\geq -1}))$, et de plus on a $\mathbf{m}^+(B^{\geq -1}) \geq \mathbf{m}(B^{\geq -1})$.

Soit alors $w \in \mathbf{W}^+(\Omega^{\geq -1})$. On a

$$\mathbf{m}(\Omega^{(w)}) \leq \mathbf{m}^+(\Omega^{(w)}) = \mathbf{m}^+(\Omega^{\geq -1}) = \mathbf{m}(\Omega^{\geq -1}) \leq \mathbf{m}(\Omega^{(w)})$$

d'où l'égalité entre tous les termes et donc $w \in \mathbf{W}(\Omega^{\geq -1})$. □

5.4. Démonstration de l'énoncé 4.4.1 dans le cas favorable. — Nous allons montrer dans ce paragraphe le premier résultat allant dans le sens de 1.3.1 dans le cas nilpotent. Nous fixons dans cette section la structure de poids standard H .

Proposition 5.4.1. — *Soit Ω comme au début de cette section. Alors s'il existe $i \geq -1$ tel que $\Omega^{\geq -1}$ soit \mathfrak{p}_i -réduite dans une base admissible, la conclusion de 4.4.1 est vraie.*

Au vu du lemme 5.1.10, cette proposition est conséquence de la

Proposition 5.4.2. — *Soit Ω comme au début de cette section. Supposons que $\Omega^{\geq -1}$ soit \mathfrak{p}_i -réduite dans une base admissible pour un certain $i \geq -1$. Il existe alors une suite d'éclatements $\pi : \overline{X}, \overline{E} \rightarrow \overline{\mathbf{C}^2}, \overline{0}$ à centres M -permis et en tout centre permis $x^\circ \in E$ un changement de base de matrice $P \in \text{GL}(d, \widehat{\mathcal{O}}_{x^\circ})$ de sorte que si (y) sont des coordonnées locales adaptées à $\pi^{-1}\mathcal{P}$, l'une des propriétés suivantes soit satisfaite :*

- (1) *la base image par P est admissible et la matrice $'\Omega = \Omega_0 + '\Omega^{\leq -2} + '\Omega^{\geq -1}$ de π^+M dans cette base satisfait les mêmes propriétés que Ω et de plus le fait que $'\Omega^{\geq -1}$ soit \mathfrak{p} -réduite rel. $(\pi^{-1}\mathcal{P}, \pi^*D, \{y_1 = 0\})$;*
- (2) *la connexion π^+M admet une bonne structure formelle au point considéré.*

Démonstration. — Elle se fait suivant le même principe que celle de la section 3. Il suffit de montrer que pour toute suite infinie d'éclatements locaux, l'une des propriétés est atteinte en un rang fini de la suite. Nous allons composer éclatements et changements de base \mathcal{T} pour qu'à chaque étape la base reste admissible. Si l'on essaye d'adapter directement la preuve de la proposition 3.3.1 au cas pondéré, la première difficulté qui surgit concerne le comportement de l'invariant apparent ${}^a\mathbf{I}$ par éclatement. La décroissance de celui-ci n'est plus immédiate. Cela tient au fait que les ensembles \mathbf{W} et \mathbf{W}^+ introduits au § 5.1.7 peuvent être distincts. C'est pour cette raison qu'est faite l'hypothèse de réduction. Il s'agit d'abord de réduire à zéro l'invariant apparent ${}^a\mathbf{I}$.

Lemme 5.4.3. — Soit Ω satisfaisant les hypothèses de 5.4.2, soit e l'éclatement de l'origine et $x^o \in e^{-1}(0)$. Soit $'\Omega_{x^o} = \mathcal{T}_{(e^*\Omega_{x^o})}(e^*\Omega_{x^o})$. Alors on a

$${}^a\mathbf{I}(' \Omega_{x^o}^{\geq -1}) \leq {}^a\mathbf{I}(\Omega^{\geq -1}).$$

Si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ et si ${}^a\mathbf{I}(\Omega^{\geq -1}) > 0$, il y a égalité en au plus un point $y^o \in e^{-1}(0)$ et y^o est un point lisse de $e^{-1}\mathcal{P}$.

Démonstration. — Le corollaire 5.2.14 montre que ${}^a\mathbf{I}(' \Omega_{x^o}^{\geq -1}) = {}^a\mathbf{I}(e^*\Omega_{x^o}^{\geq -1})$. Il reste à montrer l'inégalité et à considérer le cas d'égalité pour l'éclatement. Nous allons raisonner comme au lemme 3.3.2.

Supposons d'abord que $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$.

Si $\mathbf{m}(\Omega^{\geq -1}) \geq r_1/2$, on a ${}^a\mathbf{N}(e^*\Omega^{\geq -1}) = \emptyset$ en tout $x^o \neq \infty$ et ${}^a\mathbf{I}(e^*\Omega^{\geq -1}) = 0$. Si $x^o = \infty$, le même raisonnement que celui du lemme 3.3.2 (figure 8) montre que

$${}^a\mathbf{I}(e^*\Omega^{\geq -1}) = {}^a\tilde{\mathbf{m}}(e^*\Omega^{\geq -1}) \leq \tilde{\mathbf{b}}(e^*\Omega^{\geq -1}) < \frac{r_1}{2} - \mathbf{o}_1(\Omega^{\geq -1}) \leq {}^a\mathbf{I}(\Omega^{\geq -1}).$$

Supposons donc $\mathbf{m}(\Omega^{\geq -1}) < r_1/2$. Il suffit, comme dans le lemme 3.3.2, de montrer qu'en x^o on a

$$\tilde{\mathbf{b}}(e^*\Omega^{\geq -1}) \leq \tilde{\mathbf{m}}(\Omega^{\geq -1}) (\leq {}^a\mathbf{I}(\Omega^{\geq -1}))$$

et de considérer le cas d'égalité. Mais puisque $\mathbf{W}^+(\Omega^{\geq -1}) \subset \mathbf{W}(\Omega^{\geq -1})$ (corollaire 5.3.6), on a pour tout $w \in \mathbf{W}^+(\Omega^{\geq -1})$, au centre d'une carte $(\eta) \neq (\infty)$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}}(e^*\Omega^{\geq -1}) &\leq \tilde{\mathbf{b}}(e^*(\Omega^{(w)})) \quad (\text{définition de } \mathbf{W}^+) \\ &\leq \tilde{\mathbf{m}}(\Omega^{(w)}) \quad (\text{voir le lemme 3.3.2}) \\ &\stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{m}(\Omega^{(w)}) - \mathbf{o}_1(\Omega^{(w)}) \\ &= \mathbf{m}(\Omega^{\geq -1}) - \mathbf{o}_1(\Omega^{(w)}) \quad (\text{car } w \in \mathbf{W}(\Omega^{\geq -1})) \\ &\leq \mathbf{m}(\Omega^{\geq -1}) - \mathbf{o}_1(\Omega^{\geq -1}) \\ &\stackrel{\text{déf}}{=} \tilde{\mathbf{m}}(\Omega^{\geq -1}). \end{aligned}$$

S'il y a égalité ${}^a\mathbf{I}(e^*\Omega_{y^o}^{\geq -1}) = {}^a\mathbf{I}(\Omega^{\geq -1}) \neq 0$ en y^o , c'est que pour tout $w \in \mathbf{W}^+(\Omega^{\geq -1})$ il y a égalité

$$(5.4.4) \quad \tilde{\mathbf{b}}(e^*\Omega_{y^o}^{(w)}) = \tilde{\mathbf{m}}(\Omega^{(w)}) = \tilde{\mathbf{m}}(\Omega^{\geq -1}) \quad \text{et} \quad \mathbf{o}_1(\Omega^{(w)}) = \mathbf{o}_1(\Omega^{\geq -1}).$$

Un tel y^o (lisse sur $e^{-1}(\mathcal{P})$) est unique d'après le lemme 3.3.2.

Considérons maintenant la carte (∞) (toujours avec $\widetilde{\mathbf{m}}(\Omega^{\geq -1}) < r_1/2$). On a maintenant pour tout $w \in \mathbf{W}^+(\Omega^{\geq -1})$:

$$\begin{aligned}
 {}^a\mathbf{I}(e^*\Omega^{\geq -1}) &\leq \widetilde{\mathbf{m}}(e^*\Omega^{\geq -1}) \\
 &\leq \widetilde{\mathbf{b}}(e^*\Omega^{\geq -1}) \\
 &\leq \widetilde{\mathbf{b}}(e^*(\Omega^{(w)})) + \mathbf{o}_1(\Omega^{(w)}) - \mathbf{o}_1(\Omega^{\geq -1}) \quad (\text{car } w \in \mathbf{W}^+) \\
 &\leq \widetilde{\mathbf{m}}(\Omega^{(w)}) + \mathbf{o}_1(\Omega^{(w)}) - \mathbf{o}_1(\Omega^{\geq -1}) \quad (\text{lemme 3.3.2}) \\
 &\stackrel{\text{d\'ef}}{=} \mathbf{m}(\Omega^{(w)}) - \mathbf{o}_1(\Omega^{\geq -1}) \\
 &= \mathbf{m}(\Omega^{\geq -1}) - \mathbf{o}_1(\Omega^{\geq -1}) \quad (\text{car } w \in \mathbf{W}(\Omega^{\geq -1})) \\
 &\stackrel{\text{d\'ef}}{=} \widetilde{\mathbf{m}}(\Omega^{\geq -1}) \\
 &\leq \widetilde{\mathbf{b}}(\Omega^{\geq -1}) = {}^a\mathbf{I}(\Omega^{\geq -1}).
 \end{aligned}$$

Montrons qu'il ne peut y avoir égalité si ${}^a\mathbf{I}(\Omega^{\geq -1}) \neq 0$. S'il y a égalité et si ${}^a\mathbf{I}(\Omega^{\geq -1}) \neq 0$, on en déduit que $\widetilde{\mathbf{b}}(e^*\Omega^{(w)}) = \widetilde{\mathbf{m}}(\Omega^{(w)}) \neq 0$ pour tout $w \in \mathbf{W}^+$. On voit comme au lemme 3.3.2 que pour tout tel w le sommet de $\mathbf{N}(\Omega^{(w)})$ sur l'axe horizontal réalise la multiplicité de $\Omega^{(w)}$. Donc le point $(\mathbf{m}(\Omega^{\geq -1}), 0)$ est un sommet de $\mathbf{N}(\Omega^{\geq -1})$. Puisqu'on a aussi $\widetilde{\mathbf{b}}(\Omega^{\geq -1}) = \widetilde{\mathbf{m}}(\Omega^{\geq -1})$, le polygone $\mathbf{N}(\Omega^{\geq -1})$ a la forme donnée sur la figure 10. Le sommet $\min_{\text{lex}} \mathbf{N}(\Omega^{\geq -1})$ réalise donc aussi la multiplicité. Soit

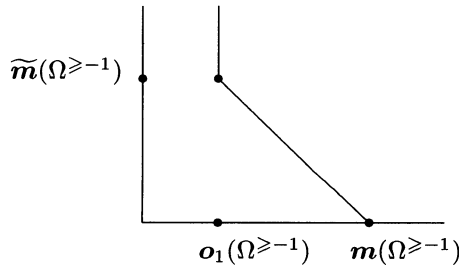


FIGURE 10. On a $\mathbf{m}(\Omega^{\geq -1}) = \mathbf{o}_1(\Omega^{\geq -1}) + \widetilde{\mathbf{m}}(\Omega^{\geq -1})$

w' tel que $\min_{\text{lex}} \mathbf{N}(\Omega^{(w')}) = \min_{\text{lex}} \mathbf{N}(\Omega^{\geq -1})$. Le coefficient de $A^{(w')}$ en ce sommet doit être nul : on aurait sinon $w' \in \mathbf{W}^+(\Omega^{\geq -1})$ et après éclatement on aurait au centre de la carte (∞) l'inégalité $\widetilde{\mathbf{b}}(e^*\Omega^{(w')}) < \widetilde{\mathbf{m}}(\Omega^{(w')})$ d'après le lemme 3.3.2, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse d'égalité ci-dessus appliquée à w' . Ainsi le coefficient de $A^{(w')}$ est nul en ce sommet, mais ceci est maintenant contradictoire avec le corollaire 5.3.6, d'où l'assertion.

Supposons maintenant que $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$. Soit $x^o \in e^{-1}(0)$ et supposons d'abord que x^o ne soit pas un point de croisement de $e^{-1}\mathcal{P}$. Si $\mathbf{m}(\Omega^{\geq -1}) \geq \frac{r_1 + r_2}{2}$, on a

${}^a\mathbf{I}(e^*\Omega_{x^o}^{\geq -1}) = 0$. Sinon, on a en x^o , pour tout $w \in \mathbf{W}(\Omega^{\geq -1})$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}}(e^*\Omega^{\geq -1}) &= \tilde{\mathbf{b}}(e^*\Omega^{\geq -1}) \\ &\leq \tilde{\mathbf{b}}(e^*(\Omega^{(w)})) \quad (\text{car } w \in \mathbf{W}(\Omega^{\geq -1})) \\ &\leq \mathbf{h}(\Omega^{(w)}) \quad (\text{voir le lemme 3.3.2}) \\ &\leq \mathbf{h}(\Omega^{\geq -1}) \quad (\text{car } w \in \mathbf{W}(\Omega^{\geq -1})) \\ &= {}^a\mathbf{h}(\Omega^{\geq -1}) \quad (\text{car } \tilde{\mathbf{m}}(\Omega^{\geq -1}) < (r_1 + r_2)/2) \\ &\leq {}^a\tilde{\mathbf{m}}(\Omega^{\geq -1}). \end{aligned}$$

Enfin, l'argument donné dans le lemme 3.3.2 lorsque x^o est un point de croisement s'adapte simplement dans le cas présent. \square

Comme la propriété de réduction est stable par éclatement et changement de base \mathcal{T} , cf. lemme 5.2.12, on déduit du lemme 5.1.6 et du lemme précédent que l'on peut se ramener au cas où ${}^a\mathbf{I}(\Omega^{\geq -1}) = 0$ dans une base admissible, en gardant l'hypothèse de réduction de $\Omega^{\geq -1}$. On peut supposer de plus que \mathcal{P} n'a qu'une composante, sinon on applique (5.1.6-3). Il résulte alors du premier point du corollaire 5.3.6 que $\Omega^{\geq -1}$ est \mathbf{p} -réduite. \square

5.5. Obstruction à la réduction de $\Omega^{\geq -1}$ dans une base admissible. — Nous supposons ici que Ω satisfait les hypothèses du début de la section 5. Nous voulons trouver une suite d'éclatements et en tout centre M -permis du diviseur exceptionnel un changement de base rendant la base admissible, de sorte qu'en chacun de ces centres la nouvelle matrice $'\Omega$ de la connexion satisfasse de plus l'hypothèse de la proposition 5.4.2, à savoir soit \mathbf{p}_i -réduite pour un certain $i \geq -1$. Un tel résultat permettrait ainsi d'achever la preuve de (4.4.1), donc de la conjecture 1.3.1.

Il est une situation cependant qui résiste à ce procédé pour tout $i \geq -1$. Nous considérons ici le cas de la pondération triviale ($i = -1$) et nous notons (\mathfrak{B}_{-1}) cette situation, définie ci-dessous au § 5.5.4. Nous allons montrer plus précisément la

Proposition 5.5.1. — *Pour Ω comme ci-dessus, il existe une suite d'éclatements à centres M -permis $\pi : \widehat{X, E} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}^2, 0}$ telle qu'en tout centre M -permis $x^o \in E$ l'une des propriétés suivantes soit satisfaite :*

- (1) *la conclusion de 4.4.1 est vraie,*
- (2) *après le changement de base $\pi\mathcal{T}$, la matrice $'\Omega_{x^o}^{\geq -1}$ est de type (\mathfrak{B}_{-1}) .*

Ici, le changement de base $\pi\mathcal{T}$ en un centre M -permis après une suite d'éclatements à centres M -permis est défini comme le composé des images inverses par π des changements de base \mathcal{T} successifs nécessaires pour que la base soit admissible après chaque éclatement. La matrice $'\Omega_{x^o}$ est alors la matrice de la connexion image inverse dans la nouvelle base.

Il faut prendre garde que la situation (\mathfrak{B}_{-1}) dans une base admissible n'est *a priori* pas stable par éclatement et changement de base \mathcal{T} , contrairement à la situation réduite dans une base admissible (lemme 5.2.12). Cependant, d'après le lemme 5.1.10 et la proposition 5.4.2, il suffit de montrer

Proposition 5.5.2. — *Pour toute suite infinie $(\varpi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éclatements locaux à centres M -permis, il existe n_0 tel que l'une des possibilités suivantes soit satisfaite :*

- $\pi^+ M_{x^{(n_0)}}$ admet une bonne structure formelle,
- $'\Omega_{x^{(n_0)}}^{\geq -1}$ est \mathfrak{p}_{-1} -réduite,
- pour tout $n \geq n_0$, $'\Omega_{x^{(n)}}^{\geq -1}$ est de type (\mathfrak{B}_{-1}) .

Cette proposition est conséquence immédiate des propositions 5.5.3 et 5.5.7 montrées ci-dessous. Commençons par réduire l'invariant apparent.

Proposition 5.5.3. — *Soit comme au début de cette section. Il existe une suite d'éclatements $\pi : \widehat{X, E} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}^2, 0}$ à centres M -permis telle qu'en tout point x^o de E on ait l'une des deux possibilités suivantes :*

- (1) après le changement de base $\pi\mathcal{T}$ de $(\pi^+ M)_{x^o}$ rendant la base admissible, le polygone $N(' \Omega_{x^o}^{\geq -1})$ est un quadrant ;
- (2) $(\pi^+ M)_{x^o}$ admet une bonne structure formelle.

Démonstration. — Notons d'abord que l'on peut supposer au départ la base admissible en appliquant \mathcal{T}_Ω . Nous allons d'abord montrer l'analogie du lemme 3.3.2 pour $\Omega^{\geq -1}$, avec changement de base \mathcal{T} après chaque éclatement. Soit e l'éclatement de l'origine. Le lemme 3.3.2 et le corollaire 5.2.14 montrent que l'on a pour tout $x^o \in e^{-1}(0)$

$${}^a I(' \Omega_{x^o}^{\geq -1}) = {}^a I(e^* \Omega_{x^o}^{\geq -1}) \leq {}^a I(\Omega^{\geq -1}).$$

S'il y a égalité en y^o , on a ${}^a I(e^* \Omega_{x^o}^{\geq -1}) = {}^a I(\Omega^{\geq -1})$ et par suite un tel y^o est unique s'il existe. Dans ce cas, $\Omega^{\geq -1}$ est de l'un des types (1), (2) ou (3), toujours d'après (3.3.2).

Supposons que \mathcal{P} n'ait qu'une composante, que y^o existe et soit un point lisse de $e^{-1}\mathcal{P}$. Si $\Omega^{\geq -1}$ est de type (1), le coefficient de $e^* \Omega_{y^o}^{\geq -1}$ au sommet $\min_{\text{lex}} N(e^* \Omega_{y^o}^{\geq -1})$ est $A_\mu^{\geq -1}(1, x'^2 + \eta) \frac{dx'_1}{x'_1}$ (en reprenant la notation de (3.2.12)). On en déduit qu'il est inchangé par le changement de base $\mathcal{T}_{e^* \Omega_{y^o}^{\geq -1}}$, d'après (5.2.10). Donc si $' \Omega^{\geq -1}$ a un type en y^o , c'est le type (1).

Supposons maintenant que y^o soit un point de croisement de $e^{-1}\mathcal{P}$. Alors $\Omega^{\geq -1}$ est de type (3). Reprenons les notations de la démonstration de (3.3.2) dans ce cas. La partie de $e^* \Omega_{y^o}^{\geq -1}$ correspondant au bord du polygone $N(e^* \Omega_{y^o}^{\geq -1})$ s'écrit

$$[\alpha_\mu x''_2 + (\alpha_{\mu+1} + \beta_\mu) x''_1] \frac{dx''_1}{x''_1} + (\alpha_\mu x''_2 + \alpha_{\mu+1} x''_1) \frac{dx''_2}{x''_2}$$

où α_μ et $\alpha_{\mu+1}$ sont primitives (car la base est admissible au départ) et β_μ ne l'est pas nécessairement. On sait que $N'(\Omega_{y^o}^{\geq -1}) = N'(e^* \Omega_{y^o}^{\geq -1})$ et on en déduit qu'après l'éclatement ε de y^o et le changement de base \mathcal{T} , l'invariant ${}^a I$ est nul aux points de $\varepsilon^{-1}(y^o)$ qui sont des points de croisement de $\varepsilon^{-1}e^{-1}\mathcal{P}$. Il reste à considérer les points lisses.

Soit q^o le poids minimum apparaissant dans $\alpha_{\mu+1} + \beta_\mu$. Après le changement de base \mathcal{T} , la partie de $\Omega_{y^o}^{\geq -1}$ correspondant au bord du polygone s'écrit (voir (5.2.17))

$$\begin{aligned} & \left[\alpha_\mu x_2'' + \left(\alpha_{\mu+1}^{(q^o)} + \beta_\mu^{(q^o)} + \text{poids} \geq q^o \right) x_1'' \right] \frac{dx_1''}{x_1''} \\ & + \left[\alpha_\mu x_2'' + \left(\alpha_{\mu+1}^{(q^o)} - \beta_\mu^{(q^o)} + \text{poids} \geq q^o \right) x_1'' \right] \frac{dx_2''}{x_2''} \end{aligned}$$

où β_μ' (resp. β_μ'') est la partie primitive (resp. non primitive) de β_μ . Après éclatement de y^o , si on se place dans une carte $(\eta) \neq (0), (\infty)$ centrée en z^o , on voit comme en (3.3.2) que ${}^a I(\varepsilon^* \Omega_{z^o}^{\geq -1}) = {}^a I'(\Omega_{y^o}^{\geq -1})$ pour au plus un z^o et, si z^o existe, le coefficient au sommet $\min_{\text{lex}} N'(\varepsilon^* \Omega_{z^o}^{\geq -1})$ est $2\alpha_\mu z_2 \frac{dz_1}{z_1}$. Après le changement de base \mathcal{T} ce coefficient est inchangé puisque α_μ est primitive, donc si $\Omega^{\geq -1}$ a un type en z^o , c'est le type (1). Ceci montre l'analogie de (3.3.2).

De manière analogue à (3.3.1), en utilisant le lemme 5.1.6 à la place du lemme 3.1.9, on se ramène au cas où ${}^a I = 0$. C'est une situation stable par éclatement et changement de base \mathcal{T} . Si \mathcal{P} n'a qu'une composante, $N'(\Omega^{\geq -1})$ est alors un quadrant. Sinon, on utilise la proposition 4.3.1 pour se ramener à ce cas. □

5.5.4. La situation où $N'(\Omega^{\geq -1})$ est un quadrant dans une base admissible est stable par éclatement et changement de base \mathcal{T} (cf. corollaire 3.3.3). Nous distinguerons alors deux possibilités :

- (\mathfrak{A}_{-1}) : ${}^a N = \emptyset$ ou ${}^a N \neq \emptyset$ et si m^o est le sommet de N' (donc $m^o < r$), la partie primitive $\Omega_{m^o}^{\geq -1}$ est non nulle.
- (\mathfrak{B}_{-1}) : ${}^a N \neq \emptyset$ et la partie primitive de $\Omega_{m^o}^{\geq -1}$ est nulle.

Dans la situation (\mathfrak{B}_{-1}), le terme $\Omega_{m^o}^{\geq -1}$ est purement non primitif, donc de la forme $R dx_2$ (ou $R \frac{dx_2}{x_2}$) puisque la base est admissible. De plus R est quasi-primitive, ainsi qu'il résulte de la proposition 5.3.1.

On déduit alors immédiatement de la proposition 5.5.1 :

Corollaire 5.5.5. — Si A_0 n'a pas deux blocs de Jordan dont les tailles diffèrent de 1, la conclusion de 4.4.1 est vraie.

Démonstration. — En effet, dans cette situation, il n'existe pas de matrice quasi-primitive, de sorte que seules la première possibilité de la proposition 5.5.1 peut se produire. □

On vérifie facilement, de la même manière que dans la proposition 5.2.13 :

Lemme 5.5.6. — Soit Ω comme au début dans une base admissible telle que $\Omega^{\geq -1}$ soit de type (\mathfrak{B}_{-1}) . Soit e l'éclatement de l'origine, $x^o \in e^{-1}(0)$ et $'\Omega_{x^o}$ la matrice obtenue après éclatement et changement de base \mathcal{T} en x^o . Si $'\Omega_{x^o}^{\geq -1}$ est encore de type (\mathfrak{B}_{-1}) , le coefficient principal de $'\Omega_{x^o}^{\geq -1}$ est un multiple non nul de R . \square

Dans la situation (\mathfrak{A}_{-1}) nous pouvons nous ramener au cas où l'hypothèse de la proposition 5.4.2 est satisfaite :

Proposition 5.5.7. — Soit Ω comme au début de cette section dans une base admissible. Supposons que $N'(\Omega^{\geq -1})$ soit un quadrant et que $\Omega^{\geq -1}$ soit dans la situation (\mathfrak{A}_{-1}) . Alors il existe une suite M -complète d'éclatements à centres M -permis telle que la conclusion de 4.4.1 soit satisfaite en chaque centre permis.

Démonstration. — Il suffit d'obtenir la \mathfrak{p}_{-1} -réduction dans une base admissible, ainsi qu'il résulte de la proposition 5.4.2. La démonstration se fait d'après le même principe que celle du § 3.4, en considérant de plus les changements de base \mathcal{T} . Montrons d'abord que l'on peut réduire $\Omega^{\geq -1}$ (sans considération de poids). Rappelons que l'on note $B = B' + B''$ la décomposition de B sur $\text{Ker ad } X \oplus \text{Im ad } A_0$. On doit considérer les trois cas suivants :

(I-a) $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, $m^o = (m_1^o, 0)$, $\Omega^{\geq -1} = x_1^{m_1^o} \left[A \frac{dx_1}{x_1} + B dx_2 \right]$ avec $A(0) = 0$, $B'(0) \neq 0$ et, si on pose $A = x_1 A_1 + x_2 A_2$, alors

(non résonance) $\forall n_1, n_2 \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad n_1 A_2(0) + n_2 B'(0) \neq 0.$

(I-b) Même situation résonante :

(résonance) $\exists n_1, n_2 \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad n_1 A_2(0) + n_2 B'(0) = 0.$

(II) $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$, $\Omega^{\geq -1} = x^{m^o} \left[A \frac{dx_1}{x_1} + B \frac{dx_2}{x_2} \right]$, avec

(résonance) $A(0) \neq 0$, $B'(0) \neq 0$ et $\exists n_1, n_2 \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad n_1 A(0) + n_2 B'(0) = 0.$

5.5.8. Réduction dans le cas (I-a). — Soit e l'éclatement de l'origine. Dans la carte (∞) on a

$$e^* \Omega^{\geq -1} = x_1'' x_2''^{m_1^o} x_1'' \left[(x_2'' A_1 \circ e + A_2 \circ e + B \circ e) \frac{dx_1''}{x_1''} + (x_2'' A_1 \circ e + A_2 \circ e) \frac{dx_2''}{x_2''} \right]$$

et après le changement de base \mathcal{T} la partie principale est

$$(A_2(0) + B'(0)) \frac{dx_1''}{x_1''} + (A_2(0) + C(0)) \frac{dx_2''}{x_2''}$$

où $C(0)$ est un multiple de la partie non primitive $B''(0)$ de $B(0)$. Ainsi $'\Omega^{\geq -1}$ est réduit rel. $(e^{-1}\mathcal{P}, e^*D, \{x_1'' = 0\})$ en ce point par hypothèse de non résonance.

Dans la carte (η) , $\eta \in \mathbf{C}$, on a

$$e^*\Omega^{\geq -1} = x_1^{m_1^o+1} \left[U \frac{dx'_1}{x'_1} + V dx'_2 \right]$$

avec

$$U = (A_1 \circ e + \eta(A_2 \circ e + B' \circ e)) + x'_2(A_2 \circ e + B' \circ e) + (x'_2 + \eta)(B'' \circ e)$$

$$V = B \circ e.$$

Si η est tel que $A_1(0) + \eta(A_2(0) + B'(0)) \neq 0$, $'\Omega^{\geq -1}$ est réduite relativement à $(e^{-1}\mathcal{P}, e^*D, \{x'_1 = 0\})$. Supposons donc qu'il existe η_0 avec $A_1(0) + \eta_0(A_2(0) + B'(0)) = 0$. Alors $A_1 \circ e + \eta(A_2 \circ e + B' \circ e)$ est multiple de x'_1 . Nous voulons voir qu'après le changement de base \mathcal{T} , $'\Omega^{\geq -1}$ est encore de type (I-a).

On a $'B'(0) = B'(0)$ sur la forme dx'_2 . Il suffit de montrer que $'A_2(0) = A_2(0) + B'(0)$. Il s'agit de contrôler l'effet de l'élimination de $x_1^{m_1^o+1} \eta B''(0) \frac{dx'_1}{x'_1}$ sur le coefficient de $x_1^{m_1^o+1} x'_2 \frac{dx'_1}{x'_1}$. On a ici $(e^*\Omega)_0 = A_0 \frac{dx'_1}{x'_1}$. On choisit T telle que $[A_0, T] = \eta B''(0)$ et comme dans la preuve de la proposition 5.2.13 on se ramène à considérer le changement de base de matrice $P = \text{Id} + x_1^{m_1^o+1} T$.

Dans (5.2.3), le seul terme perturbatif associé au monôme $x_1^{m_1^o+1} x'_2$ est le terme $\sum_w [T, (e^*\Omega)_{(0,1)}^{(w)}]$. Mais si on écrit

$$\Omega = A_0 \left(\frac{dx_1}{x_1} + \alpha dx_2 \right) + \Omega^{\leq -2} + \Omega^{\geq -1}$$

avec $\Omega^{\leq -2}(0) = 0$ et $\Omega^{\geq -1}(0) = 0$, on voit que le coefficient de x'_2 dans $e^*\Omega$ est nul.

D'autre part, il est clair que (5.2.4) ne produit pas de tel terme. Par suite on obtient l'assertion voulue sur $'A_2(0)$ et on est encore dans la situation (I-a), avec un zéro d'ordre strictement supérieur à r_1 . En itérant, on trouve finalement la situation où ${}^a\mathcal{N} = \emptyset$.

5.5.9. Réduction dans le cas (II). — Notons (II) $_{n_1, n_2}$ la situation (II) avec $n_1 A(0) + n_2 B'(0) = 0$ et $\text{pgcd}(n_1, n_2) = 1$. Supposons d'abord $(n_1, n_2) \neq (1, 1)$ et soit e l'éclatement de l'origine. En $\eta \neq 0, \infty$,

$$e^*\Omega^{\geq -1} = x_1^{m_1^o+m_2^o} (x'_2 + \eta)^{m_2^o} \left[\dots \right]$$

avec

$$\left[\dots \right] = \left[(A(0) + B'(0) + \dots) \frac{dx'_1}{x'_1} + (B'(0) + B''(0) + \dots) \frac{dx_2}{x'_2 + \eta} \right].$$

Donc $e^*\Omega^{\geq -1}$ est réduite rel. $(e^{-1}\mathcal{P}, e^*D, \{x'_1 = 0\})$ ainsi que $'\Omega^{\geq -1}$.

La même formule vaut en $\eta = 0$, où le type est maintenant $(\text{II})_{n_1, n_2 - n_1}$ et de manière analogue en $\eta = \infty$ le type est $(\text{II})_{n_1 - n_2, n_2}$. On se ramène ainsi au cas où $n_1 = n_2 = 1$.

On vérifie alors de la même manière que $'\Omega^{\geq -1}$ est *faiblement* réduite aux points de croisement (et reste dans la situation (\mathfrak{A}_{-1})). Après un éclatement suivi d'un changement de base \mathcal{T} , la nouvelle matrice $''\Omega^{\geq -1}$ est réduite sauf au centre de la carte (∞) . On utilise la réduction torique sous la forme du point (3) du lemme 5.1.6 pour obtenir la conclusion de la proposition.

Considérons alors la carte (η) avec $\eta \in \mathbb{C} - \{0\}$. En reprenant la notation ci-dessus on a

$$\left[\dots \right] = \left[((A + B') \circ e + B'' \circ e) \frac{dx'_1}{x'_1} + ((B' + B'') \circ e) \frac{dx'_2}{x'_2 + \eta} \right]$$

avec $A(0) + B'(0) = 0, B'(0) \neq 0$. Alors $(A + B') \circ e$ est multiple de x'_1 . De même,

$$(B - B') \circ e = B'' \circ e = B''(0) + \text{multiple de } x'_1.$$

Nous voulons voir que le type est (I-a). Il suffit de vérifier que l'élimination du terme $x_1^{m_1^0 + m_2^0} B''(0) \frac{dx'_1}{x'_1}$ ne produit pas de coefficient sur $x_1^{m_1^0 + m_2^0} x'_2 \frac{dx'_1}{x'_1}$. On considère donc le changement de base de matrice $P = \text{Id} + x_1^{m_1^0 + m_2^0} T$ avec $[A_0, T] = B''(0)$. Ici encore la perturbation est provoquée par le terme $(e^* \Omega)_{(0,1)}$, dont on vérifie comme plus haut la nullité. On trouve donc finalement la situation (I-a) avec $'A_2(0) = 0$ et $'B'(0) = B'(0)$. Il est ainsi possible, d'après l'étude précédente, de réduire les points de $e^{-1}(0)$ qui sont des centres M -permis (on se restreint ici aux centres M -permis pour n'avoir qu'un nombre fini de points à réduire).

5.5.10. Réduction faible dans le cas (I-b). — On raisonne comme au § 3.4.3. Le seul point supplémentaire à vérifier est que la situation (\mathfrak{A}_{-1}) est préservée par éclatement et changement de base \mathcal{T} , ce qui est facile. Ceci termine la preuve de la proposition 5.5.7.

5.5.11. \mathfrak{p}_{-1} -réduction. — Nous avons ainsi obtenu la réduction de $\Omega^{\geq -1}$. Il reste à obtenir la \mathfrak{p}_{-1} -réduction. On peut supposer que $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ en utilisant la réduction torique. Après un éclatement et un changement de base \mathcal{T} , on vérifie que $\Omega^{\geq -1}$ est \mathfrak{p}_{-1} -réduite. □

6. La résonance nilpotente

Il résulte de la proposition 5.5.1 que seul le cas (\mathfrak{B}_{-1}) pose problème pour démontrer 4.4.1. Supposons que $\Omega^{\geq -1}$ puisse s'écrire sous la forme suivante dans une base admissible (lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$), en utilisant la structure de poids H ,

$$(6.0.1) \quad \Omega^{\geq -1} = x_1^{\rho_1} [Rdx_2 + x_1 \Omega_1^{\geq -1} + x_2 \Omega_2^{\geq -1}]$$

c'est-à-dire que $\Omega^{\geq -1}$ est de type (\mathfrak{B}_{-1}) pour la structure de poids standard. Alors R est quasi-primitive d'après la proposition 5.3.1. On ne peut pas appliquer la proposition 5.4.1, mais nous allons montrer dans cette section

Proposition 6.0.2. — *Dans ces conditions, si de plus $A_0 + R$ n'est pas conjuguée à A_0 , la conclusion de 4.4.1 est satisfaite.*

Ceci conduit à poser la définition suivante

Définition 6.0.3. — Si, pour la structure de poids standard H , la forme $\Omega^{\geq -1}$ dans une base admissible est de type (\mathfrak{B}_{-1}) avec un coefficient dominant R (quasi-primitif) tel que $A_0 + R$ soit conjuguée à A_0 , nous dirons que $\Omega^{\geq -1}$ est en situation de *résonance nilpotente* et que le *type de résonance nilpotente* est R .

Si la pondération triviale \mathfrak{p}_{-1} n'est pas suffisante pour obtenir la \mathfrak{p} -réduction de $\Omega^{\geq -1}$ dans une base admissible, nous allons essayer d'utiliser la pondération \mathfrak{p}_0 . Ici encore, il y a une obstruction à obtenir la \mathfrak{p}_0 -réduction dans une base admissible et on trouve une situation (\mathfrak{B}_0) .

Définition 6.0.4. — Supposons que $\Omega^{\geq -1}$ soit de type (\mathfrak{B}_{-1}) dans une base admissible. Nous dirons que $\Omega^{\geq -1}$ est de type (\mathfrak{B}_0) si de plus

- lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, le polygone ${}^a\mathfrak{N}_0(\Omega^{\geq -1})$ est un quadrant non vide dont le coefficient au sommet est purement non primitif (donc quasi-primitif et porté par dx_2); ce polygone est alors égal à $N'(\Omega^{\geq -1})$ ainsi qu'à ${}^aN(\Omega^{\geq -1})$;
- lorsque $\mathcal{P} = \{x_1x_2 = 0\}$, le polygone ${}^a\mathfrak{N}_0(\Omega^{\geq -1})$ n'est pas vide, n'a qu'une composante et
 - ou bien c'est un quadrant : on a alors

$${}^a\mathfrak{N}_0(\Omega^{\geq -1}) = {}^aN(\Omega^{\geq -1}) = N'(\Omega^{\geq -1});$$

- ou bien ${}^a\mathfrak{N}_0(\Omega^{\geq -1})$ a deux sommets $(\rho_1, \rho_2) \in \mathbf{N}^2$ et $(\rho_1 - 1/2, \rho_2 + 1/2)$ et de plus ${}^aN(\Omega^{\geq -1}) = (\rho_1, \rho_2) + \mathbf{N}^2$ (donc les coefficients hors de ce quadrant sont de poids ≥ 0).

Nous allons montrer des résultats analogues à ceux du § 5.5.

Proposition 6.0.5. — *Pour Ω comme ci-dessus, il existe une suite d'éclatements à centres M -permis $\pi : \widehat{X}, \widehat{E} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}^2}, 0$ telle qu'en tout centre M -permis $x^\circ \in E$ l'une des propriétés suivantes soit satisfaite :*

- (1) *la conclusion de 4.4.1 est vraie,*
- (2) *après le changement de base $\pi\mathcal{T}$, la matrice $'\Omega_{x^\circ}^{\geq -1}$ est de type (\mathfrak{B}_0) .*

D'après la proposition 5.5.2, il suffit de montrer

Proposition 6.0.6. — Pour toute suite infinie $(\varpi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éclatements locaux à centres M -permis telle qu'en chaque centre $x^{(n)}$ la forme $'\Omega_{x^{(n)}}^{\geq -1}$ soit de type (\mathfrak{B}_{-1}) , il existe n_0 tel que l'une des possibilité suivantes soit satisfaite :

- $\pi^+ M_{x^{(n_0)}}$ admet une bonne structure formelle,
- $'\Omega_{x^{(n_0)}}^{\geq -1}$ est \mathfrak{p}_0 -réduite,
- pour tout $n \geq n_0$, $'\Omega_{x^{(n)}}^{\geq -1}$ est de type (\mathfrak{B}_0) .

6.1. Nouvelle apparence. — Il sera utile d'introduire pour tout $i \geq 0$ des invariants de $\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ relativement à $\mathfrak{N}_{i-1}(\Omega^{\geq -1})$. Nous supposons ci-dessous que $i \geq 0$.

6.1.1. Nouveaux invariants apparents. — Soit $\partial^{\geq i} \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ la réunion des arêtes fermées et des sommets de $\partial \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ qui ne contiennent pas $r/\mathfrak{p}_i(0)$ et qui ne portent que des termes de poids $\geq i$. Ainsi $\partial^{\geq i} \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ est formé uniquement d'arêtes et de sommets communs à $\partial' \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ et $\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq i})$. C'est un ensemble qui peut être vide ou avoir une ou plusieurs composantes connexes. Il est vide si et seulement si tout sommet de $\partial' \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ porte un terme de poids $\leq i - 1$.

Nous noterons ${}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ la réunion disjointe des $C + \mathbf{Q}_+^2$ où C parcourt l'ensemble des composantes de $\partial^{\geq i} \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$, si ce dernier ensemble est non vide, sinon nous posons ${}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1}) = \emptyset$. On a donc par définition $\partial {}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1}) = \partial^{\geq i} \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$.

Les invariants apparents sont définis de la même manière qu'au § 3.2.5 :

Si $\mathcal{P}(M) = \{x_1 = 0\}$,

$${}^\alpha \mathfrak{J}_i(\Omega^{\geq -1}) = {}^\alpha \tilde{\mathfrak{b}}_i(\Omega^{\geq -1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } {}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1}) = \emptyset \\ \text{ordonnée de } \min_{\text{lex}} {}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$ et si ${}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1}) = \emptyset$, les invariants apparents sont nuls, et sinon

- ${}^\alpha \tilde{\mathfrak{b}}_i(\Omega^{\geq -1})$: distance verticale entre $\min_{\text{lex}} {}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ et $\max_{\text{lex}} {}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$,
- ${}^\alpha \mathfrak{h}_i(\Omega^{\geq -1})$: hauteur de l'arête de pente -1 de ${}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ si elle existe et 0 sinon.
- ${}^\alpha \mathfrak{J}_i(\Omega^{\geq -1}) = {}^\alpha \tilde{\mathfrak{m}}_i(\Omega^{\geq -1}) \stackrel{\text{déf}}{=} \max_C \tilde{\mathfrak{m}}_i(C + \mathbf{Q}^2)$, où C parcourt l'ensemble des composantes de $\partial {}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$.

On a les propriétés suivantes analogues à celles du § 3.2.5 :

- Si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, ${}^\alpha \tilde{\mathfrak{b}}_i(\Omega^{\geq -1}) = 0$ si et seulement si ${}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ est vide ou est un quadrant.
- Si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$, on a

$${}^\alpha \mathfrak{h}_i(\Omega^{\geq -1}) \leq {}^\alpha \tilde{\mathfrak{m}}_i(\Omega^{\geq -1}) \leq {}^\alpha \tilde{\mathfrak{b}}_i(\Omega^{\geq -1})$$

et on a ${}^\alpha \mathfrak{h}_i(\Omega^{\geq -1}) \neq 0$ si et seulement si l'arête fermée de pente -1 de $\partial \mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ est de longueur non nulle et ne porte que des termes de poids

$\geq i$. De plus, si ${}^\alpha \mathfrak{h}_i(\Omega^{\geq -1}) \neq 0$, on a ${}^\alpha \mathfrak{h}_i(\Omega^{\geq -1}) = \mathfrak{h}_i(\Omega^{\geq -1}) = \mathfrak{h}_i(\Omega^{\geq i})$. La même égalité est satisfaite aussi lorsque ${}^\alpha \tilde{\mathfrak{m}}_i(\Omega^{\geq -1}) < (r_1 + r_2)/\mathfrak{p}_i(0)$.

Lemme 6.1.2. — Soit $i \geq 0$.

- (1) $\mathfrak{N}'_i(\Omega^{\geq -1})$ est le polygone engendré par $\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq i})$, $\mathfrak{N}'_{i-1}(\Omega^{\geq -1})$ et $r/\mathfrak{p}_i(0) + \mathbf{Q}_+^2$ (si $i \geq 1$, le dernier terme est contenu dans le précédent).
- (2) On a ${}^\alpha \tilde{\mathfrak{b}}_i(\Omega^{\geq -1}) \leq {}^\alpha \tilde{\mathfrak{b}}_i(\Omega^{\geq i}) \leq \tilde{\mathfrak{b}}_i(\Omega^{\geq i})$.
- (3) Si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, si $\mathfrak{N}'_{i-1}(\Omega^{\geq -1})$ est un quadrant et si de plus ${}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1}) \neq \emptyset$, on a ${}^\alpha \tilde{\mathfrak{b}}_i(\Omega^{\geq -1}) = {}^\alpha \tilde{\mathfrak{b}}_i(\Omega^{\geq i}) = \tilde{\mathfrak{b}}_i(\Omega^{\geq i})$.

Démonstration

(1) Puisque $\mathfrak{p}_{i-1}(w) = \mathfrak{p}_i(w) = w + 2$ pour $w \leq i - 1$, la partie de poids $\leq i - 1$ de $\Omega^{\geq -1}$ donne les mêmes points dans \mathfrak{N}_{i-1} et dans \mathfrak{N}_i . De plus, si $w \geq i$, on a $i + 2 = \mathfrak{p}_i(w) > \mathfrak{p}_{i-1}(w) = i + 1$, donc la partie de poids $\geq i$ donne un polygone \mathfrak{N}_i qui contient le polygone \mathfrak{N}_{i-1} correspondant.

(2) Le bord de ${}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ est formé uniquement de sommets et d'arêtes fermées de $\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq i})$ qui ne contiennent pas $r/2$. Ainsi ce sont des sommets et des arêtes fermées du bord de ${}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq i})$. On en déduit les inégalités voulues.

(3) Supposons maintenant que $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ et soit $\mathfrak{m}_{i-1}^0 = (\mathfrak{m}_{i-1,1}^0, 0)$ le sommet du quadrant $\mathfrak{N}'_{i-1}(\Omega^{\geq -1})$. Alors ${}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ n'est pas vide si et seulement si l'abscisse de $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq i})$ est $< \min(\mathfrak{m}_{i-1,1}^0, r_1/2)$ et, dans ce cas, on a

$$\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq i}) = \min_{\text{lex}} {}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq i}) = \min_{\text{lex}} {}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1}).$$

On en déduit les égalités voulues. \square

6.2. Réduction à 0 de l'invariant apparent ${}^\alpha \mathcal{J}_i(\Omega^{\geq -1})$. — Nous allons montrer un analogue du lemme 3.3.2.

Lemme 6.2.1. — Soit Ω comme au début de cette section dans une base admissible. Soit $i \geq 0$; si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, nous supposons que $\mathfrak{N}'_{i-1}(\Omega^{\geq -1})$ est un quadrant et que ${}^\alpha \mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1}) \neq \emptyset$. Soit e l'éclatement de l'origine, $x^o \in e^{-1}(0)$ et $'\Omega_{x^o} = \mathcal{T}_{e^* \Omega_{x^o}}(e^* \Omega_{x^o})$.

- (i) On a ${}^\alpha \mathcal{J}_i(' \Omega_{x^o}^{\geq -1}) \leq {}^\alpha \mathcal{J}_i(\Omega^{\geq -1})$.
- (ii) Si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ et ${}^\alpha \mathcal{J}_i(\Omega^{\geq -1}) \neq 0$ (on suppose dans ce cas que $\mathfrak{N}'_{i-1}(\Omega^{\geq -1})$ est un quadrant), il existe au plus un point $y^o \in e^{-1}(0)$ où il y a égalité ${}^\alpha \mathcal{J}_i(' \Omega_{y^o}^{\geq -1}) = {}^\alpha \mathcal{J}_i(\Omega^{\geq -1})$; si un tel y^o existe, $\Omega^{\geq i}$ a un type : c'est le type
 - (1) ou (2) si et seulement si y^o est un point lisse de $e^{-1}(0)$; de plus
 - (a) si $\Omega^{\geq i}$ est de type (1) (y^o est un point lisse de $e^{-1}\mathcal{P}$), si $\mathfrak{N}'_{i-1}(' \Omega_{y^o}^{\geq -1})$ est un quadrant et si $' \Omega_{y^o}^{\geq i}$ a un type, c'est le type (1);
 - (b) si $\Omega^{\geq i}$ est de type (3) (donc y^o est un point de croisement de $e^{-1}\mathcal{P}$) et si ε est l'éclatement de y^o , il existe au plus un point $z^o \in \varepsilon^{-1}(y^o)$ où

${}^{\alpha}\mathcal{J}_i({}'\Omega_{x^o}^{\geq -1}) = {}^{\alpha}\mathcal{J}_i(\Omega^{\geq -1})$; si z^o existe, c'est un point lisse de $\varepsilon^{-1}e^{-1}\mathcal{P}$ et si ${}''\Omega_{z^o}^{\geq i}$ a un type en z^o , c'est le type (1).

Démonstration. — Montrons le premier point. On peut supposer d'abord que l'on a ${}^{\alpha}\mathcal{J}_i({}'\Omega_{x^o}^{\geq -1}) \neq 0$, sinon l'inégalité est claire.

Cas où $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ et où x^o est un point lisse de $e^{-1}(\mathcal{P})$. — On a, d'après 5.2.13, $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i({}'\Omega_{x^o}^{\geq -1}) = \min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(e^*\Omega_{x^o}^{\geq -1})$ et, puisque ${}^{\alpha}\tilde{\mathfrak{b}}_i({}'\Omega_{x^o}^{\geq -1}) = {}^{\alpha}\mathcal{J}_i({}'\Omega_{x^o}^{\geq -1}) \neq 0$, ce sommet ne porte que des termes $'\Omega_{x^o}^{\geq i}$; il ne porte aussi que des termes $e^*\Omega_{x^o}^{\geq i}$ puisque les poids minimums de $'\Omega_{x^o}^{\geq -1}$ et $e^*\Omega_{x^o}^{\geq -1}$ en ce sommet sont les mêmes. On en déduit que

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}\mathcal{J}_i({}'\Omega_{x^o}^{\geq -1}) &= {}^{\alpha}\mathcal{J}_i(e^*\Omega_{x^o}^{\geq -1}) \leq \tilde{\mathfrak{b}}_i(e^*\Omega_{x^o}^{\geq i}) \text{ (lemme 6.1.2-(2))} \\ &\leq \tilde{\mathfrak{b}}_i(\Omega^{\geq i}) \text{ (lemme 3.3.2)} \\ &= {}^{\alpha}\mathcal{J}_i(\Omega^{\geq -1}) \text{ (lemme 6.1.2-(3))} \end{aligned}$$

et l'utilisation du lemme 6.1.2-(3) est justifiée par le fait que $\mathfrak{N}'_{i-1}(\Omega^{\geq -1})$ est un quadrant et ${}^{\alpha}\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1}) \neq \emptyset$.

Cas où $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ et où x^o est un point de croisement de $e^{-1}(\mathcal{P})$. — On a maintenant, d'après 5.2.13, $\mathfrak{N}'_i({}'\Omega_{x^o}^{\geq -1}) = \mathfrak{N}'_i(e^*\Omega_{x^o}^{\geq -1})$. De plus, la démonstration de *loc. cit.* prouve aussi que le poids minimum q^o en chaque sommet de $\mathfrak{N}'_i(e^*\Omega_{x^o}^{\geq -1})$ est inchangé après $\mathcal{T}_{e^*\Omega_{x^o}^{\geq -1}}$. On en déduit que $\partial^{\geq i}\mathfrak{N}'_{i-1}({}'\Omega_{x^o}^{\geq -1})$ et $\partial^{\geq i}\mathfrak{N}'_{i-1}(e^*\Omega_{x^o}^{\geq -1})$ ont les mêmes sommets. Ainsi

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}\mathcal{J}_i({}'\Omega_{x^o}^{\geq -1}) &= {}^{\alpha}\tilde{\mathfrak{m}}_i({}'\Omega_{x^o}^{\geq -1}) \leq {}^{\alpha}\tilde{\mathfrak{b}}_i({}'\Omega_{x^o}^{\geq -1}) \\ &= {}^{\alpha}\tilde{\mathfrak{b}}_i(e^*\Omega_{x^o}^{\geq -1}) \\ &\leq \tilde{\mathfrak{b}}_i(e^*\Omega_{x^o}^{\geq i}) \text{ (lemme 6.1.2-(2))} \\ &\leq \tilde{\mathfrak{b}}_i(\Omega^{\geq i}) \text{ (lemme 3.3.2)} \\ &= {}^{\alpha}\mathcal{J}_i(\Omega^{\geq -1}) \text{ (lemme 6.1.2-(3)).} \end{aligned}$$

Cas où $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$ et où x^o est un point lisse de $e^{-1}(\mathcal{P})$. — Remarquons d'abord que si ${}^{\alpha}\mathcal{J}_i({}'\Omega_{x^o}^{\geq -1}) \neq 0$, on doit avoir

$$\mathfrak{m}_i(\Omega^{\geq -1}) < \min \left(\mathfrak{m}_{i-1}(\Omega^{\geq -1}), \frac{r_1 + r_2}{\mathfrak{p}_{i-1}(0)} \right);$$

en effet, dans le cas contraire, le polygone $\mathfrak{N}'_i(e^*\Omega_{x^o}^{\geq -1})$ est contenu dans $\mathfrak{N}'_{i-1}(e^*\Omega_{x^o}^{\geq -1})$ (donc lui est égal) et, d'après 5.2.13, il en est de même de $\mathfrak{N}'_i({}'\Omega_{x^o}^{\geq -1})$ et $\mathfrak{N}'_{i-1}({}'\Omega_{x^o}^{\geq -1})$; par suite ${}^{\alpha}\mathfrak{N}_i({}'\Omega_{x^o}^{\geq -1}) = \emptyset$ et ${}^{\alpha}\mathcal{J}_i({}'\Omega_{x^o}^{\geq -1}) = 0$.

Ainsi on a aussi ${}^\alpha\mathfrak{h}_i(\Omega^{\geq -1}) = \mathfrak{h}_i(\Omega^{\geq i})$. Alors on montre comme ci-dessus

$$\begin{aligned} {}^\alpha\mathcal{J}_i(' \Omega_{x^o}^{\geq -1}) &= {}^\alpha\mathcal{J}_i(e^* \Omega_{x^o}^{\geq -1}) \leq \tilde{\mathfrak{b}}_i(e^* \Omega_{x^o}^{\geq i}) \text{ (lemme 6.1.2-(2))} \\ &\leq \mathfrak{h}_i(\Omega^{\geq i}) \text{ (lemme 3.3.2)} \\ &= {}^\alpha\mathfrak{h}_i(\Omega^{\geq -1}) \\ &\leq {}^\alpha\tilde{\mathfrak{m}}_i(\Omega^{\geq -1}) \\ &= {}^\alpha\mathcal{J}_i(\Omega^{\geq -1}). \end{aligned}$$

Cas où $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$ et où x^o est un point de croisement de $e^{-1}(\mathcal{P})$. — Le polygone ${}^\alpha\mathfrak{N}_i(' \Omega_{x^o}^{\geq -1})$ s'obtient par L_0 et L_∞ à partir de ${}^\alpha\mathfrak{N}_i(\Omega^{\geq -1})$ et on conclut comme dans le lemme 3.3.2.

Considérons maintenant le cas d'égalité lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$. Comme on suppose que ${}^\alpha\mathcal{J}_i(\Omega^{\geq -1}) \neq 0$, on a aussi ${}^\alpha\mathcal{J}_i(' \Omega_{x^o}^{\geq -1}) \neq 0$ et on peut appliquer la première partie de l'étude précédente. Alors on doit avoir $\tilde{\mathfrak{b}}_i(e^* \Omega_{x^o}^{\geq i}) = \tilde{\mathfrak{b}}_i(\Omega^{\geq i})$ et le lemme 3.3.2 montre qu'un tel point est unique. Supposons qu'il existe et notons-le y^o . Alors, toujours d'après 3.3.2, $\Omega^{\geq i}$ est de type (1), (2) ou (3), les deux premiers cas se produisant lorsque y^o est lisse sur $e^{-1}(\mathcal{P})$.

Si $\Omega^{\geq i}$ est de type (1), y^o est le centre d'une carte $(\eta) \neq (\infty)$. Le coefficient de $e^* \Omega_{y^o}^{\geq i}$ au sommet $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(e^* \Omega_{y^o}^{\geq i})$ est $A_\mu^{\geq i}(1, x'_2 + \eta) \frac{dx'_1}{x'_1}$. D'autre part, $\mathfrak{N}'_{i-1}(e^* \Omega_{y^o}^{\geq -1})$ est un quadrant, puisque $\mathfrak{N}'_{i-1}(' \Omega_{y^o}^{\geq -1})$ en est un, et ils sont alors égaux (5.2.13). Toujours d'après 5.2.13 on a $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(e^* \Omega_{y^o}^{\geq -1}) = \min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(' \Omega_{y^o}^{\geq -1})$. On sait aussi que $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(' \Omega_{y^o}^{\geq -1}) = \min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(' \Omega_{y^o}^{\geq i})$ d'après le lemme 6.1.2, puisqu'on a supposé

$${}^\alpha\mathcal{J}_i(' \Omega_{y^o}^{\geq -1}) = {}^\alpha\mathcal{J}_i(\Omega^{\geq -1}) \neq 0 \quad \text{donc } {}^\alpha\mathfrak{N}'_i(' \Omega_{y^o}^{\geq -1}) \neq \emptyset.$$

Alors on a aussi $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(e^* \Omega_{y^o}^{\geq -1}) = \min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(e^* \Omega_{y^o}^{\geq i})$: dans le cas contraire, les coefficients au sommet $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(e^* \Omega_{y^o}^{\geq -1})$ seraient de poids $\leq i - 1$, donc $\mathfrak{N}'_i(e^* \Omega_{y^o}^{\geq -1})$ serait égal au quadrant $\mathfrak{N}'_{i-1}(e^* \Omega_{y^o}^{\geq -1})$ et il en serait de même pour $' \Omega_{y^o}^{\geq -1}$, ce qui n'est pas. Il résulte maintenant du lemme 5.2.10 qu'après le changement de base \mathcal{T} le coefficient de $e^* \Omega_{y^o}^{\geq -1}$ au sommet $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(e^* \Omega_{y^o}^{\geq -1})$ est inchangé. Autrement dit $' \Omega_{y^o}^{\geq i}$ est de type (1) aussi.

Supposons que $\Omega^{\geq i}$ soit de type (3). Alors, d'après le lemme 3.3.2, on a

$$\Omega^{\geq i} = \alpha_1 x_1 \frac{dx_1}{x_1} + \beta_1 (x_2 + \lambda x_1) dx_2 + \text{ordre } \geq 2$$

et, dans les coordonnées (x''_1, x''_2) au point de croisement y^o :

$$e^* \Omega^{\geq i} = (\alpha_1 x''_2 + (\alpha_2 + \beta_1) x''_1) \frac{dx''_1}{x''_1} + (\alpha_1 x''_2 + \alpha_2 x''_1) \frac{dx''_2}{x''_2}$$

avec $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$ et α_1, α_2 primitives, définies comme au lemme 3.3.2. On en déduit que le polygone $\mathfrak{N}'_i(e^* \Omega^{\geq i})$ n'a que les deux sommets $(1/(i+2), 0)$ et $(0, 1/(i+2))$ et

les termes de $e^*\Omega^{\geq -1}$ qui sont de poids $\leq i-1$ n'ont pas de coefficient en ces sommets puisque, pour $w \leq i-1$,

$$\frac{1}{p_{i-1}(w)} = \frac{1}{w+2} > \frac{1}{i+2}.$$

On en conclut que ces deux sommets sont aussi les sommets de $\mathfrak{N}'_i(e^*\Omega^{\geq -1})$. Après le changement de base \mathcal{T} , en notant β'_1 (*resp.* β''_1) la partie primitive (*resp.* non primitive) de β_1 et q° le poids minimum apparaissant dans $\alpha_2 + \beta_1$, la partie de $'\Omega_{y^\circ}^{\geq -1}$ correspondant au bord du polygone s'écrit (voir 5.2.17) :

$$\begin{aligned} & \left[\alpha_1 x''_2 + (\alpha_2^{(q^\circ)} + \beta'_1{}^{(q^\circ)} + \text{poids} > q^\circ) x''_1 \right] \frac{dx''_1}{x''_1} \\ & + \left[\alpha_1 x''_2 + (\alpha_2^{(q^\circ)} - \beta''_1{}^{(q^\circ)} + \text{poids} > q^\circ) x''_1 \right] \frac{dx''_2}{x''_2}. \end{aligned}$$

Après l'éclatement ε de y° , le polygone de $\varepsilon^*('\Omega_{y^\circ}^{\geq -1})$ en chaque point de croisement de $\varepsilon^{-1}e^{-1}\mathcal{P}$ est un quadrant dont le sommet ne porte que des termes de poids $\geq i$. Il en est de même après changement de base \mathcal{T} , de sorte qu'on a ${}^\alpha\mathcal{J}_i(''\Omega_{z^\circ}^{\geq -1}) = 0 < {}^\alpha\mathcal{J}_i(''\Omega_{y^\circ}^{\geq -1})$ en ces points.

Le même argument vaut pour tous les points de $\varepsilon^{-1}(y^\circ)$ sauf l'unique point z° (s'il existe) centre de la carte (η) où

$$\begin{aligned} 2\alpha_1\eta + 2\alpha_2^{(q^\circ)} + \beta'_1{}^{(q^\circ)} - \beta''_1{}^{(q^\circ)} + (\text{poids} > q^\circ) &= 0 \\ \text{et } \alpha_1\eta + \alpha_2^{(q^\circ)} - \beta''_1{}^{(q^\circ)} + (\text{poids} > q^\circ) &= 0. \end{aligned}$$

En un tel point, on voit comme en 3.3.2 que dans des coordonnées (z_1, z_2) centrées en z° , le coefficient au sommet $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(\varepsilon^*('\Omega_{y^\circ}^{\geq i}))$ est $\alpha_1 z_2 \left(2 \frac{dz_1}{z_1} + \frac{dz_2}{z_2 + \eta} \right)$. On en déduit comme ci-dessus que $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(\varepsilon^*('\Omega_{y^\circ}^{\geq i})) = \min_{\text{lex}} \mathfrak{N}'_i(''\Omega_{z^\circ}^{\geq i})$ et que le coefficient de $''\Omega_{z^\circ}^{\geq i}$ est le même. En un tel point, si $''\Omega_{z^\circ}^{\geq i}$ a un type, c'est le type (1). \square

6.3. Obstruction à la p_0 -réduction de $\Omega^{\geq -1}$ dans une base admissible

Considérons la suite infinie d'éclatements à centres M -permis de la proposition 6.0.6. Puisqu'on suppose en particulier que N' est un quadrant en chaque centre lisse $x^{(n)}$, il résulte du lemme 6.2.1 pour $i = 0$ qu'il existe n_0 tel qu'en $x^{(n_0)}$ la forme $'\Omega^{\geq -1}$ satisfait ${}^\alpha\mathcal{J}_0(''\Omega_{x^{(n_0)}}^{\geq -1}) = 0$. Nous pouvons donc supposer que cette propriété est satisfaite dès le début. Nous allons distinguer plusieurs situations pour montrer la proposition 6.0.6.

Dans les §§ 6.3 et 6.4, nous n'utiliserons que la pondération p_0 et nous noterons \mathfrak{m} , \mathfrak{o} , ${}^\alpha\mathcal{J}$, ${}^\alpha\mathfrak{N}$, *etc.* les objets \mathfrak{m}_i , \mathfrak{o}_i , ${}^\alpha\mathcal{J}_i$, ${}^\alpha\mathfrak{N}_i$, *etc.* pour $i = 0$.

6.3.1. Cas où ${}^\alpha\mathcal{J}(\Omega^{\geq -1}) = 0$, situation A. — Nous allons montrer que si ${}^\alpha\mathcal{J}(\Omega^{\geq -1}) = 0$ et si une des propriétés ci-dessous est satisfaite, il existe n_0 tel que l'une des deux premières assertions de 6.0.6 soit satisfaite. Si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, nous notons $(\rho_1, 0)$ le

sommet de ${}^{\alpha}N(\Omega^{\geq -1})$. On a donc par hypothèse (\mathfrak{B}_{-1}) l'inégalité $\rho_1 < r_1$. Nous dirons que $\Omega^{\geq -1}$ tel que ${}^{\alpha}\mathcal{J}(\Omega^{\geq -1}) = 0$ dans une base admissible est de type A si

- si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, ${}^{\alpha}\mathfrak{N}(\Omega^{\geq -1})$ est non vide, i.e. $\mathfrak{N}'(\Omega^{\geq -1}) = {}^{\alpha}\mathfrak{N}(\Omega^{\geq -1})$ est un quadrant dont le sommet est $< \min(\rho_1, r_1/2)$ et ne porte que des termes de poids ≥ 0 ,
- si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$, ${}^{\alpha}\mathfrak{N}(\Omega^{\geq -1})$ est un quadrant non vide dont le sommet ne porte que des termes de poids ≥ 0 .

Montrons d'abord qu'après éclatement et changement de base \mathcal{T} , $'\Omega^{\geq -1}$ reste de type A . Notons déjà que puisqu'on suppose que $\Omega^{\geq -1}$ est de type (\mathfrak{B}_{-1}), on peut appliquer le lemme 6.2.1 et on a ${}^{\alpha}\mathcal{J}(' \Omega^{\geq -1}) = 0$.

Si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, on a $\mathfrak{m}^+(\Omega^{\geq 0}) \leq \mathfrak{m}(\Omega^{\geq 0}) + 1/2 < \rho_1 + 1 = \mathfrak{m}^+(\Omega^{(-1)})$ et on en déduit qu'au centre d'une carte $(\eta) \neq (\infty)$ la situation A est conservée. On a aussi $\mathfrak{o}_1(\Omega^{\geq 0}) \leq \rho_1 - 1/2$. Au centre de la carte (∞) , $\mathfrak{N}(e^*\Omega^{\geq 0})$ est un quadrant de sommet $(\mathfrak{m}^+(\Omega^{\geq 0}), \mathfrak{o}_1(\Omega^{\geq 0})) < (\rho_1 + 1, \rho_1)$, ce dernier point étant le sommet de $\mathfrak{N}(e^*\Omega^{(-1)})$. On conclut à l'aide de la proposition 5.2.13.

Dans la situation A , le terme de poids minimum au sommet du quadrant ${}^{\alpha}\mathfrak{N}(\Omega^{\geq -1})$ est primitif, d'après la proposition 5.3.4. On peut alors obtenir la \mathfrak{p}_0 -réduction comme pour la proposition 5.5.7. \square

6.3.2. Cas où ${}^{\alpha}\mathcal{J}(\Omega^{\geq -1}) = 1/2$, situation A . — Lorsque ${}^{\alpha}\mathcal{J}(\Omega^{\geq -1}) = 1/2$ (et donc ${}^{\alpha}\mathfrak{N}(\Omega^{\geq -1})$ n'est pas vide) la situation A est définie par le fait que, si $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$, le bord $\partial {}^{\alpha}\mathfrak{N}(\Omega^{\geq -1})$ ne porte que des termes de poids ≥ 0 . Il n'y a pas de restriction lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$. Nous allons montrer qu'ici encore l'une des deux premières assertions de la proposition 6.0.6 est satisfaite pour n_0 assez grand. Il suffit de vérifier qu'après éclatement et changement de base \mathcal{T} , ou bien $'\Omega^{\geq -1}$ reste du même type (ceci n'arrive qu'un nombre fini de fois d'après le lemme 6.2.1), ou bien ${}^{\alpha}\mathcal{J}(' \Omega^{\geq -1}) = 0$ et $'\Omega^{\geq -1}$ est de type A (auquel cas on applique le § 6.3.1).

Si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, on a $\mathfrak{o}_1(\Omega^{\geq 0}) \leq \rho_1 - 1/2$ et $\mathfrak{m}(\Omega^{\geq 0}) \leq (\rho_1 - 1/2) + 1/2 = \rho_1$, donc $\mathfrak{m}^+(\Omega^{\geq 0}) \leq \mathfrak{m}(\Omega^{\geq 0}) + 1/2 \leq \rho_1 + 1/2$. Après éclatement, dans une carte $(\eta) \neq (\infty)$, on a encore ${}^{\alpha}\mathcal{J} \leq 1/2$ d'après 6.2.1, et si ${}^{\alpha}\mathcal{J}(' \Omega^{\geq -1}) = 0$, le polygone ${}^{\alpha}\mathfrak{N}(e^*\Omega^{\geq 0})$ est un quadrant de sommet $(\rho_0, 0)$ avec $\rho_0 = \mathfrak{m}^+(\Omega^{\geq -1}) < \rho_1 + 1 = \mathfrak{m}^+(e^*\Omega^{(-1)})$, et il en est de même après changement de base \mathcal{T} . On se trouve donc dans la situation A du § 6.3.1.

Au centre de la carte (∞) , le polygone $\mathfrak{N}(e^*\Omega^{(-1)}) = N(e^*\Omega^{(-1)})$ est le quadrant de sommet $(\rho_1 + 1, \rho_1)$. Le sommet $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}(e^*\Omega^{\geq 0})$ est le point d'abscisse $\mathfrak{m}^+(\Omega^{\geq 0}) \leq \rho_1 + 1/2$ et d'ordonnée $\mathfrak{o}_1(\Omega^{\geq 0}) + \mu$ avec $\mu \leq \mathfrak{b}(\Omega^{\geq 0}) = 1/2$, donc l'ordonnée est $\leq \rho_1$. Dans tous les cas, le point $(\rho_1 + 1, \rho_1)$ n'est pas sur $\partial {}^{\alpha}\mathfrak{N}(' \Omega^{\geq -1})$. Si de plus ${}^{\alpha}\mathcal{J}(' \Omega^{\geq -1}) = 0$, on se trouve dans la situation A du § 6.3.1.

Lorsque $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$, il est clair que la situation A est préservée par éclatement et changement de base \mathcal{T} . \square

Fin de la démonstration de la proposition 6.0.6. — Considérons donc une suite infinie $(\omega_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éclatements locaux à centres $x^{(n)}$ M -permis, le long de laquelle $\Omega_{x^{(n)}}^{\geq -1}$ reste de type (\mathfrak{B}_{-1}) . Nous pouvons supposer qu'il existe un centre $x^{(n_0)}$ en lequel \mathcal{P} n'a qu'une composante et ${}^\alpha \mathfrak{J}(\Omega_{x^{(n_0)}}^{\geq -1}) = 0$, d'après les lemmes 6.2.1 et 5.1.6. Si ${}^\alpha \mathfrak{N}(\Omega_{x^{(n_0)}}^{\geq -1}) \neq \emptyset$, on se trouve dans la situation A du § 6.3.1 et la conclusion de 6.0.6 (et même de 4.4.1) est vraie. Nous supposons donc que ${}^\alpha \mathfrak{N}(\Omega_{x^{(n_0)}}^{\geq -1}) = \emptyset$ et que $x^{(n_0)}$ est le premier centre permis.

6.3.3. Cas où ${}^\alpha \mathfrak{J}(\Omega^{\geq -1}) = 0$, situation B. — Si les propriétés précédentes sont satisfaites et si de plus $\Omega^{\geq -1}$ n'est pas de type (\mathfrak{B}_0) , c'est que $\mathfrak{N}(\Omega^{\geq 0})$ est égal au quadrant $\mathfrak{N}(\Omega^{(-1)}) = N(\Omega^{(-1)}) = (\rho_1, 0) + \mathbf{N}^2$ avec les notations précédentes. Le sommet $(\rho_1, 0)$ porte donc un terme de poids ≥ 0 et par suite

$$\mathfrak{m}^+(\Omega^{\geq 0}) \leq \mathfrak{m}(\Omega^{\geq 0}) + \frac{1}{2} = \rho_1 + \frac{1}{2} < \rho_1 + 1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{o}_1(\Omega^{\geq 0}) = \rho_1.$$

Alors, après éclatement et changement de base \mathcal{T} , $'\Omega^{\geq -1}$ se trouve dans la situation A du § 6.3.1 en tout centre M -permis.

Pour terminer la démonstration de (6.0.6), il suffit de vérifier que si $\Omega^{\geq -1}$ est de type (\mathfrak{B}_0) et \mathcal{P} a une ou deux composantes, alors après éclatement et changement de base \mathcal{T} , si l'on suppose que $'\Omega^{\geq -1}$ reste de type (\mathfrak{B}_{-1}) , l'une des possibilités suivantes est satisfaite en chaque centre M -permis :

- $'\Omega^{\geq -1}$ reste de type (\mathfrak{B}_0) ;
- $'\Omega^{\geq -1}$ est de l'un des types (6.3.1), (6.3.2) ou (6.3.3), de sorte que (4.4.1) est vraie en ce centre permis.

Supposons d'abord que $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$.

L'hypothèse (\mathfrak{B}_0) implique l'inégalité $\mathfrak{m}(\Omega^{\geq 0}) > \rho_1$.

Si l'on a de plus $\mathfrak{m}^+(\Omega^{\geq 0}) \geq \rho_1 + 1$, le polygone $\mathfrak{N}(e^* \Omega^{\geq -1})$ est égal au quadrant $(\rho_1 + 1, 0) + \mathbf{N}^2$ (carte $(\eta) \neq (\infty)$) ou $(\rho_1 + 1, \rho_1) + \mathbf{N}^2$ (carte (∞)). Alors $'\Omega^{\geq -1}$ est soit de type (\mathfrak{B}_0) , soit de type (6.3.3).

Supposons donc que $\mathfrak{m}(\Omega^{\geq 0}) = \mathfrak{m}^+(\Omega^{\geq 0}) = \rho_1 + 1/2$. On a alors

$$\Omega^{\geq 0} = \left[x_1^{2\rho_1+1} A_{(2\rho_1+1,0)}^{\geq 0} + x_1^{2\rho_1} x_2 A_{(2\rho_1,1)}^{\geq 0} \right] \frac{dx_1}{x_1} + \text{termes avec } \mathfrak{m} \geq \rho_1 + 1$$

et $A_{(2\rho_1+1,0)}^{\geq 0}, A_{(2\rho_1,1)}^{\geq 0}$ sont primitifs et non tous deux nuls. Après éclatement et changement de base \mathcal{T} , $'\Omega^{\geq -1}$ est de type (6.3.1) ou (6.3.2) au centre d'une carte $(\eta) \neq (\infty)$.

Au centre de la carte (∞) , le polygone $N(\Omega^{\geq -1})$ est le quadrant $(\rho_1 + 1, \rho_1) + \mathbf{N}^2$ par hypothèse (\mathfrak{B}_{-1}) . Si $A_{(2\rho_1,1)}^{\geq 0} \neq 0$, de sorte que $\mathfrak{o}_1(\Omega^{\geq 0}) = \rho_1$, $'\Omega^{\geq -1}$ est de type (6.3.1) ou (\mathfrak{B}_0) , puisque $\min_{\text{lex}} \mathfrak{N}(\Omega^{\geq 0})$ est soit le point $(\mathfrak{m}^+(\Omega^{\geq 0}), \mathfrak{o}_1(\Omega^{\geq 0}))$, soit le point $(\mathfrak{m}^+(\Omega^{\geq 0}), \mathfrak{o}_1(\Omega^{\geq 0}) + 1/2)$. Si $A_{(2\rho_1,1)}^{\geq 0} = 0$, le polygone $\mathfrak{N}(\Omega^{\geq 0})$ a un sommet en $(\rho_1 + 1/2, \rho_1 + 1/2)$ et $'\Omega^{\geq -1}$ est de type (\mathfrak{B}_0) .

Supposons maintenant que $\mathcal{P} = \{x_1 x_2 = 0\}$. Si $\Omega^{\geq -1}$ est de type (\mathfrak{B}_0) , alors après éclatement et changement de base \mathcal{T} , $'\Omega^{\geq -1}$ est de type (\mathfrak{B}_0) ou (6.3.1) au centre des cartes (0) et (∞) . Au centre d'une carte $(\eta) \neq (0), (\infty)$, $'\Omega^{\geq -1}$ est soit de type (\mathfrak{B}_0) , soit de type (6.3.3). \square

6.4. Démonstration de la proposition 6.0.2. — Dans la suite, si $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$, nous supposons que si $\Omega^{\geq -1}$ est de type (\mathfrak{B}_0) dans une base admissible, il en est de même en tout centre M -permis après éclatement et changement de base \mathcal{T} , car la démonstration de la proposition 6.0.5 montre que la conclusion de 4.4.1 est satisfaite en tout centre permis où $'\Omega^{\geq -1}$ n'est pas de type (\mathfrak{B}_0) . Alors $\Omega^{\geq -1}$ est en particulier de type (\mathfrak{B}_{-1}) , donc a la forme (6.0.1).

Proposition 6.4.1. — *Supposons que $\mathcal{P} = \{x_1 = 0\}$ et que $\Omega^{\geq -1}$ soit de type (\mathfrak{B}_0) . Si de plus $A_0 + R$ n'est pas conjuguée à A_0 , alors la conclusion de 4.4.1 est satisfaite.*

Puisque $\Omega^{\geq -1}$ est de type (\mathfrak{B}_0) et que la base est admissible, le terme correspondant au sommet du quadrant ${}^a\mathfrak{N}(\Omega^{\geq -1})$ s'écrit $x_1^{\rho_1} R dx_2$ avec $\rho_1 \in \mathbf{N} - \{0\}$. On a aussi $\rho_1 < r_1/2$. On a $m^+(\Omega^{\geq -1}) = \rho_1 + 1$.

Notons $S = [X, R]$. L'hypothèse signifie que $[R, S] \neq 0$. De plus, $[R, S]$ est primitive, alors que $RS + SR = [A_0, S^2]$ est purement non primitive (voir l'appendice, démonstration de A.2.4).

Il apparaît dans cette situation une résonance qu'il sera nécessaire d'éliminer. Considérons dans la partie de poids 0 de $\Omega^{\geq -1}$ le coefficient $A_2^{(0)}$ de $x_1^{2\rho_1} x_2^2 \frac{dx_1}{x_1}$ (nous avons noté un tel terme $A_{(2\rho_1, 2)}^{(0)}$ précédemment) ainsi que le coefficient $B_1^{(0)}$ de $x_1^{2\rho_1} x_2 dx_2$ (noté avant $B_{(2\rho_1, 1)}^{(0)}$). Nous dirons que la situation considérée est de type de résonance $\lambda \in \mathbf{Q}_+^*$ si l'on a

$$A_2^{(0)} = -\frac{\lambda^2}{2}[R, S] \quad \text{et} \quad B_1^{(0)} = \lambda[R, S].$$

Nous dirons qu'il n'y a pas résonance si pour tout $\lambda \in \mathbf{Q}_+^*$ une au moins de ces égalités n'est pas satisfaite.

Démonstration dans le cas non résonant. — Elle se fait par récurrence descendante sur l'ordre $r_1 - \rho_1$ du pôle de $x_1^{-r_1} \Omega^{\geq -1}$. Considérons d'abord une carte $(\eta) \neq (\infty)$ centrée en un centre permis x^o du diviseur $e^{-1}(0)$ de l'éclatement de l'origine. On peut supposer qu'en ce centre, après changement de base \mathcal{T} , la forme $'\Omega_{x^o}^{\geq -1}$ est encore de type (\mathfrak{B}_0) , comme indiqué plus haut. Un calcul analogue à celui fait au § 5.2.15 montre que le terme de $'\Omega_{x^o}^{\geq -1}$ au sommet de ${}^a\mathfrak{N}(' \Omega^{\geq -1})$ est $x_1^{\rho_1+1} R dx_2'$. Autrement dit $'\Omega_{x^o}^{\geq -1}$ se trouve dans la même situation que $\Omega^{\geq -1}$, avec un ordre du pôle $r_1' - \rho_1' = r_1 - (\rho_1 + 1) < r_1 - \rho_1$. Nous allons vérifier que $'\Omega_{x^o}^{\geq -1}$ est encore non résonante au sens précédent. Nous pourrons alors conclure par récurrence que la conclusion de 4.4.1 est vraie en x^o .

Nous allons travailler essentiellement avec les termes de poids 0. Puisque $'\Omega_{x^\circ}^{\geq -1}$ est de type (\mathfrak{B}_0) , on doit avoir $\mathfrak{m}(\Omega^{(0)}) \geq \rho_1 + 1/2$ (sinon on aurait $\mathfrak{o}_1(' \Omega_{x^\circ}^{\geq -1}) = \mathfrak{o}_1(e^* \Omega^{\geq -1}) \leq \mathfrak{m}^+(\Omega^{(0)}) < \rho_1 + 1 = \mathfrak{o}_1(' \Omega_{x^\circ}^{(-1)})$). Considérons les termes de $\Omega^{(0)}$ de multiplicité $\mathfrak{m}^+ = \rho_1 + 1$. Ce sont ceux qui contribuent à la partie de poids 0 sur le coté vertical de ${}^a\mathfrak{N}(e^* \Omega^{\geq -1})$. Ils s'écrivent

$$x_1^{2\rho_1} \left[\left(x_1^2 A_0^{(0)} + x_1 x_2 A_1^{(0)} + x_2^2 A_2^{(0)} \right) \frac{dx_1}{x_1} + \left(x_1 B_0^{(0)} + x_2 B_1^{(0)} \right) dx_2 \right].$$

Assertion 6.4.2. — $B_0^{(0)}$ et $B_1^{(0)}$ sont primitifs.

Démonstration. — En effet, considérons la condition d'intégrabilité (5.3.2) pour $w = 0$. On suppose que $\rho_1 + 1 = \mathfrak{m}^+(\Omega^{\geq -1}) < r_1/2$, sinon $e^* \Omega^{\geq -1}$ est \mathfrak{p}_0 -négligeable en x° (donc $'\Omega^{\geq -1}$ est en particulier \mathfrak{p}_0 -réduite et pas de type (\mathfrak{B}_0) , contrairement à l'hypothèse faite). Pour $m = (2\rho_1 + 1, 0)$ ou $m = (2\rho_1, 1)$ le second membre de (5.3.2) est nul. Soient $k, \ell \neq 0$ avec $k + \ell = m$. Dans le premier cas on a alors $k_1 + \ell_1 = 2\rho_1 + 1$ et $k_1, \ell_1 \neq 0, k_2 = \ell_2 = 0$. On a alors $A_k = 0$ dans (5.3.2), puisque la base est admissible. On a aussi $A_{(2\rho_1+1,0)}^{(0)} = 0$ puisque $\mathfrak{m}^+(\Omega^{(0)}) \geq \rho_1 + 1$. On déduit de (5.3.2) que $B_0^{(0)} \in \text{Ker ad } A_0$, i.e. $B_0^{(0)}$ est primitif (car de poids 0). Dans le second cas, on a $k_1 + \ell_1 = 2\rho_1$ et $k_2 + \ell_2 = 1$. Si $k_1 < 2\rho_1$, on a $A_k = 0$ dans (5.3.2) et si $k_1 = 2\rho_1$, on a alors $k_2 = 0$ puisque $\ell \neq 0$ et par suite on a aussi $A_k = 0$ dans (5.3.2) puisque le seul terme au sommet de ${}^a\mathfrak{N}(\Omega^{\geq -1})$ est pur de poids -1 . On conclut de même. □

Nous allons maintenant calculer les termes de poids 0 sur le côté vertical du polygone ${}^a\mathfrak{N}(e^* \Omega^{\geq -1})$ puis sur celui de ${}^a\mathfrak{N}(' \Omega_{x^\circ}^{\geq -1})$ après changement de base \mathcal{T} .

Le terme de $e^* \Omega^{(-1)}$ sur ce côté vertical est $x_1'^{\rho_1+1} R \left((x_2' + \eta) \frac{dx_1'}{x_1'} + dx_2' \right)$ et celui de $e^* \Omega^{(0)}$ est

$$x_1'^{2\rho_1+2} \left[\left(A_0^{(0)} + (x_2' + \eta)[A_1^{(0)} + B_0^{(0)}] + (x_2' + \eta)^2[A_2^{(0)} + B_1^{(0)}] \right) \frac{dx_1'}{x_1'} + \left(B_0^{(0)} + (x_2' + \eta)B_1^{(0)} \right) dx_2' \right].$$

Nous allons calculer les nouveaux coefficients de poids 0 sur ce côté après changement de base \mathcal{T} . Notons d'abord que $e^* \Omega^{\leq -2}$ est multiple de x_1' . On montre comme au lemme 5.2.6 que l'élimination des termes de poids -2 n'affecte pas le côté vertical du quadrant ${}^a\mathfrak{N}(e^* \Omega^{\geq -1})$. On effectue alors le changement de base de matrice $P = \text{Id} + x_1'^{\rho_1+1}(x_2' + \eta)S$. De manière analogue à la formule 5.2.3 on calcule (en utilisant le fait que $e^* \Omega_0 = A_0 \frac{dx_1'}{x_1'}$) que la perturbation en poids 0 et -1 sur le côté vertical

de ${}^a\mathfrak{N}(e^*\Omega^{\geq -1})$ (d'abscisse $\rho_1 + 1$) est

$$-x_1'^{\rho_1+1}(x_2' + \eta)R\frac{dx_1'}{x_1'} + \left[x_1'^{\rho_1+1}(x_2' + \eta)\right]^2 RS\frac{dx_1'}{x_1'} + \\ x_1'^{2\rho_1+2}(x_2' + \eta)[S, R] \left((x_2' + \eta)\frac{dx_1'}{x_1'} + dx_2' \right).$$

La nouvelle base n'est peut-être pas encore admissible en poids ≤ 0 (en ce qui concerne les termes du côté vertical du quadrant ${}^a\mathfrak{N}(e^*\Omega^{\geq -1})$), car le terme RS peut avoir une partie non primitive $(RS + SR)/2$ non nulle. Soit alors $T = S^2$, de sorte que $[A_0, T] = (RS + SR)/2$. On effectue le changement de base de matrice $P = \text{Id} + \left[x_1'^{\rho_1+1}(x_2' + \eta)\right]^2 T$. La formule (5.2.3) montre que le seul terme perturbatif de poids -1 ou 0 sur le côté vertical, qui est d'ordonnée ≤ 2 est le terme

$$-\frac{1}{2} \left[x_1'^{\rho_1+1}(x_2' + \eta)\right]^2 (RS + SR)\frac{dx_1'}{x_1'}.$$

La partie de poids 0 d'ordonnée ≤ 2 sur le côté vertical d'abscisse $\rho_1 + 1$ n'est alors plus modifiée par les autres changements de bases utilisés dans le changement de base \mathcal{T} rendant la base admissible. Après changement de base \mathcal{T} cette partie est donc égale à

$$x_1'^{2\rho_1+2} \left[\left(A_0^{(0)} + (x_2' + \eta)[A_1^{(0)} + B_0^{(0)}] + (x_2' + \eta)^2 \left[A_2^{(0)} + B_1^{(0)} - \frac{1}{2}[R, S] \right] \right) \frac{dx_1'}{x_1'} \right. \\ \left. + \left(B_0^{(0)} + (x_2' + \eta)(B_1^{(0)} - [R, S]) \right) \right]$$

et les nouvelles matrices $'A_2^{(0)}$ et $'B_1^{(0)}$ sont données par

$$(6.4.3) \quad \begin{cases} 'A_2^{(0)} = A_2^{(0)} + B_1^{(0)} - \frac{1}{2}[R, S] \\ 'B_1^{(0)} = B_1^{(0)} - [R, S] \end{cases}$$

de sorte que $'\Omega_{x^o}^{\geq -1}$ est résonante de type λ si et seulement si $\Omega^{\geq -1}$ est résonante de type $\lambda + 1$. Ainsi $'\Omega_{x^o}^{\geq -1}$ n'est pas résonante puisque $\Omega^{\geq -1}$ ne l'est pas.

Il reste à considérer (toujours pour la situation non résonante) le cas où x^o est le centre de la carte (∞) et montrer directement que la proposition est vraie dans ce cas. Il sera commode d'effectuer d'abord une ramification autour de $x_1 = 0$. On a un

diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 (y_1'', y_2'') & \longmapsto & (x_1'', x_2'') = (y_1'', y_1''^{k-1}, y_2''^k) \\
 (\mathbf{C}^2, y^o) & \longrightarrow & (\mathbf{C}^2, x^o) \\
 \downarrow e & & \downarrow e \\
 (\mathbf{C}^2, 0) & \longrightarrow & (\mathbf{C}^2, 0) \\
 (y_1, y_2) & \longmapsto & (x_1, x_2) = (y_1^k, y_2)
 \end{array}$$

où e est l'éclatement de l'origine localisé dans la carte (∞) . Aussi il suffit de montrer le résultat pour la forme en y^o , d'après le lemme 1.3.3. Nous choisirons la ramification pour que, après ramification, les seuls termes de poids $w \geq 0$ de multiplicité \mathfrak{m}^+ égale à $\mathfrak{m}^+(\Omega^{\geq -1})$ soient les termes portés par le côté vertical de ${}^a\mathfrak{N}$: si la ramification (autour de $x_1 = 0$) est d'ordre k , le sommet de ${}^a\mathfrak{N}$ devient $k\rho_1$ et un terme $\Omega_m^{(w)}$ qui n'est pas sur le côté vertical est tel que $m_1 \geq \mathfrak{p}_0(w)\rho_1 + 1$. Après ramification d'ordre k on a $km_1/\mathfrak{p}_0(w) \geq k\rho_1 + k/\mathfrak{p}_0(w) > k\rho_1 + 1$ (où $k\rho_1 + 1$ est le \mathfrak{m}^+ après ramification) si k est assez grand. Nous omettrons désormais la ramification dans les notations. Alors ${}^a\mathfrak{N}(e^*\Omega)$ (au centre y^o de la carte (∞)) est un quadrant et les termes de poids -1 et 0 en son sommet $(\rho_1 + 1, \rho_1)$ sont

$$\begin{aligned}
 & x_1''^{\rho_1+1} x_2''^{\rho_2} R \frac{dx_1''}{x_1''} \quad (\text{poids } -1) \\
 & \left(x_1''^{\rho_1+1} x_2''^{\rho_2} \right)^2 \left[A_2^{(0)} \left(\frac{dx_1''}{x_1''} + \frac{dx_2''}{x_2''} \right) + B_1^{(0)} \frac{dx_1''}{x_1''} \right] \quad (\text{poids } 0).
 \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que pour toute suite d'éclatements locaux au-dessus de y^o , il existe n tel que la conclusion de 4.4.1 soit vraie au centre $y^{(n)}$ de la suite. Nous allons montrer qu'on peut choisir pour $y^{(n)}$ le premier centre où le lieu des pôles est lisse (s'il n'y a pas de tel centre, on applique la proposition 4.3.1 pour conclure).

La suite d'éclatements toriques est donnée en coordonnées par

$$\begin{aligned}
 x_1'' &= y_1^\alpha y_2^\beta, & x_2'' &= y_1^\gamma y_2^\delta \\
 \frac{dx_1''}{x_1''} &= \alpha \frac{dy_1}{y_1} + \beta \frac{dy_2}{y_2}, & \frac{dx_2''}{x_2''} &= \gamma \frac{dy_1}{y_1} + \delta \frac{dy_2}{y_2}
 \end{aligned}$$

avec $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$. On considère ensuite l'éclatement de l'origine et le centre $y^{(n)}$ d'une carte $(\eta) \neq (0), (\infty)$, avec les coordonnées locales (z_1, z_2) . On a $y_1 = z_1$ et $y_2 = z_1(z_2 + \eta)$. On note

$$\begin{aligned}
 \pi^* \left(\frac{dx_1''}{x_1''} + \frac{dx_2''}{x_2''} \right) &= \omega_1 = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \frac{dz_1}{z_1} + (\beta + \delta) \frac{dz_2}{(z_2 + \eta)} \\
 \pi^* \frac{dx_1''}{x_1''} &= \omega_2 = (\alpha + \beta) \frac{dz_1}{z_1} + \beta \frac{dz_2}{(z_2 + \eta)}.
 \end{aligned}$$

Dans ces coordonnées, l'image inverse de Ω_0 est $A_0\omega_1$ et la partie de l'image inverse de $\Omega^{\geq -1}$ en poids -1 et 0 sur le côté vertical de ${}^a\mathfrak{N}$ (d'abscisse $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\rho_1 + \alpha + \beta$) est

$$\begin{cases} z_1^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\rho_1+\alpha+\beta} (z_2 + \eta)^{(\gamma+\delta)\rho_1} R\omega_2 & (\text{poids } -1) \\ \left(z_1^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\rho_1+\alpha+\beta} (z_2 + \eta)^{(\gamma+\delta)\rho_1} \right)^2 \left(A_2^{(0)}\omega_1 + B_1^{(0)}\omega_2 \right) & (\text{poids } 0) \end{cases}$$

(si l'on veut tenir compte de la ramification d'ordre k effectuée plus haut, il suffit de remplacer ω_1 par $k\omega_1$). Posons $\mu = (\alpha + \beta)/(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ et soit $T = \mu S$. Après le changement de base $P = \text{Id} + z_1^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\rho_1+\alpha+\beta} (z_2 + \eta)^{(\gamma+\delta)\rho_1} T$ la partie de poids -1 sur le côté vertical est multiple de $R \frac{dz_2}{(z_2 + \eta)}$ et la partie de poids 0 est

$$\left(z_1^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\rho_1+\alpha+\beta} (z_2 + \eta)^{(\gamma+\delta)\rho_1} \right)^2 \left[\left(\frac{\mu^2}{2} RS + A_2^{(0)} \right) \omega_1 + \left(B_1^{(0)} - \mu[R, S] \right) \omega_2 \right].$$

On raisonne comme plus haut pour éliminer la partie non primitive de RS et on trouve finalement pour la partie de poids 0 :

$$\left(z_1^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\rho_1+\alpha+\beta} (z_2 + \eta)^{(\gamma+\delta)\rho_1} \right)^2 \left[\left(\frac{\mu^2}{2} [R, S] + A_2^{(0)} \right) \omega_1 + \left(B_1^{(0)} - \mu[R, S] \right) \omega_2 \right].$$

Puisque $\eta \neq 0$, l'hypothèse de non résonance montre qu'après le changement de base \mathcal{T} , la partie primitive au sommet du quadrant ${}^a\mathfrak{N}$ est non nulle, donc $'\Omega^{\geq -1}$ n'est plus de type (\mathfrak{B}_0) et par suite la conclusion de 4.4.1 est vraie en ce point. \square

Démonstration dans le cas résonant. — Elle se fait par récurrence descendante sur la partie entière de l'ordre de résonance $\lambda \in \mathbf{Q}_+^*$. Supposons qu'au départ on ait

$$A_2^{(0)} = -\frac{\lambda^2}{2}[R, S] \quad \text{et} \quad B_1^{(0)} = \lambda[R, S].$$

Après éclatement et localisation au centre d'une carte $(\eta) \neq (\infty)$, les calculs faits plus haut et la formule (6.4.3) montrent qu'en un centre permis x^o l'ordre de résonance est $\lambda - 1$ et on conclut par récurrence que la conclusion de 4.4.1 est vraie en x^o .

Au centre de la carte (∞) , on peut raisonner comme ci-dessus en effectuant d'abord une ramification d'ordre suffisant, puis une suite d'éclatements toriques, puis un éclatement localisé en une carte $(\eta) \neq (0), (\infty)$. Le calcul ci-dessus montre qu'en poids 0 la partie sur le côté vertical de ${}^a\mathfrak{N}$ est

$$\frac{\lambda^2 - \mu^2}{2}[R, S]\omega_1 + (\lambda - \mu)[R, S]\omega_2.$$

Si $\lambda \neq \mu$, la partie de poids 0 au sommet de ${}^a\mathfrak{N} (' \Omega^{\geq -1})$ est non nulle, donc $'\Omega^{\geq -1}$ n'est pas de type (\mathfrak{B}_0) et la conclusion de 4.4.1 est vraie en ce point. Si $\lambda = \mu$, la partie de poids 0 sur le côté vertical de ce quadrant est identiquement nulle et il n'y a donc plus de résonance. On applique alors le résultat dans le cas non résonant. \square

6.4.4. *Fin de la démonstration de la proposition 6.0.2.* — Il suffit de montrer que pour tout suite d'éclatements locaux, il existe un centre $x^{(n_0)}$ en lequel la conclusion de 4.4.1 est vraie. Fixons une telle suite. On peut supposer que le long de cette suite $'\Omega_{x^{(n)}}^{\geq -1}$ reste de type (\mathfrak{B}_{-1}) , sinon $'\Omega_{x^{(n_0)}}^{\geq -1}$ est réduite pour un certain n_0 , d'après la proposition 5.5.1, et le corollaire 5.5.5 permet alors de conclure. Le coefficient dominant est alors toujours un multiple non nul de R . On peut alors supposer que pour n assez grand, on trouve la situation (\mathfrak{B}_0) , d'après la proposition 6.0.5. Puisque le poids de R est -1 , les quadrants ${}^a\mathfrak{N}(' \Omega_{x^{(n)}}^{\geq -1})$ et ${}^a\mathfrak{N}(' \Omega_{x^{(n)}}^{\geq -1})$ coïncident. On se trouve donc sous les hypothèses de la proposition 6.4.1, puisque si $A_0 + R$ n'est pas conjuguée à A_0 , il en est de même de $A_0 + \lambda R$ pour tout $\lambda \neq 0$ (voir la remarque après la proposition A.2.4). \square

6.5. Élimination de la résonance nilpotente. — Nous nous proposons dans ce paragraphe de montrer le théorème I.2.5.2. On suppose que la matrice de la connexion a la forme donnée au début de la section 5. Puisque l'on suppose que M est de rang ≤ 5 , les cas suivants restent à considérer pour la matrice nilpotente A_0 :

- en rang 3, A_0 a un bloc de Jordan de taille 2 et un bloc de taille 1.
- en rang 4, A_0 a un bloc de Jordan de taille 2 et deux blocs de taille 1.
- en rang 5, A_0 a un bloc de Jordan de taille 2 et trois blocs de taille 1, ou deux blocs de taille 2 et un bloc de taille 1.

Dans les autres situations il n'apparaît pas de résonance nilpotente et on peut appliquer le corollaire 5.5.5 ou le théorème 2.4.1.

La variété de résonance \mathcal{R} est décrite au § A.2.5-(1,2) de l'appendice et nous reprenons les notations du § A.2.3.

Soit K la matrice égale à l'identité sur les blocs de taille 1 et à 0 sur les blocs de taille 2. On a $\text{ad } K = \text{Id}$ sur \mathfrak{g}_{-1}^- et $= -\text{Id}$ sur \mathfrak{g}_{-1}^+ . On pose $H^\pm = \frac{1}{2}(H \pm K + \text{Id})$. Alors H^\pm est semi-simple avec pour valeurs propres 1 et 0, et $\text{ad } H^\pm$ a pour valeurs propres $-1, 0, 1$.

Les matrices de H -poids $w = 2v$ sont de H^\pm -poids v . Les éléments de \mathfrak{g}_{-1}^- sont de H^- -poids -1 et de H^+ -poids 0, et c'est le contraire pour \mathfrak{g}_{-1}^+ . Soit $\Omega^{\geq 0^-}$ (resp. $\Omega^{\geq 0^+}$) la partie de Ω qui est de H^- -poids (resp. H^+ -poids) ≥ 0 . Alors $\Omega^{\geq 0^-}$ (resp. $\Omega^{\geq 0^+}$) s'obtient à partir de $\Omega^{\geq -1}$ en oubliant les termes de coefficient dans \mathfrak{g}_{-1}^- (resp. \mathfrak{g}_{-1}^+). Il sera important de remarquer qu'il n'apparaît pas dans $\Omega^{\geq 0^-}$ ou $\Omega^{\geq 0^+}$ des termes de H -poids -2 (notés $\Omega^{\leq -2}$ dans les paragraphes précédents).

Comme la matrice A_0 est de H^\pm -poids -1 , il faut définir la pondération \mathfrak{p} par $\mathfrak{p}(w) = w + 1$, et c'est la partie de poids ≥ 0 (rel. H^\pm) de Ω qui va maintenant jouer le rôle de $\Omega^{\geq -1}$.

Première étape. — On prend la structure de poids $\mathcal{H} = H^-$ et on considère la partie $\Omega^{\geq 0^-}$ de Ω qui est de H^- -poids ≥ 0 . On cherche à réduire $\Omega^{\geq 0^-}$ dans une base

admissible après éclatements et changement de base \mathcal{T} . Si c'est possible, on montre comme au § 5.4 que $\Omega^{\geq 0^-}$ est \mathfrak{p} -réductible et la conclusion de 4.4.1 est vraie. Sinon, on est amené à considérer une suite infinie (ϖ_n) d'éclatements locaux à centres M -permis le long de laquelle $\Omega^{\geq 0^-}$ est de type (\mathfrak{B}_0) (analogue du type (\mathfrak{B}_{-1}) du § 5.5). On montre ensuite, comme au § 6.3, que ou bien pour n_0 assez grand la conclusion de 4.4.1 est satisfaite, ou bien $\Omega^{\geq 0^-}$ est de type (\mathfrak{B}_1) (analogue du type (\mathfrak{B}_0) du § 6.3) en tout centre $x^{(n)}$ pour n assez grand. Le type de résonance nilpotente est de la forme $\lambda_n R^+$ avec $\lambda_n \neq 0$ et $R^+ \in \mathfrak{g}_{-1}^+ - \{0\}$. Nous supposons donc dans la suite que c'est cette dernière possibilité qui se produit.

Deuxième étape. — On considère alors la structure de poids $\mathcal{H} = H^+$. Le même raisonnement sur $\Omega^{\geq 0^+}$ le long de la suite (ϖ_n) nous amène à considérer le cas où, pour tout n assez grand, $\Omega^{\geq 0^+}$ est de type (\mathfrak{B}_1) avec un type de résonance nilpotente $\mu_n R^-$, $\mu_n \neq 0$ et $R^- \in \mathfrak{g}_{-1}^- - \{0\}$.

Troisième étape. — Il existe donc un centre $x^{(n)}$ où \mathcal{P} n'a qu'une composante et où $\Omega^{\geq -1}$ est « bi-résonante », i.e. $\Omega^{\geq 0^-}$ est H^- -résonante de type R^+ et $\Omega^{\geq 0^+}$ est H^+ -résonante de type R^- . Notons $(\rho_1^+, 0)$ (resp. $(\rho_1^-, 0)$) le sommet de $N(\Omega^{\geq 0^+})$ (resp. $N(\Omega^{\geq 0^-})$), avec $\rho_1^+, \rho_1^- > 0$.

Si l'on a $\rho_1^+ = \rho_1^-$, alors $\Omega^{\geq -1}$ est de type (\mathfrak{B}_{-1}) (pour la pondération H) et le coefficient au sommet de $N(\Omega^{\geq -1})$ est $R^- + R^+$. Puisque $R^- + R^+ \notin \mathcal{R} = \mathfrak{g}_{-1}^- \cup \mathfrak{g}_{-1}^+$ (cf. l'exemple A.2.5-(1,2) de l'appendice), on peut appliquer la proposition 6.0.2 pour conclure.

Supposons alors par exemple que $\rho_1^- < \rho_1^+$. En particulier $\Omega^{\geq -1}$ est aussi de type (\mathfrak{B}_{-1}) pour H et le coefficient au sommet de $N(\Omega^{\geq -1})$ est $x^{\rho_1^-} R^+ dx_2$. Posons $\delta = \rho_1^+ - \rho_1^-$ et appliquons le changement de base de matrice $x_1^{\delta H^+}$.

Si on pose

$$\Omega = \sum_{m \geq 0} \left[\Omega_m^{(-1)^+} + \Omega_m^{(0)^+} + \Omega_m^{(1)^+} \right] x^m$$

où les poids sont ceux relatifs à H^+ , on obtient après changement de base la matrice

$$\sum_{m \geq 0} \Omega_m^{(-1)^+} x^{m+\delta} + \sum_{m \geq 0} \Omega_m^{(0)^+} x^m + \sum_{m \geq 0} \Omega_m^{(1)^+} x^{m-\delta} + \text{partie } \mathfrak{p}\text{-négligeable.}$$

Puisque $\Omega^{\geq 0^+}$ est de type (\mathfrak{B}_1) , on a $\Omega_m^{(1)^+} \neq 0 \Rightarrow m_1/2 \geq \rho_1^+$, donc $m_1 - \delta > \rho_1^+$.

Par ailleurs, pour les termes de H^+ -poids -1 de coefficient dans \mathfrak{g}_{-1}^+ (i.e. ceux qui sont aussi de H -poids ≥ -1 , ou encore de H^- -poids ≥ 0) on a $m_1 \geq \rho_1^-$ car $\Omega^{\geq 0^-}$ est de type (\mathfrak{B}_0) . On a donc $m_1 + \delta \geq \rho_1^+$.

Ainsi, après le changement de base de matrice $x^{\delta H^+}$, la matrice $\Omega^{\geq -1}$ est de type (\mathfrak{B}_{-1}) pour H et le coefficient au sommet de $N(\Omega^{\geq -1})$ est $R^+ + R^-$. On conclut comme ci-dessus. □

Justification des arguments employés. — Indiquons ici pourquoi les arguments développés pour la structure de poids H s'appliquent à H^- (et de manière analogue à H^+).

Le polygone pondéré $N'(\Omega^{\geq 0^-})$ est ici l'enveloppe convexe de $N(\Omega^{\geq 0^-})$ et du quadrant $r + \mathbf{N}^2$ car $\mathbf{p}(0) = 1$. On dit que $\Omega^{\geq 0^-}$ est \mathbf{p} -négligeable si $N'(\Omega^{\geq 0^-})$ est le quadrant de sommet r . Lorsque $\Omega^{\geq 0^-}$ est \mathbf{p} -négligeable, le changement de base de matrice x^{rH^-} permet de remplacer Θ par une matrice à pôles logarithmiques.

Par ailleurs, l'analogue de (5.3.1) est :

- Si $w = 0$ et si $B_{m^o}^{(0)} \neq 0$ en un sommet m^o de ${}^a N(\Omega^{\geq 0^-})$, la partie primitive $B_{m^o}^{(0)}$ satisfait $B_{m^o}^{(0)} = \alpha A_{m^o}^{(0)}$ et la partie non primitive $B_{m^o}^{(0)}$ est dans \mathfrak{g}_{-1}^+ .
- Si $w = 1$, on a $B_{m^o}^{(1)} = \alpha A_{m^o}^{(1)}$.

L'analogue de (5.3.4) est :

Si $m^o = \min_{\text{lex}} {}^a N(\Omega^{\geq 0^-})$ (resp. m^o est un sommet de ${}^a N(\Omega^{\geq 0^-})$) et si $B_{m^o(w)}^{(w)} \neq 0$ avec $w \geq 0$, alors, en posant $m^o(w) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{p}(w) \cdot m^o$,

- si $w = 0$, $B_{m^o(0)}^{(0)} = \alpha A_{m^o(0)}^{(0)}$ et $B_{m^o(0)}^{(0)}$ est dans \mathfrak{g}_{-1}^+ ;
- si $w = 1$, on a $B_{m^o(1)}^{(1)} = \alpha A_{m^o(1)}^{(1)}$.

De même, l'analogue de (5.3.6) est vrai, si l'on remplace $r_1/2$ par r_1 dans (5.3.6-(2)). On peut alors réaliser la première étape comme aux §§ 5.4, 5.5 et 6.3.

Remarques

- (1) Lors de la deuxième étape, la situation $(\mathfrak{B}_1)(H^-)$ est conservée le long de la suite (ϖ_n) par hypothèse. Bien que l'ordre utilisé pour définir le changement de base \mathcal{T} à chaque étape utilise le poids relativement à H^- , les arguments du § 5.2 s'appliquent pour la structure de poids H^+ .
- (2) Trois raisons empêchent pour le moment d'étendre ce procédé d'élimination de la résonance nilpotente par bi-résonance.
 - D'abord, nous utilisons une structure de poids qui ne fait intervenir que trois poids, à savoir $-1, 0, 1$. Pour traiter le cas considéré à l'exemple A.2.5-(1,2) avec k quelconque, il faudrait généraliser le § 6.3 à des situations de type (\mathfrak{B}_i) pour tout $i > 0$. Ce devrait être possible avec une définition convenable de la situation (\mathfrak{B}_i) .
 - Les structures H^\pm utilisées ci-dessus ont la propriété que les matrices de H -poids $\leq H$ -poids de A_0 sont aussi de H^\pm -poids $\leq H^\pm$ -poids de A_0 .
 - Ce qui est plus important dans les exemples considérés est que la variété de résonance \mathcal{R} n'a que deux composantes. Dans l'exemple A.2.5-(3), l'utilisation des structures H^\pm ne serait plus suffisante car il existe des situations où $R^- \in \mathfrak{g}_{-1}^- - \{0\}$, $R^+ \in \mathfrak{g}_{-1}^+ - \{0\}$ et $R^- + R^+ \in \mathcal{R}$.

APPENDICE

A. Orbites de matrices nilpotentes

Nous allons rappeler rapidement les résultats sur les matrices nilpotentes que nous utilisons. Nous renvoyons par exemple à [4, § 2] pour plus de détails.

A.1. Jacobson-Morosov. — Soit N un endomorphisme nilpotent de k^d , où k est un corps de caractéristique 0 (dans la suite nous utiliserons $k = \mathbf{C}$ ou $k = \mathbf{C}(\lambda)$, où λ est une nouvelle variable). Il existe (théorème de Jacobson-Morosov) un \mathfrak{sl}_2 -triplet $Y = N, X, H$ induisant une représentation de $\mathfrak{sl}_2(k)$ dans $\mathfrak{gl}_d(k)$. L'espace $\mathfrak{gl}_d(k)$ se décompose en somme directe d'espaces propres pour $\text{ad } H$, qui est semi-simple, et dont les valeurs propres (les poids) sont entières. Les vecteurs de plus haut poids (nous dirons aussi primitifs) sont les éléments de $\text{Ker ad } X$ et l'on a une décomposition

$$\mathfrak{gl}_d(k) = \text{Ker ad } X \oplus \text{Im ad } Y.$$

Si $A \neq 0$ est une matrice dans $\mathfrak{gl}_d(k)$, nous dirons que A est de poids pur w si $\text{ad } H(A) = wA$. Si A et A' sont de poids pur respectifs w et w' , $[A, A']$ est pure de poids $w + w'$ ou nulle et AA' est pure de poids $w + w'$ ou nulle. Les éléments primitifs purs de poids 0 sont les éléments de $\text{Ker ad } X \cap \text{Ker ad } Y$.

Supposons maintenant que $k = \mathbf{C}(\lambda)$. Notons, pour $F \subset \mathbf{C}$ fini, $\mathbf{C}[\lambda]_F$ l'anneau des fractions rationnelles de la variable λ à pôles contenus dans F . Il existe un tel F tel que Y soit défini sur $\mathbf{C}[\lambda]_F$. Il existe alors $F' \supset F$ fini tel que toute la construction précédente soit en fait définie sur $\mathbf{C}[\lambda]_{F'}$: on choisit pour cela une base de vecteurs de plus haut poids $(Z_i)_{i=1, \dots, q}$ dans $\text{Ker ad } X$ et on pose $Z_{i, \ell} = (\text{ad } Y)^\ell(Z_i)$. Ces vecteurs forment une base de $\mathfrak{gl}_d(\mathbf{C}(\lambda))$. Ils sont tous définis sur un anneau $\mathbf{C}[\lambda]_{F'}$ et de plus, si F' est bien choisi, tout élément de $\mathfrak{gl}_d(\mathbf{C}[\lambda]_{F'})$ s'écrit sur la base $Z_{i, \ell}$ avec des coefficients dans l'anneau $\mathbf{C}[\lambda]_{F'}$ (il suffit de le vérifier pour les éléments de la base canonique de \mathfrak{gl}_d), de sorte que les $Z_{i, \ell}$ forment une base de $\mathfrak{gl}_d(\mathbf{C}[\lambda]_{F'})$, et on en déduit une décomposition $\mathfrak{gl}_d(\mathbf{C}[\lambda]_{F'}) = \text{Ker ad } X \oplus \text{Im ad } Y$. Enfin, quitte à

augmenter F' , la restriction de Y, X, H à $\lambda = \lambda_0 \notin F'$ forme un \mathfrak{sl}_2 -triplet dans $\mathfrak{gl}_d(\mathbf{C})$ et la construction précédente se restreint à $\lambda = \lambda_0$ convenablement. Nous dirons alors qu'il y a *bonne restriction*.

A.2. Perturbation primitive et quasi-primitive. — Ici le corps est \mathbf{C} . On fixe un \mathfrak{sl}_2 -triplet $N = Y, H, X$ comme ci-dessus. Nous utilisons le résultat suivant (voir par exemple [4, § 2.2]) :

Proposition A.2.1. — *Soit $Z = \sum_{w \geq -1} Z^{(w)}$ une matrice dont toutes les composantes pures sont de poids ≥ -1 . Alors si $Y + Z$ n'est pas conjuguée à Y , on a $\nu(Y + Z) > \nu(Y)$. \square*

A.2.2. Perturbation par une matrice primitive. — Soit Z une matrice primitive non nulle. Nous avons utilisé le fait que $Y + Z$ n'est pas conjuguée à Y et donc, d'après ce qui précède, que la dimension ν de l'orbite de $Y + Z$ satisfait $\nu(Y + Z) > \nu(Y)$. Rappelons que la démonstration procède comme suit : on décompose $Z = \sum_{w \geq 0} Z^{(w)}$ suivant les poids (qui sont tous ≥ 0 puisque Z est primitive) ; on remarque ensuite que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^*$ la matrice $Y + Z$ est conjuguée à $Y + \sum_{w \geq 0} \lambda^{w+2} Z^{(w)}$ et, pour λ assez proche de 0, on a effectué une perturbation transverse à l'orbite de Y .

Plus généralement, soit Z une matrice primitive non nulle et $T \in \text{Im ad } Y$. Si le poids minimum $w \geq 0$ des composantes pures de Z est inférieur ou égal à celui des composantes pures de T , $Y + Z + T$ n'est pas conjuguée à Y (et d'après la proposition ci-dessus, on a $\nu(Y + Z + T) > \nu(Y)$) : on le montre par récurrence sur le poids minimum p des composantes de T ; on pose $T^{(p)} = [Y, U]$ et on considère la matrice $(\text{Id} + U)(Y + Z + T)(\text{Id} + U)^{-1}$; celle-ci s'écrit $Y + Z^{(w)} + Z' + T'$, où les poids des composantes de Z' sont $> w$ et les poids de celles de T' sont $\geq p + 1$; on se ramène ainsi au cas où T est nulle.

A.2.3. Matrices quasi-primitives. — Nous avons eu besoin de considérer les matrices de poids -1 qui commutent à Y , que nous appelons *matrices quasi-primitives* : ce sont les matrices de la forme $R = \text{ad } Y(S)$ avec S primitive pure de poids 1. Une telle matrice R est alors pure de poids -1 . Une matrice pure de poids -1 est quasi-primitive si et seulement si elle satisfait $\text{ad } Y(R) = 0$ (cela résulte de la décomposition de Lefschetz). Notons aussi que l'on a $S = \text{ad } X(R)$: en effet

$$[X, R] = [X, [Y, S]] = [[X, Y], S] + [Y, [X, S]];$$

mais $[X, S] = 0$ car S est primitive, et $[X, Y] = H$ donc $[X, R] = [H, S] = S$ car S est pure de poids 1. Notons enfin que l'espace des matrices de poids -1 (c'est-à-dire $\text{Ker}(\text{ad } H + \text{Id})$) se décompose en somme directe de $\text{Ker ad } Y \cap \text{Ker}(\text{ad } H + \text{Id})$ et $\text{Im}(\text{ad } Y)^2 \cap \text{Ker}(\text{ad } H + \text{Id})$.

Il existe de telles matrices non nulles si et seulement si Y admet deux blocs de Jordan dont les tailles diffèrent de 1. À chaque paire de blocs de Jordan de Y dont

les tailles sont $n + 1$ et n on associe deux matrices quasi-primitives R^- et R^+ :

$$R^- = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \hline 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array} \right) \text{ resp. } R^+ = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array} \right)$$

et l'espace \mathfrak{g}_{-1} des matrices quasi-primitives admet pour base les R^-, R^+ obtenus de cette manière. On a ainsi une décomposition $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1}^- \oplus \mathfrak{g}_{-1}^+$ et on peut vérifier que la forme bilinéaire antisymétrique $\langle R_1, R_2 \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \text{tr}(R_1[X, R_2])$ est une forme symplectique sur \mathfrak{g}_{-1} . On peut identifier ainsi \mathfrak{g}_{-1} au fibré cotangent de \mathfrak{g}_{-1}^- muni de sa forme symplectique canonique.

Le résultat qui suit concernant les perturbations contenant des matrices quasi-primitive nous est utile :

Proposition A.2.4. — *Soit R une matrice quasi-primitive et Z une matrice primitive.*

- (1) *Si $Y + R + Z$ est conjuguée à Y , alors pour toute autre matrice primitive non nulle Z' , la matrice $Y + R + Z + Z'$ n'est pas conjuguée à Y .*
- (2) *$Y + R$ est conjuguée à Y si et seulement si $[R, [X, R]] = 0$.*

Remarque. — Pour R pure de poids -1 les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) $Y + R$ est conjuguée à Y ;
- (b) la droite $Y + \lambda R$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) coupe l'orbite de Y pour un $\lambda_0 \neq 0$;
- (c) la droite $Y + \lambda R$ est contenue dans l'orbite de Y .

On notera \mathcal{R} la variété «de résonance» définie par les équations $[R, [X, R]] = 0$.

Démonstration. — Pour le premier point, on peut supposer $R \neq 0$ sinon l'hypothèse et le résultat rappelé plus haut montrent que $Z = 0$ et l'on peut appliquer encore une fois ce même résultat. On considère alors dans $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C})$ l'espace affine $E = Y + \mathbb{C} \cdot R + \text{Ker ad } X$. Cet espace coupe transversalement l'orbite de Y en Y donc l'intersection est, au voisinage de Y , une courbe lisse. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, la matrice $Y + \lambda R + \sum_{w \geq 0} \lambda^{w+2} Z^{(w)}$ est conjuguée à $Y + R + Z$ donc à Y et par suite cette matrice décrit la courbe lisse cherchée. Si $Y + R + Z + Z'$ est conjuguée à Y , on trouve de même dans l'intersection une autre branche au voisinage de Y ce qui est impossible du fait de la lissité. □

Pour le deuxième point, on pose $S = [X, R]$. On a

$$(\text{Id} + S)(Y + R)(\text{Id} + S)^{-1} = Y + SR(\text{Id} + S)^{-1}$$

de sorte que $Y + R$ est conjuguée à Y si et seulement si $Y + SR(\text{Id} + S)^{-1}$ l'est aussi, et ceci implique que la partie primitive de SR est nulle, car SR est pure de poids 0, d'après ce qu'on a vu au § A.2.2. Mais SR admet la décomposition suivante

$$SR = \frac{1}{2}(SR - RS) + \frac{1}{2}(SR + RS)$$

où le premier terme est primitif puisque

$$[X, [S, R]] = [[X, S], R] + [S, [X, R]] = 0$$

et le second est purement non primitif (*i.e.* dans $\text{Im ad } Y$) puisqu'égal à $\frac{1}{2}[Y, S^2]$. Ceci donne la nécessité de la condition $[S, R] = 0$ pour que $Y + R$ soit conjuguée à Y . Montrons la suffisance. Si cette condition est satisfaite, on a

$$Y + R = \exp(\text{ad } -S)(Y) = \text{Ad}(\exp(-S))(Y). \quad \square$$

A.2.5. Exemples

(1) On suppose que Y a n blocs de taille $k + 1$ et un bloc de taille k , et pas d'autres blocs dont les tailles diffèrent de 1. Soit $(R_i^-, R_i^+)_{i=1, \dots, n}$ la base de \mathfrak{g}_{-1} correspondante. Soit R de coordonnées $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ dans cette base. Alors $R \in \mathcal{R}$ si et seulement si $x_i \xi_j = 0$ pour tous $i, j = 1, \dots, n$. Ainsi $\mathcal{R} = \mathfrak{g}_{-1}^- \cup \mathfrak{g}_{-1}^+$.

(2) Il en est de même si Y a un bloc de taille $k + 1$ et n blocs de taille k , et pas d'autres blocs dont les tailles diffèrent de 1.

(3) Soit Y de taille 6 avec deux blocs de taille 2 et deux blocs de taille 1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un élément général R de \mathfrak{g}_{-1} est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & \xi_4 \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & x_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la variété \mathcal{R} est la réunion $\mathfrak{g}_{-1}^- \cup \mathfrak{g}_{-1}^+ \cup C$ où C est l'espace conormal au cône de \mathfrak{g}_{-1}^- d'équation $x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$.

Remarque. — On peut conjecturer que la variété \mathcal{R} est toujours réunion d'espaces conormaux à certains cônes définis par des équations linéaires ou quadratiques dans \mathfrak{g}_{-1}^- , donc est une variété lagrangienne bi-homogène.

B. Fonctions C^∞ sur l'éclaté réel et développements asymptotiques

D'une manière générale nous reprenons les notations introduites au §II.1.1.

B.1. Le lemme de Borel-Ritt. — Nous allons démontrer la proposition II.1.1.16 et nous reprenons les notations la précédant. La démonstration ci-dessous reprend essentiellement celle de Majima [35]. Nous allons montrer un résultat au niveau des sections sur un compact sectoriel. Soit $K = \prod_{i=1}^n K_i \times \prod_{j=1}^p \overline{\Delta}_j$, où $K_i \subset \mathbf{R}_+ \times S^1$ est un secteur compact $\{\rho_i \leq \rho_i^0\} \times [\alpha_i, \beta_i]$ avec $\rho_i^0 < 1$ et d'ouverture $< \pi$ et $\overline{\Delta}_j$ un disque fermé de \mathbf{C} centré en 0. Nous supposons pour simplifier que sur $K_i - \{\rho_i = 0\}$ on a $\text{Ré } x_i > 0$, i.e. $[\alpha_i, \beta_i] \subset] - \pi/2, \pi/2[$. Plus généralement, si chaque K_i est un secteur strict de S^1 , on peut modifier la démonstration qui suit en remplaçant, dans la définition de φ_α ci-dessous d_α/x_i par d_α/x_i^ε avec $0 < \varepsilon < 1$ convenablement choisi.

Soit r un entier compris entre 1 et n . Pour $I \subset \{r+1, \dots, n\}$, notons $D_I = \cup_{i \in I} D_i$. Soit $\mathcal{A}_{\widehat{X}|Z}^{<D_I}$ le noyau de l'application $T_{D_I} : \mathcal{A}_{\widehat{X}|Z} \rightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X}|Z \cap D_I}$, c'est-à-dire, du fait de Mayer-Vietoris II.1.1.13, le sous-faisceau des sections u qui satisfont $T_{D_i} u = 0$ pour tout $i \in I$. Par ailleurs, rappelons que pour un faisceau \mathcal{F} on note $\mathcal{F}(K) = \varinjlim_{\Omega \supset K} \mathcal{F}(\Omega)$.

Lemme B.1.1. — Pour tout $r = 1, \dots, n$, si l'on pose $Z_r = D_1 \cap \dots \cap D_r$ et $I_r = \{r+1, \dots, n\}$, l'application

$$T_{Z_r}^{<D_{I_r}} : \mathcal{A}_{\widehat{X}}^{<D_{I_r}}(K) \longrightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X}|Z_r}^{<D_{I_r}}(K)$$

est surjective.

Si ce lemme est montré, on obtient d'abord par récurrence sur $\#(I_r - I)$ que pour tout $I \subset I_r$ l'application

$$T_{Z_r}^{<D_I} : \mathcal{A}_{\widehat{X}}^{<D_I}(K) \longrightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X}|Z_r}^{<D_I}(K)$$

est surjective : en effet, si par exemple $r+1 \notin I$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}_{\widehat{X}}^{<D_I \cup D_{r+1}}(K) & \longrightarrow & \mathcal{A}_{\widehat{X}}^{<D_I}(K) \\ & & \downarrow T_{Z_r}^{<D_I \cup D_{r+1}} & & \downarrow T_{Z_r}^{<D_I} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}_{\widehat{X}|Z_r}^{<D_I \cup D_{r+1}}(K) & \longrightarrow & \mathcal{A}_{\widehat{X}|Z_r}^{<D_I}(K) \longrightarrow \mathcal{A}_{\widehat{X}|Z_{r+1}}^{<D_I}(K) \end{array}$$

$\searrow T_{Z_{r+1}}^{<D_I}$

et les deux flèches extrêmes sont surjectives, donc celle du milieu aussi.

En particulier, pour $I = \emptyset$, on obtient le premier point de la proposition. Le second point s'obtient en faisant $r = n$ dans l'assertion suivante et en utilisant Mayer-Vietoris II.1.1.13. Nous allons montrer par récurrence sur r ($1 \leq r \leq n$) :

Assertion B.1.2. — Soient $\widehat{w}_i \in \mathcal{A}_{\widehat{X}|D_i}^{<D_{I_r}}(K)$, pour $i = 1, \dots, r$, tels que pour tous i, j on ait $T_{D_i}\widehat{w}_j = T_{D_j}\widehat{w}_i$ dans $\mathcal{A}_{\widehat{X}|D_i \cap D_j}^{<D_{I_r}}(K)$. Il existe alors $w \in \mathcal{A}_{\widehat{X}}^{<D_{I_r}}(K)$ tel que $T_{D_i}w = \widehat{w}_i$ pour tout $i = 1, \dots, r$.

Démonstration. — En effet, le cas $r = 1$ découle du lemme B.1.1. Fixons $r \geq 2$ et choisissons (ce qui est possible pour la même raison) $w_r \in \mathcal{A}_{\widehat{X}}^{<D_{I_r}}(K)$ tel que $T_{D_r}w_r = \widehat{w}_r$. On considère pour tout $i = 1, \dots, r - 1$ la famille $\widehat{v}_i = \widehat{w}_i - T_{D_i}w_r$. C'est une famille compatible de sections de $\mathcal{A}_{\widehat{X}}^{<D_{I_{r-1}}}(K)$ et par récurrence il existe $v \in \mathcal{A}_{\widehat{X}}^{<D_{I_{r-1}}}(K)$ avec $T_{D_i}v = \widehat{v}_i$. Alors $w \stackrel{\text{déf}}{=} w_r + v$ convient. □

Démonstration du lemme B.1.1. — Notons $x = (x_1, \dots, x_r)$, $\xi = (\xi_{r+1}, \dots, \xi_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_p)$. Soit

$$\widehat{f} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} f_\alpha(\xi, y)x^\alpha \in \mathcal{A}_{\widehat{X}|Z}^{<D_{I_r}}(K)$$

avec $f_\alpha \in \mathcal{A}_{\overline{Z}}^{<D_{I_r}}(K_{>r})$, où $K_{>r} = \prod_{i=r+1}^n K_i \times \prod_j \overline{\Delta}_j$. Il existe par hypothèse un ouvert Ω contenant K , tel que $\overline{\Omega}$ soit du même type que K et que $\widehat{f} \in \mathcal{A}_{\widehat{X}|Z}^{<D_{I_r}}(\overline{\Omega})$.

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^r$, posons $\mu(\alpha) = \max_i \alpha_i$ et $\xi^{\mu(\alpha)} = \prod_{k=r+1}^n \xi_k^{\mu(\alpha)}$. Soit

$$c_\alpha = \sup_{\overline{\Omega}_{>r}} |f_\alpha(\xi, y)| \left| \xi^{-\mu(\alpha)} \right| \quad \text{et} \quad d_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } c_\alpha = 0 \\ \max(1, 1/c_\alpha) & \text{sinon} \end{cases}$$

($c_\alpha < +\infty$ puisque f_α est plate le long de D_{I_r}) et, pour $i = 1, \dots, r$,

$$\varphi_{\alpha,i}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i = 0 \text{ ou } \alpha_i = 0 \\ (1 - e^{-d_\alpha/x_i}) & \text{sinon} \end{cases}$$

puis $\varphi_\alpha(x) = \prod_{i=1}^r \varphi_{\alpha,i}(x_i)$.

Puisque $\text{Ré } x_i > 0$ sur $\overline{\Omega}_i$, on a la majoration (pour $x_i \in \overline{\Omega}_i - \{0\}$)

$$\left| 1 - e^{-d_\alpha/x_i} \right| \leq \frac{d_\alpha}{|x_i|}.$$

Nous allons montrer que si, pour $(x, \xi, y) \in \overline{\Omega}$, on pose

$$f(x, \xi, y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} f_\alpha(\xi, y)\varphi_\alpha(x)x^\alpha,$$

alors f est un élément de $\mathcal{A}_{\widehat{X}}^{<D_{I_r}}(\Omega)$ et $T_Z f = \widehat{f}$. Nous le ferons par récurrence sur r .

Notons déjà que l'on a sur $\overline{\Omega}$ l'inégalité

$$(B.1.3) \quad |f_\alpha(\xi, y)\varphi_\alpha(x)x^\alpha| \leq \frac{|x^\alpha|}{\prod_{\{i|\alpha_i \neq 0\}} |x_i|} \cdot |\xi^{\mu(\alpha)}|$$

puisque $c_\alpha d_\alpha \leq 1$ et par suite la série définissant f converge uniformément, donc f est continue sur $\bar{\Omega}$ et holomorphe sur $\Omega - \pi^{-1}(D)$. Enfin la restriction de f à $\pi^{-1}(D_{I_r})$ est identiquement nulle.

Soit T une intersection non vide de composantes de D . Si T ne contient pas Z , on pose $\hat{f}_T = 0$. Supposons que T contienne Z , par exemple $T = D_{s+1} \cap \dots \cap D_r$ avec $s < r$. On définit \hat{f}_T de la même manière que \hat{f} : on note $x' = (x_1, \dots, x_s)$, $x'' = (x_{s+1}, \dots, x_r)$ et on définit de même α' et α'' . On pose alors

$$\hat{f}_T = \sum_{\alpha'' \in \mathbf{N}^{r-s}} f_{T, \alpha''}(x', \xi, y) x''^{\alpha''} \quad \text{avec} \quad f_{T, \alpha''} = \sum_{\alpha' \in \mathbf{N}^s} f_\alpha(\xi, y) \varphi_{\alpha'}(x') x'^{\alpha'}$$

Par récurrence sur r on sait en effet, si $s < r$, que $f_{T, \alpha''} \in \mathcal{A}_T^{< D_{I_r}}(\Omega')$ avec $\Omega' = \prod_{i=1}^s \Omega_i \times \Omega_{>r}$.

En particulier $\hat{f}_Z = \hat{f}$ et on peut poser $\hat{f}_\emptyset = f$.

Pour $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbf{N}^r$ et T comme ci-dessus, on note m_T la projection de m sur $\mathbf{N}^{\text{codim } T}$ et $\hat{f}_T^{\leq m_T}$ la somme des termes de \hat{f}_T d'exposant $\leq m_T$: dans l'exemple ci-dessus, $m_T = (m_{s+1}, \dots, m_r) = m''$ et $\hat{f}_T^{\leq m_T} = \sum_{\alpha'' \leq m''} f_{T, \alpha''} x''^{\alpha''}$, où $\alpha'' \leq m''$ signifie $\alpha_i \leq m_i$ pour tout $i = s + 1, \dots, r$.

Assertion B.1.4. — *Pour tout compact K de Ω et tout $m \in \mathbf{N}^r$, il existe une constante $C_{K,m}$ telle que l'on ait sur K l'inégalité*

$$\left| f(x, \xi, y) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{\{T | \text{codim } T = k\}} \hat{f}_T^{\leq m_T}(x, \xi, y) \right| \leq C_{K,m} \cdot |x|^m \left| \xi^{\mu(m)} \right|$$

Démonstration. — En effet, donnons-nous $\alpha \in \mathbf{N}^r$ et calculons le coefficient de x^α dans le terme de gauche. Soit $I \coprod J$ la partition de $\{1, \dots, r\}$ définie par α :

$$\forall i \in I, \alpha_i \geq m_i + 1 \quad \text{et} \quad \forall j \in J, 0 \leq \alpha_j \leq m_j$$

Pour T comme plus haut (éventuellement vide), on dispose aussi d'une partition $I_T \coprod J_T$ du même ensemble : dans l'exemple ci-dessus, $I_T = \{1, \dots, s\}$ et on a $\text{codim } T = \#J_T$. La contribution de $\hat{f}_T^{\leq m_T}$ au coefficient de x^α est

$$0 \text{ si } J_T \not\subset J \quad \text{et} \quad f_\alpha \cdot \varphi_{\alpha, I_T} \text{ sinon}$$

où $\varphi_{\alpha, I_T} = \prod_{i \in I_T} \varphi_{\alpha, i}(x_i)$. La somme des contributions est donc

$$\begin{aligned} f_\alpha \sum_{J_T \subset J} (-1)^{\#J_T} \varphi_{\alpha, I_T} &= (-1)^{\#J} f_\alpha \varphi_{\alpha, I} \sum_{A \subset J} (-1)^{\#A} \varphi_{\alpha, A} \\ &= (-1)^{\#J} f_\alpha \varphi_{\alpha, I} \prod_{j \in J} (1 - \varphi_{\alpha, j}). \end{aligned}$$

La somme sur tous les α correspondant à une partition $I \coprod J$ fixée est (à $(-1)^{\#J}$ près)

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{\alpha_j \leq m_j} \sum_{\alpha_i \geq m_i + 1} f_\alpha \varphi_{\alpha, I} \prod_{j \in J} (1 - \varphi_{\alpha, j}) x^\alpha.$$

D'une part on a

$$|\varphi_{\alpha, I}(x_I)| \leq \prod_{i \in I} \frac{d_\alpha}{|x_i|}.$$

D'autre part il existe une constante C'_{K, m, α_j} telle que l'on ait sur K

$$|\varphi_{\alpha, j} - 1| = \left| e^{-d_\alpha/x_j} \right| \leq C'_{K, m, \alpha_j} d_\alpha^{\alpha_j - m_j} |x_j|^{m_j - \alpha_j}$$

si $\alpha_j \neq 0$ et $|\varphi_{\alpha, j} - 1| = 0$ sinon. Enfin on a

$$|f_\alpha(\xi, y)| \leq c_\alpha |\xi|^{\mu(\alpha)} \leq c_\alpha |\xi|^{\mu(m)}$$

si $I \neq \emptyset$. On en déduit, pour $I \neq \emptyset$, l'existence de $C_{K, m}$ telle que la somme soit majorée en module par $C_{K, m} |x|^m |\xi|^{\mu(m)}$ puisque $c_\alpha d_\alpha \leq 1$.

Si $I = \emptyset$, la somme considérée est une somme finie et il est facile d'obtenir directement une majoration du même type, en choisissant des majorations du type $|f_\alpha| \leq c_{\alpha, m} |\xi|^{\mu(m)}$. □

Ainsi il existe une suite de fonctions $g_k \in \mathcal{A}_{\tilde{X}}^{<D, r}(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}$) telle que pour tout k et tout compact $K \subset \Omega$ il existe $C_{K, k}$ avec $|f - g_k| \leq C_{K, k} |x\xi|^k$ sur $K - \pi^{-1}(D)$. De plus les dérivées de f sur $\Omega - \pi^{-1}(D)$ satisfont la même propriété, ce qu'on voit en utilisant Cauchy, comme en II.1.1.11. On en déduit alors facilement que $f \in \mathcal{A}_{\tilde{X}}^{<D, r}(\Omega)$ et que $T_{D, r} f = \hat{f}$. □

Remarque B.1.5. — Soit $\mathcal{E}_{\widehat{\tilde{X}|D}} = \varinjlim_k \mathcal{E}_{\tilde{X}}/T_D^k \mathcal{E}_{\tilde{X}}$. Alors $\mathcal{E}_{\widehat{\tilde{X}|D}}$ s'identifie au faisceau des fonctions C^∞ au sens de Whitney sur $\pi^{-1}(D) \subset \tilde{X}$, noté $\mathcal{E}(\pi^{-1}(D))$ dans [38] : on peut en effet utiliser Mayer-Vietoris (cf. [38, chap. 1 th. 5.5] pour \mathcal{E}) pour se ramener à identifier $\mathcal{E}_{\widehat{\tilde{X}|Z}}$ et $\mathcal{E}(\pi^{-1}(Z))$ lorsque Z est intersection de composantes de D . Le théorème de Whitney [38, chap. 1 th. 4.1] montre que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_{\tilde{X}}^{<\pi^{-1}(D)} \longrightarrow \mathcal{E}_{\tilde{X}} \xrightarrow{T_D} \mathcal{E}_{\widehat{\tilde{X}|D}} \longrightarrow 0$$

est exacte.

B.2. Développements asymptotiques. — De même que la proposition II.1.1.11 donne une caractérisation de $\mathcal{A}_{\tilde{X}}^{<D}$, on peut caractériser de $\mathcal{A}_{\tilde{X}}$ en termes de développements asymptotiques⁽¹⁾ comme dans [35]. Il est à noter cependant que l'assertion

⁽¹⁾Dans [56], la proposition 2.13 est énoncée incorrectement.

montrée ci-dessus ne donne pas exactement un développement asymptotique au sens de Majima.

Donnons-nous, pour tout Z intersection de composantes de D , une section \widehat{f}_Z de $\mathcal{A}_{\widehat{X}|Z}(\Omega)$ (où Ω est un ouvert sectoriel comme plus haut) et supposons que la famille des \widehat{f}_Z soit compatible, c'est-à-dire que pour toute composante D_i de D ne contenant pas Z on ait $T_{D_i}\widehat{f}_Z = \widehat{f}_{Z \cap D_i}$. Pour $m \in \mathbb{N}^n$ on définit $\widehat{f}_Z^{\leq m_Z}$ comme plus haut.

Proposition B.2.1. — Une fonction holomorphe f sur $\Omega - \pi^{-1}(D)$ est dans $\mathcal{A}_{\widehat{X}}(\Omega)$ si et seulement s'il existe une famille compatible $\widehat{f}_Z \in \mathcal{A}_{\widehat{X}|Z}(\Omega)$ (Z intersection non vide de composantes de D) telle que pour tout compact $K \subset \Omega$ et tout $m \in \mathbb{N}^n$ il existe une constante $C_{K,m}$ avec, sur $K - \pi^{-1}(D)$,

$$\left| f(x, y) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{\text{codim } Z=k} \widehat{f}_Z^{\leq m_Z}(x, y) \right| \leq C_{K,m} |x|^m.$$

Si cette famille existe, elle est unique et l'on a $\widehat{f}_Z = T_Z f$ pour tout tel Z .

Démonstration. — Pour la nécessité, on choisit, pour $f \in \mathcal{A}_{\widehat{X}}(\Omega)$, la famille des $T_Z f$. Pour la suffisance, on vérifie que la condition est stable par dérivation et on conclut comme plus haut. \square

B.3. Lemmes de Dolbeault-Grothendieck sur l'éclaté réel

B.3.1. Démonstration de la proposition II.1.1.7. — Le fait que $\text{Ker } \bar{\partial} = \mathcal{A}_{\widehat{X}}^{\text{mod } D}$ a été indiquée au §II.1.1. La preuve de l'exactitude est analogue à celle sur une variété analytique. Le problème est local, donc on suppose que $X = \mathbb{C}^{n+p}$ avec les coordonnées $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p$ et $D = \{x_1 \cdots x_n = 0\}$. On remarque que l'opérateur $x\bar{\partial} = x_1 \cdots x_n \bar{\partial}$ agit sur les formes C^∞ sur $\widetilde{X}(D)$. Soit $\mathcal{E}_c^{(0,q)}(\widetilde{X}(D))$ l'espace des formes C^∞ à support compact sur $\widetilde{X}(D)$, qui sont de type $(0, q)$ sur $\widetilde{X}(D) - \pi^{-1}(D)$. Notons encore $\pi : \widetilde{X}(D) \times \widetilde{X}(D) \rightarrow X \times X$ la projection. On considère le noyau k de Bochner-Martinelli de bi-type $[(0, q - 1); (n + p, n + p - q)]$ sur $X \times X$ (voir par exemple [22, p. 383]) et on pose $\tilde{k} = \pi^* k$. Pour $\varphi \in \mathcal{E}_c^{(0,q)}(\widetilde{X}(D))$ on pose

$$\tilde{K}\varphi = \int \tilde{k} \wedge \varphi \in \mathcal{E}^{(0,q-1)}(\widetilde{X}(D)).$$

Si φ est à support dans $\widetilde{X}(D) - \pi^{-1}(D)$, on a $\tilde{K}\varphi = \pi^* K\varphi$ si K est défini par le noyau k sur $X \times X$. Si l'on pose (pour $x = x_1 \cdots x_n$)

$$\tilde{L}\varphi = (\tilde{K}x\bar{\partial} + x\bar{\partial}\tilde{K} - x) \cdot \varphi$$

on a $x^2\tilde{L}\varphi = 0$: en effet, pour toute forme η à support compact la distribution (en φ) $\int \tilde{L}\varphi \wedge \eta$ est d'ordre ≤ 1 et si φ est à support dans $\widetilde{X}(D) - \pi^{-1}(D)$ on a $\tilde{L}\varphi = \pi^* L\varphi = 0$.

On en déduit que pour tout courant $T \in \mathcal{E}'^{(0,q)}(\widetilde{X}(D))$, si l'on pose $\tilde{K}T(\varphi) = T(\tilde{K}\varphi)$, on a l'égalité $x^2\tilde{L}T = 0$. Soit alors Ω un ouvert de $\widetilde{X}(D)$ et u un courant

modéré de type $(0, q)$ sur Ω tel que $\bar{\partial}u = 0$ sur $\Omega - \pi^{-1}(D)$. On peut relever u en un courant S sur Ω et $x\bar{\partial}S$ est à support dans $\pi^{-1}(D)$, donc il existe N tel que $x^N(x\bar{\partial}S) = 0$. Soit Ω' un ouvert relativement compact de Ω et χ une fonction C^∞ sur Ω à support compact et $\equiv 1$ sur Ω' . Posons $T = x^N\chi S$. On a donc $x\bar{\partial}T = 0$ sur Ω' et par suite sur cet ouvert $x^2(x\bar{\partial}\tilde{K}T) = x^3T$. Si on pose $w = \tilde{K}T|_{\Omega' - \pi^{-1}(D)}$ on a $\bar{\partial}w = x^N u$ sur $\Omega' - \pi^{-1}(D)$ et puisque w est modérée sur Ω' , $x^{-N}w$ l'est aussi et $u = \bar{\partial}(x^{-N}w)$. □

B.3.2. Démonstration du lemme II.1.1.18. — Il suffit de montrer que pour tout Z intersection de composantes de D (éventuellement $Z = \emptyset$), le complexe $\left(\mathcal{E}_{\widehat{X}|Z}^{0,\bullet}[*D], \bar{\partial}\right)$ n'a de cohomologie qu'en degré 0, donc est une résolution de $\mathcal{A}_{\widehat{X}|Z}[*D]$.

En effet, en utilisant Mayer-Vietoris on en déduit que $\left(\mathcal{E}_{\widehat{X}|D}^{0,\bullet}[*D], \bar{\partial}\right)$ est une résolution de $\mathcal{A}_{\widehat{X}|D}[*D]$. En utilisant alors Borel-Ritt (proposition II.1.1.16 et remarque B.1.5) on obtient le lemme II.1.1.18.

Supposons donc que Z soit défini par $x_1 = \dots = x_r = 0$. Alors $\mathcal{E}_{\widehat{X}|Z}^{0,\bullet}[*D] = \mathcal{E}_{\bar{Z} \times (S^1)^r} \llbracket x_1, \dots, x_r \rrbracket [*D]$ et pour $j = 1, \dots, r$, l'opérateur $\bar{x}_j \bar{\partial}_{x_j}$ agit sur $\mathcal{E}_{\bar{Z} \times (S^1)^r}$ par $i\partial_{\theta_j}$. En utilisant les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_{\bar{Z} \times (S^1)^{r-1}} \longrightarrow \mathcal{E}_{\bar{Z} \times (S^1)^r} \xrightarrow{i\partial_{\theta_j}} \mathcal{E}_{\bar{Z} \times (S^1)^r} \longrightarrow 0$$

pour $j = 1, \dots, r$, on se ramène à montrer l'assertion lorsque $r = 0$, c'est-à-dire pour le complexe $\left(\mathcal{E}_{\widehat{X}}^{0,\bullet}[*D], \bar{\partial}\right)$. On utilise pour cela l'opérateur d'homotopie \tilde{K} introduit plus haut. □

B.4. Une suite exacte du type Mayer-Vietoris. — Soit T un espace topologique compact et \mathcal{G} un faisceau de groupes sur T . Soit $p : T \times S^1 \rightarrow T$ la projection. On a alors une suite exacte

$$H^0(T, \mathcal{G}) \times H^0(T, \mathcal{G}) \longrightarrow H^1(T \times S^1, p^{-1}\mathcal{G}) \longrightarrow H^1(T, \mathcal{G}) \times H^1(T, \mathcal{G})$$

qui est compatible aux morphismes de faisceaux. En effet, commençons par considérer un recouvrement ouvert \mathcal{U} de T et le recouvrement (I, J) de S^1 par deux intervalles ouverts dont l'intersection est réunion de deux intervalles ouverts. Montrons que l'on a une suite exacte

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \times H^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U} \times (I, J), p^{-1}\mathcal{G}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \times H^1(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

qui peut encore s'écrire

$$H^0(\mathcal{U} \times (I \cap J), p^{-1}\mathcal{G}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U} \times (I, J), p^{-1}\mathcal{G}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U} \times I, p^{-1}\mathcal{G}) \times H^1(\mathcal{U} \times J, p^{-1}\mathcal{G}).$$

Si $\lambda \in H^1(\mathcal{U} \times (I, J), p^{-1}\mathcal{G})$ on dispose de sections λ_I^{UV} sur $(U \cap V) \times I$, λ_J^{UV} sur $(U \cap V) \times J$, $\lambda_{I \cap J}^U$ sur $U \times (I \cap J)$, $\lambda_{I \cap J}^{UV}$ et $\lambda_{I \cap J}^V$ sur $(U \times V) \times (I \cap J)$. Si l'image de λ dans $H^1(\mathcal{U} \times I, p^{-1}\mathcal{G}) \times H^1(\mathcal{U} \times J, p^{-1}\mathcal{G})$ est l'identité, c'est que les cocycles $(\lambda_I^{UV})_{U,V}$

et $(\lambda_J^{UV})_{U,V}$ sont des cobords. Alors λ est cohomologue (et on le suppose donc égal) à un cocycle pour lequel $\lambda_I^{UV} = \text{Id}$ et $\lambda_J^{UV} = \text{Id}$ pour tous U, V . On déduit des relations de cocycle que les λ_{IJ}^U ($U \in \mathcal{U}$) se recollent en une section globale λ_{IJ} de $p^{-1}\mathcal{G}$ sur $T \times (I \cap J)$, ce qui est le résultat cherché.

Pour terminer la démonstration, on vérifie que pour tout recouvrement ouvert \mathcal{V} de $T \times S^1$ il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} \times \mathcal{J}$ plus fin que \mathcal{V} , où \mathcal{J} est un recouvrement de S^1 par des intervalles ouverts I_0, \dots, I_n tels que pour tout $k = 0, \dots, n$ (en posant $I_{n+1} = I_0$) l'intersection $I_k \cap I_{k+1}$ soit un intervalle et $I_k \cap I_\ell = \emptyset$ si $|k - \ell| \geq 2$. On a donc $H^1(T \times S^1, p^{-1}\mathcal{G}) = \cup_{\mathcal{U}, \mathcal{J}} H^1(\mathcal{U} \times \mathcal{J}, p^{-1}\mathcal{G})$. Enfin, on vérifie que si on pose $I = I_0$ et $J = \bigcup_{j=1}^n I_j$, on a $H^1(\mathcal{U} \times \mathcal{J}, p^{-1}\mathcal{G}) = H^1(\mathcal{U} \times (I, J), p^{-1}\mathcal{G})$. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. ABDEL-GADIR – «Applications of Grauert-Remmert A and B theorems», Prépublication Institut Fourier, Grenoble, 1997.
- [2] ———, «On the Fourier analysis of holonomic \mathcal{D} -modules», Prépublication Institut Fourier, Grenoble, 1997.
- [3] N. A'CAMPO – «La fonction zêta d'une monodromie», *Comment. Math. Helv.* **50** (1975), p. 233–248.
- [4] D. G. BABBITT & V. S. VARADARAJAN – «Formal reduction of meromorphic differential equations : a group theoretic view», *Pacific J. Math.* **109** (1983), p. 1–80.
- [5] ———, *Deformation of nilpotent matrices over rings and reduction of analytic families of meromorphic differential equations*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 55, no. 325, American Mathematical Society, Providence RI, 1985.
- [6] ———, *Local moduli for meromorphic differential equations*, Astérisque, vol. 169-170, Société Mathématique de France, Paris, 1989.
- [7] W. BALSER, B. L. J. BRAAKSMA, J.-P. RAMIS & Y. SIBUYA – «Multisummability of formal power series solutions of linear ordinary differential equations», *Asymptotic Anal.* **5** (1991), p. 27–45.
- [8] J. BINGENER – «Über formale komplexe Räume», *Manuscripta Math.* **24** (1978), p. 253–293.
- [9] J.-E. BJÖRK – *Rings of differential operators*, North Holland, Amsterdam, 1979.
- [10] ———, *Analytic \mathcal{D} -modules and applications*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1993.
- [11] A. BOREL (éd.) – *Algebraic \mathcal{D} -modules*, Perspectives in Math., vol. 2, Boston, Academic Press, 1987.

- [12] L. BOUTET DE MONVEL, A. DOUADY & J.-L. VERDIER (éds.) – *Séminaire E.N.S. Mathématique et Physique*, Progress in Math., vol. 37, Birkhäuser, Basel, Boston, 1983.
- [13] B. L. J. BRAAKSMA – «Multisummability and Stokes multipliers of linear meromorphic differential equations», *J. Differential Equations* **92** (1991), p. 45–75.
- [14] B. L. J. BRAAKSMA, G. K. IMMINK & M. VAN DER PUT (éds.) – *Workshop on the Stokes phenomenon and Hilbert sixteenth problem, Groningen 1995*, World Scientific, Singapore, 1996.
- [15] J. BRIANÇON & P. MAISONOBE – «Sur la variété caractéristique de systèmes différentiels irréguliers le long d'une hypersurface», *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **320** (1995), p. 285–288.
- [16] F. CANO – «Desingularization of plane vector fields», *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1986), p. 83–93.
- [17] H. CHARRIÈRE & R. GÉRARD – «Formal reduction of integrable linear connection having a certain kind of irregular singularity», *Analysis* **1** (1981), p. 85–115.
- [18] V. I. DANILOV – «The geometry of toric varieties», *Russian Math. Surveys* **33** (1978), p. 97–154.
- [19] P. DELIGNE – *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lect. Notes in Math., vol. 163, Springer-Verlag, 1970.
- [20] J. FRENKEL – «Cohomologie non abélienne et espaces fibrés», *Bull. Soc. math. France* **85** (1957), p. 135–220.
- [21] A. GALLIGO, J.-M. GRANGER & P. MAISONOBE (éds.) – *Systèmes différentiels et singularités*, Astérisque, vol. 130, Société Mathématique de France, 1985.
- [22] P. A. GRIFFITHS & J. HARRIS – *Principles of Algebraic Geometry*, A. Wiley-Interscience, New York, 1978.
- [23] R. HARTSHORNE – «On the de Rham cohomology of algebraic varieties», *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **45** (1975), p. 5–99.
- [24] ———, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1980.
- [25] M. JIMBO, T. MIWA & K. UENO – «Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients I», *Physica* **2D** (1981), p. 306–352.
- [26] M. KASHIWARA – «Regular holonomic \mathcal{D} -modules and distributions on complex manifolds», *Complex analytic singularities*, Advanced Studies in Pure Math., vol. 8, 1986, p. 199–206.
- [27] M. KASHIWARA & P. SCHAPIRA – *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 292, Springer-Verlag, 1990.

- [28] Y. LAURENT – « Polygone de Newton et b -fonctions pour les modules microdifférentiels », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4^e série **20** (1987), p. 391–441.
- [29] A. H. M. LEVELT – « Jordan decomposition for a class of singular differential operators », *Arkiv för Math.* **13** (1975), p. 1–27.
- [30] A. H. M. LEVELT & A. VAN DEN ESSEN – *Irregular singularities in several variables*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 40, no. 270, American Mathematical Society, Providence RI, 1982.
- [31] M. LODAY-RICHAUD – « Stokes phenomenon, multisummability and differential Galois groups », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **44** (1994), p. 849–906.
- [32] ———, « Solutions formelles des systèmes différentiels linéaires méromorphes et sommation », *Expo. Math.* **13** (1995), p. 116–162.
- [33] P. MAISONOBE & C. SABBAB (éds.) – *\mathcal{D} -modules cohérents et holonomes*, Les cours du CIMPA, Travaux en cours, vol. 45, Hermann, Paris, 1993.
- [34] H. MAJIMA – « Analogues of Cartan decomposition theorem in asymptotic analysis », *Funkcial. Ekvac.* **26** (1983), p. 131–154.
- [35] ———, *Asymptotic analysis for integrable connections with irregular singular points*, Lect. Notes in Math., vol. 1075, Springer-Verlag, 1984.
- [36] ———, « Vanishing theorems in asymptotic analysis II », *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **60** (1984), p. 171–173.
- [37] B. MALGRANGE – *Lectures on the theory of functions of several complex variables*, T.I.F.R. lectures on mathematics and physics, T.I.F.R., Bombay, 1958.
- [38] ———, *Ideals of differentiable functions*, Oxford University Press, 1966.
- [39] ———, « Sur les points singuliers des équations différentielles », *Enseign. Math.* **20** (1974), p. 147–176.
- [40] ———, « Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularités irrégulières », Prépublication Institut Fourier, Grenoble, 1979.
- [41] ———, « La classification des connexions irrégulières à une variable », in *Séminaire E.N.S. Mathématique et Physique* [12], p. 381–399.
- [42] ———, « Sur les déformations isomonodromiques, I, II », in *Séminaire E.N.S. Mathématique et Physique* [12], p. 401–438.
- [43] ———, « Chap. IV : Regular connexions after Deligne », in *Algebraic \mathcal{D} -modules* [11], p. 151–172.
- [44] ———, *Équations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Math., vol. 96, Birkhäuser, Basel, Boston, 1991.

- [45] ———, « Connexions méromorphes », *Congrès Singularités, Lille 1991*, Cambridge University Press, 1994, p. 251–261.
- [46] ———, « Filtration des modules holonomes », *Analyse algébrique des perturbations singulières* (L. Boutet de Monvel, éd.), Travaux en cours, vol. 48, no. 2, Hermann, Paris, 1994, p. 35–41.
- [47] ———, « Connexions méromorphes, II : le réseau canonique », *Invent. Math.* **124** (1996), p. 367–387.
- [48] B. MALGRANGE & J.-P. RAMIS – « Fonctions multisommables », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **42** (1992), p. 353–368.
- [49] J.-F. MATTEI & R. MOUSSU – « Holonomie et intégrales premières », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série* **13** (1980), p. 469–523.
- [50] Z. MEBKHOUT – « Sur le théorème de semi-continuité de l'irrégularité des équations différentielles », in *Systèmes différentiels et singularités* [21], p. 365–417.
- [51] ———, *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les \mathcal{D} -modules cohérents*, Travaux en cours, vol. 35, Hermann, Paris, 1989.
- [52] ———, « Le théorème de comparaison entre cohomologies de de Rham d'une variété algébrique complexe et le théorème d'existence de Riemann », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **69** (1989), p. 47–89.
- [53] ———, « Le théorème de positivité de l'irrégularité pour les \mathcal{D}_X -modules », *The Grothendieck Festschrift*, Progress in Math., vol. 88, no. 3, Birkhäuser, Basel, Boston, 1990, p. 83–132.
- [54] Z. MEBKHOUT & C. SABBABH – « § III.4 \mathcal{D} -modules et cycles évanescents », in *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les \mathcal{D} -modules cohérents* [51], p. 201–239.
- [55] P. ROBBA – « Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels, application à la réduction formelle des équations différentielles », *Enseign. Math.* **26** (1980), p. 279–311.
- [56] C. SABBABH – « Équations différentielles à points singuliers irréguliers en dimension 2 », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **43** (1993), p. 1619–1688.
- [57] ———, « Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations », in *Éléments de la théorie des systèmes différentiels* [33], p. 1–80.
- [58] ———, « The Stokes phenomenon in dimension 2 », in *Workshop on the Stokes phenomenon and Hilbert sixteenth problem, Groningen 1995* [14], p. 279–293.
- [59] A. SEIDENBERG – « Reduction of singularities of the differential equation $AdY = BdX$ », *Amer. J. Math.* **90** (1968), p. 248–269.

- [60] J.-C. TOUGERON – « Sur les ensembles semi-analytiques avec conditions Gevrey au bord », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série* **27** (1994), p. 173–208.
- [61] H. TURRITTIN – « Convergent solutions of ordinary differential equations in the neighbourhood of an irregular singular point », *Acta Math.* **93** (1955), p. 27–66.
- [62] V. S. VARADARAJAN – « Meromorphic differential equations », *Expo. Math.* **9** (1991), p. 97–188.
- [63] ———, « Linear meromorphic differential equations : a modern point of view », *Bull. Amer. Math. Soc.* **33** (1996), p. 1–42.
- [64] W. WASOW – *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Interscience, New York, 1965.

INDEX

- admissible
 - base, 133
 - couple, 96
 - triplet, 128
- apparent
 - invariant, 102, 155
 - pondéré, 131
 - polygone de Newton, *voir* polygone
- axe privilégié, 127
- Borel-Ritt
 - lemme de, 44, 175
- caractéristique
 - cycle h -, 28
 - cycle r -, 21
 - cycle r -, 27
 - variété h -, 28
 - variété r -, 21
 - variété r -, 27
- carte (0) , (∞) , (η) , 8
- cas (PIR), 47
- cas (REG), 47
- centre permis, 81
- changement de base
 - élémentaire, 92, 133
 - de Turrittin, 136
- condition (B), 10
- connexion
 - élémentaire
 - D_1 -, 15
- image inverse d'une, 9
- méromorphe, 6
 - formelle, 6
- plate, 6
- régulière, 9
- $\mathcal{A}_{\bar{X}(D)}[*D]$ -, 52
 - régulière, 52
- $\mathcal{O}_X[*Z]$ -, 6
- $\mathcal{O}_{\bar{X}|\bar{Z}}[*Z]$ -, 6
- cycles
 - proches, 123
 - modérés, 120
- décomposition
 - \mathcal{A} -
 - bonne, 50
 - formelle
 - bonne, 11
 - très bonne, 11
 - suivant les valeurs propres, 91
- de Rham
 - complexe de, 44, 64
 - holomorphe, 44, 123
 - plat, 44
 - foncteur de, 64
- Dolbeault
 - complexe de
 - plat, 39
- Dolbeault-Grothendieck
 - lemme de, 40, 41, 63, 179
- éclatement, 8
 - à centre permis, 81
 - local, 81
 - à centre permis, 81
 - formel, 81, 84
 - formel complet, 84
 - réel, 39
 - torique, 82
- Euler
 - fonction d', 21, 27

- éventail, 82
 - régulier, 82
- faisceau
 - C-constructible, 63
 - pervers, 64
- fonction
 - méromorphe, 5
 - plate, 41
- Fourier
 - transformation de, 20, 119
- irrégularité
 - d'une connexion analytique en dimension 1, 22
 - d'une connexion formelle en dimension 1, 22
 - faisceau d', 51
 - semi-continuité de, 23, 34
- Jacobson-Morosov
 - théorème de, 171
- Kashiwara
 - conjecture de, 63, 65
- Majima
 - théorème de, 45, 49
- Malgrange
 - conjecture de, 23
 - théorème de, 72, 93
- Malgrange-Sibuya
 - théorème de, 45
- Malgrange-Komatsu
 - irrégularité de, 22
- Mayer-Vietoris, 43, 180
- modèle élémentaire
 - bon, 10
 - local, 10
- multiplicité, 100
 - pondérée, 130
 - réduite, 100
 - pondérée, 130
- négligeable
 - \mathfrak{p} -, 129
 - \mathfrak{p}_i -, 133
- partie principale, 77, 98, 127
 - nilpotente, 112
 - pondérée, 78, 131
- poids, 128, 171
 - structure de, 128
- polygone, 100
 - de Newton, 102
 - apparent, 102
 - d'une connexion, 22
 - pondéré, 130
 - pondéré apparent, 131
- primitif, 171
 - quasi-, 172
- ramification
 - locale formelle, 84
- réduite (1-forme)
 - faiblement, 96
 - fortement, 96
 - \mathfrak{p} -, 131
 - \mathfrak{p}_i -, 133
 - rel. à un couple admissible
 - faiblement, 97
 - fortement, 97
 - rel. à un triplet admissible, 128
- résonance, 96, 97, 111, 151, 162
 - bi-, 169
 - nilpotente, 80, 154
 - variété de, 173
- singularité inexistante, 94
- Stokes
 - espace de, 30
 - déployé, 30
 - fibration de, 33
 - secteur de, 29
 - surface de, 29
- stratification, 5
- structure
 - \mathcal{A} -
 - bonne, 50
 - formelle
 - bonne, 11
 - très bonne, 11
- suite d'éclatements
 - complète, 85
- torique
 - éclatement, voir éclatement
 - réduction, 114