

Astérisque

AST

**Géométrie complexe et systèmes dynamiques -
Colloque en l'honneur d'Adrien Douady Orsay,
1995 - Pages préliminaires**

Astérisque, tome 261 (2000), p. II-XXI

http://www.numdam.org/item?id=AST_2000__261__R2_0

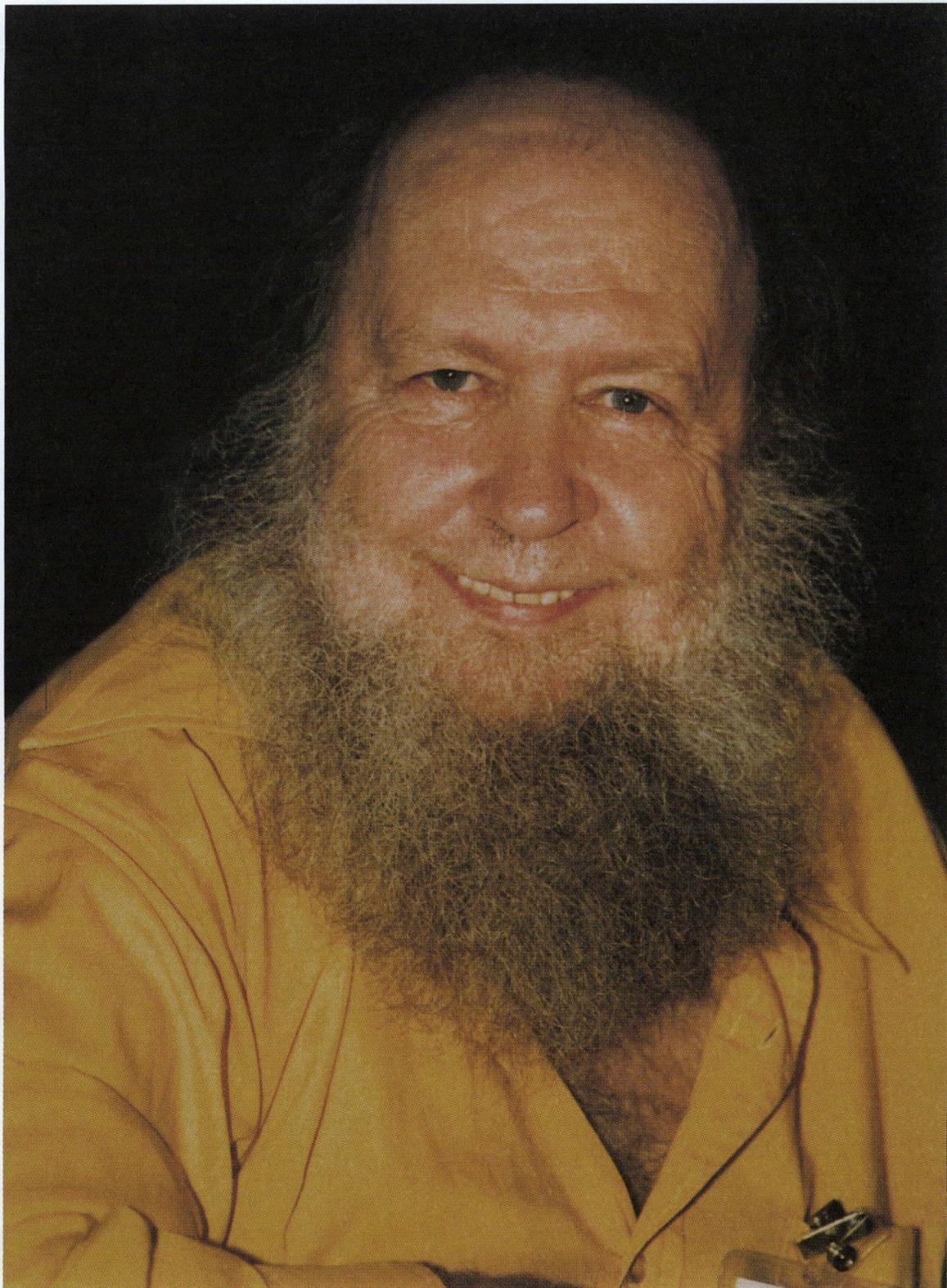
© Société mathématique de France, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>



Adrien Douady, 1995

ASTÉRISQUE 261

**GÉOMÉTRIE COMPLEXE
ET SYSTÈMES DYNAMIQUES
COLLOQUE EN L'HONNEUR
D'ADRIEN DOUADY,
ORSAY 1995**

édité par

Marguerite Flexor

Pierrette Sentenac

Jean-Christophe Yoccoz

Société Mathématique de France 2000

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Marguerite Flexor

Université Paris-Sud, CNRS UMR 8628, Bâtiment 430, Mathématiques,
91405 Orsay Cedex.

E-mail : Marguerite.Flexor@math.u-psud.fr

Pierrette Sentenac

Université Paris-Sud, CNRS UMR 8628, Bâtiment 430, Mathématiques,
91405 Orsay Cedex.

E-mail : Pierrette.Sentenac@math.u-psud.fr

Jean-Christophe Yoccoz

Collège de France, 3 rue d'Ulm, 75005 Paris.

Université Paris-Sud, CNRS UMR 8628, Bâtiment 430, Mathématiques,
91405 Orsay Cedex.

Classification mathématique par sujets (1991). — 30C, 30D, 30F, 32A, 32B, 32G, 32S, 32L, 37A, 37C, 37D, 37E, 37XX, 52A, 53C, 58F.

Mots clefs. — Théorème central limite, Collet-Eckmann, équisingularité, ergodicité, application de Hénon, feuilletages holomorphes, mouvements holomorphes, orbites homoclines, hyperbolicité, mesures invariantes, itération, ensembles de Julia, applications de Lorenz, ensemble de Mandelbrot, exposant de Lyapounov positif, applications rationnelles, mesures SRB, volume.

**GÉOMÉTRIE COMPLEXE
ET SYSTÈMES DYNAMIQUES
COLLOQUE EN L'HONNEUR D'ADRIEN DOUADY,
ORSAY 1995**

**édité par Marguerite Flexor, Pierrette Sentenac,
Jean-Christophe Yoccoz**

Résumé. — Ce volume est issu du colloque « Géométrie complexe et Systèmes dynamiques » qui s'est tenu à l'université Paris-sud (Orsay) du 3 au 8 juillet 1995, à l'occasion du soixantième anniversaire d'Adrien Douady. Les articles qui le composent illustrent de nombreuses facettes de l'activité actuelle en systèmes dynamiques : itération des polynômes (en particulier quadratiques), des fractions rationnelles, feuilletages holomorphes, dynamique non uniformément hyperbolique.

Abstract (Conference on Complex Geometry and Dynamical Systems in honor of Adrien Douady, Orsay 1995)

On account of Adrien Douady's sixtieth birthday, a meeting on "Complex Geometry and Dynamical Systems" was held in July 1995 at the University of Paris-Sud (Orsay). The present book is an outcome of that meeting. The many-faceted activity in the field of dynamical systems is reflected in the papers gathered in the volume. Topics covered include iteration of polynomials (with special regards to quadratic ones), rational fractions, holomorphic foliations, and non uniformly hyperbolic dynamics.

TABLE DES MATIÈRES

Résumés des articles	xi
Abstracts	xvii
Préface	xxi
K. ASTALA, Z. BALOGH & H.M. REIMANN — <i>Lempert mappings and holomorphic motions in \mathbb{C}^n</i>	1
1. Introduction	1
2. Inner actions and Beltrami differentials	4
3. Holomorphic motions and Kobayashi indicatrix	10
References	11
M. BENEDICKS & L.-S. YOUNG — <i>Markov Extensions and Decay of Correlations for Certain Hénon Maps</i>	13
0. Introduction and statements of results	13
1. Dynamics of certain Hénon maps	16
2. Preliminaries: cleaning up the notion of $\text{dist}(\cdot, \mathbb{C})$ in [BC2] and [BY2]	21
3. Construction of a “horseshoe” with positive measure	25
4. Return time estimates	33
5. Reduction to expanding maps	39
6. Proofs of Theorems	46
References	56
C. CAMACHO & B. AZEVEDO SCÁRDUA — <i>Complex foliations with algebraic limit sets</i>	57
1. Introduction	57
2. Formal normal forms and resolution of singularities	60
3. Virtual holonomy and Singular holonomy	65
4. Logarithmic derivatives of an integrable differential 1-form	72

5. Formal logarithmic derivatives near the limit set	75
6. Rationality of formal logarithmic derivatives	86
7. Proof of Theorem 1.1	86
References	87
A. FATHI — <i>Une caractérisation des stades à virages circulaires</i>	89
0. Introduction	89
1. Un théorème de Blaschke	92
2. Une minoration du volume d'un corps convexe de bord $C^{1,1}$	96
3. Complément	98
4. Appendice : symétrie et positivité de DN	100
Références	101
M. JAKOBSON & S. NEWHOUSE — <i>Asymptotic Measures for Hyperbolic Piecewise Smooth Mappings of a Rectangle</i>	103
1. Folklore Theorem and SRB Measures	103
2. Hyperbolicity and geometric conditions	104
3. Distortion conditions and the main theorem	108
4. Some estimates of partial derivatives	109
5. Families of Fiber contractions	114
6. Invariant Manifolds	116
7. Fluctuation of Derivatives	128
8. Distortion for compositions	130
9. Sinai Local Measures	136
10. Absolute Continuity of the Stable Foliation	139
11. Construction of an SRB measure	147
12. Further ergodic properties and an entropy formula	155
References	159
G. LEVIN & S. VAN STRIEN — <i>Total disconnectedness of Julia sets and absence of invariant linefields for real polynomials</i>	161
1. Introduction	161
2. Associated mappings and complex bounds	163
3. Proof of the Theorem	169
References	171
M. LYUBICH — <i>Dynamics of quadratic polynomials, III Parapuzzle and SBR measures</i>	173
1. Introduction	173
2. Background	176
3. Parapuzzle combinatorics	179
4. Parapuzzle geometry	191
5. Application to the measure problem	196
6. Shapes of the Mandelbrot copies	197
References	199

S. LUZZATTO & M. VIANA — <i>Positive Lyapunov exponents for Lorenz-like families with criticalities</i>	201
1. Introduction and statement of results	201
2. Positive Lyapunov Exponents	205
3. Partitions and distortion estimates	216
4. Parameter exclusions	230
References	236
M. MARTENS & T. NOWICKI — <i>Invariant Measures for Typical Quadratic Maps</i>	239
1. Introduction	239
2. Central Intervals	242
3. Derivatives along Recurrent Orbits	244
4. Telemann Decomposition of the Critical Orbit	248
5. Appendix	250
References	251
J.-F. MATTEI — <i>Quasi-homogénéité et équiréductibilité de feuilletages holomorphes en dimension deux</i>	253
Vocabulaire et notations	253
1. Introduction	254
2. Réduction des singularités et équiréduction	256
3. Formes semi-hyperboliques	258
4. Déformations équisingulières de germes de courbes planes	263
5. Familles de séparatrices	267
6. Notions de quasi-homogénéité	268
7. Une généralisation d'un théorème de J. Briançon	274
Références	275
J. MILNOR — <i>Periodic Orbits, External Rays and the Mandelbrot Set : An Expository Account</i>	277
1. Introduction	277
2. Orbit Portraits	284
3. Parameter Rays	294
4. Near Parabolic Maps	296
5. The Period n Curve in (Parameter \times Dynamic) Space	303
6. Hyperbolic Components	308
7. Orbit Forcing	312
8. Renormalization	316
9. Limbs and the Satellite Orbit	322
Appendix A. Totally Disconnected Julia Sets and the Mandelbrot set	325
Appendix B. Computing Rotation Numbers	327
References	331

J. PALIS — <i>A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors</i>	335
1. Introduction and Main Conjecture	335
2. Other conjectures and some recent results	340
References	345
K. PILGRIM & TAN LEI — <i>Rational maps with disconnected Julia set</i>	349
1. Introduction	349
2. The decomposition and the reduction to three cases	351
3. Topology and dynamics of the decomposition	355
4. Analytic preliminaries	362
5. Proof of Proposition [Case 2]	364
6. Proof of Proposition [Case 3]	367
7. Proof of Proposition [Case 4] and Theorem 1.1	368
8. Further results	371
9. Generalizations	378
Appendix A. Technical results about plane topology	380
Appendix B. Proof of Proposition 7.2	382
References	383
F. PRZYTYCKI — <i>Hölder implies Collet-Eckmann</i>	385
0. Introduction	385
1. Preliminaries on Hölder basins	386
2. A technical lemma	390
3. Hölder implies CE	391
4. TCE rational maps and the topological invariance of CE	396
5. TCE repellers	400
References	402
D. SCHLEICHER — <i>Rational Parameter Rays of the Mandelbrot Set</i>	405
1. Introduction	405
2. Complex Dynamics	408
3. Periodic Rays	416
4. Preperiodic Rays	427
5. Hyperbolic Components	432
References	442

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Lempert mappings and holomorphic motions in \mathbf{C}^n

KARI ASTALA, ZOLTAN BALOGH & HANS MARTIN REIMANN 1

Le but de cet article est double : discuter le concept de mouvements holomorphes et des phénomènes de type Mañé-Sad-Sullivan en plusieurs variables complexes ; comparer les différentes notions de formes de Beltrami en CR géométrie qui sont apparues dans [4] et [7].

Markov Extensions and Decay of Correlations for Certain Hénon Maps

MICHAEL BENEDICKS & LAI-SANG YOUNG 13

Dans cet article, on considère les applications de Hénon pour lesquelles l'analyse de [BC2] est valable. On construit des ensembles munis de bonnes propriétés hyperboliques et de bonnes structures de retour, et on montre que leurs fonctions de temps de retour ont des restes à décroissance exponentielle. Ceci permet d'appliquer les résultats de [Y]. Des propriétés statistiques telles que la décroissance exponentielle des corrélations et le théorème central limite sont établies.

Complex foliations with algebraic limit sets

CÉSAR CAMACHO & BRUNO AZEVEDO SCÁRDUA 57

Nous considérons le problème de la classification des feuilletages projectifs complexes ayant un ensemble limite algébrique. Nous démontrons le résultat suivant :

Soit \mathcal{F} un feuilletage holomorphe par des courbes dans le plan projectif complexe $\mathbf{CP}(2)$ dont l'ensemble limite se compose d'une courbe algébrique Λ et de singularités. Si les singularités $\text{sing}\mathcal{F} \cap \Lambda$ sont génériques alors ou bien \mathcal{F} est donné par une 1-forme rationnelle fermée ou bien \mathcal{F} est l'image réciproque par une application rationnelle d'un feuilletage de Riccati $\mathcal{R} : p(x)dy - (a(x)y^2 + b(x)y)dx = 0$ (où Λ correspond à $(y = 0) \cup (\overline{p(x) = 0})$) dans $\overline{\mathbf{C}} \times \overline{\mathbf{C}}$.

La preuve repose sur la résolubilité des groupes d'holonomie généralisée associés à un processus de réduction des singularités de $\text{sing}\mathcal{F} \cap \Lambda$ et sur la construction d'une structure affine transverse à \mathcal{F} en dehors de la courbe algébrique invariante contenant Λ .

Une caractérisation des stades à virages circulaires

ALBERT FATHI 89

Nous donnons une minoration du volume d'un domaine compact convexe d'un espace euclidien dont le bord est de classe $C^{1,1}$. Nous caractérisons le cas d'égalité.

Asymptotic Measures for Hyperbolic Piecewise Smooth Mappings of a Rectangle

MICHAEL JAKOBSON & SHELDON NEWHOUSE 103

Nous montrons l'existence de mesures de Sinai-Ruelle-Bowen pour une classe d'applications C^2 par morceaux d'un rectangle dans lui-même dont les dérivées ne sont pas nécessairement bornées. Ces résultats peuvent être considérés comme une généralisation d'un théorème bien connu en dimension 1 sur l'existence de mesures absolument continues invariantes. Dans un article précédent [8], des résultats semblables étaient énoncés et les preuves esquissées pour des systèmes inversibles. Nous donnons ici des preuves complètes dans le cas général de systèmes non inversibles ; nous développons en particulier la théorie des variétés stables et instables lorsque les dérivées des applications considérées ne sont pas bornées.

Total disconnectedness of Julia sets and absence of invariant linefields for real polynomials

GENADI LEVIN & SEBASTIAN VAN STRIEN 161

Dans cet article, nous considérons des polynômes à coefficients réels avec un point critique éventuellement dégénéré d'ordre pair et dont l'orbite reste bornée. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que leur ensemble de Julia soit totalement discontinu. Nous montrons aussi que ces ensembles de Julia ne portent pas de champs de droites invariants. Dans le cas réel, ceci généralise les résultats de B. Branner et J.H. Hubbard sur les polynômes cubiques et les résultats de C. McMullen sur l'absence de champs de droites invariants.

Dynamics of quadratic polynomials, III Parapuzzle and SBR measures

MIKHAIL LYUBICH 173

Cet article fait partie d'une série sur la dynamique des polynômes quadratiques. Nous transportons notre résultat géométrique précédent [L3] au plan des paramètres. À toute valeur c (en dehors de la cardioïde principale et des copies qui s'y rattachent) est associée « une suite principale de pièces gigognes du parapuzzle ». Nous montrons alors que les modules des anneaux entre deux pièces consécutives croissent au moins linéairement. D'après ([L2]) et le critère géométrique de Martens & Nowicki (*cf.* ce volume) ceci implique que presque tout polynôme quadratique réel (au sens de la mesure de Lebesgue) est hyperbolique ou possède une mesure finie absolument continue invariante ou est infiniment renormalisable. Dans des articles ultérieurs [L5,L7] nous montrons que l'ensemble des paramètres réels infiniment renormalisables est de mesure

nulle, ce qui complète la description de la dynamique pour presque tout polynôme quadratique réel.

Positive Lyapunov exponents for Lorenz-like families with criticalities

STEFANO LUZZATTO & MARCELO VIANA 201

Nous introduisons une classe de familles d'applications réelles dépendant d'un paramètre qui étend les modèles géométriques classiques de Lorenz. Ces applications sont à la fois singulières (discontinuités avec dérivées infinies) et possèdent des points critiques ; elles sont basées sur le comportement du flot de Lorenz pour un ensemble de paramètres important. Notre résultat principal dit qu'une expansion non-uniforme est le type de dynamique que l'on retrouve le plus souvent même s'il y a formation de points critiques.

Invariant Measures for Typical Quadratic Maps

MARCO MARTENS & TOMASZ NOWICKI 239

Nous discutons une condition suffisante, de nature géométrique, pour l'existence de mesures de probabilité invariantes et absolument continues pour des applications S -unimodales. Il en résulte qu'une application quadratique typique, au sens de la mesure de Lebesgue, admet une mesure de SRB.

Quasi-homogénéité et équiréductibilité de feuilletages holomorphes en dimension deux

JEAN-FRANÇOIS MATTEI 253

Après avoir étudié la dépendance analytique des séparatrices d'une famille «équisingulière» de germes de feuilletages holomorphes à l'origine de \mathbb{C}^2 , nous définissons la quasihomogénéité comme une propriété de rigidité. Nous obtenons un théorème de type K. Saito pour les germes de feuilletages quasihomogènes et un théorème de type Briançon-Skoda dans le cas général.

Periodic Orbits, External Rays and the Mandelbrot Set : An Expository Account

JOHN MILNOR 277

Nous expliquons quelques résultats fondamentaux de Douady-Hubbard sur l'ensemble de Mandelbrot en utilisant l'idée de «portrait orbital» c'est-à-dire le modèle des rayons externes qui aboutissent sur une orbite périodique d'une application polynomiale quadratique.

A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors

JACOB PALIS 335

On présente, à travers des résultats récents, des problèmes ouverts et des conjectures, une perspective globale pour l'étude des systèmes dynamiques dissipatifs (flots, difféomorphismes ou transformations d'une variété compacte sans bord ou de l'intervalle). Cette perspective est couronnée par une description conjecturale de la dynamique d'un ensemble dense de systèmes : pour ceux-ci,

il n'y a qu'un nombre fini d'attracteurs, périodiques ou sensibles aux conditions initiales ; ces attracteurs sont stochastiquement stables et l'union de leurs bassins est de mesure totale. Cette conjecture, formulée pour la première fois au début de 1995, fournit un schéma pour la compréhension des familles paramétrées de systèmes dynamiques. On peut la considérer comme une version probabiliste d'un vieux rêve des années soixante, l'existence d'un ouvert dense de systèmes dynamiquement stables, rêve qui s'était évanoui à la fin de cette décade. Seul le cas de la dimension 1 a survécu : Swiatek avec l'aide de Graczyk ([GS]) et Lyubich l'ont indépendamment établi pour la famille quadratique réelle ; plus récemment Kozlovski ([Ko]) a annoncé le même résultat pour la famille des applications unimodales de classe C^3 .

Pour les applications unidimensionnelles réelles ou complexes, notre conjecture est plus précise, prédisant pour la plupart des valeurs des paramètres un nombre fini d'attracteurs, qui sont périodiques ou supportent une mesure de probabilité invariante absolument continue. Remarquablement, Lyubich ([Ly2]) vient avec l'aide de Martens et Nowicki (*cf.* ce volume) d'établir ce résultat pour la famille des polynômes quadratiques réels.

Rational maps with disconnected Julia set

KEVIN PILGRIM & TAN LEI 349

Soit f une fraction rationnelle hyperbolique. On suppose que son ensemble de Julia \mathcal{J} n'est pas connexe. Nous allons montrer que, à l'exception d'un nombre fini de composantes périodiques de \mathcal{J} , et la collection dénombrable de leurs composantes préimages, toute composante de \mathcal{J} est soit un point soit une courbe de Jordan. Par conséquent, toute composante de \mathcal{J} est localement connexe. Nous discutons également quand une telle courbe de Jordan est aussi un quasi-cercle. Nous donnerons un exemple explicite d'une fraction rationnelle ayant une composante de Julia qui est une courbe de Jordan mais pas un quasi-cercle.

Hölder implies Collet-Eckmann

FELIKS PRZYTICKI 385

Soit f un polynôme dont l'ensemble de Julia contient un seul point critique c . Nous montrons que si le bassin de l'infini est Hölderien, la condition de Collet-Eckmann est vérifiée : il existe $\lambda > 1, C > 0$ tel qu'on ait $|(f^n)'(f(c))| \geq C\lambda^n$ pour tout $n \geq 0$. Nous introduisons également les notions d'application rationnelle de type topologique Collet-Eckmann et de répulseur.

Rational Parameter Rays of the Mandelbrot Set

DIERK SCHLEICHER 405

Nous présentons une nouvelle démonstration du fait que tous les rayons externes à arguments rationnels de l'ensemble de Mandelbrot aboutissent et nous relient l'argument externe d'un tel rayon à la dynamique du paramètre

où le rayon aboutit. Notre démonstration est différente de celle donnée à l'origine par Douady et Hubbard et élaborée par P. Lavaurs : elle remplace des arguments analytiques par des arguments combinatoires ; elle n'utilise pas la dépendance analytique des polynômes par rapport au paramètre et peut donc être appliquée aux espaces de paramètres qui ne sont pas analytiques complexes ; la démonstration est aussi techniquement plus facile. Finalement, nous déduisons quelques corollaires sur les composantes hyperboliques de l'ensemble Mandelbrot.

Chemin faisant, nous construisons des partitions du plan dynamique et de l'espace des paramètres, intéressantes en elles-mêmes, et nous interprétons l'ensemble de Mandelbrot comme un espace de paramètres symboliques contenant des *kneading sequences* et des adresses internes.

ABSTRACTS

Lempert mappings and holomorphic motions in \mathbf{C}^n
KARI ASTALA, ZOLTAN BALOGH & HANS MARTIN REIMANN 1

The purpose of this note is twofold : to discuss the concept of holomorphic motions and phenomena of Mañé-Sad-Sullivan type in several complex variables and secondly, to compare the different notions of Beltrami differentials in CR-geometry which have appeared in [4] and [7].

Markov Extensions and Decay of Correlations for Certain Hénon Maps
MICHAEL BENEDICKS & LAI-SANG YOUNG 13

Hénon maps for which the analysis in [BC2] applies are considered. Sets with good hyperbolic properties and nice return structures are constructed and their return time functions are shown to have exponentially decaying tails. This sets the stage for applying the results in [Y]. Statistical properties such as exponential decay of correlations and central limit theorem are proved.

Complex foliations with algebraic limit sets
CÉSAR CAMACHO & BRUNO AZEVEDO SCÁRDUA 57

We regard the problem of classification for complex projective foliations with algebraic limit sets and prove the following :

Let \mathcal{F} be a holomorphic foliation by curves in the complex projective plane $\mathbf{CP}(2)$ having as limit set some singularities and an algebraic curve $\Lambda \subset \mathbf{CP}(2)$. If the singularities $\text{sing}\mathcal{F} \cap \Lambda$ are generic then either \mathcal{F} is given by a closed rational 1-form or it is a rational pull-back of a Riccati foliation $\mathcal{R} : p(x)dy - (a(x)y^2 + b(x)y)dx = 0$, where Λ corresponds to $(y = 0) \cup (\overline{p(x)} = 0)$, on $\overline{\mathbf{C}} \times \overline{\mathbf{C}}$.

The proof is based on the solvability of the generalized holonomy groups associated to a reduction process of the singularities $\text{sing}\mathcal{F} \cap \Lambda$ and the construction of an affine transverse structure for \mathcal{F} outside an algebraic curve containing Λ .

Une caractérisation des stades à virages circulaires
ALBERT FATHI 89

We give a lower bound for the volume of a compact convex domain in a Euclidean space with boundary of class $C^{1,1}$. We characterize the equality case.

Asymptotic Measures for Hyperbolic Piecewise Smooth Mappings of a Rectangle
 MICHAEL JAKOBSON & SHELDON NEWHOUSE 103

We prove the existence of Sinai-Ruelle-Bowen measures for a class of C^2 self-mappings of a rectangle with unbounded derivatives. The results can be regarded as a generalization of a well-known one dimensional Folklore Theorem on the existence of absolutely continuous invariant measures. In an earlier paper [8] analogous results were stated and the proofs were sketched for the case of invertible systems. Here we give complete proofs in the more general case of noninvertible systems, and, in particular, develop the theory of stable and unstable manifolds for maps with unbounded derivatives.

Total disconnectedness of Julia sets and absence of invariant linefields for real polynomials
 GENADI LEVIN & SEBASTIAN VAN STRIEN 161

In this paper we shall consider real polynomials with one (possibly degenerate) non-escaping critical (folding) point. Necessary and sufficient conditions are given for the total disconnectedness of the Julia set of such polynomials. Also we prove that the Julia sets of such polynomials do not carry invariant linefields. In the real case, this generalises the results by Branner and Hubbard for cubic polynomials and by McMullen on absence of invariant linefields.

Dynamics of quadratic polynomials, III Parapuzzle and SBR measures
 MIKHAIL LYUBICH 173

This is a continuation of notes on the dynamics of quadratic polynomials. In this part we transfer our previous geometric result [L3] to the parameter plane. To any parameter value c (outside the main cardioid and the little Mandelbrot sets attached to it) we associate a “principal nest of parapuzzle pieces”. We then prove that the moduli of the annuli between two consecutive pieces grow at least linearly. This implies, using Martens & Nowicki (*cf.* this volume) geometric criterion for existence of an absolutely continuous invariant measure together with [L2], that Lebesgue almost every real quadratic polynomial is either hyperbolic, or has a finite absolutely continuous invariant measure, or is infinitely renormalizable. In the further papers [L5,L7] we show that the latter set has zero Lebesgue measure, which completes the measure-theoretic picture of the dynamics in the real quadratic family.

Positive Lyapunov exponents for Lorenz-like families with criticalities
 STEFANO LUZZATTO & MARCELO VIANA 201

We introduce a class of one-parameter families of real maps extending the classical geometric Lorenz models. These families combine singular dynamics (discontinuities with infinite derivative) with critical dynamics (critical points) and are based on the behaviour displayed by Lorenz flows over a fairly wide range of parameters. Our main result states that – nonuniform – expansion is the prevalent form of dynamics even after the formation of the criticalities.

Invariant Measures for Typical Quadratic Maps

MARCO MARTENS & TOMASZ NOWICKI 239

A sufficient geometrical condition for the existence of absolutely continuous invariant probability measures for S -unimodal maps will be discussed. The Lebesgue typical existence of Sinai-Bowen-Ruelle-measures in the quadratic family will be a consequence.

Quasi-homogénéité et équiréductibilité de feuilletages holomorphes en dimension deux

JEAN-FRANÇOIS MATTEI 253

We study the analytic dependance of separatrices for an equisingular family of germs of holomorphic foliation at the origin of \mathbb{C}^2 . We define the quasi-homogeneity by a rigidity property. We obtain a K. Saito type Theorem for quasi-homogeneous foliations and a of Briançon-Skoda type Theorem in the general case.

Periodic Orbits, External Rays and the Mandelbrot Set : An Expository Account

JOHN MILNOR 277

A presentation of some fundamental results from the Douady-Hubbard theory of the Mandelbrot set, based on the idea of "orbit portrait" : the pattern of external rays landing on a periodic orbit for a quadratic polynomial map.

A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors

JACOB PALIS 335

A view on dissipative dynamics, i.e. flows, diffeomorphisms, and transformations in general of a compact boundaryless manifold or the interval is presented here, including several recent results, open problems and conjectures. It culminates with a conjecture on the denseness of systems having only finitely many attractors, the attractors being sensitive to initial conditions (chaotic) or just periodic sinks and the union of their basins of attraction having total probability. Moreover, the attractors should be stochastically stable in their basins of attraction. This formulation, dating from early 1995, sets the scenario for the understanding of most nearby systems in parametrized form. It can be considered as a probabilistic version of the once considered possible existence of an open and dense subset of systems with dynamically stable structures, a dream of the sixties that evaporated by the end of that decade. The collapse of such a previous conjecture excluded the case of one dimensional dynamics : it is true at least for real quadratic maps of the interval as shown independently by Swiatek, with the help of Graczyk [GS], and Lyubich [Ly1] a few years ago. Recently, Kozlovski [Ko] announced the same result for C^3 unimodal mappings, in a meeting at IMPA. Actually, for one-dimensional real or complex dynamics, our main conjecture goes even further : for most values of parameters, the corresponding dynamical system displays finitely many attractors which are periodic sinks or carry an absolutely continuous invariant probability measure.

Remarkably, Lyubich [Ly2] has just proved this for the family of real quadratic maps of the interval, with the help of Martens and Nowicki [MN].

Rational maps with disconnected Julia set

KEVIN PILGRIM & TAN LEI 349

We show that if f is a hyperbolic rational map with disconnected Julia set \mathcal{J} , then with the possible exception of finitely many periodic components of \mathcal{J} and their countable collection of preimages, every connected component of \mathcal{J} is a point or a Jordan curve. As a corollary, every component of \mathcal{J} is locally connected. We also discuss when a Jordan curve Julia component is a quasicircle and give an explicit example of a hyperbolic rational map with a Jordan curve Julia component which is not a quasicircle.

Hölder implies Collet-Eckmann

FELIKS PRZYTYCKI 385

We prove that for every polynomial f if its basin of attraction to ∞ is Hölder and Julia set contains only one critical point c then f is Collet-Eckmann, namely there exists $\lambda > 1, C > 0$ such that, for every $n \geq 0, |(f^n)'(f(c))| \geq C\lambda^n$. We introduce also *topological Collet-Eckmann rational maps* and *repellers*.

Rational Parameter Rays of the Mandelbrot Set

DIERK SCHLEICHER 405

We give a new proof that all external rays of the Mandelbrot set at rational angles land, and of the relation between the external angle of such a ray and the dynamics at the landing point. Our proof is different from the original one, given by Douady and Hubbard and refined by P. Lavaurs, in several ways : it replaces analytic arguments by combinatorial ones ; it does not use complex analytic dependence of the polynomials with respect to parameters and can thus be made to apply for non-complex analytic parameter spaces ; this proof is also technically simpler. Finally, we derive several corollaries about hyperbolic components of the Mandelbrot set.

Along the way, we introduce partitions of dynamical and parameter planes which are of independent interest, and we interpret the Mandelbrot set as a symbolic parameter space of kneading sequences and internal addresses.

PRÉFACE

Le colloque « Géométrie complexe et Systèmes dynamiques » s'est tenu à Orsay du 3 au 8 juillet 1995. Organisé en l'honneur d'Adrien Douady, à l'occasion de son soixantième anniversaire, il a réuni environ 250 participants.

Elève d'Henri Cartan, Adrien Douady a d'abord consacré ses recherches à la géométrie analytique : la structure analytique universelle sur l'ensemble des sous-espaces analytiques fermés d'un espace analytique compact, la déformation universelle d'un espace analytique, le principe « platitude et privilège » sont les points saillants de ce premier versant de son œuvre mathématique. Vient ensuite une période intermédiaire où ses intérêts sont très divers : densité des formes de Strebel, dimension des attracteurs (avec J. Oesterlé), théorème de Manin-Drinfeld...

À partir de 1980 s'ouvre l'époque de la dynamique holomorphe. L'étude de l'itération des fractions rationnelles initiée par Pierre Fatou et Gaston Julia au début du siècle était tombée en désuétude jusqu'à la fin des années soixante. C'est alors que les expériences numériques, rendues possibles par la puissance des ordinateurs, vont provoquer un extraordinaire regain d'activité dans cette direction, qui jusqu'à aujourd'hui ne s'est pas démenti. Sur le plan théorique, ce sont les résultats fondamentaux de D. Sullivan d'une part, de A. Douady et J. Hubbard d'autre part, qui vont ouvrir la voie.

La théorie des applications à allure polynomiale fournit le cadre naturel qui assure la flexibilité nécessaire à l'étude de l'itération des polynômes. Les techniques de chirurgie holomorphe ont permis de belles avancées. La description combinatoire, par rayons externes et équipotentielles, des ensembles de Julia et de l'ensemble de Mandelbrot recèle une puissance impressionnante et une harmonie magique.

Le présent volume ne prétend pas être un reflet fidèle du colloque d'Orsay. Certains auteurs n'avaient pu être présents, d'autres ont écrit sur un sujet différent de leur exposé oral. Si la dynamique holomorphe est très présente, d'autres domaines extrêmement actifs à l'heure actuelle (dynamique non-uniformément hyperbolique, feuilletages...) y apparaissent, l'ensemble reflétant la richesse, l'unité et la diversité des recherches contemporaines sur les systèmes dynamiques.