

# *Astérisque*

JEAN-PIERRE LABESSE

**Cohomologie, stabilisation et changement de base**

*Astérisque*, tome 257 (1999), p. I-116

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1999\\_\\_257\\_\\_R1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1999__257__R1_0)

© Société mathématique de France, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ASTÉRISQUE 257

**COHOMOLOGIE, STABILISATION ET  
CHANGEMENT DE BASE**

**Jean-Pierre Labesse**

*Avec deux appendices :*

**Changement de base pour les représentations  
cohomologiques de certains groupes unitaires**

**Laurent Clozel et Jean-Pierre Labesse**

**Ensembles croisés et algèbre simpliciale**

**Lawrence Breen**

**Société Mathématique de France 1999**

*Jean-Pierre Labesse*

Institut de Mathématiques, UMR 7586, Théorie des Groupes,  
Université Paris 7, Case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05.

*E-mail* : labesse@math.jussieu.fr

*Laurent Clozel*

Université Paris-sud, Département de Mathématiques, Bâtiment 425,  
91405 Orsay Cedex.

*E-mail* : clozel@math.u-psud.fr

*Lawrence Breen*

Université Paris XIII, Institut Galilée, Avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse.

*E-mail* : breen@math.univ-paris13.fr

---

**Classification mathématique par sujets (1991).** — 11F70, 11F72, 11E72, 11F75, 11R34, 11R39 18G30, 22E55.

**Mots clefs.** — Représentations automorphes, formule des traces, changement de base, conjugaison stable, cohomologie non-abélienne, ensembles croisés.

---

# COHOMOLOGIE, STABILISATION ET CHANGEMENT DE BASE

Jean-Pierre Labesse

*suivi d'un appendice par*  
Laurent Clozel et Jean-Pierre Labesse

*et d'un appendice par* Lawrence Breen

**Résumé.** — Dans le texte principal de ce volume nous introduisons la notion d'ensemble croisé (qui généralise celle de module croisé) et nous étudions la cohomologie galoisienne de ces objets. Ces considérations cohomologiques sont la clef de la stabilisation de tous les termes elliptiques de la formule des traces tordue. Puis nous prouvons l'existence du transfert endoscopique stable dans le cas du changement de base cyclique. Nous déduisons d'une stabilisation conditionnelle de la formule des traces tordue l'existence du changement de base faible (descente et relèvement) dans certains cas, en particulier pour les représentations automorphes, sur les groupes semi-simples simplement connexes, qui sont de Steinberg en deux places finies. Un appendice co-signé avec L. Clozel, est consacré au cas de certains groupes unitaires. Dans un second appendice L. Breen replace la cohomologie des ensembles croisés dans le cadre de l'algèbre simpliciale.

**Abstract (Cohomology Stabilization and Base Change).** — In the main article of this volume we introduce the concept of a “crossed set” (a generalization of crossed modules) and we study the Galois cohomology of these objects. This is the key to the stabilization of all elliptic terms for the twisted trace formula. We then prove the existence of the stable transfer for cyclic base change. We deduce from a conditional stabilization of the twisted trace formula the existence of weak base change in some cases, in particular for automorphic representations on simply connected semi-simple groups which are Steinberg at two places. In an appendix by L. Clozel and myself, we study the case of certain unitary groups. In a second appendix L. Breen rephrases crossed sets in the framework of simplicial algebra.



## Table des matières

<b>Cohomologie, stabilisation et changement de base,</b> par J.-P. Labesse .....	1
<b>Introduction</b> .....	3
<b>1. Préliminaires cohomologiques</b> .....	9
1.1. Ensembles croisés et modules croisés .....	9
1.2. Cohomologie à valeurs dans un ensemble croisé .....	15
1.3. Cohomologie galoisienne .....	21
1.4. Cohomologie adélique .....	24
1.5. Un lemme sur les tores anisotropes .....	27
1.6. Cohomologie abélianisée d'un groupe réductif .....	28
1.7. Retour sur quelques résultats de Kottwitz .....	37
1.8. Abélianisation de complexes de groupes réductifs .....	40
1.9. Sous-groupes elliptiques .....	44
<b>2. Conjugaison stable, intégrales orbitales et norme</b> .....	49
2.1. Groupes et automorphismes .....	49
2.2. Restriction des scalaires et algèbres cycliques .....	50
2.3. La conjugaison stable .....	52
2.4. Norme pour le changement de base .....	54
2.5. Image de la norme, cas local .....	58
2.6. Image de la norme, cas global .....	62
2.7. Intégrales orbitales et intégrales $\kappa$ -orbitales .....	67
<b>3. Transfert local</b> .....	71
3.1. Conjugaison au voisinage d'éléments semi-simples .....	71
3.2. Définition du transfert .....	76
3.3. Transfert aux places non-archimédiennes .....	78
3.4. Transfert aux places décomposées .....	81

3.5. Transfert $K$ -fini aux places archimédiennes	82
3.6. Transfert et représentations des séries principales	87
3.7. Transfert non-ramifié : le lemme fondamental	90
3.8. Fonctions cuspidales et stabilisantes	92
3.9. Transfert et représentation de Steinberg	92
<b>4. Stabilisation de la formule des traces et applications</b>	<b>97</b>
4.1. Partie elliptique de la formule des traces	97
4.2. Pré-stabilisation géométrique	98
4.3. Stabilisation conditionnelle pour le changement de base	101
4.4. Décomposition spectrale et forme simple de la formule des traces	104
4.5. Identité spectrale pour le changement de base	107
4.6. Changement de base automorphe	109
4.7. Existence de cohomologie cuspidale	112
<b>Bibliographie</b>	<b>113</b>
<b>Appendices</b>	<b>117</b>
<b>A. Changement de base pour les représentations cohomologiques de certains groupes unitaires</b> , par L. Clozel et J.-P. Labesse	<b>119</b>
Présentation	119
A.1. Fonctions de Lefschetz et d'Euler-Poincaré archimédiennes	119
A.2. Sur certains groupes unitaires	124
A.3. Comparaison des formules de traces	126
A.4. Un théorème de Kottwitz	128
A.5. Le théorème principal	130
<b>Bibliographie</b>	<b>133</b>
<b>B. Ensembles croisés et algèbre simpliciale</b> , par L. Breen	<b>135</b>
Introduction	135
B.1. Ensembles croisés et ensembles simpliciaux	137
B.2. Ensembles croisés et 2-catégories	142
B.3. Cohomologie galoisienne des ensembles croisés	146
B.4. Complexes de longueur $n$ et $n$ -catégories	151
<b>Bibliographie</b>	<b>159</b>

**Cohomologie, stabilisation et  
changement de base**

**J.-P. Labesse**





# INTRODUCTION

## Motivations

Soit  $G_0$  un groupe réductif connexe sur un corps de nombres  $F$ . Soit  $H$  la forme intérieure de  $G_0$  quasi-déployée. Soit  $E$  une algèbre cyclique de degré  $\ell$  sur  $F$ . Soit  $G$  la restriction des scalaires à la Weil de  $E$  à  $F$  de  $G_0$  :

$$G = \text{Res}_{E/F} G_0 .$$

Le résultat principal est un théorème de changement de base faible entre représentations automorphes pour  $H$  et  $G$ . Nous traiterons le cas d'un groupe réductif quelconque avec toutefois des limitations techniques : nous serons contraints d'imposer des hypothèses de cuspidalité et de stabilité qui simplifient suffisamment la comparaison des formules de traces. Nous pouvons par exemple prouver l'existence de functorialité par changement de base cyclique entre représentations automorphes cuspidales qui sont de Steinberg en deux places finies pour les groupes semi-simples et simplement connexes arbitraires.

Les restrictions que nous imposons sont, pour l'essentiel, le reflet de notre mauvaise connaissance du transfert endoscopique en général : nous ne disposons du lemme fondamental que pour le « changement de base stable ». La stabilisation complète de la formule des traces pose aussi des problèmes non résolus. Mais, même dans le cadre simplifié où nous nous plaçons, de longs préparatifs techniques sont nécessaires. Je vais tenter d'expliquer pourquoi.

## Considérations techniques

Nous utilisons une méthode désormais classique : la comparaison de deux formules des traces. Il y a sur ce sujet une littérature abondante lorsque  $G_0$  est une forme intérieure ou extérieure de  $GL(n)$  ; on citera, sans prétendre être exhaustif : [JL], [Lan1], [DKV], [AC], [Rog], [Lab3], [Clo3], [Clo4].

Pour un groupe réductif connexe arbitraire, on dispose déjà de nombreux résultats techniques. Le transfert des fonctions de  $G$  à  $H$  sur les corps locaux au voisinage d'éléments réguliers est facile et classique. Par ailleurs, on dispose aussi depuis longtemps du lemme fondamental 'stable' pour l'élément neutre de l'algèbre de Hecke aux places non ramifiées dû à Kottwitz [Ko3]. On dispose enfin de la stabilisation de la formule des traces tordue pour les éléments elliptiques réguliers, due à Kottwitz et Shelstad ([KS]). Ceci fournit, pour certaines paires de fonctions  $(\phi, f)$  qui se correspondent par le transfert, et pour lesquelles les groupes endoscopiques autres que  $H$  donnent une contribution nulle, une identité de formule des traces

$$I^G(\phi) = c I^H(f) .$$

L'annulation des contributions des autres groupes endoscopiques peut être obtenue en faisant appel à une technique également due à Kottwitz [Ko6] : on utilise comme fonctions en certaines places finies des pseudo-coefficients de représentations de Steinberg. Ces techniques ont, par exemple, été utilisées dans [Clo2] et [Lab1] pour la preuve (incomplète, cf. infra) du lemme fondamental pour le changement de base.

Mais nous allons voir que, pour le théorème de changement de base que nous voulons établir, les techniques évoquées ci-dessus semblent insuffisantes, principalement parce qu'elles ne donnent pas assez d'informations sur le lieu singulier. Il a été observé dans [Lab3] que, pour des groupes autres que  $GL(n)$ , une identité de formule des traces limitée aux paires de fonctions à support régulier en certaines places, semble insuffisante pour établir le changement de base : il manque des informations supplémentaires du type rigidité ou finitude a priori (cf. [Lab3, VI.6.2]), dont on dispose pour  $GL(n)$ , mais qui sont pour l'instant hors de portée pour les autres groupes. Ces informations supplémentaires sont utiles pour les raisons suivantes.

(a) Pour prouver l'existence de relèvements, il faut par exemple établir, qu'après « séparation des caractères infinitésimaux », le terme spectral de la formule des traces pour  $H$  ne s'annule pas identiquement sur la famille de fonctions  $f$  considérées. Sans résultat de finitude a priori, des arguments de positivité, faisant usage de fonctions de type positif, semblent indispensables.

(b) De même, pour la descente automorphe on doit prouver la non annulation de la formule des traces tordue pour  $G$ , après séparation des caractères infinitésimaux. Ici l'argument est l'indépendance linéaire des familles finies de caractères. Sans résultat de finitude a priori, là encore il n'est pas clair que l'on puisse se contenter des fonctions à support régulier.

Pour parer l'objection (a) nous travaillerons avec des fonctions de type positif approchant la mesure de Dirac, ce qui, du côté spectral, donne des termes tous positifs et assure la non nullité. Il conviendra donc de prouver le transfert inverse au moins pour des fonctions à support petit au voisinage de l'origine. La difficulté (b) est

surmontée si on dispose du transfert endoscopique pour des fonctions de support compact arbitraire, ce qui sera établi.

L'utilisation des fonctions élémentaires régulières en une place non ramifiée permet dans une certaine mesure de se contenter de la stabilisation des éléments réguliers dans la formule des traces. C'est le point de vue adopté dans [Lab1] et [Lab3]. Mais cela suppose de se limiter aux groupes de type adjoint. Pour éviter cette restriction, peu naturelle, nous avons besoin de la stabilisation de tous les termes elliptiques de la formule des traces tordue. Comme nous l'avons déjà rappelé, on dispose, dans le cas tordu, de la stabilisation des termes elliptiques fortement réguliers établie par Kottwitz et Shelstad dans [KS]. Cependant, les techniques utilisées ne s'étendent pas immédiatement au cas singulier, entre autre parce qu'elles reposent sur des propriétés de l'hypercohomologie des complexes de tores à deux termes  $[T \rightarrow U]$ . Or, on verra que, pour traiter le cas général, des complexes à trois termes  $[S \rightarrow T \rightarrow U]$  sont indispensables. Il était aussi utile de systématiser des considérations de cohomologie non abélienne. Cela nous a contraint à reprendre l'ensemble de la stabilisation.

### Structure de l'article

Un premier chapitre est consacré à des sorites cohomologiques. Nous espérons convaincre le lecteur que le formalisme cohomologique que nous introduisons est le cadre naturel de l'étude géométrique de l'endoscopie, c'est-à-dire de la conjugaison stable. La notion d'abélianisation, dégagée par Borovoi dans [Bo1], était déjà présente dans les travaux de Deligne [D] et chez Kottwitz ([Ko4] et [Ko5]), quoique sous un déguisement peu transparent. Cette notion s'avère très commode pour traiter de questions relatives à la cohomologie des groupes réductifs généraux tout en gardant le bénéfice de théorèmes sur les groupes semi-simples et simplement connexes, comme par exemple ceux de Kneser. La méthode de construction la plus naturelle, et la plus générale, fait appel au module croisé

$$[G_{SC} \rightarrow G].$$

L'utilisation de ce module croisé m'avait été suggérée par Breen dès 1990. Cette approche a d'ailleurs été choisie, sous l'influence de Breen, dans [Bo2] et reprise dans [Bo3] et [Mi2]. Mais l'abélianisation de la cohomologie d'un groupe réductif ne suffit pas à notre propos car, par exemple, la conjugaison stable fait intervenir des complexes de groupes réductifs et, comme nous le verrons, les caractères endoscopiques sont les caractères des groupes de cohomologie abélianisée de ces complexes de groupes. Pour définir de tels objets nous avons été amenés à introduire une variante à paramètre de la notion de module croisé que nous appellerons ensemble croisé (les ensembles croisés sont des 2-groupoïdes d'un type particulier) et à étudier la cohomologie galoisienne de ces objets. Cela permettra, aux paragraphes suivants, de donner des définitions naturelles des groupes et ensembles intervenant dans la stabilisation des termes elliptiques de la formule des traces tordue, et des preuves simples de leurs propriétés,

en évitant presque totalement de faire appel aux dualités de Poitou-Tate et de Tate-Nakayama (qui jouent un rôle essentiel chez Langlands dans [Lan2] et chez Kottwitz qui définissait les abélianisés par une double dualité, alors qu'ici nous n'invoquerons Tate-Nakayama qu'en deux occasions dont l'une sert simplement à faire la comparaison avec les résultats de Kottwitz!) et limitera le recours aux  $z$ -extensions.

Dans un second chapitre nous étudions la conjugaison stable et la norme pour le changement de base. Nous rappelons tout d'abord la définition de la norme et le théorème d'existence qui est dû à Kottwitz [Ko1]. Nous établissons ensuite la proposition 2.5.2 qui, quoique pour l'essentiel connue de Kottwitz (communication orale), est publiée pour la première fois ici. Cette proposition montre que, sur un corps local, les éléments elliptiques sont des normes pourvu que leur image dans l'abélianisé en soit une. Nous donnons ensuite la construction de l'obstruction qui permet de tester si un élément adélique qui est localement partout une norme est une norme 'globale' i.e. la norme d'un élément rationnel. Nous suivons pour cela la méthode utilisée par Kottwitz dans [Ko5] pour l'endoscopie ordinaire, que nous généralisons au cas du changement de base. L'utilisation des abélianisés pour des complexes de groupes se révèle essentielle. Nous définissons enfin les intégrales  $\kappa$ -orbitales.

Dans un troisième chapitre nous étudions le transfert des fonctions lisses sur  $G(F)$  où  $F$  est un corps local, vers  $H(F)$ . Le résultat principal de cette partie est la preuve de l'existence de ce transfert (3.3.1), ainsi que du transfert réciproque pour les fonctions à support assez petit au voisinage de l'origine (3.3.2). Cette preuve repose, pour les corps non-archimédiens, sur la méthode de descente aux centralisateurs, basée sur le fait suivant (proposition 3.1.7) : les intégrales orbitales stables pour une fonction de support petit au voisinage d'un élément semi-simple sont celles d'une fonction sur le centralisateur de cet élément, au voisinage de l'identité. Comme les centralisateurs d'éléments qui se correspondent via la norme sont des formes intérieures d'un même groupe réductif, on invoque alors l'existence du transfert entre formes intérieures dû à Waldspurger pour les groupes  $\mathfrak{p}$ -adiques. Pour les corps archimédiens le résultat de descente 3.1.7 est aussi valable, mais ce type de technique ne respecte pas la  $K$ -finitude dont nous aurons besoin pour séparer les caractères infinitésimaux au moyen de multiplicateurs d'Arthur. Nous déduirons le transfert  $K$ -fini aux places archimédiennes des théorèmes de Paley-Wiener scalaires dus à Clozel et Delorme, compte tenu de travaux antérieurs de Shelstad et de Clozel. Nous montrons aussi comment contrôler les séries principales non-ramifiées même dans le cas d'une extension ramifiée. La proposition 2.5.2 permet de vérifier que la représentation de Steinberg a pour changement de base la représentation de Steinberg. Elle permet aussi de compléter la preuve du lemme fondamental pour le changement de base (proposition 3.7.2).

Dans un quatrième chapitre nous étudions la stabilisation de la formule des traces tordue. La stabilisation complète n'est pas connue en général, mais une stabilisation

partielle des termes géométriques a été établie dans divers cas particuliers : pour les termes elliptiques réguliers de la formule des traces ordinaire (non tordue) la stabilisation est due à Langlands [Lan2] et a été étendue à tous les éléments elliptiques par Kottwitz dans [Ko5] ; pour la formule des traces tordue la stabilisation des éléments fortement réguliers est due à Kottwitz et Shelstad [KS]. Nous effectuons la stabilisation de tous les termes elliptiques de la formule des traces tordue dans le cas du changement de base. Toutefois nous n'achevons la stabilisation de la formule des traces que sous des hypothèses impliquant que seuls les termes elliptiques contribuent, et que seul intervienne le groupe endoscopique  $H$  qui est attaché au caractère endoscopique trivial  $\kappa = 1$ . Pour cela, on impose que les fonctions annulent les intégrales orbitales des éléments non elliptiques ainsi que toutes les intégrales  $\kappa$ -orbitales si  $\kappa \neq 1$ . Nous exploitons ensuite l'identité de formules des traces issue de la stabilisation. On obtient une identité spectrale qui permet d'établir dans certains cas l'existence de fonctorialités. Nous n'énonçons dans cette introduction les résultats que dans un cas simple ; nous renvoyons au corps de l'article pour des énoncés plus généraux faisant intervenir un ensemble de places  $(G^*, H)$ -essentiel. Si  $G_0$  est semi-simple et simplement connexe, et si nous supposons que les représentations sont de Steinberg en deux places finies, nous obtiendrons en 4.6.1, un résultat de descente de  $G$  à  $H$  par changement de base faible (i.e. compatible presque partout avec le changement de base local). Si de plus le groupe  $G_0$  est quasi-déployé nous prouverons en 4.6.2 un théorème de relèvement de  $H$  à  $G$ . Ce résultat, qui était la motivation première pour la rédaction de cet article, permet la généralisation, à tous les groupes quasi-simples, simplement connexes et déployés, du théorème de [BLS] sur l'existence de cohomologie cuspidale (4.7.1).

### Commentaires et perspectives

De nombreuses versions préliminaires de ce texte ont circulé sous le titre : « Changement de base conditionnel pour les groupes réductifs ». Le texte s'est progressivement enrichi, et les centres d'intérêts principaux se sont déplacés au point qu'il a paru souhaitable de changer le titre.

Nous nous sommes efforcés de traiter dans les premières sections la situation la plus générale, et en particulier nous avons tenté d'introduire les objets cohomologiques dans la généralité qui semble nécessaire pour la stabilisation de tous les termes elliptiques de la formule des traces tordue par un automorphisme presque-semi-simple arbitraire. C'est la raison pour laquelle nous avons introduit la notion de groupe réductif quasi-connexe ; en effet, si les centralisateurs « stables » ne sont pas toujours connexes ils sont au moins quasi-connexes. Les groupes quasi-connexes ne sont pas utiles pour le cas du changement de base car, dans ce cas, les centralisateurs stables sont connexes. Nous espérons revenir prochainement sur le cas général.

Nous avons progressivement abandonné cette généralité ; en particulier, la définition de la norme n'a été donnée que pour un seul groupe endoscopique dans le cadre du

changement de base, et a fortiori dans les applications. Nous n'avons pas tenté de faire intervenir les autres groupes endoscopiques (ni d'autres automorphismes que ceux issus du changement de base cyclique), car cela supposerait, pour être utilisable, de disposer pour de telles situations endoscopiques du lemme fondamental ce qui, en général, semble pour l'instant hors de portée.

### **Remerciements**

Je tiens à remercier Lawrence Breen, Laurent Clozel, Michael Harris, Guy Henniart, Robert Kottwitz et Richard Taylor pour leur remarques et suggestions, ainsi que Günter Harder et Christian Kaiser pour m'avoir signalé une erreur dans une version préliminaire de cet article, et enfin le rapporteur qui m'a permis de corriger, outre quelques lapsus fâcheux, une définition incorrecte de la cohomologie adélique pour les groupes réductifs quasi-connexes non connexes.

# CHAPITRE 1

## PRÉLIMINAIRES COHOMOLOGIQUES

On peut associer aux groupes réductifs connexes, de façon fonctorielle, des groupes de cohomologie galoisienne « abélianisée ». Les groupes de cohomologie abélianisée d'un groupe  $G$  réductif connexe ont été introduits par divers auteurs ([D], [Bo1], [Mi2]). Comme cela avait déjà été observé par Borovoi, on retrouve ainsi, de façon directe, des constructions faites par Kottwitz par double dualité dans [Ko4] et [Ko5] et qui sont essentielles dans l'étude de la conjugaison stable. La cohomologie abélianisée peut se construire au moyen de l'hypercohomologie à valeurs dans des complexes de longueur 1, d'un type particulier, appelés modules croisés. Le concept de module croisé, dû à J.H.C. Whitehead, est un cas particulier d'objets étudiés notamment par Breen (voir par exemple [Br1]) Conduché et Loday. Cela ne sera pas suffisant pour nos besoins ; par exemple pour abélianiser la cohomologie de certains complexes de groupes réductifs, nous sommes amenés à introduire des objets, que nous baptiserons ensembles croisés, qui ne semblent pas avoir été décrits dans la littérature. La structure de module croisé apparaîtra comme un cas particulier de la notion d'ensemble croisé.

Dans toute la suite, sauf mention expresse du contraire, les complexes seront placés en degrés homologiques positifs ou nuls :

$$\cdots \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0$$

Nous noterons de la même façon la cohomologie et l'hypercohomologie en considérant les objets comme des complexes de longueur 0.

### 1.1. Ensembles croisés et modules croisés

Soient  $A$  un groupe et  $X$  un ensemble topologiques. On appelle action de  $A$  sur  $X$  la donnée d'une application continue

$$\begin{aligned} A \times X &\rightarrow X \\ (a, x) &\mapsto \lambda(a) * x, \end{aligned}$$



qui définit un homomorphisme

$$A \rightarrow \text{Bij}(X)$$

du groupe  $A$  dans le groupe des bijections de  $X$  sur lui-même. On utilisera souvent le symbole

$$A \rightrightarrows X$$

pour représenter une action de  $A$  sur  $X$ . On notera  $A_x$  le stabilisateur de  $x \in X$ .

Dans la suite les actions  $A \rightrightarrows X$  seront souvent de la forme suivante : l'ensemble  $X$  est un groupe, on dispose d'un couple d'homomorphismes  $(f, g)$  de  $A$  dans  $X$  et on définit une action  $\lambda$  par

$$\lambda(a) * x = f(a) x g(a)^{-1} .$$

Par exemple, lorsque  $A = X$  agit sur lui-même par conjugaison on a  $f = g = id_X$ . Lorsque l'action de  $A$  sur  $X$  est définie au moyen de la translation à gauche via un homomorphisme  $f$  on écrira parfois  $A \rightarrow X$  au lieu de  $A \rightrightarrows X$ . C'est le cas particulier de l'action définie au moyen d'un couple  $(f, g)$  avec pour  $g$  l'homomorphisme trivial.

**Définition 1.1.1.** — On appellera ensemble croisé la donnée d'un sextuple

$$\mathfrak{X} = (X, A, B, \lambda, \mu, \rho)$$

formé d'un ensemble  $X$  (appelé base de l'ensemble croisé), d'un groupe  $A$  (appelé groupe de l'ensemble croisé), d'un ensemble  $B$  fibré en groupes au dessus de  $X$  (dont les fibres seront appelées fibres de l'ensemble croisé) munis de topologies et de trois flèches continues

$$\lambda : A \times X \rightarrow X, \quad \mu : A \times B \rightarrow B \quad \text{et} \quad \rho : B \rightarrow A \times X$$

telles que

- (i)  $A \times X \rightarrow X$  définit une action  $(a, x) \mapsto \lambda(a) * x$  de  $A$  sur  $X$ .
- (ii)  $A \times B \rightarrow B$  définit une action  $(a, b) \mapsto \mu(a) * b$  de  $A$  sur  $B$  compatible avec la structure de fibré en groupes de  $B$ , c'est-à-dire que  $\mu(a)$  définit un isomorphisme de  $B_x$  sur  $B_{\lambda(a)*x}$ .
- (iii) L'application  $\rho : B \rightarrow A \times X$  est un morphisme de fibrés en groupes au dessus de  $X$  (on munit  $A \times X$  de la structure de fibré trivial) : la restriction  $\rho_x$  de  $\rho$  à la fibre  $B_x$  de  $B$  au dessus de  $x \in X$  (appelée application fibre), est un homomorphisme de  $B_x$  dans  $A$ . On suppose de plus que l'image de  $\rho_x$  est incluse dans le stabilisateur  $A_x$  de  $x$  :

$$\rho_x(B_x) \subset A_x \subset A .$$

- (iv) On impose enfin les compatibilités suivantes : pour  $b$  et  $\beta$  dans  $B_x$  on demande que

$$\mu(\rho_x(\beta)) * b = \text{Ad}_{B_x}(\beta) b$$

et pour  $\alpha \in A$

$$\rho_{\lambda(\alpha)x}(\mu(\alpha) * b) = \text{Ad}_A(\alpha) \rho_x(b) .$$

Il résulte de (iv) que  $\rho_x(B_x)$  est un sous-groupe normal de  $A_x$  et que  $\ker \rho_x$ , le noyau de  $\rho_x$ , est un sous-groupe du centre de  $B_x$ . On écrira souvent

$$\mathfrak{X} = [B \rightarrow A \times X \rightarrow X]$$

mais on prendra garde que dans cette notation l'action  $\mu$  est sous-entendue. Lorsque le fibré  $B$  est un fibré trivial :

$$B = D \times X$$

au lieu de

$$[D \times X \rightarrow A \times X \rightarrow X]$$

on utilisera la notation

$$[D \xrightarrow[X]{} A \Rightarrow X]$$

qui se rapproche de la notation usuelle pour les complexes de longueur 2, et rappelle que pour tout  $x$  l'image de  $D$  est dans le « noyau » de l'action de  $A$  sur  $X$  :  $\rho_x(D)$  agit trivialement sur  $x$ . L'indice  $X$  sous la flèche rappelle qu'en général l'application  $\rho_x$  dépend du point  $x$  dans la base. Lorsque de plus l'application fibre  $\rho_x$  est indépendante de  $x$  :

$$\rho = \rho_0 \times \text{id}_X$$

on utilisera la notation

$$[D \rightarrow A \Rightarrow X].$$

On appellera « ensemble croisé en groupes » un ensemble croisé à fibré trivial dont la base  $X$  est un groupe, et tel que l'action du groupe  $A$  sur la base soit définie par un couple d'homomorphismes  $(f, g)$  de  $A$  dans  $X$ .

**Remarque.** — Nous avons adopté l'expression « ensemble croisé » faute d'une meilleure idée. Elle ne semble pas recouvrir de terminologie déjà usitée. Il s'agit d'un concept proche de celui, classique, de « module croisé » rappelé ci-dessous ; l'expression « complexe croisé » que nous avons utilisée dans une version antérieure de ce texte a été abandonnée car elle est déjà présente dans la littérature avec un contenu différent.

Soit

$$\mathfrak{X} = [B \rightarrow A \times X \rightarrow X]$$

un ensemble croisé. L'ensemble d'homotopie en degré 0 pour  $\mathfrak{X}$  est l'ensemble des orbites de  $A$  dans  $X$  :

$$\pi_0(\mathfrak{X}) := \lambda(A) \backslash X.$$

Les groupes d'homotopie en degré 1 sont les groupes

$$\pi_1(\mathfrak{X}, x) := \rho_x(B_x) \backslash A_x.$$

Les groupes d'homotopie en degré 2 sont les groupes abéliens

$$\pi_2(\mathfrak{X}, x) := \ker(\rho_x).$$

On définit de façon évidente les morphismes d'ensembles croisés. On appelle quasi-isomorphisme un morphisme qui induit des isomorphismes sur les ensembles et groupes d'homotopie, pour les points de base qui se correspondent.

Par exemple, si  $X = A = G$  est un groupe, l'action de  $G$  sur lui-même étant la conjugaison, et  $B$  étant l'union disjointe des centralisateurs  $G^x$  des  $x$  dans  $G$ , l'ensemble croisé

$$[\coprod_{x \in G} G^x \rightarrow G \times G \rightarrow G]$$

ainsi défini, est quasi-isomorphe à l'ensemble croisé

$$[1 \rightarrow 1 \rightarrow \mathcal{C}]$$

concentré en degré 0, défini par l'ensemble  $\mathcal{C}$  des classes de conjugaison dans  $G$ .

Un module croisé (cf. [Br1], [Bo3], ou [Mi2]) est un petit complexe de groupes

$$[B \rightarrow A]$$

où  $B$  est muni d'une action de  $A$ , qui donne naissance, par décalage, à un ensemble croisé en prenant pour base l'ensemble réduit à un point :

$$[B \rightarrow A \rightarrow \{\text{pt}\}] .$$

Dans un ensemble croisé, pour chaque  $x \in X$ , le petit complexe

$$[B_x \rightarrow A_x]$$

est un module croisé.

Certains des modules croisés  $[B \rightarrow A]$  que nous rencontrerons seront du type très particulier suivant : l'application  $\rho$  de  $B$  dans  $A$  envoie le centre  $Z_B$  de  $B$  dans le centre  $Z_A$  de  $A$  et, par passage au quotient, induit un isomorphisme  $\dot{\rho}$  entre groupes d'automorphismes intérieurs

$$\dot{\rho} : \text{Int}(B) \rightarrow \text{Int}(A) ;$$

l'action de  $A$  sur  $B$  est définie en inversant cette flèche. On a un quasi-isomorphisme :

$$[Z_B \rightarrow Z_A] \rightarrow [B \rightarrow A] .$$

De tels modules croisés seront dits super-stables ; ils sont en particulier stables au sens de [Co].

Les morphismes de modules croisés permettent de définir des ensembles croisés comme suit : Soient  $X, Y, C$  et  $D$  des groupes avec des actions  $\xi$  de  $X$  sur  $Y$ ,  $\nu$  de  $C$  sur  $D$  et des morphismes

$$p_X : Y \rightarrow X \quad \text{et} \quad p_C : D \rightarrow C$$

définissant deux modules croisés

$$\mathfrak{M}_0 = [Y \rightarrow X] \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}_1 = [D \rightarrow C] .$$

On suppose donné une paire de morphismes  $(f, \tilde{f})$  donnant naissance à un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \\ \downarrow p_C & & \downarrow p_X \\ C & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

qui entrelace les actions de  $C$  sur  $D$  et de  $X$  sur  $Y$ , c'est-à-dire que la paire  $(f, \tilde{f})$  définit un morphisme de modules croisés

$$\mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_0 .$$

L'action de  $X$  sur  $Y$  composée avec  $f$  définit une action de  $C$  sur  $Y$  ; on note  $A$  le groupe produit semi-direct :

$$A = C \ltimes Y$$

$$(c, y) = (c, 1)(1, y) = (1, \xi(f(c)) * y)(c, 1) .$$

Supposons que l'on dispose d'un autre diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\tilde{g}} & Y \\ \downarrow p_C & & \downarrow p_X \\ C & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

définissant aussi un morphisme  $(g, \tilde{g})$  de modules croisés. On définit des actions de  $A$  sur  $X$  et sur  $B = D \times X$  en posant, pour  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ,  $c \in C$  et  $d \in D$  :

$$\lambda(c, y) * x = f(c) p_X(y) x g(c)^{-1} \quad \text{et} \quad \mu((c, y)) * (d, x) = (\nu(c) * d, \lambda(c, y) * x)$$

et pour chaque  $x$  une flèche  $\rho_x$  de  $B_x$  dans  $A$  :

$$\rho_x(d) = (p_C(d), r_x(d)) \quad \text{avec} \quad r_x(d) = \tilde{f}(d)^{-1} \cdot \xi(x) * \tilde{g}(d) .$$

On voit que

$$\lambda(\rho_x(d)) * x = x$$

et comme

$$r_x(d_1 d_2) = \tilde{f}(d_1 d_2)^{-1} \cdot \xi(x) * \tilde{g}(d_1 d_2) = \tilde{f}(d_2)^{-1} \cdot r_x(d_1) \cdot \tilde{f}(d_2) \cdot r_x(d_2)$$

soit encore

$$r_x(d_1 d_2) = \xi(f(p_C(d))) * r_x(d_1) \cdot r_x(d_2)$$

on voit que  $\rho_x$  est un homomorphisme. On laissera au lecteur le soin de vérifier les compatibilités entre  $\mu$  et les actions adjointes. On a ainsi défini un ensemble croisé :

$$\mathfrak{X} = [D \xrightarrow{X} A \Rightarrow X]$$

que nous noterons aussi

$$[\mathfrak{M}_1 \Rightarrow \mathfrak{M}_0] .$$

On peut décrire l'homotopie de  $\mathfrak{X}$  au moyen de celle des deux modules croisés. L'ensemble  $\pi_0(\mathfrak{X})$  est le quotient de  $\pi_0(\mathfrak{M}_0)$  sous l'action de  $\pi_0(\mathfrak{M}_1)$  définie par  $f$  et  $g$ .

Considérons  $x \in X$ . Notons  $\pi_0(\mathfrak{M}_1)_x$  le stabilisateur de l'image de  $x$  dans  $\pi_0(\mathfrak{M}_0)$ , sous l'action de  $\pi_0(\mathfrak{M}_1)$ . Le groupe  $\pi_1(\mathfrak{X}, x)$  s'insère dans une suite exacte :

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathfrak{M}_0, x) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{X}, x) \rightarrow \pi_0(\mathfrak{M}_1)_x \rightarrow 1$$

Enfin, soit

$$\bar{r}_x : \pi_1(\mathfrak{M}_1, 1) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{M}_0, 1)$$

la restriction de l'application  $r_x$  à  $\pi_1(\mathfrak{M}_1, 1)$  ; c'est un homomorphisme et

$$\pi_2(\mathfrak{X}, x) = \ker \bar{r}_x .$$

**Lemme 1.1.2.** — *Supposons que l'on dispose de deux modules croisés  $\mathfrak{M}'_0$  et  $\mathfrak{M}'_1$ , d'un ensemble croisé*

$$\mathfrak{X}' = [\mathfrak{M}'_1 \Rightarrow \mathfrak{M}'_0]$$

*comme ci-dessus, et de morphismes de modules croisés*

$$\mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}'_1, \quad \mathfrak{M}_0 \rightarrow \mathfrak{M}'_0$$

*induisant un morphisme d'ensemble croisé :*

$$\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}' .$$

*Si les deux morphismes de modules croisés ci-dessus sont des quasi-isomorphismes alors les ensembles croisés  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{X}'$  sont quasi-isomorphes.*

*Démonstration.* — C'est une conséquence immédiate de la description de l'homotopie de  $\mathfrak{X}$  en terme de celle des  $\mathfrak{M}_i$ . □

**Remarque.** — On prendra garde au fait suivant : les modules croisés super-stables, sont des ensembles croisés dont l'homotopie est abélienne, mais un morphisme de modules croisés super-stables, définit un ensemble croisé dont l'homotopie n'est pas nécessairement abélienne comme le montre l'exemple ci-dessous. On se place sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Le module croisé

$$\mathfrak{M}_0 = [SL(2) \rightarrow PGL(2)]$$

est super-stable : il est quasi-isomorphe à

$$[\mu_2 \rightarrow 1]$$

où  $\mu_2$  est le groupe des racines carrées de 1. Le module croisé

$$\mathfrak{M}_1 = [1 \rightarrow C] \quad \text{avec} \quad C = \mu_2 \times \mu_2$$

est évidemment super-stable. On définit un homomorphisme

$$\phi : C \rightarrow PGL(2)$$

en posant

$$\phi(-1, 1) \equiv \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi(1, -1) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\lambda' \\ \lambda' & 0 \end{pmatrix}$$

les congruences étant modulo le centre de  $GL(2)$ . On considère l'ensemble croisé

$$\mathfrak{X} = [1 \rightarrow C \times SL(2) \Rightarrow PGL(2)] = [\mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_0].$$

Le groupe  $\pi_1(\mathfrak{X}, 1)$ , qui est l'image réciproque de  $\phi(C)$  dans  $SL(2)$ , est un groupe d'ordre 8 non abélien extension centrale de  $C$  par  $\mu_2$  :

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \pi_1(\mathfrak{X}, 1) \rightarrow C \rightarrow 1.$$

## 1.2. Cohomologie à valeurs dans un ensemble croisé

On considère maintenant un ensemble croisé

$$\mathfrak{X} = [B \rightarrow A \times X \rightarrow X]$$

muni d'une action continue d'un groupe  $\Gamma$ , c'est-à-dire que l'ensemble de base  $X$ , le groupe  $A$  et le fibré  $B$  sont munis d'une action continue de  $\Gamma$ , compatible aux structures de groupes sur  $A$ , de fibré en groupes sur  $B$  et qui commute aux diverses flèches. Les formules que nous allons donner, définissant les cocycles en cohomologie galoisienne pour les ensembles croisés, ne surprendront pas les spécialistes de cohomologie non abélienne : elles généralisent les formules utilisées pour définir ce qu'il était convenu d'appeler le  $\mathbf{H}^2$  non abélien (cf. par exemple [Spr]). Elles sont désormais classiques pour les modules croisés ([Bo3] [Mi2]).

On appelle 0-cochaîne à valeurs dans cet ensemble croisé, un triplet de cochaînes continues  $(x, a, b)$  à valeurs dans  $X$ ,  $A$  et  $B_x$ , en degrés 0, 1 et 2 respectivement. On dit qu'une 0-cochaîne  $(x, a, b)$  est un 0-cocycle si pour tout triplet  $\sigma, \tau$  et  $\nu \in \Gamma$  :

$$\lambda(a_\sigma) * \sigma(x) = x$$

$$\rho_x(b_{\sigma,\tau}) = \partial a_{\sigma,\tau} \quad \text{où} \quad \partial a_{\sigma,\tau} := a_\sigma \cdot \sigma(a_\tau) \cdot a_{\sigma\tau}^{-1}$$

et

$$\sigma_{\mu(a)}(b_{\tau,\nu}) \cdot b_{\sigma,\tau\nu} = b_{\sigma,\tau} \cdot b_{\sigma\tau,\nu} \quad \text{où} \quad \sigma_{\mu(a)}(b) := \mu(a_\sigma) * \sigma(b).$$

Considérons une cochaîne  $(x, a, b)$  et un couple  $(\alpha, \beta)$  formé d'une 0-cochaîne  $\alpha$  à valeurs dans  $A$  et d'une 1-cochaîne  $\beta$  à valeurs dans  $B_x$  ; on note

$$\xi(\alpha, \beta) * (x, a, b)$$

la cochaîne  $(x', a', b')$  définie par

$$x' = \lambda(\alpha) * x, \quad a'_\sigma = \alpha(\rho_x(\beta_\sigma) a_\sigma) \sigma(\alpha)^{-1}$$

et

$$b'_{\sigma,\tau} = \mu(\alpha) * (\beta_\sigma \sigma_{\mu(a)}(\beta_\tau) b_{\sigma,\tau} \beta_{\sigma\tau}^{-1}).$$

On dira que deux cochaînes  $(x, a, b)$  et  $(x', a', b')$  sont cohomologues si il existe un couple  $(\alpha, \beta)$  avec

$$\xi(\alpha, \beta) * (x, a, b) = (x', a', b').$$

**Lemme 1.2.1.** — *C'est une relation d'équivalence dans l'ensemble des 0-cocycles.*

*Démonstration.* — On observe tout d'abord que

$$\xi(\alpha, \beta) = \xi(\alpha, 1)\xi(1, \beta) = \xi(1, \mu(\alpha) * \beta)\xi(\alpha, 1).$$

Il est clair que l'action des couples du type  $(\alpha, 1)$  est une action du groupe  $A$ . Pour  $x$  fixé, on vérifie que l'action des couples du type  $(1, \beta)$  est une action du groupe des 1-cochaînes à valeurs dans  $B_x$ ; en effet, si

$$b'_{\sigma, \tau} = \beta_\sigma \sigma_{\mu(a)}(\beta_\tau) b_{\sigma, \tau} \beta_{\sigma\tau}^{-1}$$

et si

$$b''_{\sigma, \tau} = \beta'_\sigma \sigma_{\mu(\beta a)}(\beta'_\tau) b'_{\sigma, \tau} \beta'_{\sigma\tau}{}^{-1}$$

alors

$$b''_{\sigma, \tau} = \beta'_\sigma (\beta_\sigma \sigma_{\mu(a)}(\beta'_\tau) \beta_\sigma^{-1}) (\beta_\sigma \sigma_{\mu(a)}(\beta_\tau) b_{\sigma, \tau} \beta_{\sigma\tau}^{-1}) \beta'_{\sigma\tau}{}^{-1}$$

et donc

$$b''_{\sigma, \tau} = (\beta'_\sigma \beta_\sigma) \sigma_{\mu(a)}(\beta'_\tau \beta_\tau) b_{\sigma, \tau} (\beta'_{\sigma\tau} \beta_{\sigma\tau})^{-1}.$$

On en déduit que c'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des 0-cochaînes. Pour montrer qu'elle préserve les cocycles il suffit de le prouver pour l'action des couples du type  $(\alpha, 1)$  et  $(1, \beta)$ . La vérification de ce fait est une suite de calculs sans surprise. Voici, à titre d'exemple, le calcul le moins immédiat. On suppose que

$$b'_{\sigma, \tau} = \beta_\sigma \sigma_{\mu(a)}(\beta_\tau) b_{\sigma, \tau} \beta_{\sigma\tau}^{-1}$$

et on veut vérifier que

$$\sigma_{\mu(a')} (b'_{\tau, \nu}) \cdot b'_{\sigma, \tau\nu} = b'_{\sigma, \tau} \cdot b'_{\sigma\tau, \nu}$$

avec  $a'_\sigma = \rho_x(\beta_\sigma) a_\sigma$ . On voit que

$$\sigma_{\mu(a')} (b'_{\tau, \nu}) \cdot b'_{\sigma, \tau\nu} = \beta_\sigma \sigma_{\mu(a)}(\beta_\tau) [\sigma_{\mu(a)} \tau_{\mu(a)}(\beta_\nu)] [\sigma_{\mu(a)}(b_{\tau, \nu}) b_{\sigma, \tau\nu}] \beta_{\sigma\tau\nu}^{-1}$$

Par ailleurs

$$b'_{\sigma, \tau} b'_{\sigma\tau, \nu} = \beta_\sigma \sigma_{\mu(a)}(\beta_\tau) b_{\sigma, \tau} [(\sigma\tau)_{\mu(a)}(\beta_\nu)] b_{\sigma, \tau\nu} \beta_{\sigma\tau\nu}^{-1}.$$

Comme

$$\sigma_{\mu(a)}(b_{\tau, \nu}) \cdot b_{\sigma, \tau\nu} = b_{\sigma, \tau} \cdot b_{\sigma\tau, \nu},$$

il suffit de prouver que pour tout  $\beta \in B$

$$\sigma_{\mu(a)} \tau_{\mu(a)}(\beta) = \text{Ad}(b_{\sigma, \tau}) * [(\sigma\tau)_{\mu(a)}(\beta)]$$

ce qui revient à montrer que

$$\text{Ad}(b_{\sigma, \tau}) = \mu(\partial a_{\sigma, \tau})$$

mais ceci résulte de ce que  $\rho_x(b) = \partial a$ . □

On définit l'ensemble de 0-cohomologie

$$\mathbf{H}^0(\Gamma; \mathfrak{X}) = \mathbf{H}^0(\Gamma; B \rightarrow A \times X \rightarrow X)$$

comme le quotient de l'ensemble des 0-cocycles, par cette relation d'équivalence. On observera que l'on peut normaliser les cocycles représentant une classe de cohomologie.

Lorsque  $(X, e)$  est un  $\Gamma$ -ensemble pointé (c'est-à-dire que  $e \in X$  est  $\Gamma$ -invariant), l'ensemble de 0-cohomologie est un ensemble pointé par la classe de  $(e, 1_A, 1_B)$ . On peut alors également définir

$$\mathbf{H}^{-1}(\Gamma; \mathfrak{X}) := \mathbf{H}^0(\Gamma, 1 \rightarrow B_e \rightarrow A_e)$$

où

$$[1 \rightarrow B_e \rightarrow A_e]$$

est l'ensemble croisé obtenu en faisant agir  $B_e$  sur  $A_e$  par translation à gauche via  $\rho_e$ . C'est l'ensemble des classes de couples  $(a, b)$  avec  $a \in A_e$  et  $b$  une 1-cochaîne à valeurs dans  $B_e$  tels que

$$\rho_e(b_\sigma) = a \sigma(a)^{-1} \quad \text{et} \quad \partial b_{\sigma, \tau} = 1$$

modulo l'action de  $B_e$  : on fait agir  $\beta \in B_e$  par

$$a \mapsto \rho_e(\beta)a \quad \text{et} \quad b_\sigma \mapsto \beta b_\sigma \sigma(\beta)^{-1}.$$

On laissera au lecteur le soin de vérifier que c'est un groupe pour la loi induite par le produit :

$$(a, a') \mapsto a.a' \quad \text{et} \quad (b_\sigma, b'_\sigma) \mapsto b_\sigma \cdot \mu(\sigma(a)) * b'_\sigma.$$

Si, dans la définition de l'action de  $B_e$  sur  $A_e$ , on utilise la translation à droite au lieu de la translation à gauche, on obtient le groupe opposé. On dispose enfin du groupe abélien

$$\mathbf{H}^{-2}(\Gamma; \mathfrak{X}) := \mathbf{H}^0(\Gamma, \ker \rho_e).$$

Les espaces de cohomologie sont fonctoriels pour les morphismes d'ensembles croisés qui entrelacent les actions de  $\Gamma$ . En particulier on a la proposition suivante :

**Proposition 1.2.2.** — *Un  $\Gamma$ -quasi-isomorphisme induit un isomorphisme en cohomologie.*

*Démonstration.* — Soit

$$[B \rightarrow A \times X \rightarrow X] \rightarrow [D \rightarrow C \times Y \rightarrow Y]$$

un quasi-isomorphisme d'ensembles croisés compatible aux actions de  $\Gamma$ . On notera  $f_i$  les applications entre les constituants en degrés  $i = 0, 1$  et  $2$ . Montrons l'injectivité. Soient  $(x, a, b)$  et  $(x', a', b')$  deux cochaînes représentant deux classes de 0-cohomologie dans

$$\mathbf{H}^0(\Gamma, B \rightarrow A \times X \rightarrow X)$$

et ayant même image dans

$$\mathbf{H}^0(\Gamma, D \rightarrow C \times Y \rightarrow Y)$$



c'est-à-dire que

$$(f_0(x), f_1(a), f_2(b))$$

et

$$(f_0(x'), f_1(a'), f_2(b'))$$

sont cohomologues. Par hypothèse il existe  $\gamma \in C$  tel que

$$\gamma * f_0(x) = f_0(x')$$

autrement dit  $f_0(x)$  et  $f_0(x')$  sont dans la même orbite; or  $f_0$  induit une bijection entre les ensembles d'orbites de  $A$  dans  $X$  et  $C$  dans  $Y$ ; donc il existe  $\alpha \in A$  tel que  $\alpha * x = x'$ . Quitte à changer les représentants des classes on peut donc supposer  $x = x'$ . Les 1-cochaînes  $c = f_1(a)$  et  $c' = f_1(a')$  ne diffèrent alors que par le cobord d'une 0-cochaîne à valeurs dans le stabilisateur  $C_y$  de  $y = f_0(x)$  et l'image d'une 1-cochaîne à valeurs dans  $D$  donc, compte tenu de l'isomorphisme des groupes de 1-homotopie et quitte à changer les représentants des classes, on peut supposer que  $a = a'$ . Maintenant les cochaînes  $b$  et  $b'$  on des images dans  $D$  qui ne diffèrent que par une cochaîne à valeurs dans

$$\ker[D_y \rightarrow C_y]$$

qui par hypothèse est isomorphe à

$$\ker[A_x \rightarrow B_x]$$

et on peut donc supposer  $b = b'$ . Passons à la preuve de la surjectivité. Étant donné une cochaîne  $(y, c, d)$  représentant une classe dans

$$\mathbf{H}^0(\Gamma, D \rightarrow C \times Y \rightarrow Y)$$

il existe  $x$  tel que  $f_0(x)$  soit dans l'orbite de  $y$  et modulo équivalence on peut supposer  $f_0(x) = y$ . L'orbite de  $y$  est rationnelle, c'est dire que  $y$  et  $\sigma(y)$  sont dans la même orbite; il en est de même pour  $x$  et il existe donc une cochaîne  $a$  telle que

$$a_\sigma * \sigma(x) = x;$$

on voit que  $f_1(a)$  ne diffère de  $c$  que par une 1-cochaîne à valeurs dans le stabilisateur de  $y$  et on peut modifier les choix de  $a$  et  $c$  de sorte que

$$f_1(a) = c.$$

Maintenant le bord de  $c$  est image d'une 2-cochaîne  $d$  et le bord de  $a$  est image d'une 2-cochaîne  $b$ ; on voit que  $f_2(b)$  ne diffère de  $d$  que par une 2-cochaîne à valeurs dans

$$\ker[D_y \rightarrow C_y]$$

mais, par hypothèse  $f_2$  induit un isomorphisme de

$$\ker[B_x \rightarrow A_x]$$

sur ce noyau et on peut modifier  $b$  de sorte que l'on ait

$$f_2(b) = d.$$

Comme l'image de  $b$  dans  $A$  est le bord de  $a$ , on a

$$\sigma_{\mu(a)}(b_{\tau,\nu}) \cdot b_{\sigma,\tau\nu} = z_{\sigma,\tau,\nu} \cdot b_{\sigma,\tau} \cdot b_{\sigma\tau,\nu}$$

avec

$$z_{\sigma,\tau,\nu} \in \ker[B_x \rightarrow A_x].$$

Comme

$$f_2(z_{\sigma,\tau,\nu}) = 1$$

ceci implique que

$$z_{\sigma,\tau,\nu} = 1.$$

□

Les ensembles de cohomologie sont aussi fonctoriels en  $\Gamma$  ; on a des morphismes d'inflation et de restriction pour des quotients ou des sous-groupes. Si  $\Sigma$  est un sous-groupe de  $\Gamma$  et si  $\mathfrak{X}$  est un ensemble croisé muni d'une action de  $\Sigma$  on définit de façon standard un ensemble croisé induit

$$\text{Ind}_{\Sigma}^{\Gamma} \mathfrak{X}.$$

Les constituants de  $\text{Ind}_{\Sigma}^{\Gamma} \mathfrak{X}$  sont les ensembles et groupes de fonctions  $f$  sur  $\Gamma$  à valeurs dans les ensembles et groupes qui définissent  $\mathfrak{X}$  avec la condition

$$f(\sigma\gamma) = \sigma(f(\gamma)) \quad \text{pour tout } \sigma \in \Sigma$$

et on fait agir  $\Gamma$  par

$$(\gamma'f)(\gamma) = f(\gamma\gamma') \quad \text{pour } \gamma' \in \Gamma.$$

Le lemme de Shapiro est valable pour la cohomologie des ensembles croisés :

**Lemme 1.2.3.** — *L'application naturelle*

$$\mathbf{H}^0(\Gamma, \text{Ind}_{\Sigma}^{\Gamma} \mathfrak{X}) \rightarrow \mathbf{H}^0(\Sigma, \mathfrak{X})$$

*induite par l'évaluation en l'unité  $f \rightarrow f(1)$  et la restriction à  $\Sigma$  des cochaînes, est une bijection.*

*Démonstration.* — On construit une application réciproque de la façon suivante : Soit  $(x, a, b)$  un cocycle pour  $\Sigma$  à valeurs dans  $\mathfrak{X}$ . On prolonge ces  $\Sigma$ -cochaînes en des  $\Gamma$ -cochaînes en préservant les relations de bord suivantes faisant intervenir  $\sigma \in \Sigma$  :

$$\rho_x(b_{\sigma,\tau}) = a_{\sigma} \cdot \sigma(a_{\tau}) \cdot a_{\sigma\tau}^{-1} \quad \text{pour } \sigma \in \Sigma \text{ et } \tau \in \Gamma$$

et

$$\sigma_{\mu(a)}(b_{\tau,\nu}) \cdot b_{\sigma,\tau\nu} = b_{\sigma,\tau} \cdot b_{\sigma\tau,\nu} \quad \text{pour } \sigma \in \Sigma, \tau \text{ et } \nu \in \Gamma$$

et de façon arbitraire par ailleurs. On peut par exemple imposer  $a_{\tau} = 1$  si  $\tau \notin \Sigma$  et  $b_{\tau,\nu} = 1$  si  $\tau\nu \notin \Sigma$  ; ceci détermine le prolongement des cochaînes  $a$  et  $b$ . On définit des fonctions

$$\gamma \mapsto \tilde{x}(\gamma) \quad \gamma \mapsto \tilde{a}_{\tau}(\gamma) \quad \text{et} \quad \gamma \mapsto \tilde{b}_{\tau,\nu}(\gamma)$$

en posant

$$\tilde{x}(\gamma) = \lambda(a_\gamma^{-1}) * x \quad \tilde{a}_\tau(\gamma) = a_\gamma^{-1} \rho_x(b_{\gamma,\tau}) a_{\gamma\tau} \quad \text{et} \quad \tilde{b}_{\tau,\nu}(\gamma) = \mu(a_\gamma^{-1}) * (b_{\gamma,\tau} b_{\gamma\tau,\nu} b_{\gamma,\tau\nu}^{-1})$$

On voit que

$$\tilde{x}(1) = x \quad \tilde{a}_\tau(1) = a_\tau \quad \text{et} \quad \tilde{b}_{\tau,\nu}(1) = b_{\tau,\nu} \quad \text{pour tout } \tau \text{ et } \nu \in \Sigma.$$

Des vérifications fastidieuses, mais sans surprise, montrent que

$$\tilde{x}(\sigma\gamma) = \sigma(\tilde{x}(\gamma)) \quad \tilde{a}_\tau(\sigma\gamma) = \sigma(\tilde{a}_\tau(\gamma)) \quad \text{et} \quad \tilde{b}_{\tau,\nu}(\sigma\gamma) = \sigma(\tilde{b}_{\tau,\nu}(\gamma)) \quad \text{pour tout } \sigma \in \Sigma.$$

On a ainsi défini une cochaîne à valeurs dans  $\text{Ind}_\Sigma^\Gamma \mathfrak{X}$  dont l'image par évaluation en  $\gamma = 1$  et restriction à  $\Sigma$  redonne le cocycle  $(x, a, b)$ . Il convient enfin de vérifier les relations de fermeture et la compatibilité aux relations d'équivalence, ce qui comme précédemment résulte de calculs directs.  $\square$

Dans le cas d'un module croisé  $[B \rightarrow A]$ , on dispose du groupe abélien

$$\mathbf{H}^{-1}(\Gamma, B \rightarrow A),$$

du groupe de  $\mathbf{H}^0(\Gamma, B \rightarrow A)$ , et d'un ensemble pointé de 1-cohomologie en posant :

$$\mathbf{H}^i(\Gamma, B \rightarrow A) = \mathbf{H}^{i-1}(\Gamma, B \rightarrow A \rightarrow \{\text{pt}\}).$$

On a pour  $i = -1, 0$  et  $1$  des suites exactes

$$\mathbf{H}^{i-1}(\Gamma, \text{coker}(\rho)) \rightarrow \mathbf{H}^{i+1}(\Gamma, \ker \rho) \rightarrow \mathbf{H}^i(\Gamma, B \rightarrow A) \rightarrow \mathbf{H}^i(\Gamma, \text{coker}(\rho))$$

et

$$\mathbf{H}^0(\Gamma, B) \rightarrow \mathbf{H}^0(\Gamma, A) \rightarrow \mathbf{H}^0(\Gamma, B \rightarrow A) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Gamma, B) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Gamma, A) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Gamma, B \rightarrow A).$$

Pour un ensemble croisé dont l'application fibre est indépendante du point base

$$[D \rightarrow A \rightrightarrows X]$$

le complexe  $[D \rightarrow A]$  est un module croisé, et on a une suite exacte de groupes, d'ensembles et d'ensembles pointés

$$\mathbf{H}^0(\Gamma, D \rightarrow A) \rightrightarrows \mathbf{H}^0(\Gamma, X) \rightarrow \mathbf{H}^0(\Gamma; D \rightarrow A \rightrightarrows X) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Gamma, D \rightarrow A).$$

Considérons un morphisme de modules croisés

$$\mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_0.$$

On sait lui associer un ensemble croisé

$$\mathfrak{X} = [\mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_0]$$

et on a une variante des suites exactes ci-dessus :

$$\mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{M}_1) \rightarrow \mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{M}_0) \rightarrow \mathbf{H}^0(\Gamma; \mathfrak{X}) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{M}_1) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{M}_0).$$

Considérons un complexe de groupes abéliens de longueur  $\leq 2$ , muni d'une action de  $\Gamma$ . On lui associe un ensemble croisé en groupes et la cohomologie à valeurs dans un tel ensemble croisé en groupes n'est autre que l'hypercohomologie usuelle du complexe

de groupes abéliens. On dispose alors de groupes de cohomologie abéliens en tous degrés.

Pour un module croisé  $[B \rightarrow A]$  super-stable on peut aussi définir des groupes de cohomologie abéliens, en tous degrés, en posant

$$\mathbf{H}^i(\Gamma, B \rightarrow A) := \mathbf{H}^i(\Gamma, Z_B \rightarrow Z_A).$$

Ils coïncident avec les ensembles et groupes de cohomologie définis directement en degrés  $-1$ ,  $0$  et  $1$ , compte tenu du quasi-isomorphisme

$$[Z_B \rightarrow Z_A] \rightarrow [B \rightarrow A].$$

### 1.3. Cohomologie galoisienne

Soit  $F$  un corps parfait et  $\overline{F}$  une clôture algébrique. On notera  $\Gamma$  le groupe de Galois absolu :

$$\Gamma = \text{Gal}(\overline{F}/F) = \varprojlim \text{Gal}(K/F)$$

où  $K$  parcourt les extensions galoisiennes finies de  $F$ . Si  $X$  est une variété algébrique définie sur  $F$ , on écrira souvent  $X$  pour  $X(\overline{F})$ ; cet ensemble est muni d'une action de  $\Gamma$ .

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble croisé de variétés et groupes algébriques définis sur  $F$  :

$$\mathfrak{X} = [B \rightarrow A \times X \rightarrow X].$$

On dispose alors pour toute  $F$ -algèbre  $\mathbf{A}$  d'un ensemble croisé

$$\mathfrak{X}(\mathbf{A}) = [B(\mathbf{A}) \rightarrow A(\mathbf{A}) \times X(\mathbf{A}) \rightarrow X(\mathbf{A})].$$

On note, suivant l'usage,  $\mathbf{H}^0(K/F, \mathfrak{X})$ , les ensembles de cohomologie galoisienne pour les extensions finies :

$$\mathbf{H}^0(K/F, \mathfrak{X}) := \mathbf{H}^0(\text{Gal}(K/F), \mathfrak{X}(K))$$

et  $\mathbf{H}^0(F, \mathfrak{X})$ , la limite inductive des ensembles de cohomologie galoisienne pour les extensions finies. C'est la cohomologie continue du groupe profini  $\Gamma$  à valeurs dans  $\mathfrak{X}(\overline{F})$  muni de la topologie discrète :

$$\mathbf{H}^0(F, \mathfrak{X}) := \varinjlim \mathbf{H}^0(\text{Gal}(K/F), \mathfrak{X}(K)) = \mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{X}(\overline{F})).$$

Il résulte de 1.2.3 que la cohomologie galoisienne des ensembles croisés algébriques est compatible à la restriction des scalaires. Un morphisme défini sur  $F$  d'ensembles croisés induisant un isomorphisme sur les ensembles et groupes d'homotopie est appelé quasi-isomorphisme algébrique. Deux ensembles croisés algébriquement quasi-isomorphes fournissent des ensembles de cohomologie galoisienne isomorphes.

Dans la suite les ensembles croisés algébriques que nous rencontrerons seront construits au moyen de groupes réductifs et on verra que les ensembles croisés dont les constituants sont connexes jouent un rôle privilégié. Toutefois une catégorie voisine peut être utile.

**Définition 1.3.1.** — On dira qu'un groupe réductif  $G$  est quasi-connexe s'il est le noyau d'un morphisme surjectif d'un groupe réductif connexe  $G_1$  dans un tore  $T_0$ . Un groupe réductif quasi-connexe commutatif est un groupe diagonalisable.

En d'autres termes le complexe  $[G \rightarrow 1]$  est quasi-isomorphe au complexe

$$[G_1 \rightarrow T_0].$$

Un groupe diagonalisable est le noyau d'un morphisme surjectif de tores :

$$C = \ker[T_1 \rightarrow T_0].$$

Si on note  $X_i$  les groupes de sous-groupes à un paramètre des tores  $T_i$ , le petit complexe de  $\mathbb{Z}$ -modules libres de type fini  $[X_1 \rightarrow X_0]$  a un conoyau qui est de torsion et on a

$$\mathbf{H}^i(F, C) = \mathbf{H}^{i-1}(F, C \rightarrow 1) = \mathbf{H}^{i-1}(\Gamma, X_1 \otimes \overline{F}^\times \rightarrow X_0 \otimes \overline{F}^\times).$$

Plus généralement, un complexe borné de groupes diagonalisable  $C_\bullet$  est quasi-isomorphe (cette fois sans décalage) à un complexe borné de tores  $T_\bullet$  qui est défini par un complexe borné  $X_\bullet$  de  $\mathbb{Z}$ -modules libres de type fini muni d'une action de  $\Gamma$ . Le complexe  $X_\bullet$ , comme le complexe de tores, n'est défini qu'à quasi-isomorphisme près par le complexe de groupes diagonalisables et seul l'objet correspondant dans la catégories dérivée est bien défini. On a

$$\mathbf{H}^i(F, C_\bullet) = \mathbf{H}^i(\Gamma, X_\bullet \otimes \overline{F}^\times).$$

**Définition 1.3.2.** — On dira qu'un ensemble croisé en groupes réductifs connexes  $G_\bullet$  est quasi-torique si

- (i) Il existe des sous-ensembles croisés  $T_\bullet$  dont les constituants  $T_i$  sont des tores maximaux des groupes réductifs  $G_i$ .
- (ii) Il existe un sous-ensemble croisé en groupes diagonalisables  $C_\bullet$  dans l'intersection de tous les sous-ensembles croisés dont les constituants sont des tores maximaux, et les inclusions

$$C_\bullet \rightarrow G_\bullet \quad \text{et} \quad C_\bullet \rightarrow T_\bullet$$

induisent des quasi-isomorphismes.

Si  $G_\bullet$  est quasi-torique et si  $T_\bullet$  est un sous-ensemble croisé dont les constituants sont des tores maximaux, alors l'inclusion  $C_\bullet \rightarrow G_\bullet$  se factorise par  $T_\bullet$  et donc l'inclusion  $T_\bullet \rightarrow G_\bullet$  induit un quasi-isomorphisme. On peut définir des groupes de cohomologie abéliens en tous degrés en posant

$$\mathbf{H}^i(F, G_\bullet) := \mathbf{H}^i(F, T_\bullet).$$

Cette définition de la cohomologie est indépendante du sous-ensemble croisé de tores maximaux quasi-isomorphe choisi. En effet, on dispose par hypothèse d'un sous-ensemble croisé  $C_\bullet$  de sous-groupes diagonalisables quasi-isomorphe. On dispose donc

d'isomorphismes canoniques

$$\mathbf{H}^i(F, C_\bullet) \rightarrow \mathbf{H}^i(F, T_\bullet).$$

**Lemme 1.3.3.** — *Un module croisé  $G_\bullet = [G_1 \rightarrow G_0]$  super-stable dont les constituants sont des groupes réductifs connexes est quasi-torique.*

*Démonstration.* — Notons  $f$  le morphisme de  $G_1$  dans  $G_0$ , et  $Z_i$  les centres de  $G_i$ . Le sous-module croisé

$$C_\bullet = [Z_1 \rightarrow Z_0]$$

est un complexe de groupes diagonalisables. Soit

$$T_\bullet = [T_1 \rightarrow T_0]$$

un sous-complexe de tores maximaux c'est-à-dire tel que  $f(T_1) \subset T_0$ ; on observera que  $T_i$  contient  $C_i$ . Par hypothèse, le sous-module croisé  $C_\bullet$  est quasi-isomorphe à  $G_\bullet$ . En particulier, le noyau de  $f$  est central et est donc égal au noyau de  $T_1 \rightarrow T_0$ . Donc

$$\pi_1(C_\bullet, 1) = \pi_1(T_\bullet, 1).$$

Comme  $\pi_0(C_\bullet) = \pi_0(G_\bullet)$  on a

$$G_0 = f(G_1) \cdot Z_0 \quad \text{et} \quad f(Z_1) = Z_0 \cap f(G_1).$$

Donc  $G_0 = f(G_1) \cdot T_0$ . Par ailleurs  $f^{-1}(T_0)$  est un tore qui contient  $T_1$ , qui est un tore maximal, et lui est donc égal. On a donc

$$f(T_1) = T_0 \cap f(G_1)$$

d'où

$$\pi_0(G_\bullet) = \pi_0(T_\bullet).$$

□

Pour terminer cette section nous allons évoquer une autre technique utile dans l'étude de la cohomologie des groupes réductifs : la notion de  $z$ -extension d'un groupe réductif connexe  $G$ . C'est la donnée d'une extension centrale

$$\tilde{Z} \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G$$

dont le noyau  $\tilde{Z}$  est un  $F$ -tore induit et où  $\tilde{G}$  a un groupe dérivé simplement connexe. On sait [Kol] que tout groupe réductif connexe possède des  $z$ -extensions. Le petit complexe  $[\tilde{Z} \rightarrow \tilde{G}]$  est quasi-isomorphe à  $[1 \rightarrow G]$  et, comme le noyau est un tore induit, il en est de même pour les points sur  $F$ .

### 1.4. Cohomologie adélique

Dans cette section  $F$  désigne un corps de nombres. On notera  $\mathbb{A}_F$  l'anneau des adèles de  $F$  et  $\overline{\mathbb{A}_F}$  la limite inductive des  $\mathbb{A}_K$  :

$$\overline{\mathbb{A}_F} := \mathbb{A}_F \otimes \overline{F} = \varinjlim \mathbb{A}_F \otimes K = \varinjlim \mathbb{A}_K$$

où  $K \subset \overline{F}$  parcourt l'ensemble des extensions algébriques finies de  $F$ . Soit  $v$  une place de  $F$  on note  $\Gamma_v$  le groupe de Galois de  $\overline{F}_v/F_v$  où  $\overline{F}_v$  est une clôture algébrique de  $F_v$ .

Soit  $X$  une variété algébrique définie sur un corps global  $F$ . On dispose des ensembles de cohomologie locaux :

$$\mathbf{H}^0(F_v, \mathfrak{X}) := \mathbf{H}^0(\Gamma_v, \mathfrak{X}(\overline{F}_v)).$$

Il résulte du lemme de Shapiro 1.2.3 que si  $w$  est une place de  $K$  qui divise  $v$

$$\mathbf{H}^0(K_w/F_v, \mathfrak{X}(K_w)) = \mathbf{H}^0(K/F, \mathfrak{X}(F_v \otimes K))$$

et

$$\mathbf{H}^0(\Gamma_v, \mathfrak{X}(\overline{F}_v)) = \mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{X}(F_v \otimes \overline{F})).$$

On note  $\mathcal{O}_v$  l'anneau des entiers de  $F_v$ . Pour presque toute place  $v$  on peut définir

$$\mathbf{H}^0(F_v^{nr}/F_v, \mathfrak{X}(\mathcal{O}_v^{nr}))$$

où  $\mathcal{O}_v^{nr}$  est l'anneau des entiers de la clôture non ramifiée  $F_v^{nr}$ . On note  $\mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathfrak{X})$  son image dans  $\mathbf{H}^0(F_v, \mathfrak{X})$  :

$$\mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathfrak{X}) := \text{Im}[\mathbf{H}^0(F_v^{nr}/F_v, \mathfrak{X}(\mathcal{O}_v^{nr})) \rightarrow \mathbf{H}^0(F_v, \mathfrak{X})].$$

L'ensemble de cohomologie adélique est, par définition, le produit restreint des ensembles de cohomologie locaux  $\mathbf{H}^0(F_v, \mathfrak{X})$  relativement aux sous-ensembles  $\mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathfrak{X})$  :

$$\mathbf{H}^0(\mathbb{A}_F, \mathfrak{X}) := \prod'_v \mathbf{H}^0(\Gamma_v, \mathfrak{X}).$$

Deux ensembles croisés algébriquement quasi-isomorphes fournissent des ensembles de cohomologie adélique isomorphes.

On dispose par ailleurs de l'ensemble de cohomologie galoisienne à valeurs dans  $\mathfrak{X}(\overline{\mathbb{A}_F})$  :

$$\mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{X}(\overline{\mathbb{A}_F})) = \varinjlim \mathbf{H}^0(\text{Gal}(K/F), \mathfrak{X}(\mathbb{A}_K)).$$

On prendra garde que l'application naturelle

$$\mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{X}(\overline{\mathbb{A}_F})) \rightarrow \mathbf{H}^0(\mathbb{A}_F, \mathfrak{X})$$

n'est pas nécessairement un isomorphisme, et d'ailleurs l'ensemble  $\mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{X}(\overline{\mathbb{A}_F}))$  n'est pas toujours invariant par quasi-isomorphisme algébrique (voir la remarque qui suit 1.6.8). Toutefois, les deux notions de cohomologie adélique coïncident dans certains cas.

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble croisé en groupes algébriques défini par un complexe de groupes,

$$[G_2 \rightarrow G_1 \rightarrow G_0]$$

où  $G_i$  est un groupe réductif connexe pour  $i = 1$  ou  $2$ . On dira qu'une place  $v$  est non ramifiée pour  $\mathfrak{X}$ , si l'ensemble croisé est défini sur  $\mathcal{O}_v$  et si, pour  $i = 1$  ou  $2$ , le groupe  $G_i$  est quasi-déployé et déployé sur une extension non ramifiée de  $F_v$  et  $G_i(\mathcal{O}_v)$  est un sous-groupe compact maximal hyperspécial de  $G_i(F_v)$ .

**Proposition 1.4.1.** — *Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble croisé en groupes algébriques défini par un complexe de groupes,*

$$[T_2 \rightarrow G_1 \rightarrow G_0]$$

où  $G_1$  est un groupe réductif connexe et  $T_2$  un tore dont l'image est dans le centre de  $G_1$ . On note  $f$  l'homomorphisme de  $G_1$  dans  $G_0$ . Pour toute place non ramifiée  $v$

$$\mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathfrak{X}) = f(G_1(\mathcal{O}_v)) \backslash G_0(\mathcal{O}_v)$$

et l'application :

$$\mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{X}(\overline{\mathbb{A}_F})) \rightarrow \mathbf{H}^0(\mathbb{A}_F, \mathfrak{X})$$

est un isomorphisme.

*Démonstration.* — La preuve ci-dessous est pour l'essentiel empruntée à Kottwitz et Shelstad ([KS, Lemma C.1.A] et [KS, Lemma C.1.B]). On observe que, par définition

$$\mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{X}(\overline{\mathbb{A}_F})) = \varinjlim \mathbf{H}^0(K/F, \mathfrak{X}(\mathbb{A}_K))$$

et que, compte tenu de 1.2.3,

$$\mathbf{H}^0(K/F, \mathfrak{X}(\mathbb{A}_K))$$

est la limite inductive des produits

$$\prod_{v \in S} \mathbf{H}^0(K_w/F_v, \mathfrak{X}(K_w)) \prod_{v \notin S} \mathbf{H}^0(K_w/F_v, \mathfrak{X}(\mathcal{O}_w))$$

où  $S$  est un ensemble fini de places de  $F$  qui contient les places ramifiées. Soit  $v$  une place non ramifiée; compte tenu de la connexité des groupes  $G_1$  et  $T_2$ , le théorème de Lang montre que

$$\mathbf{H}^1(K_w/F_v, G_1(\mathcal{O}_w)) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{H}^1(K_w/F_v, T_2(\mathcal{O}_w)) = 1.$$

La trivialité du quotient d'Herbrand pour la cohomologie des groupes cycliques finis à valeurs dans des modules finis montre alors que

$$\widehat{\mathbf{H}}^i(K_w/F_v, T_2(\mathcal{O}_w)) = 1 \quad \text{pour tout } i$$

et donc en particulier

$$\mathbf{H}^2(K_w/F_v, T_2(\mathcal{O}_w)) = 1.$$

Donc

$$\mathbf{H}^1(K_w/F_v, T_2(\mathcal{O}_w)) \rightarrow G_1(\mathcal{O}_w) = 1$$



et

$$\mathbf{H}^0(K_w/F_v, \mathfrak{X}(\mathcal{O}_w)) = f(G_1(\mathcal{O}_v)) \backslash G_0(\mathcal{O}_v).$$

Si on note  $f$  l'homomorphisme de  $G_1$  dans  $G_0$  on a donc

$$\mathbf{H}^0(F_v^{nr}/F_v, \mathfrak{X}(\mathcal{O}_v^{nr})) = \lim_{\rightarrow} \mathbf{H}^0(K_w/F_v, \mathfrak{X}(\mathcal{O}_w)) = f(G_1(\mathcal{O}_v)) \backslash G_0(\mathcal{O}_v).$$

Montrons maintenant que

$$\mathbf{H}^0(F_v^{nr}/F_v, \mathfrak{X}(\mathcal{O}_v^{nr})) \rightarrow \mathbf{H}^0(F_v, \mathfrak{X})$$

est injective. Notons  $\mathfrak{X}'$  le complexe  $[1 \rightarrow G'_1 \rightarrow G_0]$  où  $G'_1$  est le quotient de  $G_1$  par  $G''_1$  la composante neutre du noyau de  $f$ . Comme ci-dessus on voit que

$$\mathbf{H}^1(K_w/F_v, G''_1(\mathcal{O}_w)) = 1$$

et donc

$$G_1(\mathcal{O}_v) \rightarrow G'_1(\mathcal{O}_v)$$

est surjective. On dispose d'un morphisme  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$  et compte tenu de ce qui précède on voit que

$$\mathbf{H}^0(F_v^{nr}/F_v, \mathfrak{X}(\mathcal{O}_v^{nr})) \rightarrow \mathbf{H}^0(F_v^{nr}/F_v, \mathfrak{X}'(\mathcal{O}_v^{nr}))$$

est un isomorphisme. Il suffit donc de prouver l'injectivité lorsque  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}'$  c'est-à-dire  $T_2 = 1$  et  $f$  est de noyau fini ; dans ce cas, deux éléments de  $G_0(\mathcal{O}_v)$  ont la même image dans  $\mathbf{H}^0(F_v, \mathfrak{X})$  s'ils diffèrent par l'image d'un élément de  $G_1(F_v)$  ; mais, si  $f$  est de noyau fini,  $f^{-1}(G_0(\mathcal{O}_v))$  est un sous-groupe compact de  $G_1(F_v)$  contenant  $G_1(\mathcal{O}_v)$  qui est hyperspécial et donc est un sous-groupe compact maximal. On en déduit que  $f^{-1}(G_0(\mathcal{O}_v)) = G_1(\mathcal{O}_v)$  et l'injectivité est claire. On en déduit que

$$\mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathfrak{X}) = \mathbf{H}^0(K_w/F_v, \mathfrak{X}(\mathcal{O}_w)) = f(G_1(\mathcal{O}_v)) \backslash G_0(\mathcal{O}_v).$$

On peut donc permuter les limites inductives sur  $K$  et  $S$  et la seconde assertion en résulte.  $\square$

**Corollaire 1.4.2.** — *Soit  $G$  un groupe quasi-connexe, noyau d'un homomorphisme surjectif  $G_1 \rightarrow T_0$  d'un groupe réductif connexe dans un tore. Pour  $i = 0$  ou  $1$  on a :*

$$\mathbf{H}^i(\mathbb{A}_F, G) = \mathbf{H}^{i-1}(\Gamma, G_1(\overline{\mathbb{A}_F}) \rightarrow T_0(\overline{\mathbb{A}_F})).$$

Soit  $C_\bullet$  un complexe borné de groupes diagonalisables associé à un complexe borné  $X_\bullet$  de  $\mathbb{Z}$ -modules libres de type fini. On pose pour tout  $i$

$$\mathbf{H}^i(\mathbb{A}_F, C_\bullet) = \mathbf{H}^i(\Gamma, X_\bullet \otimes \overline{\mathbb{A}_F}^\times)$$

et

$$\mathbf{H}^i(\mathbb{A}_F/F, C_\bullet) := \mathbf{H}^i(\Gamma, [X_\bullet \otimes \overline{F}^\times \rightarrow X_\bullet \otimes \overline{\mathbb{A}_F}^\times]).$$

Ceci est compatible avec la définition directe de la cohomologie adélique au moyen du produit restreint des groupes locaux comme il résulte de la proposition 1.4.1 et de la trivialité des  $\mathbf{H}^i(F_v, T)$  pour  $i \geq 3$  pour tout tore  $T$  aux places non archimédiennes [Mi1, theoreme 1.8].

Si  $G_\bullet$  est un ensemble croisé quasi-torique et si  $T_\bullet$  est un sous-ensemble croisé de tores maximaux, on peut définir des groupes de cohomologie abéliens en tous degrés en posant pour  $* = F$  ou  $* = \mathbb{A}_F$  ou encore  $* = \mathbb{A}_F/F$

$$\mathbf{H}^i(*, G_\bullet) := \mathbf{H}^i(*, T_\bullet).$$

**Lemme 1.4.3.** — Soit  $C_\bullet$  un complexe borné de groupes diagonalisables. On dispose d'une suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow \mathbf{H}^i(F, C_\bullet) \rightarrow \mathbf{H}^i(\mathbb{A}_F, C_\bullet) \rightarrow \mathbf{H}^i(\mathbb{A}_F/F, C_\bullet) \rightarrow \mathbf{H}^{i+1}(F, C_\bullet) \rightarrow \cdots$$

De même, si  $G_\bullet$  est un ensemble croisé quasi-torique, la suite

$$\cdots \rightarrow \mathbf{H}^i(F, G_\bullet) \rightarrow \mathbf{H}^i(\mathbb{A}_F, G_\bullet) \rightarrow \mathbf{H}^i(\mathbb{A}_F/F, G_\bullet) \rightarrow \mathbf{H}^{i+1}(F, G_\bullet) \rightarrow \cdots$$

est exacte.

*Démonstration.* — Il suffit d'invoquer, pour  $K$  assez grand, la suite exacte courte

$$1 \rightarrow X_\bullet \otimes K^\times \rightarrow X_\bullet \otimes \mathbb{A}_K^\times \rightarrow X_\bullet \otimes \mathbb{A}_K^\times / K^\times \rightarrow 1.$$

□

**Remarque.** — Si on utilise des complexes de  $\mathbb{Z}$ -modules de type fini sans exiger qu'ils soient libres les résultats ci-dessus se généralisent à condition d'utiliser le produit tensoriel au sens des catégories dérivées (et qui se calcule au moyen du produit tensoriel ordinaire et de résolutions libres des dits complexes).

### 1.5. Un lemme sur les tores anisotropes

Désormais  $F$  est un corps local ou global de caractéristique zéro. Soit  $T$  un tore, on note  $X$  le module galoisien des sous-groupes à un paramètre de  $T$ . C'est un  $\mathbb{Z}$ -module libre et on a

$$T(\overline{F}) = X \otimes \overline{F}^\times.$$

Le dual de Langlands  $\widehat{T}$  de  $T$  est, par définition, le groupe des quasi-caractères de  $X$  :

$$\widehat{T} = \text{Hom}(X, \mathbb{C}^\times).$$

Notons par un exposant  $D$  la dualité de Pontryagin. La dualité de Tate-Nakayama montre que, si  $K$  déploie  $T$ ,

$$\widehat{\mathbf{H}}^i(K/F, T) \simeq \widehat{\mathbf{H}}^{i-2}(K/F, X) \simeq \widehat{\mathbf{H}}^{1-i}(K/F, \widehat{T})^D.$$

**Lemme 1.5.1.** — Si  $F$  est local et si  $T$  est un tore  $F$ -anisotrope, le groupe  $\mathbf{H}^2(F, T)$  est trivial. Soit  $T_\bullet$  un complexe de tores  $F$ -anisotropes de longueur 1 en degrés (homologiques) 1 et 0 :

$$T_\bullet = [T_1 \rightarrow T_0].$$

Si  $F$  est local non archimédien

$$\mathbf{H}^r(F, T_\bullet) = 1 \quad \text{si } r \geq 2.$$

Si  $F$  est global

$$\mathbf{H}^r(\mathbb{A}_F/F, T_\bullet) = 1 \quad \text{si } r \geq 2$$

et, si  $v$  est une place de  $F$  où les  $T_i$  sont anisotropes, l'application de co-localisation

$$\mathbf{H}^1(F_v, T_\bullet) \rightarrow \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F/F, T_\bullet)$$

est surjective.

*Démonstration.* — Traitons d'abord le cas d'un tore  $F$ -anisotrope. On note  $X$  le module galoisien des sous-groupes à un paramètre de  $T$  et soit  $X^* = \text{Hom}(X, \mathbb{Z})$  le groupe des caractères. Par Tate-Nakayama on sait que si  $*$  =  $F$  dans le cas local ou  $*$  =  $\mathbb{A}_F/F$  dans le cas global

$$\mathbf{H}^2(*, T) = \varinjlim \widehat{\mathbf{H}}^{-1}(K/F, \widehat{T})^D .$$

Le tore  $T$  est  $F$ -anisotrope si  $\mathbf{H}^0(F, X^*)$  est trivial. Ceci implique que

$$\varinjlim \widehat{\mathbf{H}}^0(K/F, X^*)^D = \varinjlim \widehat{\mathbf{H}}^{-1}(K/F, \widehat{T})^D = \mathbf{H}^2(*, T)$$

est trivial. La trivialité des  $\mathbf{H}^r(*, T)$  pour  $r \geq 3$  est vraie pour tous les tores, sauf peut-être si  $F = \mathbb{R}$  [Mi1, theoreme 1.8]. Soit maintenant  $F$  un corps global ; on a

$$\mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F/F, T) = \varinjlim \widehat{\mathbf{H}}^0(K/F, \widehat{T})^D .$$

Le tore étant anisotrope le sous-espace vectoriel des points fixes sous Galois dans l'algèbre de Lie du tore dual est de dimension nulle et donc, si  $K$  déploie  $T$ , on a un isomorphisme

$$\mathbf{H}^0(K/F, \widehat{T}) \rightarrow \widehat{\mathbf{H}}^0(K/F, \widehat{T})$$

et de même en  $v$  si  $T$  est  $F_v$ -anisotrope. Il suffit alors de remarquer que pour  $\mathbf{H}^0$  l'application de restriction en cohomologie

$$\mathbf{H}^0(F, \widehat{T}) \rightarrow \mathbf{H}^0(F_v, \widehat{T})$$

est injective. Le lemme est donc prouvé pour un tore anisotrope. Le cas d'un complexe de tores anisotropes en résulte par dévissage.  $\square$

## 1.6. Cohomologie abélianisée d'un groupe réductif

Nous allons, pour la commodité du lecteur, redonner la définition et les propriétés principales des groupes de cohomologie abélianisée pour un groupe réductif connexe en les généralisant au cas quasi-connexe. Les résultats sont pour l'essentiel dus à Kottwitz ([Ko4] [Ko5]) et à Borovoi ([Bo1] [Bo2]). Les textes [Bo1] et [Bo2] ont été refondus dans [Bo3] (voir aussi [Mi2]). Dans [Ko4] et [Ko5] Kottwitz utilise une double dualité ; la comparaison entre ses résultats et nos formulations est donnée en (1.7.3).

Soit  $G$  un groupe réductif quasi-connexe défini sur  $F$ . On suppose que  $G$  est le noyau d'un homomorphisme surjectif

$$G_1 \rightarrow T_0 .$$

On note  $G_{der}$  le groupe dérivé de  $G_1$ ,  $G_{SC}$  le revêtement simplement connexe du groupe dérivé. On notera  $G_{ad}$  le groupe adjoint i.e. le groupe des automorphismes intérieurs. Soient  $Z$  le centre de  $G$ ,  $Z_{der}$  le centre de  $G_{der}$  et  $Z_{sc}$  le centre de  $G_{SC}$ . On appelle co-centre le groupe diagonalisable :

$$D_G = G/G_{der} = Z/Z_{der}.$$

On notera  $p_G$  le morphisme canonique

$$p_G : G_{SC} \rightarrow G.$$

Ces deux groupes ont même groupe adjoint, ce qui permet de définir une action  $\mu_G$  de  $G$  sur  $G_{SC}$  et ceci munit ce complexe de longueur 1 d'une structure de module croisé super-stable que nous noterons parfois  $G_{ab}$  :

$$G_{ab} = [G_{SC} \rightarrow G].$$

Dans deux cas particuliers importants le module croisé  $G_{ab}$  est quasi-isomorphe à un groupe diagonalisable à décalage près : si  $G_{der} = G_{SC}$  le morphisme de  $G_{ab}$  dans le co-centre  $D_G$  est un quasi-isomorphisme. Si  $G = G_{ad}$  alors  $[Z_{sc} \rightarrow 1]$  est quasi-isomorphe à  $G_{ab}$ . En général, on dispose du quasi-isomorphisme canonique suivant :

$$[Z_{sc} \rightarrow Z] \rightarrow [G_{SC} \rightarrow G].$$

D'autres quasi-isomorphismes sont utiles pour étudier ce module croisé. Soit  $T$  un tore maximal de  $G$ , et  $T_{sc}$  son image réciproque dans  $G_{SC}$  (on prendra garde à ne pas confondre  $T_{sc}$  avec  $T_{SC}$  qui lui est trivial). Soit  $T_1$  un tore maximal dans  $G_1$  contenant  $T$ .

**Lemme 1.6.1.** — *Les morphismes d'ensembles croisés*

$$[Z_{sc} \rightarrow Z \rightarrow 1] \rightarrow [T_{sc} \rightarrow T_1 \rightarrow T_0] \rightarrow [G_{SC} \rightarrow G_1 \rightarrow T_0]$$

*sont des quasi-isomorphismes. L'ensemble croisé*

$$[G_{SC} \rightarrow G_1 \rightarrow T_0]$$

*est quasi-torique.*

*Démonstration.* — C'est une conséquence immédiate de 1.3.3 et 1.1.2. □

Comme  $G_{ab}$  est super-stable on peut définir sa cohomologie en tous degrés ; elle peut par exemple se calculer au moyen d'un des complexes de tores quasi-isomorphes ci-dessus :

$$\mathbf{H}^i(F, G_{ab}) = \mathbf{H}^{i-1}(F, T_{sc} \rightarrow T_1 \rightarrow T_0).$$

Les groupes de « cohomologie abélianisée » de  $G$  sont, par définition, les groupes de cohomologie de  $G_{ab}$  :

$$\mathbf{H}_{ab}^i(F, G) := \mathbf{H}^i(F, G_{ab}).$$

**Lemme 1.6.2.** — *Si  $G'$  est une forme intérieure de  $G$  les groupes de cohomologie abélianisée  $\mathbf{H}_{ab}^i(F, G)$  et  $\mathbf{H}_{ab}^i(F, G')$  sont canoniquement isomorphes.*

*Démonstration.* — Ceci résulte, par exemple, de ce que  $[Z_{sc} \rightarrow Z]$  est quasi-isomorphe à  $G_{ab}$  mais est indépendant des torsions intérieures. On pourrait aussi invoquer le passage aux co-centres pour des  $z$ -extensions (voir aussi [Bo3, lemma 1.8]).  $\square$

Nous allons montrer que le module croisé  $G_{ab}$  dépend fonctoriellement de  $G$ . Soit

$$f : I \rightarrow G$$

un morphisme de groupes réductifs quasi-connexes. On lui associe canoniquement un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} I_{SC} & \xrightarrow{\tilde{f}} & G_{SC} \\ \downarrow p_I & & \downarrow p_G \\ I & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

**Lemme 1.6.3.** — *Le morphisme de complexes*

$$[I_{SC} \rightarrow I] \rightarrow [G_{SC} \rightarrow G]$$

*est un morphisme de modules croisés.*

*Démonstration.* — On note  $\mu_I$  (resp.  $\mu_G$ ) l'action naturelle de  $I$  (resp.  $G$ ) sur le groupe simplement connexe associé. Soient  $a \in I$  et  $b \in I_{SC}$ , on doit montrer que

$$\tilde{f}(\mu_I(a) * b) = \mu_G(f(a)) * \tilde{f}(b) .$$

Commençons par un cas particulier. Soit  $z$  dans le centre de  $I$ ; alors  $\mu_I(z) * b = b$ . Soient  $J$  l'image de  $I$  dans  $G$  et  $\tilde{J}$  celle de  $I_{SC}$  dans  $G_{SC}$ . L'automorphisme  $\mu_G(f(z))$  est intérieur dans  $G_{SC}$  et induit un automorphisme de l'image réciproque  $p_G^{-1}(J)$  de  $J$  dans  $G_{SC}$ . Comme  $\tilde{J}$  est la composante connexe de 1 dans cette image réciproque,  $\mu_G(f(z))$  préserve  $\tilde{J}$  et induit un automorphisme de  $\tilde{J}$  qui devient trivial via  $p_G$ ; il est lui-même nécessairement trivial et donc

$$\mu_G(f(z)) * \tilde{f}(b) = \tilde{f}(b) .$$

Passons au cas général. Soit  $a \in I$ ; il existe  $\alpha \in I_{SC}$  tel que

$$\mu_I(a) * b = \text{Ad}(\alpha) * b$$

et donc

$$\tilde{f}(\mu_I(a) * b) = \tilde{f}(\text{Ad}(\alpha)b) = \text{Ad}(\tilde{f}(\alpha))\tilde{f}(b)$$

Par ailleurs  $a = p_I(\alpha)z$  avec  $z$  dans le centre de  $I$  et donc

$$\mu_G(f(a)) * \tilde{f}(b) = \mu_G(p_G(\tilde{f}(\alpha)))\mu_G(f(z)) * \tilde{f}(b) = \text{Ad}(\tilde{f}(\alpha)) * \tilde{f}(b) = \tilde{f}(\mu_I(a) * b) .$$

$\square$

**Définition 1.6.4.** — Nous dirons qu'un tore  $T$  est elliptique dans  $G$  si c'est un tore maximal dont l'image réciproque  $T_{sc}$  dans  $G_{SC}$  est anisotrope.

**Lemme 1.6.5.** — Soit  $F$  un corps local. Soit  $T_1$  un tore elliptique, ou plus généralement un tore fondamental, dans  $G_1$ . L'application

$$\mathbf{H}^0(F, T_1 \rightarrow T_0) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, G)$$

est surjective.

*Démonstration.* — Compte tenu du quasi-isomorphisme

$$[T_{sc} \rightarrow T_1 \rightarrow T_0] \rightarrow [G_{SC} \rightarrow G_1 \rightarrow T_0]$$

on dispose d'une suite exacte

$$\mathbf{H}^0(F, T_1 \rightarrow T_0) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, G) \rightarrow \mathbf{H}^2(F, T_{sc}).$$

Supposons tout d'abord  $F$  non-archimédien et  $T$  elliptique, donc  $T_{sc}$  est anisotrope et on sait d'après 1.5.1 que  $\mathbf{H}^2(F, T_{sc})$  est trivial. Si  $F$  est archimédien et  $T_1$  fondamental alors  $T_{sc}$  est aussi fondamental, et le lemme 10.4 de [Ko5] établit l'annulation de  $\mathbf{H}^2(F, T_{sc})$ . Ce qui implique la surjectivité.  $\square$

Le morphisme de modules croisés

$$[1 \rightarrow G] \rightarrow [G_{SC} \rightarrow G]$$

fournit pour  $i = 0$  et  $1$  des applications canoniques d'abélianisation :

$$ab_G^i : \mathbf{H}^i(F, G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^i(F, G)$$

qui s'insèrent dans une suite exacte

$$\mathbf{H}^0(F, G_{SC}) \rightarrow \mathbf{H}^0(F, G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(F, G) \rightarrow \mathbf{H}^1(F, G_{SC}) \rightarrow \mathbf{H}^1(F, G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, G).$$

Cette suite exacte va permettre d'exploiter le résultat classique suivant.

**Théorème 1.6.6 (Kneser).** — Soit  $F$  un corps local non-archimédien et  $G_{SC}$  un groupe semi-simple connexe et simplement connexe; alors

$$\mathbf{H}^1(F, G_{SC}) = 1.$$

*Démonstration.* — Ceci est dû à Kneser ([Kne1] [Kne2]).  $\square$

**Proposition 1.6.7.** — Soit  $G$  un groupe réductif quasi-connexe. On dispose de morphismes fonctoriels d'abélianisation :

$$ab_G^i : \mathbf{H}^i(F, G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^i(F, G)$$

pour  $0 \leq i \leq 1$ , dont le noyau est l'image de  $\mathbf{H}^i(F, G_{SC})$ . L'application

$$ab_G^0 : G(F) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(F, G)$$

est surjective si  $F$  est local non archimédien. L'application

$$ab_G^1 : \mathbf{H}^1(F, G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, G),$$

toujours surjective si  $F$  est local ou global, est un isomorphisme si  $F$  est local non archimédien.

*Démonstration.* — La functorialité a été établie en 1.6.3. Pour les groupes réductifs connexes les autres assertions sont établies dans [Bo3] (proposition 5.1, théorèmes 5.4 et 5.7). Passons au cas général. Si  $F$  est local non archimédien, la surjectivité de l'application  $ab^0$  résulte de la trivialité du  $\mathbf{H}^1(F, G_{SC})$  (cf. 1.6.6). Ceci implique en outre l'injectivité de  $ab^1$  dans ce cas. Soit  $F$  un corps local et supposons que  $T_1$  est un tore fondamental dans  $G_1$ . L'application de  $\mathbf{H}^0(F, T_1 \rightarrow T_0)$  dans  $\mathbf{H}_{ab}^1(F, G)$  qui est surjective d'après 1.6.5, se factorise par

$$\mathbf{H}^1(F, G) = \mathbf{H}^0(F, G_1 \rightarrow T_0).$$

L'existence de tores fondamentaux implique la surjectivité de l'application d'abélianisation :

$$\mathbf{H}^1(F, G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, G).$$

Si  $F$  est global on se ramène au cas connexe par dévissage, et dans ce cas, la preuve de la surjectivité de  $ab^1$  est similaire au cas local mais plus délicate (cf. [Bo3, Theorem 5.7]).  $\square$

Dans la suite de cette section  $F$  est un corps global. On dispose des groupes de cohomologie adélique abélianisée définis comme produits restreints.

**Proposition 1.6.8.** — *Soit  $G$  un groupe quasi-connexe défini comme noyau d'un homomorphisme surjectif d'un groupe réductif connexe  $G_1$  dans un tore  $T_0$ . Soit  $T_1$  un tore maximal de  $G_1$  et  $T_{sc}$  son image réciproque dans  $G_{SC}$ . Si  $K$  est une extension assez grande, le morphisme*

$$[T_{sc}(\mathbb{A}_K) \rightarrow T_1(\mathbb{A}_K) \rightarrow T_0(\mathbb{A}_K)] \rightarrow [G_{SC}(\mathbb{A}_K) \rightarrow G_1(\mathbb{A}_K) \rightarrow T_0(\mathbb{A}_K)]$$

est un quasi-isomorphisme, et pour  $i = 0$  ou  $1$  on a :

$$\mathbf{H}_{ab}^i(\mathbb{A}_F, G) = \mathbf{H}^{i-1}(\Gamma, G_{SC}(\overline{\mathbb{A}_F}) \rightarrow G_1(\overline{\mathbb{A}_F}) \rightarrow T_0(\overline{\mathbb{A}_F})).$$

*Démonstration.* — Soit  $\tilde{G}_1$  une  $z$ -extension de  $G_1$  de noyau un tore  $T_2$ . Soit  $\tilde{T}_1$  l'image réciproque de  $T_1$  dans  $\tilde{G}_1$ . Soit  $K$  une extension de  $F$  assez grande, de sorte que tous ces tores soient déployés sur  $K$ . On a des morphismes d'ensembles croisés

$$[T_2(\mathbb{A}_K) \times T_{sc}(\mathbb{A}_K) \rightarrow \tilde{T}_1(\mathbb{A}_K) \rightarrow T_0(\mathbb{A}_K)] \rightarrow [T_{sc}(\mathbb{A}_K) \rightarrow T_1(\mathbb{A}_K) \rightarrow T_0(\mathbb{A}_K)]$$

et

$$[G_{SC}(\mathbb{A}_K) \times T_2(\mathbb{A}_K) \rightarrow \tilde{G}_1(\mathbb{A}_K) \rightarrow T_0(\mathbb{A}_K)] \rightarrow [G_{SC}(\mathbb{A}_K) \rightarrow G_1(\mathbb{A}_K) \rightarrow T_0(\mathbb{A}_K)]$$

ainsi que

$$[T_2(\mathbb{A}_K) \times T_{sc}(\mathbb{A}_K) \rightarrow \tilde{T}_1(\mathbb{A}_K) \rightarrow T_0(\mathbb{A}_K)] \rightarrow [T_2(\mathbb{A}_K) \rightarrow \tilde{D}_1(\mathbb{A}_K) \rightarrow T_0(\mathbb{A}_K)]$$

où  $\tilde{D}_1$  est le co-centre de  $\tilde{G}_1$  et

$$[G_{SC}(\mathbb{A}_K) \times T_2(\mathbb{A}_K) \rightarrow \tilde{G}_1(\mathbb{A}_K) \rightarrow T_0(\mathbb{A}_K)] \rightarrow [T_2(\mathbb{A}_K) \rightarrow \tilde{D}_1(\mathbb{A}_K) \rightarrow T_0(\mathbb{A}_K)].$$

Les noyaux de ces morphismes de complexes

$$[T_2(\mathbb{A}_K) \rightarrow T_2(\mathbb{A}_K) \rightarrow 1], \quad [T_{sc}(\mathbb{A}_K) \rightarrow T_{sc}(\mathbb{A}_K) \rightarrow 1]$$

et

$$[G_{SC}(\mathbb{A}_K) \rightarrow G_{SC}(\mathbb{A}_K) \rightarrow 1]$$

sont des complexes acycliques. Par ailleurs, si  $K$  est une extension de  $F$  assez grande, les morphismes de passage au quotient sont surjectifs sur chaque composant : ceci résulte de la trivialité de  $\mathbf{H}^1(\mathbb{A}_K, T_*)$  si  $T_*$  est  $K$ -déployé et de  $\mathbf{H}^1(\mathbb{A}_K, G_{SC})$  si toutes les places archimédiennes de  $K$  sont complexes comme il résulte de 1.6.6. Dans ces conditions ces morphismes d'ensembles croisés sont des quasi-isomorphismes. Les assertions en résultent immédiatement compte tenu de 1.4.1.  $\square$

**Remarque.** — On observera que, par contre, il se peut que le morphisme de modules croisés

$$[Z_{sc}(\overline{\mathbb{A}_F}) \rightarrow Z(\overline{\mathbb{A}_F})] \rightarrow [G_{SC}(\overline{\mathbb{A}_F}) \rightarrow G(\overline{\mathbb{A}_F})]$$

ne soit pas un quasi-isomorphisme. Par exemple, si  $G = PGL(2)$  on a  $Z = 1$  alors que  $SL(2, \overline{\mathbb{A}_F}) \rightarrow PGL(2, \overline{\mathbb{A}_F})$  n'est pas surjective.

On note  $F_\infty$  le produit des complétés archimédiens de  $F$  :

$$F_\infty = \prod_{v|\infty} F_v = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}.$$

D'après 1.6.6 le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{H}_{ab}^0(F, G) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(F, G_{SC}) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(F, G) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(F, G) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}_{ab}^0(F_\infty, G) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(F_\infty, G_{SC}) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F, G) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F, G) \end{array}$$

est à lignes exactes. Il fournit une flèche de  $\mathbf{H}^1(F, G)$  dans le produit fibré de  $\mathbf{H}_{ab}^1(F, G)$  et  $\mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F, G)$  au dessus de  $\mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F, G)$ . Pour exploiter ce diagramme nous utiliserons le principe de Hasse :

**Théorème 1.6.9 (Kneser-Harder-Chernousov).** — *Soit  $F$  un corps global et  $G_{SC}$  un groupe semi-simple connexe et simplement connexe ; alors l'application*

$$\mathbf{H}^1(F, G_{SC}) \rightarrow \mathbf{H}^1(F_\infty, G_{SC})$$

*est bijective.*

Ce théorème est dû à Kneser [Kne3] et Harder [Har1] [Har2], sauf le cas des groupes de type  $E_8$  qui est dû à Chernousov [Ch].

**Théorème 1.6.10.** — *Soient  $F$  un corps global et  $G$  un  $F$ -groupe quasi-connexe. L'application naturelle*

$$\mathbf{H}^1(F, G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, G) \times_{\mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F, G)} \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F, G)$$

*est surjective. Elle est bijective si  $G$  est connexe.*



*Démonstration.* — Pour  $G$  connexe, et compte tenu de la bijectivité de  $ab^1$  pour les corps non archimédiens, c'est le théorème 5.11 de [Bo3]. Redonnons la preuve dans notre cadre légèrement plus général. Compte tenu du diagramme commutatif ci-dessus, la surjectivité résulte de ce que, pour un corps global,  $ab^1$  est surjective (1.6.7) et de ce que, d'après 1.6.9, l'application

$$\mathbf{H}^1(F, G_{SC}) \rightarrow \mathbf{H}^1(F_\infty, G_{SC})$$

est bijective. Si  $G$  est connexe, on invoque la densité de l'image de flèche

$$\mathbf{H}_{ab}^0(F, G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(F_\infty, G)$$

pour prouver l'injectivité. Cette densité s'obtient par dévissage, en remplaçant  $G_{ab}$  par un complexe de tores  $[T_2 \rightarrow T_1]$  quasi-isomorphe où  $T_1$  est un tore induit, au moyen de la densité de  $\mathbf{H}^0(F, T_1)$  dans  $\mathbf{H}^0(F_\infty, T_1)$  et de la surjectivité de  $\mathbf{H}^1(F, T_2)$  sur  $\mathbf{H}^1(F_\infty, T_2)$  (cf. [KS, Lemma C.5.A]).  $\square$

On note  $\ker^1(F, G)$  le noyau de la flèche

$$\mathbf{H}^1(F, G) \rightarrow \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F, G)$$

et on note  $\ker_{ab}^1(F, G)$  son analogue abélianisé.

**Corollaire 1.6.11.** — *Soit  $G'$  une forme intérieure d'un groupe quasi-connexe  $G$ . La flèche naturelle*

$$\ker^1(F, G') \rightarrow \ker_{ab}^1(F, G)$$

*est surjective ; si  $G$  est connexe c'est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — On peut identifier  $\ker_{ab}^1(F, G)$  à un sous-ensemble du produit fibré considéré ci-dessus et l'assertion est une conséquence immédiate de 1.6.10 compte tenu de l'invariance de la cohomologie abélianisée par changement de forme intérieure. Au langage près, pour un groupe connexe, ceci est dû à Kottwitz [Ko4, Remark 4.4].  $\square$

D'après 1.6.1, l'ensemble croisé

$$[G_{SC} \rightarrow G_1 \rightarrow T_0]$$

est quasi-torique. On peut donc définir des groupes

$$\mathbf{H}_{ab}^i(\mathbb{A}_F/F, G)$$

et par composition des morphismes

$$\mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F, G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F, G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G)$$

on obtient une flèche naturelle

$$\mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F, G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G).$$

**Proposition 1.6.12.** — *La suite d'ensembles pointés*

$$\ker^1(F, G) \rightarrow \mathbf{H}^1(F, G) \rightarrow \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F, G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G)$$

est exacte.

*Démonstration.* — D'après 1.4.3 on dispose d'un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} \ker^1(F, G) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(F, G) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F, G) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \ker_{ab}^1(F, G) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(F, G) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F, G) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G) \end{array}$$

et on voit que le noyau de la flèche

$$\mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F, G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G)$$

est l'image du produit fibré

$$\mathbf{H}_{ab}^1(F, G) \times_{\mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F, G)} \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F, G).$$

On conclut en rappelant que d'après 1.6.10, l'ensemble  $\mathbf{H}^1(F, G)$  s'envoie surjectivement sur ce produit fibré.  $\square$

Nous allons établir une variante de cette proposition.

**Proposition 1.6.13.** — *Soit  $G$  un groupe réductif connexe. Soit  $V$  un groupe et soit  $U$  un groupe abélien muni d'un morphisme d'image centrale dans  $G \times V$ . Si  $\mathbf{A}$  est une  $F$ -algèbre. on note  $\mathfrak{G}(\mathbf{A})$  le module croisé*

$$[U(\overline{F}) \rightarrow G(\mathbf{A}) \times V(\overline{F})].$$

Il existe un morphisme canonique

$$\mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}(\overline{\mathbb{A}_F})) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G)$$

et la suite d'ensembles pointés

$$\ker^1(F, G) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}(\overline{F})) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}(\overline{\mathbb{A}_F})) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G)$$

est exacte.

*Démonstration.* — On observe tout d'abord que  $\mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}(\mathbf{A}))$  est le produit fibré

$$\mathbf{H}^1(\Gamma, U(\overline{F}) \rightarrow G(\mathbf{A})) \times_{\mathbf{H}^2(F, U)} \mathbf{H}^1(F, U \rightarrow V).$$

Soit  $T$  un tore maximal dans  $G$ . D'après 1.6.8 le module croisé

$$U(\overline{F}) \times T_{sc}(\overline{\mathbb{A}_F}) \rightarrow T(\overline{\mathbb{A}_F})$$

est quasi-isomorphe au module croisé

$$U(\overline{F}) \times G_{SC}(\overline{\mathbb{A}_F}) \rightarrow G(\overline{\mathbb{A}_F}).$$

On en déduit l'existence d'un diagramme commutatif exact :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{H}^1(F, G_{SC}) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}(\overline{F})) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(\Gamma, G_{SC}(\overline{F}) \rightarrow \mathfrak{G}(\overline{F})) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F, G_{SC}) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}(\overline{\mathbb{A}_F})) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(\Gamma, G_{SC}(\overline{\mathbb{A}_F}) \rightarrow \mathfrak{G}(\overline{\mathbb{A}_F})) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G) & & 
 \end{array}$$

d'où un morphisme fonctoriel

$$\mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}(\overline{\mathbb{A}_F})) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G).$$

On définit  $\mathfrak{G}_{ad}$  en remplaçant  $G$  par son groupe adjoint. On observe que  $\mathfrak{G}_{ad}(\mathbf{A})$  se décompose en un produit :

$$\mathfrak{G}_{ad}(\mathbf{A}) = G_{ad}(\mathbf{A}) \times [U(\overline{F}) \rightarrow V(\overline{F})].$$

Ceci permet par dévissage, compte tenu de la suite exacte

$$\mathbf{H}^1(\Gamma, Z(\mathbf{A})) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}(\mathbf{A})) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}_{ad}(\mathbf{A})) \rightarrow \mathbf{H}^2(\Gamma, Z(\mathbf{A}))$$

où  $Z$  est le centre de  $G$ , de prouver la surjectivité de

$$\mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}(\overline{F})) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Gamma, G_{SC}(\overline{F}) \rightarrow \mathfrak{G}(\overline{F}))$$

et

$$\mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}(\overline{\mathbb{A}_F})) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Gamma, G_{SC}(\overline{\mathbb{A}_F}) \rightarrow \mathfrak{G}(\overline{\mathbb{A}_F})).$$

On conclut en prouvant l'analogie de 1.6.10 et en en déduisant, comme dans 1.6.12, que le noyau de

$$\mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}(\overline{\mathbb{A}_F})) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G)$$

est l'image de  $\mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}(\overline{F}))$ . Enfin, pour prouver que  $\ker^1(F, G)$  est le noyau de

$$\mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}(\overline{F})) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}(\overline{\mathbb{A}_F}))$$

on invoque le diagramme exact ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \ker^1(F, G) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 \mathbf{H}^0(F, U \rightarrow V) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(F, G) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}(\overline{F})) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(F, U \rightarrow V) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{H}^0(F, U \rightarrow V) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F, G) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{G}(\overline{\mathbb{A}_F})) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(F, U \rightarrow V)
 \end{array}$$

□

Nous laisserons au lecteur le soin de généraliser la proposition ci-dessus au cas quasi-connexe.

### 1.7. Retour sur quelques résultats de Kottwitz

L'abélianisation en cohomologie est la clef des constructions de divers objets introduits par Kottwitz.

Nous allons rappeler la définition d'un invariant construit par Kottwitz dans [Ko2]. Soit  $G$  un groupe réductif quasi-connexe. La demi-somme des racines de  $G_{SC}$  définit un caractère de son centre  $Z_{sc}$ , mais la somme des racines, qui est le poids dominant de la représentation adjointe, induit le caractère trivial sur  $Z_{sc}$ . La demi-somme des racines fournit donc un homomorphisme d'ordre 2 de  $Z_{sc}$  dans le groupe multiplicatif  $\mathbb{G}_m$ . Compte tenu du quasi-isomorphisme

$$[Z_{sc} \rightarrow 1] \rightarrow [G_{SC} \rightarrow G_{ad}]$$

on obtient un homomorphisme

$$\mathbf{H}_{ab}^1(*, G_{ad}) \rightarrow \mathbf{H}^2(*, \mathbb{G}_m)$$

dont l'image est formée d'éléments d'ordre 2. Posons  $* = F$  si  $F$  est local et  $* = \mathbb{A}_F/F$  si  $F$  est global, on sait que  $\mathbf{H}^2(*, \mathbb{G}_m)$  s'identifie à un sous-groupe du groupe des racines de l'unité dans  $\mathbb{C}^\times$ . L'application d'abélianisation composée avec l'homomorphisme ci-dessus fournit un morphisme

$$\mathbf{H}^1(*, G_{ad}) \rightarrow \{\pm 1\}.$$

**Définition 1.7.1.** — Soient  $F$  un corps local,  $G^*$  un groupe quasi-déployé et quasi-connexe et  $G$  une forme intérieure. Nous appellerons signe de Kottwitz le signe

$$e(G) = \pm 1$$

associé à  $G$  par composition de la bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de formes intérieures de  $G^*$  et  $\mathbf{H}^1(F, G_{ad}^*)$  et du morphisme

$$\mathbf{H}^1(F, G_{ad}^*) \rightarrow \{\pm 1\}.$$

Le signe est trivial si  $G$  est quasi-déployé et on a une loi de réciprocité :

**Lemme 1.7.2.** — Soit  $F$  un corps global. Le produit des signes de Kottwitz locaux est égal à 1 :

$$\prod_v e(G_v) = 1.$$

*Démonstration.* — C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.6.12.  $\square$

Dans la suite de cette section,  $G$  est un groupe réductif connexe. On notera par un exposant  $D$  la dualité de Pontryagin. Soit  $\widehat{G}$  le dual de Langlands (i.e. la composante neutre du groupe des points complexes du L-groupe) et soit  $Z(\widehat{G})$  son centre. Considérons le groupe des composantes connexes du groupe des invariants sous Galois du centre du groupe dual :

$$\pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma) = \pi_0(\mathbf{H}^0(F, Z(\widehat{G}))) .$$

Suivant [Ko5] nous noterons  $A(G)$  son dual de Pontryagin

$$A(G) = \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)^D.$$

**Proposition 1.7.3.** — Soit  $G$  un groupe réductif connexe. Soit  $F$  un corps local; il existe une application canonique injective

$$\mathbf{H}_{ab}^1(F, G) \rightarrow A(G)$$

qui est bijective si  $F$  est non-archimédien. Soit  $F$  un corps global; il existe une application canonique bijective

$$\mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G) \rightarrow A(G).$$

De plus

$$\ker^1(F, G) = \ker_{ab}^1(F, G) = \ker^1(F, Z(\widehat{G}))^D.$$

*Démonstration.* — On observe que  $\widehat{G}_{SC}$  est le groupe adjoint de  $\widehat{G}$  et que donc le complexe

$$[Z(\widehat{G}) \rightarrow 1]$$

est quasi-isomorphe au module croisé

$$[\widehat{G} \rightarrow \widehat{G}_{SC}]$$

et donc pour les groupes de cohomologie modifiés de Tate

$$\widehat{\mathbf{H}}^{i+1}(K/F, Z(\widehat{G})) = \widehat{\mathbf{H}}^i(K/F, \widehat{G} \rightarrow \widehat{G}_{SC}).$$

L'isomorphisme de Tate-Nakayama pour les complexes de tores (cf. [Ny]) montre que, si  $*$  =  $F$  lorsque  $F$  est local et  $*$  =  $\mathbb{A}_F/F$  lorsque  $F$  est global, on a

$$\widehat{\mathbf{H}}^i(*, G_{SC} \rightarrow G) = \varinjlim \widehat{\mathbf{H}}^{-i}(K/F, \widehat{G} \rightarrow \widehat{G}_{SC})^D$$

et donc

$$\mathbf{H}_{ab}^1(*, G) = \varinjlim \widehat{\mathbf{H}}^0(K/F, Z(\widehat{G}))^D.$$

Si  $K$  est assez grand,  $\text{Gal}(\overline{F}/K)$  agit trivialement et on a

$$\widehat{\mathbf{H}}^0(K/F, Z(\widehat{G})) = Z(\widehat{G})^\Gamma / N_{K/F} Z(\widehat{G}).$$

La composante connexe de l'élément neutre  $(Z(\widehat{G})^\Gamma)^0$  de  $Z(\widehat{G})^\Gamma$  est un sous-groupe de  $N_{K/F} Z(\widehat{G})$  :

$$(Z(\widehat{G})^\Gamma)^0 \subset N_{K/F} Z(\widehat{G}).$$

On dispose donc de morphismes surjectifs

$$\pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma) \rightarrow \widehat{\mathbf{H}}^0(K/F, Z(\widehat{G}))$$

ce qui fournit un morphisme injectif

$$\mathbf{H}_{ab}^1(*, G) \rightarrow A(G) = \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)^D.$$

Supposons qu'il existe deux extensions galoisiennes  $K_0/F$  et  $K/K_0$  telles que le groupe  $\text{Gal}(\overline{F}/K_0)$  agisse trivialement sur  $Z(\widehat{G})$  et que  $\text{Gal}(K/K_0)$  soit d'ordre un multiple du nombre de composantes connexes de  $Z(\widehat{G})^\Gamma$ . Alors

$$N_{K/F}Z(\widehat{G}) \subset N_{K/K_0}Z(\widehat{G})^\Gamma = (Z(\widehat{G})^\Gamma)^0.$$

Pour un tel corps on a donc un isomorphisme

$$\pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma) \rightarrow \widehat{\mathbf{H}}^0(K/F, Z(\widehat{G}))$$

La bijectivité à la limite résulte de ce que de tels corps  $K$  forment un ensemble cofinal si  $F$  est non-archimédien ou global. La dernière assertion résulte de 1.6.11.  $\square$

**Corollaire 1.7.4.** — *Soit  $G$  un groupe réductif connexe. Soit  $\tau(G)$  le nombre de Tamagawa de  $G$ . On a :*

$$\tau(G) = \frac{\#\mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G)}{\#\ker_{ab}^1(F, G)}.$$

*Démonstration.* — Rappelons que d'après Kottwitz ([Ko4] et [Ko6]) le nombre de Tamagawa de  $G$  vaut

$$\tau(G) = \frac{\#\pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)}{\#\ker^1(F, Z(\widehat{G}))}.$$

L'assertion résulte alors de 1.7.3. On pourrait aussi établir ce résultat directement, i.e. sans bi-dualité, en utilisant la preuve de la conjecture de Weil par Kottwitz [Ko6] et une caractérisation axiomatique des nombres de Tamagawa relatifs comme dans [Ono] et [Ko4].  $\square$

Lorsque  $F$  est local, en composant l'application d'abélianisation avec le morphisme 1.7.3 on obtient un morphisme de foncteurs

$$\mathbf{H}^1(F, G) \rightarrow A(G)$$

dont le noyau est l'image de  $\mathbf{H}^1(F, G_{SC})$ . Lorsque  $F$  est global, en composant le morphisme

$$\mathbf{H}^1(\Gamma, G(\overline{\mathbb{A}_F})) \rightarrow \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F, G)$$

l'application d'abélianisation et le morphisme 1.7.3 on obtient un morphisme de foncteurs

$$\mathbf{H}^1(\Gamma, G(\overline{\mathbb{A}_F})) \rightarrow A(G).$$

Comme  $G$  est supposé connexe on a

$$\mathbf{H}^1(\Gamma, G(\overline{\mathbb{A}_F})) = \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F, G)$$

d'après 1.4.1. Compte tenu de 1.6.12 on voit que le noyau est l'image de  $\mathbf{H}^1(\Gamma, G(\overline{F}))$ . On a la variante suivante : si  $Z$  est le centre de  $G$ , la proposition 1.6.13 fournit un morphisme

$$\mathbf{H}^1(\Gamma, Z(\overline{F}) \backslash G(\overline{\mathbb{A}_F})) \rightarrow A(G)$$

dont le noyau est l'image de  $\mathbf{H}^1(\Gamma, Z(\overline{F}) \backslash G(\overline{F}))$ . Ces morphismes sont construits par Kottwitz dans [Ko5].

### 1.8. Abélianisation de complexes de groupes réductifs

Soient  $I$  et  $G$  deux groupes réductifs connexes et soient  $f$  et  $g$  deux morphismes de  $I$  dans  $G$ ; le couple de morphismes  $(f, g)$  définit une action de  $I$  sur  $G$ .

Soit  $U$  un groupe abélien muni d'une flèche  $\zeta$  dans le centre de  $I$  telle que  $f \circ \zeta = g \circ \zeta$  envoient  $U$  dans le centre de  $G$ , définissant donc un ensemble croisé :

$$\mathfrak{G} = [U \rightarrow I \Rightarrow G] = [[U \rightarrow I] \Rightarrow G] .$$

On note  $\mu_G$  (resp.  $\mu_I$ ) les actions naturelles de  $G$  (resp.  $I$ ) sur  $G_{SC}$  (resp.  $I_{SC}$ ). Notons  $I \ltimes G_{SC}$  le produit semi-direct de  $I$  et  $G_{SC}$  où  $I$  agit sur  $G_{SC}$  via l'action naturelle de  $G$  composée avec  $f$  : c'est-à-dire que pour  $c \in I$  et  $y \in G_{SC}$ , on a

$$(c, 1)(1, y)(c, 1)^{-1} = (1, \mu_G(f(c)) * y) .$$

On note  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  les morphismes de  $I_{SC}$  dans  $G_{SC}$  obtenus en relevant  $f$  et  $g$ . D'après 1.6.3 on dispose de deux morphismes de modules croisés entre

$$\mathfrak{M}_1 = [U \times I_{SC} \rightarrow I] \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}_0 = [G_{SC} \rightarrow G]$$

ce qui permet de définir un ensemble croisé que nous noterons  $\mathfrak{G}_{ab}$  :

$$\mathfrak{G}_{ab} = [\mathfrak{M}_1 \Rightarrow \mathfrak{M}_0] .$$

Soient  $S$  un tore maximal dans  $I$  et  $T$  un tore maximal dans  $G$  définis sur  $F$ . Bien que ce ne soit pas indispensable, nous supposerons pour simplifier que l'on peut choisir ces tores de sorte que

$$f(S) \subset T \quad \text{et} \quad g(S) \subset T .$$

**Proposition 1.8.1.** — *On peut définir pour tout entier  $i$  des groupes de cohomologie abéliens*

$$\mathbf{H}_{ab}^i(F, \mathfrak{G}) := \mathbf{H}^i(F, \mathfrak{G}_{ab}) .$$

*Démonstration.* — On note  $S_{sc}$  et  $T_{sc}$  les images réciproques des tores  $T$  et  $S$  dans les revêtements simplement connexes des groupes dérivés. Comme

$$f(S) \subset T \quad \text{et} \quad g(S) \subset T$$

on dispose d'un morphisme

$$s \mapsto h(s) = f(s) \cdot g(s^{-1})$$

de  $S$  dans  $T$  et d'un diagramme commutatif exact défini par  $h$  et  $\tilde{h}$

$$\begin{array}{ccccc} S_{sc} & \rightarrow & T_{sc} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \rightarrow & S & \rightarrow & T \quad . \end{array}$$

D'après 1.6.1 et 1.1.2 les inclusions induisent un quasi-isomorphisme

$$[[U \times S_{sc} \rightarrow S] \Rightarrow [T_{sc} \rightarrow T]] \rightarrow \mathfrak{G}_{ab}.$$

Comme pour les ensembles croisés quasi-toriques, on vérifie que les groupes de cohomologie définis via ce quasi-isomorphisme sont indépendants des choix.  $\square$

Nous dirons que l'ensemble croisé en groupes  $\mathfrak{G}_{ab}$  est l'abélianisé de  $\mathfrak{G}$ . Le morphisme d'ensembles croisés

$$\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}_{ab}$$

induit un morphisme d'abélianisation en cohomologie :

$$\mathbf{H}^0(F, \mathfrak{G}) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(F, \mathfrak{G}).$$

On observera que si  $U = 1$  l'ensemble croisé  $\mathfrak{G}_{ab}$  est quasi-torique.

La remarque qui suit 1.1.2 montre que si  $I$  est quasi-connexe mais non connexe, la construction analogue à celle de l'abélianisé ci-dessus ne fournit pas toujours un ensemble croisé à homotopie abélienne. Ce sera le cas avec une condition supplémentaire sur le morphisme.

**Définition 1.8.2.** — On appelle paire admissible la donnée d'un groupe réductif connexe  $G$ , d'un groupe réductif quasi-connexe  $I$  noyau d'un morphisme surjectif  $I_1 \rightarrow S_0$  et d'un morphisme  $I \rightarrow G$  qui se factorise par  $I_1$ .

Le complexe  $[I \rightarrow G]$  est quasi-isomorphe au complexe de groupes connexes

$$[I_1 \rightarrow G_1]$$

avec  $G_1 = G \times S_0$ . On dispose pour  $[I_1 \rightarrow G_1]$  d'un abélianisé quasi-torique. La définition de

$$\mathbf{H}_{ab}^i(F, I \rightarrow G)$$

au moyen de complexes de tores quasi-isomorphes ci-dessus s'étend ainsi aux paires admissibles, et si  $F$  est un corps global on sait définir

$$\mathbf{H}_{ab}^i(*, I \rightarrow G)$$

pour  $* = \mathbb{A}_F$  et  $\mathbb{A}_F/F$ . Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier que cette définition est indépendante du choix du groupe connexe  $I_1$ .

Soit  $I$  un sous-groupe quasi-connexe d'un groupe connexe  $G$  définissant une paire admissible. Nous écrivons

$$\mathbf{H}^0(F, I \setminus G) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{ab}^i(F, I \setminus G)$$

pour

$$\mathbf{H}^0(F, I \rightarrow G) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{ab}^i(F, I \rightarrow G).$$

Posons

$$\mathfrak{D}(I, G; F) = \ker[\mathbf{H}^1(F, I) \rightarrow \mathbf{H}^1(F, G)].$$



On a une suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \rightarrow I(F) \backslash G(F) \rightarrow \mathbf{H}^0(F, I \backslash G) \rightarrow \mathfrak{D}(I, G; F) \rightarrow 1 .$$

Les fibres de l'application  $\mathbf{H}^0(F, I \backslash G) \rightarrow \mathfrak{D}(I, G; F)$  sont des ensembles  $I'(F) \backslash G(F)$  où  $I'$  est une forme intérieure de  $I$ . Si  $F$  est un corps local l'ensemble  $\mathfrak{D}(I, G; F)$  est fini. Un analogue de l'ensemble  $\mathfrak{D}(I, G; F)$ , est défini en utilisant les abélianisés :

$$\mathfrak{E}(I, G; F) = \ker[\mathbf{H}_{ab}^1(F, I) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, G)] .$$

C'est un groupe abélien et l'application d'abélianisation induit une application

$$\mathfrak{D}(I, G; F) \rightarrow \mathfrak{E}(I, G; F) .$$

**Lemme 1.8.3.** — *Pour que l'application*

$$\mathfrak{D}(I, G; F) \rightarrow \mathfrak{E}(I, G; F)$$

*soit surjective il suffit que  $\mathbf{H}^1(F, G_{SC}) = 1$ . Elle est toujours bijective pour un corps local non archimédien.*

*Démonstration.* — Si  $\mathbf{H}^1(F, G_{SC}) = 1$  l'application

$$\mathbf{H}^1(F, G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, G)$$

est bijective d'après 1.6.7. C'est en particulier le cas si  $F$  est local non archimédien. Les assertions en résultent.  $\square$

Soit maintenant  $F$  un corps global. Nous noterons  $\mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F)$  le groupe quotient de  $\mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I \backslash G)$  par l'image de  $\mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F, G)$  :

$$\mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F) = \text{coker} [\mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F, G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I \backslash G)] .$$

**Proposition 1.8.4.** — *Le groupe  $\mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F)$  s'insère dans deux suites exactes :*

$$\ker_{ab}^1(F, I) \rightarrow \ker_{ab}^1(F, G) \rightarrow \mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, I) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G) ,$$

et

$$\mathfrak{E}(I, G; F) \rightarrow \mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F) \rightarrow \mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F) \rightarrow \ker_{ab}^1(F, I \backslash G) .$$

*C'est un groupe fini si  $I$  est connexe.*

*Démonstration.* — On a un diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{H}_{ab}^0(F, I) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F, I) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I) & \rightarrow & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{H}_{ab}^0(F, G) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F, G) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, G) & \rightarrow & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{H}_{ab}^0(F, I \backslash G) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F, I \backslash G) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I \backslash G) & \rightarrow & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{H}_{ab}^1(F, I) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F, I) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, I) & \rightarrow & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{H}_{ab}^1(F, G) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F, G) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G) & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

Par passage au quotient des deux premières lignes par

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{H}_{ab}^0(F, I) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F, I) & \rightarrow & \text{Im} [\mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F, I) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I)] & \rightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{H}_{ab}^0(F, G) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F, G) & \rightarrow & \text{Im} [\mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F, G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, G)] & \rightarrow & 1 \end{array}$$

et de la troisième ligne par l'image de la deuxième ligne de ce complexe, on obtient un nouveau diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & \rightarrow & \ker_{ab}^1(F, I) & \rightarrow & \dots \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 1 & \rightarrow & \ker_{ab}^1(F, G) & \rightarrow & \dots \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathfrak{E}(I, G; F) & \rightarrow & \mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F) & \rightarrow & \mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F) & \rightarrow & \dots & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \mathbf{H}_{ab}^1(F, I) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F, I) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, I) & \rightarrow & \dots & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \mathbf{H}_{ab}^1(F, G) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F, G) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G) & \rightarrow & \dots & & \end{array}$$

et les deux suites exactes s'en déduisent. La dernière assertion résulte de la finitude de  $\ker^1(F, G)$  et de  $\mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, I)$  lorsque les groupes  $G$  et  $I$  sont connexes.  $\square$

Si  $F$  est local le dual de Pontryagin du groupe localement compact  $\mathbf{H}_{ab}^0(F, I \setminus G)$  sera noté  $\mathfrak{K}(I, G; F)$ . Le dual de Pontryagin du groupe  $\mathfrak{E}(I, G; F)$  est un sous-groupe de  $\mathfrak{K}(I, G; F)$  qui sera noté  $\mathfrak{K}(I, G; F)_1$  et sera appelé groupe des caractères endoscopiques locaux relatifs à  $I$ .

Si  $F$  est global le dual de Pontryagin du groupe localement compact  $\mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I \setminus G)$  sera noté  $\mathfrak{K}(I, G; F)$ . Le dual de Pontryagin du groupe  $\mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F)$  sera noté  $\mathfrak{K}(I, G; F)_1$  et sera appelé groupe des caractères endoscopiques globaux relatifs à  $I$ .

On dispose d'une application de localisation

$$\mathfrak{K}(I, G; F)_1 \rightarrow \prod_v \mathfrak{K}(I, G; F_v)_1$$

duale de l'application

$$\mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F) \rightarrow \mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F) .$$

On prendra garde que cette application de localisation n'est pas toujours injective : son noyau  $\mathfrak{K}(I, G; F)_0$  est le dual de Pontryagin du groupe  $\ker_{ab}^1(F, I \setminus G)$ .

**Remarque.** — Lorsque  $\theta = 1$  notre groupe  $\mathfrak{K}(I, G; F)_1$  coïncide avec le groupe  $\mathfrak{K}(I/F)$  introduit par Kottwitz dans [Ko5]. On trouvera plus loin la comparaison avec les groupes de caractères utilisés par Kottwitz et Shelstad dans [KS].

**Lemme 1.8.5.** — Soit  $\varepsilon \in \mathfrak{D}(I, G; \mathbb{A}_F)$  et soit  $\tilde{\varepsilon}$  son image dans  $\mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F)$ . Si pour tout  $\kappa \in \mathfrak{K}(I, G; F)_1$  on a  $\langle \tilde{\varepsilon}, \kappa \rangle = 1$  alors  $\tilde{\varepsilon}$  est l'image d'un  $\varepsilon_1 \in \mathfrak{D}(I, G; F)$ .

*Démonstration.* — La proposition 1.8.4 fournit la suite exacte

$$\mathfrak{E}(I, G; F) \rightarrow \mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F) \rightarrow \mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F) .$$

Par hypothèse  $\langle \tilde{\varepsilon}, \kappa \rangle = 1$  pour tout  $\kappa \in \mathfrak{K}(I, G; F)_1$ . Ceci montre que  $\tilde{\varepsilon}$  est dans l'image de  $\tilde{\varepsilon}_1 \in \mathfrak{E}(I, G; F)$ . Le couple  $(\varepsilon, \tilde{\varepsilon}_1)$  définit un élément dans le produit fibré de  $\mathfrak{E}(I, G; F)$  et  $\mathfrak{D}(I, G; \mathbb{A}_F)$  au dessus de  $\mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F)$ . Comme  $G$  est connexe on déduit de 1.6.10 que  $\mathfrak{D}(I, G; F)$  se surjecte sur ce produit fibré et donc  $\tilde{\varepsilon}$  provient d'un  $\varepsilon_1 \in \mathfrak{D}(I, G; F)$ .  $\square$

**Corollaire 1.8.6.** — *On a une suite exacte d'ensembles pointés*

$$1 \rightarrow \ker(\ker^1(F, I) \rightarrow \ker^1(F, G)) \rightarrow \mathfrak{D}(I, G; F) \rightarrow \mathfrak{D}(I, G; \mathbb{A}_F) \rightarrow \mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F) .$$

**Remarque.** — On peut montrer que si  $I$  est un tore les images de  $\mathfrak{D}(I, G; \mathbb{A}_F)$  et  $\mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F)$  dans  $\mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F)$  sont égales. Ceci résulte de l'isomorphisme entre  $\mathfrak{D}(I, G; F_v)$  et  $\mathfrak{E}(I, G; F_v)$  pour les places finies et de ce que, au moins si  $I$  est un tore, l'application

$$\mathfrak{E}(I, G; F) \rightarrow \mathfrak{E}(I, G; F_\infty)$$

est surjective (utiliser [KS, lemma C.5.A]). J'ignore s'il en est de même en général.

## 1.9. Sous-groupes elliptiques

Soit  $F$  un corps local ou global. Considérons trois  $F$ -groupes réductifs connexes  $I$ ,  $G$  et  $H$  avec des injections  $I \rightarrow H$  et  $H \rightarrow G$ . Si  $F$  est global et si  $v$  est une place de  $F$ , nous noterons  $G_v$  etc. les groupes obtenus par extension des scalaires de  $F$  à  $F_v$ .

**Définition 1.9.1.** — Nous dirons que  $I$  est  $H$ -elliptique si  $I$  contient un tore  $T$  elliptique dans  $H$ .

**Lemme 1.9.2.** — *Si  $F$  est un corps local et si  $I$  est  $H$ -elliptique l'application*

$$\mathbf{H}_{ab}^1(F, I) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, H)$$

*est surjective. Si  $F$  est un corps global et si  $I$  est  $H$ -elliptique*

$$\mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, I \setminus H) = 1 .$$

*Si de plus  $I_v$  est  $H_v$ -elliptique, l'application de co-localisation*

$$\mathbf{H}_{ab}^0(F_v, I \setminus H) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I \setminus H)$$

*est surjective.*

*Démonstration.* — Soient  $R$  un tore maximal dans  $H$  et  $R_{sc}$  son image réciproque dans  $H_{SC}$ . Soient  $S$  un tore maximal dans  $I$  et  $S_{sc}$  son image réciproque dans  $I_{SC}$ . On peut supposer que  $S = R$  et comme  $I$  est  $H$ -elliptique, ces tores peuvent être choisis de sorte que  $S_{sc}$  et  $R_{sc}$  soient anisotropes. On dispose de quasi-isomorphismes

$$[S_{sc} \rightarrow S] \rightarrow I_{ab}$$

et

$$[R_{sc} \rightarrow R] \rightarrow H_{ab}.$$

et d'un diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & \mathbf{H}^1(F, S) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(F, I) & \rightarrow & \mathbf{H}^2(F, S_{sc}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \rightarrow & \mathbf{H}^1(F, R) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(F, H) & \rightarrow & \mathbf{H}^2(F, R_{sc}) \end{array}$$

Comme  $R = S$ , la surjectivité de l'homomorphisme

$$\mathbf{H}_{ab}^1(F, I) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, H)$$

résulte de ce que, d'après 1.5.1,

$$\mathbf{H}^2(F, S_{sc}) = \mathbf{H}^2(F, R_{sc}) = 1.$$

Le bi-complexe :

$$\begin{array}{ccc} S_{sc} & \rightarrow & R_{sc} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \rightarrow & R \end{array}$$

est quasi-isomorphe à l'ensemble croisé

$$[I_{ab} \rightarrow H_{ab}].$$

Mais comme  $S = R$  le bi-complexe est quasi-isomorphe au complexe de tores

$$[S_{sc} \rightarrow R_{sc}][+1],$$

et donc

$$\mathbf{H}_{ab}^i(*, I \setminus H) = \mathbf{H}^{i+1}(*, S_{sc} \rightarrow R_{sc}).$$

On conclut en observant que d'après 1.5.1

$$\mathbf{H}^2(\mathbb{A}_F/F, S_{sc} \rightarrow R_{sc}) = 1$$

et que si  $I$  est  $H_v$ -elliptique, la flèche de co-localisation en  $v$

$$\mathbf{H}^1(F_v, S_{sc} \rightarrow R_{sc}) \rightarrow \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F/F, S_{sc} \rightarrow R_{sc})$$

est surjective. □

**Corollaire 1.9.3.** — *Si  $I$  est  $H$ -elliptique, l'entier*

$$d(I, G) = \# \text{ coker } [\mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, I) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G)]$$

*est indépendant de  $I$  :*

$$d(I, G) = d(H, G).$$

*Démonstration.* — Comme

$$\mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, I \setminus H) = 1$$

l'application

$$\mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, I) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, H)$$

est surjective et on a donc

$$\text{coker} [\mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, I) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G)] = \text{coker} [\mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, H) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G)].$$

□

**Lemme 1.9.4.** — *Soit  $F$  un corps local ou global. Si  $I$  est  $H$ -elliptique la suite*

$$\mathfrak{E}(I, H; *) \rightarrow \mathfrak{E}(I, G; *) \rightarrow \mathfrak{E}(H, G; *) \rightarrow 1$$

*avec  $*$  =  $F$  si  $F$  est local ou  $*$  =  $\mathbb{A}_F/F$  si  $F$  est global, est exacte.*

*Démonstration.* — On dispose d'un triangle distingué

$$\cdots \rightarrow [I_{ab} \rightarrow H_{ab}] \rightarrow [I_{ab} \rightarrow G_{ab}] \rightarrow [H_{ab} \rightarrow G_{ab}] \rightarrow \cdots$$

qui fournit une suite exacte longue en cohomologie abélianisée :

$$\cdots \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(*, I \setminus H) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(*, I \setminus G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(*, H \setminus G) \rightarrow \cdots$$

d'où, par passage au quotient, une suite exacte

$$\mathfrak{E}(I, H; *) \rightarrow \mathfrak{E}(I, G; *) \rightarrow \mathfrak{E}(H, G; *) .$$

Comme  $I$  est  $H$ -elliptique

$$\mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, I \setminus H) = 1$$

si  $F$  est global d'après 1.9.2 et donc

$$\mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I \setminus G) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, H \setminus G)$$

est surjective. La surjectivité de

$$\mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F) \rightarrow \mathfrak{E}(H, G; \mathbb{A}_F/F)$$

en résulte, par passage au quotient. Lorsque  $F$  est local, on dispose d'un diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \mathfrak{E}(I, G; F) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(F, I) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(F, G) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \rightarrow & \mathfrak{E}(H, G; F) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(F, H) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(F, G) \end{array}$$

et on rappelle que, d'après 1.9.2, l'application

$$\mathbf{H}_{ab}^1(F, I) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, H)$$

est surjective. La surjectivité de

$$\mathfrak{E}(I, G; F) \rightarrow \mathfrak{E}(H, G; F)$$

en résulte. □

**Définition 1.9.5.** — Soit  $F$  un corps global. On dira qu'un ensemble fini  $\mathfrak{V}$  de places  $v$  de  $F$  est  $(G, I)$ -essentiel si l'application

$$\mathfrak{E}(I, G; F_{\mathfrak{V}}) \rightarrow \mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F)$$

est surjective. En particulier on aura  $\ker_{ab}^1(F, I \setminus G) = 1$ .

On note  $\mathfrak{K}(I, G; F)_0$  le dual de Pontryagin de  $\ker_{ab}^1(F, I \setminus G)$ . C'est le noyau de l'application de localisation pour les groupes de caractères endoscopiques :

$$1 \rightarrow \mathfrak{K}(I, G; F)_0 \rightarrow \mathfrak{K}(I, G; F)_1 \rightarrow \prod_v \mathfrak{K}(I, G; F_v)_1 .$$

Dire que  $\mathfrak{V}$  est un ensemble de places  $(G, I)$ -essentiel, équivaut à dire que l'application de  $\mathfrak{V}$ -localisation

$$\mathfrak{K}(I, G; F)_1 \rightarrow \mathfrak{K}(I, G; F_{\mathfrak{V}})_1$$

est injective et qu'en particulier  $\mathfrak{K}(I, G; F)_0 = 1$ .

**Proposition 1.9.6.** — Soit  $\mathfrak{V}$  un ensemble fini, non vide, de places de  $F$ . Supposons que  $I_v$  est  $H_v$ -elliptique pour tout  $v \in \mathfrak{V}$ . Pour que  $\mathfrak{V}$  soit  $(G, I)$ -essentiel, il faut et il suffit que

$$\mathfrak{E}(H, G; F_{\mathfrak{V}}) \rightarrow \mathfrak{E}(H, G; \mathbb{A}_F/F)$$

soit surjective, c'est-à-dire que  $\mathfrak{V}$  soit  $(G, H)$ -essentiel. En particulier, lorsque  $G = H$  ou lorsque les groupes  $G$  et  $H$  sont semi-simples simplement connexes,  $\mathfrak{V}$  est  $(G, I)$ -essentiel.

*Démonstration.* — Par hypothèse  $I_v$  est  $H_v$ -elliptique pour tout  $v \in \mathfrak{V}$ . On dispose alors d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{E}(I, H; F_{\mathfrak{V}}) & \rightarrow & \mathfrak{E}(I, G; F_{\mathfrak{V}}) & \rightarrow & \mathfrak{E}(H, G; F_{\mathfrak{V}}) & \rightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{E}(I, H; \mathbb{A}_F/F) & \rightarrow & \mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F) & \rightarrow & \mathfrak{E}(H, G; \mathbb{A}_F/F) & \rightarrow & 1 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes d'après 1.9.4 et comme  $\mathfrak{V}$  est non vide il résulte alors de 1.9.2 que la première flèche verticale est surjective. On en déduit que

$$\text{coker} [\mathfrak{E}(I, G; F_{\mathfrak{V}}) \rightarrow \mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F)] = \text{coker} [\mathfrak{E}(H, G; F_{\mathfrak{V}}) \rightarrow \mathfrak{E}(H, G; \mathbb{A}_F/F)].$$

La dernière assertion résulte de ce que tout ensemble fini non vide de places de  $F$  est trivialement  $(G, H)$ -essentiel, lorsque  $G = H$  ou lorsque les groupes  $G$  et  $H$  sont semi-simples simplement connexes puisque dans ce cas

$$\mathfrak{E}(H, G; \mathbb{A}_F/F) = 1 .$$

□

Supposons maintenant  $H_{der}$  simplement connexe. On va donner ci-dessous un critère sur le co-centre, assurant qu'un ensemble réduit à une place soit  $(G, H)$ -essentiel. C'est la condition utilisée par Clozel dans [Clo2] lemme 6.5.

**Lemme 1.9.7.** — *Supposons que le groupes dérivé  $H_{\text{der}}$  est simplement connexe, que  $\ker^1(F, G) = 1$  et qu'enfin il existe une extension  $K$  de  $F$  qui déploie le co-centre  $D_H$  de  $H$ , et telle qu'en une place  $v$ , l'algèbre  $K_v = F_v \otimes K$  soit un corps. Alors  $\mathfrak{V} = \{v\}$  est  $(G, H)$ -essentiel.*

*Démonstration.* — La trivialité de  $\ker^1(F, G)$  et la simple connexité des groupes dérivés fournit un diagramme commutatif à verticales exactes :

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \rightarrow & 1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathfrak{E}(H, G; F_v) & \rightarrow & \mathfrak{E}(H, G; \mathbb{A}_F/F) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{H}^1(F_v, D_H) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F/F, D_H) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{H}^1(F_v, D_G) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F/F, D_G) \quad .
 \end{array}$$

L'hypothèse sur l'existence du corps  $K$  montre que les deux dernières horizontales sont bijectives. On en déduit la bijectivité de la seconde.  $\square$

## CHAPITRE 2

### CONJUGAISON STABLE, INTÉGRALES ORBITALES ET NORME

Cette partie est consacrée à l'étude de la conjugaison stable. Cette notion a été introduite par Langlands ; son étude a été poursuivie par Kottwitz et Shelstad. Nous devons généraliser certains de leurs résultats. Pour cela il s'avère utile de reformuler jusqu'aux définitions en utilisant la cohomologie abélianisée.

#### 2.1. Groupes et automorphismes

Soit  $G$  un groupe réductif connexe défini sur  $F$  muni d'un  $F$ -automorphisme semi-simple  $\theta$ . On notera  $G^\theta$  le sous-groupe des invariants sous  $\theta$  et on notera  $G_\theta$  l'ensemble des classes de  $\theta$ -conjugaison dans  $G$ .

Soit  $\Theta$  un groupe fini d'automorphismes. Considérons le groupe algébrique réductif  $G^+$  produit semi-direct de  $G$  et de  $\Theta$ . Soient  $\theta \in \Theta$ , et  $L$  la composante connexe contenant  $1 \rtimes \theta$ . Nous noterons  $\ell$  l'ordre du groupe cyclique engendré par  $\theta$ . Si  $f$  est une fonction sur  $G(F)$  on notera  $f_L$  la fonction sur  $L(F)$  définie par

$$f_L(x \rtimes \theta) = f(x) .$$

L'application  $x \mapsto x \rtimes \theta$  fait passer de la  $\theta$ -conjugaison sur  $G$  (qui est le point de vue adopté dans [Ko1] et [KS]) à la conjugaison sur  $L$  :

$$x' = y^{-1} x \theta(y)$$

équivalent à

$$x' \rtimes \theta = y^{-1} (x \rtimes \theta) y .$$

On notera  $G^*$ , la forme intérieure quasi-déployée de  $G$ . On fixe un isomorphisme

$$G \rightarrow G^* ,$$

défini sur la clôture algébrique  $\overline{F}$  de  $F$  et pour simplifier les notations on identifiera, via cet isomorphisme,  $G(\overline{F})$  avec  $G^*(\overline{F})$  ; toutefois les actions de Galois sont différentes. Soit  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{F}/F)$  ; on note  $\sigma^*$  (resp.  $\sigma$ ) son action sur  $G^*$  (resp.  $G$ ). Ces deux actions



diffèrent par l'action adjointe d'une 1-cochaîne  $u$  dont le cobord  $z$  est à valeurs dans le centre de  $G^*$  :

$$\text{Ad}(u_\sigma) \sigma^*(x) = \sigma(x)$$

avec

$$u_\sigma \sigma^*(u_\tau) u_{\sigma\tau}^{-1} = z_{\sigma,\tau} .$$

Il sera utile de remarquer que l'on peut supposer que  $u$  est l'image par l'homomorphisme naturel  $p_G$  d'une 1-cochaîne  $\tilde{u}$  à valeurs dans  $G_{SC}$  dont le cobord  $\tilde{z}$  est à valeurs dans  $Z_{sc}$  le centre du groupe  $G_{SC}$ . On prendra garde qu'en général  $1 \times \theta$  ne commute pas avec l'action adjointe de  $u$  et il se peut que l'automorphisme  $\theta$  ne commute pas avec  $\sigma^*$ . Ce sera toutefois le cas pour le changement de base.

## 2.2. Restriction des scalaires et algèbres cycliques

Soit  $G_0$  un groupe et  $\Theta$  un groupe cyclique d'ordre  $\ell$  engendré par  $\theta$ . On considère le produit, indexé par  $\Theta$ , de  $\ell$  copies de  $G_0$  :

$$G = G_0 \times \cdots \times G_0 = (G_0)^\Theta .$$

Le générateur  $\theta$  de  $\Theta$ , agit sur  $G$  par permutation cyclique des facteurs :

$$\theta(x_1, \dots, x_\ell) = (x_2, \dots, x_\ell, x_1) .$$

L'application diagonale

$$\Delta : x \mapsto (x, \dots, x)$$

identifie  $G_0$  avec le groupe  $G^\theta$  des points fixes sous  $\theta$ . On dispose aussi d'une application co-diagonale de  $G$  dans  $G_0$  :

$$\nabla : (x_1, \dots, x_\ell) \rightarrow x_1 \cdots x_\ell$$

On dispose enfin de l'application norme

$$N^\theta : y \mapsto y \theta(y) \cdots \theta^{\ell-1}(y) = (\nabla y, \nabla \theta(y), \dots, \nabla \theta^{\ell-1}(y))$$

de  $G$  dans lui-même.

**Lemme 2.2.1.** — Soit  $y = (y_1, \dots, y_\ell) \in G$  il existe  $v = (v_1, \dots, v_\ell)$  tel que

$$y = v^{-1} y' \theta(v) \quad \text{avec} \quad y' = (1, \dots, 1, \nabla y) .$$

De plus

$$N^\theta(y') = \Delta(\nabla(y)) \quad \text{et} \quad N^\theta(y) = v^{-1} \Delta(\nabla(y)) v .$$

*Démonstration.* — Une solution est  $v = (1, y_1, y_1 y_2, \dots, y_1 \cdots y_{\ell-1})$ . □

**Lemme 2.2.2.** — *Le groupe des invariants est dans l'image de la norme. La norme est une injection de l'ensemble  $G_\theta$  des classes de  $\theta$ -conjugaison dans l'ensemble des classes de conjugaison dans  $G$  : si  $\nabla x = \nabla y$  alors il existe  $v$  tel que  $y = v^{-1}x\theta(v)$ . En particulier*

$$\mathbf{H}^1(\Theta, G) = 1 .$$

Si  $G_0$  est un groupe abélien, l'application

$$G_\theta \rightarrow G^\theta ,$$

induite par la norme, est un isomorphisme.

*Démonstration.* — Si  $x \in G_0$  alors  $y = (x, 1, \dots, 1) \in G$  est tel que  $N^\theta y = \Delta x$  : le groupe des invariants est donc dans l'image de la norme. Pour un groupe abélien l'image de la norme est donc le groupe des invariants. Si  $x = (x_1, \dots, x_\ell)$  et  $y = (y_1, \dots, y_\ell)$  avec

$$\nabla x = x_1 \cdots x_\ell = y_1 \cdots y_\ell = \nabla y$$

alors 2.2.1, ou un calcul direct montre que

$$(v_1^{-1}, \dots, v_\ell^{-1})(x_1, \dots, x_\ell)(v_2, \dots, v_1) = (y_1, \dots, y_\ell)$$

si  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = x_1^{-1}y_1$  et  $v_\ell = x_{\ell-1}^{-1} \cdots x_1^{-1}y_1 \cdots y_{\ell-1}$  et on a donc  $y = v^{-1}x\theta(v)$ . Si  $G$  est abélien, l'application  $G_\theta \rightarrow G$  est donc injective. On a déjà vu que dans ce cas son image était  $G^\theta$ .  $\square$

On suppose maintenant que  $G_0$  est un groupe algébrique défini sur  $F$ . Soit  $E$  une  $F$ -algèbre cyclique de degré  $\ell$ . Soit  $\Theta$  le groupe de Galois de  $E/F$ ; c'est un groupe cyclique. La donnée de  $E$  comme algèbre cyclique sur  $F$  équivaut à la donnée d'un homomorphisme

$$\text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \Theta .$$

Son image est un sous-groupe d'ordre  $\ell_1$ . L'algèbre  $E$  est un produit de  $\ell_0$  copies d'un corps  $F_1$  extension cyclique de degré  $\ell_1$  de  $F$  avec  $\ell = \ell_0\ell_1$ . La restriction des scalaires de  $E$  à  $F$  de  $G_0$

$$G = \text{Res}_{E/F}G_0$$

est le groupe produit, indexé par  $\Theta$ , de  $\ell$  copies de  $G_0$  et on fait agir  $\text{Gal}(\overline{F}/F)$  sur  $G$  via son action sur  $G_0$  et  $\Theta$ , ce qui s'explique comme suit : On choisit un générateur  $\theta$  de  $\Theta$ ; si  $\tau \in \text{Gal}(\overline{F}/F)$  a pour image  $\theta^r$  alors

$$\tau(x_1, \dots, x_\ell) = (\tau(x_{1+r}), \dots, \tau(x_r)) .$$

L'application

$$(x_1, \dots, x_\ell) \mapsto (x_1, \dots, x_{\ell_0})$$

induit un isomorphisme

$$G(F) \rightarrow G_0(E) = G_0(F_1) \times \cdots \times G_0(F_1) .$$

Le générateur  $\theta$  de  $\Theta$ , qui agit sur  $G$  par permutation cyclique des facteurs, commute avec l'action de Galois et définit un  $F$ -automorphisme. Lorsque  $G_0$  est abélien il résulte de 2.2.2 que la norme induit un isomorphisme

$$G_\theta(F) \rightarrow G^\theta(F) .$$

Le changement de base correspond à la situation suivante : on se donne une algèbre cyclique  $E/F$  et  $G_0$  un groupe réductif connexe, et on considère le groupe  $G$  obtenu par restriction des scalaires :

$$G = \text{Res}_{E/F} G_0 .$$

On note  $G^+$  le produit semi-direct de  $G$  par  $\Theta$  :

$$G^+ = G \rtimes \Theta$$

et  $L$  la composante connexe de  $1 \rtimes \theta$  dans  $G^+$ .

### 2.3. La conjugaison stable

Soit  $G^+$  un groupe réductif algébrique sur  $F$ , admettant  $G$  comme composante connexe de l'identité. Soit  $L$  une composante connexe de  $G^+$ , définie sur  $F$  et possédant un point rationnel.

Soit  $\delta \in L(F)$  un élément semi-simple ; on note  $G^\delta$  le centralisateur de  $\delta$  dans  $G$ . On sait que c'est un groupe réductif. D'après Steinberg, il existe dans  $G$  un tore maximal  $T$  et un sous-groupe de Borel  $B$  contenant  $T$ , stables par  $\delta$ -conjugaison. On dira que  $\delta$  est régulier si la composante neutre  $(G^\delta)^0$  de  $G^\delta$  est un tore. On dira que  $\delta$  est fortement régulier si  $G^\delta$  est abélien. Dans ce cas  $G^\delta$  est égal au centralisateur  $T^\delta$  de  $\delta$  dans  $T$ .

**Définition 2.3.1.** — Soit  $\delta \in L(F)$  un élément semi-simple. Soit  $T_\delta$  le tore maximal du centre du centralisateur, dans  $G$ , de  $(G^\delta)^0$  la composante neutre du centralisateur de  $\delta$ . On appellera centralisateur stable de  $\delta$ , le sous-groupe  $I_\delta^G$  de  $G^\delta$  engendré par  $(G^\delta)^0$  et  $(T_\delta)^\delta$ .

Un théorème de Steinberg affirme que, dans un groupe semi-simple et simplement connexe, le groupe des points fixes d'un automorphisme semi-simple est toujours connexe. Donc, si  $G = G_{SC}$  on a  $I_\delta = (G^\delta)^0$ . Dans le cas de l'endoscopie ordinaire, ou plus généralement du changement de base, on montrera en 2.3.3 que le centralisateur stable est connexe :  $I_\delta = (G^\delta)^0$ . Mais, dans le cas général, même lorsque  $\delta$  est fortement régulier auquel cas  $I_\delta = G^\delta = (T_\delta)^\delta$ , le centralisateur stable n'est pas toujours connexe.

**Lemme 2.3.2.** — *Le centralisateur stable  $I_\delta$  est un sous-groupe quasi-connexe de  $G$  définissant une paire admissible.*

*Démonstration.* — Soit  $\tilde{I}_\delta$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $(G^\delta)^0$  et  $T_\delta$ . Si on note  $S_\delta$  le tore image de  $T_\delta$  par l'application

$$x \mapsto x \delta x^{-1} \delta^{-1},$$

alors  $I_\delta$  est le noyau de

$$\tilde{I}_\delta \rightarrow S_\delta.$$

□

**Lemme 2.3.3.** — *Dans le cas du changement de base, le centralisateur stable d'un élément semi-simple est connexe.*

*Démonstration.* — Soit  $\delta = y \rtimes \theta \in L$ . On observe que d'après 2.2.1

$$y = (y_1, \dots, y_\ell)$$

est  $\theta$ -conjugué de

$$y' = (1, \dots, 1, \nabla(y)).$$

On en déduit que le centralisateur de  $\delta$  c'est-à-dire le  $\theta$ -centralisateur de  $y$  dans  $G$ , est isomorphe au centralisateur de  $\nabla(y)$  dans  $G_0$ . Il suffit d'étudier le cas  $y = y'$ . Comme  $\nabla(y)$  est un élément semi-simple, son centralisateur dans  $G_0$  contient un tore maximal  $S$ . Mais le centralisateur de  $S$  dans  $G$  est un tore  $T$  qui contient le centralisateur de  $(G^\delta)^0$  et donc, avec les notations de 2.3.1, on a  $T_\delta \subset T$ . Comme  $T^\delta = S$  on en déduit que

$$(T_\delta)^\delta \subset S \subset (G^\delta)^0.$$

□

Soient  $\delta$  et  $\delta' \in L(F)$  semi-simples et conjugués sur la clôture algébrique, c'est-à-dire qu'il existe  $x \in G(\overline{F})$  tel que

$$\delta' = x^{-1} \delta x.$$

On a alors pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{F}/F)$

$$x \sigma(x)^{-1} \in G^\delta.$$

La conjugaison stable est définie en imposant que la cochaîne  $a_\sigma = x \sigma(x)^{-1}$  prenne ses valeurs dans le centralisateur stable :

**Définition 2.3.4.** — Soit  $\delta \in L(F)$  un élément semi-simple. Nous dirons que  $\delta' \in L(F)$  est  $G$ -stablement conjugué à  $\delta$  s'il existe  $x \in G$  tel que

$$\delta' = x^{-1} \delta x$$

et si pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{F}/F)$

$$a_\sigma = x \sigma(x)^{-1} \in I_\delta.$$

On définit de même la  $G^+$ -conjugaison stable, en utilisant des  $x \in G^+(\overline{F})$  (mais sans modifier la notion de centralisateur stable).

Le couple  $(x, a)$  définit une classe dans  $\mathbf{H}^0(F, I_\delta \backslash G)$  et donc une classe dans

$$\mathfrak{D}(I_\delta, G; F) = \ker[\mathbf{H}^1(F, I_\delta) \rightarrow \mathbf{H}^1(F, G)] .$$

La donnée d'une classe dans  $\mathbf{H}^0(F, I_\delta \backslash G)$  définit un unique  $\delta'$ . L'ensemble des éléments de  $L(F)$  stablement conjugués à  $\delta$  est l'image de la flèche

$$\mathbf{H}^0(F, I_\delta \backslash G) \rightarrow \mathbf{H}^0(F, L) = L(F)$$

induite par l'application

$$x \mapsto x^{-1} \delta x = \delta' ;$$

dont les fibres sont les ensembles

$$\ker[\mathbf{H}^1(F, I_{\delta'}) \rightarrow \mathbf{H}^1(F, G^{\delta'})] .$$

En effet cette flèche se factorise via l'application injective

$$\mathbf{H}^0(F, G^\delta \backslash G) \rightarrow \mathbf{H}^0(F, L) .$$

L'ensemble  $\mathcal{C}(\delta)$  des classes de conjugaison ordinaire dans la classe de conjugaison stable de  $\delta$  est paramétré par l'image de la flèche

$$\mathfrak{D}(I_\delta, G; F) \rightarrow \ker[\mathbf{H}^1(F, G^\delta) \rightarrow \mathbf{H}^1(F, G)] .$$

Lorsque  $I_\delta = G^\delta$ , un couple  $(\delta, \delta')$  d'éléments stablement conjugués provient d'une unique classe dans  $\mathbf{H}^0(F, I_\delta \backslash G)$  dont l'image dans  $\mathbf{H}_{ab}^0(F, I_\delta \backslash G)$  est parfois notée  $\text{inv}(\delta, \delta')$ .

#### 2.4. Norme pour le changement de base

On se donne une algèbre cyclique  $E/F$ , un générateur  $\theta$  de son groupe de Galois et  $G_0$  un groupe réductif connexe. On considère le groupe  $G$  obtenu par restriction des scalaires :

$$G = \text{Res}_{E/F} G_0 .$$

On notera  $H$ , plutôt que  $G_0^*$ , la forme intérieure quasi-déployée de  $G_0$ . On fixe une cochaîne  $u$  à valeurs dans  $H$  qui définit  $G_0$  comme forme intérieure de  $H$  et donc aussi  $G$  comme forme intérieure de  $G^*$ . On voit que  $\theta$  définit un  $F$ -automorphisme de  $G^*$  et que

$$H = (G^*)^\theta .$$

Le groupe  $H$  est un groupe endoscopique pour le couple  $(G, \theta)$  (cf. [KS]). Ce sera le seul groupe endoscopique que nous considérerons. C'est par rapport à lui que nous définirons la norme.

Soit  $\delta = y \rtimes \theta \in L(F)$ . Soient  $\gamma \in G^*$  et  $x \in G^*$  tels que

$$x \delta^\ell x^{-1} = \gamma .$$

Pour  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{F}/F)$  posons

$$a_\sigma = x u_\sigma \sigma^*(x)^{-1}$$

et

$$s = xy \theta(x)^{-1} .$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma^*(\gamma) = \gamma &\iff a_\sigma^{-1} \gamma a_\sigma = \gamma \\ \theta(\gamma) = \gamma &\iff s^{-1} \gamma s = \gamma \end{aligned}$$

et donc, demander que  $\gamma \in H(F)$  équivaut à demander que  $a_\sigma$  et  $s$  commutent avec  $\gamma$ .

Pour simplifier les notations nous noterons  $J^* = I_\gamma^{G^*}$  et  $I^* = I_\gamma^H$  les centralisateurs stables d'un  $\gamma$  semi-simple dans  $G^*$  et  $H$  respectivement, et  $I^*$  le sous-groupe des  $\theta$ -invariants dans  $J^*$ .

**Définition 2.4.1.** — Soit  $\gamma \in H(F)$  semi-simple. On dit que  $\gamma$  est une norme de  $\delta \in L(F)$  si il existe  $x \in G^*$  tel que

$$(1) \quad x \delta^\ell x^{-1} = \gamma \quad \text{et} \quad s = xy \theta(x)^{-1} \in J^*$$

avec, pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{F}/F)$

$$(2) \quad a_\sigma = x u_\sigma \sigma^*(x)^{-1} \in J^* .$$

Compte tenu de (1), on voit que

$$(3) \quad a_\sigma \sigma^*(s) \theta(a_\sigma)^{-1} = s .$$

On sait que  $u$  est un cocycle à valeur dans  $H$  dont le cobord est central ; donc

$$(4) \quad \partial a = x(\partial u)x^{-1} = \partial u = z$$

où  $z$  est un 2-cocycle à valeurs dans  $Z^\theta$ . Les relations (2), (3) et (4) reviennent à dire que le quintuple  $(x, s, a, u, z)$  définit un 0-cocycle à valeurs dans l'ensemble croisé

$$Z^\theta \rightarrow J^* \times H \rightrightarrows J^* \times G^*$$

associé au diagramme :

$$\begin{array}{ccc} Z^\theta & \rightarrow & J^* & \rightrightarrows & J^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H & \rightarrow & G^* & & \end{array}$$

où l'action de  $J^*$  sur lui-même est la  $\theta$ -conjugaison. Si  $G_{der}$  est simplement connexe sa classe de cohomologie ne dépend que du couple  $(\gamma, \delta)$ .

Il sera utile de reformuler les conditions qui définissent une norme. Soit  $Z_\gamma$  le centre de  $G^{*\gamma}$  ; on remarque que  $Z_\gamma \subset J^*$ . Comme  $\gamma \in Z_\gamma^\theta$  il existe  $t \in Z_\gamma$  avec  $N^\theta t = \gamma$  d'après 2.2.2. Soit  $s = xy \theta(x)^{-1} \in J^*$  alors  $N^\theta s = N^\theta t = \gamma$  et donc  $s$  et  $t$  sont  $\theta$ -conjugués dans  $J^*$  ; quitte à modifier  $x$  par un élément de  $J^*$  nous pouvons supposer  $s = t$ , c'est-à-dire

$$t = xy \theta(x)^{-1} \in Z_\gamma \subset J^* .$$

Comme  $\sigma^*(\gamma) = \gamma$  et  $\theta(\gamma) = \gamma$  il existe, d'après 2.2.2, une 1-cochaîne  $b$  à valeurs dans  $Z_\gamma$  telle que

$$\sigma^*(t) = b_\sigma^{-1} t \theta(b_\sigma).$$

On observe que

$$\sigma^*(t) = a_\sigma^{-1} t \theta(a_\sigma) = b_\sigma^{-1} t \theta(b_\sigma).$$

Comme par construction  $a$  est à valeurs dans  $J^*$ , et que  $t$  et  $b$  sont à valeurs dans le centre de  $J^*$ , on a

$$\theta(a_\sigma b_\sigma^{-1}) = a_\sigma b_\sigma^{-1} = b_\sigma^{-1} a_\sigma.$$

Posons

$$c_\sigma = a_\sigma b_\sigma^{-1}.$$

On a donc

$$c_\sigma \in J^* \quad \text{avec} \quad c_\sigma = \theta(c_\sigma) \quad \text{et} \quad \partial c = \partial a \partial b^{-1},$$

ce qui montre que  $c$  est une cochaîne à valeurs dans  $I^*$ , le groupe des  $\theta$ -invariants dans  $J^*$ . En résumé, dire que  $\delta = y \times \theta$  admet  $\gamma$  pour norme, revient à demander que :

$$\gamma = N^\theta t, \quad t = x y \theta(x)^{-1} \quad \text{et} \quad \sigma^*(t) = b_\sigma^{-1} t \theta(b_\sigma)$$

que  $t$  et la cochaîne  $b$  soient à valeurs dans  $Z_\gamma$ , et enfin que

$$a_\sigma = x u_\sigma \sigma^*(x)^{-1} = c_\sigma b_\sigma \quad \text{avec} \quad c_\sigma \in I^*.$$

C'est l'élément  $t$  qui est appelé 'norme abstraite' dans [KS].

**Remarque.** — On trouvera dans [KS] une définition de la norme pour tous les groupes endoscopiques, et ce dans le cadre général où  $\theta$  est un automorphisme presque semi-simple quelconque, mais seuls les éléments fortement réguliers sont traités.

**Théorème 2.4.2.** — *Tout  $\delta \in L(F)$  semi-simple possède une norme dans  $H(F)$ .*

*Démonstration* (cf. [Ko1]). — La classe de  $G$ -conjugaison de  $\delta^\ell$  est  $F$ -rationnelle. Si  $\delta = y \times \theta$  on a

$$\delta^\ell = N^\theta(y).$$

Il résulte de 2.2.1 que  $N^\theta(y)$  est conjugué de  $\Delta(\nabla(y)) \in H(\overline{F})$  le groupe des  $\theta$ -invariants dans  $G^*(\overline{F})$ . L'intersection de la classe de conjugaison de  $\delta^\ell$  avec le sous-groupe  $H(\overline{F})$  est donc une classe de  $H$ -conjugaison rationnelle. Puisque  $H$  est quasi-déployé, une telle classe possède un point rationnel si  $H$  est à groupe dérivé simplement connexe [Ko1, Theorem 4.4]. Un élément rationnel  $\gamma$  dans cette intersection est une norme de  $\delta$ . Pour un groupe général, l'existence de normes résulte de l'existence de normes pour une  $z$ -extension.  $\square$

**Lemme 2.4.3 ([Ko1, Proposition 5.7]).** — *La norme induit une injection de l'ensemble des classes de conjugaison stable d'éléments semi-simples dans  $L(F)$  dans l'ensemble des classes de conjugaison stable dans  $H(F)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\delta \in L(F)$  semi-simple. L'existence d'une norme a été prouvée en 2.4.2. On vérifie facilement que si  $\gamma'$  est stablement conjugué de  $\gamma$ , et si  $\gamma$  est une norme de  $\delta$ , alors  $\gamma'$  est aussi une norme de  $\delta$ . Soient  $\delta$  et  $\delta'$  admettant  $\gamma$  pour norme et soient  $(x, a)$  et  $(x', a')$  les cochaînes correspondantes. Posons

$$x' = xm$$

alors

$$a'_\sigma = x(m\sigma(m)^{-1})x^{-1}a_\sigma$$

et donc

$$m\sigma(m)^{-1} \in x^{-1}I^*x$$

et

$$m^{-1}\delta m = \delta'$$

ce qui veut dire que  $\delta$  et  $\delta'$  sont stablement conjugués puisque  $I_\delta = x^{-1}I^*x$ .  $\square$

**Lemme 2.4.4.** — Soit  $\delta \in L(F)$  semi-simple de norme  $\gamma \in H(F)$ . Le centralisateur  $G^\delta$  et le centralisateur stable  $I_\delta$  de  $\delta$  dans  $G$  sont respectivement isomorphes à des formes intérieures de  $H^\gamma$  et de  $I^* = I_\gamma^H$ , la torsion étant donnée par une cochaîne à valeurs dans  $I^*$ . De plus, quitte à changer  $\gamma$  dans sa classe de conjugaison stable, on peut supposer  $I^*$  quasi-déployé.

*Démonstration.* — On observe que  $G^\delta = x^{-1}H^\gamma x$ . Pour  $g \in G^\delta$  on pose

$$h = xgx^{-1} \in H^\gamma;$$

on a alors

$$x\sigma(g)x^{-1} = a_\sigma\sigma^*(h)a_\sigma^{-1}$$

mais  $a = cb$  avec  $b$  à valeurs dans le centre  $Z_\gamma$  de  $G^{*\gamma}$  donc

$$x\sigma(g)x^{-1} = c_\sigma\sigma^*(h)c_\sigma^{-1} = \sigma_c^*(h)$$

et donc  $G^\delta$  est isomorphe à  $H^\gamma$  muni de l'action de Galois tordue par la cochaîne  $c$  (voir aussi [Ko1, Lemma 5.8]). Comme  $H$  est quasi-déployé, la dernière assertion du lemme résulte de [Ko1, Lemma 3.3].  $\square$

**Corollaire 2.4.5.** — Les groupes quotients  $G^\delta/I_\delta$  et  $H^\gamma/I^*$  sont des  $F$ -groupes isomorphes.

**Définition 2.4.6.** — On dira que  $\delta \in L(F)$  est  $F$ -elliptique si le centralisateur (stable) de sa norme est elliptique dans  $H$ .

Dire que  $\delta$  est elliptique équivaut à demander que sa norme  $\gamma$  soit elliptique. Nous allons maintenant donner des critères permettant d'affirmer qu'un  $\gamma$  semi-simple est une norme.



### 2.5. Image de la norme, cas local

Soit  $J^*$  un  $F$ -sous-groupe réductif connexe  $\theta$ -stable de  $G^* : \theta(J^*) = J^*$  et contenant l'image du centre  $Z^\theta$  de  $H$ . On considère l'ensemble croisé

$$[Z^\theta \rightarrow J^* \rightrightarrows J^*]$$

où

$$J^* \rightrightarrows J^*$$

symbolise l'action de  $J^*$  sur lui-même par  $\theta$ -conjugaison. Pour simplifier, son ensemble de 0-cohomologie

$$\mathbf{H}^0(F, Z^\theta \rightarrow J^* \rightrightarrows J^*)$$

sera noté

$$\mathbf{H}^0(F; Z^\theta, \theta, J^*).$$

Rappelons que c'est l'ensemble des classes de triplets  $(t, a, z)$  où  $t \in J^*$  et  $a$  est une 1-cochaîne à valeurs dans  $J^*$  et  $z$  un 2-cocycle à valeurs dans  $Z^\theta$  satisfaisant les conditions :

$$(1) \quad \sigma^*(t) = a_\sigma^{-1} t \theta(a_\sigma),$$

et

$$(2) \quad \partial a = z.$$

La relation d'équivalence est définie par la  $\theta$ -conjugaison sur  $t$  et des changements compatibles des cochaîne  $a$  et  $z$ . L'application  $(t, a, z) \mapsto (a, z)$  induit une application

$$\mathbf{H}^0(F; Z^\theta, \theta, J^*) \rightarrow \mathbf{H}^1(F, Z^\theta \rightarrow J^*)$$

que nous composerons avec l'application

$$\mathbf{H}^1(F, Z^\theta \rightarrow J^*) \rightarrow \mathbf{H}^1(F, Z^\theta \rightarrow G^*)$$

induite par l'inclusion. Nous noterons  $\mathfrak{A}(F; J, \theta, G)$  l'ensemble des  $\tau \in \mathbf{H}^0(F; Z^\theta, \theta, J^*)$  dont l'image dans  $\mathbf{H}^1(F, Z^\theta \rightarrow G^*)$  est l'image de  $[(u, z)] \in \mathbf{H}^1(F, Z^\theta \rightarrow H)$  le cocycle qui définit  $G_0$  comme forme intérieure de  $G_0^* = H$ .

**Lemme 2.5.1.** — Soit  $\tau \in \mathfrak{A}(F; J, \theta, G)$  représenté par un triplet  $(t, a, z)$  ; la classe de  $\theta$ -conjugaison de  $t$  sur la clôture algébrique contient un élément rationnel  $y \in G(F)$ .

*Démonstration.* — Le cocycle  $(a, z)$  a pour image  $(u, z)$  dans  $\mathbf{H}^1(F, Z^\theta \rightarrow G^*)$ , c'est-à-dire qu'il existe  $x \in G$  tel que

$$a_\sigma = x u_\sigma \sigma^*(x)^{-1}$$

pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{F}/F)$ . Posons

$$y = x^{-1} t \theta(x)$$

La propriété (1) se réécrit

$$y = \sigma(y)$$

et donc  $y \in G(F)$  est  $\theta$ -conjugué de  $t$  (sur la clôture algébrique).  $\square$

Soit  $T$  un tore maximal  $\theta$ -stable dans  $J^*$  et soit  $T_{sc}$  son image réciproque dans  $J_{SC}^*$ . Le complexe de groupes abéliens associé au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & T_{sc} & \xrightarrow{f} & T_{sc} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ Z^\theta & \rightarrow & T & \xrightarrow{f} & T \end{array}$$

avec pour flèche  $f$  l'application  $t \mapsto t^{-1}\theta(t)$ , est muni d'un morphisme dans l'ensemble croisé en groupes

$$[[Z^\theta \rightarrow J_{ab}^*] \Rightarrow [J_{ab}^*]]$$

qui induit un isomorphisme en cohomologie. On calcule ainsi le groupe abélien introduit en 1.8.1

$$\mathbf{H}_{ab}^0(F, Z^\theta \rightarrow J^* \rightrightarrows J^*)$$

que, pour simplifier, nous noterons

$$\mathbf{H}_{ab}^0(F; Z^\theta, \theta, J^*).$$

On suppose que le groupes des points fixes sous  $\theta$  dans  $J^*$  est un groupe réductif quasi-connexe  $I^*$ ; on dispose alors de

$$\mathbf{H}_{ab}^i(F, Z^\theta \rightarrow I^*)$$

qui peut se calculer au moyen du complexe de groupes abéliens

$$[Z^\theta \times T_{sc}^\theta \rightarrow T^\theta]$$

quasi-isomorphe au module croisé

$$[Z^\theta \rightarrow I_{ab}^*] = [Z^\theta \times I_{SC}^* \rightarrow I^*].$$

On définit enfin

$$\mathbf{H}^0(F, (J_{ab}^*)_\theta)$$

au moyen du complexe de tores

$$(J_{ab}^*)_\theta = [(T_{sc})_\theta \rightarrow T_\theta].$$

L'objet ainsi défini dans la catégorie dérivée des complexes bornés de groupes diagonalisables est indépendant du choix de  $T$ . Il y a une application naturelle

$$\mathbf{H}_{ab}^0(F, J^*) \rightarrow \mathbf{H}^0(F, (J_{ab}^*)_\theta)$$

notée

$$d \mapsto d_\theta.$$

Supposons maintenant que  $T$  est un tore maximal  $\theta$ -stable dans  $G^*$ . On notera  $\eta_{ab}$  l'application de  $\mathbf{H}^0(F, T_\theta)$  dans  $\mathbf{H}^0(F, (G_{ab}^*)_\theta)$  induite par le morphisme  $T \rightarrow G^*$ .

**Proposition 2.5.2.** — Soit  $F$  un corps local. Soit  $t \in T$  et  $d \in \mathbf{H}_{ab}^0(F, G^*)$ . Supposons que

$$t_\theta \in T_\theta(F) = \mathbf{H}^0(F, T_\theta) \quad \text{et} \quad \eta_{ab}(t_\theta) = d_\theta .$$

On suppose que  $(T_{sc})^\theta$  est un tore  $F$ -anisotrope et que l'application

$$\mathbf{H}^1(F, G^*) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, G^*)$$

est injective. Alors il existe  $y \in G(F)$  qui est  $\theta$ -conjugué de  $t$  sur la clôture algébrique.

*Démonstration.* — Le triangle distingué

$$\cdots \rightarrow [Z^\theta \rightarrow I_{ab}^*][+1] \rightarrow [Z^\theta \rightarrow J_{ab}^* \Rightarrow J_{ab}^*] \rightarrow [(J_{ab}^*)_\theta] \rightarrow [Z^\theta \rightarrow I_{ab}^*][+2] \rightarrow \cdots$$

pour  $J^* = T$  et  $J^* = G^*$  et la flèche  $\eta_{ab}$  fournissent un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{H}^1(F, Z^\theta \rightarrow T^\theta) & \rightarrow & \mathbf{H}^0(F; Z^\theta, \theta, T) & \rightarrow & \mathbf{H}^0(F, T_\theta) & \rightarrow & \mathbf{H}^2(F, Z^\theta \rightarrow T^\theta) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}_{ab}^1(F, Z^\theta \rightarrow H) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^0(F; Z^\theta, \theta, G^*) & \rightarrow & \mathbf{H}^0(F, (G_{ab}^*)_\theta) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^2(F, Z^\theta \rightarrow H) \end{array}$$

Le triangle distingué

$$\cdots \rightarrow [1 \rightarrow 1 \rightarrow G_{ab}^*] \rightarrow [Z^\theta \rightarrow G_{ab}^* \Rightarrow G_{ab}^*] \rightarrow [Z^\theta \rightarrow G_{ab}^*][+1] \rightarrow \cdots$$

nous fournit une suite exacte

$$(4) \quad \mathbf{H}_{ab}^0(F, G^*) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(F; Z^\theta, \theta, G^*) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, Z^\theta \rightarrow G^*) .$$

Soit

$$d \in \mathbf{H}_{ab}^0(F, G^*) .$$

Son image  $d_\theta$  dans  $\mathbf{H}^0(F, (G_{ab}^*)_\theta)$  est obtenue en composant les applications

$$d \mapsto \delta \mapsto d_\theta ;$$

ici  $\delta \in \mathbf{H}_{ab}^0(F; Z^\theta, \theta, G^*)$  est l'image de  $d$  par la première des applications de la suite (4), et  $d_\theta$  est l'image de  $\delta$  par la flèche évidente du bas du diagramme commutatif ci-dessus. L'image de  $d_\theta$  dans

$$\mathbf{H}_{ab}^2(F, Z^\theta \rightarrow H)$$

est donc triviale. Comme  $(T_{sc})^\theta$  est  $F$ -anisotrope  $\mathbf{H}^2(F, (T_{sc})^\theta)$  est trivial, d'après 1.5.1 ; ceci implique que l'application

$$\mathbf{H}^2(F, Z^\theta \rightarrow T^\theta) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^2(F, Z^\theta \rightarrow H)$$

est injective. On en déduit qu'il existe  $\tau$  dans  $\mathbf{H}^0(F; Z^\theta, \theta, T)$  d'image  $t_\theta$  et  $\eta_{ab}(\tau)$  est congru à  $\delta$  modulo l'image de  $\mathbf{H}_{ab}^1(F, Z^\theta \rightarrow H)$  dans  $\mathbf{H}_{ab}^0(F; Z^\theta, \theta, G^*)$ . La trivialité de  $\mathbf{H}^2(F, (T_{sc})^\theta)$  implique aussi que l'application

$$\mathbf{H}^1(F, Z^\theta \rightarrow T^\theta) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, Z^\theta \rightarrow H)$$

est surjective. On peut donc choisir  $\tau$ , dans l'image réciproque de  $t_\theta$ , de sorte que de plus  $\eta_{ab}(\tau)$  soit égal au produit de  $\delta$  par l'image de  $(u, z)$ . L'image de  $\tau$  dans

$$\mathbf{H}_{ab}^1(F, Z^\theta \rightarrow G^*)$$

est alors produit de l'image de  $d$ , obtenue en composant les applications du complexe (4) ci-dessus et est donc triviale, par l'image de  $(u, z)$ . Maintenant, par hypothèse

$$\mathbf{H}^1(F, G^*) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, G^*)$$

est injective; on en déduit, par dévissage, que l'application

$$\mathbf{H}^1(F, Z^\theta \rightarrow G^*) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, Z^\theta \rightarrow G^*)$$

est aussi injective, et donc  $\tau \in \mathfrak{A}(F; T, \theta, G)$ . On conclut en invoquant 2.5.1.  $\square$

On dispose d'une application norme sur les abélianisés induite par la norme sur les tores.

**Proposition 2.5.3.** — *Soit  $F$  un corps local et  $E/F$  une algèbre cyclique de degré  $\ell$ . Un  $\gamma \in H(F)$  elliptique est une norme si (et seulement si) son image dans  $\mathbf{H}_{ab}^0(F, H)$  est une norme.*

*Démonstration.* — Le cas  $E/F$  déployé est immédiat et on est ramené à traiter le cas où  $E/F$  est une extension de corps. Soit  $S$  un tore elliptique dans  $H$  contenant  $\gamma$ . On considère le tore  $T \subset G^*$  obtenu par restriction des scalaires :

$$T = \text{Res}_{E/F} S.$$

On a  $T^\theta \simeq S$ . On remarque que l'application des co-invariants dans les invariants

$$T_\theta \rightarrow T^\theta$$

induite par la norme est un isomorphisme d'après 2.2.2. Donc il existe  $t \in T$  tel que

$$\gamma = t\theta(t) \cdots \theta^{\ell-1}(t)$$

et  $t_\theta \in T_\theta(F)$ . Par hypothèse il existe  $d \in \mathbf{H}_{ab}^0(F, G^*)$  dont la norme est l'image de  $\gamma$  dans  $\mathbf{H}_{ab}^0(F, H)$  ce qui équivaut à  $d_\theta = \eta_{ab}(t_\theta)$ . L'application

$$\mathbf{H}^1(F, G^*) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, G^*)$$

est bijective si  $F$  est non archimédien. Il en est de même si  $E = \mathbb{C}$  les groupes de cohomologie étant alors triviaux. Les hypothèses de la proposition 2.5.2 sont donc satisfaites. On en déduit qu'il existe  $y \in G(F)$  tel que

$$y = x^{-1}t\theta(x)$$

et donc

$$\delta = y \rtimes \theta \in L(F)$$

vérifie

$$x \delta^\ell x^{-1} = \gamma.$$

La cochaîne  $a_\sigma = x u_\sigma \sigma^*(x)^{-1}$  est à valeurs dans  $T$ , qui est un sous-groupe connexe du centralisateur de  $\gamma$  et donc  $\gamma$  est une norme de  $\delta$ .  $\square$

## 2.6. Image de la norme, cas global

Soit  $F$  un corps global. Considérons  $\gamma \in H(F)$  semi-simple et soit  $\delta \in L(\mathbb{A}_F)$  admettant  $\gamma$  pour norme localement partout. Nous allons définir une obstruction permettant de tester si  $\delta$  admet un conjugué stable rationnel. Une telle obstruction a d'abord été construite par Langlands [Lan2] lorsque  $\theta = 1$  et  $\gamma$  est régulier. Cette construction a été reprise par Kottwitz dans [Ko4] et généralisée pour des  $\gamma$  généraux dans [Ko5]. Elle est donnée pour le cas tordu avec  $\gamma$  fortement régulier dans [KS]. Nous allons traiter le cas des éléments semi-simples quelconques dans le cas tordu (pour le changement de base).

Considérons  $\gamma \in H(F)$  semi-simple. Soient  $I^*$  le centralisateur stable de  $\gamma$  dans  $H$  et  $J^*$  son centralisateur stable dans  $G^*$ . Rappelons que l'on a noté  $Z_\gamma$  le centre de  $G^{*\gamma}$  et que  $Z_\gamma \subset J^*$ . D'après 2.2.2 il existe  $t \in Z_\gamma(\overline{F})$ , dans le centre de  $J^*(\overline{F})$ , avec

$$N^\theta t = \gamma$$

et on posera  $\delta^* = t \rtimes \theta$ . Il existe une 1-cochaîne  $b$  à valeurs dans  $Z_\gamma(\overline{F})$  telle que

$$(1) \quad \sigma^*(t) = b_\sigma^{-1} t \theta(b_\sigma) \quad \text{soit encore} \quad \sigma^*(\delta^*) = b_\sigma^{-1} \delta^* b_\sigma .$$

Son cobord  $z_I^* = \partial b$  est à valeurs dans

$$Z_I^*(\overline{F}) := Z_\gamma(\overline{F}) \cap I^*(\overline{F})$$

qui est central dans  $I^*(\overline{F})$ .

Si  $\gamma$  est localement partout une norme de  $\delta = y \rtimes \theta \in L(\mathbb{A}_F)$  il existe  $x \in G^*(\overline{\mathbb{A}_F})$  tel que

$$x y \theta(x)^{-1} = t \quad \text{soit encore} \quad x \delta x^{-1} = \delta^*$$

et tel que la 1-cochaîne

$$a_\sigma = x u_\sigma \sigma^*(x)^{-1} = x \sigma(x)^{-1} u_\sigma$$

soit à valeurs dans  $J^*(\overline{\mathbb{A}_F})$ . Son cobord  $z$ , est égal à celui de  $u$  et est à valeurs dans  $Z^\theta(\overline{F})$ . On a

$$(2) \quad \sigma^*(t) = a_\sigma^{-1} t \theta(a_\sigma) \quad \text{soit encore} \quad \sigma^*(\delta^*) = a_\sigma^{-1} \delta^* a_\sigma .$$

Compte tenu de (1) et (2), on voit que la 1-cochaîne

$$c_\sigma = b_\sigma^{-1} a_\sigma$$

est à valeurs dans  $I^*(\overline{\mathbb{A}_F})$  et que son cobord vaut  $z z_{I^*}^{-1}$ . Rappelons que l'on peut supposer  $u$  et  $z$  image de cochaînes  $\tilde{u}$  et  $\tilde{z}$  à valeurs dans  $G_{sc}^*$  et son centre  $Z_{sc}$  respectivement. Pour simplifier les notations on pose  $Z' = Z_I^* \times Z_{sc}$ . L'ensemble

des cochaînes  $(x, \tilde{u}, b \times c, z_I^* \times \tilde{z})$  définit un 0-cocycle galoisien pour l'ensemble croisé associé au diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z'(\overline{F}) & \rightarrow & G_{SC}^*(\overline{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_\gamma(\overline{F}) \times I^*(\overline{\mathbb{A}_F}) & \rightarrow & G^*(\overline{\mathbb{A}_F}) \end{array}$$

que nous noterons  $\mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{s}(\overline{\mathbb{A}_F})$ . On prendra garde qu'il ne s'agit pas ici d'un morphisme de modules croisés, mais simplement d'un bi-complexe qui donne naissance à un ensemble croisé car l'image de  $Z'(\overline{F})$  est centrale. Soit  $\mathbf{A}$  une  $\overline{F}$ -algèbre ; on note  $\mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{s}_{ab}(\mathbf{A})$  l'ensemble croisé associé au diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z'(\overline{F}) \times I_{SC}^*(\mathbf{A}) & \rightarrow & G_{SC}^*(\mathbf{A}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_\gamma(\overline{F}) \times I^*(\mathbf{A}) & \rightarrow & G^*(\mathbf{A}) \end{array}$$

On dispose donc d'un morphisme

$$\mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{s}(\mathbf{A})) \rightarrow \mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{s}_{ab}(\mathbf{A}))$$

que nous appellerons morphisme d'abélianisation ; en effet, comme on verra ci-dessous, l'ensemble de cohomologie  $\mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{s}_{ab}(\mathbf{A}))$  peut être muni d'une structure de groupe abélien.

**Lemme 2.6.1.** — *Il existe un morphisme*

$$\text{Obs}_{ab} : \mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{s}_{ab}(\overline{\mathbb{A}_F})) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I^* \setminus G^*)$$

qui rend exact la suite :

$$\mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{s}_{ab}(\overline{F})) \rightarrow \mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{s}_{ab}(\overline{\mathbb{A}_F})) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I^* \setminus G^*).$$

*Démonstration.* — Soit  $S$  un tore maximal dans  $I^*$  et  $T$  un tore maximal dans  $G^*$  contenant l'image de  $S$  ; on note  $S_{sc}$  et  $T_{sc}$  leurs images réciproques dans les revêtements simplement connexes des groupes dérivés. On notera  $\mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{s}'_{ab}(\mathbf{A})$  le complexe de groupes abéliens associé au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z'(\overline{F}) \times S_{sc}(\mathbf{A}) & \rightarrow & T_{sc}(\mathbf{A}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_\gamma(\overline{F}) \times S(\mathbf{A}) & \rightarrow & T(\mathbf{A}) \end{array}$$

On voit en invoquant 1.1.2, 1.6.1 et 1.6.8 que le morphisme

$$\mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{s}'_{ab}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{s}_{ab}(\mathbf{A})$$

est un quasi-isomorphisme et induit donc un isomorphisme en cohomologie

$$\mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{s}'_{ab}(\mathbf{A})) = \mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{s}_{ab}(\mathbf{A}))$$

lorsque  $\mathbf{A} = \overline{F}$  ou  $\overline{\mathbb{A}_F}$ . De plus

$$\mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{s}'_{ab}(\overline{F}) \setminus \mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{s}'_{ab}(\overline{\mathbb{A}_F})) = \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I^* \setminus G^*)$$

et donc on dispose d'une suite exacte

$$\mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{Obs}_{ab}(\overline{F})) \rightarrow \mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{Obs}_{ab}(\overline{\mathbb{A}_F})) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I^* \backslash G^*).$$

□

Par composition du morphisme d'abélianisation et de  $\text{Obs}_{ab}$  on obtient une application

$$\text{Obs} : \mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{Obs}(\overline{\mathbb{A}_F})) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I^* \backslash G^*).$$

On notera  $\mathfrak{J}$  le foncteur à valeurs dans les complexes de groupes

$$\mathbf{A} \mapsto \mathfrak{J}(\mathbf{A}) = [Z'(\overline{F}) \rightarrow I^*(\mathbf{A}) \times Z_\gamma(\overline{F})]$$

où  $\mathbf{A}$  est une  $\overline{F}$ -algèbre.

**Lemme 2.6.2.** — *L'application*

$$\mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{Obs}(\overline{\mathbb{A}_F})) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{J}(\overline{\mathbb{A}_F}))$$

envoie le noyau de  $\text{Obs}$  dans l'image de  $\mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{J}(\overline{F}))$ .

*Démonstration.* — La proposition 1.6.13 fournit une suite exacte

$$\mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{J}(\overline{F})) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{J}(\overline{\mathbb{A}_F})) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, I^*).$$

Par ailleurs, on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{Obs}(\overline{\mathbb{A}_F})) & \rightarrow & \mathbf{H}^1(\Gamma, \mathfrak{J}(\overline{\mathbb{A}_F})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I^* \backslash G^*) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, I^*) \end{array}$$

et le lemme en résulte. □

Considérons l'ensemble des quintuples  $(x, u, b \times c, z')$  associés à  $\delta \in L(\mathbb{A}_F)$  ayant partout localement pour norme  $\gamma \in H(F)$ . Chaque quintuple  $(x, u, b \times c, z')$  définit une classe dans  $\mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{Obs}(\overline{\mathbb{A}_F}))$ . L'image dans  $\mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I^* \backslash G^*)$  ne dépend que de  $\gamma$  et  $x$ . L'image de cet ensemble de classes sera notée  $\text{Obs}_\gamma(\delta)$ . Son image dans  $\mathfrak{E}(I^*, G^*; \mathbb{A}_F/F)$  sera notée  $\text{obs}_\gamma(\delta)$ . On observera que si le centralisateur stable et le centralisateur coïncident,  $\text{Obs}_\gamma(\delta)$  contient un seul élément.

**Théorème 2.6.3.** — *Soit  $\gamma \in H(F)$  semi-simple et soit  $\delta \in L(\mathbb{A}_F)$  qui admet  $\gamma$  localement partout comme norme. L'obstruction  $\text{obs}_\gamma(\delta)$  contient la classe triviale si et seulement si il existe  $\delta_1 \in L(F)$  qui est  $G(\mathbb{A}_F)$ -conjugué à  $\delta$ .*

*Démonstration.* — Si  $\delta$  est rationnel on peut choisir  $x \in G(\overline{F})$  et on a  $1 \in \text{Obs}_\gamma(\delta)$ . On rappelle que le groupe

$$\mathfrak{E}(I^*, G^*; \mathbb{A}_F/F)$$

est le quotient du groupe

$$\mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I^* \backslash G^*)$$

par l'image de  $\mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F, G^*)$  et donc  $\text{obs}_\gamma(\delta)$  contient la classe triviale, s'il existe  $\delta_1 \in L(F)$  qui est  $G(\mathbb{A}_F)$ -conjugué à  $\delta$ . Réciproquement, supposons  $1 \in \text{obs}_\gamma(\delta)$ . Il existe donc un  $x$  tel que  $\delta = x^{-1}\delta^*x$  qui détermine un quintuple de cochaînes représentant une classe dans  $\mathbf{H}^0(\Gamma, \mathcal{D}\text{bs}(\overline{\mathbb{A}_F}))$  d'image triviale dans  $\mathfrak{E}(I^*, G^*; \mathbb{A}_F/F)$ . Observons que si on modifie le choix de  $x$  par un élément  $y$  de  $I^*(\overline{\mathbb{A}_F})$  à droite, et corrélativement la valeur de  $c$  :

$$x \mapsto xy \quad \text{et} \quad c_\sigma \mapsto y c_\sigma \sigma^*(y),$$

mais sans modifier les valeurs de  $u$ ,  $b$  et  $z$  (ce qui est possible puisque  $b$  centralise  $I^*$  et que  $z$  est central), on ne change pas la classe dans  $\mathbf{H}^0(\Gamma, \mathcal{D}\text{bs}(\overline{\mathbb{A}_F}))$ . On voit alors que, compte tenu de 2.6.2, et quitte à modifier le choix de  $x$ , on peut supposer que la cochaîne  $c$  est à valeurs dans  $I^*(\overline{F})$ . Avec ce choix a donc

$$x u_\sigma \sigma^*(x)^{-1} = a_\sigma$$

avec

$$a_\sigma = b_\sigma c_\sigma \in G^*(\overline{F}).$$

On rappelle que  $u$  est l'image d'une cochaîne  $\tilde{u}$  à valeurs dans  $G_{SC}^*$ ; on en déduit que le couple  $(a, \tilde{z})$ , où  $\tilde{z}$  est le bord de  $\tilde{u}$ , définit une classe dans  $\ker_{ab}^1(F, G^*)$ . En faisant varier  $x$  modulo  $I^*(\overline{\mathbb{A}_F})$  et  $c$  comme ci-dessus mais, en supposant maintenant que de plus  $y \in I^*(\overline{\mathbb{A}_F})$  est tel que

$$y c_\sigma \sigma^*(y)^{-1} \in I^*(\overline{F}),$$

on modifie la cochaîne  $a$  comme suit

$$a_\sigma \mapsto d_\sigma a_\sigma \quad \text{avec} \quad d_\sigma = y c_\sigma \sigma^*(y)^{-1} c_\sigma^{-1} = y \sigma_c^*(y)^{-1}.$$

On peut ainsi translater la classe de  $(a, \tilde{z})$  par l'image d'un élément quelconque de  $\ker^1(F, I')$  où  $I'$  est la forme intérieure de  $I^*$  définie par  $c$ . On rappelle que d'après 1.6.11  $\ker^1(F, I')$  s'envoie surjectivement sur  $\ker_{ab}^1(F, I^*)$ ; on en conclut qu'en modifiant le choix de  $x$ , la classe de  $(a, \tilde{z})$  parcourt une orbite sous  $\ker_{ab}^1(F, I^*)$  dans  $\ker_{ab}^1(F, G^*)$ . Mais, par hypothèse, l'image de  $(a, \tilde{z})$  dans  $\mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F)$  est triviale. La première suite exacte de 1.8.4 montre alors que cette classe dans  $\ker_{ab}^1(F, G^*)$  provient de  $\ker_{ab}^1(F, I^*)$ . Les remarques ci-dessus montrent que l'on peut choisir  $x$  de sorte que la classe de  $(a, \tilde{z})$  dans  $\ker_{ab}^1(F, G^*)$  soit triviale. Comme le cocycle  $(u, z)$  est celui définissant  $G$  comme forme intérieure, les équations ci-dessus peuvent se récrire

$$x \sigma(x)^{-1} = e_\sigma$$

avec

$$e_\sigma = b_\sigma c_\sigma u_\sigma^{-1} \in G(\overline{F}).$$

Compte tenu de 1.6.11, et puisque  $G^*$  est connexe, on voit que la classe de  $e$  dans  $\ker^1(F, G)$  est triviale, puisque son image dans  $\ker_{ab}^1(F, G^*)$  l'est. Ceci revient à dire qu'il existe  $x' \in G(\overline{F})$  tel que

$$x' \sigma(x')^{-1} = e_\sigma$$



et nécessairement  $x = x' x_1$  avec  $x_1 \in G(\mathbb{A}_F)$ . Posons

$$\delta_1 = x_1 \delta x_1^{-1}$$

c'est un élément de  $L(\mathbb{A}_F)$ ; par ailleurs

$$\delta_1 = x'^{-1} \delta^* x'$$

on a donc aussi  $\delta_1 \in L(\overline{F})$ . Comme

$$L(\mathbb{A}_F) \cap L(\overline{F}) = L(F)$$

on en déduit que  $\delta$  est  $G(\mathbb{A}_F)$ -conjugué à  $\delta_1 \in L(F)$ . □

**Remarque.** — La construction de l'obstruction se généralise en remplaçant  $G_0^*$  par une autre forme intérieure  $G'_0$ , à condition d'utiliser le cocycle  $(u', z')$  qui définit  $G_0$  comme forme de  $G'_0$  en lieu et place de  $(u, z)$ . La définition de la norme est, à cela près, identique. On observera que le fait que  $G_0^* = H$  est quasi-déployé n'est pas utilisé dans la preuve du théorème ci-dessus. On obtient ainsi une obstruction à l'existence d'un  $\delta_0 \in L(F)$  stablement conjugué à  $\delta \in L(\mathbb{A}_F)$  admettant  $\gamma' \in G'_0(F)$  comme norme localement partout. Cependant, on notera que si  $G'_0$  n'est pas quasi-déployé, on ne dispose pas de l'analogie du théorème d'existence 2.4.2, et il n'est pas clair que tout  $\delta \in L(F)$  admette une norme  $\gamma' \in G'_0(F)$ ; on doit tenir compte de l'obstruction pour la norme entre  $G'_0$  et  $H$ .

Pour conclure cette section, nous allons montrer que le groupe dans lequel l'obstruction définie ci-dessus prend ses valeurs, coïncide avec celui que Kottwitz et Shelstad utilisent dans [KS].

Soit  $\delta \in L(\mathbb{A}_F)$  qui admet localement partout  $\gamma \in H(F)$  semi-simple et fortement régulier comme norme. Soit  $T$  le centralisateur de  $\gamma$  dans  $G^*$ . Le centralisateur stable  $I^*$  de  $\gamma$  dans  $H$  n'est autre que  $T^\theta$ . Il existe  $t \in T$  tel que  $N^\theta(t) = \gamma$ , et  $t$  définit un point rationnel du groupe  $U = T_\theta$  des  $\theta$ -coinvariants de  $T$ . C'est l'image de  $t$  dans  $U = T_\theta$  qui est appelée norme abstraite dans [KS]. Kottwitz et Shelstad posent

$$V = f(T)$$

avec

$$f : t \mapsto t\theta(t)^{-1} .$$

On remarque que  $I^* = \ker f$ . Ils introduisent le complexe

$$[T_{sc} \rightarrow V]$$

avec pour flèche la composition de l'application naturelle  $T_{sc} \rightarrow T$  avec  $f$ . L'obstruction construite par Kottwitz et Shelstad est à valeurs dans le groupe de cohomologie

$$\mathbf{H}_{KS}^1(\mathbb{A}_F/F, T_{sc} \rightarrow V) .$$

Nous avons mis 'KS' en indice pour rappeler qu'ils considèrent  $[T_{sc} \rightarrow V]$  comme un complexe en degrés *cohomologiques* 0 et 1. Avec nos conventions on placerait ce

complexe en degrés *homologiques* 1 et 0 et c'est le groupe de 0-cohomologie que nous considérerions. Le morphisme de complexes

$$[T_{sc} \oplus \ker f \rightarrow T] \rightarrow [T_{sc} \rightarrow V]$$

est un quasi-isomorphisme. Le complexe

$$[T_{sc} \oplus I^* \rightarrow T]$$

est quasi-isomorphe à l'abélianisé de  $I^* \backslash G^*$ . Comme  $I^* = \ker f$ , et compte tenu du décalage de degrés, dû à la différence des conventions, on dispose d'un isomorphisme

$$\mathbf{H}_{KS}^1(\mathbb{A}_F/F, T_{sc} \rightarrow V) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I^* \backslash G^*).$$

On en déduit que notre  $\mathfrak{K}(I^*, G^*; F)$  n'est autre que le groupe  $\mathfrak{K}(T, \theta, F)$  de [KS]. On dispose d'isomorphismes analogues dans le cas local. Ces isomorphismes fournissent la traduction entre nos constructions et celles de [KS].

## 2.7. Intégrales orbitales et intégrales $\kappa$ -orbitales

Soit  $F$  un corps local et soit  $\delta \in L(F)$  semi-simple. Nous noterons

$$e(\delta) = e(I_\delta)$$

le signe de Kottwitz pour le centralisateur stable de  $\delta$  (cf. 1.7.1). Pour simplifier les notations nous posons

$$I = I_\delta.$$

Pour  $x \in G$  on pose

$$\delta_x = x^{-1} \delta x.$$

La classe de conjugaison de  $\delta$  sous  $G(F)$  est paramétrée par  $G^\delta(F) \backslash G(F)$ ; toutefois il apparait plus commode de définir les intégrales orbitales en utilisant le centralisateur stable : on pose pour  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(L(F))$

$$\Phi_{G(F)}(\delta, \phi) = \int_{I(F) \backslash G(F)} \phi(x^{-1} \delta x) dx = \int_{I(F) \backslash G(F)} \phi(\delta_x) dx.$$

Nous pouvons tordre les intégrales orbitales par des caractères : si  $\omega$  est un caractère du groupe localement compact  $\mathbf{H}_{ab}^0(F, G)$  trivial sur  $\mathbf{H}_{ab}^0(F, I)$  l'intégrale orbitale tordue par  $\omega$  est définie par

$$\Phi_{G(F), \omega}(\delta, \phi) = \int_{I(F) \backslash G(F)} \omega(x) \phi(\delta_x) dx.$$

On rappelle que si  $x \in G$  définit une classe  $\dot{x}$  dans  $\mathbf{H}^0(F, I \backslash G)$ , c'est-à-dire si  $x \sigma(x)^{-1} \in I$  pour tout  $\sigma$ , alors  $\delta_x$  est un élément de  $L(F)$ . En d'autres termes l'application

$$x \mapsto \delta_x$$

induit une flèche

$$\mathbf{H}^0(F, I \backslash G) \rightarrow L(F).$$

Le choix de formes différentielles de degré maximal, invariantes par translation sur les groupes  $G$  et  $I$ , permet de définir des mesures de Haar sur  $G(F)$  et  $I(F)$  ainsi que sur les formes intérieures  $I'(F)$ , et on dispose alors d'une mesure sur  $\mathbf{H}^0(F, I \backslash G)$ . On a noté  $\mathfrak{K}(I, G; F)$  le dual de Pontryagin de l'abélianisé  $\mathbf{H}_{ab}^0(F, I \backslash G)$ . Soit  $\kappa \in \mathfrak{K}(I, G; F)$ , on notera

$$\langle \kappa, \dot{x} \rangle$$

la valeur du caractère  $\kappa$  sur l'image de  $\dot{x} \in \mathbf{H}^0(F, I \backslash G)$  dans  $\mathbf{H}_{ab}^0(F, I \backslash G)$  via la flèche d'abélianisation. On définit alors une intégrale  $\kappa$ -orbitale en posant :

$$\Phi_{G(F)}^\kappa(\delta, \phi) = \int_{\mathbf{H}^0(F, I \backslash G)} \langle \kappa, \dot{x} \rangle e(\delta_x) \phi(\delta_x) d\dot{x} .$$

C'est une combinaison linéaire finie d'intégrales orbitales. Soit  $x$  définissant une classe  $\dot{x} \in \mathbf{H}^0(F, I \backslash G)$ , on notera  $[x]$  sa classe dans  $\mathfrak{D}(I_\delta, G; F)$  ; en choisissant un ensemble de représentants des classes dans  $\mathfrak{D}(I_\delta, G; F)$  on a

$$\Phi_{G(F)}^\kappa(\delta, \phi) = \sum_{[x] \in \mathfrak{D}(I_\delta, G; F)} e(\delta_x) \langle \kappa, \dot{x} \rangle \Phi_{G(F), \omega(\kappa)}(\delta_x, \phi)$$

où  $\omega(\kappa)$  est le caractère de  $\mathbf{H}_{ab}^0(F, G)$  induit par  $\kappa$ . On appelle intégrale orbitale stable l'intégrale  $\kappa$ -orbitale pour  $\kappa = 1$  :

$$\Phi_{G(F)}^1(\delta, \phi) = \int_{\mathbf{H}^0(F, I \backslash G)} e(\delta_x) \phi(\delta_x) d\dot{x} .$$

Soient  $F$  un corps global et  $\delta$  un élément semi-simple dans  $L(F)$ . On suppose désormais que le centralisateur stable  $I$  est connexe. On fixe un caractère  $\omega$  de  $\mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F / F, G)$ . Ce caractère définit un caractère de  $G(\mathbb{A}_F) = \mathbf{H}^0(\mathbb{A}_F, G)$  trivial sur  $G(F) = \mathbf{H}^0(F, G)$ . On définit une intégrale orbitale adélique en posant

$$\Phi_{G(\mathbb{A}_F), \omega}(\delta, \phi) = \int_{I(\mathbb{A}_F) \backslash G(\mathbb{A}_F)} \omega(x) \phi(\delta_x) dx .$$

On a

$$\Phi_{G(\mathbb{A}_F), \omega}(\delta, \phi) = \prod_v \Phi_{G(F_v), \omega}(\delta, \phi_v) .$$

**Lemme 2.7.1.** — *Pour presque toute place  $v$ , si  $\delta' \in L(\mathcal{O}_v)$  est stablement conjugué à  $\delta$ , il existe  $x \in G(\mathcal{O}_v)$  avec*

$$\delta' = x^{-1} \delta x .$$

*Démonstration.* — C'est une généralisation immédiate de la proposition 7.1 de [Ko5]. □

Soit  $\kappa \in \mathfrak{K}(I, G; F)$  le dual de Pontryagin de  $\mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F / F, I \backslash G)$ . On note  $\{\kappa_v\}$  l'image de  $\kappa$  par l'application de localisation. Les intégrales  $\kappa$ -orbitales globales sont définies comme produit :

$$\Phi_{G(\mathbb{A}_F)}^\kappa(\delta, \phi) = \prod_v \Phi_{G(F_v)}^{\kappa_v}(\delta, \phi_v) .$$

Le produit est convergent car il résulte de 2.7.1 que, pour presque toute place  $v$ ,

$$\Phi_{G(F_v)}^{\kappa_v}(\delta, \phi_v) = \int_{I(\mathcal{O}_v) \backslash G(\mathcal{O}_v)} e(\delta_x) \langle \kappa_v, \dot{x} \rangle \phi_v(\delta_x) d\dot{x} = 1.$$

Comme on a supposé que  $I$  est connexe, 1.4.1 montre que pour presque toute place  $v$

$$\mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, I \backslash G) = (I \backslash G)(\mathcal{O}_v) = I(\mathcal{O}_v) \backslash G(\mathcal{O}_v).$$

Par définition de la cohomologie adélique comme produit restreint, et compte tenu de la loi de réciprocité pour le signe de Kottwitz 1.7.2, on a donc :

$$\Phi_{G(\mathbb{A}_F)}^{\kappa}(\delta, \phi) = \int_{\mathbf{H}^0(\mathbb{A}_F, I \backslash G)} \langle \kappa, \dot{x} \rangle \phi(\delta_x) d\dot{x}.$$

Nous nous restreignons désormais au cadre du changement de base. Nous avons déjà défini des intégrales  $\kappa$ -orbitales pour des éléments semi-simples  $\delta \in L(F)$ . Nous allons maintenant étendre cette définition de façon à prendre en compte les  $\delta \in L(\mathbb{A}_F)$  qui ont localement partout  $\gamma \in H(F)$  comme norme.

Soit  $\gamma \in H(F)$ , on lui associe, dans les notations de la section précédente,  $\delta^* \in L(\overline{F})$  et une cochaîne  $b_\sigma$  à valeurs dans  $Z_\gamma(\overline{F})$ . On notera

$$\mathfrak{A}(\mathbb{A}_F; \delta^*, L)$$

l'ensemble des classes modulo  $I^*(\overline{\mathbb{A}_F})$  des  $x \in G(\overline{\mathbb{A}_F})$  avec

$$x^{-1} \delta^* x \in L(\mathbb{A}_F) \quad \text{et} \quad x u_\sigma \sigma^*(x)^{-1} = a_\sigma$$

tel que  $c_\sigma = b_\sigma^{-1} a_\sigma$  soit à valeurs dans  $I^*(\overline{\mathbb{A}_F})$ .

Soit  $\dot{x} \in \mathfrak{A}(\mathbb{A}_F; \delta^*, L)$ ; on lui associe  $\delta = x^{-1} \delta^* x \in L(\mathbb{A}_F)$ . On note  $I_v$  les centralisateurs stables des  $\delta_v \in L(F_v)$ . Ce sont des formes intérieures de  $I^*$  le centralisateur stable de  $\gamma$ . L'application

$$y \mapsto xy$$

induit une bijection du produit

$$\prod_v \mathbf{H}^0(F_v, I_v \backslash G_v)$$

sur l'ensemble  $\mathfrak{A}(\mathbb{A}_F; \delta^*, L)$ . L'ensemble  $\mathfrak{A}(\mathbb{A}_F; \delta^*, L)$  est ainsi muni d'une mesure. On dispose d'une flèche

$$\mathfrak{A}(\mathbb{A}_F; \delta^*, L) \rightarrow \mathbf{H}^0(\Gamma, \mathfrak{Ob}\mathfrak{s}(\overline{\mathbb{A}_F}))$$

et par composition avec l'obstruction on obtient une flèche

$$\mathfrak{A}(\mathbb{A}_F; \delta^*, L) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, I^* \backslash G^*),$$

ce qui définit un accouplement entre  $\mathfrak{A}(\mathbb{A}_F; \delta^*, L)$  et  $\mathfrak{R}(I^*, G^*; F)$  :

$$(\kappa, \dot{x}) \mapsto \langle \kappa, \dot{x} \rangle.$$

**Lemme 2.7.2.** — Soit  $\kappa \in \mathfrak{R}(I^*, G^*; F)$ . L'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}(\mathbb{A}_F; \delta^*, L)} \langle \kappa, \dot{x} \rangle e(x^{-1} I^* x) \phi(x^{-1} \delta^* x) d\dot{x}$$

où

$$e(x^{-1} I^* x) = \prod_v e(x_v^{-1} I^* x_v)$$

ne dépend que de  $\gamma$ .

*Démonstration.* — Un choix différent de  $\delta^*$  et  $b$  conduit à un ensemble  $\mathfrak{A}(\mathbb{A}_F; \delta^*, L)$  isomorphe, l'isomorphisme étant induit par une translation sur  $x$  par un  $z \in Z_\gamma(\overline{F})$  et l'intégrale est invariante par ce changement de variable.  $\square$

On définit une intégrale  $\kappa$ -orbitale globale en posant

$$\Phi_{G(\mathbb{A}_F)}(\gamma, \kappa; \phi) = \int_{\mathfrak{A}(\mathbb{A}_F; \delta^*, L)} \langle \kappa, \dot{x} \rangle e(x^{-1} I^* x) \phi(x^{-1} \delta^* x) d\dot{x}.$$

On observera que

$$\Phi_{G(\mathbb{A}_F)}(\gamma, \kappa; \phi) = 0$$

si  $\gamma$  n'est pas localement partout une norme d'un  $\delta \in L(\mathbb{A}_F)$ , car dans ce cas l'ensemble  $\mathfrak{A}(\mathbb{A}_F; \delta^*, L)$  est vide. Lorsque  $\mathfrak{A}(\mathbb{A}_F; \delta^*, L)$  est non vide, un tel  $\delta$  existe et on peut, modulo le choix d'un  $x \in \mathfrak{A}(\mathbb{A}_F; \delta^*, L)$  et compte tenu de 2.7.1, exprimer l'intégrale  $\kappa$ -orbitale globale comme un produit :

$$\Phi_{G(\mathbb{A}_F)}(\gamma, \kappa; \phi) = \prod_v \int_{\mathbf{H}^0(F_v, I_v \setminus G_v)} \langle \kappa_v, x_v \dot{y}_v \rangle e(y_v^{-1} I_v y_v) \phi_v(y_v^{-1} \delta_v y_v) d\dot{y}.$$

Ceci peut encore s'écrire

$$\Phi_{G(\mathbb{A}_F)}(\gamma, \kappa; \phi) = \langle \kappa, \dot{x} \rangle \prod_v \Phi_{G(F_v)}^{\kappa_v}(\delta_v, \phi_v).$$

Pour  $\delta \in L(F)$  on peut choisir  $x \in G(\overline{F})$  et on a donc

$$\Phi_{G(\mathbb{A}_F)}(\gamma, \kappa; \phi) = \Phi_{G(\mathbb{A}_F)}^{\kappa}(\delta, \phi).$$

**Proposition 2.7.3.** — On note  $\mathfrak{R}(I^*, G^*; F)_1$  le dual de  $\mathfrak{E}(I^*, G^*; \mathbb{A}_F/F)$ . Si  $\gamma$  n'est pas la norme d'un  $\delta$  rationnel, la somme sur  $\mathfrak{R}(I^*, G^*; F)_1$  des intégrales  $\kappa$ -orbitales est nulle :

$$\sum_{\kappa_1 \in \mathfrak{R}(I^*, G^*; F)_1} \Phi_{G(\mathbb{A}_F)}(\gamma, \kappa \kappa_1; \phi) = 0.$$

*Démonstration.* — D'après 2.6.3, si  $\gamma$  n'est pas la norme d'un  $\delta$  rationnel, alors tout  $x \in \mathfrak{A}(\mathbb{A}_F; \delta^*, L)$  a une image non triviale dans  $\mathfrak{E}(I^*, G^*; \mathbb{A}_F/F)$  et donc

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{R}(I^*, G^*; F)_1} \langle \kappa_1, \dot{x} \rangle = 0.$$

$\square$

## CHAPITRE 3

### TRANSFERT LOCAL

Dans ce chapitre  $F$  est un corps local de caractéristique zéro. Nous nous plaçons dans le cadre du changement de base : on considère une algèbre cyclique  $E/F$  de groupe de Galois  $\Theta$  engendré par  $\theta$  et un groupe  $G$  obtenu par restriction des scalaires de  $E$  à  $F$  à partir de  $G_0$  et on pose  $L = G \rtimes \theta$ . Dans une première section nous établissons un résultat de descente, puis nous étudions le transfert endoscopique entre  $G(F)$  et  $H(F)$ .

#### 3.1. Conjugaison au voisinage d'éléments semi-simples

Soit  $\delta_0 \in L(F)$  un élément semi-simple. Pour simplifier les notations, dans ce qui suit nous désignerons par  $M$  la composante neutre du centralisateur de  $\delta_0$  dans  $G$  et  $M^+$  ce centralisateur (i.e.  $M = (G^{\delta_0})^0$  et  $M^+ = G^{\delta_0}$ ).

**Lemme 3.1.1.** — *Il existe une sous-variété analytique  $Y$  dans  $G(F)$ , symétrique (i.e.  $y \in Y \iff y^{-1} \in Y$ ) et un voisinage  $\mathcal{V}$  de 1 dans  $M(F)$  tels que :*

(i) *L'application*

$$\begin{aligned} Y \times \mathcal{V} &\longrightarrow L(F) \\ (y, m) &\longmapsto y^{-1}m\delta_0y \end{aligned}$$

*est un difféomorphisme de  $Y \times \mathcal{V}$  sur un voisinage  $\mathcal{W} = \mathcal{W}(Y, \mathcal{V})$  de  $\delta_0$  dans  $L(F)$ .*

(ii) *Soit  $y \in Y$ , alors  $y^{-1}m\delta_0y \in \mathcal{W}$  avec  $m \in M(F)$  implique  $m \in \mathcal{V}$ . En particulier*

$$M(F)\delta_0 \cap \mathcal{W} = \mathcal{V}\delta_0 .$$

*Démonstration.* — Choisissons un supplémentaire  $\eta$  de

$$\mathfrak{m} = \text{Lie } M(F)$$

dans  $\mathfrak{g} = \text{Lie } G(F)$  :

$$\mathfrak{g} = \eta \oplus \mathfrak{m} .$$

Considérons la sous-variété analytique  $Y = \text{Exp } \mathcal{O}$  image par l'exponentielle d'un voisinage ouvert symétrique  $\mathcal{O}$  de 0 dans  $\eta$ . La différentielle de l'application

$$\begin{aligned} Y \times M(F) &\longrightarrow L(F) \\ (y, m) &\longmapsto y^{-1}m\delta_0y \end{aligned}$$

a pour jacobien au point  $(1, 1)$

$$D_M^L(\delta_0) = \det(1 - \text{Ad}(\delta_0) \mid \mathfrak{g}/\mathfrak{m})$$

qui est non nul par définition de  $M(F)$ . L'image est donc un voisinage et l'assertion (i) est vraie si  $\mathcal{O}$  assez petit. Fixons  $Y_1$  et  $\mathcal{V}_1$  assez petits de sorte que l'assertion (i) soit vraie. Si  $Y \subset Y_1$  et  $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_1$  sont choisis assez petits (relativement compacts) et si

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(Y, \mathcal{V})$$

est l'image de  $Y \times \mathcal{V}$ , on peut supposer que

$$M(F)\delta_0 \cap y\mathcal{W}y^{-1} \subset \mathcal{V}_1\delta_0$$

pour tout  $y \in Y$ , puisque  $M(F)$  est un sous-groupe fermé et que donc sa topologie est la topologie induite par celle de  $G(F)$ . Donc  $y^{-1}m\delta_0y \in \mathcal{W}$  avec  $m \in M(F)$  implique  $m \in \mathcal{V}_1$ . On déduit de (i), l'unicité de l'écriture  $x = y^{-1}m\delta_0y$ , pour  $x \in \mathcal{W}(Y_1, \mathcal{V}_1)$  avec  $y \in Y_1$  et  $m \in \mathcal{V}_1$ . Donc  $y^{-1}m\delta_0y \in \mathcal{W}$  avec  $m \in \mathcal{V}_1$  et  $y \in Y$  implique  $m \in \mathcal{V}$ .  $\square$

**Lemme 3.1.2.** — *Soient  $M$  un groupe réductif connexe et  $T$  un tore maximal définis sur  $F$ . Soit  $\mathcal{V}$  un voisinage de 1 dans  $T(F)$ . Il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de 1 dans  $M(F)$  tel que si  $t \in T(F)$  a un conjugué dans  $\mathcal{U}$ , alors  $t \in \mathcal{V}$ .*

*Démonstration.* — On suppose que

$$m^{-1}t m \in \mathcal{U}$$

pour un  $m \in M(F)$ . Soit  $F_1$  une extension finie de  $F$  qui déploie  $T$  et soit  $P = TN$  un sous-groupe parabolique minimal de  $M/F_1$ , alors la décomposition d'Iwasawa permet d'écrire  $m = ank$  avec  $a \in T(F_1)$ ,  $n \in N(F_1)$  et  $k$  dans un sous-groupe compact  $K$  de  $M(F_1)$ , et donc

$$t n_1 \in \mathcal{U}^K$$

avec  $n_1 \in N(F_1)$  et

$$\mathcal{U}^K = \prod_{k \in K} k\mathcal{U}k^{-1}.$$

Comme  $K$  est compact, on voit que si  $\mathcal{U}$  est assez petit on a

$$tn_1 \in \mathcal{U}^K \cap T(F)N(F_1) \subset \mathcal{V} \cdot N(F_1).$$

$\square$

Les classes de conjugaison de tores maximaux sont en nombre fini dans  $M(F)$  (puisque  $F$  est de caractéristique zéro); notons  $\{T_i\}_{i \in I}$  un ensemble de représentants et soient  $\mathcal{V}_i$  des voisinages de 1 dans  $T_i$ .

**Lemme 3.1.3.** — Soit  $\mathcal{W} \subset L(F)$  un voisinage relativement compact de  $\delta_0$ . Si les voisinages  $\mathcal{V}_i$  sont assez petits, il existe un compact  $\Omega \subset G(F)$  tel que

$$x^{-1}t\delta_0x \in \mathcal{W}$$

et  $t \in \mathcal{V}_i$  implique  $x \in M(F)\Omega$ .

*Démonstration.* — Il s'agit d'un résultat classique dans le cas des groupes connexes ; dans le cadre des groupes non connexes (ou de la conjugaison tordue) c'est le lemme 2.1 de [Ar1].  $\square$

Nous choisissons désormais des voisinages  $\mathcal{V}_i$  de sorte que la conclusion du lemme ci-dessus soit vraie.

**Lemme 3.1.4.** — Soit  $\mathcal{V}$  un voisinage ouvert de 1 dans  $M(F)$  et soient  $m$  et  $m'$  dans  $\mathcal{V}$ . Supposons que  $\delta = m\delta_0$  et  $\delta' = m'\delta_0$  sont semi-simples. Supposons  $\mathcal{V}$  assez petit, et soit  $x \in G(F)$  tel que

$$x^{-1}\delta x = \delta'.$$

Alors  $x \in M^+(F)$ .

*Démonstration.* — Il résulte du lemme 3.1.2, qu'à conjugaison près sous  $M(F)$ , on peut supposer

$$m = t \in \mathcal{V}_i \subset T_i$$

et

$$m' = t' \in \mathcal{V}_j \subset T_j$$

si  $\mathcal{V}$  est assez petit. On suppose que

$$t\delta_0 = x^{-1}t'\delta_0x \in \mathcal{W}$$

pour un  $x \in G(F)$ . Il résulte du lemme de compacité 3.1.3 que  $x \in M(F)\Omega$  où  $\Omega$  est un compact indépendant de  $t$  et  $t'$ . Par ailleurs, supposons que de plus  $x = my \in M^+(F)Y$ , on voit alors que

$$yt\delta_0y^{-1} = m^{-1}t'm\delta_0 = m''\delta_0.$$

D'après 3.1.1 (ii), ceci impose  $m'' \in \mathcal{V}$  et donc, d'après 3.1.1 (i),  $y = 1$  et  $t = m'' = m^{-1}t'm$ , ce qu'on souhaitait démontrer. Supposons l'assertion en défaut, en particulier supposons  $x \notin M^+(F)Y$ . On pourrait alors trouver des suites  $t_n \in \mathcal{V}_i$  et  $t'_n \in \mathcal{V}_j$  avec

$$\lim t_n = \lim t'_n = 1$$

et

$$t_n\delta_0 = x_n^{-1}t'_n\delta_0x_n$$

avec  $x_n = m_n z_n$  où  $m_n \in M(F)$  et  $z_n \in \Omega'$  un compact tel que

$$\Omega' \cap M^+(F) = \emptyset.$$



Par compacité de  $\Omega'$ , quitte à extraire des sous-suites, on en déduit l'existence d'un  $z \in \Omega'$  et d'un  $m_0 \in M(F)$  tels que

$$\delta_0 = z^{-1}m_0\delta_0z$$

et

$$m_0 = \lim m_n^{-1}t_n m_n .$$

Mais  $\lim t_n = 1$  et donc  $m_0$  est unipotent. L'unicité de la décomposition de Jordan implique  $m_0 = 1$  et donc  $z \in \Omega' \cap M^+(F)$  ce qui est absurde.  $\square$

**Corollaire 3.1.5.** — *Sous les mêmes hypothèse,*

(i) *Si  $\delta = \tau\delta_0$  on a  $I_\delta^G = I_\tau^M$ .*

(ii) *Si  $\delta$  et  $\delta'$  sont conjugués sous  $G(F)$ , alors  $m$  et  $m'$  sont conjugués sous  $M^+(F)$ .*

(iii) *Si  $\delta$  et  $\delta'$  sont  $G$ -stablement conjugués, alors  $m$  et  $m'$  sont  $M^+$ -stablement conjugués.*

*Démonstration.* — Le lemme 3.1.4 montre que le centralisateur de  $\delta$  dans  $G$  est le centralisateur de  $\tau$  dans  $M^+$ ; leurs composantes neutres sont donc égales, ce qui prouve (i). L'assertion (ii) résulte aussi immédiatement du même lemme. Pour établir (iii) on remarque que deux éléments  $\delta = m\delta_0$  et  $\delta' = m'\delta_0$  sont  $G$ -stablement conjugués s'ils le sont par un  $x \in G(F_1)$  avec  $F_1$  une extension finie de  $F$ . On déduit de (ii), que si  $m$  et  $m'$  sont assez voisins de 1 alors  $x \in M^+(F_1)$  et donc  $m$  et  $m'$  sont  $M^+(\bar{F})$  conjugués; on conclut en invoquant (i).  $\square$

**Corollaire 3.1.6.** — *Supposons  $Y \subset \mathcal{U}$  où  $\mathcal{U}$  est un voisinage ouvert de 1 dans  $G(F)$ . Si les voisinages  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  sont assez petits, alors tout*

$$x^{-1}m\delta_0x \in \mathcal{W}(Y, \mathcal{V})$$

*avec  $x \in G(F)$  et  $m \in \mathcal{V}$  semi-simple, est tel que  $x \in M^+(F)\mathcal{U}$ .*

*Démonstration.* — Par hypothèse, et compte tenu de 3.1.1 on a

$$x^{-1}m\delta_0x = y^{-1}m'\delta_0y$$

avec  $y \in Y$  et  $m' \in \mathcal{V}$ ; maintenant 3.1.4 montre que nécessairement  $xy^{-1} \in M^+(F)$ .  $\square$

**Proposition 3.1.7.** — *Soient  $\mathcal{V}$  un voisinage ouvert de 1 dans  $M(F)$  et  $\mathcal{W}$  un voisinage de  $\delta_0$ .*

(i) *Soit  $\phi \in C_c^\infty(L(F))$  à support dans  $\mathcal{W}$ . Si les voisinages sont assez petits, il existe une fonction  $\psi \in C_c^\infty(M(F))$  à support dans  $\mathcal{V}$  telle que si l'orbite de  $\delta$  rencontre  $\mathcal{W}$  et est semi-simple régulier, alors*

$$\delta = x^{-1}\tau\delta_0x$$

*avec  $\tau \in M(F)$  et  $x \in G(F)$  et*

$$\Phi_{G(F)}(\delta, \phi) = \Phi_{M^+(F)}(\tau, \psi) .$$

De plus,

$$\Phi_{G(F)}^1(\delta, \phi) = \Phi_{M+(F)}^1(\tau, \psi)$$

si  $\tau\delta_0$  est stablement conjugué à  $\delta$ .

(ii) Réciproquement, soit  $\psi \in C_c^\infty(M(F))$ , à support dans un voisinage  $\mathcal{V}$  assez petit de 1, il existe une fonction  $\phi \in C_c^\infty(L(F))$  à support dans  $\mathcal{W}$  et vérifiant les identités ci-dessus.

*Démonstration.* — Soit  $\mu$  la mesure sur la variété  $Y$  image réciproque de la mesure invariante sur  $M(F)\backslash G(F)$ . Supposons  $\phi$  donné, et posons pour  $\tau \in M(F)$  :

$$\psi(\tau) = (I_Y \phi)(\tau) = \int_Y \phi(y^{-1}\tau\delta_0 y) d\mu(y).$$

D'après 3.1.1 (ii), c'est une fonction lisse sur  $M(F)$  à support dans  $\mathcal{V}$ . Étant donné  $\delta$  semi-simple assez proche de  $\delta_0$  l'existence de  $\tau \in \mathcal{V}$  tel que  $\delta = x^{-1}\tau\delta_0 x$  résulte du lemme 3.1.1, on observe qu'alors  $I_\delta^G = I_\tau^M$ , et on a

$$\Phi_{G(F)}(\delta, \phi) = \int_{M+(F)\backslash G(F)} dx \int_{I_\delta^G(F)\backslash M+(F)} \phi(x^{-1}m^{-1}\tau\delta_0 mx) dm$$

avec  $\tau \in \mathcal{V}$ . Compte tenu de 3.1.6 ceci peut s'écrire

$$\Phi_{G(F)}(\delta, \phi) = \int_Y d\mu(y) \int_{I_\tau^M(F)\backslash M+(F)} \phi(y^{-1}m^{-1}\tau m\delta_0 y) dm$$

et en intervertissant les intégrales on obtient

$$\Phi_{G(F)}(\delta, \phi) = \Phi_{M+(F)}(\tau, I_Y \phi) .$$

L'assertion sur les intégrales stables résulte alors du lemme 3.1.5 (iii). Ceci achève la preuve de (i). Réciproquement, étant donné  $\psi$  à support dans  $\mathcal{V}$ , on remarque que tout  $\delta \in \mathcal{W}$  s'écrit de façon unique

$$\delta = y^{-1}\tau\delta_0 y$$

avec  $y \in Y$  et  $\tau \in \mathcal{V}$  et on pose

$$(J^\beta \psi)(\delta) = \beta(y)\psi(\tau)$$

avec  $\beta \in C_c^\infty(Y)$  et telle que

$$\int_Y \beta(y) d\mu(y) = 1 .$$

Pour conclure, on remarque que

$$I_Y J^\beta \psi = \psi .$$

□

### 3.2. Définition du transfert

On dit que les fonctions  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(L(F))$  et  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H(F))$  sont associées si leurs intégrales orbitales semi-simples stables sont compatibles avec la norme c'est-à-dire si pour tout  $\delta \in L(F)$  avec norme  $\gamma \in H(F)$  semi-simple on a

$$\Phi_{H(F)}^1(\gamma, f) = \Phi_{G(F)}^1(\delta, \phi)$$

et si de plus

$$\Phi_{H(F)}^1(\gamma, f) = 0$$

pour tout  $\gamma$  semi-simple qui n'est pas une norme. Ceci peut encore s'écrire

$$\Phi_{H(F)}^1(\gamma, f) = \sum_{\delta} \Delta_1(\gamma, \delta) \Phi_{G(F)}^1(\delta, \phi)$$

où la somme porte sur les classes de conjugaison stable et où  $\Delta_1(\gamma, \delta)$  vaut 1 si  $\gamma$  est une norme de  $\delta$  et 0 sinon.

On sait [Clo2, proposition 7.2] qu'il suffit de vérifier cette égalité pour les éléments réguliers.

**Définition 3.2.1.** — Nous dirons que le transfert (stable) est possible entre  $L(F)$  et  $H(F)$  si pour toute  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(L(F))$  il existe  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H(F))$  qui lui est associée. Nous dirons que le transfert réciproque est possible si pour toute  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H(F))$  telle que

$$\Phi_{H(F)}^1(\gamma, f) = 0$$

pour tout  $\gamma$  semi-simple qui n'est pas une norme, alors il existe  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(L(F))$  qui lui est associée.

**Lemme 3.2.2.** — Soient  $\phi$  et  $f$  associées.

$$\langle 1, \phi \rangle = \int_{L(F)} \phi(x') dx' = \int_{H(F)} f(x) dx = \langle 1, f \rangle .$$

*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{T}$  un ensemble de représentants des classes de conjugaison stable de tores maximaux dans  $H(F)$ . La formule de Weyl peut s'écrire

$$\langle 1, f \rangle = \int_{H(F)} f(x) dx = \sum_{T \in \mathcal{T}} w(T, F)^{-1} \int_{T(F)} \Phi_{H(F)}^1(t, f) |D_T^H(t)|_F dt$$

où  $w(T, F)$  est le nombre de conjugués stables dans  $T(F)$  d'un même élément fortement régulier  $\gamma$  : c'est l'ordre du sous-groupe  $W(T, F)$  des  $w \in W(T)$ , le groupe de Weyl absolu de  $T$ , qui commutent avec le groupe de Galois. Soit  $\mathcal{T}'$  un ensemble de représentants des classes de conjugaison stable de 'tores maximaux' dans  $L(F)$ . On appelle ainsi, suivant Arthur [Ar1], les centralisateurs dans  $L(F)$  des éléments semi-simples fortement réguliers  $\delta \in L(F)$  ; ce sont des translatés de tores de  $G(F)$  stablement conjugués de tores maximaux de  $H(F)$ . De façon similaire on a

$$\langle 1, \phi \rangle = \int_{L(F)} \phi(x') dx' = \sum_{T' \in \mathcal{T}'} w(T', F)^{-1} \int_{T'(F)} \Phi_{G(F)}^1(t', \phi) |D_{T'}^L(t')|_F dt' .$$

Considérons un couple d'éléments semi-simples fortement réguliers  $\delta \in L(F)$  et  $\gamma \in H(F)$ , où  $\gamma$  est une norme de  $\delta$ . Soit  $T = I_\gamma^H$  et  $T' = \delta \cdot I_\delta$ . Alors  $u = t\gamma$  est une norme de  $u' = t' \cdot \delta$  si  $\varphi(t') = t^\ell$  où  $\varphi$  est l'isomorphisme  $I_\delta \rightarrow I_\gamma^H$  et

$$d\mu'(u') = |D_{T'}^L(u')|_F du' = |D_{T'}^L(t' \cdot \delta)|_F dt' = |D_T^H(t \cdot \gamma)|_F dt = |D_T^H(u)|_F du = d\mu(u)$$

(cf. [AC, chap. 2, lemma 1.1, p. 80]). L'élévation à la puissance  $\ell$  est un isomorphisme entre voisinages de 1 bien choisis dans  $T(F)$  et donc la norme induit, pour un voisinage  $U'$  de  $\delta$  dans  $T'(F)$  et un voisinage  $U$  de  $\gamma$  dans  $T(F)$  bien choisis, un isomorphisme entre espaces mesurés  $(U', \mu'|_{U'})$  et  $(U, \mu|_U)$ . On conclut que

$$\langle 1, \phi \rangle = \langle 1, f \rangle$$

en invoquant 2.4.3. □

Soit  $\kappa \in \mathfrak{K}(H, G^*; F)$  et supposons qu'il existe un caractère  $\tilde{\kappa}$  de  $G(F)$  tel que si  $\tilde{\kappa}_L$  est la fonction sur  $L(F)$  définie par translation du caractère  $\tilde{\kappa}$  alors

$$\tilde{\kappa}_L(\delta_x) = \tilde{\kappa}_L(\delta) \langle \kappa, x \rangle.$$

On pose

$$\Delta_{\tilde{\kappa}}(\gamma, \delta) = \tilde{\kappa}_L(\delta) \Delta_1(\gamma, \delta)$$

On observera que pour  $\phi \in C_c^\infty(L(F))$  la fonction

$$\delta \mapsto \Delta_{\tilde{\kappa}}(\gamma, \delta) \Phi_{G(F)}^\kappa(\delta, \phi)$$

est constante sur les classes de conjugaison stable.

On dira que le  $\kappa$ -transfert entre  $L(F)$  et  $H(F)$  est possible pour  $\kappa \in \mathfrak{K}(H, G^*; F)$  si il existe un caractère  $\tilde{\kappa}$  comme ci-dessus et si pour toute  $\phi \in C_c^\infty(L(F))$ , il existe une fonction  $f_{\tilde{\kappa}} \in C_c^\infty(H(F))$  tels que

$$\Phi_{H(F)}^1(\gamma, f_{\tilde{\kappa}}) = \sum_{\delta} \Delta_{\tilde{\kappa}}(\gamma, \delta) \Phi_{G(F)}^\kappa(\delta, \phi).$$

Le facteur  $\Delta_{\tilde{\kappa}}$  est un facteur de transfert pour  $H$  et  $\tilde{\kappa}$ . Bien entendu, en général  $\kappa$  ne détermine pas le facteur de transfert de façon unique.

**Proposition 3.2.3.** — *Supposons que  $G_{\text{der}}$  est simplement connexe. Si le transfert stable est possible entre  $L(F)$  et  $H(F)$ , alors le  $\kappa$ -transfert est possible pour tout  $\kappa \in \mathfrak{K}(H, G^*; F)$ .*

*Démonstration.* — L'application

$$x \mapsto x^{-1} \theta(x)$$

induit un homomorphisme

$$\mathbf{H}_{ab}^0(F, H \backslash G^*) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(F, G^*).$$

Le lecteur se convaincra que cet homomorphisme est injectif si  $G_{der}$  est simplement connexe. Considérons un caractère  $\kappa \in \mathfrak{K}(H, G^*; F)$  obtenu par composition d'un caractère  $\tilde{\kappa}$  de  $\mathbf{H}_{ab}^0(F, G^*)$  avec l'homomorphisme

$$\mathbf{H}_{ab}^0(F, H \backslash G^*) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(F, G^*).$$

Pour tout  $\kappa \in \mathfrak{K}(H, G^*; F)$  un tel  $\tilde{\kappa}$  existe toujours si l'homomorphisme est injectif. Compte tenu de l'isomorphisme  $\mathbf{H}_{ab}^0(F, G) = \mathbf{H}_{ab}^0(F, G^*)$  et du morphisme d'abélianisation on obtient un caractère de  $G(F)$  encore noté  $\tilde{\kappa}$  et une fonction  $\tilde{\kappa}_L$  sur  $L(F)$  telle que

$$\tilde{\kappa}_L(\delta_x) = \tilde{\kappa}_L(\delta) \langle \kappa, \dot{x} \rangle.$$

Soit  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(L(F))$ ; on a aussi  $\tilde{\kappa}_L \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(L(F))$  et

$$\Phi_{G(F)}^1(\delta, \tilde{\kappa}_L \phi) = \tilde{\kappa}_L(\delta) \Phi_{G(F)}^\kappa(\delta, \phi).$$

Supposons que le transfert stable est possible entre  $L(F)$  et  $H(F)$ . Soit  $f_{\tilde{\kappa}}$  une fonction sur  $H(F)$  associée à  $\tilde{\kappa}_L \phi$  c'est-à-dire telle que

$$\Phi_{H(F)}^1(\gamma, f_{\tilde{\kappa}}) = \sum_{\delta} \Delta_1(\gamma, \delta) \Phi_{G(F)}^1(\delta, \tilde{\kappa}_L \phi)$$

on aura

$$\Phi_{H(F)}^1(\gamma, f_{\tilde{\kappa}}) = \sum_{\delta} \Delta_{\tilde{\kappa}}(\gamma, \delta) \Phi_{G(F)}^\kappa(\delta, \phi).$$

□

### 3.3. Transfert aux places non-archimédiennes

La preuve de l'existence du transfert utilise le résultat difficile suivant dû à Waldspurger : soit  $F$  un corps non-archimédien, le transfert entre un groupe réductif connexe  $G_0(F)$  et sa forme intérieure quasi-déployée  $H(F)$  est possible ; c'est le corollaire 1.7 de [Walds]. En combinant ceci et notre résultat de descente, on obtient le transfert (stable) pour le changement de base.

**Théorème 3.3.1.** — *Soit  $F$  un corps non-archimédien. Le transfert entre  $L(F)$  et  $H(F)$  est possible.*

*Démonstration.* — On remarque que, par décomposition de Jordan, pour tout  $\delta_1 \in L(F)$  il existe un  $\delta_0 \in L(F)$  semi-simple tel que  $\delta_1 = u\delta_0$  avec  $u$  unipotent dans  $M(F)$  la composante neutre du centralisateur de  $\delta_0$  ; de plus modulo conjugaison sous  $M(F)$  on peut supposer  $u$  arbitrairement voisin de 1. Via l'usage d'une partition de l'unité, il résulte de cette remarque qu'il suffit d'établir la proposition pour les fonctions  $\phi$  à support dans un petit voisinage  $\mathcal{W}$  de  $\delta_0$ . Soit  $\delta \in L(F)$  semi-simple régulier. Le lemme 3.1.7 nous fournit une fonction  $\psi$  sur  $M(F)$  telle que pour tout  $\delta \in L(F)$  semi-simple régulier on ait, ou bien

$$\Phi_{G(F)}^1(\delta, \phi) = 0$$

si la classe de  $L$ -conjugaison stable de  $\delta$  ne rencontre pas  $M(F)\delta_0$ , ou bien

$$\Phi_{G(F)}^1(\delta, \phi) = \Phi_{M^+(F)}^1(\tau, \psi)$$

avec  $\tau \in M(F)$  tel que  $\tau\delta_0 = \delta'$  soit  $G$ -stablement conjugué à  $\delta$ . Au voisinage de  $l$  l'élévation à la puissance  $\ell$  est un isomorphisme de variété compatible à la conjugaison et, si les voisinages considérés sont assez petits, il existe donc une fonction  $\psi_1$  sur  $M(F)$  telle que, si  $\tau_1 = \tau^\ell$

$$\Phi_{M(F)}^1(\tau, \psi) = \Phi_{M(F)}^1(\tau_1, \psi_1) .$$

On considère une forme intérieure quasi-déployée  $M^*$  de  $M$ . Le transfert entre  $M(F)$  et  $M^*(F)$  – qui est possible grâce au théorème de Waldspurger [Walds] – nous permet d'exhiber une fonction  $\psi_2$  sur  $M^*(F)$ , telle que

$$\Phi_{M(F)}^1(\tau_1, \psi_1) = \Phi_{M^*(F)}^1(\tau_2, \psi_2) .$$

si  $\tau_2 \in M^*(F)$  est une norme de  $\tau_1$  (pour le transfert entre formes intérieures), et

$$\Phi_{M(F)}^1(\tau_2, \psi_2) = 0$$

si  $\tau_2$  ne provient pas de  $M(F)$ . On observe que les centralisateurs  $M^+$  et  $M^{*+}$  sont isomorphes sur la clôture algébrique et que la norme entre  $M$  et  $M^*$  est compatible avec la  $M^+$  conjugaison stable : deux éléments sont  $M^+$ -stablement conjugués dans  $M$  si et seulement si leurs normes (qui existent car  $M^*$  est quasi-déployé) sont  $M^{*+}$ -stablement conjuguées dans  $M^*$ . Ceci montre que

$$\Phi_{M^+(F)}^1(\tau_1, \psi_1) = \Phi_{M^{*+}(F)}^1(\tau_2, \psi_2) .$$

Soit  $\gamma_0 \in H(F)$  stablement conjugué à  $\delta_0^\ell$ , autrement dit  $\gamma_0$  est une norme pour  $\delta_0$  ; on remarque qu'alors  $\tau_2\gamma_0$  est une norme pour  $\tau\delta_0$ . On choisit  $\gamma_0$  de sorte que son centralisateur  $H_{\gamma_0}$  soit une forme intérieure quasi-déployée de  $M$  (c'est possible grâce à 2.4.4) on a donc  $H_{\gamma_0} \simeq M^*$ . Quitte, si nécessaire, à écrire  $\psi_2$  comme une somme de fonctions à supports plus petits, le lemme 3.1.7 nous fournit une fonction  $f \in C_c^\infty(H(F))$  telle que ou bien

$$\Phi_{H(F)}^1(\gamma, f) = 0$$

si la classe de  $H$ -conjugaison stable de  $\gamma$  ne rencontre pas  $M^*(F)\gamma_0$ , ou bien,

$$\Phi_{H(F)}^1(\gamma, f) = \Phi_{M^{*+}(F)}^1(\tau_2, \psi_2) ,$$

si  $\tau_2\gamma_0$  et  $\gamma$  sont stablement conjugués. Nous avons ainsi construit une fonction  $f$  associée à  $\phi$ .  $\square$

Dans le cas particulier suivant, l'existence du transfert réciproque se déduit immédiatement du résultat de descente 3.1.7.

**Proposition 3.3.2.** — *Supposons  $G_0$  quasi-déployé i.e.  $G_0 = H$ . Étant donné  $f \in C_c^\infty(H(F))$  à support assez petit au voisinage de l'unité, il existe  $\phi \in C_c^\infty(L(F))$  associée.*

*Démonstration.* — Au voisinage de  $1 \in H(F)$  l'élevation à la puissance  $\ell$  est un isomorphisme de variété compatible à la conjugaison et donc, dans un voisinage assez petit de 1, tous les éléments sont des normes. En particulier  $\gamma_0 = 1$  est la norme de  $\delta_0 = 1 \rtimes \theta$  et le centralisateur de  $\delta_0$  dans  $G(F)$  est  $H(F)$ . La proposition est alors conséquence de 3.1.7 (ii).  $\square$

**Remarque.** — L'existence du transfert réciproque entre un groupe réductif connexe  $G_0(F)$  et sa forme intérieure quasi-déployée  $H(F)$  est énoncée par J. Arthur dans [Ar3] à la fin de la section 3 (dans cet article J. Arthur raffine les résultats de Waldspurger [Walds]). C'est la généralisation à toutes les fonctions du résultat de surjectivité concernant les fonctions cuspidales [Ar3, Lemma 3.4] ; elle se déduit, par exemple, des deux théorèmes principaux de l'article d'Arthur [Ar3, section 6]. On peut alors, en imitant la preuve de 3.3.1, généraliser 3.3.2 en prouvant l'existence du transfert réciproque entre  $L(F)$  et  $H(F)$  : étant donné  $f \in C_c^\infty(H(F))$  telle que, si  $\gamma$  n'est pas une norme,

$$\Phi_{H(F)}^1(\gamma, f) = 0$$

il existe  $\phi \in C_c^\infty(L(F))$  associée.

L'existence du transfert fournit la proposition suivante. Pour toute représentation irréductible  $\pi^G$  de  $G(F)$  qui se prolonge en une représentation irréductible de  $G^+(F)$  on choisit un prolongement  $\pi_0^L$ .

**Proposition 3.3.3.** — *Supposons que l'on dispose d'une identité entre combinaisons linéaires finies de traces de représentations unitaires irréductibles de  $H(F)$  et  $G^+(F)$  :*

$$\sum_{\pi^G} b(\pi^G, \pi_0^L) \text{ trace } \pi_0^L(\phi) = \sum_{\pi^H} a(\pi^H) \text{ trace } \pi^H(f)$$

*pour toute paire  $(\phi, f)$  de fonctions associées.*

- (i) *Supposons que  $b(\pi^G, \pi_0^L) \neq 0$  pour un  $\pi^G$ . Alors il existe  $\pi^H$  tel que  $a(\pi^H) \neq 0$ .*
- (ii) *Réciproquement, si  $G_0$  est quasi-déployé ( $G_0 = H$ ), si tous les  $a(\pi^H)$  sont positifs ou nuls, et s'il existe une représentation irréductible de  $H(F)$  telle que  $a(\pi^H) > 0$ , il existe  $\pi^G$  tel que  $b(\pi^G, \pi_0^L) \neq 0$ .*

*Démonstration.* — Pour toute  $\phi$  il existe  $f$  associée d'après 3.3.1. L'indépendance linéaire des distributions définies par des coefficients de représentations irréductibles inéquivalentes de  $G(F)$ , montre que le premier membre n'est pas identiquement nul, ce qui prouve (i). Passons à la réciproque. Considérons une fonction  $f = g \star \check{g}$  de type positif ; en particulier, on a pour toute représentation unitaire  $\sigma$

$$\text{trace } \sigma(f) \geq 0 .$$

Supposons  $g$  positive et de support assez petit au voisinage de 1 de sorte que  $\pi(g)$  soit un opérateur proche de l'identité (pour la topologie forte) et donc en particulier

de norme de Hilbert-Schmidt non nulle ; ceci implique

$$\text{trace } \pi(f) = \|\pi(g)\|_{\text{HS}}^2 > 0 .$$

Observons enfin que puisque  $G_0$  est quasi-déployé, les normes d'éléments de  $L(F)$  forment un voisinage ouvert de l'identité dans  $G_0(F) = H(F)$  (cf. [Lab3, lemme III.1.6]). Si le support de  $f$  est assez petit il est dans l'ensemble des normes et  $f$  est associée à une fonction  $\phi$  sur  $L(F)$  d'après 3.3.2.  $\square$

### 3.4. Transfert aux places décomposées

Soit  $E/F$  une algèbre cyclique décomposée :

$$E = F \oplus F \oplus \cdots \oplus F$$

et  $\theta$  la permutation cyclique des facteurs. Un transfert explicite, entre  $G_0(F)$  et  $L(F)$ , est obtenu de la façon suivante : si

$$\phi = (f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_\ell)_L$$

et

$$\delta = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\ell) \rtimes \theta$$

alors

$$\Phi_{G(F)}(\delta, \phi) = \Phi_{G_0(F)}(\gamma, f)$$

avec

$$f = f_1 * f_2 * \cdots * f_\ell \quad \text{et} \quad \gamma = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_\ell .$$

Les représentations irréductibles  $\pi^L$  de  $G^+(F)$  telles que  $\text{trace } \pi^L(\phi)$  soit non identiquement nul pour  $\phi \in C_c^\infty(L(F))$  sont les représentations dont la restriction à  $G(F)$  est irréductible et de la forme

$$\pi^L|_{G(F)} = \pi \otimes \cdots \otimes \pi$$

où  $\pi$  est une représentation irréductible de  $G_0(F)$ . Dans ce cas  $\pi^L(\theta)$  est la matrice de permutation cyclique, à une racine  $\ell$ -ième de l'unité près. Réciproquement, la représentation

$$\pi^G = \pi \otimes \cdots \otimes \pi ,$$

admet un prolongement canonique  $\pi_0^L$  à  $G^+(F)$  en choisissant pour  $\pi_0^L(\theta)$  la matrice de permutation.

**Lemme 3.4.1.** — *Supposons que l'on dispose d'une identité entre combinaisons linéaires finies de traces de représentations irréductibles de  $G_0(F)$  et  $G^+(F)$  :*

$$\sum b(\pi^G, \pi_0^L) \text{trace } \pi_0^L(\phi) = \sum a(\pi) \text{trace } \pi(f)$$

pour toute paire  $(\phi, f)$  de fonctions associées. Soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $G_0(F)$  et soit

$$\pi^G = \pi \otimes \cdots \otimes \pi .$$



Alors

$$a(\pi) = b(\pi^G, \pi_0^L) .$$

*Démonstration.* — Soit

$$f = f_1 * f_2 * \cdots * f_\ell$$

et

$$\phi = (f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_\ell)_L ;$$

elles sont associées et

$$\text{trace } \pi_0^L(\phi) = \text{trace } (\pi(f_1) \cdots \pi(f_\ell)) = \text{trace } \pi(f)$$

si  $\pi^G = \pi \otimes \cdots \otimes \pi$ . Donc, pour toute fonction  $f$  factorisable en un produit de convolution de  $\ell$ -facteurs, on a

$$\sum b(\pi^G, \pi_0^L) \text{ trace } \pi(f) = \sum a(\pi) \text{ trace } \pi(f) .$$

On conclut en remarquant que toute fonction lisse à support compact est une somme finie de fonctions factorisables (théorème de Dixmier-Malliavin) et en invoquant l'indépendance linéaire des caractères.  $\square$

### 3.5. Transfert $K$ -fini aux places archimédiennes

Pour les places archimédiennes, on dispose des résultats de Shelstad sur le transfert pour les fonctions de l'espace de Schwartz. On va montrer que les propriétés de support compact et de  $K$ -finitude peuvent aussi être préservées. Le procédé, emprunté à [CD1, Appendice] qui traite le cas de l'endoscopie ordinaire, sera rappelé brièvement. L'adaptation au cas tordu est immédiate pourvu que l'on dispose du théorème de Paley-Wiener scalaire tordu. C'est le cas pour le changement de base grâce à Delorme [Delo].

Il suffit de traiter le cas  $F = \mathbb{R}$ . Rappelons que nous disposons, grâce à Langlands, de la notion de  $L$ -paquet de représentations de groupes réductifs réels et des résultats de Shelstad [She1] [She2] et de Clozel [Clo1] et [CD1, Appendice] sur la functorialité entre formes intérieures et changement de base  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ . Soient  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H(\mathbb{R}))$  et  $\Pi$  un  $L$ -paquet tempéré on pose

$$\text{trace } \Pi(f) = \sum_{\pi \in \Pi} \text{trace } \pi(f) .$$

**Lemme 3.5.1.** — *Soit  $f \in \mathcal{S}(H(\mathbb{R}))$ , l'espace de Schwartz. Ses traces dans tout  $L$ -paquet tempéré  $\Pi$  sont nulles :*

$$\text{trace } \Pi(f) = 0$$

*si et seulement si les intégrales orbitales stables de  $f$  sont nulles.*

*Démonstration.* — C'est le lemme 5.3 de [She1, page 40].  $\square$

On dit qu'un  $L$ -paquet de représentations  $\Pi^L$  de représentations irréductibles de  $G^+(\mathbb{R})$  dont la restriction à  $G(F)$  est irréductible et tempérée est un changement de base (ou le relèvement) d'un  $L$ -paquet  $\Pi$  de représentations tempérées de  $H(F)$  s'il existe une constante  $c(\Pi^L)$  telle que

$$\text{trace } \Pi^L(\phi) = c(\Pi^L) \text{ trace } \Pi(f)$$

pour tout couple  $(\phi, f)$  de fonctions associées.

**Remarque.** — Pour un groupe complexe, en particulier dans le cas du changement de base  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ , un  $L$ -paquet  $\Pi^L$  a un seul composant. Mais dans ce cas on prendra garde que la constante  $c(\Pi^L)$  dépend du choix du prolongement de la représentation de  $G(\mathbb{R}) = G_0(\mathbb{C})$  au produit semi-direct  $G^+(\mathbb{R})$ . Clozel dans [Clo1] fait un choix 'canonique', mais ce n'est pas le choix utilisé par Johnson [J].

**Proposition 3.5.2.** — Soit  $K^G$  un compact maximal de  $G(\mathbb{R})$ . Soit  $\phi \in C_c^\infty(L(\mathbb{R}))$  et  $K^G$ -finie, il existe  $f \in C_c^\infty(H(\mathbb{R}))$  associée et  $K^H$ -finie. De plus, le transfert est compatible aux multiplicateurs.

*Démonstration.* — D'après Shelstad [She2] il existe une fonction dans l'espace de Schwartz  $f_1 \in \mathcal{S}(H(\mathbb{R}))$  associée à  $\phi$ . Considérons un  $L$ -paquet  $\Pi^L$  de représentations irréductibles de  $G^+(\mathbb{R})$ , dont la restriction à  $G(\mathbb{R})$  est irréductible et tempérée, et qui est le changement de base d'un  $L$ -paquet  $\Pi$  de représentations tempérées de  $H(\mathbb{R})$ . Compte tenu des identités de caractère, dues à Shelstad pour les formes intérieures [She1] et à Clozel pour le changement de base [Clo1], on a

$$\text{trace } \Pi^L(\phi) = c(\Pi^L) \text{ trace } \Pi(f_1) .$$

Maintenant, il existe une fonction  $K^H$ -finie  $f \in C_c^\infty(H(\mathbb{R}))$  dont la transformée de Fourier scalaire satisfait les conditions suivantes :

$$\text{trace } \Pi^L(\phi) = c(\Pi^L) \text{ trace } \Pi(f)$$

pour tout  $L$ -paquet  $\Pi$  de représentations tempérées dont un changement de base est  $\Pi^L$ . On peut, pour fixer les idées, exiger de plus que la transformée de Fourier scalaire de  $f$  soit constante sur les  $L$ -paquets tempérés :

$$\text{trace } \pi_1(f) = \text{trace } \pi_2(f)$$

si  $\pi_1$  et  $\pi_2$  appartiennent au même  $L$ -paquet tempéré. Ceci résulte de la comparaison des théorèmes de Paley-Wiener scalaire pour  $L(\mathbb{R})$  [Delo] et  $H(\mathbb{R})$  [CD2]. Il suffit maintenant d'invoquer 3.5.1 pour conclure que  $f$  et  $f_1$  ont les mêmes intégrales orbitales stables et que donc  $f$  et  $\phi$  sont associées. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  des multiplicateurs, au sens d'Arthur, qui se correspondent par le changement de base :

$$\widehat{\alpha}(\nu_{\Pi^L}) = \widehat{\beta}(\nu_{\Pi})$$

pour tout  $L$ -paquet  $\Pi$  de représentations tempérées dont un changement de base est  $\Pi^L$ . Par définition des multiplicateurs on a

$$\text{trace } \Pi^L(\phi_\alpha) = \widehat{\alpha}(\nu_{\Pi^L}) \text{ trace } \Pi^L(\phi)$$

et

$$\text{trace } \Pi(f_\beta) = \widehat{\beta}(\nu_\Pi) \text{ trace } \Pi(f) .$$

On voit que  $\phi_\alpha$  admet pour transfert  $f_\beta$ . □

**Proposition 3.5.3.** — *Réciproquement, si  $f \in C_c^\infty(H(\mathbb{R}))$  est  $K^H$ -finie avec des intégrales orbitales stables nulles pour les  $\gamma$  semi-simples non-normes, il existe  $\phi \in C_c^\infty(L(\mathbb{R}))$  associée et  $K^H$ -finie. Le transfert réciproque  $K^H$ -fini est compatible aux multiplicateurs.*

*Démonstration.* — La fonction  $f$  est  $K^H$ -finie avec des intégrales orbitales stables nulles pour les  $\gamma$  semi-simples réguliers non-normes. Si deux  $L$ -paquets  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  ont même changement de base  $\Pi^L$ , les identités de caractère montrent que la différence de leur caractère s'annule sur les normes. L'application

$$\Phi : \Pi^L \longmapsto c(\Pi^L) \text{ trace } \Pi(f)$$

où  $\Pi^L$  est un changement de base du  $L$ -paquet  $\Pi$ , est donc bien définie. On en conclut, grâce aux théorèmes de Paley-Wiener scalaire pour  $L(\mathbb{R})$  et  $H(\mathbb{R})$  qu'il existe une fonction  $\phi \in C_c^\infty(L(\mathbb{R}))$  qui est  $K^G$ -finie et représente  $\Phi$ , c'est-à-dire est telle que

$$\text{trace } \Pi^L(\phi) = c(\Pi^L) \text{ trace } \Pi(f)$$

si  $\Pi^L$  est le changement de base du  $L$ -paquet  $\Pi$ . Par ailleurs, d'après Shelstad il existe  $f_1 \in \mathcal{S}(H(\mathbb{R}))$  associée à  $\phi$ . Comme ci-dessus, d'après 3.5.1,  $f$  et  $f_1$  ont mêmes intégrales orbitales stables puisque leurs traces dans les  $L$ -paquets tempérés sont égales et donc  $f$  et  $\phi$  sont associées, de façon compatible aux multiplicateurs. □

**Proposition 3.5.4.** — *On suppose que  $F = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et soit  $E$  une  $F$ -algèbre cyclique. Supposons que l'on dispose d'une identité entre des séries absolument convergentes de traces de représentations unitaires irréductibles*

$$\sum b(\pi^G, \pi_0^L) \text{ trace } \pi_0^L(\phi) = \sum a(\pi^H) \text{ trace } \pi^H(f)$$

pour toutes les paires de fonctions associées. Alors, pour tout couple de caractères infinitésimaux  $\nu$  pour  $H$  et  $\nu^G$  pour  $G$  associés par functorialité on a l'identité

$$\sum \delta^G(\nu^G, \pi^G) b(\pi^G, \pi_0^L) \text{ trace } \pi_0^L(\phi) = \sum \delta^H(\nu, \pi^H) a(\pi^H) \text{ trace } \pi^H(f)$$

où  $\delta^H(\nu, \pi^H) = 1$  si  $\nu$  est le caractère infinitésimal de  $\pi^H$  et zéro sinon. Les résultats de 3.3.3 s'appliquent (sous les mêmes hypothèses). Supposons maintenant  $G_0$  quasi-déployé ( $G_0 = H$ ) et tous les  $a(\pi^H) \geq 0$ . Considérons une représentation  $\pi^H$  avec  $a(\pi^H) \neq 0$  qui soit à cohomologie non triviale. Alors, il existe  $\pi^G$  à cohomologie non triviale avec  $b(\pi^G, \pi_0^L) \neq 0$ .

*Démonstration.* — Compte tenu de la convergence absolue de ces expressions et de la compatibilité du transfert  $K$ -fini aux multiplicateurs, un argument désormais classique (cf. par exemple [AC, Chap. 2, section 15]) permet de raffiner une telle identité en séparant les caractères infinitésimaux. Ceci fournit des identités entre traces de représentations dont les caractères infinitésimaux sont fixés et se correspondent par fonctorialité; en particulier les sommes sont finies. La preuve de l'analogue de 3.3.3 dans le cadre  $K$ -fini est immédiate. Montrons l'assertion sur les représentations à cohomologie. Pour les places qui se décomposent on invoque le lemme 3.4.1. Il reste à traiter le cas des places réelles qui deviennent complexes. On a  $a(\pi^H) \geq 0$ ; si l'un des  $a(\pi^H)$  est non nul, le second membre n'est pas identiquement nul puisque l'on peut supposer  $f$  de type positif. On remarque ensuite que les représentations à cohomologie non triviale ont pour caractère infinitésimal celui de la représentation triviale et que, au moins pour un groupe complexe, la réciproque est vraie pour les représentations unitaires (cf. 3.5.6 ci-dessous).  $\square$

*Remarque.* — Des résultats plus précis de relèvement peuvent sans doute être obtenus grâce à [J], mais nous n'avons pas essayé de le faire.

La proposition 3.5.6 semble bien connue des spécialistes (voir par exemple [Sa, p. 253]) ainsi que cela m'a été indiqué par Laurent Clozel, mais faute de référence nous avons préféré en donner une preuve. Comme on le verra, c'est une conséquence facile d'un résultats d'Enright [E].

Soit  $G$  un groupe réductif sur  $\mathbb{C}$ . Nous utiliserons les notations d'Enright [E]. Soit  $\mathfrak{g}_0$  l'algèbre de Lie de  $G(\mathbb{C})$ . On plonge  $\mathfrak{g}_0$  dans sa complexifiée  $\mathfrak{g}$  par l'application

$$X \mapsto (X, \overline{X})$$

où la conjugaison complexe  $X \mapsto \overline{X}$  se fait relativement à une forme compacte  $\mathfrak{u}$  de sorte que

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u} \oplus J\mathfrak{u} .$$

Soit  $\mathfrak{h}_0$  une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}_0$  adaptée à cette décomposition :

$$\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{a}_0$$

où  $\mathfrak{m}_0$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{u}$  et  $\mathfrak{a}_0 = J\mathfrak{m}_0$ . On choisit un ordre sur les racines et on note  $\delta$  la demi-somme des racines positives  $\alpha \in \Delta_0^+$ . La demi-somme des racines positives pour  $\mathfrak{h}$  (le complexifié de  $\mathfrak{h}_0$ ) dans  $\mathfrak{g}$  est

$$\rho = (\delta, -\delta) .$$

On note  $W_0$  le groupe de Weyl de  $G$  et  $W = W_0 \times W_0$  est le groupe de Weyl du complexifié. Considérons  $s \in W_0$  un élément d'ordre 2, et un sous-groupe parabolique standard de  $G$

$$Q_s = M_s N_s$$

tels que : l'ensemble  $\Delta_s$  des racines de  $\mathfrak{h}_0$  dans  $\mathfrak{m}_{s,0}$  est l'ensemble des racines  $\alpha \in \Delta_0$  telles que

$$\langle (1+s)\delta, \alpha \rangle = 0 .$$

En particulier  $s$  est l'élément de plus grande longueur dans  $W_s \subset W_0$  le groupe de Weyl de  $M_s$ . On note  $\delta_s$  la demi-somme des racines positives dans  $M_s$  et on pose  $\mu_s = \delta_s - \delta$ . On suppose que  $s\mu_s = \mu_s$  ce qui implique

$$2\mu_s = -(1+s)\delta .$$

L'exponentielle, de la forme linéaire  $(\mu_s, \mu_s)$  restreinte à  $\mathfrak{h}_0$ , se prolonge en une représentation  $\sigma_s$  de dimension 1 de  $M_s(\mathbb{C}) \simeq Q_s(\mathbb{C})/N_s(\mathbb{C})$ . On note  $\pi_s$  la représentation de  $G(\mathbb{C})$  unitairement induite par le caractère unitaire  $\sigma_s$  du sous-groupe parabolique  $Q_s(\mathbb{C})$ .

**Lemme 3.5.5.** — *Les représentations  $\pi_s$  sont à cohomologie non triviale.*

*Démonstration.* — Soit  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  on note  $E_\lambda$  la représentation du complexifié de  $M_s$  de poids dominant  $\lambda$ . Soit  $M_s^1$  le noyau de la flèche naturelle de  $M_s(\mathbb{C})$  dans la composante neutre  $A_s$  du tore réel déployé maximal du centre de  $M_s$ . Pour prouver que  $\pi_s$  a des groupes de cohomologie non triviaux, il suffit, d'après [BW, Chapitre III, theorem 3.3], d'exhiber un  $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in W$  tel que

$$(\star) \quad \tau_i^{-1}(\alpha) > 0$$

pour toute  $\alpha \in \Delta_s^+$ , et tel que

$$\sigma_s \otimes E_{\tau\rho - \rho}$$

soit la représentation triviale de  $M_s^1$ . Soit  $c \in W_0$  l'élément de plus grande longueur ; on considère  $\tau = (1, sc)$  ; cet élément vérifie la condition  $(\star)$  et on a

$$\tau\rho - \rho = (0, -2\mu_s) .$$

Donc pour tout  $(\alpha, \beta) \in \Delta_s \times \Delta_s$

$$\langle \tau\rho - \rho, (\alpha, \beta) \rangle = 0$$

puisque  $\langle \mu_s, \beta \rangle = 0$  par définition de  $\Delta_s$ . Ceci montre que la représentation  $E_{\tau\rho - \rho}$  est triviale sur le groupe dérivé et donc de dimension 1. Par ailleurs, sur  $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{u}$ , la forme linéaire  $(\mu_s, \mu_s)$  induit la forme linéaire  $2\mu_s$  et  $\tau\rho - \rho$  induit la forme linéaire  $-2\mu_s$  ; leur somme est nulle. On a donc prouvé que, si  $\tau = (1, sc)$

$$\sigma_s \otimes E_{\tau\rho - \rho}$$

est la représentation triviale de  $M_s^1$ . □

**Remarque.** — Une variante consiste à remarquer que les représentations  $\pi_s$  sont des représentations de type  $A_q$  au sens de Vogan-Zuckerman [VZ, theorem 2.5] ; elle sont à cohomologie non triviale d'après [VZ, Theorem 3.3].

**Proposition 3.5.6.** — *Soit  $G(\mathbb{C})$  un groupe réductif complexe. Les représentations unitaires de  $G(\mathbb{C})$ , dont le caractère infinitésimal est celui de la représentation triviale, sont à cohomologie non triviale.*

*Démonstration.* — Le caractère infinitésimal de la représentation unité de  $G(\mathbb{C})$  est l'orbite sous  $W$  de la forme linéaire  $(\delta, \delta)$ . D'après [E, proposition 6.8], toute représentation unitaire  $\pi$  ayant même caractère infinitésimal que la représentation unité, est équivalente à une des représentations  $\pi_s$  construites ci-dessus ; elles sont à cohomologie non triviale d'après le lemme 3.5.5.  $\square$

### 3.6. Transfert et représentations des séries principales

Soit  $F$  un corps local non-archimédien. Soit  $P_0$  un sous-groupe parabolique minimal dans  $G$  et  $M_0$  un sous-groupe de Levi et  $X^*$  le réseau de ses caractères  $F$ -rationnels. Soient  $P$  un sous-groupe parabolique standard,  $M$  le sous-groupe de Levi contenant le sous-groupe de Levi minimal  $M_0$ . Soit  $\chi$  un caractère de  $M(F)$  à valeurs dans le groupe multiplicatif d'un corps valué  $k$  (soit  $k = F$  soit  $k = \mathbb{C}$ ) ; on définit  $\mu(\chi) \in X^* \otimes \mathbb{R}$  comme le morphisme de  $M_0(F)$  à valeurs dans le groupe additif des réels

$$t \longmapsto \log |\chi(t)|_k .$$

Nous dirons que  $\mu(\chi)$  est positif si  $\langle \mu(\chi), \alpha \rangle \geq 0$  pour toute racine positive  $\alpha$ . Nous dirons que  $\mu(\chi)$  est strictement  $P$ -positif si  $\mu(\chi)$  est positif et si  $\langle \mu(\chi), \alpha \rangle = 0$  si et seulement si  $\alpha$  est une racine de  $M_0$  dans  $M$ . Soit  $\sigma$  une représentation unitaire irréductible de  $M(F)$ . On prolonge  $\sigma \otimes \chi$  en une représentation de  $P(F)$  triviale sur le radical unipotent, et on note  $I_{P,\sigma,\chi}$  l'induite (pour l'induction unitaire) :

$$I_{P,\sigma,\chi} = \text{ind}_{P(F)}^{G(F)} \sigma \otimes \chi .$$

Lorsque  $\mu(\chi)$  est strictement  $P$ -positif on peut définir le quotient de Langlands  $J_{P,\sigma,\chi}$  ([BW] Chap. XI).

Les représentations sphériques, relativement à un sous-groupe compact maximal  $K^G$ , sont, par définition, les représentations admissibles irréductibles admettant un vecteur non nul fixe sous ce sous-groupe.

**Lemme 3.6.1.** — *Les représentations sphériques, relativement à un sous-groupe compact maximal spécial  $K^G$ , sont des sous-quotients de représentations de la série principale non-ramifiée.*

*Démonstration.* — En fait, plus généralement, Casselman a montré que les représentations admettant des vecteurs non nuls invariants sous un sous-groupe d'Iwahori sont des sous-quotients de représentations de la série principale non-ramifiée [Cas2, Proposition 2.6].  $\square$

Un sous-groupe compact spécial est dit ‘très spécial’ si les constantes  $q_{\alpha/2}$  qui lui sont attachées (voir, par exemple, [Cas2]) vérifient  $q_{\alpha/2} \geq 1$ . Il existe toujours des sous-groupes compacts très spéciaux. Les sous-groupes compacts hyperspéciaux, lorsqu’ils existent, sont très spéciaux.

**Proposition 3.6.2.** — *Soit  $\Sigma$  un  $L$ -paquet de représentations unitaires irréductibles de  $M(F)$  obtenues en décomposant une induite par un caractère unitaire non ramifié  $\eta$  de  $M_0(F)$ . Soit  $K^G$  un sous-groupe compact très spécial dans  $G(F)$ . Si  $\chi$  est un caractère non ramifié de  $M(F)$  avec  $\mu(\chi)$  strictement  $P$ -positif, l’ensemble des quotients de Langlands  $J_{P,\sigma,\chi}$  avec  $\sigma \in \Sigma$  contient le sous-quotient  $K^G$ -sphérique.*

*Démonstration.* — La proposition est une généralisation de la proposition 6 de [Lab1] qui traite le cas où  $K^G$  est hyperspécial et  $\Sigma$  est un singleton. L’ensemble des quotients de Langlands  $J_{P,\sigma,\chi}$  avec  $\sigma \in \Sigma$  est un  $L$ -paquet qui s’obtient en décomposant l’image d’un certain opérateur d’entrelacement  $T_w$  pour la série principale définie par  $\eta\chi|_{M_0(F)}$ . Le sous-quotient sphérique est dans l’image de cet opérateur si  $T_w$  est non nul sur le vecteur  $K^G$ -invariant de l’espace de la série principale. On observe que les constantes  $q_{\alpha/2}$  interviennent dans les formules de Macdonald permettant de calculer cet opérateur d’entrelacement sur le vecteur sphérique (cf. [BW, Chap XI] ou [Cas2, p. 397]). L’hypothèse  $q_{\alpha/2} \geq 1$  implique que la valeur de la fonction  $c_w(\chi)$  qui permet d’exprimer cet opérateur, est non nulle pour les caractères  $\chi$  tels que  $\mu(\chi)$  est strictement  $P$ -positif.  $\square$

Supposons maintenant que le groupe  $G_0(F)$  est quasi-déployé ( $G_0 = H$ ), mais pas nécessairement non-ramifié. Soit  $P_0$  un sous-groupe de Borel et soit  $T$  un tore maximal dans  $P_0$ . Soit  $t \in T(F)$  fortement positif (relativement à  $P_0$ ) c’est-à-dire tel que  $P_0$  soit le sous-groupe parabolique associé à  $t$  à la Deligne-Casselman [Cas1]. On suppose que  $t$  est la norme d’un  $\delta \in T(E) \rtimes \theta \subset L(F)$ .

Soient  $W$  et  $\tilde{W}$  des ouverts compacts non vides de  $H(F)$  et  $G(F)$  respectivement. Soient  $\tilde{U}$  le compact maximal de  $T(E)$  et  $U$  l’image par la norme de  $\tilde{U}$  dans  $T(F)$ . C’est le sous-groupe des normes du compact maximal de  $T(F)$ .

**Proposition 3.6.3.** — *On note  $\phi_\delta$  la fonction caractéristique de l’ensemble des  $x \in L(F)$  de la forme  $x = k^{-1}\delta uk$  avec  $k \in \tilde{W}$  et  $u \in \tilde{U}$ . On note  $f_t$  la fonction caractéristique de l’ensemble des  $x = k^{-1}tuk$  avec  $k \in W$  et  $u \in U$ .*

(i) *A une constante près, les fonctions  $\phi_\delta$  et  $f_t$  sont associées.*

(ii) *Soit  $\pi^H$  une représentation admissible irréductible de  $H(F)$  alors*

$$\text{trace } \pi^H(f_t) \neq 0$$

*implique que  $\pi^H$  est un sous-quotient de la série principale induite par un caractère  $\chi$  du sous-groupe parabolique minimal  $P_0$ , et  $\chi|_{T(F)}$  est trivial sur  $U$ .*

(iii) *Soit  $\pi^L$  une représentation admissible irréductible de  $G^+(F)$  alors*

$$\text{trace } \pi^L(\phi_\delta) \neq 0$$

implique que  $\pi^L|_{G(F)}$  est un sous-quotient de la série principale non-ramifiée.

*Démonstration.* — L'assertion (i) est claire si  $G_0 = T$ ; dans le cas général, elle se prouve comme la proposition 3 de [Lab3] par descente aux centralisateurs grâce à [Lab1, lemma 1]. L'assertion (ii) est une conséquence immédiatement du théorème de Casselman [Cas1] : il en résulte en effet que la trace de  $\pi^H(f_t)$  est non nulle seulement si le module de Jacquet de  $\pi^H$ , pour le sous-groupe parabolique minimal  $P_0$ , admet des vecteurs invariants sous  $U$  (cf. [Lab1, Proposition 5]). L'assertion (iii) est empruntée à [Lab3].  $\square$

Le changement de base pour les tores, qui est simplement la composition des caractères avec la norme, fournit une notion de changement de base pour les séries principales compatible avec les identités de caractère. Dans le cas de l'induction d'un caractère unitaire, les diverses sous-représentations d'une même série principale forment un  $L$ -paquet. On en déduit une notion de changement de base pour les  $L$ -paquets de sous-quotients de Langlands des séries principales non-ramifiées. On prendra garde que cette notion n'est en général pas compatible avec des identités de caractère.

**Proposition 3.6.4.** — *Soient  $K^H$  et  $K^G$  des sous-groupes compacts très spéciaux dans  $H(F)$  et  $G(F)$  respectivement. On suppose que  $G$  est non-ramifié (i.e. quasi-déployé et déployé sur une extension non ramifiée) et que  $K^G$  est hyperspécial. Supposons que l'on dispose d'une identité entre sommes finies de traces de représentations irréductibles de  $H(F)$  et  $G^+(F)$  :*

$$\sum b(\pi^G, \pi_0^L) \text{ trace } \pi_0^L(\phi) = \sum a(\pi^H) \text{ trace } \pi^H(f)$$

pour toute paire  $(\phi, f)$  de fonctions associées. On suppose enfin que les coefficients  $a(\pi^H)$  sont positifs. Soit  $\pi^H$  une représentation  $K^H$ -sphérique de  $H(F)$  telle que  $a(\pi^H) \neq 0$ .

(i) Alors l'une des représentations  $\pi^G$  du  $L$ -paquet  $\Pi^G$  pour  $G(F)$  qui lui correspond par changement de base est telle que  $b(\pi^G, \pi_0^L) \neq 0$ .

(ii) Supposons de plus les coefficients  $b(\pi^G, \pi_0^L)$  invariants sous l'action du groupe adjoint. Alors la représentation  $K^G$ -sphérique  $\pi^G$  de  $G(F)$  qui lui correspond par changement de base est telle que  $b(\pi^G, \pi_0^L) \neq 0$ .

*Démonstration.* — On applique l'identité à une paire de fonctions associées  $(\phi_\delta, f_t)$ . Si

$$\text{trace } \pi^H(f_t) \neq 0$$

il existe un caractère  $\chi$  de  $T(F)$  trivial sur les normes du compact maximal de  $T(E)$  tel que

$$\text{trace } \pi^H(f_t) = \sum_w c(\pi^H, \chi, w) \chi^w(t)$$

où  $w$  parcourt le groupe de Weyl de  $T(F)$  dans  $H(F)$  et les  $c(\pi^H, \chi, w)$  sont des constantes positives. La positivité des  $a(\pi^H)$  assure que les contribution des  $\pi^H$ , dont



le module de Jacquet fait intervenir un caractère de ce type, ne se compensent pas. Les

$$t \mapsto \text{trace } \pi^H(f_t)$$

avec  $t$  norme de  $\delta$  séparent les restrictions des caractères apparaissant dans les modules de Jacquet, au sous-groupe des  $t$  qui sont des normes. Comme  $\pi_0^H$  est sphérique, c'est un sous-quotient de Langlands de  $I_\chi$ , une série principale non ramifiée, d'après 3.6.2. Par réciprocity de Frobenius (en reprenant la preuve de la proposition 8 de [Lab1]) on voit que le semi-simplifié du module de Jacquet de  $\pi^H$  pour  $P_0$  contient, avec multiplicité non nulle, des caractères  $\chi^w$  avec  $\mu(\chi^w)$  négatif. Par séparation des caractères on obtient (i). Pour (ii) on observe de plus que, compte tenu de [Lab1, proposition 8], les fonctions élémentaires  $\phi_\delta$  suffisent pour séparer les orbites sous le groupe adjoint des sous-quotients  $K^G$ -sphériques des séries principales non ramifiées.  $\square$

### 3.7. Transfert non-ramifié : le lemme fondamental

Soit  $\mathcal{O}_F$  l'anneau des entiers de  $F$ , un corps local non archimédien. On dit que le quadruple

$$(H, K^H, G, K^G)$$

est non ramifié si

- $G_0$  est un schéma en groupes quasi-déployé sur  $\mathcal{O}_F$ , en particulier  $G_0 = H$ , et  $G_0$  est déployé sur une extension non ramifiée de  $F$
- $K^H = H(\mathcal{O}_F)$  est un sous-groupe compact maximal hyperspécial
- l'extension  $E/F$  est non ramifiée
- $K^G = G(\mathcal{O}_F) = H(\mathcal{O}_E)$ .

Pour un tel quadruple on dispose des algèbres de Hecke sphériques : ce sont les algèbres de convolution  $\mathcal{H}^H$  (resp.  $\mathcal{H}^G$ ) des fonctions sur  $H(F)$  bi-invariantes par  $K^H$  (resp. sur  $G(F)$  bi-invariantes par  $K^G$ ) et de l'homomorphisme de changement de base

$$b_{E/F} : \mathcal{H}^G \rightarrow \mathcal{H}^H .$$

**Lemme 3.7.1.** — Soit  $h' = b_{E/F}(h)$  et soit  $x \in H(F)$  tel que, pour un caractère  $\chi$  du groupe  $\mathbf{H}_{ab}^0(F, H)$ , trivial sur les normes, on ait

$$\chi(x) \neq 1$$

alors  $h'(x) = 0$ .

*Démonstration.* — Le groupe  $H$  est non-ramifié ; choisissons comme tore  $T^H$  le sous-groupe de Levi d'un sous-groupe de Borel. Le groupe  $H_{SC}$  est un produit de groupes quasi-simples et non ramifiés ; le tore  $T_{sc}^H$  est un produit de tores obtenus par restriction des scalaires (pour des extensions non ramifiées) de tores déployés, ce qui

montre que  $\mathbf{H}^1(F, T_{sc}^H)$  est trivial et que donc  $T^H(F)$  se surjecte sur  $\mathbf{H}_{ab}^0(F, H)$ . Notons encore  $\chi$  le caractère de  $T^H(F)$  induit par  $\chi$ . L'extension  $E/F$  est non-ramifiée ; or, d'après [Ko3], les normes pour une extension non ramifiée sont surjectives sur le compact maximal de  $T^H(F)$ . Le caractère  $\chi$  est trivial sur les normes et donc non ramifié. Soit  $\pi_\lambda^H$  une représentation sphérique définie par un caractère non ramifié  $\lambda$  ; on note  $\tilde{\lambda}$  le composé de  $\lambda$  avec la norme. On a

$$\text{trace } \pi_\lambda^H(h'\chi) = \text{trace } \pi_{\lambda\chi}^H(h') = \text{trace } \pi_{\tilde{\lambda}}^L(h) = \text{trace } \pi_\lambda^H(h')$$

puisque  $h' = b_{E/F}(h)$  et que  $\pi_{\lambda\chi}^H$  et  $\pi_\lambda^H$  ont même changement de base  $\pi_{\tilde{\lambda}}^L$ . Les fonctions  $h'$  et  $h'\chi$  ayant même transformée de Fourier sont donc égales. En particulier

$$h'(x)(1 - \chi(x)) = 0$$

ce qui impose  $h'(x) = 0$  puisque  $\chi(x) \neq 1$ . □

**Proposition 3.7.2.** — *Soit  $h \in \mathcal{H}^G$ . Si  $\gamma$  semi-simple n'est pas une norme alors*

$$\Phi_{H(F)}^1(\gamma, b_{E/F}h) = 0 .$$

*Démonstration.* — Compte tenu de la compatibilité aux termes constants pour les intégrales orbitales et des traces dans les représentations sphériques, il suffit d'établir le résultat d'annulation pour les éléments elliptiques dans  $H$ . L'assertion d'annulation résulte de 2.5.3 et 3.7.1. □

**Remarque.** — L'argument local-global invoqué dans [Clo2] pour établir le résultat d'annulation est incorrect ; il est également incorrect dans [Lab1] qui cite la preuve de [Clo2] à ce point ; en effet, l'argument local-global suppose implicitement que  $\gamma$  est la composante locale d'un élément, rationnel sur un corps global, qui est une norme en toutes les places sauf une, ce qui est impossible.

**Proposition 3.7.3.** — *Supposons que le quadruple  $(H, K^H, G, K^G)$  est non ramifié. La fonction caractéristique de  $K^H$  et celle de  $K^G \rtimes \theta$  sont associées. Plus généralement, soit  $h \in \mathcal{H}^G$ , alors  $h_L$  et  $b_{E/F}h$  sont associées.*

*Démonstration.* — La première assertion est due à Kottwitz [Ko3]. Pour tout  $h \in \mathcal{H}^G$ , les intégrales orbitales stables sont compatibles avec la norme : si  $\gamma$  est une norme de  $\delta$

$$\Phi_{G(F)}^1(\delta, h_L) = \Phi_{H(F)}^1(\gamma, b_{E/F}(h)) .$$

Ceci est prouvé dans [Clo2] ; on en trouvera une preuve plus élémentaire dans [Lab1]. Le résultat d'annulation qui doit compléter cette assertion a été prouvé en 3.7.2. □

### 3.8. Fonctions cuspidales et stabilisantes

Pour pouvoir utiliser une forme simple de la formule des traces nous ferons appel en certaines places à des fonctions cuspidales, une notion due à Arthur.

**Définition 3.8.1.** — On dit qu'une fonction  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(L(F))$  est cuspidale si ses intégrales orbitales sont nulles pour les éléments semi-simples réguliers non elliptiques. On dira qu'elle est fortement cuspidale si ses intégrales orbitales sont nulles pour tous les éléments non elliptiques et si de plus

$$\text{trace } \pi(\phi) = 0$$

pour toute  $\pi$  qui est un composant de l'induite d'une représentation unitaire pour un sous-groupe parabolique propre.

Des exemples de fonctions cuspidales sont fournis, lorsque  $G$  est semi-simple (ou réductif de centre anisotrope), par les coefficients de représentations super-cuspidales et plus généralement par les pseudo-coefficients de représentations des séries discrètes comme il résulte du principe de Selberg.

Nous aurons de plus besoin qu'en certaines places les intégrales orbitales des éléments semi-simples (multipliées par le signe de Kottwitz du centralisateur) soient constantes sur les classes de conjugaison stable. Nous introduisons pour cela la notion de fonction stabilisante.

**Définition 3.8.2.** — On dira qu'une fonction  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(L(F))$  est stabilisante si

- (i)  $\phi$  est cuspidale,
- (ii) les intégrales  $\kappa$ -orbitales  $\Phi_{G(F)}^\kappa(\delta, \phi)$  sont nulles pour tout  $\delta$  semi-simple et tout  $\kappa \neq 1$ .

Des exemples de telles fonctions sont obtenus lorsque  $G$  est semi-simple (ou réductif de centre anisotrope), par des moyennes de pseudo-coefficients de  $L$ -paquets de séries discrètes, en particulier au moyen de fonctions d'Euler-Poincaré ou de Lefschetz dans le cas tordu, en des places où

$$\mathfrak{D}(I, G; F) \rightarrow \mathfrak{E}(I, G; F)$$

est bijectif. Un cas typique est celui des pseudo-coefficients de représentations de Steinberg aux places finies qui fait l'objet de la section suivante. Le cas des places archimédiennes est traité dans [CL].

### 3.9. Transfert et représentation de Steinberg

Supposons tout d'abord que le centre de  $G^+$  est  $F$ -anisotrope ou, de façon équivalente, que le centre de  $H$  est  $F$ -anisotrope. Un pseudo-coefficient de représentation de Steinberg est, au signe près, une fonction d'Euler-Poincaré et de telles fonctions ont été construites dans [Ko6]. La construction de Kottwitz se généralise immédiatement

au cas tordu pour fournir des fonctions de Lefschetz (cf. [Clo4] et [BLS]). Un pseudo-coefficient de représentation de Steinberg tordu par  $\theta$  est, au signe près, une fonction de Lefschetz pour  $\theta$ . Lorsque le centre de  $H$  est  $F$ -anisotrope, nous désignerons les fonctions d'Euler-Poincaré ou de Lefschetz sous le vocable commun de fonctions de Kottwitz.

Si le groupe  $H$  possède un tore central déployé non trivial les fonctions d'Euler-Poincaré sont nulles. Les pseudo-coefficients de représentation de Steinberg sont, eux, non nuls mais ne sont plus à support compact. Nous devons construire un objet intermédiaire. Soit  $L'$  le quotient de  $L$  par  $Z$  le tore  $F$ -déployé maximal du centre de  $G^+$ . On note  $X$  le réseau des co-caractères de  $Z$  et on pose  $\mathfrak{a}_L = X \otimes \mathbb{R}$ . On dispose d'une application naturelle

$$\nu : G^+(F) \rightarrow \mathfrak{a}_L$$

en identifiant les applications

$$x \mapsto \log |\chi(x)|$$

où  $\chi$  est un caractère de  $G^+(F)$ , à des formes linéaires sur  $\mathfrak{a}_L$  :

$$\langle \mu(\chi), \nu(x) \rangle = \log |\chi(x)| .$$

On observera que l'image de  $L(F)$  dans  $\mathfrak{a}_L$  est discrète ; c'est un réseau  $\mathfrak{A}_L$ . La projection  $p : L(F) \rightarrow L'(F)$  est surjective puisque  $Z$  est déployé. On appellera fonction de Kottwitz sur  $L(F)$  une fonction de la forme

$$\phi(x) = \alpha_L(x)\phi'(p(x))$$

où  $\phi'$  est une fonction de Kottwitz sur  $L'(F)$  et  $\alpha_L$  la fonction caractéristique du noyau  $L(F)^1$  de la projection  $\nu$  restreinte à  $L(F)$ .

**Proposition 3.9.1.** — *Les fonctions de Kottwitz sont fortement cuspidales et stabilisantes.*

*Démonstration.* — La preuve du théorème 2 de [Ko6] s'étend sans difficulté au cas tordu. Donc, si  $\delta$  est elliptique, et si on utilise pour calculer les intégrales orbitales la valeur absolue de la mesure d'Euler-Poincaré sur  $I_\delta(F)/Z(F)$ , on voit que le produit des intégrales orbitales d'une fonction de Kottwitz  $\phi$  par le signe de Kottwitz est égal à  $\alpha_L(\delta)$  :

$$e(\delta)\Phi(\delta, \phi) = \alpha_L(\delta)$$

et zéro si  $\delta$  n'est pas elliptique. Mais, pour un corps local non-archimédien, l'application

$$\mathfrak{D}(I, G; F) \rightarrow \mathfrak{E}(I, G; F)$$

est bijective. Il en résulte que, sur un tel corps, une fonction cuspidale est stabilisante si et seulement si le produit de l'intégrale orbitale par le signe de Kottwitz est constant sur les classes de conjugaison stable des éléments semi-simples (pour des mesures de Haar cohérentes sur les centralisateurs). Les fonctions de Kottwitz sont donc stabilisantes. De plus, elles ont des traces nulles dans toutes les représentations unitaires

irréductibles sauf celles qui sont des sous-quotients de la série principale admettant la représentation triviale comme quotient de Langlands, à torsion près par des caractères non-ramifiés. De telles représentations ne sont jamais sous-représentations d'induites unitaires pour un sous-groupe parabolique non trivial ; c'est dire que les fonctions de Kottwitz sont fortement cuspidales.  $\square$

Comme le permet la proposition 3.9.1, nous utiliserons comme fonctions stabilisantes des fonctions de Kottwitz. Ce choix est naturel pour de nombreuses applications, mais des fonctions fabriquées à partir de pseudo-coefficients d'autres représentations peuvent être utilisées.

Pour la comparaison des formules de traces nous aurons de plus besoin de prouver la compatibilité entre transfert et représentations de Steinberg. Soit

$$\xi = \sum \chi$$

la somme des caractères de  $\mathbf{H}_{ab}^0(F, H)$  triviaux sur les normes. Posons  $f_\xi(x) = f(x)\xi(x)$ . Si  $f$  est de Kottwitz, la fonction  $f_\xi$  sera appelée fonction de Kottwitz généralisée. Une telle fonction est encore stabilisante et fortement cuspidale.

**Proposition 3.9.2.** — *Soient  $\phi \in C_c^\infty(L(F))$  et  $f \in C_c^\infty(H(F))$  des fonctions de Kottwitz. Il existe une constante  $h$  telle que les fonctions  $\phi$  et  $h f_\xi$  soient associées.*

*Démonstration.* — Soit  $\delta$  elliptique de norme  $\gamma$ . Observons tout d'abord que

$$\alpha_L(\delta) = \alpha_H(\gamma) .$$

On rappelle que

$$\mathfrak{D}(I_\delta, G; F) = \ker[\mathbf{H}^1(F, I_\delta) \rightarrow \mathbf{H}^1(F, G)] .$$

Comme  $F$  est non archimédien  $\mathbf{H}^1(F, G) = \mathbf{H}_{ab}^1(F, G)$ . On dispose d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}_{ab}^1(F, I_\gamma) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(F, H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}_{ab}^1(F, I_\delta) & \rightarrow & \mathbf{H}_{ab}^1(F, G) . \end{array}$$

La première flèche verticale est un isomorphisme car  $I_\gamma$  est une forme intérieure de  $I_\delta$ . La flèche horizontale

$$\mathbf{H}_{ab}^1(F, I_\gamma) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, H)$$

est surjective si  $\gamma$  est elliptique d'après 1.6.5. On pose

$$h^1 = \# \ker(\mathbf{H}_{ab}^1(F, H) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(F, G)) .$$

On a montré que

$$\# \mathfrak{D}(I_\delta, G; F) = h^1 \cdot \# \mathfrak{D}(I_\gamma, H; F) .$$

On en déduit que, si  $\delta$  est de norme  $\gamma$ , on a, par définition des intégrales orbitales stables,

$$\Phi^1(\delta, \phi) = h \Phi^1(\gamma, f_\xi)$$

avec  $h = h^1/h^0$  où  $h^0$  est le nombre de caractères de  $\mathbf{H}_{ab}^0(F, H)$  triviaux sur les normes. Il reste à établir que  $\Phi^1(\gamma, f_\xi)$  est nulle si  $\gamma$  n'est pas une norme. Si  $\gamma$ , semi-simple, n'est pas une norme, alors que son image dans  $\mathbf{H}_{ab}^0(F, H)$  en est une,  $\gamma$  n'est pas elliptique d'après 2.5.3, et l'intégrale orbitale stable est donc nulle. Enfin, si l'image de  $\gamma$  dans  $\mathbf{H}_{ab}^0(F, H)$  n'est pas une norme on a  $\xi(\gamma) = 0$  et l'intégrale orbitale stable  $\Phi^1(\gamma, f_\xi)$  est nulle car  $f_\xi$  est identiquement nulle sur la classe de conjugaison stable.  $\square$

Le lemme 4.8 de [Clo4] est un cas particulier de la proposition ci-dessus.

**Remarque.** — Supposons que le groupe dérivé est simplement connexe et que le centre de  $H$  est  $F$ -anisotrope. Dans ce cas

$$\mathbf{H}_{ab}^i(F, H) = \mathbf{H}^i(F, D_H) .$$

Par dualité de Pontryagin on voit que

$$h^0 = \#\widehat{\mathbf{H}}^0(E/F, D_H(E)) .$$

La suite spectrale de Hochschild-Serre fournit une suite exacte en bas degrés

$$0 \rightarrow \mathbf{H}^1(E/F, D_H(E)) \rightarrow \mathbf{H}^1(F, D_H) \rightarrow \mathbf{H}^0(E/F, \mathbf{H}^1(E, D_H))$$

et donc

$$h^1 = \#\mathbf{H}^1(E/F, D_H(E)) .$$

Le nombre  $h$  est donc le quotient de Herbrand pour la cohomologie, modifiée de Tate, de  $E/F$  à valeurs dans  $D_H(E)$ .



## CHAPITRE 4

### STABILISATION DE LA FORMULE DES TRACES ET APPLICATIONS

Dans cette partie  $F$  est un corps de nombres,  $G$  un  $F$ -groupe réductif connexe et  $\theta$  un  $F$ -automorphisme semi-simple d'ordre fini.

#### 4.1. Partie elliptique de la formule des traces

Soit  $G^+$  le  $F$ -groupe réductif produit semi-direct de  $G$  et du groupe engendré par  $\theta$ . On note  $L$  la composante connexe de  $1 \rtimes \theta$ . On note  $X^*$  le réseau des caractères  $F$ -rationnels de  $G$  et on pose  $\mathfrak{a}_G = \text{Hom}(X^*, \mathbb{R})$ . On dispose d'une section naturelle de  $\mathfrak{a}_G$  dans le centre de  $G(F_\infty)$  nous noterons  $A_{G,\infty}$  son image. On note  $\mathfrak{a}_L$  l'espace vectoriel des invariants sous  $\theta$  dans  $\mathfrak{a}_G$ . Comme  $\theta$  induit un automorphisme semi-simple le sous-espace  $(1 - \theta)\mathfrak{a}_G$  est un supplémentaire de  $\mathfrak{a}_L$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_F))$ , on lui associe la fonction translatée  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(L(\mathbb{A}_F))$  en posant

$$\phi(x \rtimes \theta) = f_L(x \rtimes \theta) = f(x) .$$

On définit  $\phi^0 \in \mathcal{C}_c^\infty(A_{L,\infty} \backslash L(\mathbb{A}_F))$  et  $\phi^1 \in \mathcal{C}_c^\infty(A_{G,\infty} \backslash L(\mathbb{A}_F))$  en posant

$$\phi^0(x) = \int_{A_{L,\infty}} \phi(\zeta x) d\zeta \quad \text{et} \quad \phi^1(x) = \int_{A_{G,\infty}} \phi(z x) dz .$$

On note  $J_Z(\theta)$  la valeur absolue du jacobien du changement de variable

$$z \mapsto z^{-1}\theta(z)$$

de  $A_{G,\infty}/A_{L,\infty}$  dans lui-même :

$$J_Z(\theta) = | \det(1 - \theta | \mathfrak{a}_G/\mathfrak{a}_L) |$$

et donc

$$\phi^1(x) = J_Z(\theta) \int_{A_{G,\infty}/A_{L,\infty}} \phi^0(z^{-1}x z) dz .$$

On note  $R$  la représentation régulière droite de  $G(\mathbb{A}_F)$  dans

$$L^2(A_{G,\infty}G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F)) .$$



Soit  $\omega$  un caractère de  $G(\mathbb{A}_F)$  trivial sur  $G(F)$  et  $\theta$  un  $F$ -automorphisme semi-simple de  $G$ . L'opérateur

$$A(\theta, \omega) : \varphi \mapsto (\varphi \otimes \omega) \circ \theta^{-1} \quad \text{pour } \varphi \in L^2(A_{G, \infty} G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F))$$

est un opérateur unitaire. On notera  $K$  le noyau de l'opérateur  $R(f)A(\theta, \omega)$  : il est donné par la formule suivante

$$K(x, y) = \sum_{\gamma \in G(F)} \omega(y) f^1(x^{-1} \gamma \theta(y)) = \sum_{\delta \in L(F)} \omega(y) \phi^1(x^{-1} \delta y) .$$

On note  $L(F)_e$  l'ensemble des éléments elliptiques dans  $L(F)$  et  $K_e$  la contribution au noyau de ces éléments :

$$K_e(x, y) = \sum_{\delta \in L(F)_e} \omega(y) \phi^1(x^{-1} \delta y) .$$

On note  $T_e^L$  la distribution définie par l'intégrale sur la diagonale du noyau  $K_e$  :

$$T_e^L(\phi) = \int_{G(F)A_{G, \infty} \backslash G(\mathbb{A}_F)} \omega(x) K_e(x, x) dx .$$

La distribution  $T_e^L$  est la contribution des éléments elliptiques à la formule des traces.

Posons

$$a^L(\delta) = \iota(\delta)^{-1} \text{vol}(I_\delta(F)A_{L, \infty} \backslash I_\delta(\mathbb{A}_F))$$

où  $I_\delta$  est la composante neutre du centralisateur  $G^\delta$  de  $\delta$  dans  $G$ , le nombre  $\iota(\delta)$  est l'indice de  $I_\delta(F)$  dans  $G^\delta(F)$ . Si  $I_\delta(\mathbb{A}_F)$  est dans le noyau de  $\omega$  on pose

$$\Phi_{G(\mathbb{A}_F), \omega}(\delta, \phi^0) = \int_{I_\delta(\mathbb{A}_F) \backslash G(\mathbb{A}_F)} \omega(x) \phi^0(x^{-1} \delta x) dx .$$

L'intégrale définissant  $T_e^L$  est absolument convergente et on a

$$T_e^L(\phi) = J_Z(\theta) \sum a^L(\delta) \Phi_{G(\mathbb{A}_F), \omega}(\delta, \phi^0)$$

où la somme porte sur les classes de conjugaison d'éléments elliptiques  $\delta \in L(F)$  tels que  $I_\delta(\mathbb{A}_F)$  soit dans le noyau de  $\omega$ .

## 4.2. Pré-stabilisation géométrique

La pré-stabilisation géométrique est la réécriture des termes géométriques de la formule des traces comme combinaison linéaire d'intégrales  $\kappa$ -orbitales. C'est la première étape de la stabilisation de la formule des traces. Divers cas particuliers sont déjà traités dans la littérature : pour les termes elliptiques réguliers de la formule des traces ordinaire (non tordue) la pré-stabilisation est due à Langlands [Lan2] et a été étendue à tous les éléments elliptiques par Kottwitz dans [Ko5] ; pour les éléments fortement réguliers de la formule des traces tordue cela est dû à Kottwitz et Shelstad [KS]. Nous traiterons ici le cas de tous les éléments elliptiques de la formule des traces tordue lorsque les centralisateurs stables sont connexes. Nous nous contenterons de

décrire les manipulations formelles et nous renvoyons aux paragraphes 7 et 8 de [Ko5] pour la preuve des résultats de finitude qui justifient ces manipulations.

Soit  $\delta \in L(F)$  elliptique et soit  $I$  son centralisateur stable supposé connexe. On munit les groupes  $G, I$  etc, de mesures de Tamagawa. Le nombre

$$a^L(\delta) = \iota(\delta)^{-1} \text{vol} (I(F)A_{L,\infty} \backslash I(\mathbb{A}_F))$$

peut encore s'écrire

$$a^L(\delta) = \frac{\tau(I)}{\iota(\delta) c(I, L)}$$

où  $\tau(I)$  est le nombre de Tamagawa de  $I$  et  $c(I, L)$  le rapport des mesures de Haar sur  $A_{I,\infty}$ , héritée de la mesure de Tamagawa sur  $I$ , et sur  $A_{L,\infty}$  :

$$da_I = c(I, L) da_L .$$

On fixe un caractère  $\omega$  de  $\mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, G)$ . La restriction de  $\kappa \in \mathfrak{K}(I, G; F)$  à l'image de  $\mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, G)$  est un caractère de  $\mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, G)$  qui sera noté  $\omega(\kappa)$ . Posons

$$d(I, G) = \# \text{coker} [\mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, I) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^1(\mathbb{A}_F/F, G)] .$$

**Proposition 4.2.1.** — *Soit  $\delta \in L(F)$ . Alors*

$$\sum_{[x] \in \mathfrak{D}(I, G; F)} \Phi_{G(\mathbb{A}_F), \omega}(\delta_x, \phi) = \frac{\tau(G)}{\tau(I) d(I, G)} \sum_{\omega(\kappa) = \omega} \Phi_{G(\mathbb{A}_F), \kappa}(\delta, \phi) .$$

*Démonstration.* — Le centralisateur stable étant connexe, le groupe  $\mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F)$  et son dual de Pontryagin  $\mathfrak{K}(I, G; F)_1$  sont finis. L'inversion de Fourier sur le groupe fini  $\mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F)$  montre que, compte tenu de 1.8.5 et 1.8.6, on a

$$\frac{1}{\#\mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F)} \sum_{\omega(\kappa) = \omega} \Phi_{G(\mathbb{A}_F), \kappa}(\delta, \phi) = \sum_{[x] \in \mathfrak{D}(I, G; \mathbb{A}_F)} \chi(x) \epsilon(\delta_x) \Phi_{G(\mathbb{A}_F), \omega}(\delta_x, \phi)$$

où  $\chi$  est la fonction caractéristique de l'image de  $\mathfrak{D}(I, G; F)$  dans  $\mathfrak{D}(I, G; \mathbb{A}_F)$ . On observe que, puisque  $I$  et  $G$  sont connexes

$$\ker^1(F, I) = \ker_{ab}^1(F, I) \quad \text{et} \quad \ker^1(F, G) = \ker_{ab}^1(F, G)$$

d'après 1.6.11. Les fibres de l'application

$$\mathfrak{D}(I, G; F) \rightarrow \mathfrak{D}(I, G; \mathbb{A}_F)$$

ont un cardinal constant

$$b(\delta) = \# \ker(\ker^1(F, I) \rightarrow \ker^1(F, G)) = \# \ker(\ker_{ab}^1(F, I) \rightarrow \ker_{ab}^1(F, G)) ,$$

on en déduit que

$$\sum_{[x] \in \mathfrak{D}(I, G; F)} \Phi_{G(\mathbb{A}_F), \omega}(\delta_x, \phi) = \frac{b(\delta)}{\#\mathfrak{E}(I, G; \mathbb{A}_F/F)} \sum_{\omega(\kappa) = \omega} \Phi_{G(\mathbb{A}_F), \kappa}(\delta, \phi)$$

en utilisant que  $e(\delta) = 1$  pour un élément rationnel d'après 1.7.2. L'exactitude de la première suite 1.8.4 montre alors que, compte tenu de 1.7.4,

$$\frac{b(\delta)}{\#\mathfrak{C}(I, G; \mathbb{A}_F/F)} = \frac{\tau(G)}{\tau(I) d(I, G)} .$$

□

**Lemme 4.2.2.** — *Les nombres  $\tau(I)$  et  $c(I, L)$  sont constants lorsque  $\delta$  parcourt une classe de conjugaison stable.*

*Démonstration.* — Le groupe  $I$  varie parmi les formes intérieures d'un même groupe. On invoque [Ko6] pour la constance du nombre de Tamagawa par torsion intérieure. La mesure sur  $A_{I, \infty}$ , qui est central, est également indépendante de la torsion. □

On note  $\mathcal{C}(\delta)$  l'ensemble des classes de  $G(F)$ -conjugaison d'éléments  $\delta'$  stablement conjugués à  $\delta$ . On note  $T_\delta^L(\phi)$  la somme des termes de l'expression géométrique de la formule des traces indexés par des éléments stablement conjugués à  $\delta$  :

$$T_\delta^L(\phi) = J_Z(\theta) \sum_{\delta' \in \mathcal{C}(\delta)} a^L(\delta') \Phi_{G(\mathbb{A}_F), \omega}(\delta', \phi^0) .$$

Posons

$$j(\delta) = \#\ker(\mathbf{H}^1(F, I) \rightarrow \mathbf{H}^1(F, G^\delta)) \quad \text{et} \quad \tilde{\iota}(\delta) = \#(\mathbf{H}^0(F, I \backslash G^\delta)) .$$

On a

$$\tilde{\iota}(\delta) = \iota(\delta) j(\delta) .$$

Introduisons enfin

$$a(G, \delta) = \frac{\tau(G) J_Z(\theta)}{\tilde{\iota}(\delta) d(I, G) c(I, L)} .$$

**Proposition 4.2.3.** — *La partie elliptique de la formule des traces se réécrit*

$$T_e^L(\phi) = \sum_{\delta} a(G, \delta) \sum_{\{\kappa \in \mathfrak{K}(I, G; F) \mid \omega(\kappa) = \omega\}} \Phi_{G(\mathbb{A}_F)}^\kappa(\delta, \phi^0)$$

la somme en  $\delta$  portant sur un ensemble de représentants des classes de conjugaison stable d'éléments elliptiques rationnels dans  $L(F)$ .

*Démonstration.* — En remarquant que  $\tilde{\iota}(\delta)$  ne dépend que de la classe de conjugaison stable, on a

$$T_\delta^L(\phi) = \frac{J_Z(\theta) \tau(I)}{\tilde{\iota}(\delta) c(I, L)} \sum_{\delta' \in \mathcal{C}(\delta)} j(\delta') \Phi_{G(\mathbb{A}_F), \omega}(\delta', \phi^0)$$

soit encore,

$$T_\delta^L(\phi) = \frac{J_Z(\theta) \tau(I)}{\tilde{\iota}(\delta) c(I, L)} \sum_{[x] \in \mathfrak{D}(I, G; F)} \Phi_{G(\mathbb{A}_F), \omega}(\delta_x, \phi^0)$$

et donc, compte tenu de 4.2.1 :

$$T_\delta^L(\phi) = \frac{\tau(G) J_Z(\theta)}{\tilde{i}(\delta) d(I, G) c(I, L)} \sum_{\omega(\kappa)=\omega} \Phi_{G(\mathbb{A}_F)}^\kappa(\delta, \phi^0) .$$

On a ainsi montré que la contribution de la classe de conjugaison stable de  $\delta$  à la formule des traces est, au coefficient  $a(G, \delta)$  près, la somme des intégrales  $\kappa$ -orbitales de  $\delta$  :

$$T_\delta^L(\phi) = a(G, \delta) \sum_{\omega(\kappa)=\omega} \Phi_{G(\mathbb{A}_F)}^\kappa(\delta, \phi^0) .$$

La proposition s'ensuit. □

**Corollaire 4.2.4.** — *Supposons que  $\omega = 1$  et que*

$$\Phi_G^\kappa(\delta, \phi^0) = 0$$

*pour tout  $\kappa \neq 1$ . Alors*

$$T_e^L(\phi) = \sum_\delta a(G, \delta) \Phi_{G(\mathbb{A}_F)}^1(\delta, \phi^0)$$

*la somme portant sur les classes de conjugaison stable dans  $L(F)$ .*

C'est par exemple le cas lorsque  $G = L$ , pour les groupes unitaires considérés par Kottwitz dans [Ko7]. En effet pour de tels groupes on a  $\mathfrak{R}(I, G; F)_1 = 1$  pour tout  $I$  centralisateur stable d'un  $\delta$  elliptique dans  $G(F)$ . Dans une situation plus générale on peut utiliser des fonctions stabilisantes pour obtenir cette pseudo-stabilisation.

### 4.3. Stabilisation conditionnelle pour le changement de base

Nous supposons dans cette section que nous sommes dans la situation du changement de base.

**Définition 4.3.1.** — On appelle partie elliptique de la formule des traces stable pour  $H$  la distribution

$$ST_e^H(f) = \sum_\gamma a(H, \gamma) \Phi_{H(\mathbb{A}_F)}^1(\gamma, f^0)$$

la somme portant sur les classes de conjugaison stable d'éléments elliptiques dans  $H(F)$ .

Indiquons, de manière un peu vague, ce que l'on espère en général pour la stabilisation. On conjecture l'existence de constantes  $a(G, \theta, H_\kappa)$  et de fonctions  $f_{\tilde{\kappa}}$  sur des groupes endoscopiques  $H_\kappa$  (et dépendant de données supplémentaires) de sorte que

$$\Phi_{G(\mathbb{A}_F)}(\gamma, \kappa; \phi) = \Phi_{H_\kappa(\mathbb{A}_F)}^1(\gamma, f_{\tilde{\kappa}})$$

et

$$T_e^L(\phi) = \sum a(G, \theta, H_\kappa) ST_*^{H_\kappa}(f_{\tilde{\kappa}})$$

où  $ST_*^{H\kappa}$  est une variante de  $ST_e^{H\kappa}$  définie en omettant certaines classes de conjugaison singulières (voir [Ko5] pour le cas  $\theta = 1$ ) ; nous ne préciserons pas non plus l'ensemble de sommation.

Nous avons établi l'existence des fonctions  $f = f_1$ . Sous des conditions impliquant que les intégrales  $\kappa$ -orbitales s'annulent si  $\kappa \neq 1$  nous allons exprimer la partie elliptique de la formule des traces tordue pour  $(G, \theta)$  au moyen de la partie elliptique de la formule des traces stable pour  $H = H_1$ .

**Proposition 4.3.2.** — *Si  $\gamma$  est une norme de  $\delta$  le nombre*

$$a(G, \theta, H) = \frac{a(G, \delta)}{a(H, \gamma)} \ell^{-\dim \mathfrak{a}_L} c(H, L)$$

*est indépendant de  $\delta$  et  $\gamma$  :*

$$a(G, \theta, H) = \ell^{-\dim \mathfrak{a}_L} \frac{\tau(G) J_Z(\theta)}{\tau(H) d(H, G^*)} = \ell^{-\dim \mathfrak{a}_L} \frac{J_Z(\theta)}{\#\mathfrak{E}(H, G^*; \mathbb{A}_F/F)}.$$

*Si le groupe dérivé de  $G_0$  est simplement connexe ce nombre ne dépend que des co-centres :*

$$a(G, \theta, H) = a(D_G, \theta, D_H) .$$

*Si  $G_0$  est semi-simple simplement connexe*

$$a(G, \theta, H) = 1 .$$

*Démonstration.* — On rappelle que

$$a(G, \delta) = \frac{\tau(G) J_Z(\theta)}{\tilde{\iota}(\delta) d(I, G) c(I, L)}$$

et on a

$$a(H, \gamma) = \frac{\tau(H)}{\tilde{\iota}(\gamma) d(I^*, H) c(I^*, H)}$$

D'après 1.9.3 on sait que  $d(I, G) = d(H, G^*)$  et donc  $d(I^*, H) = 1$ . D'après 2.4.5, on voit que  $\tilde{\iota}(\delta) = \tilde{\iota}(\gamma)$ . Il suffit maintenant d'observer que  $c(I, L)$  est indépendant des torsions intérieures et que

$$c(I, L) = c(I, H) c(H, L)$$

pour obtenir la formule annoncée. L'expression de  $a(G, \theta, H)$  ne fait intervenir que les abélianisés, les deux dernières assertions en résultent.  $\square$

**Proposition 4.3.3.** — *La partie elliptique de la formule des traces se récrit*

$$T_e^L(\phi) = \ell^{\dim \mathfrak{a}_L} \frac{a(G, \theta, H)}{c(H, L)} \sum_{\gamma} a(H, \gamma) \sum_{\{\kappa \in \mathfrak{K}(I^*, G^*; F) \mid \omega(\kappa) = \omega\}} \Phi_{G(\mathbb{A}_F)}(\gamma, \kappa; \phi^0)$$

*la somme en  $\gamma$  portant sur un ensemble de représentants des classes de conjugaison stable d'éléments elliptiques rationnels dans  $H(F)$  et où  $I^*$  est le centralisateur stable de  $\gamma$  dans  $H$ .*

*Démonstration.* — D'après 4.2.3

$$T_e^L(\phi) = \sum_{\delta} a(G, \delta) \sum_{\{\kappa \in \mathfrak{R}(I, G; F) \mid \omega(\kappa) = \omega\}} \Phi_{G(\mathbb{A}_F)}^{\kappa}(\delta, \phi^0).$$

On observera tout d'abord que si  $\gamma$  n'est pas la norme d'un  $\delta \in L(F)$  la somme

$$\sum_{\{\kappa \in \mathfrak{R}(I^*, G^*; F) \mid \omega(\kappa) = \omega\}} \Phi_{G(\mathbb{A}_F)}(\gamma, \kappa; \phi)$$

est nulle d'après 2.7.3. Par contre, si  $\gamma$  est la norme d'un  $\delta \in L(F)$  on a

$$\Phi_{G(\mathbb{A}_F)}^{\kappa}(\delta, \phi) = \Phi_{G(\mathbb{A}_F)}(\gamma, \kappa; \phi)$$

La preuve est maintenant conséquence immédiate de l'injectivité de la norme entre classes de conjugaison stable établie en 2.4.3 et de 4.3.2.  $\square$

**Théorème 4.3.4.** — *Supposons que  $\omega = 1$ . Soient  $f$  et  $\phi$  deux fonctions lisses et à support compact sur  $H(\mathbb{A}_F)$  et  $L(\mathbb{A}_F)$  respectivement, produit de fonctions  $f_v$  et  $\phi_v$  associées à toutes les places et  $\phi_v$  stabilisantes pour  $v \in \mathfrak{V}$ , un ensemble de places  $(G^*, H)$ -essentiel. On a*

$$T_e^L(\phi) = a(G, \theta, H) ST_e^H(f).$$

*Démonstration.* — On rappelle que, pour que l'application de  $\mathfrak{V}$ -localisation pour les caractères endoscopiques soit injective, il suffit, d'après 1.9.6, que cet ensemble de places soit  $(G^*, H)$ -essentiel. On a supposé que  $\phi$  est stabilisante au dessus de  $\mathfrak{V}$ , donc

$$\Phi_{G(\mathbb{A}_F)}(\gamma, \kappa; \phi^0) = 0$$

si  $\kappa_{\mathfrak{V}} \neq 1$  et pour cela il suffit que  $\kappa \neq 1$  puisque  $\mathfrak{V}$  est un ensemble  $(G^*, H)$ -essentiel. La proposition 4.3.3 montre alors que

$$T_e^L(\phi) = \ell^{\dim a_L} \frac{a(G, \theta, H)}{c(H, L)} \sum_{\gamma} a(H, \gamma) \Phi_{G(\mathbb{A}_F)}(\gamma, 1; \phi^0).$$

Si  $\phi$  et  $f$  sont associées on a

$$\Phi_{G(\mathbb{A}_F)}(\gamma, 1; \phi) = \Phi_{H(\mathbb{A}_F)}^1(\gamma, f).$$

Soit  $z \in A_{L, \infty}$ ; comme  $z\delta$  a pour norme  $z^\ell \gamma$  on voit que

$$\Phi_{G(\mathbb{A}_F)}(\gamma, 1; \phi^0) = \ell^{-\dim a_L} c(H, L) \Phi_{H(\mathbb{A}_F)}^1(\gamma, f^0)$$

et on obtient

$$T_e^L(\phi) = a(G, \theta, H) \sum_{\gamma} a(H, \gamma) \Phi_{H(\mathbb{A}_F)}^1(\gamma, f^0).$$

$\square$

On peut, au moins pour les groupes dont le groupe dérivé est simplement connexe, prendre en compte l'endoscopie liée à l'abélianisé de  $G$  en imposant des conditions sur l'ensemble  $\mathfrak{Y}$  un peu moins restrictives que celle utilisée ci-dessus, mais on utilisera alors tous les transferts endoscopiques pour le couple  $(G, H)$  provenant de caractères de  $G$ , suivant la construction donnée en 3.2.3. En effet, si  $G_{der} = G_{SC}$  l'application

$$x \mapsto x^{-1}\theta(x)$$

induit un homomorphisme injectif

$$\mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, H \backslash G^*) \rightarrow \mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, G^*)$$

et pour tout  $\kappa \in \mathfrak{R}(H, G^*; F)$  on peut choisir un caractère  $\tilde{\kappa}$  de  $\mathbf{H}_{ab}^0(\mathbb{A}_F/F, G^*)$  qui le prolonge. Ceci permet de définir suivant 3.2.3 des fonctions  $f_{\tilde{\kappa}}$  vérifiant

$$\Phi_{G(\mathbb{A}_F)}(\gamma, \kappa; \phi) = \Phi_{H(\mathbb{A}_F)}^1(\gamma, f_{\tilde{\kappa}}).$$

**Proposition 4.3.5.** — *Supposons  $\omega = 1$  et  $G_{der} = G_{SC}$ . Soit  $\mathfrak{Y}$  un ensemble de places  $v$  de  $F$ , tel que pour tout  $\gamma \in H(F)$  qui est  $\mathfrak{Y}$ -elliptique, l'image de l'application*

$$\mathfrak{E}(I^*, G^*; F_{\mathfrak{Y}}) \rightarrow \mathfrak{E}(I^*, G^*; \mathbb{A}_F/F)$$

*où  $I^*$  est le centralisateur stable de  $\gamma$  dans  $H$ , contienne l'image de  $\mathfrak{E}(I^*, H; \mathbb{A}_F/F)$ . Si  $\phi$  est stabilisante au dessus de  $\mathfrak{Y}$  on a*

$$T_e^L(\phi) = \sum_{\kappa \in \mathfrak{R}(H, G^*; F)_1} a(G, \theta, H) ST_e^H(f_{\tilde{\kappa}}).$$

*Démonstration.* — Comme pour le théorème précédent on invoque 4.3.3 et l'annulation des intégrales orbitales pour les  $\kappa$  non triviaux sur l'image de  $\mathfrak{E}(I^*, H; \mathbb{A}_F/F)$ . On conclut en invoquant 1.9.4. □

#### 4.4. Décomposition spectrale et forme simple de la formule des traces

Nous reprenons la discussion du cas général avec  $G, \theta$  et  $\omega$  arbitraires. On note  $R_d$  la restriction de  $R$  au spectre discret de  $G(\mathbb{A}_F)$  dans

$$L^2(A_{G, \infty} G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F)).$$

On note  $\Pi(G(\mathbb{A}_F))$  (resp.  $\Pi_d(G(\mathbb{A}_F))$ ) l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles de  $G(\mathbb{A}_F)$  (resp. dans le spectre discret). On note  $m(\pi^G)$  la multiplicité de la représentation  $\pi^G \in \Pi(G(\mathbb{A}_F))$  dans le spectre discret. On a, pour  $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}_F))$ ,

$$\text{trace}(R_d(f)) = \sum_{\pi^L \in \Pi_d(G(\mathbb{A}_F))} m(\pi^G) \text{trace}(\pi^G(f)).$$

La sommation sur les  $t \geq 0$  qui apparait dans les expressions d'Arthur [Ar2] est inutile : c'est un fait désormais connu que le spectre discret est traçable [Mü]. On notera  $m_{cusp}$  la multiplicité dans le spectre cuspidal.

On dira qu'une représentation  $\pi^G$  est  $\theta$ - $\omega$ -stable si

$$\pi^G \circ \theta \simeq \pi^G \otimes \omega .$$

L'opérateur

$$A(\theta, \omega, R) : \varphi \mapsto (\varphi \otimes \omega) \circ \theta^{-1} \quad \text{pour } \varphi \in L^2(A_{G, \infty} G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F))$$

est un opérateur unitaire qui envoie le composant isotypique de la représentation  $\pi^G$  sur le composant isotypique de la représentation  $(\pi^G \circ \theta) \otimes \omega^{-1}$ . Si ces représentations sont équivalentes, elles définissent un même composant isotypique dans le spectre discret. On obtient, par restriction à ce sous-espace, un opérateur  $A(\theta, \omega, \pi^G)$ . Soit  $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}_F))$ , la trace de l'opérateur  $R_d(f)A(\theta, \omega, R)$  se décompose suivant les composants isotypiques des représentations  $\theta$ - $\omega$ -stables du spectre discret :

$$\text{trace}(R_d(f)A(\theta, \omega, R)) = \sum_{\pi^G \in \Pi_d(G(\mathbb{A}_F)) | \pi^G \circ \theta \simeq \pi^G \otimes \omega} \text{trace}(\pi^G(f)A(\theta, \omega, \pi^G)) .$$

L'étude de l'opérateur  $A(\theta, \omega, \pi^G)$  dans le cas particulier où  $\theta = 1$  et  $\omega$  quelconque est traité en détail lorsque  $G = GL(2)$  dans [LL]. Mais pour des groupes autres que  $GL(n)$ , l'endoscopie pour  $\omega$  quelconque, est encore mal connue : nous ne disposons pas du transfert. Au surplus, la formule des traces elle-même n'est pas connue, les travaux d'Arthur ne couvrent pas ce cas. Nous nous limiterons désormais au cas  $\omega = 1$ .

**Proposition 4.4.1.** — *Supposons le théorème de Paley-Wiener scalaire valable pour le couple  $(G, \theta)$ . Considérons une fonction  $\phi \in C_c^\infty(L(\mathbb{A}_F))$  cuspidale en une place, fortement cuspidale en une autre, alors, si  $\omega = 1$*

$$T_e^L(\phi) = \text{trace}(R_d(\phi)) .$$

*Démonstration.* — Grâce au résultat de Paley-Wiener scalaire, il nous est loisible d'utiliser la forme invariante de la formule des traces [Ar2]. Soit  $\phi = \otimes \phi_v$  telle qu'en une place  $v$  la fonction  $\phi_v$  soit fortement cuspidale ; alors [Ar2, Corollary 7.3 p. 539] montre que la partie spectrale de la formule des traces invariante se réduit à la contribution du spectre discret :

$$I^L(\phi) = \text{trace}(R_d(\phi)) .$$

Si de plus  $\phi = \otimes \phi_v$  avec  $\phi_v$  cuspidale en deux places distinctes, l'une des deux étant fortement cuspidale, l'expression géométrique de la formule des traces invariante se réduit à la contribution des éléments elliptiques d'après le Théorème 7.1 de [Ar2] :

$$I^L(\phi) = T_e^L(\phi) .$$

□

On a noté  $G^+$  le  $F$ -groupe réductif produit semi-direct de  $G$  et du groupe engendré par  $\theta$  supposé d'ordre fini. On notera  $G(\mathbb{A}_F)^+$  le groupe engendré par  $G(\mathbb{A}_F)$  et  $G^+(F)$



dans le produit des  $G^+(F_v)$  :

$$G(\mathbb{A}_F)^+ = G(\mathbb{A}_F)G^+(F).$$

On note  $\Pi(L(\mathbb{A}_F))$  l'ensemble des représentations admissibles irréductibles de  $G(\mathbb{A}_F)^+$  qui restent irréductibles par restriction à  $G(\mathbb{A}_F)$ . On note  $m(\pi^L)$  la multiplicité de la représentation  $\pi^L \in \Pi(L(\mathbb{A}_F))$  dans le spectre discret. On a donc pour  $\phi \in C_c^\infty(L(\mathbb{A}_F))$  :

$$\text{trace}(R_d(\phi)) = \sum_{\pi^L \in \Pi(L(\mathbb{A}_F))} m(\pi^L) \text{trace}(\pi^L(\phi)).$$

Soit  $\pi^L \in \Pi(L(\mathbb{A}_F))$ ; on obtient, par restriction à  $G(\mathbb{A}_F)$ , une représentation  $\pi^G$  de  $G(\mathbb{A}_F)$  telle que  $\pi^G \circ \theta$  soit équivalente à  $\pi^L$ . Réciproquement, les représentations telles que  $\pi^G \circ \theta$  soit équivalente à  $\pi^L$  admettent un prolongement à  $G(\mathbb{A}_F)^+$ , mais ce prolongement n'est pas unique; les divers prolongements dépendent du choix de l'opérateur d'entrelacement qui définit cette équivalence, et ces choix diffèrent par une racine  $\ell$ -ième de l'unité. Soit  $\pi^G$  une représentation du spectre discret qui se prolonge à  $G(\mathbb{A}_F)^+$  et soit  $\pi_0^L$  un des prolongements de  $\pi^L$ . Les divers prolongements sont obtenus en multipliant  $\pi_0^L(\theta)$  par une puissance  $r(\pi^L, \pi_0^L)$  d'une racine  $\ell$ -ième de l'unité  $\zeta$  :

$$\pi^L(\theta) = \zeta^{r(\pi^L, \pi_0^L)} \pi_0^L(\theta).$$

Soit  $X$  une indéterminée, et posons

$$C(\pi^G, \pi_0^L, X) = \sum m(\pi^L) X^{r(\pi^L, \pi_0^L)}$$

la somme portant sur les prolongements de  $\pi^G$  intervenant dans le spectre discret. On a donc

$$m(\pi^G) = \sum m(\pi^L) = C(\pi^G, \pi_0^L, 1).$$

Le nombre complexe

$$m(\pi^G, \pi_0^L) = C(\pi^G, \pi_0^L, \zeta),$$

est une 'multiplicité relative'. Soit  $A(\theta, \pi^G)$  l'opérateur défini par l'action de  $\theta$  dans le composant isotypique de  $\pi^G$  dans le spectre discret. L'opérateur  $A(\theta, \pi^G)$  est la somme, sur les  $\pi^L$  ayant des restrictions à  $G(\mathbb{A}_F)$  équivalentes à  $\pi^G$ , des opérateurs  $\pi^L(\theta)$ ; on a donc :

$$A(\theta, \pi^G) = \sum m(\pi^L) \pi^L(\theta) = m(\pi^G, \pi_0^L) \pi_0^L(\theta).$$

On a donc

$$\text{trace}(\pi^G(f) A(\theta, \pi^G)) = m(\pi^G, \pi_0^L) \text{trace}(\pi^G(f) \pi_0^L(\theta))$$

soit encore

$$\text{trace}(\pi^G(f) A(\theta, \pi^G)) = m(\pi^G, \pi_0^L) \text{trace}(\pi_0^L(\phi)).$$

On peut récrire la trace dans le spectre discret :

$$\text{trace}(R_d(\phi)) = \sum_{\pi^G \in \Pi(G(\mathbb{A}_F))} m(\pi^G, \pi_0^L) \text{trace}(\pi_0^L(\phi)).$$

**Proposition 4.4.2.** — Dans le cas du changement de base (avec  $\omega = 1$ ) et d'une fonction  $\phi \in C_c^\infty(L(\mathbb{A}_F))$  cuspidale en une place et fortement cuspidale en une autre, on a

$$T_e^L(\phi) = \sum_{\pi^G \in \Pi(G(\mathbb{A}_F))} m(\pi^G, \pi_0^L) \text{trace}(\pi_0^L(\phi)).$$

*Démonstration.* — Grâce au résultat de Delorme [Delo] le théorème de Paley-Wiener scalaire est valable pour le changement de base. C'est alors une conséquence immédiate de 4.4.1.  $\square$

On dira que la contribution de  $\pi^G$  à la formule des traces pour  $L$  est non triviale si

$$m(\pi^G, \pi_0^L) \neq 0.$$

Nous allons donner des critères pour qu'il en soit ainsi.

**Lemme 4.4.3.** — La contribution de  $\pi^G$  à la formule des traces pour  $L$  est non triviale si la multiplicité  $m(\pi^G)$  vaut 1. C'est également le cas si cette multiplicité n'est pas divisible par  $c_\ell$  la valeur en 1 du polynôme cyclotomique pour  $\ell$ . Il suffit pour cela que  $m(\pi^G)$  soit premier à  $\ell$  si  $c_\ell \neq 1$ .

*Démonstration.* — Le polynôme à coefficients entiers  $C(\pi^G, \pi_0^L, X)$  s'annule pour  $X = \zeta$  si et seulement si il est divisible par le polynôme cyclotomique  $C_\ell(X)$  et en particulier cette divisibilité implique que

$$m(\pi^G) = \sum m(\pi^L) = C(\pi^G, \pi_0^L, 1)$$

est divisible par  $c_\ell = C_\ell(1)$ . On obtient ainsi une condition suffisante de non annulation. Comme  $c_\ell$  divise  $\ell$  il suffit, si  $c_\ell \neq 1$ , que  $m(\pi^G)$  soit premier à  $\ell$ , pour que  $m(\pi^G, \pi_0^L)$  soit non nul.  $\square$

**Remarque.** — Il se peut que  $c_\ell = 1$  ; c'est le cas pour  $\ell = 6$ . Par contre si  $\ell$  est premier on a  $c_\ell = \ell$ .

## 4.5. Identité spectrale pour le changement de base

Nous nous plaçons dans le cadre du changement de base.

**Proposition 4.5.1.** — Soit  $\mathfrak{V}$  un ensemble fini de places de  $F$ . On suppose que  $\mathfrak{V}$  est de cardinal  $\geq 2$  et contient un sous-ensemble  $\mathfrak{V}_1$  qui est  $(G^*, H)$ -essentiel. Soient deux fonctions  $f$  et  $\phi$  lisses et à support compact sur  $H(\mathbb{A}_F)$  et  $L(\mathbb{A}_F)$  respectivement, produit de fonctions  $f_v$  et  $\phi_v$  associées à toutes les places telles que

- $\phi_v$  et  $f_v$  sont stabilisantes pour tout  $v \in \mathfrak{V}_1$

- $\phi_v$  et  $f_v$  sont cuspidales pour tout  $v \in \mathfrak{V}$
- $\phi_v$  et  $f_v$  sont fortement cuspidales pour un  $v \in \mathfrak{V}$ .

Sous ces conditions

$$\sum_{\pi^G \in \Pi(G(\mathbb{A}_F))} m(\pi^G, \pi_0^L) \text{trace}(\pi_0^L(\phi)) = a(G, \theta, H) \sum_{\pi^H \in \Pi(H(\mathbb{A}_F))} m(\pi^H) \text{trace}(\pi^H(f)).$$

*Démonstration.* — C'est une conséquence immédiate du théorème 4.3.4 et de la proposition 4.4.2. □

Nous laisserons au lecteur le soin de formuler des généralisations de ce résultat au moyen de 4.3.5.

Soit  $S$  un ensemble fini de places contenant les places archimédiennes, les places ramifiées et les places  $v \in \mathfrak{V}$ . Soit  $\psi^S$  un caractère de l'algèbre de Hecke sphérique en dehors de  $S$ . On note  $\Pi(H, \psi^S)$  l'ensemble des représentations admissibles irréductibles  $\pi^H \in \Pi(H(\mathbb{A}_F))$  dont la composante  $\pi_v^H$  pour  $v$  en dehors de  $S$  est la représentation attachée au caractère  $\psi_v$  : pour toute fonction  $h$  dans l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}(F_v)$  des fonctions sur  $H(F_v)$  bi-invariantes par  $K_v^H = H(\mathcal{O}_v)$  on a

$$\text{trace} \pi_v^H(h) = \psi_v(h) .$$

Le changement de base sur les caractères de Hecke s'obtient par simple composition avec l'homomorphisme de changement de base ; on posera  $\psi_{E_v} := \psi_v \circ b_{E_v/F_v}$ .

**Proposition 4.5.2.** — *Soient deux fonctions  $f_S$  et  $\phi_S$  lisses et à support compact sur  $H(F_S)$  et  $L(F_S)$  respectivement, produit de fonctions associées à toutes les places de  $S$ , et satisfaisant les conditions (4.5.1) ci-dessus en des places  $v \in S$ . Soit  $\Psi^S$  un caractère de Hecke en dehors de  $S$  pour  $G$ . Sous ces hypothèses on a l'identité suivante*

$$\sum_{\pi^G \in \Pi(G, \Psi^S)} m(\pi^G, \pi_0^L) \text{trace}(\pi_{0,S}^L(\phi_S)) = a(G, \theta, H) \sum_{\{\psi^S \mid \psi_E^S = \Psi^S\}} \sum_{\pi^H \in \Pi(H, \psi^S)} m(\pi^H) \text{trace}(\pi_S^H(f_S)) .$$

On peut raffiner cette identité en imposant les caractères infinitésimaux pour les représentations  $\pi_v^H$  et  $\pi_v^L$  de  $H(F_v)$  et  $G(F_v)$  aux places  $v$  archimédiennes de façon compatible au changement de base.

*Démonstration.* — On sait que, sous les hypothèses (4.5.1) on a

$$\sum_{\pi^G \in \Pi(G(\mathbb{A}_F))} m(\pi^G, \pi_0^L) \text{trace}(\pi_0^L(\phi)) = a(G, \theta, H) \sum m(\pi^H) \text{trace}(\pi^H(f)) .$$

La convergence absolue de ces expressions permet la séparation des caractères infinitésimaux aux places archimédiennes au moyen de multiplicateurs (3.5.4). Aux places  $v \notin S$  on utilise des paires de fonctions  $h_L$  et  $b_{E_v/F_v}(h)$  avec  $h \in \mathcal{H}(E_v)$ . On peut alors, en variant ces paires de fonctions séparer les caractères de Hecke  $\Psi^S$ . □

**Lemme 4.5.3.** — Soit  $\pi$  et  $\pi'$  deux représentations automorphes du spectre discret appartenant pour  $v \notin S$  au même caractère de Hecke  $\psi^S$ . On suppose qu'en une place finie  $w$  la représentation  $\pi_w$  est de Steinberg et que  $\pi'_w$  est à cohomologie non triviale (à torsion près par des caractères unitaires). Alors  $\pi'_w$  est de Steinberg (à torsion près par des caractères unitaires).

*Démonstration.* — Pour un groupe quasi-simple les représentations à cohomologie non triviale sont soit la représentation triviale soit la représentation de Steinberg. Considérons les représentations obtenues par restriction de  $\pi_w$  à l'image du revêtement simplement connexe du groupe dérivé. Les représentations automorphes d'un facteur quasi-simple qui localement en  $w$  sont triviales, sont globalement, par approximation forte, triviales. Ceci se lit sur le caractère de Hecke  $\psi^S$ ; il en est donc de même pour  $\pi'$ .  $\square$

**Proposition 4.5.4.** — Soit  $\pi$  une représentation automorphe du spectre discret. On suppose qu'en une place finie  $w$  la représentation  $\pi_w$  est de Steinberg (à torsion près par des caractères unitaires). Alors  $\pi$  est cuspidale.

*Démonstration.* — D'après Langlands, le spectre discret non cuspidal est obtenu par résidu de séries d'Eisenstein. Ce sont des représentations qui en chaque place sont non tempérées, or la représentation de Steinberg est tempérée.  $\square$

#### 4.6. Changement de base automorphe

L'identité de changement de base 4.3.4 et sa contrepartie spectrale 4.5.2 ainsi que ses généralisations reposant sur 4.3.5, se prêtent à l'étude de diverses situations (voir par exemple [CL]). Nous n'aborderons ici que le cas particulier suivant :

**Hypothèse.** — On fixe un ensemble  $\mathfrak{V}$  fini, de places non archimédiennes de  $F$ , qui contient au moins deux places et on suppose que  $\mathfrak{V}$  est  $(G^*, H)$ -essentiel.

Rappelons que d'après 1.9.6 cette hypothèse est toujours vérifiée si  $\theta = 1$  ou si  $G_0$  est semi-simple et simplement connexe. On se limitera de plus aux représentations qui sont de Steinberg, à torsion près par des caractères, en ces places.

On dit qu'une représentation  $\pi^L \in \Pi(L(\mathbb{A}_F))$  est un changement de base (ou un relèvement) faible de  $\pi^H \in \Pi(H(\mathbb{A}_F))$  si pour presque toute place  $v$  non ramifiée on a

$$\text{trace } \pi_v^L(h) = \text{trace } \pi_v^H(b_{E_v/F_v}(h)) .$$

Nous allons d'abord donner un théorème de transfert de  $G$  vers le groupe endoscopique  $H$ .

**Théorème 4.6.1.** — Soit  $\pi^G \in \Pi(G(\mathbb{A}_F))$  une représentation automorphe du spectre discret, telle que pour  $v \in \mathfrak{V}$  la représentation  $\pi_v^G$  est de Steinberg. Supposons que  $\pi^G$  contribue non trivialement à la formule des traces pour  $L$ , c'est-à-dire que :

$$m(\pi^G, \pi_0^L) \neq 0 .$$

Alors, il existe une représentation  $\pi^H \in \Pi(H(\mathbb{A}_F))$  automorphe du spectre discret telle que :

- (a)  $\pi^L$  est un relèvement (ou changement de base) faible de  $\pi^H$  ;
- (b)  $\pi_v^H$  est à cohomologie non triviale pour  $v \in \mathfrak{V}$ , à torsion près par des caractères triviaux sur l'image des normes
- (c) en chaque place  $v$  le caractère de  $\pi_v^H$  ne s'annule pas identiquement sur les normes des éléments de  $L(F_v)$  .

*Démonstration.* — Pour  $S$  assez grand, soit  $\Psi^S$  le caractère de Hecke défini par  $\pi^L$  en dehors de  $S$ . Il suffit de prouver que le premier membre de l'identité 4.5.2 n'est pas identiquement nul. Par séparation des caractères infinitésimaux aux places archimédiennes au moyen de multiplicateurs (3.5.4), on dispose, si on se limite à des fonctions bi-invariantes sous des sous-groupes ouverts compacts fixes, d'une égalité entre sommes finies de représentations. Aux places  $v \in \mathfrak{V}$  on choisit comme fonctions sur  $G(F_v)$  des fonctions de Kottwitz et des fonctions de Kottwitz généralisées sur  $H(F_v)$ , associées. Seules les représentations de Steinberg ou triviales à torsion près par des caractères, de  $G(F_v)$  et  $H(F_v)$ , peuvent contribuer en ces places, et on a supposé  $\pi_v^L$  de Steinberg. D'après 4.5.3 seules peuvent contribuer en cette place les représentations de Steinberg à torsion près par des caractères  $\chi$ . La contribution en ces places, des autres représentations est donc égale à la contribution de  $\pi_v^G$  ou nulle. Aux places dans  $S - \mathfrak{V}$  les fonctions  $\phi_v$  sont arbitraires parmi les fonctions lisses  $K_\infty$ -finies et à support compact sur  $L(F_v)$  et bi-invariantes sous les sous-groupes ouverts compacts choisis. On achève en invoquant 3.3.3 (i).  $\square$

Donnons maintenant un théorème de relèvement.

**Théorème 4.6.2.** — Supposons  $G_0$  quasi-déployé (i.e.  $G_0 = H$ ). Soit  $\pi^H$  une représentation automorphe cuspidale de  $H(\mathbb{A}_F)$  telle qu'aux places  $v \in \mathfrak{V}$  la représentation  $\pi_v^H$  est de Steinberg. Alors, il existe une représentation  $\pi^G \in \Pi(G)$  automorphe cuspidale qui soit un relèvement (ou changement de base) faible de  $\pi^H$ . De plus on peut supposer que

- ( $\alpha$ ) Aux places archimédiennes, le caractère infinitésimal de  $\pi_v^G$  correspond par changement de base à celui de  $\pi_v^H$ .
- ( $\beta$ ) Soit  $v$  une place où  $H(F_v)$  est quasi-déployé muni d'un sous-groupe compact  $K_v^H$  très spécial,  $\pi_v^H$  est  $K_v^H$ -sphérique,  $G(F_v)$  est non-ramifié et muni d'un sous-groupe compact  $K_v^G$  hyperspécial. Alors  $\pi_v^G$  est la représentation  $K_v^G$ -sphérique qui correspond à  $\pi_v^H$  par changement de base.

( $\gamma$ ) En toute place  $v$  où  $\pi_v^H$  est une représentation à cohomologie non triviale la représentation  $\pi_v^G$  est à cohomologie non triviale.

( $\delta$ ) En toute place complètement décomposée dans  $E$  on a  $\pi_v^G = \pi_v^H \otimes \cdots \otimes \pi_v^H$ .

*Démonstration.* — Nous commencerons par montrer l'existence de  $\pi^G$  dans le cas particulier où  $G_0$  est quasi-simple et simplement connexe. Pour  $S$  assez grand, soit  $\psi^S$  le caractère de Hecke défini par  $\pi^H$  en dehors de  $S$  et soit  $\Psi^S = \psi_E^S$ . Compte tenu de la proposition 4.5.2 ci-dessus, il suffit, pour établir l'existence de  $\pi^G$ , de prouver que le second membre de l'identité 4.5.2 n'est pas identiquement nul. Comme ci-dessus dans la preuve de 4.6.1 on utilise pour  $v \in \mathfrak{V}$  des fonctions de Kottwitz (généralisées pour  $H$ ). Compte tenu de 3.2.2 et de 4.3.2 on a

$$\langle 1, f \rangle = \langle 1, \phi \rangle$$

et

$$a(G, \theta, H) = 1.$$

L'identité 4.5.2 peut donc se raffiner en une identité pour l'orthogonal de la représentation triviale pour  $G$  et pour  $H$ . On peut donc supposer que  $\Psi^S$  n'est pas le caractère de Hecke de la représentation triviale ce qui est a fortiori le cas pour tout  $\psi_1^S$  avec  $\Psi^S$  pour changement de base. Donc les  $\pi^H$  qui peuvent contribuer sont, d'après 4.5.3 et 4.5.4, cuspidales et de Steinberg pour  $v \in \mathfrak{V}$ . Ceci permet de mettre la contribution de ces places en facteur. Pour les places dans  $S - \mathfrak{V}$  on invoque 3.3.3 (ii). On a ainsi établi l'existence d'un relèvement faible  $\pi^G$  lorsque  $G_0$  est quasi-simple et simplement connexe. Passons au cas général; nous allons tout d'abord établir que l'identité 4.5.2 peut se raffiner en une identité sur les spectre cuspidaux; pour cela on remarque que la restriction de  $\pi^H$  à l'image du revêtement simplement connexe de son groupe dérivé est une somme de produits tensoriels de représentations irréductibles, sur chaque facteur quasi-simple, qui ne sont pas la représentation triviale. Par changement de base le caractère de Hecke  $\Psi^S$  obtenu n'est pas non plus, sur chaque facteur quasi-simple, celui de la représentation triviale, compte tenu du cas particulier déjà établi. Soit  $\pi_1^H$  une représentation qui pour  $v \in \mathfrak{V}$  a une trace non nulle sur une fonction de Kottwitz généralisée, et qui correspond à un caractère de Hecke  $\psi_1^S$  ayant même changement de base  $\Psi^S$  que le caractère de Hecke  $\psi^S$  de  $\pi^H$ . Une telle représentation  $\pi_1^H$  est donc nécessairement de Steinberg, à torsion près par un caractère unitaire, pour  $v \in \mathfrak{V}$  d'après 4.5.3 et est donc cuspidale d'après 4.5.4. Nous pouvons maintenant supposer les représentations cuspidales, et on procède comme dans le cas particulier déjà traité pour établir l'existence du relèvement faible  $\pi^G$ . Établissons les autres assertions. On a déjà utilisé la possibilité de séparer les caractères infinitésimaux aux places archimédiennes; le reste de l'assertion ( $\alpha$ ) résulte de 3.5.4. L'assertion ( $\beta$ ) résulte de 3.6.4. L'assertion ( $\gamma$ ) résulte, pour les places finies, de la possibilité d'utiliser les fonctions de Kottwitz (3.9.2) et de 3.5.4 pour les places archimédiennes. L'assertion ( $\delta$ ) résulte de 3.4.1.  $\square$

**Remarque.** — En combinant les deux théorèmes précédents on obtient un théorème de relèvement de  $G_0$  à  $G^*$  en faisant tout d'abord un transfert à  $H = G_0^*$  puis un relèvement de  $H$  à  $G^*$ .

#### 4.7. Existence de cohomologie cuspidale

Le théorème 4.6.2 va nous permettre de généraliser le théorème 11.3 de [BLS] comme annoncé dans [BLS, 11.4]. Nous reprenons les définitions et pour l'essentiel les notations de cet article. Soit  $G$  un groupe semi-simple connexe, simplement connexe, déployé. Soit  $F$  un corps totalement réel et soit

$$F = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = E$$

une tour d'extension de corps avec  $F_{p+1}/F_p$  cyclique. On appelle cohomologie cuspidale, au dessus de  $S$ , pour  $G$  sur  $E$ , l'espace vectoriel gradué

$$\mathbf{H}_{cusp}^*(G_E, S) = \mathbf{H}_d^*(G(E_S); \mathbf{L}_{cusp}^2(G(E) \backslash G(\mathbb{A}_E))^\infty)$$

où  $\mathbf{H}_d^*$  est la cohomologie différentiable.

**Théorème 4.7.1.** — *Soit  $S$  un ensemble fini de places de  $E$  contenant toutes les places archimédiennes. La cohomologie cuspidale au dessus de  $S$  pour  $G$  sur  $E$  est non triviale.*

*Démonstration.* — Pour tout ensemble fini  $S_1$  de places de  $F$ , contenant les places archimédiennes, la non trivialité de la cohomologie cuspidale pour  $G$  sur  $F$  est connue grâce au corollaire 10.7 de [BLS]. On suppose que  $S_1$  contient au moins deux places finies de sorte que les représentations cuspidales pour  $G_F$  à cohomologie au dessus de  $S_1$  sont nécessairement de Steinberg en deux places. On suppose de plus que toute place  $w \in S$  divise une place  $v \in S_1$ . On passe de  $F$  à  $E$  par une succession de changements de base cycliques, et il suffit d'invoquer 4.6.2.  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [Ar1] J. ARTHUR, *The local behaviour of weighted orbital integrals*, Duke Math. J. **56** (1988), p. 223-293.
- [Ar2] J. ARTHUR, *The invariant trace formula II*, J. Am. Math. Soc. **1** (1988), p. 501-554.
- [Ar3] J. ARTHUR, *On Local Character Relations*, Selecta Mathematica, New Series **2** (1996), p. 501-579.
- [AC] J. ARTHUR, L. CLOZEL, *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Math. Studies **120** Princeton Univ. Press (1989).
- [BLS] A. BOREL, J.-P. LABESSE, J. SCHWERMER, *On the cuspidal cohomology of  $S$ -arithmetic subgroups of reductive groups over number fields*, Compositio Math. **102** (1996), p. 1-40.
- [BW] A. BOREL, N. WALLACH, *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups*, Annals of Math. Studies **94** Princeton Univ. Press (1980).
- [Bo1] M. V. BOROVoi, *The Algebraic Fundamental Group and Abelian Galois Cohomology of Reductive Algebraic Groups*, Max-Planck-Institut für Mathematik Bonn. Preprint **89-90** (1989).
- [Bo2] M. V. BOROVoi, *Non-abelian hypercohomology of a group with coefficients in a crossed module and Galois cohomology*, Max-Planck-Institut für Mathematik Bonn. Preprint (March 1992).
- [Bo3] M. V. BOROVoi, *Abelian Galois cohomology of Reductive groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **132** (1998), No. 626.
- [Br1] L. BREEN, *Théorie de Schreier Supérieure*, Ann. Sci. E.N.S., 4<sup>e</sup> série **25** (1992), p. 465-514.
- [Br2] L. BREEN, *Ensembles croisés et algèbre simpliciale*, ce volume (1999), p. 135-161.



- [Cas1] W. CASSELMAN, *Characters and Jacquet Modules*, Math. Annalen **230** (1977), p. 101-105.
- [Cas2] W. CASSELMAN, *The unramified principal series of  $p$ -adic groups I. The spherical function*, Compositio Math. **40** (1980), p. 387-406.
- [Ch] V.I. CHERNOUSOV, *The Hasse principle for groups of type  $E_8$* , Soviet Math. Doklady **39** (1989), No. 3 p. 592-596.
- [Clo1] L. CLOZEL, *Changement de base pour les représentations tempérées des groupes réductifs réels*, Ann. Sci. E.N.S. 4<sup>e</sup> série **15** (1982), p. 45-115.
- [Clo2] L. CLOZEL, *The fundamental lemma for stable base change*, Duke Math. J. **61** (1990), p. 255-302.
- [Clo3] L. CLOZEL, *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de  $GL(n)$* , Publ. Math. IHES **73** (1991), p. 97-145.
- [Clo4] L. CLOZEL, *On the cohomology of Kottwitz's arithmetic varieties*, Duke Math. J. **72** (1993), p. 757-795.
- [CD1] L. CLOZEL, P. DELORME, *Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs I*, Invent. Math. **77** (1984), p. 427-453.
- [CD2] L. CLOZEL, P. DELORME, *Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs II*, Ann. Sci. E.N.S. 4<sup>e</sup> série **23** (1990), p. 193-228.
- [CL] L. CLOZEL, J.-P. LABESSE, *Changement de base pour les représentations cohomologiques de certains groupes unitaires*, ce volume (1999), p. 119-133.
- [Co] D. CONDUCHÉ, *Modules croisés généralisés de longueur 2*, J. Pure and Appl. Algebra **34** (1984), p. 155-178.
- [D] P. DELIGNE, *Variétés de Shimura : Interprétation modulaire et techniques de construction de modèles canoniques*, in *Automorphic forms, representations and  $L$ -funtions*, Proc. of Symposia in Pure Math. **33** Amer. Math. Soc. (1979) Part 2, p. 247-290.
- [Delo] P. DELORME, *Théorème de Paley-Wiener tordu pour le changement de base  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$* , Compositio. Math. **80** (1991), p. 197-228.
- [DKV] P. DELIGNE, D. KAZDAN, M.-F. VIGNERAS, *Représentations des algèbres centrales simples  $p$ -adiques*, in *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann (1984), p. 33-117.
- [E] T. ENRIGHT, *Relative Lie algebra cohomology and unitary representations of complex Lie groups*, Duke Math. J. **46** (1979), p. 513-525.
- [Har1] G. HARDER, *Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizen Gruppen I*, Math. Zeit. **90** (1965), p. 404-428.

- [Har2] G. HARDER, *Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizen­gruppen II*, Math. Zeit. **92** (1966), p. 396-415.
- [J] J.F. JOHNSON, *Stable base change  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$  of certain derived functor modules*, Math. Annalen **287** (1990), p. 467-493.
- [JL] H. JACQUET, R.P. LANGLANDS, *Automorphic forms on  $GL(2)$* , Lecture Notes in Math. **114** Springer Verlag (1970).
- [Kne1] M. KNESER, *Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über  $p$ -adischen Körpern I*, Math. Zeit. **88** (1965), p. 40-47.
- [Kne2] M. KNESER, *Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über  $p$ -adischen Körpern II*, Math. Zeit. **89** (1965), p. 250-272.
- [Kne3] M. KNESER, *Hasse Principle for  $H^1$  of Simply Connected Groups*, in *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups*, Proc. Sympos in Pure math. **9** Amer. Math. Soc. (1966), p. 159-163.
- [Ko1] R. KOTTWITZ, *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke Math. J. **49** (1982), p. 785-806.
- [Ko2] R. KOTTWITZ, *Sign changes in harmonic analysis on reductive groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **278** (1983), p. 289-297.
- [Ko3] R. KOTTWITZ, *Base change for units of Hecke algebras*, Compositio Math. **60** (1986), p. 237-250.
- [Ko4] R. KOTTWITZ, *Stable Trace Formula : Cuspidal Tempered Terms*, Duke Math. J. **51** (1984), p. 611-650.
- [Ko5] R. KOTTWITZ, *Stable Trace Formula : Elliptic Singular Terms*, Math. Ann. **275** (1986), p. 365-399.
- [Ko6] R. KOTTWITZ, *Tamagawa numbers*, Annals of Math. **127** (1988), p. 629-646.
- [Ko7] R. KOTTWITZ, *On the  $\lambda$ -adic representations associated to some simple Shimura varieties*, Invent. Math. **108** (1992), p. 653-665.
- [KS] R. KOTTWITZ, D. SHELSTAD, *Foundations of Twisted Endoscopy*, Astérisque **255** Société Mathématique de France (1999).
- [Lab1] J.-P. LABESSE, *Le lemme fondamental pour le changement de base stable*, Duke Math. J. **61** (1990), p. 519-530.
- [Lab2] J.-P. LABESSE, *Pseudo-coefficients très cuspidaux et  $K$ -théorie*, Math. Ann. **291** (1991), p. 607-616.
- [Lab3] J.-P. LABESSE, *Noninvariant base change identities*, Mémoires de la SMF **61** (1995).

- [LL] J.-P. LABESSE, R.P. LANGLANDS, *L-indistinguishability for  $SL_2$* , Can. J. Math. **31** (1979), p. 726-785.
- [Lan1] R.P. LANGLANDS, *Base Change for  $GL(2)$* , Annals of Math. Studies **96** Princeton Univ. Press (1980).
- [Lan2] R.P. LANGLANDS, *Les débuts d'une formule des traces stable*, Publ. Math. Univ. Paris VII **13** (1983).
- [Mi1] J.S. MILNE, *Arithmetic Duality Theorems*, Perspective in Math. **1** Academic Press (1986).
- [Mi2] J.S. MILNE, *Points on a Shimura Variety*, in *The Zeta function of Picard Modular Surfaces*, Les publications CRM, Montréal (1992), p. 151-253.
- [Mü] W. MÜLLER, *The trace class conjecture in the theory of automorphic forms*, Annals of Math. **130** (1989), p. 473-529.
- [Ny] L. NYSSSEN, *Hypercohomologie des complexes de tores et paramétrisation de Langlands*, J. of Algebra **172** (1995), p. 354-378.
- [Ono] T. ONO, *On Tamagawa Numbers*, in *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups*, Proc. Sympos in Pure math. **9** Amer. Math. Soc. (1966), p. 122-132.
- [Rog] J. ROGAWSKI, *Automorphic Representations of Unitary Groups in Three Variables*, Annals of Math. Studies **123** Princeton Univ. Press (1990).
- [Sa] S. SALAMANCA RIBA, *On the unitary dual of some classical Lie groups*, Compositio Math. **68** (1988), p. 251-303.
- [She1] D. SHELSTAD, *Characters and inner forms of a quasi-split group over  $\mathbb{R}$* , Compositio Math. **39** (1979), p. 11-45.
- [She2] D. SHELSTAD, *Base change and a matching theorem for real groups*, Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups, Springer Lect. Notes **880** (1981), p. 425-482.
- [She3] D. SHELSTAD, *L-Indistinguishability for Real Groups*, Math. Annalen **259** (1982), p. 385-430.
- [Spr] T.A. SPRINGER, *Non Abelian  $H^2$  in Galois Cohomology*, in *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups*, Proc. Sympos in Pure math. **9** Amer. Math. Soc. (1966), p. 164-182.
- [VZ] D. VOGAN, G. ZUCKERMAN, *Unitary representations with non zero cohomology*, Compositio Math. **53** (1984), p. 51-90.
- [Walds] J.-L. WALDSPURGER, *Le lemme fondamental implique le transfert*, Compositio Math. **105** (1997), p. 153-236.