Astérisque

ETIENNE FOUVRY

Sur la hauteur des points d'une certaine surface cubique singulière

Astérisque, tome 251 (1998), p. 31-49

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__251__31_0>

Astérisque **251**, 1998, p. 31–49

SUR LA HAUTEUR DES POINTS D'UNE CERTAINE SURFACE CUBIQUE SINGULIÈRE

par

Etienne Fouvry

Résumé. — Par une paramétrisation des solutions de l'équation

$$x_1x_2x_3 = t^3, \qquad (x_1, x_2, x_3, t) = 1$$

et par des méthodes élémentaires de théorie analytique des nombres, on montre que le nombre de points de coordonnées non nulles, de hauteur canonique inférieure à X, de la surface cubique projective de $\mathbb{P}_3(\mathbb{Q})$ d'équation

$$X_1X_2X_3 = T^3,$$

est, pour $X \longrightarrow \infty$, équivalent à $c_0 X \log^6 X$, où c_0 est une certaine constante > 0.

1. Introduction

Cet article a été motivé par le récent travail de Batyrev et Tschinkel ([B–T1], [B–T2], [B–T3]), concernant le nombre de points de hauteur inférieure à une certaine borne X tendant vers l'infini, sur des variétés toriques projectives lisses sur un corps de nombres quelconque, par rapport à des plongements projectifs arbitraires.

Nous traitons ici, le cas très particulier de la variété $\mathcal{V}$ de $\mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$, d'équation

$$X_1X_2X_3 = T^3.$$

Soit $V(X)$ le cardinal de l'ensemble des points de $\mathcal{V}$ de coordonnées non nulles et de hauteur au plus égale à X.

L'étude de $V(X)$ est un cas particulier de ([B–T2] Theorem 1.4) mais aussi de ([B–T1] Corollary 7.4). Toutefois, il faut remarquer que, dans ces deux articles, il est question de variétés toriques lisses. Le traitement de la cubique singulière $\mathcal{V}$, se fait par une résolution de singularités qui fournit ainsi une variété torique lisse. On utilise la fonctorialité des hauteurs pour se ramener au résultat de [B–T2]. Cette délicate réduction est développée, dans un cadre plus général, dans [B–T3].

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — Primaire 11D72; secondaire 14M25.
Mots clefs. — Surface cubique, hauteur.

L'objet de cet article est de montrer que des méthodes classiques de théorie analytique des nombres conduisent elles–aussi à un équivalent asymptotique de $V(X)$ pour $X \longrightarrow \infty$. Nous montrerons le

Théorème 1.1. — *Pour $X \longrightarrow \infty$, on a la relation*

$$V(X) = (c_0 + o(1)) X \log^6 X, \tag{1}$$

où c_0 est une constante absolue, strictement positive.

Remarquons, dans un premier temps, que $V(X)$ est aussi le cardinal des quadruplets d'entiers relatifs (x, y, z, t) vérifiant

$$(x,y,z,t) = 1; \qquad 1 \leqslant x,\ |y|,\ |z|,\ |t| \leqslant X \qquad \text{et} \qquad xyz = t^3.$$

En jouant sur les signes, on voit qu'on a l'égalité

$$V(X) = 4V^+(X),$$

avec

$$V^+(X) = \sharp\{(x,y,z,t) \mid 1 \leqslant x,\ y,\ z,\ t \leqslant X,\ (x,y,z,t) = 1,\ xyz = t^3\}.$$

Il est intéressant de noter que des altérations, apparemment anodines, de la définition de $V^+(X)$, perturbent radicalement son ordre de grandeur asymptotique : on a d'une part

$$V_1^+(X) := \sharp\left\{(x,y,z,t) \,\middle|\, \left\{\begin{array}{l} (x,y) = (y,z) = (z,x) = 1, \\ 1 \leqslant x,\ y,\ z,\ t \leqslant X \\ xyz = t^3 \end{array}\right.\right\} \sim c_1 X$$

(avec c_1 constante strictement positive, en effet les restrictions précédentes donnent pour paramétrisations des solutions à $xyz = t^3$, les quadruplets de la forme (u^3, v^3, w^3, uvw) avec $(u,v) = (v,w) = (w,u) = 1$ et $1 \leqslant u,\ v,\ w \leqslant X^{\frac{1}{3}}$) et d'autre part

$$\begin{aligned} V_2^+(X) &:= \sharp\{(x,y,z,t) \mid 1 \leqslant t \leqslant X;\ (x,y,z,t) = 1 \text{ et } xyz = t^3\} \\ &\sim c_2 X \log^8 X \end{aligned}$$

(pour ce faire, on passe par la fonction arithmétique α, qui sera définie au paragraphe 2.1, par le Lemme 2.1 et par un modeste théorème taubérien pour écrire

$$V_2^+(X) = \sum_{t \leqslant X} \alpha(t) \sim c_2 X \log^8 X,$$

où c_2 est la valeur en 1 de la série de Dirichlet $(\sum_n \alpha(n) n^{-s}) \zeta^{-9}(s)$.)

Ces variations ont le mérite de convaincre de l'importance intrinsèque des conditions de la définition de $V^+(X)$.

Pour revenir à la formule (1), la constante c_0 peut être décrite explicitement, de même que le $o(1)$ peut être précisé, tout au moins en théorie. En effet, les méthodes qui suivent sont absolument classiques, n'apportent rien de vraiment nouveau en théorie analytique des nombres, mais sont extrêmement lourdes par le nombre très élevé de variables de sommation engendrées par les différentes transformations. Ce qui suit peut, en principe, être transposé à l'équation

$$X_1X_2X_3X_4 = T^4,$$

mais la démarche devient totalement asphyxiante par le nombres de variables de sommation qu'il faut gérer.

Cet article a été écrit à la cordiale invite de V. Batyrev, J–L. Colliot–Thélène, E. Peyre et Y. Tschinkel et a bénéficié de conversations avec J. Brüdern et H. Iwaniec. Que ces différentes personnes soient ici remerciées !

2. Transformations de $V^+(X)$.

L'idée de base des fastidieuses transformations qui vont suivre, est de se ramener à une équation de la forme $xyz = t^3$ mais avec les conditions plus fortes de coprimalité $(x, y) = (y, z) = (z, x) = 1$. On a alors une représentation paramétrique des solutions en $(x, y, z, t) = (u^3, v^3, w^3, uvw)$ avec $(u, v) = (v, w) = (w, u) = 1$, ce qui est beaucoup plus facile à compter (voir $V_1^+(X)$ ci–dessus).

Puisque les conditions $1 \leqslant x,\ y,\ z \leqslant X$ entraînent $t \leqslant X$ et que $(x, y, z) = 1$ implique $(x, y, z, t) = 1$, le cardinal étudié s'écrit aussi, après un changement de notations, sous la forme

$$V^+(X) = \sharp\left\{ (x_1, x_2, x_3, t) \;\middle|\; \begin{cases} 1 \leqslant x_1,\ x_2,\ x_3 \leqslant X, \\ (x_1, x_2, x_3) = 1, \\ x_1x_2x_3 = t^3 \end{cases} \right\}.$$

Soit $d_1 = (x_2, x_3)$, alors on a l'égalité

$$V^+(X) = \sharp\left\{ (d_1, x_1, x_2', x_3', t) \;\middle|\; \begin{cases} 1 \leqslant d_1,\ x_1 \leqslant X, \\ 1 \leqslant d_1x_2',\ d_1x_3' \leqslant X, \\ (x_2', x_3') = (d_1, x_1) = 1, \\ d_1^2x_1x_2'x_3' = t^3 \end{cases} \right\},$$

puis posant $d_2 = (x_1, x_3')$, on a

$$V^+(X) = \sharp\left\{ (d_1, d_2, x_1', x_2', x_3'', t) \;\middle|\; \begin{cases} 1 \leqslant d_1,\ d_2 \leqslant X, \\ 1 \leqslant d_2x_1',\ d_1x_2',\ d_1d_2x_3'' \leqslant X, \\ (x_1'x_2', x_3'') = 1, \\ (d_1, d_2) = (d_1, x_1') = (d_2, x_2') = 1, \\ d_1^2d_2^2x_1'x_2'x_3'' = t^3 \end{cases} \right\},$$

enfin, en posant $d_3 = (x'_1, x'_2)$, on parvient, après un changement évident de notations, à

(2)

$$V^+(X) = \sharp \left\{ (d_1,d_2,d_3,x_1,x_2,x_3,t) \middle| \begin{cases} 1 \leqslant d_2d_3x_1, d_1d_3x_2, d_1d_2x_3 \leqslant X, \\ (x_2,x_3){=}(x_3,x_1){=}(x_1,x_2){=}1, \\ (d_1,d_2){=}(d_1,d_3){=}(d_2,d_3){=}1, \\ (d_1,x_1){=}(d_2,x_2){=}(d_3,x_3){=}1, \\ d_1^2d_2^2d_3^2x_1x_2x_3 = t^3 \end{cases} \right\}.$$

2.1. Hypothèses sur les d_i. — L'objet de ce qui suit est de prouver qu'on peut, pour ainsi dire, se ramener au cas où d_1, d_2 et d_3 sont sans facteur carré.

Notons $\alpha(t)$ le nombre de solutions à l'équation

$$t^3 = xyz, \qquad (x,y,z) = 1;$$

sans aucune contrainte de taille sur x, y et z. Nous aurons besoin du

Lemme 2.1. — *On a les propriétés suivantes :*
- *La fonction α est multiplicative.*
- *Pour tout entier $a \geqslant 1$ et tout p premier, on a $\alpha(p^a) = 9a$.*
- *Pour tout m et n on a l'inégalité $\alpha(mn) \leqslant \alpha(m)\alpha(n)$.*

Démonstration. — Seule la deuxième assertion mérite un peu de soin. On voit que $\alpha(p^a)$ est aussi le nombre de solutions à l'équation $3a = a_1 + a_2 + a_3$ avec les a_i entiers positifs ou nuls, vérifiant aussi $a_1a_2a_3 = 0$. Un dénombrement direct donne le résultat. □

Pour $d \geqslant 1$, on dissocie d en $d = d^\diamond d^\dagger$, où $d^\diamond$ est le plus grand entier *squarefull* divisant d (rappelons qu'un entier n est *squarefull*, s'il vérifie l'implication $p|n \Rightarrow p^2|n$). Ainsi $d^\dagger$ est sans facteur carré, premier avec $d^\diamond$ et, par exemple, on a $(600)^\diamond = 200$ et $(600)^\dagger = 3$. On pose

$$\mathcal{L} = \log X, \qquad L = \mathcal{L}^7.$$

Nous allons montrer que la contribution (notée $A(L)$) à (2), des 7–uplets tels que $d_1^\diamond \geqslant L$ est négligeable. En effet, cette contribution vérifie

$$A(L) \leqslant \sum_{\ell \text{ squarefull } \geqslant L} \ \sum_{\substack{t \leqslant X \\ \Xi(\ell)|t}} \alpha(t); \tag{3}$$

où Ξ est la fonction multiplicative définie sur les puissances de nombres premiers par $\Xi(p) = p$, $\Xi(p^2) = p^2$, $\Xi(p^3) = p^2$,... et plus généralement $\Xi(p^a) = p^b$ où b est le plus petit entier tel que $3b \geqslant 2a$. En effet, si $p^a|d_1$, l'égalité $d_1^2d_2^2d_3^2x_1x_2x_3 = t^3$ entraîne $p^{2a}|t^3$, donc la valuation p–adique de t^3 est supérieure ou égale au plus petit multiple de 3 qui dépasse $2a$.

D'après le Lemme 2.1 et (3), on a l'inégalité

$$A(L) \leqslant \sum_{\ell \textit{ squarefull} \geqslant L} \alpha(\Xi(\ell)) \sum_{n \leqslant X/\Xi(\ell)} \alpha(n),$$

puis, en sommant la fonction multiplicative α, on a

$$A \ll X\mathcal{L}^8 \sum_{\ell \textit{ squarefull} > L} \frac{\alpha(\Xi(\ell))}{\Xi(\ell)}.$$

Par la méthode de Rankin qui, rappelons–le, consiste à majorer la fonction caractéristique de l'intervalle $[L, \infty[$ par $(\frac{\ell}{L})^\varepsilon$, on a, pour tout $0 < \varepsilon < 1/3$, la relation

$$\begin{aligned} A(L) &\ll X\mathcal{L}^8 \sum_{\ell \textit{ squarefull}} \frac{\alpha(\Xi(\ell))}{\Xi(\ell)} \Big(\frac{\ell}{L}\Big)^\varepsilon \\ &\ll X\mathcal{L}^8 L^{-\varepsilon} \prod_p \Big(1 + \frac{18}{p^{2-2\varepsilon}} + \frac{18}{p^{2-3\varepsilon}} + \frac{27}{p^{3-4\varepsilon}} + \cdots\Big) \\ &\ll X\mathcal{L}^8 L^{-\varepsilon}. \end{aligned}$$

On a donc la relation

$$A(L) = o(X\mathcal{L}^6), \tag{4}$$

en prenant ε très proche de $1/3$.

En raisonnant de même sur d_2 et d_3, on peut, avec une erreur négligeable, insérer dans la définition (2) de $V^+(X)$, les conditions supplémentaires

$$d_1^\diamond,\ d_2^\diamond,\ d_3^\diamond < L,$$

ce qui implique que tout diviseur premier d'un d_i, supérieur à $\mathcal{L}^{\frac{7}{2}}$ apparaît avec l'exposant 1.

2.2. Deuxième étape de transformation. — Cette étape peut paraître bien absconse si on n'a pas pris le temps de saisir sa motivation sur un cas particulier : Imaginons que nous soyons intéressés par la contribution dans (2) des cas où

$$d_1 = p^2 (= d_1^\diamond), \qquad d_2 = d_3 = 1.$$

L'équation est donc $x_1.(p^2x_2).(p^2x_3) = t^3$. Puisque le second membre est un cube on a, pour des raisons de coprimalité, l'une ou l'autre des deux éventualités suivantes :

- p^2 divise x_2 (alors $v_p(x_2) \equiv 2$ modulo 3 et $v_p(x_3) = 0$),
- p^2 divise x_3 (alors $v_p(x_3) \equiv 2$ modulo 3 et $v_p(x_2) = 0$).

Par contre si

$$d_1 = p^3 (= d_1^\diamond), \qquad d_2 = d_3 = 1,$$

l'équation est $x_1 \cdot (p^3x_2) \cdot (p^3x_3) = t^3$ qui conduit alors à trois éventualités qui s'excluent mutuellement :

- p ne divise pas x_2x_3 (alors $v_p(x_1) = v_p(x_2) = v_p(x_3) = 0$) ;

• p^3 divise x_2 (alors $v_p(x_1) = v_p(x_3) = 0$, $v_p(x_2) \equiv 0$ modulo 3 et $v_p(x_2 p^{-3}) \geqslant 0$) ;
• p^3 divise x_3 (alors $v_p(x_1) = v_p(x_2) = 0$, $v_p(x_3) \equiv 0$ modulo 3 et $v_p(x_3 p^{-3}) \geqslant 0$).

Il reste à mettre dans un cadre formel toutes ces éventualités lorsque les $d_i^\diamond$ ont un nombre quelconque de facteurs premiers. Soient ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 les parties *squarefull* de d_1, d_2 et d_3, les ℓ_i sont donc premiers deux à deux, d'après (2). Nous sommes en présence de l'équation

$$(\ell_2\ell_3 x_1).(\ell_1\ell_3 x_2).(\ell_1\ell_2 x_3) = t^3, \tag{5}$$

avec (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_1, x_2) sans facteur carré,

$$(\ell_1, x_2, x_3) = (x_1, \ell_2, x_3) = (x_1, x_2, \ell_3) = 1$$
$$(\ell_1, x_1) = (\ell_2, x_2) = (\ell_3, x_3) = 1$$
$$(x_1, x_2, x_3) = 1.$$

Dans la formule (5), chaque terme à l'intérieur des parenthèses $(\cdots)$ est inférieur à X.

Soit $\lambda(n)$ le plus petit entier tel que $n\lambda(n)$ soit le cube d'un entier. On décompose $\lambda(\ell_1^2)$ sous la forme

$$\lambda(\ell_1^2) = \mu_1^{(2)}\mu_1^{(3)} \text{ avec } (\mu_1^{(2)}, \mu_1^{(3)}) = 1.$$

On désigne par $\mathfrak{P}_1$ l'ensemble des nombres premiers divisant ℓ_1^2 mais pas $\lambda(\ell_1^2)$. On désigne par $(\mathfrak{P}_1^{(2)}, \mathfrak{P}_1^{(3)})$ un couple quelconque de sous–ensembles de $\mathfrak{P}_1$ dont la réunion est $\mathfrak{P}_1$. On note par $P_1^{(2)}$ le produit des éléments de $\mathfrak{P}_1^{(2)}$ et par $\overline{\mathfrak{P}_1^{(2)}}$ le complémentaire de $\mathfrak{P}_1^{(2)}$ dans $\mathfrak{P}_1$.

Grâce à (4), on voit qu'on a l'égalité

$$V^+(X) = \sum_{\ell_i}\sum_{\mu_i^{(j)}}\sum_{\mathfrak{P}_i^{(j)}} V(\ell_i, \mu_i^{(j)}, \mathfrak{P}_i^{(j)}) + o(X\mathcal{L}^6), \tag{6}$$

où

• $V(\ell_i, \mu_i^{(j)}, \mathfrak{P}_i^{(j)})$ désigne le nombre de (y_1, y_2, y_3, t) vérifiant les équations :

$$\begin{aligned} t^3 = {} & \Big(\ell_2\ell_3\mu_2^{(1)}\mu_3^{(1)}\overline{P_2^{(1)}}^3\,\overline{P_3^{(1)}}^3 y_1\Big)\cdot\Big(\ell_1\ell_3\mu_1^{(2)}\mu_3^{(2)}\overline{P_1^{(2)}}^3\,\overline{P_3^{(2)}}^3 y_2\Big) \\ & \cdot\Big(\ell_1\ell_2\mu_1^{(3)}\mu_2^{(3)}\overline{P_1^{(3)}}^3\,\overline{P_2^{(3)}}^3 y_3\Big) \end{aligned} \tag{7}$$

avec $(y_1, y_2, y_3) = 1$, (y_1, y_2), (y_2, y_3), (y_3, y_1) sans facteur carré,

$$(\ell_1, y_2, y_3) = (y_1, \ell_2, y_3) = (y_1, y_2, \ell_3) = 1$$

et

$$\begin{aligned}(y_1, \ell_1\mu_2^{(3)}\mu_3^{(2)}P_2^{(1)}P_3^{(1)}) &= (y_2, \ell_2\mu_1^{(3)}\mu_3^{(1)}P_1^{(2)}P_3^{(2)}) \\ &= (y_3, \ell_3\mu_1^{(2)}\mu_2^{(1)}P_1^{(3)}P_2^{(3)}) = 1,\end{aligned}$$

chaque terme à gauche de (7), situé à l'intérieur d'une parenthèse $(\cdots)$ étant inférieur à X.

• la somme est faite sur les ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 entiers *squarefull* inférieurs à L, premiers entre eux deux à deux, les $\mu_i^{(j)}$ et $\mathfrak{P}_i^{(j)}$ parcourant toutes les décompositions possibles de $\lambda(\ell_i^2)$ et $\mathfrak{P}_i$, comme ci–dessus.

Puisque le nombre

$$\big(\ell_2\ell_3\mu_2^{(1)}\mu_3^{(1)}\overline{P_2^{(1)}}^3\,\overline{P_3^{(1)}}^3\big).\big(\ell_1\ell_3\mu_1^{(2)}\mu_3^{(2)}\overline{P_1^{(2)}}^3\,\overline{P_3^{(2)}}^3\big).\big(\ell_1\ell_2\mu_1^{(3)}\mu_2^{(3)}\overline{P_1^{(3)}}^3\,\overline{P_2^{(3)}}^3\big)$$

est un cube parfait, on voit que chaque $V(\ell_i,\mu_i^{(j)},\mathfrak{P}_i^{(j)})$ est en fait de la forme

$$\mathcal{K}\Big(\mathbf{X};\mathbf{b};\mathbf{c}\Big)=\mathcal{K}\Big(X_1,X_2,X_3;b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3\Big),$$

qui désigne le nombre de solutions à l'équation

$$x_1x_2x_3=t^3,$$

avec $x_i\leqslant X_i$, $(x_1,x_2,x_3)=(x_1,b_1)=(x_2,b_2)=(x_3,b_3)=1$ et (x_1,x_2), (x_2,x_3) et (x_1,x_3) sans facteur carré et respectivement premiers avec c_3, c_1 et c_2, les b_i et c_i étant des entiers donnés tels que les c_i soient premiers entre eux deux à deux.

Signalons que dans notre application, les X_i seront égaux à X à une puissance de $\mathcal{L}$ près, puisque chacun des ℓ_i est inférieur à L. Pour des raisons évidentes de sobriété dans les notations, nous nous sommes restreints à l'étude soignée de

$$\mathcal{K}(X):=\mathcal{K}\Big(X,X,X;1,1,1;1,1,1\Big).$$

Au paragraphe 6, sera ébauchée la façon de passer au cas général, pour pouvoir effectuer la sommation (6).

3. Étude de $\mathcal{K}(X)$.

Rappelons que $\mathcal{K}(X)$ est le nombre de solutions à l'équation

$$x_1x_2x_3=t^3,$$

avec $d_1=(x_2,x_3)$, $d_2=(x_1,x_3)$ et $d_3=(x_1,x_2)$ sans facteur carré, x_1, x_2, x_3 premiers entre eux et chaque x_i inférieur à X. On est ramené à une équation apparaissant déjà dans (2).

Pour parfaire le travail de coprimalité, on extrait de x_1/d_2, le produit $\delta_1^{(2)}$ des facteurs premiers apparaissant aussi dans d_2 et aussi le produit $\delta_1^{(3)}$ des facteurs premiers de x_1/d_3 apparaissant aussi dans d_3. On opère de même pour les autres variables. Finalement, après un nouveau changement de notations, on voit que $\mathcal{K}(X)$ est le cardinal de l'ensemble des 13–uplets

$$(d_1,d_2,d_3,\delta_1^{(2)},\delta_1^{(3)},\delta_2^{(1)},\delta_2^{(3)},\delta_3^{(1)},\delta_3^{(2)},x_1,x_2,x_3,t)$$

d'entiers compris entre 1 et X vérifiant

(8) $(d_1,d_2)=(d_2,d_3)=(d_3,d_1)=1,\qquad d_1,\ d_2$ et d_3 sans facteur carré ,

(9) $$\delta_2^{(1)}\delta_3^{(1)}|d_1^\infty,\qquad \delta_1^{(2)}\delta_3^{(2)}|d_2^\infty,\qquad \delta_1^{(3)}\delta_2^{(3)}|d_3^\infty,$$

(10) $$(\delta_2^{(1)},\delta_3^{(1)})=(\delta_1^{(2)},\delta_3^{(2)})=(\delta_1^{(3)},\delta_2^{(3)})=1;$$

et une autre liste de conditions où apparaissent x_1, x_2 et x_3 :

$$(x_1x_2x_3,d_1d_2d_3)=(x_1,x_2)=(x_1,x_3)=(x_2,x_3)=1,$$
$$\delta_1^{(2)}\delta_1^{(3)}d_2d_3x_1,\ d_1\delta_2^{(1)}\delta_2^{(3)}d_3x_2,\ d_1d_2\delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)}x_3\leqslant X;$$
$$d_1^2d_2^2d_3^2\delta_1^{(2)}\delta_1^{(3)}\delta_2^{(1)}\delta_2^{(3)}\delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)}x_1x_2x_3=t^3.$$

Les conditions de coprimalité entraînent que tous les entiers

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ et } d_1^2d_2^2d_3^2\delta_1^{(2)}\delta_1^{(3)}\delta_2^{(1)}\delta_2^{(3)}\delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)}$$

sont les cubes d'entiers, notés respectivement u_1, u_2, u_3 et w, premiers entre eux deux à deux.

Le problème de l'évaluation de $\mathcal{K}(X)$ est ainsi réduit à celui du nombre des 13–uplets

$$(d_1,d_2,d_3,\delta_1^{(2)},\delta_1^{(3)},\delta_2^{(1)},\delta_2^{(3)},\delta_3^{(1)},\delta_3^{(2)},x_1,x_2,x_3,t),$$

vérifiant les conditions (8), (9), (10) et les autres conditions

(11) $$(u_1u_2u_3,d_1d_2d_3)=(u_1,u_2)=(u_3,u_1)=(u_2,u_3)=1,$$

(12) $$d_1^2d_2^2d_3^2\delta_1^{(2)}\delta_1^{(3)}\delta_2^{(1)}\delta_2^{(3)}\delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)}=w^3,$$

(13) $$\begin{cases}1\leqslant u_1\leqslant \big(X/(\delta_1^{(2)}\delta_1^{(3)}d_2d_3)\big)^{1/3},\\ 1\leqslant u_2\leqslant \big(X/(d_1\delta_2^{(1)}\delta_2^{(3)}d_3)\big)^{1/3},\\ 1\leqslant u_3\leqslant \big(X/(d_1d_2\delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)})\big)^{1/3}.\end{cases}$$

Le nombre de u_3 vérifiant les conditions précédentes, lorsque les 12 autres variables sont fixées, est

(14)
$$\sum_{\substack{1\leqslant u_3\leqslant\left(X/(d_1d_2\delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)})\right)^{1/3}\\ (u_3,u_1u_2d_1d_2d_3)=1}} 1=\psi_3(u_1u_2d_1d_2d_3)\Big(\frac{X}{d_1d_2\delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)}}\Big)^{\frac13}$$
$$+O\Big(\min\{\tau(u_1u_2d_1d_2d_3),\big(\frac{X}{d_1d_2\delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)}}\big)^{\frac13}\}\Big),$$

en utilisant le résultat classique :

$$\sum_{\substack{n\leqslant y\\(n,q)=1}} 1=\psi_3(q)y+O(\min(\tau(q),y)),$$

avec $\tau(q)$ nombre de diviseurs de l'entier q et $\psi_3(q)=\varphi(q)/q$. Rappelons aussi la majoration

$$\tau(q)=O\big(\exp(\frac{\log q}{\log\log q})\big). \tag{15}$$

4. Minoration de $\mathcal{K}(X)$.

Il nous a semblé plus clair de séparer minoration et majoration de $\mathcal{K}(X)$ pour accéder à l'équivalent asymptotique de cette quantité.

Soit

$$Z=\exp\big(\frac{\log X}{\sqrt{\log\log X}}\big).$$

Pour minorer $\mathcal{K}(X)$ nous ajoutons à la liste de conditions (8), ..., (13) la condition

$$\delta_1^{(2)}\delta_1^{(3)}d_2d_3,\ d_1\delta_2^{(1)}\delta_2^{(3)}d_3,\ d_1d_2\delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)}\leqslant Y:=XZ^{-1}, \tag{16}$$

qui implique donc, que dans les inégalités (13), chaque variable u_i se déplace dans un intervalle assez long, à savoir de longueur au moins égal à $Z^{\frac13}$.

La relation (14) et la remarque (15) conduisent donc à la minoration

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leqslant u_3\leqslant \left(X/(d_1d_2\delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)})\right)^{1/3}\\(u_3,u_1u_2d_1d_2d_3)=1}} 1 &\geqslant (1-o(1))\cdot\psi_3(d_1d_2d_3)\cdot\psi_3(u_1)\cdot\psi_3(u_2)\\ &\quad\cdot\big(\frac{X}{d_1d_2\delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)}}\big)^{\frac13},\end{aligned} \tag{17}$$

uniformément sous la condition (16).

Pour sommer sur u_2, nous utilisons la formule

$$\sum_{\substack{n\leqslant y\\(n,q)=1}}\psi_3(n)=\frac{6}{\pi^2}\,\psi_2(q)y+O_\varepsilon\big(\min(y^{\frac12+\varepsilon}\tau(q),y)\big), \tag{18}$$

où $\psi_2(q)$ est définie par

$$\psi_2(q)=\prod_{p|q}\Big(1+\frac1p\Big)^{-1}.$$

La formule précédente s'obtient, par exemple, par la théorie des séries de Dirichlet et un peu d'analyse complexe, qui consiste à intégrer

$$\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\Big(\sum_{(n,q)=1}\psi_3(n)n^{-s}\Big)\frac{y^s}{s}\mathrm{d}s$$

et à déformer le parcours d'intégration pour récupérer le résidu en $s=1$.

Nous appliquons (18) avec $y=\big(X/(d_1\delta_2^{(1)}\delta_2^{(3)}d_3)\big)^{1/3}$, $q=u_1d_1d_2d_3$. Les restrictions (16) permettent de transformer (18) en une inégalité en introduisant un nouveau facteur $(1-o(1))$. Nous sommes ainsi parvenus à

$$\begin{aligned}(19)\qquad &\sum_{\substack{1\leqslant u_2\leqslant \left(X/(d_1\delta_2^{(1)}\delta_2^{(3)}d_3)\right)^{1/3}\\ (u_2,u_1d_1d_2d_3)=1}}\ \sum_{\substack{1\leqslant u_3\leqslant \left(X/(d_1d_2\delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)})\right)^{1/3}\\ (u_3,u_1u_2d_1d_2d_3)=1}} 1\\ &\geqslant \frac{6}{\pi^2}(1-o(1)).(\psi_2.\psi_3)(d_1d_2d_3)\ (\psi_2.\psi_3)(u_1)\frac{X^{\frac23}}{(d_1^2d_2d_3\delta_2^{(1)}\delta_2^{(3)}\delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)})^{\frac13}}.\end{aligned}$$

On somme maintenant sur u_1, en utilisant la formule

$$(20)\qquad \sum_{\substack{n\leqslant y\\ (n,q)=1}}(\psi_2.\psi_3)(n)=\alpha_0\psi_1(q)y+O_\varepsilon\big(\min(y^{\frac12+\varepsilon}\tau(q),y)\big),$$

avec α_0 constante absolue définie par

$$\alpha_0=\prod_p\Big(1-\frac{2}{p(p+1)}\Big),$$

et

$$\psi_1(q)=\prod_{p|q}\Big(1+\frac{1}{p+1}\Big)^{-1}.$$

Ici aussi, on utilise (20) sous forme d'une minoration uniforme, toujours grâce à (16) et la formule (19) fournit la minoration

(21)

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(X)&\geqslant(1-o(1))\cdot\frac{6}{\pi^2}\cdot\alpha_0\cdot X\\ &\cdot\sum_{(d_1,d_2,d_3,\delta_1^{(2)},\delta_1^{(3)},\delta_2^{(1)},\delta_2^{(3)},\delta_3^{(1)},\delta_3^{(2)})}\psi(d_1)\psi(d_2)\psi(d_3)\Big(\frac{1}{d_1^2d_2^2d_3^2\delta_1^{(2)}\delta_1^{(3)}\delta_2^{(1)}\delta_2^{(3)}\delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)}}\Big)^{\frac13}\\ &\geqslant(1-o(1))\frac{6}{\pi^2}\cdot\alpha_0\cdot X\cdot\mathcal{B}(Y);\end{aligned}$$

par définition, la somme étant faite sous les conditions (8), (9), (10), (12) et (16) et ψ est le produit $\psi=\psi_1\cdot\psi_2\cdot\psi_3$. Signalons que, dans $\mathcal{B}(Y)$, les variables apparaissent au dénominateur, ce qui laisse supposer que cette expression a un comportement plus docile.

4.1. Exploitation de la condition (12). — Nous utilisons les conditions de coprimalité qui lient les d_i et les $\delta_i^{(j)}$ pour écrire que (12) est équivalente aux trois équations

$$\delta_2^{(1)}\delta_3^{(1)}d_1^2 = w_1^3, \quad \delta_1^{(2)}\delta_3^{(2)}d_2^2 = w_2^3, \quad \delta_1^{(3)}\delta_2^{(3)}d_3^2 = w_3^3. \tag{22}$$

C'est ici que nous utilisons le fait que d_1, d_2 et d_3 sont sans facteur carré (ce qui entraîne, avec les notations du paragraphe 2, que $\lambda(d_i^2) = d_i$). Ecrivons $d_1 = \nu_2^{(1)}\nu_3^{(1)}$, $\nu_2^{(1)}$ et $\nu_3^{(1)}$ sont premiers entre eux, sans facteur carré. L'équation

$$\delta_2^{(1)}\delta_3^{(1)}d_1^2 = w_1^3$$

de (22) admet pour uniques solutions les

$$\delta_2^{(1)} = \nu_2^{(1)}(v_2^{(1)})^3, \qquad \delta_3^{(1)} = \nu_3^{(1)}(v_3^{(1)})^3,$$

où $v_2^{(1)}$ et $v_3^{(1)}$ sont des entiers premiers entre eux, divisant d_1^∞. On opère de même sur les autres variables. La somme $\mathcal{B}(Y)$ est ainsi remaniée en

$$\mathcal{B}(Y) = \sum_{\nu} \frac{\psi(\nu_2^{(1)})\psi(\nu_3^{(1)})\psi(\nu_1^{(2)})\psi(\nu_3^{(2)})\psi(\nu_1^{(3)})\psi(\nu_2^{(3)})}{\nu_2^{(1)}\nu_3^{(1)}\nu_1^{(2)}\nu_3^{(2)}\nu_1^{(3)}\nu_2^{(3)}}\Lambda(\nu, Y), \tag{23}$$

la somme étant faite sur les $\nu = (\nu_i^{(j)})$ $(1 \leqslant i \neq j \leqslant 3)$, où les $\nu_i^{(j)}$ sont premiers entre eux deux à deux, sans facteur carré.

Dans (23), la quantité $\Lambda(\nu, Y)$ est définie par

$$\Lambda(\nu, Y) = \sum_{\mathbf{v}} \frac{1}{v_2^{(1)}v_3^{(1)}v_1^{(2)}v_3^{(2)}v_1^{(3)}v_2^{(3)}};$$

où les $\mathbf{v} = (v_i^{(j)})$ $(1 \leqslant i \neq j \leqslant 3)$, sont tels que les $v_i^{(j)}$ sont premiers entre eux deux à deux, sont tels que

$$v_2^{(1)}v_3^{(1)} \mid (\nu_2^{(1)}\nu_3^{(1)})^\infty, \quad v_1^{(2)}v_3^{(2)} \mid (\nu_1^{(2)}\nu_3^{(2)})^\infty, \quad v_1^{(3)}v_2^{(3)} \mid (\nu_1^{(3)}\nu_2^{(3)})^\infty; \tag{24}$$

et sont tels que les inégalités suivantes (qui sont des réécritures de (16))

$$(\nu_1^{(2)})^2(\nu_1^{(3)})^2\nu_3^{(2)}\nu_2^{(3)}(v_1^{(2)})^3(v_1^{(3)})^3 \leqslant Y; \tag{25}$$

$$(\nu_2^{(1)})^2(\nu_2^{(3)})^2\nu_3^{(1)}\nu_1^{(3)}(v_2^{(1)})^3(v_2^{(3)})^3 \leqslant Y; \tag{26}$$

$$(\nu_3^{(1)})^2(\nu_3^{(2)})^2\nu_1^{(2)}\nu_2^{(1)}(v_3^{(1)})^3(v_3^{(2)})^3 \leqslant Y \tag{27}$$

soient satisfaites.

4.2. Minoration de $\Lambda(\nu,Y)$. — Maintenant, on pose $Y_1 = YZ^{-1}$ et $Y_2 = YZ^{-2}$ et soient les six autres conditions sur les variables de sommation :

$$(\nu_1^{(2)})^2(\nu_1^{(3)})^2\nu_3^{(2)}\nu_2^{(3)}(v_1^{(2)})^3 \leqslant Y_1; \tag{28}$$

$$(\nu_2^{(1)})^2(\nu_2^{(3)})^2\nu_3^{(1)}\nu_1^{(3)}(v_2^{(1)})^3 \leqslant Y_1; \tag{29}$$

$$(\nu_3^{(1)})^2(\nu_3^{(2)})^2\nu_1^{(2)}\nu_2^{(1)}(v_3^{(1)})^3 \leqslant Y_1; \tag{30}$$

et

$$(\nu_1^{(2)})^2(\nu_1^{(3)})^2\nu_3^{(2)}\nu_2^{(3)} \leqslant Y_2; \tag{31}$$

$$(\nu_2^{(1)})^2(\nu_2^{(3)})^2\nu_3^{(1)}\nu_1^{(3)} \leqslant Y_2; \tag{32}$$

$$(\nu_3^{(1)})^2(\nu_3^{(2)})^2\nu_1^{(2)}\nu_2^{(1)} \leqslant Y_2. \tag{33}$$

Soit $\Lambda(\nu,Y,Y_1,Y_2)$ défini de façon semblable à $\Lambda(\nu,Y)$ mais avec les conditions de sommation (24), ..., (33). Puisque $\Lambda(\nu,Y)$ est à termes positifs, on a l'inégalité

$$\Lambda(\nu,Y) \geqslant \Lambda(\nu,Y,Y_1,Y_2);$$

l'introduction des conditions supplémentaires (28), ..., (33), assure que, si on somme dans l'ordre $v_1^{(3)}$, $v_2^{(3)}$, $v_3^{(2)}$, $v_1^{(2)}$, $v_2^{(1)}$ et $v_3^{(1)}$, chacune des variables $v_i^{(j)}$ a un intervalle de variation au moins égal à $Z^{\frac{1}{3}}$, ce qui permet de faire apparaître une minoration uniforme grâce au

Lemme 4.1. — *Soit a un entier au moins égal à 1, $y \geqslant 1$ et f une fonction fortement multiplicative (c'est-à-dire vérifiant $f(p^k) = f(p)$ pour tout $k \geqslant 1$), vérifiant l'inégalité $0 \leqslant f(p) \leqslant 1$. Uniformément sous les conditions précédentes, on a l'égalité*

$$\sum_{\substack{k\mid a^\infty\\ k\leqslant y}} \frac{f(k)}{k} = \prod_{p\mid a}\Big(1+\frac{f(p)}{p-1}\Big) + O\big(y^{-\frac{1}{2}}\tau(a)\big).$$

Démonstration. — C'est une illustration de la méthode de Rankin ; on a l'égalité

$$\sum_{\substack{k\mid a^\infty\\ k\leqslant y}} \frac{f(k)}{k} = \prod_{p\mid a}\Big(1+\frac{f(p)}{p-1}\Big) - \sum_{\substack{k\mid a^\infty\\ k> y}} \frac{f(k)}{k},$$

la dernière somme est inférieure à

$$\sum_{k\mid a^\infty} \frac{f(k)}{k}\Big(\frac{k}{y}\Big)^{\frac{1}{2}} = y^{-\frac{1}{2}}\prod_{p\mid a}\Big(1+\frac{f(p)}{\sqrt{p}-1}\Big) = O\big(y^{-\frac{1}{2}}\tau(a)\big). \quad \square$$

Ainsi, pour minorer $\Lambda(\nu,Y,Y_1,Y_2)$, nous commençons par sommer sur $v_1^{(3)}$, on applique le Lemme 4.1 avec un y défini par l'inégalité (25) – mais en tout état de cause, vérifiant $y \geqslant Z^{\frac{1}{3}}$, d'après (28) – et avec $a = \nu_1^{(3)}\nu_2^{(3)}/(v_2^{(3)}, \nu_1^{(3)}\nu_2^{(3)})$, d'où la minoration uniforme

$$\sum_{v_1^{(3)}} \frac{1}{v_1^{(3)}} \geqslant (1-o(1)) \prod_{p|\nu_1^{(3)}\nu_2^{(3)}} \Big(1+\frac{1}{p-1}\Big) \prod_{p|v_2^{(3)}} \Big(1-\frac{1}{p}\Big),$$

puis en appliquant de nouveau le Lemme 4.1, on a la minoration

$$\sum_{v_2^{(3)}} \sum_{v_1^{(3)}} \frac{1}{v_1^{(3)} v_2^{(3)}} \geqslant (1-o(1)) \prod_{p|\nu_1^{(3)}\nu_2^{(3)}} \Big(1+\frac{2}{p-1}\Big).$$

Par un raisonnement identique sur les quatre autres variables $v_3^{(2)}$, $v_1^{(2)}$, $v_2^{(1)}$ et $v_3^{(1)}$, nous accédons à la minoration

$$\Lambda(\nu, Y, Y_1, Y_2) \geqslant (1-o(1)) \frac{1}{(\psi_2.\psi_3)(\nu_2^{(1)}\nu_3^{(1)}\nu_1^{(2)}\nu_3^{(2)}\nu_1^{(3)}\nu_2^{(3)})},$$

où les ψ_i sont définis aux paragraphes 3 et 4, puis en reportant dans (23) on a

$$\mathcal{B}(Y) \geqslant (1-o(1)) \sum_{\nu} \frac{\psi_1(\nu_2^{(1)})\psi_1(\nu_3^{(1)})\psi_1(\nu_1^{(2)})\psi_1(\nu_3^{(2)})\psi_1(\nu_1^{(3)})\psi_1(\nu_2^{(3)})}{\nu_2^{(1)}\nu_3^{(1)}\nu_1^{(2)}\nu_3^{(2)}\nu_1^{(3)}\nu_2^{(3)}};$$

les $\nu_i^{(j)}$ étant sans facteur carrés, premiers entre eux deux à deux et vérifiant les relations (31), (32) et (33).

4.3. Minoration de $\mathcal{B}(Y)$. — La fin de la minoration de $\mathcal{B}(Y)$ est une application itérée de la formule suivante

Lemme 4.2. — *Soit f une fonction multiplicative vérifiant $f(p) \geqslant 0$, $1 - \frac{A}{p} \leqslant f(p) \leqslant 1$ (pour une certaine constante $A > 0$) et $f(p^k) = 0$ pour $k \geqslant 2$. On a alors, pour $y \to \infty$, l'égalité*

$$\sum_{\substack{n \leqslant y \\ (n,a)=1}} \frac{f(n)}{n} = \frac{\varphi(a)}{a} \prod_{p \nmid a} \Big(1 + \frac{f(p)-1}{p} - \frac{f(p)}{p^2}\Big) \log y$$
$$+ O_A\Big((\log y)^{\frac{9}{10}} \log\log a + \exp\big((\log a)^{\frac{1}{2}} - (\log y)^{\frac{9}{10}}\big)\Big).$$

Remarque 4.3. — Les exposants proposés n'ont aucun caractère d'optimalité, mais sont suffisants pour notre application. Les méthodes d'analyse complexe évoquées pour (18) et (20) donnent un développement asymptotique pour

$$\sum_{n \leqslant y,\,(n,a)=1} f(n).$$

Une intégration par parties fournit une formule plus précise pour $\sum \frac{f(n)}{n}$. Les méthodes employées seraient alors un peu plus profondes que celles qui suivent.

Démonstration. — Soit $\tilde f$ la fonction multiplicative définie par $\tilde f(n) = f(n)$ si $(n,a)=1$ et $\tilde f(n)=0$ autrement. En utilisant la convolution $*$ de Möbius, la somme étudiée s'écrit

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant y}\frac{(\tilde f*\mu*\mathbf{1})(n)}{n} &= \sum_{k\leqslant y}\frac{(\tilde f*\mu)(k)}{k}\sum_{m\leqslant y/k}\frac{1}{m}\\ &= \log y\sum_{k\leqslant y}\frac{(\tilde f*\mu)(k)}{k}+O\Big(\sum_{k\leqslant y}\frac{|(\tilde f*\mu)(k)|}{k}\log k\Big).\end{aligned}$$

Le terme principal provient de la série complète

$$\sum_{k}\frac{(\tilde f*\mu)(k)}{k}.$$

Pour contrôler l'erreur, nous utilisons la majoration

$$|(\tilde f*\mu)(k)|\leqslant\prod_{\substack{p\| k\\ p\nmid a}}\frac{A}{p},$$

qu'il est facile de vérifier. En utilisant la méthode de Rankin et en posant $y_0 = \exp\big(4(\log y)^{\frac{9}{10}}\big)$, on majore chacun des trois termes d'erreur comme suit :

$$\begin{aligned}\log y\sum_{k>y}\frac{|(\tilde f*\mu)(k)|}{k} &\leqslant \log y\sum_{k}\frac{|(\tilde f*\mu)(k)|}{k}\Big(\frac{k}{y}\Big)^{\frac13}\\ &\ll_A \log y\; y^{-\frac13}\prod_{p\mid a}\Big(1+\frac{1}{p^{\frac23}}\Big)\\ &\ll_A y^{-\frac14}\exp\big((\log a)^{\frac12}\big);\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\sum_{k\leqslant y_0}\frac{|(\tilde f*\mu)(k)|}{k}\log k &\ll \log y_0\prod_{p\leqslant y_0}\Big(1+\frac{A}{p^2}\Big)\prod_{p\mid a}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\\ &\ll_A \log y_0\log\log a\end{aligned}$$

enfin

$$\sum_{y_0<k<y}\frac{|(\tilde f*\mu)(k)|}{k}\log k\leqslant\log y\sum_{k>y_0}\frac{|(\tilde f*\mu)(k)|}{k}\ll_A y_0^{-\frac14}\exp\big((\log a)^{\frac12}\big).$$

$\square$

On applique ce lemme six fois, avec des choix à chaque fois différents pour la fonction f, l'entier a et le nombre y défini par (31), (32) et (33). On opère en outre une sommation par partie pour tenir compte des lentes variations des facteurs log, $\log^2, \dots \log^5$, d'où la minoration

$$\mathcal{B}(Y) \geqslant (1 - o(1))\alpha_1 \log^6 Y_2 = (1 - o(1))\alpha_1 \log^6 X,$$

avec α_1 constante qu'il est tout à fait possible d'évaluer avec du soin. En reportant dans (21), on obtient finalement

$$\mathcal{K}(X) \geqslant (1 - o(1))\frac{6}{\pi^2}\alpha_0\alpha_1 X \log^6 X. \tag{34}$$

5. Majoration de $\mathcal{K}(X)$.

Il faut reprendre les calculs de minoration de $\mathcal{K}(X)$ et évaluer chacune des pertes.

L'introduction des conditions restrictives (16) sur les d_i et les $\delta_i^{(j)}$ entraîne au niveau de $\mathcal{K}(X)$, une erreur $\mathcal{E}(X,Y)$ en

$$\mathcal{E}(X,Y) = O\Big(\sum_{\substack{d_1,d_2,d_3,\\ \delta_1^{(2)},\delta_1^{(3)},\delta_2^{(1)},\delta_2^{(3)},\delta_3^{(1)},\delta_3^{(2)}}} \Big(\frac{X}{d_1^2 d_2^2 d_3^2 \delta_1^{(2)}\delta_1^{(3)}\delta_2^{(1)}\delta_2^{(3)}\delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)}}\Big)^{\frac{1}{3}}\Big), \tag{35}$$

la somme étant faite sur les d_i et $\delta_i^{(j)}$ vérifiant

$$Y < \delta_1^{(2)}\delta_1^{(3)} d_2 d_3 \leqslant X,\ d_1\delta_2^{(1)}\delta_2^{(3)} d_3 \leqslant X,\ d_1 d_2 \delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)} \leqslant X, \tag{36}$$

et les conditions (8), (9), (10), (12) et chacun des d_i sans facteur carré. Pour établir cette majoration, on a utilisé la majoration triviale contenue dans (14), on a tiré avantage de la symétrie des variables et du fait que chaque fonction ψ_i est comprise entre 0 et 1. Autrement dit, on a la majoration

$$\mathcal{K}(X) \leqslant (1 + o(1)) \cdot \frac{6}{\pi^2} \cdot \alpha_0 \cdot X \cdot \mathcal{B}(Y) + O\big(\mathcal{E}(X,Y)\big). \tag{37}$$

À partir de (35), on a facilement la relation

$$\mathcal{E}(X,Y) = O\Big(X\mathcal{F}(X) - X\mathcal{F}(Y)\Big); \tag{38}$$

avec

$$\mathcal{F}(X) = \sum_{(d_1,d_2,d_3,\delta_1^{(2)},\delta_1^{(3)},\delta_2^{(1)},\delta_2^{(3)},\delta_3^{(1)},\delta_3^{(2)})} \Big(\frac{1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2 \delta_1^{(2)}\delta_1^{(3)}\delta_2^{(1)}\delta_2^{(3)}\delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)}}\Big)^{\frac{1}{3}};$$

les intervalles de sommation (36) étant maintenant remplacés par

$$\delta_1^{(2)}\delta_1^{(3)} d_2 d_3 \leqslant X, \qquad d_1\delta_2^{(1)}\delta_2^{(3)} d_3 \leqslant X, \qquad d_1 d_2 \delta_3^{(1)}\delta_3^{(2)} \leqslant X.$$

La quantité $\mathcal{F}(Y)$ ressemble beaucoup à la quantité $\mathcal{B}(Y)$, introduite en (21), à la différence près que les fonctions multiplicatives ψ_i ont été remplacées par 1. Par une méthode identique, nous pouvons énoncer la minoration

$$\mathcal{F}(Y) \geqslant (1-o(1))\alpha_2 \log^6 Y_2 = (1-o(1))\alpha_2 \log^6 X, \tag{39}$$

où α_2 est une constante absolue positive.

La quantité $\mathcal{F}(X)$ doit être majorée et c'est en quelque sorte plus facile que de la minorer. Nous écrivons, par similitude avec (23), l'égalité

$$\mathcal{F}(X) = \sum_{\nu} \frac{1}{\nu_2^{(1)}\nu_3^{(1)}\nu_1^{(2)}\nu_3^{(2)}\nu_1^{(3)}\nu_2^{(3)}} \Lambda(\nu, X),$$

où $\Lambda(\nu, X)$ est défini au paragraphe 4, mais en remplaçant, naturellement, dans (25), (26) et (27), le paramètre Y par X. La série $\Lambda(\nu, X)$ est à termes positifs, donc on a l'inégalité

$$\Lambda(\nu, X) \leqslant \tilde{\Lambda}(\nu, X),$$

où $\tilde{\Lambda}(\nu, X)$ est défini comme $\Lambda(\nu, X)$ à la différence près que les inégalités (25), (26) et (27) sont remplacées par

$$\begin{aligned}
(\nu_1^{(2)})^2(\nu_1^{(3)})^2\nu_3^{(2)}\nu_2^{(3)} &\leqslant X;\\
(\nu_2^{(1)})^2(\nu_2^{(3)})^2\nu_3^{(1)}\nu_1^{(3)} &\leqslant X;\\
(\nu_3^{(1)})^2(\nu_3^{(2)})^2\nu_1^{(2)}\nu_2^{(1)} &\leqslant X.
\end{aligned}$$

Il n'y a donc plus aucune contrainte sur la taille des $v_i^{(j)}$. Les sommes sur les $v_i^{(j)}$ sont des séries complètes, le Lemme 4.1 est donc inutile. Par une méthode absolument identique, on parvient à majoration

$$\mathcal{F}(X) \leqslant (1+o(1))\alpha_2 \log^6 X,$$

qui, reportée dans (38), donne grâce à (39), la relation

$$\mathcal{E}(X, Y) = o(X \log^6 X). \tag{40}$$

Pour terminer la majoration de $\mathcal{K}(X)$, il reste à majorer $\mathcal{B}(Y)$ (voir (37)). Par l'argument précédent on a l'inégalité

$$\Lambda(\nu, Y) \leqslant \tilde{\Lambda}(\nu, Y),$$

la série sur les $v_i^{(j)}$ est complète, on a donc l'égalité

$$\tilde{\Lambda}(\nu, Y) = \frac{1}{(\psi_2.\psi_3)(\nu_2^{(1)}\nu_3^{(1)}\nu_1^{(2)}\nu_3^{(2)}\nu_1^{(3)}\nu_2^{(3)})},$$

d'où

$$\mathcal{B}(Y) \leqslant (1+o(1))\alpha_1 \log^6 Y \leqslant (1+o(1))\alpha_1 \log^6 X,$$

et, finalement, grâce à (37) et (40), on a l'inégalité

$$\mathcal{K}(X) \leqslant (1+o(1))\frac{6}{\pi^2}\alpha_0\alpha_1 X\log^6 X. \tag{41}$$

6. Fin de la démonstration du théorème.

En combinant (34) et (41), nous avons donc démontré

$$\mathcal{K}(X,X,X;1,1,1;1,1,1) = (1+o(1))\alpha_3 X\log^6 X.$$

Une étude de la démonstration indique que la formule précédente s'étend à

$$\mathcal{K}(\frac{X}{a_1},\frac{X}{a_2},\frac{X}{a_3};1,1,1;1,1,1) = (1+o(1))\alpha_3\frac{X}{\sqrt[3]{a_1a_2a_3}}.\log^6 X,$$

uniformément pour $a_i \leqslant \mathcal{L}^A$, avec A constante positive fixée –il suffit de remplacer X dans les parties droites des formules (17), (19) et (21) respectivement par $\frac{X}{a_3}$, $\frac{X}{\sqrt{a_2a_3}}$ et $\frac{X}{\sqrt[3]{a_1a_2a_3}}$.

Plus généralement, on a l'égalité

$$\mathcal{K}:\left(\frac{X}{a_1},\frac{X}{a_2},\frac{X}{a_3};\mathbf{b};\mathbf{c}\right) = (1+o(1))\alpha_3\cdot\Theta(\mathbf{b};\mathbf{c})\frac{X}{\sqrt[3]{a_1a_2a_3}}\cdot\log^6 X,$$

uniformément pour les a_i, les b_i et les c_i inférieurs à $\mathcal{L}^A$. C'est ici qu'apparaît l'obstacle à un calcul explicite et assez aisé de la constante c_0 apparaissant en (1). En effet la constante $\Theta(\mathbf{b};\mathbf{c})$ est produit de facteurs locaux sur les diviseurs premiers des b_i, des c_j et de leurs p.g.c.d. Pour se rendre compte de la difficulté d'écriture–mais non de théorie–il est bon de voir ce que donne le début du calcul de $\Theta(\mathbf{b};\mathbf{c})$, par exemple, lors de la démonstration d'un analogue de (21) pour $\mathcal{K}(\frac{X}{a_1},\frac{X}{a_2},\frac{X}{a_3};\mathbf{b};\mathbf{c})$. La minoration (21) reste valable pour la quantité précédente à condition de

- remplacer X par $\frac{X}{\sqrt[3]{a_1a_2a_3}}$ (déjà signalé plus haut) ;
- sommer sur les d_i et les $\delta_i^{(j)}$ non seulement sous les contraintes (8), (9), (10), (12) et (16) mais aussi sous la condition

$$(d_1,c_1b_2b_3) = (d_2,b_1c_2b_3) = (d_3,b_1b_2c_3) = 1;$$

- remplacer le facteur $\psi(d_1d_2d_3)$ par

$$\psi(d_1d_2d_3)\cdot\frac{\psi_1(b_1b_2b_3)\psi_2((b_1,b_2))\psi_2((b_1,b_3))\psi_2((b_2,b_3))\psi_3((b_1,b_2,b_3))}{\psi_1((d_1,b_1))\psi_1((d_2,b_2))\psi_1((d_3,b_3))\psi_2^2((b_1,b_2,b_3))}.$$

Ce calcul et tous ceux qui conduisent à la valeur de $\Theta(\mathbf{b};\mathbf{c})$, utilisent des estimations de sommes de la forme

$$\sum_{\substack{n\leqslant y\\(n,u)=1}} f(vn),$$

(pour u et v entiers et pour f fonction complètement multiplicative telle que $1-\frac{A}{p}\leqslant f(p)\leqslant 1$) et des généralisations de telles sommes.

On retiendra uniquement la propriété que $\Theta(\mathbf{b};\mathbf{c})$ est compris entre 0 et 1 : c'est une conséquence directe de l'inégalité triviale

$$\mathcal{K}(\mathbf{X};\mathbf{b};\mathbf{c})\leqslant \mathcal{K}(\mathbf{X};1,1,1;1,1,1)$$

Par retour à la formule (6), on voit que, lorsque le triplet de nombres *square-full* (ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3) premiers entre eux inférieurs à L est fixé, il y a, pour tout $\varepsilon>0$, $O\big((\ell_1\ell_2\ell_3)^\varepsilon\big)$ 12-uplets de $(\mu_i^{(j)},\mathfrak{P}_i^{(j)})$ associés et qu'on a, avec les notations précédentes $a_1=\ell_2\ell_3\mu_2^{(1)}\mu_3^{(1)}\overline{P_2^{(1)}}^3\,\overline{P_3^{(1)}}^3$, a_2 et a_3 définis de façon similaire (voir (7)), l'égalité

$$V^+(X)=\alpha_3.X.\log^6 X\sum_{\ell_i}\sum_{\mu_i^{(j)}}\sum_{\mathfrak{P}_i^{(j)}}\frac{\Gamma(\ell_i,\mu_i^{(j)},\mathfrak{P}_i^{(j)})}{\sqrt[3]{a_1a_2a_3}}(1+o(1))+o(X\mathcal{L}^6),$$

avec $\Gamma(\cdots)$ coefficient vérifiant $0<\Gamma(\cdots)\leqslant 1$ et avec, pour conditions de sommation, celles de (6).
La série sur les ℓ_i est alors convergente puisqu'elle est

$$\ll\sum_{\ell_i}\frac{(\ell_1\ell_2\ell_3)^\varepsilon}{\sqrt[3]{\ell_1^2\ell_2^2\ell_3^2}}\ll\prod_p\Big(1+\frac{p^\varepsilon}{p^{\frac{4}{3}}}+\frac{p^{2\varepsilon}}{p^2}+\cdots\Big)^3\ll 1,$$

ce qui termine la preuve du Théorème.

Remarque 6.1. — On voit que l'analyse complexe ne fait qu'une timide apparition dans ce travail. Un usage plus important des séries de Dirichlet ne peut qu'améliorer les résultats ci–dessus, tant en précision qu'en généralité. C'est l'objet d'un article, actuellement en préparation, de R. de la Bretèche. Il sera alors intéressant de confronter ses méthodes et ses résultats avec ceux de Batyrev et Tschinkel.

Note ajoutée lors de la correction des épreuves : Quelques mois après l'acceptation de cet article, nous avons reçu un preprint de D.R.Heath–Brown et B.Z.Moroz, dans lequel les auteurs donnent, par une démarche différente mais toujours élémentaire, un équivalent asymptotique de la quantité $V(X)$ étudiée ici. Ils donnent même, explicitement, la valeur de la constante c_0. Le travail de R. de la Bretèche, évoqué ci-dessus, est publié dans le présent ouvrage.

Références

[B–T1] V. V. Batyrev and Y. Tschinkel : Manin's Conjecture for Toric Varieties ; J. of Algebraic Geometry (à paraître).

[B–T2] ——— : Height Zeta functions of Toric Varieties ; Preprint de l'Ecole Normale Supérieure, Mars 1996, (à paraître dans Manin's Festschrift).

[B–T3] ——— : Tamagawa Numbers of Polarized Algebraic Varieties (ce volume).

reçu le 14 octobre 1996

ETIENNE FOUVRY, Mathématique, Bâtiment 425, Université de Paris–Sud, F–91405 ORSAY Cedex, France • *E-mail* : `Etienne.Fouvry@math.u-psud.fr`