

# *Astérisque*

C. BONATTI

R. LANGEVIN

## **Difféomorphismes de Smale des surfaces**

*Astérisque*, tome 250 (1998)

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1998\\_\\_250\\_\\_R3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__250__R3_0)

© Société mathématique de France, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# DIFFÉOMORPHISMES DE SMALE DES SURFACES

C. Bonatti et R. Langevin  
avec la collaboration de E. Jeandenans

**Résumé.** — Ce volume est consacré aux difféomorphismes  $C^1$ -structurellement stables (appelés ici *difféomorphismes de Smale*) des surfaces compactes.

Le résultat principal montre que leur dynamique topologique globale (c'est à dire leur classe de conjugaison topologique) admet une présentation combinatoire finie. Pour cela nous considérons les *ensembles hyperboliques saturés* (c'est à dire égaux à l'intersection de leurs variétés invariantes) et nous construisons un voisinage invariant canonique (à conjugaison près) de ces ensembles (leur *domaine*). Nous montrons alors que la dynamique en restriction à un domaine est caractérisée par le *type géométrique* d'une partition de Markov de l'ensemble hyperbolique saturé : il s'agit d'une combinatoire décrivant comment (ordre, position et sens) l'image d'un rectangle de la partition coupe les rectangles de cette partition. La dynamique globale est alors obtenue en recollant les domaines le long de leur bord.

L'une des clefs de la longue démonstration du résultat principal est une analyse détaillée du *dessin des courbes invariantes* des difféomorphismes de Smale des surfaces (c'est à dire de leur position topologique dans la surface). En corollaire du résultat principal, nous montrons que le dessin des courbes invariantes caractérise en grande partie la dynamique topologique.

Certains types géométriques abstraits ne correspondent pas à des difféomorphismes de Smale de surfaces compactes. Nous définissons le *genre* d'un type géométrique abstrait, qui est un minorant du genre de toute surface compacte sur laquelle on peut réaliser le type géométrique comme partition de Markov d'un ensemble hyperbolique saturé ; nous caractérisons alors les types géométriques de genre fini.

**Abstract (Smale diffeomorphisms of surfaces).** — This work is devoted to the  $C^1$ -structurally stable diffeomorphisms (called here *Smale diffeomorphisms*) of compact surfaces.

The main result consists in a finite combinatorial presentation of the global topological dynamics (*i.e.* the class of topological conjugacy) of Smale diffeomorphisms. For that we consider *saturated hyperbolic sets* (*i.e.* hyperbolic sets which are equal to the intersection of their invariants manifolds) and we build some canonical (up to conjugacy) invariant neighbourhood (the *domain*) of these saturated sets. Then we prove

that the dynamics restricted to the domain is characterized by the *geometrical type* of some Markov partition of the hyperbolic set : it is a simple combinatorics describing in which order, position and direction the image of some rectangle of the Markov partition crosses the rectangles. Then the global dynamic is obtained by gluing the domains along their boundary.

One important step of the proof consists in a precise analysis of the topological position (the *pattern*) of the invariant curves of the Smale diffeomorphisms. As a corollary of the main result we get that the pattern of the invariant curves essentially characterizes the dynamics on the domains.

Some of the abstract geometrical types do not correspond to any Smale diffeomorphisms on compact surfaces. We define the genus of a type, as a minorant of the genus of any compact surface on which the type can be realized as the geometrical type of a Markov partition of some saturated hyperbolic set ; then we characterize the geometrical types of finite genus.

Nous dédions ce travail à  
Bernadette, Arlette et Michel.





## Table des matières

<b>Introduction</b> .....	1
0.1. La théorie qualitative des systèmes dynamiques .....	1
0.2. Le problème de classification des dynamiques hyperboliques .....	10
0.3. Classification des difféomorphismes de Smale des surfaces : présentation de nos principaux résultats .....	15
<b>1. Pièces basiques et ensembles saturés</b> .....	21
1.1. Rappels de définitions et de propriétés classiques des dynamiques « hyperboliques » .....	21
1.2. Ensembles saturés des difféomorphismes de Smale des surfaces .....	26
1.3. Voisinages invariants d'ensembles saturés en dimension 2 .....	33
<b>2. Géométrie des courbes invariantes</b> .....	41
2.1. Points bords d'une pièce basique ou d'un ensemble hyperbolique saturé .....	41
2.2. s-arches, u-arches, rectangles .....	45
2.3. Zips et attracteurs hyperboliques .....	49
2.4. Où l'on utilise le fait que $S$ est de genre fini .....	54
2.5. Itérés des arches dans un domaine invariant .....	61
2.6. Couplage de séparatrices, polygones d'arches .....	65
<b>3. Domaine d'un ensemble hyperbolique saturé</b> .....	71
3.1. Le domaine restreint et sa position dans un voisinage invariant .....	72
3.2. Domaine d'un ensemble hyperbolique saturé : définition et universalité ..	80
3.3. Le graphe de Smale et les domaines .....	85
3.4. Première réduction du problème de classification des difféomorphismes de Smale .....	88
<b>4. Construction de partitions de Markov</b> .....	93
4.1. Quelques définitions .....	94
4.2. Rails et rectangles .....	96
4.3. Découpage de rectangles et construction de partitions de Markov .....	100
4.4. Existence de familles adaptées de segments stables .....	105

<b>5. Partitions de Markov géométrisées et conjugaison topologique de difféomorphismes de Smale</b> .....	109
5.1. Le cas unidimensionnel .....	109
5.2. Partitions de Markov géométrisées .....	113
5.3. Feuilletages invariants .....	115
5.4. Conjugaison définie sur les rectangles d'une partition de Markov .....	118
5.5. Extension de la conjugaison au domaine .....	120
5.6. Présentation finie d'un difféomorphisme de Smale, et bilan du problème de classification .....	132
<b>6. Les dessins et la dynamique</b> .....	137
6.1. Points périodiques, pièces basiques, ordre de Smale .....	138
6.2. Conjugaison des dynamiques en restriction à $K$ et $L$ .....	141
6.3. Image d'une partition de Markov et extension de la conjugaison au domaine .....	143
6.4. Contre-exemples, généralisations, conjectures .....	146
<b>7. Genre d'une partition de Markov géométrique et réalisabilité (par C. Bonatti et E. Jeandenans)</b> .....	153
7.1. HV-surfaces à bord et à coins .....	154
7.2. Type géométrique sans double-bord et réalisation .....	158
7.3. Genre d'une partition de Markov géométrisée .....	164
7.4. Description des obstructions et énoncé du théorème .....	168
7.5. Lemmes topologiques .....	171
7.6. Domaines fondamentaux autonomes couplés .....	177
7.7. Sans obstruction, le type géométrique $T$ est de genre fini .....	186
7.8. Les obstructions donnent à $T$ un genre infini .....	196
7.9. Le cas des types géométriques à un seul rectangle .....	205
<b>8. Pièces basiques et homéomorphismes pseudo-Anosov (par C. Bonatti et E. Jeandenans)</b> .....	207
8.1. Rappels sur les homéomorphismes pseudo-Anosov .....	208
8.2. Mesures de Margulis .....	211
8.3. Semi-conjugaison d'une pièce basique sans impasse à un homéomorphisme pseudo-Anosov .....	212
8.4. Implosion des trous et des intervalles .....	216
8.5. Construction d'un voisinage d'un cycle .....	219
8.6. Implosion des trous et des intervalles au voisinage d'un cycle .....	225
<b>Bibliographie</b> .....	231

# INTRODUCTION

## 0.1. La théorie qualitative des systèmes dynamiques

Les dynamiciens aiment à situer l'origine des Systèmes Dynamiques à Henri Poincaré, à la frontière entre le  $XIX^e$  et le  $XX^e$  siècle. L'objet des systèmes dynamiques était cependant étudié depuis longtemps par les physiciens et les mathématiciens : il s'agit de pouvoir prédire l'évolution à long terme d'un système quand on connaît la loi de son évolution, ce qui permet tout juste de prédire « l'instant d'après ». Si la loi d'évolution est une application  $f$ , il s'agit de comprendre le comportement, quand le temps  $n$  tend vers l'infini, des *orbites* de  $f$ , c'est-à-dire des suites  $x, f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots, f^n(x), \dots$ . Si la loi d'évolution est infinitésimale, c'est-à-dire définie par une équation différentielle, un champ de vecteurs  $X$ , le théorème de Cauchy Lipschitz permet de définir les orbites  $X_t(x)$  pour les petits temps  $t$  : le problème est à nouveau de comprendre le comportement de ces orbites quand le temps  $t$  tend vers l'infini. Jusqu'à la fin du siècle dernier, la solution semblait devoir passer par la résolution explicite de l'équation différentielle. Poincaré a montré que des raisonnements simples, de nature topologique, permettaient de donner une description qualitative du comportement asymptotique des orbites. Un exemple frappant est le célèbre théorème dit de Poincaré Bendixson, sur les champs de vecteurs de la sphère  $S^2$ . Dans le cas de champs de vecteurs analytiques n'ayant qu'un nombre fini de zéros, ce théorème dit que toute orbite obéit à l'un des trois comportements suivants : soit elle « aboutit » à l'un des zéros du champ, soit elle s'enroule autour d'une orbite périodique régulière, soit enfin elle s'enroule sur un cycle singulier qui est un compact connexe formé d'un nombre fini d'orbites régulières joignant chacune deux zéros du champ.

C'est dans les années 60-70 que la théorie des systèmes dynamiques a véritablement pris son essor, autour en particulier de deux théories parallèles : la théorie hyperbolique de Smale, et celle des  $U$ -systèmes d'Anosov.

La théorie de Smale est née d'un modèle simple (le «fer à cheval») que Smale a proposé pour comprendre un phénomène découvert par Poincaré : il s'agissait d'une hypothèse géométrique en apparence anodine (une intersection transverse entre deux courbes invariantes d'un même point fixe) qui impliquait l'apparition d'une dynamique extrêmement riche et complexe.

Le paradigme de la théorie d'Anosov est le flot géodésique d'une surface de courbure négative : la théorie des  $U$ -systèmes dégage la propriété d'éloignement exponentiel des géodésiques voisines. Dans le langage de Smale, cette propriété est l'hyperbolicité.

Notre travail va consister à classifier ce que l'on pourrait appeler des fers à cheval généralisés. Aussi allons nous détailler dans cette introduction le fer à cheval de Smale et la théorie hyperbolique, ainsi que l'histoire de la naissance de cette théorie.

**0.1.1. Au voisinage d'un point fixe, variétés invariantes.** — Les orbites les plus simples et les plus remarquables sont bien sûr les points fixes de la dynamique, et le premier pas pour structurer la dynamique d'un système a été de comprendre la dynamique, au voisinage d'un point fixe. On espère alors que la dynamique va être essentiellement donnée par la partie linéaire (de l'application ou du champ de vecteur) au point fixe. Ce sera vrai si cette partie linéaire est *hyperbolique* c'est-à-dire que ses valeurs propres sont toutes de module différent de 1 (cas des difféomorphismes) ou de partie réelle non-nulle (cas des champs de vecteurs). Le lecteur trouvera dans [PM, chapter II] un exposé élémentaire de la dynamique locale au voisinage d'un point fixe hyperbolique : la voici en quelques mots.

Une application linéaire inversible  $L$  de  $\mathbb{R}^n$  dans lui même est dite hyperbolique si toutes ses valeurs propres sont de module différent de 1. La dynamique d'une telle application est très simple, et les orbites des points de  $\mathbb{R}^n$  peuvent avoir (au plus) quatre types de comportement :

- L'origine 0, point fixe.
- Les points (différents de l'origine) du sous-espace vectoriel  $E^s(L)$ , somme des sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de  $L$  de module inférieur à 1. Ce sous-espace est caractérisé dynamiquement comme étant l'ensemble des points dont l'orbite positive converge vers l'origine :

$$E^s(L) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} L^n(v) = 0 \right\}.$$

Cet espace s'appellera l'*espace stable* de  $L$ .

Remarquons que tout vecteur  $v \in E^s(L) \setminus \{0\}$  a son orbite négative qui tend vers l'infini :  $\lim_{n \rightarrow -\infty} \|L^n(v)\| = +\infty$ .

- Les points (différents de l'origine) du sous-espace vectoriel  $E^u(L)$ , somme des sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de  $L$  de module supérieur à 1. Ce sous-espace est caractérisé dynamiquement comme étant l'ensemble

des points dont l'orbite négative converge vers l'origine :

$$E^u(L) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{n \rightarrow -\infty} L^n(v) = 0 \right\}.$$

Cet espace s'appellera l'*espace instable* de  $L$ .

Remarquons que tout vecteur  $v \in E^u(L) \setminus \{0\}$  a son orbite positive qui tend vers l'infini :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|L^n(v)\| = +\infty$ .

- Les points de  $\mathbb{R}^n \setminus (E^s(L) \cup E^u(L))$  : leur orbite positive et leur orbite négative tendent vers l'infini.

Soit  $f$  un difféomorphisme d'une variété de dimension  $n$ , et  $p$  un point fixe de  $f$ . Notons  $L$  la différentielle de  $f$  en  $p$ . On dira que  $p$  est un *point fixe hyperbolique* si  $L$  est une application linéaire hyperbolique. La dynamique locale de  $f$ , au voisinage de  $p$ , est alors conjuguée (par un homéomorphisme) à celle de sa partie linéaire  $L$  (théorème de Hartman et Grobman, voir [PM]). Alors il existe un voisinage  $U$  du point  $p$  tel que les points de  $U$  ont quatre comportements possibles :

- Le point  $p$  est fixe.
- Tout point  $x \in U$  dont tous les itérés positifs  $f^n(x), n \geq 0$  restent dans  $U$ , a son orbite positive qui converge vers  $p$ . On note

$$W_{loc}^s(p) = \{x \in U \mid \forall n \geq 0, f^n(x) \in U\},$$

et on l'appelle variété stable locale de  $p$ . La variété stable locale est homéomorphe à la boule-unité de l'espace stable  $E^s(L)$ , est une variété différentiable de même classe que  $f$  et est tangente en  $p$  à cet espace stable. Tout point différent de  $p$  dans  $W_{loc}^s(p)$  possède un itéré négatif hors de  $U$ .

- Tout point  $x \in U$  dont tous les itérés négatifs  $f^n(x), n \leq 0$  restent dans  $U$ , a son orbite négative qui converge vers  $p$ . On note

$$W_{loc}^u(p) = \{x \in U \mid \forall n \leq 0, f^n(x) \in U\},$$

et on l'appelle variété instable locale de  $p$ . La variété instable locale est homéomorphe à la boule-unité de l'espace stable  $E^s(L)$  et est tangente en  $p$  à cet espace stable. Tout point différent de  $p$  dans  $W_{loc}^u(p)$  possède un itéré positif hors de  $U$ .

- Les points de  $U$  qui ne sont ni dans la variété stable ni dans la variété instable de  $U$  ont leurs orbites positive et négative qui sortent de  $U$ .

(Nous renvoyons à [Sh] pour une présentation moderne de la construction et la régularité des variétés invariantes. La première démonstration d'existence, en dimension 2, est due à Hadamard [Ha] qui donne en trois pages l'idée fondatrice ; la généralisation en dimension plus grande semble due à Perron [Per1], [Per2], [Per3]).

Dans le cas des surfaces (qui est celui qui nous intéresse), un point fixe hyperbolique  $p$  est de trois types possibles, suivant que la dimension de sa variété stable est 2, dans

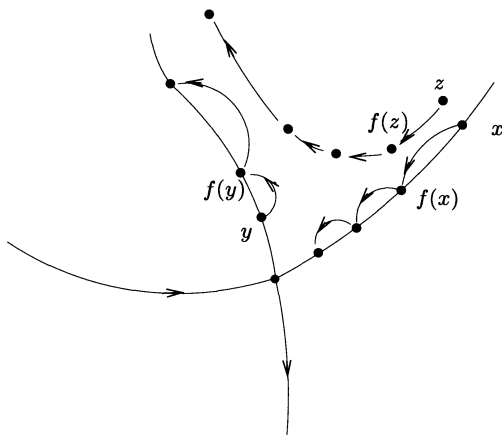


FIGURE 1. Le comportement local au voisinage d'une selle.

ce cas le point attire tout un voisinage et on dit qu'il est attracteur, 0, dans ce cas le point est répulseur, ou 1. Dans ce dernier, cas le point  $p$  est un point *selle*. Ses variétés invariantes (stable et instable) locales sont alors des courbes se coupant transversalement en  $p$ .

**0.1.2. Le modèle idéal pour les dynamiques globales : le théorème de Peixoto.** — Le plus simple que l'on puisse espérer pour une dynamique est que la plupart des orbites soient attirées par un nombre fini d'orbites périodiques attractrices, les bassins d'attractions de ces orbites étant limités par les variétés stables des points périodiques de type selle, eux aussi en nombre fini.

De plus, on aimerait que ce comportement simple persiste pour les dynamiques voisines. Plus précisément, en 1937 A. Andronov et L. Pontriaguine aboutissent à la notion de stabilité structurelle ; on dit qu'un difféomorphisme  $f$  d'une variété  $M$  est  $C^1$ -structurellement stable si tout difféomorphisme  $g$  suffisamment  $C^1$ -proche de  $f$  est conjugué à  $f$  par un homéomorphisme  $h$  proche de l'identité (il en résulte alors que toute la dynamique qualitative de  $g$  est exactement celle de  $f$ , vue à travers un changement de coordonnées global (seulement continu) donné par  $h$ ).

C'est le cas par exemple pour les flots définis comme gradients d'une fonction de Morse d'une surface compacte, et dont les courbes invariantes des selles sont deux à deux disjointes.

Vers la fin des années 50, Smale envisageait une sorte de théorie de Morse pour les systèmes dynamiques. Cet espoir sembla confirmé par un résultat remarquable de Peixoto (1962 [Pe1]) : il montre qu'un ouvert dense (pour la topologie  $C^1$ ) de l'ensemble des champs de vecteurs est formé de champs de vecteurs structurellement stables, pour lesquels toutes les orbites, sauf un nombre fini d'entre elles, convergent

vers une orbite périodique attractrice ou un zéro attracteur quand le temps tend vers  $+\infty$  et vers une orbite répulsive quand le temps tend vers  $-\infty$ . Le lecteur trouvera dans [PM, chapitre 5] des énoncés précis et un exposé élémentaire et détaillé de la démonstration du théorème de Peixoto (signalons aussi le résultat préliminaire de 1959 [PePe]).

**0.1.3. Intersection homocline transverse, le fer à cheval de Smale et le difféomorphisme de Thom-Anosov.** — Espérer faire une théorie de Morse pour les systèmes dynamiques, c'était oublier un problème qu'avait rencontré Henri Poincaré dans son étude de l'évolution du système solaire.

Soit  $f: S \rightarrow S$  un difféomorphisme d'une surface compacte et  $p$  un point fixe hyperbolique selle de  $f$ . Un point  $q$  d'intersection transverse des variétés stable et instable de  $p$  est appelé un *point homocline transverse*. L'orbite (positive et négative) de  $q$  converge vers  $p$  et la variété instable de  $p$  coupe transversalement la variété stable de  $p$  en tout point de cette orbite. Tout segment borné  $I$  contenant  $p$  de la courbe instable de  $p$  est alors limite d'une suite segments  $I_n$  de cette même variété instable contenant  $f^n(q)$  (le «  $\lambda$ -lemma » (voir [PM]) formalise cette propriété). Si le segment  $I$  a été choisi contenant aussi un voisinage de  $q$ , les segments  $I_n$  finissent par recouper transversalement la variété stable de  $p$  en des points  $q_n$  proches de  $q$ , qui appartiennent à des orbites toutes distinctes.

Voici ce qu'en disait Poincaré (voir [Po, page 384]) en 1899 : « *Ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées ; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. (...) Cette remarque est encore de nature à nous faire comprendre toute la complication du problème des trois corps et combien les transcendentes qu'il faudrait imaginer pour le résoudre diffèrent de toutes celles que nous connaissons.* »

Vers 1935, G.D. Birkhoff prouve qu'un point homocline transverse est approché par une suite de points périodiques. De plus, l'existence d'un point homocline transverse persiste après toute perturbation de la dynamique assez petite dans la topologie  $C^1$  : le théorème de Peixoto ne se généralise pas de façon directe aux difféomorphismes des surfaces !

Pour modéliser ce phénomène S. Smale construit, au début des années 60, un difféomorphisme connu sous le nom de « *fer à cheval* ». Un difféomorphisme  $f$  d'une surface possède un fer à cheval s'il existe un carré  $R$  plongé dans la surface, tel que l'action de  $f$  sur ce carré correspond à la description que l'on peut trouver dans [Sh] : *Commençons par étirer verticalement le carré  $R$  pour le transformer en une allumette, en utilisant une application linéaire, puis courbons cette allumette, heureusement souple, en fer à cheval, pour la poser, toujours à cheval, sur l'emplacement de  $R$ .*

Le lecteur trouvera une présentation rigoureuse du fer à Cheval dans de nombreux ouvrages, citons [PM], [Sh], [GuMoNe] et bien sûr [Sm]. L'ensemble des points dont



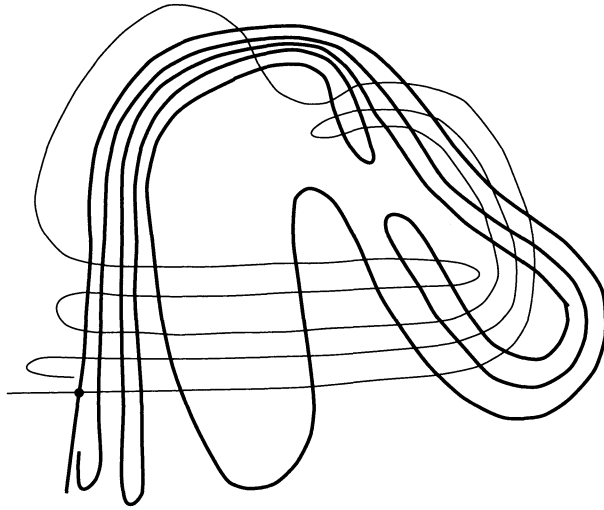


FIGURE 2. Le treillis, le tissu dessiné par les courbes invariantes.

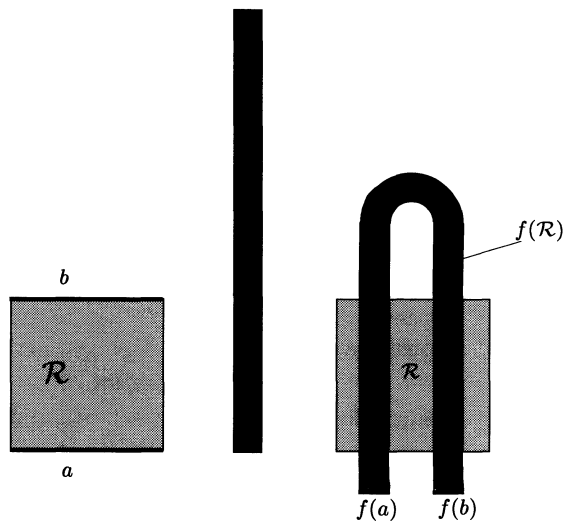


FIGURE 3. Le fer à Cheval de Smale

toute l'orbite reste dans le carré  $R$  est un ensemble de Cantor (compact métrisable totalement discontinu sans points isolés)  $\Lambda$ . La restriction du difféomorphisme à  $\Lambda$  admet une description combinatoire (décalage sur l'ensemble des suites  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  (voir par exemple [Sh])). L'ensemble des orbites périodiques hyperboliques est dense dans  $\Lambda$ ; de plus,  $\Lambda$  contient des orbites denses. De plus, cette dynamique

est  $C^1$ -structurellement stable : tout difféomorphisme  $g$  suffisamment  $C^1$  proche de  $f$  possède un fer à cheval et l'ensemble  $\Lambda_g$  des points dont l'orbite par  $g$  reste dans  $R$  est encore un Cantor, et la restriction de  $g$  à  $\Lambda_g$  est conjuguée à la restriction de  $f$  à  $\Lambda$ .

Enfin, l'existence de points homoclines transverses pour un difféomorphisme  $f$  implique l'existence d'un fer à cheval pour un itéré  $f^n$  de  $f$  (voir une exposition simple de ce résultat dans [PaTa, chapitre 2]).

Vers la même époque, D.V. Anosov prouvait la stabilité structurelle du flot géodésique sur une surface de courbure négative, en dégagant la propriété de  $U$ -système. La notion de  $U$ -système discret a permis à Anosov de répondre positivement à la question suivante posée par R.Thom en 1962 :

l'application linéaire  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  de matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  induit par passage au quotient un difféomorphisme (encore noté  $A$ ) du tore  $T^2$ . Les points périodiques de  $A$  sont denses dans  $T^2$  et sont hyperboliques. Ce difféomorphisme est-il structurellement stable ?

**0.1.4. La théorie hyperbolique de Smale.** — Durant les années 60-70 un groupe important de mathématiciens, centré autour de Smale, a cherché à caractériser les dynamiques structurellement stables. Comme la théorie de Smale est à la base de notre travail, nous rappelons au paragraphe 1.1 les définitions précises ainsi que les principaux résultats. En voici les grandes lignes, en quelques mots.

Les deux notions clés de la théorie de Smale sont *hyperbolicité* et transversalité. Un compact  $K$ , invariant par un difféomorphisme  $f$  est dit *hyperbolique*, s'il existe le long de  $K$  une décomposition du fibré tangent de la variété en somme directe de deux sous-fibrés,  $TM = E^s \oplus E^u$ , appelés fibrés stable et instable, si cette décomposition est invariante par la différentielle  $Tf$ , et si enfin  $Tf$  contracte uniformément les vecteurs de  $E^s$  et dilate uniformément les vecteurs de  $E^u$ . Si l'ensemble hyperbolique est égal à la variété toute entière, on dit que l'on a un système (difféomorphisme ou flot) d'Anosov. Cette seule propriété d'hyperbolicité permet de définir les variétés stables et instables locales des points de l'ensemble hyperbolique. On montre alors qu'un ensemble hyperbolique est  $C^1$ -structurellement stable (voir [Sh]) s'il possède de plus une *structure de produit local*.

L'idée est alors d'exiger que l'ensemble contenant toute la dynamique non-triviale soit hyperbolique, le problème étant de choisir cet ensemble. Après plusieurs tâtonnements, le choix s'est porté sur *l'ensemble  $\Omega(f)$  des points non-errants* (un point est dit errant s'il possède un voisinage dont les itérés sont deux-à-deux disjoints). Le  $C^1$ -closing lemma de Pugh (voir [Pu]) affirme que tout point non-errant peut être rendu périodique par une  $C^1$ -perturbation de la dynamique. Il permet de montrer alors que, pour un ensemble résiduel pour la  $C^1$ -topologie dans  $\text{Diff}^1(M)$ , l'ensemble  $\Omega(f)$  est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques de  $f$ . Cette propriété est donc

naturellement vérifiée par tout difféomorphisme structurellement-stable. Ceci rend naturelle la définition suivante : on dit qu'un difféomorphisme  $f$  vérifie l'axiome  $A$  si  $\Omega(f)$  est hyperbolique et si  $\Omega(f)$  est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques de  $f$ . Mettant le point final à de nombreux résultats partiels (voir par exemple Anosov [A1], Moser [Mo], Palis [Pa], Palis et Smale [PaSm]), Robbin (voir [Ro], 1971) puis Robinson (voir [R], 1976) montrent qu'un difféomorphisme vérifiant l'Axiome  $A$  est structurellement stable, si toute intersection entre une variété stable et une variété instable de points de  $\Omega(f)$  est transverse (cette seconde hypothèse est connue sous le nom de « transversalité forte »). En un raccourci pratique nous appellerons *difféomorphismes de Smale* les difféomorphismes vérifiant l'Axiome  $A$  et la transversalité forte. Un raccourci analogue a déjà été employé par Franks (voir [Fr1]) qui suppose de plus que les ensembles hyperboliques sont de dimension zéro.

Un résultat analogue est vrai pour les champs de vecteurs.

L'une des clefs de la preuve est le théorème de décomposition spectrale de Smale qui scinde l'ensemble des points non-errants  $\Omega(f)$  en ensembles hyperboliques transitifs (*i.e.* contenant une orbite dense) appelés *pièces basiques*. Une autre est l'ordre défini par Smale sur l'ensemble de ces pièces basiques : une pièce basique  $\Omega_1$  est supérieure à une pièce basique  $\Omega_2$  si la variété instable de  $\Omega_1$  coupe la variété stable de  $\Omega_2$ . Ceci permet de construire un graphe  $\Gamma$  orienté dont les points sont les pièces basiques. Deux points  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont joints par une arête du *graphe de Smale* si la pièce basique  $\Omega_1$  correspondant à  $\omega_1$  est supérieure à la pièce basique  $\Omega_2$  et si de plus il n'existe pas de pièce basique intermédiaire pour cet ordre (voir un exemple sur la figure 7).

La réciproque du théorème de stabilité, conjecturée pendant longtemps, n'a été démontrée qu'en 1988 par Mañé [Ma] dans le cas des difféomorphismes : tout difféomorphisme  $C^1$ -structurellement stable vérifie l'axiome  $A$  et la condition de transversalité forte. La preuve a nécessité un raffinement du « closing lemma » (le « closing lemma » ergodique de Mañé). Dans le cas des champs de vecteurs, cette réciproque a été prouvée en 1996 par Hayashi à l'aide d'une adaptation du « closing lemma » pour les variétés invariantes : le  $C^1$ -connecting lemma. Le problème reste par contre ouvert si l'on considère des topologies plus fines ( $C^r$ , pour  $r > 1$ ) : la principale difficulté est que l'on ne connaît pas d'équivalent ou de substitut au  $C^1$ -closing lemma de Pugh.

La théorie hyperbolique de Smale ne décrit pas « la plupart » des dynamiques : pendant que cette théorie s'élaborait, on découvrait des dynamiques instables qui ne pouvaient être stabilisées par de petites perturbations : citons par exemple le célèbre attracteur proposé par Lorenz en 1963 pour des champs de vecteurs en dimension 3 (voir [Lor] pour l'article initial, et [GuWi] et [ABS] pour un modèle géométrique), et l'exemple donné par Abraham et Smale en 1968 pour des difféomorphismes. Cependant, dans tous les exemples connus, c'est l'hyperbolicité d'une grosse partie de la dynamique qui est la clé de la persistance de ces dynamiques instables, la position des variétés invariantes des ensembles hyperboliques interdisant la transversalité. Dès lors,

la plus grande partie des dynamiciens se sont consacrés à l'étude de ces dynamiques instables, mais ceci nous écarte du propos de notre travail.

**0.1.5. Les difféomorphismes d'Anosov et pseudo-Anosov.** — La seule surface orientable admettant un difféomorphisme d'Anosov (nom actuel de  $U$ -systèmes discrets) est le tore  $T^2$ . De plus Franks a montré qu'ils sont tous topologiquement conjugués à des difféomorphismes linéaires du tore. Le tore est alors feuilleté par les courbes stables et les courbes instables. Ces deux feuilletages sont transverses et admettent tous deux des mesures transverses invariantes (par l'holonomie des feuilletages). L'action naturelle du difféomorphisme sur ces mesures consiste en les multiplier chacune par l'une des valeurs propres de l'application linéaire associée.

Il existe cependant sur les surfaces de genre plus grand une famille d'homéomorphismes ayant presque les mêmes propriétés : les *homéomorphismes pseudo-Anosov*. Ils admettent un nombre fini de points périodiques non hyperboliques et ce sont des difféomorphismes en dehors de ces points. Hors de ces points, les courbes stables et instables définissent encore deux feuilletages transverses munis de mesures transverses invariantes par holonomie. Les feuilles aboutissant aux points singuliers sont appelées séparatrices. Au voisinage des points singuliers chaque feuilletage a comme modèle une selle à au moins trois branches.

La théorie de Thurston (voir [FLP, Exposé 1, th 5]) montre qu'une classe d'isotopie d'homéomorphisme contient un pseudo-Anosov si et seulement si son action naturelle sur les classes d'homotopie libre de lacets de la surface ne possède aucune classe périodique. De plus, deux homéomorphismes pseudo-Anosov sont conjugués dès que leurs classes d'isotopie le sont. Une information combinatoire, l'action de la classe d'isotopie sur un système fini de générateur du groupe fondamental de la surface, caractérise donc la dynamique topologique d'un tel homéomorphisme (voir [FLP, Exposé 12]). Ceci ne fournit pourtant pas encore une classification constructive : en effet le groupe fondamental possède une infinité de présentations, et la description de l'action d'un automorphisme dépend du système de générateurs considéré. De plus, étant donné un automorphisme du groupe fondamental, il n'est pas évident de décider si son action sur les classes d'homotopie libre possède une orbite périodique.

Bestvina et Handel (voir [BeHa1] et [BeHa2]) et Los (voir [Lo1]) exhibent un algorithme fini qui permet de décider si un homéomorphisme de surface, dont on connaît l'action sur un système générateur du groupe fondamental de la surface, est homotope à un homéomorphisme pseudo-Anosov. Ils donnent même une construction de l'homéomorphisme pseudo-Anosov homotope à un homéomorphisme donné.

La classification serait donc complète si l'on avait un algorithme fini permettant de décider si deux homéomorphismes pseudo-Anosov, décrits chacun par son action sur un système de générateurs du groupe fondamental, sont conjugués. Après des résultats partiels de G. Hemion ([He]) L. Mosher ([Mos]) et J. Los ([Lo2]), J. Fehrenbach ([Fe]) annonce la classification complète.

Il est parfois nécessaire d'imposer à l'homéomorphisme des points fixes ou périodiques choisis à l'avance. Cela force à accepter des singularités de type épine pour les feuilletages invariants. Déjà [FLP] considère ces *pseudo-Anosov généralisés* qui sont aussi appelés *pseudo-Anosov à points marqués*.

En fait ces homéomorphismes pseudo-Anosov minimisent l'entropie dans leur classe d'homotopie (éventuellement avec points marqués). Handel donne un sens précis au fait que ces homéomorphismes réalisent la « dynamique minimale » dans leur classe d'homotopie (voir [Han]).

Enfin remarquons qu'à partir d'un difféomorphisme pseudo-Anosov, on peut obtenir un difféomorphisme de Smale en ouvrant les séparatrices des points singuliers (voir figure 0.1.5).

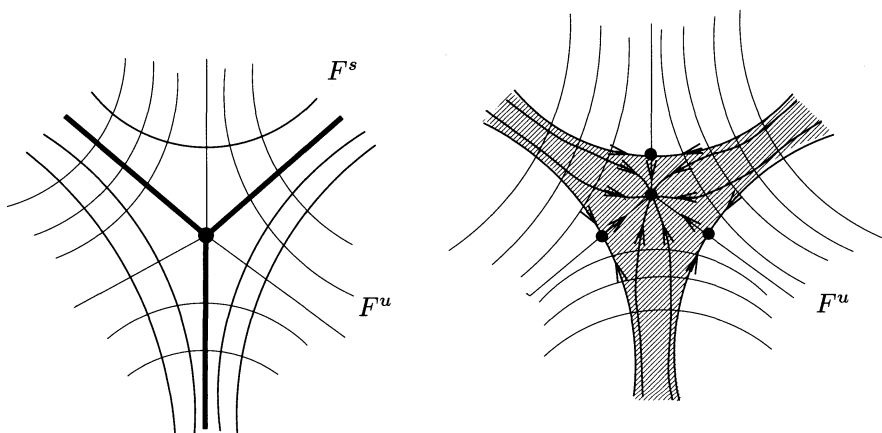


FIGURE 4. Ouverture des séparatrices.

## 0.2. Le problème de classification des dynamiques hyperboliques

Le difféomorphisme de Thom-Anosov et le fer à cheval de Smale sont des exemples de systèmes dynamiques apparemment compliqués, stables par  $C^1$ -petites perturbations et qui se décrivent à l'aide d'une combinatoire finie. Ceci donne l'espoir d'une classification possible des dynamiques qualitatives, c'est-à-dire que l'on aimerait associer à un difféomorphisme un nombre fini d'objets combinatoires qui caractérisent la dynamique topologique : deux difféomorphismes seraient topologiquement conjugués si et seulement si les objets combinatoires qui leur sont associés sont identiques. Bien sûr, il est déraisonnable d'espérer classifier tous les difféomorphismes d'une surface. Par contre les difféomorphismes de Smale étant structurellement stables, leurs classes d'équivalence topologique correspondent à un ensemble discret de difféomorphismes,

et sont donc des candidats naturels à une classification, et de nombreux travaux vont dans ce sens.

Le *problème de classification* se décompose en trois types de questions :

1. Peut-on associer une présentation combinatoire finie à un difféomorphisme de Smale, de sorte que, si deux difféomorphismes ont les mêmes présentations, ils sont topologiquement conjugués ? A ce stade, si les présentations sont différentes, nous ne pouvons pas comparer les difféomorphismes.
2. Existe-t-il un algorithme fini permettant de décider quand deux présentations différentes correspondent à deux difféomorphismes conjugués ?
3. Quelles présentations combinatoires correspondent à un difféomorphisme de Smale (réalisabilité) ?

Avant de présenter nos résultats, nous allons essayer de faire le point sur les connaissances actuelles. Dans les années 70, l'essentiel des efforts a porté sur la dynamique en restriction à un ensemble hyperbolique. A la même époque Peixoto [Pe2] obtenait le premier résultat global : la classification de champs de vecteurs Morse-Smale dont nous reparlerons plus loin. Les travaux de l'école russe (autour de Plykin et Grines) puis les nôtres suivent des démarches analogues.

**0.2.1. Classification de la dynamique sur un ensemble hyperbolique.** — On sait depuis Bowen (voir [Bo2] ou [Fr2, Appendice A]) que la dynamique topologique en restriction à un *ensemble basique* (i.e. ensemble hyperbolique avec structure de produit local) de dimension topologique zéro est conjuguée à une dynamique symbolique appelée sous-shift de type fini, et qui est associée à une matrice carrée dont les coefficients sont égaux à 0 ou 1. Ceci résout la question (1) du **problème de classification** dans ce cadre. La clef de cette conjugaison est l'existence de *partitions de Markov* par rectangles  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , deux-à-deux disjoints : on associe à un point  $x$  son itinéraire  $i(x) \in \{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}}$ , qui est la suite de ses passages dans les différents rectangles de la partition. La *matrice d'incidence* de la partition de Markov décrit l'ensemble des itinéraires qui correspondent effectivement à une orbite de  $f$ . L'itinéraire du point  $f(x)$  est bien sûr obtenu en décalant de 1 la numérotation de l'itinéraire de  $x$ . La bijection qui à un point associe son itinéraire est donc une conjugaison entre  $f$  restreint à l'ensemble basique et le sous-shift de type fini. Si l'ensemble basique n'est pas totalement discontinu, c'est-à-dire est de dimension topologique non nulle, plusieurs itinéraires peuvent correspondre au même point de l'ensemble basique, et l'on obtient seulement une semi-conjugaison. Si deux ensembles basiques  $K$  et  $\tilde{K}$  de dimension zéro de deux difféomorphismes  $f$  et  $\tilde{f}$  possèdent des partitions de Markov par rectangles disjoints qui ont même matrice d'incidence, alors les restrictions de  $f$  et  $\tilde{f}$  aux ensembles basiques sont conjuguées. Mais  $K$  et  $\tilde{K}$  possèdent une infinité de partitions de Markov ayant différentes matrices d'incidences. Pour obtenir une classification effective, (question (2) du **problème de classification**) il faudrait savoir



décider à quelle condition les sous-shifts de type fini  $S(A)$  et  $S(B)$  associés à deux matrices  $A$  et  $B$  sont conjugués. Dans [Wi2] (voir également [Fr2, Appendice A]), Williams caractérise algébriquement les matrices qui correspondent à des sous-shifts conjugués : il montre que les sous-shifts  $S(A)$  et  $S(B)$  sont conjugués si et seulement s'il existe deux suites finies de matrices rectangulaires  $R_1, S_1, \dots, R_n, S_n$  à coefficients entiers positifs telles que  $A = R_1 S_1$ , et que pour tout  $i$  on a  $S_i R_i = R_{i+1} S_{i+1}$  et  $B = S_n R_n$  (on dit que  $A$  est *fortement shift équivalente* à  $B$ ). À notre connaissance, l'existence d'un algorithme fini permettant de décider si deux matrices sont fortement shift équivalentes est encore un problème ouvert. Un tel algorithme achèverait la classification topologique des difféomorphismes en restriction à un ensemble basique de dimension 0.

Enfin il paraît naturel de se demander si tout sous-shift de type fini correspond à une pièce basique (de dimension 0) d'un difféomorphisme de Smale (question (3) du **problème de classification**) : Williams (dans [Wi2, théorème E]) montre que tout sous-shift de type fini est réalisable par un ensemble basique d'un difféomorphisme de Smale de la sphère  $S^3$ . Par contre, Blanchard et Franks (voir [BlFr]) exhibent une obstruction (non-vide) à ce qu'un sous-shift de type fini soit réalisable comme ensemble basique d'un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte. (voir également Fried [Fri] pour une caractérisation des fonctions zeta des pièces basiques).

Pour les ensembles basiques de dimension supérieure, signalons les travaux de Williams [Wi3], Plykin [P11], [P12], [P13] et Ruas [Ru] sur les attracteurs hyperboliques de dimension 1.

Enfin, pour le problème de classification de la dynamique topologique des champs de vecteurs sur un ensemble basique, voir [PaSu] pour les ensembles basiques de dimension 1, et voir [Ch] pour les attracteurs hyperboliques sur des variétés de dimension 3.

**0.2.2. Le problème de classification de la dynamique globale.** — Si la classification des dynamiques en restriction à un ensemble hyperbolique de dimension 0 est à peu près achevée, elle ne suffit pas à décrire la dynamique sur toute la variété : en général l'homéomorphisme de conjugaison de deux ensembles hyperboliques ne peut pas s'étendre à un petit voisinage de ces ensembles hyperboliques. Nous pouvons construire deux difféomorphismes du disque intuitivement différents (représentés par la figure 5), qui sont conjugués sur leurs ensembles non-errants et dont il n'est pas évident de montrer qu'ils ne sont pas globalement conjugués.

Le premier travail de classification de dynamiques des surfaces est la description combinatoire faite par M. Peixoto [Pe2] des champs de vecteurs Morse-Smale (c'est-à-dire dont l'ensemble des points non-errants est réduit à un ensemble fini de zéros et d'orbites périodiques hyperboliques dont les variétés invariantes se coupent transversalement). Dans le cas des champs quasi-gradient (c'est-à-dire sans orbites périodiques), la classification peut être décrite de la façon suivante : associons à chaque selle un

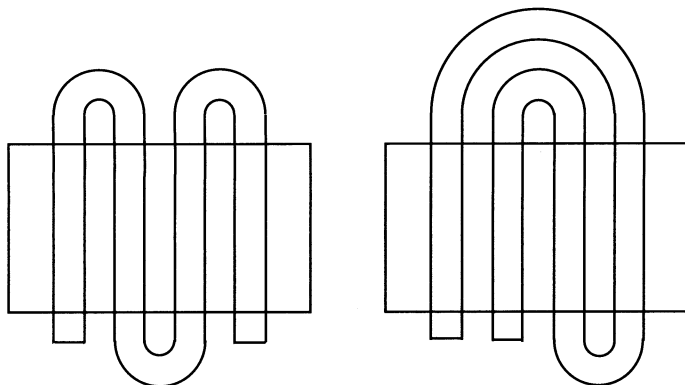


FIGURE 5. Deux difféomorphismes dont les ensembles non-errants sont conjugués

voisinage ouvert invariant « en étoile » (voir la figure 6). Une combinatoire décrivant comment recoller ces étoiles le long de leurs bords permet de reconstituer le champ à conjugaison près.

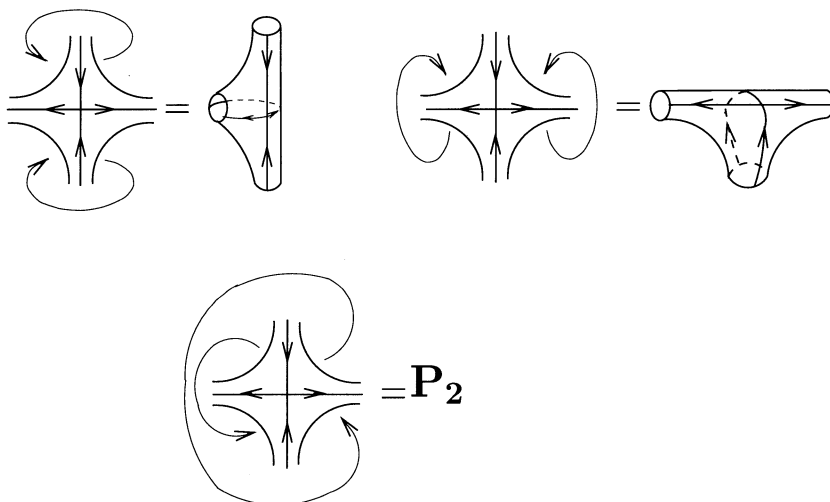


FIGURE 6. Les trois dynamiques obtenues à partir d'une étoile.

Il était alors naturel d'étudier les dynamiques discrètes qui ressemblent le plus au temps 1 de champs Morse-Smale des surfaces : les difféomorphismes *Morse-Smale* des surfaces c'est-à-dire les difféomorphismes de Smale dont l'ensemble non-errant est réduit à un nombre fini d'orbites périodiques. Cependant Birkhoff déjà ([Bi]) remarquait que la manière dont se coupent les courbes invariantes d'un difféomorphisme



contenait des invariants de conjugaison topologique. C'est pourquoi Besdenezhnykh et Grines [BezGr1] ont d'abord supposé que les courbes invariantes ne se coupaient pas (difféomorphismes quasi-gradients). L'étape suivante consiste à tenter d'introduire des orbites *hétéroclines*, intersection de variétés invariantes d'orbites périodiques différentes.

Le graphe de Smale (défini au paragraphe 0.1.4) est un invariant topologique du difféomorphisme, mais il est loin d'être suffisant pour caractériser le type topologique. On dit que deux orbites sont de *comportement*  $k$  si le plus long chemin orienté les joignant dans le graphe de Smale est formé de  $k$  arêtes. Palis [Pa] remarque que si deux orbites sont de comportement 1 (*i.e.* sont jointes par une arête), leurs variétés invariantes se coupent en un nombre fini d'orbites. Par contre l'intersection des variétés invariantes d'orbites périodiques de comportement 2 contient déjà une infinité d'orbites hétéroclines. Le dessin des courbes invariantes peut être alors très complexe.

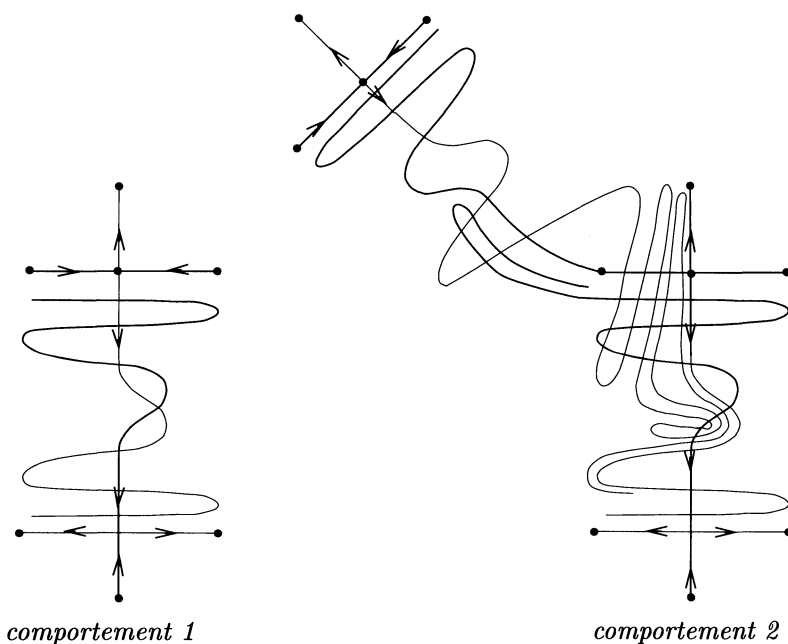


FIGURE 7. Selles en comportement 1 et 2

Bezdezhnykh et Grines [BezGr2] ont ensuite supposé que les courbes invariantes une fois orientées se coupent avec une orientation constante (ce qui implique qu'elles sont de comportement au plus 1), avant que Grines propose en 1993 (voir [Gr3]) une classification des difféomorphismes Morse-Smale dont le graphe de Smale a au plus quatre étages : sources, au plus deux étages de selles et puits. Indépendamment R.Langevin [La] introduisait une famille d'invariants topologiques associée à la position

relative des courbes invariantes d'une paire de selles de comportement un. À notre connaissance, la classification de selles en comportement deux n'était pas faite jusqu'à ce jour.

En ce qui concerne les difféomorphismes de Smale non Morse-Smale, l'école russe, autour de Plykin et Grines, a obtenu de nombreux résultats partiels en faisant des hypothèses sur le dessin des courbes invariantes (voir [ArGr1] et [ArGr2] pour une présentation complète de ces résultats). Voici un résultat typique de cette ligne de recherche. En 1988 Grines et Kalay [GrKa1] [GrKa2] caractérisent les classes de conjugaison topologiques de difféomorphismes de Smale au voisinage de pièces basiques *sans points conjugués*, c'est-à-dire telles qu'il n'existe pas de disques plongés dans la surface de bord formé par un segment de courbe stable et un segment de courbe instable.

Dans notre travail, nous ne faisons pas d'hypothèse restrictive sur le dessin des courbes invariantes. Cependant le chapitre 8 est consacré à ces difféomorphismes « sans points conjugués » que nous appelons « *sans impasse* ».

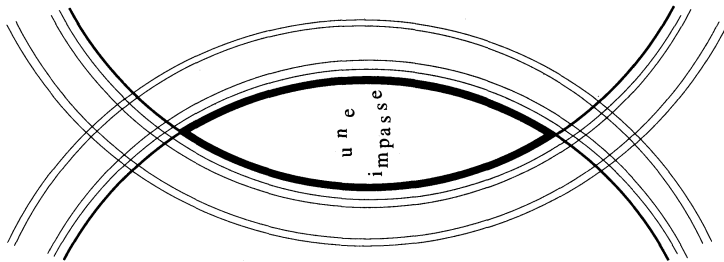


FIGURE 8. Une impasse

Le théorème 8.3.1 montre que la classification de ces difféomorphismes sans impasse se ramène à celle des difféomorphismes pseudo-Anosov généralisés.

### 0.3. Classification des difféomorphismes de Smale des surfaces : présentation de nos principaux résultats

Nous allons suivre une démarche analogue à celle de Peixoto pour montrer que les difféomorphismes de Smale peuvent également se reconstruire à partir de voisinages invariants d'ensembles hyperboliques « de type selle » par recollement le long de leur bord. Ici, nous devons remplacer les selles par les *ensembles hyperboliques saturés* maximaux : un compact hyperbolique invariant sera dit *saturé* s'il contient tout point d'intersection de ses variétés invariantes, stables et instables. Nous verrons que les ensembles hyperboliques saturés maximaux correspondent aux composantes connexes du diagramme de Smale privé de ses sources et de ses puits. Nous montrerons

ensuite l'existence d'un voisinage ouvert invariant de topologie finie (c'est-à-dire homéomorphe à une surface compacte à bord, privée d'un nombre fini de points) d'un ensemble hyperbolique saturé, que nous appellerons son *domaine* (Aranson et Grines parlent de support (carrier en anglais) quand ils étudient les difféomorphismes de Smale sans points conjugués [ArGr2]).

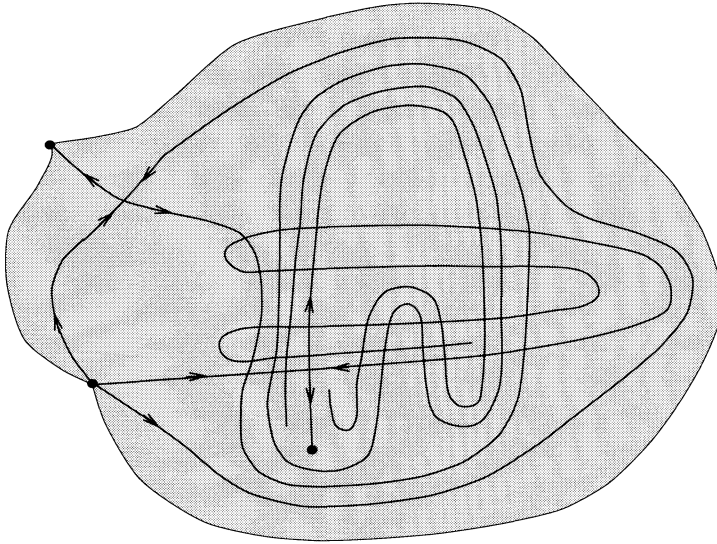


FIGURE 9. Un domaine

Plus précisément :

**Proposition (Le domaine : versalité et unicité).** — Soit  $f$  un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte, et  $K$  un ensemble hyperbolique saturé de  $f$ . Alors  $K$  possède un voisinage  $\Delta(K)$ , invariant par  $f$ , de topologie finie, et tel que, pour tout voisinage invariant  $U$  de  $K$  de topologie finie, il existe un plongement de  $\Delta(K)$  dans  $U$  commutant avec  $f$  et coïncidant avec l'identité sur l'union de  $K$  et de ses variétés invariantes.

De plus  $(\Delta(K), f)$  est unique à conjugaison près, si l'on impose au voisinage d'être « fermé modulo  $f$  » (voir la définition 3.2.4).

(Cette proposition correspond aux propositions 3.2.2 et 3.2.5).

Les domaines seront aussi maniables que les voisinages en étoile de la classification de Peixoto : nous pourrons reconstituer la variété et le difféomorphisme (à conjugaison topologique près) en recollant les domaines le long de leur bord (voir les propositions 3.4.3 et 3.4.2), le recollement étant décrit par une combinatoire finie.

Les deux difféomorphismes de la figure 5 sont conjugués en restriction à leur ensemble non-errant, par contre le dessin des courbes invariantes interdit à cette conjugaison de s'étendre globalement. Afin de comprendre les courbes invariantes de  $f$ , un outil essentiel est le théorème de Newhouse et Palis ([NePa]) qui implique que leur tracé est organisé par un nombre fini de courbes invariantes de points périodiques. Ce sont les contours du dessin, courbes sur lesquelles les autres courbes invariantes ne s'accumulent que d'un côté : nous les appellerons les variétés stables ou instables *bords*.

Le dessin des variétés invariantes est particulièrement simple si l'ensemble hyperbolique est un attracteur. On en déduira que si un difféomorphisme  $f$  possède un attracteur hyperbolique dont le bassin d'attraction rencontre la variété instable d'une pièce basique non-réduite à une orbite périodique, alors  $f$  n'est pas de Smale, et appartient à l'intérieur pour la topologie  $C^1$ , de l'ensemble des difféomorphismes structurellement instables (voir la proposition 2.3.3 et le théorème 2.3.4). Ceci nous permettra de nous concentrer sur les difféomorphismes de Smale dont les ensembles hyperboliques sont de dimension 0 (*i.e.* ceux qui ne possèdent ni attracteurs ni répulseurs non-périodiques).

Pour analyser complètement la dynamique restreinte à un domaine, il nous faudra définir le *type géométrique* d'une partition de Markov : on complète la donnée combinatoire usuelle des rectangles  $R_i$  d'une partition de Markov de façon à décrire la position relative des images  $f(R_j)$  par rapport aux  $R_i$ . Notre résultat principal résout la question (1) du **problème de classification** :

***Théorème (Présentation du difféomorphisme sur un domaine)***

*Soient  $K$  et  $K'$  deux compacts hyperboliques saturés de deux difféomorphismes de Smale  $f$  et  $f'$  sur deux surfaces compactes  $S$  et  $S'$ . Supposons que  $K$  et  $K'$  admettent des partitions de Markov (par rectangles disjoints)  $M$  et  $M'$  de même type géométrique. Alors il existe un homéomorphisme du domaine de  $K$  sur le domaine de  $K'$  conjuguant les restrictions respectives de  $f$  et  $f'$  à ces domaines.*

(Ce sera, dans le texte, le théorème 5.2.2).

Ce théorème permet de donner une classification (hélas pas encore effective) des difféomorphismes de Smale des surfaces. Les types géométriques de partitions de Markov décrivant une dynamique donnée, ne sont pas uniques, et sont en nombre infini. Cependant, en considérant l'ensemble (fini) des types géométriques de partitions de Markov ayant un nombre minimal de rectangles, on obtient un invariant presque complet des classes de conjugaison de difféomorphismes de Smale. Nous complétons cet invariant en donnant une règle de recollement des composantes du bord des domaines. Cette classification a le défaut de ne pas être constructible.

Une autre conséquence du théorème 0.3 est que la dynamique d'un difféomorphisme de Smale sur le domaine d'un ensemble saturé est presque complètement déterminée par le dessin de ses courbes invariantes.

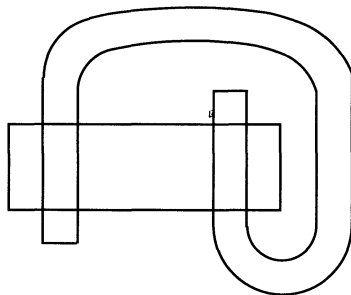


FIGURE 10. Cet ensemble hyperbolique n'est pas saturé

**Théorème (Dessin et dynamique).** — Soient  $f$  et  $g$  deux difféomorphismes de Smale de surfaces compactes, et soient  $K$  et  $L$  des ensembles hyperboliques saturés de  $f$  et  $g$ , de domaines connexes et sans double-bord. Supposons qu'il existe un homéomorphisme de l'union des variétés invariantes de  $K$  sur l'union de celles de  $L$  tel que l'image des variétés stables et instables d'un point de  $K$  soient les variétés respectivement stable et instable du point image.

Alors, il existe deux entiers  $p$  et  $q$  strictement positifs tels que les restrictions de  $f^p$  et  $g^q$  aux domaines  $\Delta(K)$  et  $\Delta(L)$  soient conjuguées.

Voir le théorème 6.0.6 (et la proposition 2.1.1 pour la notion de double-bord).

Pour déduire ce théorème du théorème 0.3, on vérifie que l'homéomorphisme  $h$  de l'union des variétés invariantes de  $K$  sur l'union de celles de  $L$  induit une conjugaison des restrictions à  $K$  et  $L$  de  $f^p$  et  $g^q$ . On montre alors que l'image par  $h$  du bord d'une partition de Markov pour  $(K, f^p)$  est le bord d'une partition de Markov pour  $(L, g^q)$  de même type géométrique.

Les techniques de démonstration du théorème 0.3 allient des idées venant des démonstrations des théorèmes de stabilité d'Anosov, Palis, Palis et Smale (existence de feuilletages invariants), et une analyse fine du dessin des variétés invariantes (hors des rectangles d'une partition de Markov) qui prolonge celle déjà faite par Langevin pour les difféomorphismes Morse-Smale ([La]).

Nous donnons aussi une réponse partielle (que nous espérons en fait complète) à la question (3) (réalisabilité) du **problème de classification**. Nous remarquons que certains types géométriques ne peuvent être réalisés comme partition de Markov d'un ensemble saturé d'un difféomorphisme de Smale : l'exemple le plus simple est donné par la figure 10 (voir le corollaire 2.4.4). Remarquons que la matrice d'incidence de la partition de Markov de cet exemple est aussi celle associée au fer à cheval ; ce phénomène est donc différent de celui étudié par Blanchard et Franks mentionné plus haut.

Nous dirons qu'un type géométrique de partition de Markov est réalisable s'il est associé à un ensemble hyperbolique saturé. Le type géométrique permet de définir de manière combinatoire l'union des  $n$  premiers itérés des rectangles de la partition de Markov. C'est une surface à bord, que l'on notera  $\mathcal{R}_n$ , dont le genre  $g(n)$  croît avec  $n$ . Si le type géométrique est réalisable, le genre  $g(n)$  tend vers une limite finie. On appellera cette limite le *genre du type géométrique*. Le chapitre 7 donne une condition nécessaire et suffisante, qui se lit sur la surface  $\mathcal{R}_{6N}$  où  $N$  est le nombre de rectangles de la partition de Markov, pour qu'un type géométrique (sans double-bord) soit de genre fini (théorème 7.4.8 (Le genre d'un type)). Le genre du type géométrique est alors égal à  $g(6N)$ .

En particulier, si la partition de Markov est formée d'un seul rectangle, nous montrons que le genre est nul ou infini.

Dans sa thèse ([Je, chapitre 5]) E. Jeandenans montre que tout type géométrique de genre fini est réalisable par un homéomorphisme. Pour que la réponse à la question (3) soit complète, il resterait à construire une réalisation différentiable.

Nous conjecturons que le procédé suivant permet d'obtenir une classification constructible (et donc résoudre complètement la question (2) du **problème de classification**).

Pour chaque composante connexe du complémentaire des puits et des sources dans le graphe de Smale de  $f$ , choisissons une selle  $s_1$ , dont la pièce basique est minimale pour l'ordre de Smale, et dont la courbe stable est bord (ces selles sont en nombre fini). Choisissons un intervalle  $I_0$  compact sur cette courbe, contenant la selle dans son intérieur. Considérons maintenant toutes les selles, dont la courbe instable est bord, des pièces basiques supérieures à celle de  $s_1$ . Parcourons à partir des selles, leurs séparatrices instables. Si une séparatrice rencontre  $I_0$ , on s'arrête au premier point d'intersection avec  $I_0$ . On obtient ainsi une famille finie  $G_1$  de segments instables qui dépend de  $I_0$ . Remplaçons  $I_0$  par le plus petit segment compact  $I_1$  qui contient tous les points d'intersection des segments de  $G_1$  avec  $I_0$ . Les extrémités de  $I_1$  sont alors des *points d'intersection primitifs* (ou de rang 1) au sens de Birkhoff ([Bi]). On en déduit (voir le chapitre 6) que, à itération par  $f$  près, il n'y a qu'un nombre fini de couples  $(I_1, G_1)$ .

Notons  $G'_2$  la famille de segments stables obtenus en parcourant depuis l'orbite périodique et jusqu'à  $G_1$ , les séparatrices stables bord (à l'exception de celles de  $s_1$ ) qui rencontrent  $G_1$ . Posons  $G_2 = G'_2 \cup \{I_1\}$ . On choisit de même une famille  $G_3$  prolongeant  $G_1$  de segments instables. Ce procédé s'arrête quand on a obtenu un segment sur chaque séparatrice bord (non-libre) d'une selle d'une pièce basique de la composante connexe du graphe de Smale privé des sources et des puits que nous avons considérée. Notons  $U$  et  $S$  les familles de segments respectivement instables et stables obtenus aux deux dernières étapes de cette construction. À itération par  $f$  près, il n'y a qu'un nombre fini de couples  $(U, S)$ . Le chapitre 4 fournit un procédé

explicite de construction d'une partition de Markov par rectangles disjoints à partir d'un couple  $(U, S)$ . En remarquant que le type géométrique d'une partition de Markov est le même que celui de tous ses itérés par  $f$ , on obtient ainsi un nombre fini de types géométriques pour chacun des ensembles hyperboliques maximaux de  $f$ .

Nous pouvons à présent énoncer la conjecture qui répond à la question (2) du **problème de classification** :

***Conjecture.** — Etant donné un type géométrique de partition de Markov d'un ensemble hyperbolique saturé, il existe un algorithme fini permettant d'obtenir tous les types géométriques donnés par la construction ci-dessus.*

Le chapitre 1 rappelle d'abord les définitions classiques et les principaux résultats de la théorie hyperbolique de Smale, puis définit la notion d'ensemble hyperbolique saturé, caractérise ces ensembles à l'aide du graphe de Smale. Le chapitre 2 structure le dessin des courbes invariantes d'un difféomorphisme de Smale d'une surface. Cela nous permettra au chapitre 3 de construire un voisinage invariant (le domaine) d'un ensemble hyperbolique saturé en bouchant de manière canonique les trous dans le dessin des courbes invariantes.

Le chapitre 4 fournit un procédé explicite de construction de partition de Markov par rectangles disjoints, pour un ensemble hyperbolique saturé. Le chapitre 5 ajoute à la matrice d'incidence d'une partition de Markov l'information géométrique permettant de caractériser la dynamique topologique sur le domaine (c'est le théorème principal de ce travail (Présentation du difféomorphisme sur un domaine)).

Le chapitre 6 revient sur le lien entre la dynamique et le dessin des variétés invariantes. Le chapitre 7 est consacré au problème de réalisabilité d'une partition de Markov géométrisée (question (3) du problème de classification). Le chapitre 8 fait le lien entre les difféomorphismes de Smale sans impasses (ou sans points conjugués) et les homéomorphismes pseudo-Anosov.

A. Cascon et S. Newhouse ont déclenché ce travail lors d'une mémorable séance de nuit avec R. Langevin à Trieste en 1987. Les auteurs remercient aussi T. Barbot, F. Béguin, P. Foulon, D. Fried, J.M. Gambaudo, E. Ghys, J. Los, J. Palis, L. Paris, M. Peixoto, D. Sullivan et G. Vago pour de fructueuses conversations et le referee pour sa lecture scrupuleuse de la première version de ce texte, et J. Troalen pour avoir réalisé sur l'ordinateur nos figures à la main.

# CHAPITRE 1

## PIÈCES BASIQUES ET ENSEMBLES SATURÉS

Les deux premiers paragraphes de cette partie font un rapide résumé (sans démonstration) de la théorie de Smale des dynamiques hyperboliques. Le premier paragraphe rappelle les notions d'hyperbolicité, de variétés invariantes, et le second est consacré à la « théorie spectrale », qui cloisonne la dynamique d'un difféomorphisme de Smale à l'aide de *filtrations* et met en évidence des ensembles hyperboliques particuliers : les *pièces basiques*, qui sont ordonnées par l'ordre de Smale.

Nous définirons ensuite les *ensembles saturés* qui généralisent la notion de pièce basique. Ces ensembles saturés et leurs variétés invariantes seront l'objet principal de notre étude. Enfin, nous construirons un voisinage, invariant par  $f$ , d'un ensemble saturé  $K$  d'un difféomorphisme  $f$  de Smale d'une surface compacte. Ce voisinage sera très régulier mais aura comme seul défaut de ne pas être unique : il nous servira comme point de départ pour construire le domaine de  $K$  dans les chapitres suivants.

### 1.1. Rappels de définitions et de propriétés classiques des dynamiques « hyperboliques »

Les rappels de cette section sont très brefs. Le lecteur souhaitant trouvera des informations plus complètes par exemple dans [PM], [GuMoNe], [Sm].

#### 1.1.1. Premières définitions

**Définition 1.1.1.** — Soit  $f$  un homéomorphisme d'une variété  $M$ . On dit qu'un point  $x \in M$  est errant s'il possède un voisinage dans  $M$  dont tous les itérés par  $f$  sont disjoints ; sinon on dit que  $x$  est non-errant. Classiquement, on note  $\Omega(f)$  l'ensemble des points non-errants de  $f$ .

**Définition 1.1.2.** — Soit  $f$  un homéomorphisme d'un compact  $X$ . Il est dit

– transitif s'il possède une orbite dense



- topologiquement mélangeant si pour toute paire d'ouverts  $U$  et  $V$  de  $X$ , pour tout entier  $n$  assez grand,  $f^n(U) \cap V$  est non vide.

**Définition 1.1.3.** — Soit  $f$  un difféomorphisme d'une variété  $M$ . On dit qu'un ensemble  $K \subset M$  est hyperbolique pour  $f$  s'il vérifie les propriétés suivantes :

1.  $K$  est un compact invariant par  $f$  (c'est-à-dire  $f(K) = K$ ).
2. Il existe une décomposition de la restriction à  $K$  du fibré tangent à  $M$  en somme directe de deux sous-fibrés vectoriels continus et invariants par la différentielle  $Df$  de  $f$  :

$$TM|_K = E^s \oplus E^u$$

3. Il existe une métrique riemannienne  $\|\cdot\|$  sur  $M$ , et il existe  $\lambda > 1$ , tels que  $Df$  (resp.  $D(f^{-1})$ ), en restriction à  $E^u$  (resp.  $E^s$ ), dilate les vecteurs d'un facteur supérieur ou égal à  $\lambda$ ; plus précisément on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in K, \forall v \in E_x^u, \quad \|Df(v)\| &\geq \lambda \cdot \|v\| \\ \forall x \in K, \forall w \in E_x^s, \quad \|Df^{-1}(w)\| &\geq \lambda \cdot \|w\| \end{aligned}$$

**Définition 1.1.4.** — Soit  $f$  un difféomorphisme d'une variété  $M$ , et soit  $K$  un ensemble hyperbolique. Soit  $x$  un point de  $K$ .

On appelle variété stable de  $x$ , notée  $W^s(x, f)$ , l'ensemble des points  $y \in M$  tels que l'on ait :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$$

(où  $d$  est la distance sur  $M$  induite par la métrique riemannienne).

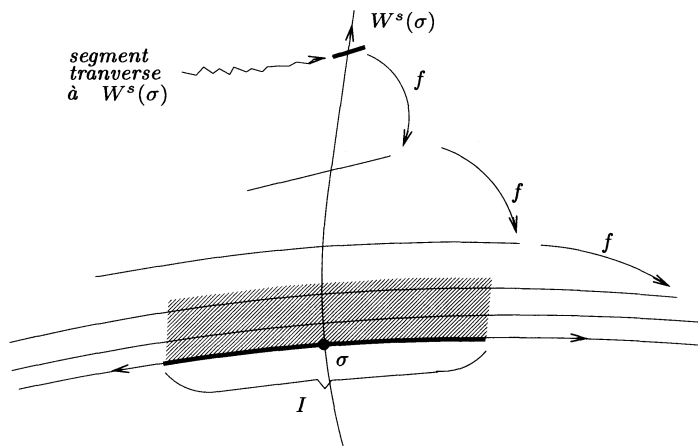
Soit  $\varepsilon > 0$ . On appelle variété stable locale,  $W_\varepsilon^s(x, f)$ , l'ensemble des points  $z \in M$  tels que, pour tout  $n \geq 0$ , la distance  $d(f^n(x), f^n(z))$  soit inférieure ou égale à  $\varepsilon$ .

On définit les variétés instable et instable locale du point  $x$  pour  $f$ , comme étant les variétés stable et stable locale de  $x$  pour  $f^{-1}$ , on les note  $W^u(x, f)$  et  $W_\varepsilon^u(x, f)$ .

Rappelons que, pour tout ensemble hyperbolique  $K$  de  $f$ , il existe un réel  $\varepsilon > 0$ , tel que pour tout point  $x$  de  $K$ , sa variété stable locale  $W_\varepsilon^s(x)$  soit un disque plongé, inclus dans  $W^s(x, f)$ , de dimension égale à celle de l'espace stable  $E_x^s$  et tangent à cet espace, aussi différentiable que  $f$  et variant continûment avec le point  $x$ . Comme nous l'avons fait dans l'introduction nous renvoyons à [Sh] pour plus de détails, et en particulier pour la démonstration du théorème d'existence (qui nécessite l'utilisation d'un théorème de point fixe).

Les variétés invariantes ont d'abord été définies seulement lorsque  $x$  est un point fixe ou périodique. J. Palis [Pa] démontre le ( $\lambda$ -lemma), que nous résumons (en dimension 2) en disant que l'on peut tronquer les itérés successifs d'un segment transverse à la courbe stable d'une selle de manière qu'ils convergent pour la topologie  $C^1$  vers un segment compact  $I$  arbitraire de la courbe stable de la selle.

Ce lemme a permis de démontrer les premiers résultats de stabilité structurelle (voir ci-dessous).

FIGURE 1. Le  $\lambda$ -lemma

**Définition 1.1.5.** — On dit qu'un ensemble hyperbolique  $K$  d'un difféomorphisme  $f$  possède une structure de produit local s'il existe deux réels  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$  tels que, pour tout couple  $(x, y)$  de point de  $K$  vérifiant  $d(x, y) < \delta$ , la variété stable locale  $W_\varepsilon^s(x)$  coupe en un et un seul point, et transversalement, la variété instable locale  $W_\varepsilon^u(y)$ ; de plus ce point d'intersection appartient à  $K$ .

Définissons la variété stable  $W^s(K)$  comme l'ensemble des points dont l' $\omega$ -limite est incluse dans  $K$ . Le « shadowing lemma » (voir l'exposé de Newhouse dans [GuMoNe]) permet alors de démontrer que :

$$W^s(K) = \bigcup_{x \in K} W^s(x).$$

**Définition 1.1.6.** — On dit qu'un difféomorphisme  $f$  d'une variété compacte vérifie l'Axiome A si l'ensemble  $\Omega(f)$  des points non errants de  $f$  est hyperbolique, et si  $\Omega(f)$  est l'adhérence de l'ensemble des points périodique de  $f$ .

On dit de plus que  $f$  vérifie la condition de transversalité forte si, pour tous  $x, y \in \Omega(f)$ , la variété stable  $W^s(x)$  est transverse (en tout point) à la variété instable  $W^u(y)$ .

**1.1.2. Stabilité structurelle.** — Pour classifier une famille de difféomorphismes il faut d'abord définir une relation d'équivalence exprimant le fait que leurs dynamiques sont « les mêmes ».

**Définition 1.1.7.** — Deux difféomorphismes  $f$  et  $g$  d'une variété  $M$  sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme  $h$  de  $M$  tel que

$$h \circ f = g \circ h$$

Cette définition revient à dire qu'au changement de coordonnées donné par  $h$  près, les deux difféomorphismes sont les mêmes.

Les difféomorphismes dont on ne peut changer la classe de conjugaison par une petite perturbation sont dits *structurellement stables*; plus précisément :

**Définition 1.1.8.** — *Un difféomorphisme  $f$  est dit  $C^1$ -structurellement stable s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $f$  pour la topologie  $C^1$  tel que tout  $g \in \mathcal{V}$  est topologiquement conjugué à  $f$*

Il pourrait paraître plus naturel d'exiger dans la définition d'une conjugaison que  $h$  soit un difféomorphisme, mais les classes d'équivalence pour cette relation plus fine sont trop petites pour qu'il existe des difféomorphismes  $C^1$ -stables.

Le théorème principal de la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques caractérise les dynamique  $C^1$ -structurellement stables :

**Théorème 1.1.9** ([R][Ro][Ma]). — *Soit  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  d'une variété compacte  $M$ , alors  $f$  est  $C^1$ -structurellement-stable si et seulement si  $f$  vérifie l'Axiome A et la condition de transversalité forte.*

**Définition 1.1.10.** — *On appellera difféomorphismes de Smale les difféomorphismes vérifiant l'Axiome A et la condition de transversalité forte.*

La stabilité structurelle garantit que l'ensemble des classes de conjugaison de difféomorphismes de Smale est discret, ce qui est un préalable à l'existence d'une classification combinatoire : le théorème 1.1.9 est donc à la base de notre travail.

**1.1.3. Pièces basiques .** — Dans la démonstration de la stabilité structurelle des difféomorphismes vérifiant l'Axiome A et la condition de transversalité forte, l'un des points-clefs est la *décomposition spectrale* de l'ensemble des points non-errants, ou encore sa décomposition en *pièces basiques* séparées les unes des autres par une *filtration*. Rappelons en quelques mots cette décomposition spectrale.

**Définition 1.1.11.** — *Soit  $f$  un difféomorphisme vérifiant l'Axiome A. On appelle pièce basique de  $f$  tout compact  $\Lambda \subset \Omega(f)$ , invariant par  $f$ , transitif, et maximal (pour l'inclusion) pour ces deux propriétés.*

Rappelons qu'un compact invariant est dit *transitif* s'il possède une orbite dense. De l'existence d'orbites denses, on sait déduire que la variété stable ou instable de tout point périodique d'une pièce basique est dense dans la variété stable ou instable de cette pièce basique.

Attention de ne pas confondre la notion (pourtant classique) de pièce basique avec celle, plus courante, d'*ensemble basique* (*basic set*) (voir l'article de Newhouse dans [GuMoNe]) qui désigne un compact invariant hyperbolique transitif possédant un voisinage  $U$  dont il est l'*ensemble invariant maximal*, c'est-à-dire  $\bigcap_{-\infty}^{+\infty} f^n(U)$ .

En effet, un ensemble basique n'est pas nécessairement maximal parmi les compacts invariants transitifs de la variété.

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de décomposition spectrale :

**Théorème 1.1.12.** — *Soit  $f$  un difféomorphisme de Smale d'une variété compacte. L'ensemble  $\Omega(f)$  est alors l'union d'un nombre fini de pièces basiques disjointes, notons-les  $\Lambda_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  où  $n$  est un nombre entier. De plus les pièces basiques vérifient la propriété suivante :*

*Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , il existe  $n_i \in \mathbb{N}$  tels que  $\Lambda_i$  est l'union de  $n_i$  fermés disjoints,  $\Lambda_i^j$ ,  $j \in \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ , de façon que pour tout  $j$  on ait :*

$$f(\Lambda_i^j) = \Lambda_i^{j+1},$$

*et que pour tout  $j$  la restriction de  $f^{n_i}$  à  $\Lambda_i^j$  soit topologiquement mélangente.*

*Enfin, tout point de la variété  $M$  appartient à la variété stable de l'une des pièces basiques  $\Lambda_i$ .*

Smale définit sur l'ensemble des pièces basiques une relation d'ordre (partiel). A partir d'une fonction de Morse, on peut décomposer une variété en un empilement de sous-variétés à bord, contenant chacune exactement un point critique. L'ordre sur les points critiques est simplement celui donné par la fonction. L'ordre de Smale pour le gradient de cette fonction de Morse est un ordre partiel sur les points critiques, compatible avec l'ordre donné par  $f$ . Dans le cas général, l'ordre de Smale sur les pièces basiques permet de construire une filtration de la variété qui est l'équivalent dynamique de l'empilement de Morse. Définissons à présent l'ordre de Smale et les filtrations pour les difféomorphismes de Smale.

**Définition 1.1.13.** — *Soient  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  deux pièces basiques, on dira que  $\Lambda_2$  domine  $\Lambda_1$ , ce que l'on notera  $\Lambda_1 \prec \Lambda_2$ , si la variété stable de  $\Lambda_1$  coupe la variété instable de  $\Lambda_2$ . Autrement dit :*

$$\Lambda_1 \prec \Lambda_2 \iff W^s(\Lambda_1) \cap W^u(\Lambda_2) \neq \emptyset$$

*On vérifie que la relation  $\prec$  ainsi définie sur l'ensemble des pièces basiques de  $f$  est bien un ordre.*

A un ordre sur un ensemble fini est classiquement associé un graphe orienté qui, dans notre contexte, s'appelle *diagramme de Smale* :

Une arête part de  $\Lambda_2$  vers  $\Lambda_1$  si  $\Lambda_1 \prec \Lambda_2$  et s'il n'existe aucune pièce basique  $\Lambda_j$  telle que :  $\Lambda_1 \prec \Lambda_j \prec \Lambda_2$ .

Pour toute relation d'ordre sur un ensemble fini, il existe une indexation de l'ensemble fini qui soit compatible (c'est-à-dire non-décroissante) avec la relation d'ordre. Les indexations, non-décroissantes pour  $\prec$ , de l'ensemble des pièces basiques d'un difféomorphisme de Smale sont fortement liées à l'existence de filtrations « séparant » les pièces basiques ([Sh, chapitre 1]) : c'est donc cette notion que nous allons définir à présent.

**Définition 1.1.14.** — Soit  $f$  un homéomorphisme d'une variété  $M$ . On appelle filtration de  $M$  pour  $f$  une suite finie  $M_1, \dots, M_k$  de sous-variétés compactes à bord de  $M$  de même dimension que  $M$ , telle que pour tout  $i \in \{2, \dots, k\}$  on ait la suite d'inclusions suivante :

$$M_{i-1} \subset \text{Int}(f^{-1}(M_{i-1})) \subset f^{-1}(M_{i-1}) \subset \text{Int}(f(M_i)) \subset f(M_i) \subset \text{Int}(M_i)$$

Dans la pratique, toutes les filtrations que nous considérerons seront relatives à la dynamique  $f$  étudiée, si bien que nous omettrons de mentionner  $f$  : nous dirons « une filtration » pour dire « une filtration pour  $f$  ».

**Définition 1.1.15.** — Soient  $K_1, \dots, K_n$  une famille finie de compacts disjoints invariants d'un homéomorphisme  $f$  d'une variété  $M$ . Nous dirons qu'une filtration  $M_0, M_1, \dots, M_n$  pour  $f$ , est adaptée à la famille  $K_1, \dots, K_n$  si, pour tout  $i \geq 1$ ,  $K_i$  est l'ensemble maximal invariant de  $M_i \setminus (\text{Int}(M_{i-1}))$ , c'est-à-dire

$$K_i = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f^j(M_i \setminus \text{Int}(M_{i-1}))$$

**Théorème 1.1.16.** — Soit  $f$  un difféomorphisme de Smale d'une variété compacte  $M$ . Pour toute indexation  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  de l'ensemble des pièces basiques de  $f$ , compatible avec la relation d'ordre  $\prec$ , il existe une filtration de  $M$ ,  $\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$  adaptée à la famille  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ .

L'existence de la filtration « séparant » les différentes pièces basiques montre que chaque pièce basique est « isolée » du reste de la dynamique. Plus précisément :

**Remarque.** — Soit  $f$  un difféomorphisme de Smale et soit  $\Lambda$  un compact de  $\Omega(f)$ . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $\Lambda$  est une pièce basique de  $f$ .
2.  $\Lambda$  est transitif et est isolé dans  $\Omega(f)$ , c'est-à-dire qu'il existe un ouvert  $U$  tel que  $U \cap \Omega(f) = \Lambda$ .
3. (*saturation*)  $\Lambda$  est transitif et quels que soient  $x, y \in \Lambda$  on a :

$$W^s(x) \cap W^u(y) \subset \Lambda.$$

## 1.2. Ensembles saturés des difféomorphismes de Smale des surfaces

Pour classer les difféomorphismes de Smale d'une surface compacte, il ne suffit pas de classer les pièces basiques : nous devons démêler l'écheveau de leurs courbes invariantes. Pour cela, nous allons considérer des ensembles hyperboliques, constitués de pièces basiques et des intersections de leurs variétés invariantes, et possédant la propriété de saturation de l'item 3 de la remarque terminant le paragraphe ci-dessus.

Ces ensembles auront des propriétés analogues à celles des pièces basiques, mais ne seront en général pas transitifs.

Définissons d'abord de façon intrinsèque les ensembles saturés :

**Définition 1.2.1.** — Soit  $f$  un difféomorphisme d'une surface compacte. On appellera ensemble hyperbolique saturé un compact hyperbolique  $K$  invariant par  $f$  et vérifiant la condition suivante :

$$x \in K \text{ et } y \in K \Rightarrow W^s(x) \cap W^u(y) \subset K$$

Le reste de ce paragraphe a comme but de caractériser les ensembles saturés en utilisant les pièces basiques et les points d'intersection de leurs variétés invariantes.

Soit  $S$  une surface compacte et  $f$  un difféomorphisme de Smale de  $S$ .

**Définition 1.2.2.** — On appelle « intervalle de pièces basiques » tout ensemble de pièces basiques  $E$  vérifiant la propriété suivante :

Pour toutes pièces basiques  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ ,

$$\Lambda_1, \Lambda_3 \in E \text{ et } \Lambda_1 \prec \Lambda_2 \prec \Lambda_3 \implies \Lambda_2 \in E,$$

où  $\prec$  désigne l'ordre de Smale que nous avons défini au paragraphe 1.1.3

Remarquons qu'un intervalle ne correspond pas en général à une partie connexe du diagramme de Smale.

**Exemple.** — L'ensemble des pièces basiques qui ne sont ni source ni puits est un intervalle. Le diagramme de Smale restreint à cet ensemble n'est pas forcément connexe. Chacune des composantes connexes de ce nouveau diagramme correspond à un intervalle : les intervalles de ce type seront l'un des objets de notre étude.

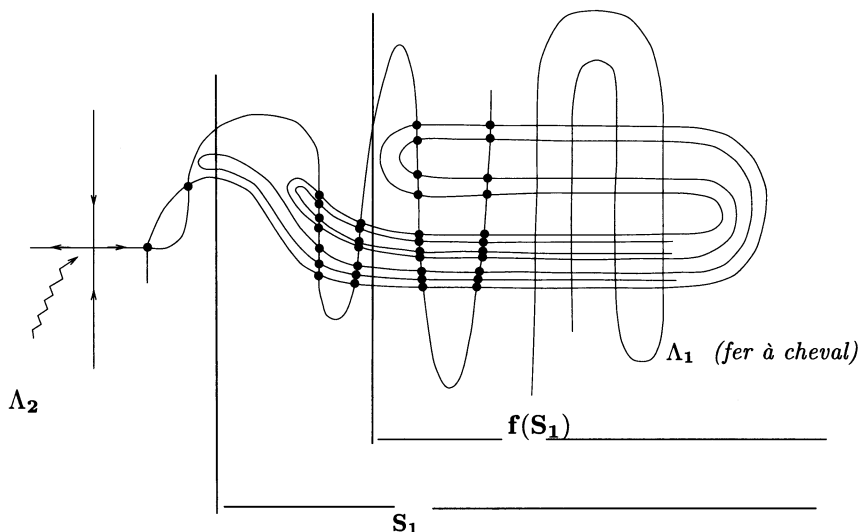
**Définition 1.2.3.** — Soit  $E$  un intervalle de pièces basiques de  $f$ , on appellera saturé de  $E$  l'ensemble  $K$  union des pièces basiques de  $E$  et des intersections de leurs courbes invariantes ; plus précisément :

$$K = \bigcup_{\Lambda \in E} W^s(\Lambda) \cap \bigcup_{\Lambda \in E} W^u(\Lambda).$$

**Proposition 1.2.4.** — Soit  $E$  un intervalle de pièces basiques ne contenant ni source ni puits. Le saturé  $K$  de  $E$  est alors un compact hyperbolique invariant.

La proposition se démontre par récurrence sur le nombre de pièces basiques que contient  $E$ . Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant, qui montre la proposition quand  $E$  ne contient que deux pièces basiques et qui sera la clef de la démonstration pour passer de  $n$  à  $n + 1$  pièces basiques :

**Lemme 1.2.5.** — Soit  $f$  un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte, et soient  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  deux ensembles hyperboliques ne contenant ni source ni puits et tels qu'il existe une filtration  $S_0 \subset S_1 \subset S_2$  adaptée à  $\{\Lambda_1, \Lambda_2\}$  (voir la définition 1.1.15). Alors  $K = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup (W^u(\Lambda_2) \cap W^s(\Lambda_1))$  est un compact invariant hyperbolique.



- indique des points du saturé de  $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$

FIGURE 2. Le saturé de deux pièces basiques

*Démonstration du lemme.* — L'ensemble  $K = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup (W^u(\Lambda_2) \cap W^s(\Lambda_1))$  est bien sûr invariant par  $f$ . Nous devons montrer qu'il est compact et hyperbolique.

Pour montrer que  $K$  est compact, il suffit de vérifier que  $K$  est le maximal invariant  $\bigcap_{\mathbb{Z}} f^n(S_2 \setminus \text{Int}(S_0))$  du compact  $S_2 \setminus \text{Int}(S_0)$ . De l'inclusion  $f(S_2) \subset \text{Int}(S_2)$ , on déduit que  $W^u(\Lambda_2)$  est incluse dans  $\bigcap_{\mathbb{N}} f^{-i}(S_2)$  et donc dans  $\bigcap_{\mathbb{Z}} f^i(S_2)$ . On montre de même que  $W^s(\Lambda_1)$  est incluse dans  $\bigcap_{\mathbb{Z}} f^i(S \setminus \text{Int}(S_0))$ ; on en déduit que  $K$  est inclus dans le maximal invariant de  $S_2 \setminus \text{Int}(S_0)$ . Réciproquement, soit  $z$  un point du maximal invariant de  $S_2 \setminus \text{Int}(S_0)$ . Si toute l'orbite de  $z$  est contenue dans  $S_2 \setminus \text{Int}(S_1)$  ou dans  $S_1 \setminus S_0$ , alors  $z$  appartient à  $\Lambda_2$  ou à  $\Lambda_1$ . Sinon, l'orbite de  $z$  rencontre à la fois  $S_2 \setminus \text{Int}(S_1)$  et  $S_1 \setminus \text{Int}(S_0)$ ; comme  $f(S_1) \subset \text{Int}(S_1)$ , on en déduit que l' $\alpha$ -limite de  $z$  est incluse dans  $S_2 \setminus \text{Int}(S_1)$ , et donc dans  $\Lambda_2$ , et que son  $\omega$ -limite est incluse dans  $\Lambda_1$ . Ceci montre que  $z \in W^s(\Lambda_1) \cap W^u(\Lambda_2)$ . On a donc montré, dans tous les cas, que  $z$  appartient à  $K$ .

Il reste à montrer que  $K$  est hyperbolique. Remarquons qu'en tout point  $x \in K$  passent une variété stable et une variété instable de points de  $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ , et que ces

deux variétés sont transverses en  $x$  (car  $f$  vérifie la transversalité forte) : on a donc bien une décomposition de l'espace tangent  $TS|_x$  en somme directe de deux droites, et ce scindement est clairement invariant par  $f$  ; par contre il n'est pas évident que ce scindement soit continu, car les variétés invariantes d'ensembles hyperboliques ne sont pas globalement des laminations. Voyons comment montrer la continuité de ce scindement :

On peut définir la variété instable locale  $W_\varepsilon^u(\Lambda_2)$  de l'ensemble invariant hyperbolique  $\Lambda_2$  comme l'ensemble des points dont tout itéré négatif reste à distance inférieure ou égale à un  $\varepsilon > 0$  petit fixé. Nous savons (voir [Sh]) que cette variété instable locale est l'union des variétés instables locales des points de  $\Lambda_2$  qui sont des disques variant continûment.

Considérons  $O_n = f^n(S_2) \setminus \text{Int}(f^{-n}(S_1))$ . La définition d'une filtration implique que la suite  $O_n$  est une suite décroissante de voisinages compacts de  $\Lambda_2$ . En utilisant le fait que  $\Lambda_2$  est le maximal invariant de  $S_2 \setminus S_1$ , on voit que l'intersection de la suite des  $O_k$  est égale à  $\Lambda_2$  : on en déduit qu'il existe  $k > 0$  tel que  $O_k$  soit inclus dans l' $\varepsilon$ -voisinage de  $\Lambda_2$ .

Le lemme suivant caractérise l'intersection de la variété instable de  $\Lambda_2$  avec le domaine fondamental  $S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1))$ .

**Lemme 1.2.6.** — *Avec les notations ci-dessus, on a :*

$$W^u(\Lambda_2) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1))) = \bigcap_0^{+\infty} f^n(S_2) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1))).$$

*Cet ensemble est en particulier compact.*

*Démonstration.* — De la décroissance en  $n$  de la suite  $f^n(S_2)$  on en déduit que la variété instable de  $\Lambda_2$  est incluse dans  $\bigcap_0^{+\infty} f^n(S_2)$ , ce qui montre l'inclusion du terme de gauche dans celui de droite.

Montrons à présent l'inclusion inverse. Remarquons d'abord l'inclusion

$$\bigcup_2^{+\infty} f^n(S_1) \subset \text{Int}(f(S_1)).$$

Soit  $x$  un point de  $\bigcap_0^{+\infty} f^n(S_2) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1)))$  et donc dans

$$\bigcap_0^{+\infty} f^n(S_2) \setminus \bigcup_2^{+\infty} f^n(S_1).$$

Remarquons que pour tout  $i > 0$ , le point  $f^{-i}(x)$  appartient à

$$\bigcap_{-i}^{+\infty} f^n(S_2) \setminus \bigcup_{2-i}^{+\infty} f^n(S_1).$$



On en déduit que l'ensemble alpha-limite  $\alpha(x)$  est inclus dans

$$\bigcap_{-\infty}^{+\infty} f^n(S_2) \setminus \bigcup_{-\infty}^{+\infty} f^n(S_1)$$

et donc dans  $\bigcap_{\mathbb{Z}} f^n(S_2 \setminus S_1) = \Lambda_2$ . Le point  $x$  appartient donc à la variété instable de  $\Lambda_2$ . □

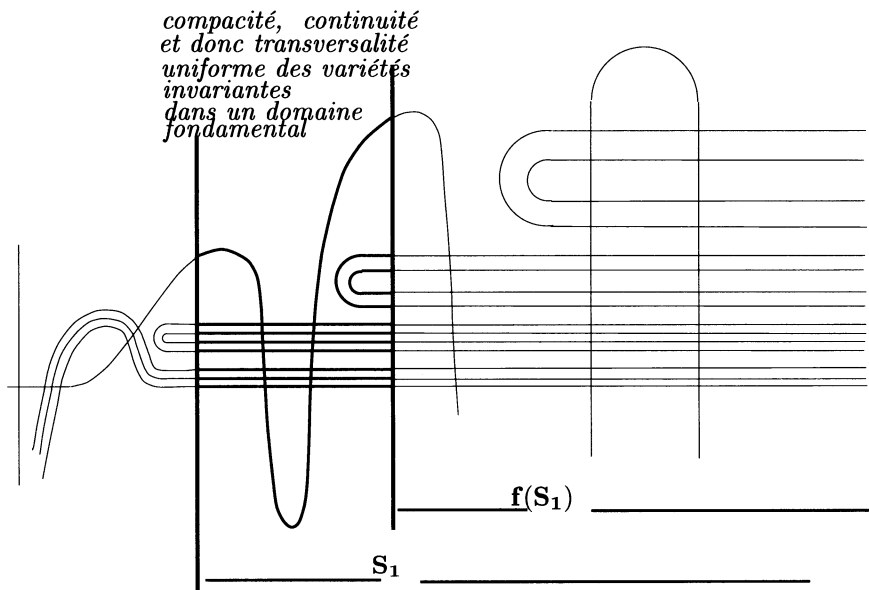


FIGURE 3. Les variétés invariantes dans le domaine fondamental  $S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1))$

On en déduit de plus que, pour tout  $n > k$ , l'image par  $f^{-n}$  de

$$W^u(\Lambda_2) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1)))$$

est incluse dans  $O_{n-1}$  et donc dans  $O_k$ . Ceci étant vrai pour tout  $n > k$ , on déduit du choix de  $k$  le fait que  $f^{-k-1}[W^u(\Lambda_2) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1)))]$  est inclus dans la variété instable locale  $W_\varepsilon^u(\Lambda_2)$ , et donc :

$$W^u(\Lambda_2) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1))) = f^{k+1}[W_\varepsilon^u(\Lambda_2) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1)))]$$

De l'égalité ci-dessus, et des propriétés de la variété instable locale de  $\Lambda_2$ , on déduit le fait que  $W^u(\Lambda_2) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1)))$  est un compact sur lequel l'espace tangent à  $W^u(\Lambda_2)$  définit un fibré (en droite) continu.

Le même argument permet de montrer que  $W^s(\Lambda_1) \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1)))$  est un compact sur lequel l'espace tangent à  $W^s(\Lambda_1)$  définit un fibré (en droites) continu.

Notons  $W = W^s(\Lambda_1) \cap W^u(\Lambda_2)$ ,  $W_0 = K \cap (S_1 \setminus \text{Int}(S_1)) = W \cap (S_1 \setminus \text{Int}(f(S_1)))$ , et  $W_n = \bigcup_{-n}^n f^i(W_0)$ . Nous venons de montrer que les fibrés tangents aux variétés

stables de  $\Lambda_1$  et instables de  $\Lambda_2$  sont continus sur  $W_0$  et l'on sait qu'ils sont transverses et donc uniformément transverses sur  $W_0$  qui est compact. On en déduit qu'ils sont uniformément transverses sur  $W_n$ , pour tout  $n$ . De plus  $W$  est l'union croissante des  $W_n$ . Pour  $n$  assez grand,  $W \setminus W_n$  se trouve contenu dans l'union d'un petit voisinage  $U_1$  de  $\Lambda_1$  et d'un petit voisinage  $U_2$  de  $\Lambda_2$  (on peut prendre  $U_2 = O_n$  défini précédemment). Pour tout point de  $W \cap U_1$ , le fibré stable est tangent aux variétés stables locales des points de  $\Lambda_1$ . Pour montrer la stabilité structurelle des difféomorphismes de Smale de classe  $C^2$ , Robbin (voir [Ro, page 487 théorème (10.1)]) montre que le fibré tangent aux variétés instables de  $\Lambda_2$  est prolongé continûment aux points de  $\Lambda_1$  par le fibré instable de  $\Lambda_1$ . On peut prolonger de même le scindage défini aux points de  $W \cap U_2$  par les fibrés stables et instables de  $\Lambda_2$ . (Le théorème de stabilité structurelle est montrée pour des difféomorphismes de classe  $C^1$  dans [R]; pour se convaincre directement de la validité de la propriété d'extension continue des fibrés invariants, le lecteur pourra aussi utiliser une version du  $\lambda$ -lemma adaptée aux ensembles hyperboliques, qu'il reconstituera par exemple à l'aide des chapitres 5 et 6 du livre de M. Shub [Sh]).

L'expansion uniforme des vecteurs du fibré instable et la contraction uniforme des vecteurs du fibré stable se montrent en remarquant que, pour tous voisinages  $U_1, U_2$  de  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$ , il existe  $n$  tel que toute orbite de  $K$  possède au plus  $n$  points hors de  $U_1$  et  $U_2$ .

□

*Démonstration de la proposition 1.2.4.* — On vérifie facilement que si  $E$  est un intervalle de pièces basiques, alors il existe une indexation  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  (compatible avec  $\prec$ ) de l'ensemble des pièces basiques et  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \leq j$ , tels que :

$$E = \{\Lambda_i, \dots, \Lambda_j\}.$$

Considérons  $\emptyset = S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_n = S$  une filtration de  $S$  associée à cette indexation des pièces basiques (voir la définition 1.1.15).

On montre la proposition par récurrence sur le nombre  $n = 1 + i - j$  de pièces basiques constituant  $E$ . Bien sûr la proposition est triviale quand  $n = 1$ .

Notons  $E_1 = E \setminus \Lambda_j$ . La numérotation étant compatible avec  $\prec$ ,  $E_1$  est un intervalle comportant  $n - 1$  pièces basiques : notons  $K_1$  la saturation de  $E_1$ . Par hypothèse de récurrence,  $K_1$  est un compact invariant hyperbolique. En outre,

$$K = K_1 \cup \Lambda_j \cup (W^u(\Lambda_j) \cap W^s(K_1)).$$

Notons  $\bar{S}_0 = S_{i-1}$ ,  $\bar{S}_1 = S_{j-1}$ , et  $\bar{S}_2 = S_j$ . Les ensembles hyperboliques  $K_1$  et  $\Lambda_j$ , munis de la filtration  $\bar{S}_0 \subset \bar{S}_1 \subset \bar{S}_2$  vérifient les hypothèses du lemme 1.2.5 : le choix de la filtration implique que  $K_1$  est le maximal invariant de  $\bar{S}_1 \setminus \bar{S}_0$ . D'après le lemme 1.2.5,  $K$  est donc un ensemble hyperbolique. □

Nous pouvons à présent caractériser les ensembles hyperboliques saturés des difféomorphismes de Smale des surfaces :

**Proposition 1.2.7.** — *Soit  $f$  un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte.*

1. *Le saturé d'un intervalle  $E$  de pièces basiques est un ensemble hyperbolique si et seulement si toute orbite périodique puits ou source de  $E$  n'est comparable pour  $\prec$  à aucune autre pièce basique de  $E$ .*
2. *Tout ensemble hyperbolique saturé de  $f$  est le saturé d'un intervalle de pièces basiques.*

*Démonstration.* — L'item (1) est une conséquence facile de la proposition 1.2.4 et de la remarque suivante :

**Remarque.** — Soit  $x$  un point non-périodique appartenant à la variété stable d'une orbite périodique puits ou à la variété instable d'une source. Il ne peut appartenir à aucun ensemble hyperbolique.

En effet, choisissons par exemple le point  $x$  dans la variété stable d'un puits  $p$ . Il existe un point  $y$  d'une pièce basique de  $f$  tel que  $x$  appartienne à la variété instable de  $y$ . Soit  $v$  un vecteur non-nul tangent en  $x$  à  $W^u(y)$ . Comme  $v$  est aussi tangent à la variété stable de  $p$ , les itérés positifs et négatifs de  $v$  tendent en norme vers 0 ce qui interdit à  $x$  d'appartenir à un ensemble hyperbolique.

Montrons l'item (2) :

Soient  $K$  un ensemble hyperbolique saturé et  $x \in K$  qui n'est pas un point périodique puits ou source. Il existe deux pièces basiques  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  telles que  $x \in W^s(\Lambda_1) \cap W^u(\Lambda_2)$  (si  $x$  appartient à  $\Lambda_1$  on prend  $\Lambda_2 = \Lambda_1$ ). Nous devons montrer que toute pièce basique  $\Lambda$ , vérifiant  $\Lambda_1 \preceq \Lambda \preceq \Lambda_2$ , est incluse dans  $K$ .

Le compact invariant  $K$  contient l' $\omega$ -limite de  $x$ , donc contient un point  $x_1$  de  $\Lambda_1$ . La condition de saturation appliquée à  $x_1$  montre que  $K$  contient l'adhérence de  $W^s(x_1) \cap W^u(x_1)$ , et donc contient  $\Lambda_1$ . En remplaçant  $\omega$ -limite par  $\alpha$ -limite on montre que  $K$  contient  $\Lambda_2$ .

Toute pièce basique  $\Lambda_1 \prec \Lambda \prec \Lambda_2$  est contenue dans l'adhérence de  $W^s(\Lambda_1) \cap W^u(\Lambda_2)$  et donc dans  $K$ . De plus, la remarque ci-dessus permet de voir que  $\Lambda_1$  ne peut être un puits et que  $\Lambda_2$  ne peut être une source.  $\square$

De la proposition 1.2.7 et du théorème 1.1.16, on déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 1.2.8.** — *Soit  $f$  un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte, et soit  $K$  un ensemble hyperbolique saturé de  $F$ . Alors il existe une filtration  $S_0, S_1$  pour  $f$ , adaptée à  $K$  (c'est-à-dire que  $K$  est le maximal invariant de  $S_1 \setminus \text{Int}(S_0)$ ).*

**Remarque.** — On pourrait définir de la même manière les ensembles hyperboliques saturés et les saturés d'intervalles de pièces basiques, pour des difféomorphismes de variétés de dimension plus grande que 2. On montre alors que le saturé d'un intervalle  $E$  est hyperbolique si et seulement si deux pièces basiques de  $E$  ne sont pas comparables dès que la dimension des variétés stables de leurs points ne sont pas identiques.

### 1.3. Voisinages invariants d'ensembles saturés en dimension 2

Soient  $f$  un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte et  $K$  un ensemble hyperbolique saturé de  $f$ . Le but de ce paragraphe est de construire des voisinages ouverts de  $K$ , invariants par  $f$ , particulièrement simples : ils sont de *topologie finie* c'est-à-dire qu'ils sont homéomorphes à une surface compacte privée d'un nombre fini de points.

Plus précisément, nous allons montrer la proposition suivante :

**Proposition 1.3.1.** — *Soit  $f$  un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte  $S$ , et soit  $K$  un ensemble hyperbolique saturé de  $f$ . Alors il existe un ouvert  $U$  invariant par  $f$ , contenant  $K$ , et possédant en outre les propriétés suivantes :*

1.  $K$  est le maximal invariant de tous ses voisinages relativement compacts dans  $U$ . C'est aussi le compact invariant maximal de  $U$ .
2.  $U$  est difféomorphe à une surface compacte (sans bord)  $\tilde{S}$  privée d'un ensemble fini de points  $p_1, \dots, p_l$ . De plus  $\tilde{S}$  possède un difféomorphisme de Smale  $\tilde{f}$  ayant les points  $p_i$  comme points périodiques attracteurs ou répulseurs. Enfin, la restriction de  $\tilde{f}$  à  $\tilde{S} \setminus \{p_1, \dots, p_l\}$  est conjuguée à la restriction de  $f$  à  $U$  par un difféomorphisme.

Pour montrer la proposition, nous allons considérer une filtration  $\{S_0, S_1\}$  pour  $f$  adaptée à  $K$  (voir le corollaire 1.2.8), et nous montrerons que l'union des itérés de  $S_1 \setminus \text{Int}(S_0)$  possède toutes les propriétés requises. Pour prouver que cet ensemble est de topologie finie, nous aurons besoin de contrôler la topologie d'une union infinie d'itérés d'une surface à bord : c'est ce que fait le lemme suivant.

**Lemme 1.3.2.** — *Soit  $S$  une surface compacte orientée,  $\Sigma \subset S$  une surface compacte à bord et  $h$  un homéomorphisme de  $S$ , préservant l'orientation et tel que l'on ait :*

$$\Sigma \subset h(\text{Int}(\Sigma)).$$

Alors :

1. L'union  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} h^n(h(\Sigma) \setminus \Sigma)$  est un ouvert ayant un nombre fini de composantes connexes.
2. Chaque composante connexe  $C$  de  $U$  est un cylindre.
3. Il existe  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $h^i(C) = C$ , de plus la restriction de  $h^i$  à  $C$  est conjuguée à une translation.

*Démonstration.* — 1) Appellons  $U_n = \bigcup_{-n}^n h^i(h(\Sigma) \setminus \text{Int}(\Sigma))$ . Comme  $h^j(\Sigma)$  est inclus dans  $h^{j+1}(\Sigma)$ , on voit que

$$U_n = h^{n+1}(\Sigma) \setminus h^{-n}(\text{Int}(\Sigma)).$$

Comme  $h^{-n}(\Sigma)$  est inclus dans l'intérieur de  $h^{n+1}(\Sigma)$  le bord de  $U_n$  est égal à  $\partial h^{n+1}(\Sigma) \cup \partial h^{-n}(\Sigma)$  (deux copies disjointes  $h^{n+1}(\partial\Sigma)$  et  $h^{-n}(\partial\Sigma)$  du bord de  $\Sigma$ ).

Chaque composante connexe de  $U_n$  étant de bord non vide (car  $S$  est connexe) le nombre de ces composantes connexes est borné indépendamment de  $n$ . On en déduit que l'ensemble des composantes connexes de  $U$  (union croissante des  $U_n$ ) est fini. Comme  $U_n$  est inclus dans l'intérieur de  $U_{n+1}$ , on voit que  $U$  est ouvert.

2 et 3) Remarquons que  $U_0 = h(\Sigma) \setminus \text{Int}(\Sigma)$  est un domaine fondamental de la restriction de  $h$  à  $U$ . Le quotient  $U/h$  de  $U$  par  $h$  est obtenu à partir de  $U_0$  en identifiant par  $h$  les deux copies  $\partial\Sigma$  et  $h(\partial\Sigma)$  du bord de  $\Sigma$  qui forment le bord de  $U_0$ . On en déduit que  $U/h$  est une surface compacte sans bord et que la projection est un revêtement.

Soit  $C$  une composante connexe de  $U$ . L'ensemble des composantes connexes de  $U$  est fini, et  $h$  induit une permutation de ces composantes; notons  $k$  la période de la composante  $C$ . Le quotient  $C/h^k$  de  $C$  par  $h^k$  est une composante connexe de  $U/h$  donc est une surface compacte orientable connexe sans bord. La projection de  $C$  sur  $C/h^k$  est un revêtement cyclique; comme  $h^k$  est d'ordre infini le revêtement est infini cyclique. Comme  $C$  est inclus dans  $S$ ,  $C$  est (par définition) de genre fini.

Toute surface compacte admettant un revêtement infini cyclique de genre fini est un tore  $T^2$ , et l'espace total du revêtement est donc un cylindre. Enfin,  $h^k$  est le générateur du groupe des automorphismes de ce revêtement donc  $h^k$  est conjugué à une translation.  $\square$

**Corollaire 1.3.3.** — *Sous les hypothèses du lemme, notons  $U_+$  l'union*

$$U_+ = \bigcup_{n \geq 0} h^n(h(\Sigma) \setminus \Sigma).$$

*Alors le bord dans  $U$  de  $U_+$  est exactement  $\partial\Sigma$ . De plus, il existe une surface compacte à bord  $\bar{U}_+$  munie d'un homéomorphisme  $\bar{h}$  possédant un ensemble fini  $p_1, \dots, p_l$  de points périodiques attracteurs, telle que  $\bar{U}_+ \setminus \{p_1, \dots, p_l\}$  soit homéomorphe à  $U_+$  par un homéomorphisme conjuguant  $\bar{h}$  à  $h$ .*

*Démonstration.* — Notons  $U_n^+ = \bigcup_{i=0}^n h^i(h(\Sigma) \setminus \Sigma)$ . Alors le bord de  $U_n^+$  est égal à  $\partial\Sigma \cup f^n(\partial\Sigma)$ . D'après le lemme 1.3.2, l'homéomorphisme  $h$  agit proprement et librement sur  $U$ , donc  $f^n(\partial\Sigma)$  sort de tout compact de  $U$  quand  $n$  tend vers l'infini. De plus,  $U_+$  est l'union croissante des  $U_n^+$ : on en déduit que son bord dans  $U$  est égal à  $\partial\Sigma$ .

Soit  $C$  une composante connexe de  $U$  et  $k$  sa période pour  $f$ . D'après le lemme 1.3.2, on peut identifier  $C$  avec  $\mathbb{R} \times S^1$  et l'homéomorphisme  $h^k$  avec la translation  $(t, \theta) \mapsto (t+1, \theta)$ . Choisissons  $s$  tel que le cercle  $c_t = \{t\} \times S^1$  rencontre  $U_+$ . Comme  $U_+ \cap C$  est invariant par  $h^k$ , pour tout  $n \geq 0$ , le cercle  $h^n(c_t) = c_{t+n}$  rencontre  $U_+$ . Cependant, pour  $n$  assez grand,  $c_{t+n}$  est disjoint de  $\partial\Sigma$  et plus précisément  $\partial\Sigma \subset ]-\infty, t+n[ \times S^1$ . Le demi-cylindre fermé  $[t+n, +\infty[ \times S^1$  est d'intersection non vide avec  $U_+ \cap C$  mais est disjoint de son bord (dans  $U$ ), donc est contenu dans  $U_+ \cap C$ . Un raisonnement

analogue permet de montrer que pour  $n$  assez grand  $U_+ \cap C$  est disjoint du cylindre  $] -\infty, t - n] \times S^1$ .

Notons  $\overline{C}$  la compactification de  $C$  par deux points  $N$  et  $S$ , telle que  $\overline{C}$  soit homéomorphe à la sphère  $S^2$ , et que  $h^k$  soit conjugué à la dynamique « nord-sud ». Alors  $U_+ \cup \{S\}$  est une partie compacte de la sphère  $S^2$  dont le bord, qui est égal à  $S \cap C$ , est une union finie de courbes simples disjointes. On en déduit que  $U_+ \cup \{S\}$  est une surface à bord et que  $h^k$  induit un homéomorphisme ayant  $S$  comme unique point fixe attracteur.

On obtient la surface à bord  $\overline{U}_+$  annoncée en compactifiant comme ci-dessus les intersections de  $U_+$  avec chaque composante connexe de  $U$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 1.3.1.* — D'après la proposition 1.2.7, le compact hyperbolique  $K$  est le saturé d'un intervalle de pièces basiques. Le corollaire 1.2.8 permet alors de choisir deux sous-variétés compactes à bord  $S_0$  et  $S_1$  de  $S$  ayant les propriétés suivantes :

$$S_0 \subset \text{Int}(f(S_0)) \subset f(S_0) \subset \text{Int}(S_1) \subset S_1 \subset \text{Int}(f(S_1))$$

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(S_1 \setminus S_0).$$

Considérons  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(S_1 \setminus S_0)$ . Remarquons que, puisque le bord de  $S_1$  est contenu dans l'intérieur de  $f(S_1 \setminus S_0)$ ,  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \text{Int}(f^n(S_1 \setminus S_0))$ .

1) Soit  $O \subset U$  un voisinage compact de  $K$ . La famille  $\text{Int}(f^i(S_1 \setminus S_0))$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  est un recouvrement ouvert du compact  $O$ . Il existe donc  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $O \subset \bigcup_{-n}^n f^i(S_1 \setminus S_0)$ . Rappelons que  $K$  est le maximal invariant de  $S_1 \setminus \text{Int}(S_0)$ . Soit  $x \in O$  un point n'appartenant pas à  $K$ . Il existe donc  $i$  tel que  $f^i(x)$  soit n'est pas dans  $S_1$ , soit est dans l'intérieur de  $S_0$  :

- dans le premier cas,  $f^{n+i}(x)$  n'appartient pas à  $f^n(S_1)$  et donc n'appartient pas à  $O$  (les  $f^n(S_1)$  étant croissants, on a  $U_n \subset f^n(S_1)$ )
- dans le second cas,  $f^{-n+i}(x)$  appartient à  $f^{-n}(\text{Int}(S_0))$  et donc (par un raisonnement analogue au premier cas) n'appartient pas à  $O$ .

Ceci montre que  $x \in O \setminus K$  n'appartient pas au maximal invariant de  $O$ . L'inclusion réciproque est immédiate puisque  $K \subset O$  est invariant par  $f$ . Ceci achève la démonstration de l'item (1).

2) Remarquons que  $U$  peut s'écrire

$$U = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(S_0 \setminus f^{-1}(\text{Int}(S_0))) \cup (S_1 \setminus \text{Int}(S_0)) \cup \bigcup_{n \geq 0} f^n(f(S_1) \setminus \text{Int}(S_1))$$

(voir la figure 4).

Le corollaire 1.3.3 dit que  $\bigcup_{n \geq 0} f^n(f(S_1) \setminus \text{Int}(S_1))$  admet une compactification en une surface compacte à bord de bord  $\partial S_1$ , en complétant  $f$  par un nombre fini d'orbites périodiques attractrices.

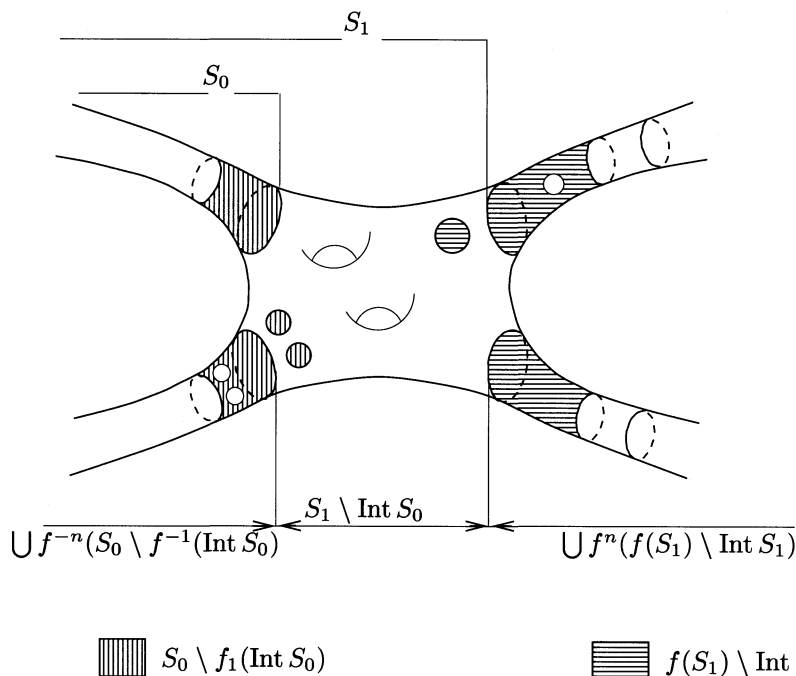


FIGURE 4. Construction d'un voisinage invariant d'un ensemble hyperbolique

Posons  $S_2 = S \setminus \text{Int}(S_0)$ . Remarquons que  $S_0$  et  $S_2$  ont même bord et que

$$S_0 \setminus \text{Int}(f^{-1}(S_0)) = f^{-1}(S_2 \setminus \text{Int}(S_2));$$

de plus,  $S_2$  vérifie les hypothèses du lemme 1.3.2. Le corollaire 1.3.3 implique donc que  $\bigcup_{n \geq 0} f^n(S_0 \setminus f^{-1}(\text{Int}(S_1)))$  se compactifie en une surface compacte de bord  $\partial S_0$ , en complétant  $f$  par un nombre fini d'orbites périodiques répulsives. On en déduit facilement que  $U$  est un ouvert homéomorphe à une surface compacte  $\tilde{S}$  privée d'un ensemble fini de points  $p_i$  et que la restriction de  $f$  à  $U$  se complète sur  $\tilde{S}$  de façon que les  $p_i$  soient des points périodiques attracteurs ou répulseurs.

**Lemme 1.3.4.** — Soit  $D$  un disque et un homeomorphisme  $\varphi$  de  $D$  dans son intérieur ayant un unique point fixe  $P$  attracteur. Supposons de plus que l'homeomorphisme  $\varphi$  est un difféomorphisme sur  $D \setminus P$ . Il existe un difféomorphisme  $\tilde{\varphi}$  de  $D$  dans son intérieur coïncidant avec  $\varphi$  près du bord de  $D$  et possédant comme unique point fixe le point  $P$ , qui est de plus attracteur.

*Démonstration.* — Considérons le tore  $T_\varphi$  quotient par  $\varphi$  de  $D \setminus P$ . Considérons l'homothétie de rapport  $1/2$  de centre  $P$  définie sur un disque  $\Delta$  centré en  $P$  contenu dans  $D$ . Le quotient par cette homothétie de  $\Delta \setminus P$  est un tore  $T_{1/2}$ . Nous conviendrons d'appeler parallèle les images dans chacun des tores respectivement du bord de  $D$  et

du bord de  $\Delta$ . Les deux tores sont munis d'une structure différentiable puisque  $\varphi$  est difféomorphisme hors de  $P$ . Nous pouvons choisir un difféomorphisme de  $T_\varphi$  sur  $T_{1/2}$  qui envoie parallèle sur parallèle. En découpant le long des parallèles on obtient un difféomorphisme d'un domaine fondamental de  $\varphi$  sur un domaine fondamental de l'homothétie qui s'étend en un difféomorphisme  $h$  de  $D \setminus P$  sur  $\Delta \setminus P$  conjuguant  $\varphi$  et l'homothétie. Le difféomorphisme  $h$  se prolonge continûment en  $P$ . Il reste à construire un difféomorphisme  $\tilde{h}$  de  $D \setminus P$  coïncidant avec l'identité près du bord de  $D$  et avec  $h$  près de  $P$ . On obtient  $\tilde{\varphi}$  en conjuguant  $\varphi$  par  $\tilde{h}$ .  $\square$

On se convainc maintenant facilement que l'on peut lisser comme ci-dessus  $\tilde{f}$  de façon à ce qu'il soit un difféomorphisme. Ce difféomorphisme est de Smale puisque, par l'item (1), le maximal invariant de tout compact disjoint des  $p_i$  est inclus dans  $K$  qui est un ensemble hyperbolique.  $\square$

**Remarque.** — L'ouvert invariant  $U$  que nous venons de construire dépend, comme sous-ensemble de la surface  $S$ , du choix de la filtration isolant l'ensemble hyperbolique. La classe de conjugaison de la restriction de  $f$  à  $U$  aussi, et même la topologie de l'ouvert  $U$ . L'exemple le plus simple est construit à l'aide d'une dynamique sur la sphère, temps 1 d'un champ de vecteur Morse-Smale ayant deux selles  $s_1$  et  $s_2$ , deux puits et deux sources comme sur la figure 5.

Dans cet exemple, les deux filtrations  $\{\Sigma_i\}$  et  $\{\Sigma'_i\}$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ , représentées définissent deux ouverts  $U$  et  $U'$  voisinages de la même selle  $s_1$  et les restrictions de  $f$  à  $U$  et  $U'$  ne sont pas conjuguées, comme on peut le voir sur la figure 5.

On peut obtenir des ouverts non-homéomorphes à l'aide d'une dynamique sur le tore temps 1 d'un champ de vecteurs Morse-Smale ayant trois selles  $s_1, s_2, s_3$  en prenant  $\{s_1, s_2\}$  comme ensemble hyperbolique.

Etudions à présent la dynamique et la position des variétés invariantes dans cet ouvert invariant :

**Proposition 1.3.5.** — *Soit  $K$  un ensemble hyperbolique saturé d'un difféomorphisme de Smale  $f$  d'une surface compacte  $S$ , et soit  $U$  un voisinage invariant de  $K$  construit par la proposition 1.3.1.*

1. *Si  $X$  est un compact de  $U$  disjoint de  $W^s(K)$ , alors pour tout compact  $Y \subset U$ , l'ensemble des entiers  $n \geq 0$ , tels que  $f^n(X) \cap Y$  soit non-vide, est fini.*
2. *Soit  $S_1 \subset S$  la surface à bord ayant servi pour la construction de  $U$ . Alors*

$$W^s(K) = U \cap \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(S_1).$$

**Démonstration.** — Remarquons d'abord que  $U$ , comme tout voisinage invariant de  $K$ , contient les variétés invariantes de  $K$ .



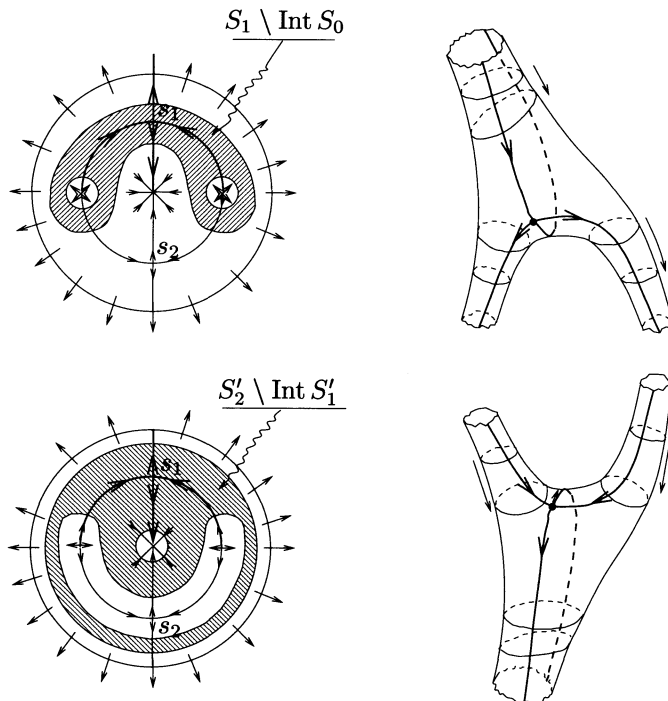


FIGURE 5. Ouverts invariants construits à l'aide de filtration

De l'hypothèse  $S_1 \subset f(\text{Int}(S_1))$ , on déduit que pour tout  $n \geq 0$ , tout point  $x \notin f^{-n}(S_1)$  a son orbite positive disjointe de  $f^{-n}(S_1)$ . On en déduit que  $x$  n'appartient pas à la variété stable de  $K$ ; en d'autres termes,  $W^s(K) \subset f^{-n}(S_1) \cap U$  donc

$$W^s(K) \subset U \cap \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(S_1).$$

Voyons la réciproque.

Soit  $x \in U \cap \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(S_1)$ , et soit  $y \in \omega(x)$ . Nous allons vérifier que l'orbite de  $y$  est contenue dans  $S_1 \setminus S_0$ , ce qui implique que  $y$  appartient à  $K$  (maximal invariant de  $S_1 \setminus \text{Int}(S_0)$ ); on en déduira que l' $\Omega$ -limite de  $x$  est contenu dans  $K$  et donc que  $x \in W^s(K)$ .

Remarquons que toute l'orbite positive de  $x$  est incluse, par définition, dans  $S_1$  et que son orbite négative aussi car  $f^{-1}(S_1) \subset S_1$ . De la compacité de  $S_1$ , on déduit que l'orbite de  $y$  est incluse dans  $S_1$ .

Remarquons que  $x \in U$  implique l'existence de  $n$  tel que  $x \notin f^n(S_0)$ , donc  $f^l(x) \notin f^n(S_0)$  pour tout  $l \geq 0$ . On en déduit que  $\omega(x)$  est disjoint de  $f^n(S_0)$ , et donc aussi de  $S_0$ . L'orbite de  $y$  est donc disjointe de  $S_0$ , ce qui conclut.

Soit  $X \subset U$  un compact disjoint de  $W^s(K)$ . De ce qui précède, on déduit que  $X \cap \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(S_1) = \emptyset$  : il existe donc  $n \geq 0$  tel que  $f^n(X) \cap S_1 = \emptyset$ , et pour tout  $l \geq 0$ , on a  $f^{l+k}(X) \cap f^l(S_1) = \emptyset$ . Il reste à remarquer que, pour tout compact  $Y \subset U$ , il existe  $l_0 \geq 0$  tel que  $Y \subset f^{l_0}(S_1)$ . Alors, pour tout  $l \geq l_0$ ,  $f^{k+l}(X)$  est disjoint de  $Y$ .  $\square$

**Corollaire 1.3.6.** — *Les variétés invariantes  $W^s(K)$  et  $W^u(K)$  sont fermées dans  $U$ .*

*Démonstration.* — En effet,  $W^s(K)$  est le complémentaire dans  $U$  des bassins d'attraction des puits du difféomorphisme de Smale  $\tilde{f}$  que nous venons de construire. On conclut de même pour les variétés instables.  $\square$

En ôtant de  $\tilde{S}$  des disques invariants par  $f$  autour des points périodiques attracteurs, et invariants par  $f^{-1}$  autour des points périodiques répulseurs, on déduit de la proposition 1.3.1 le corollaire suivant :

**Corollaire 1.3.7.** — *Soit  $f$  un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte, et soit  $K$  un ensemble hyperbolique saturé de  $f$ . Alors il existe une filtration  $S_0 \subset S_1$  telle que  $K$  soit le maximal invariant dans  $S_1 \setminus S_0$  et que, pour tout  $i$ , l'adhérence de  $S_i \setminus f(S_i)$  soit l'union d'un ensemble fini de couronnes disjointes (voir la figure 6).*

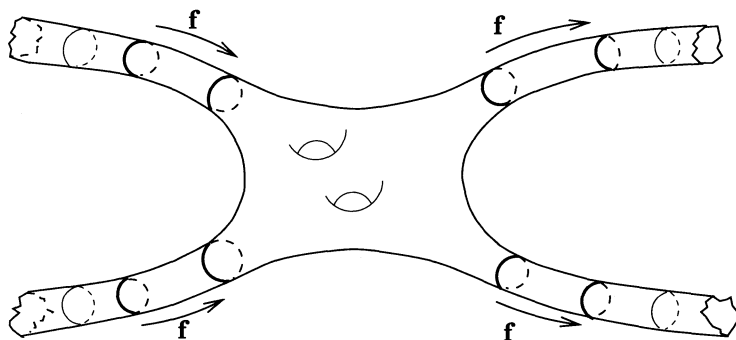


FIGURE 6. Voisinage d'un ensemble saturé, avec entrée et sortie



## CHAPITRE 2

### GÉOMÉTRIE DES COURBES INVARIANTES

Notons  $S$  une surface connexe compacte (sans bord) et  $f: S \rightarrow S$  un difféomorphisme de Smale. On supposera désormais que  $S$  est orientée et que  $f$  préserve l'orientation. Soit  $K$  un ensemble hyperbolique saturé de  $f$ , ne contenant ni puits ni source.

La structure de produit local de  $K$  dit que les variétés stables et instables forment localement un quadrillage ; nous exploiterons dans cette partie l'invariance par  $f$  de ce quadrillage et la compacité de  $S$ .

#### 2.1. Points bords d'une pièce basique ou d'un ensemble hyperbolique saturé

Soit  $x$  un point de  $W^s(K)$ , il existe un point  $y \in K$  tel que  $x \in W^s(y)$  ; nous noterons  $W^s(x) = W^s(y)$  la courbe stable passant par le point  $x$ . Nous appellerons *séparatrice stable* de  $x$  une composante connexe de  $W^s(x) \setminus \{x\}$  (cette notation est classique pour les points périodiques). On parlera de même de la variété instable  $W^u(x)$  et des séparatrices instables de  $x \in W^u(K)$ .

Soit  $x$  un point de la variété stable de  $K$ . Il existe un homéomorphisme  $h$  du carré  $Q = ]-1, 1[^2$  dans  $S$ , tel que  $h(0, 0) = x$  et tel que  $h(Q) \cap W^s(K) = h(] - 1, 1[ \times F)$ , où  $F$  est un fermé de  $] - 1, 1[$ . En d'autres termes,  $W^s(K)$  est une lamination au voisinage de chacun de ses points (en fait les variétés invariantes sont les feuilles d'un feuilletage invariant par le difféomorphisme  $f$ , défini au voisinage de  $K$  et dont on trouvera la construction dans [Mo1]). On dira que le point  $x$  est *de type s-bord* s'il appartient à un arc  $h(] - 1, 1[ \times y)$  où  $y$  est l'extrémité d'une composante du complémentaire de  $F$  dans  $] - 1, 1[$ . En remplaçant stable par instable, on définit de même les points *de type u-bord*.

**Remarque.** — Un point  $x \in K$  est de type s-bord (resp. u-bord), si et seulement s'il existe un intervalle borné de sa variété instable (resp. stable) admettant  $x$  dans son adhérence et disjoint de  $K$  (voir la figure 1).

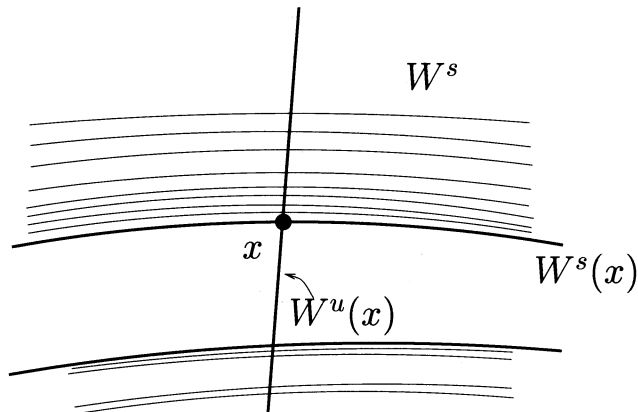


FIGURE 1. Un point de type s-bord

On dira qu'un point  $x \in W^s(K)$  est un *double s-bord* s'il existe un intervalle ouvert d'une courbe transverse en  $x$  à  $W^s(K)$ , contenant le point  $x$  et tel que  $x$  soit l'unique point d'intersection de  $W^s(K)$  avec cet intervalle.

Un point s-bord et u-bord sera dit *un coin*.

La proposition suivante est, pour l'essentiel, due à J. Palis et S. Newhouse (voir [NePa])

**Proposition 2.1.1**

1. Si  $x$  est un s-bord, alors tout point de son orbite par  $f$  est un s-bord, et tout point de  $W^s(x)$  est un s-bord.
2. Si  $x$  est un point périodique et est un s-bord, alors l'une des séparatrices de  $W^u(x)$  est disjointe de  $K$ .
3. L'ensemble des orbites périodiques s-bord est fini.
4. Si  $x \in K$  est un point tel que l'une des séparatrices de  $W^u(x)$  ne rencontre pas  $K$ , alors  $x$  est un point périodique.
5. Si  $x$  est un s-bord alors  $x$  est sur la variété stable d'un point périodique s-bord.
6. Si  $K$  ne possède aucun bord,  $f$  est Anosov.

Si  $K$  possède des u-bords mais pas de s-bord, alors  $K$  est un attracteur hyperbolique (éventuellement non-transitif).

(S'il possède des s-bords et des u-bords, on dira que  $K$  est de type selle).

7. Un point  $x \in W^s(K)$  est un double s-bord si et seulement s'il appartient à la variété stable d'un point périodique dont l'orbite est une pièce basique qui est minimale pour  $\prec$  parmi les pièces basiques contenues dans  $K$ .

*Démonstration.* — L'item (1) est une conséquence facile de l'invariance de  $W^u(K)$  et  $W^s(K)$  par  $f$ , ainsi que de la structure de produit local. Pour montrer l'item (2), il suffit de remarquer que, si une séparatrice instable d'un point périodique  $x$  contient un point de  $K$  autre que  $x$ , alors elle contient une suite de points convergeant vers  $x$ .

Montrons l'item (3) par l'absurde : supposons qu'il existe une suite infinie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points périodiques de type s-bord ; puisque  $K$  est compact, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que cette suite converge vers un point  $y \in K$ , et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les  $x_i$  sont tous dans un petit voisinage de  $y$ , sur lequel  $K$  a une structure produit. On peut donc projeter les  $x_i$  sur la variété instable locale  $W_{loc}^u(y)$  le long de leur variété stable : notons  $\tilde{x}_i$  cette projection. Choisissons trois indices  $i, j, k$  tels que le point  $\tilde{x}_j$  appartienne au segment de  $W_{loc}^u(y)$  joignant  $\tilde{x}_i$  à  $\tilde{x}_k$ . Alors chacune des séparatrices instables issues de  $x_j$  rencontre la variété stable de  $x_i$  ou de  $x_k$ , en un point de  $K$ , ce qui contredit (d'après (2)) le fait que  $x_j$  soit s-bord (voir la figure 2).

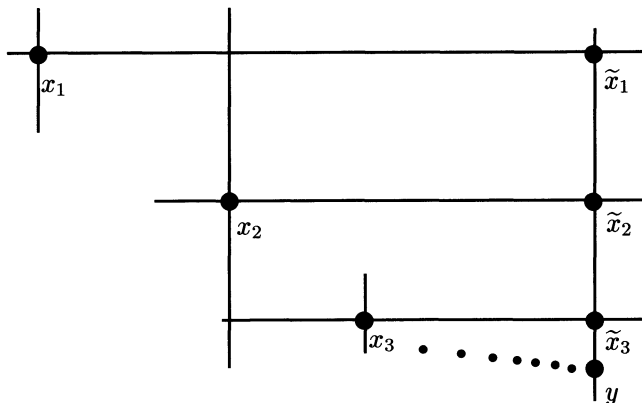


FIGURE 2. Accumulation de points périodiques s-bord

Montrons l'item (4) : soit  $x \in K$  tel que l'une des séparatrices instables issues de  $x$  soit disjointe de  $K$ . Notons  $W_+^u(x)$  cette séparatrice. Notons  $y$  un point d'accumulation de la suite  $(f^{-n}(x)), n \in \mathbb{N}$ , et soit  $(n_i), i \in \mathbb{N}$  une suite strictement croissante telle que les  $f^{-n_i}(x)$  convergent vers  $y$  et soient tous dans un petit voisinage de  $y$  dans lequel  $K$  a une structure de produit. Chaque  $f^{-n_i}(x)$  a une séparatrice disjointe de  $K$  : la preuve de l'item (3) montre déjà que trois points  $f^{-n_i}(x), f^{-n_k}(x)$  et  $f^{-n_l}(x)$  ne peuvent avoir des projections différentes sur la variété instable locale de  $y$  (le long de leurs variétés stables locales). L'ensemble des projections des points  $f^{-n_i}(x)$ , pour  $n_i$  assez grand, sur la variété instable locale de  $y$  se réduit donc à deux points au plus. La convergence de la suite de ces projections vers  $y$  implique que pour  $n_i$  encore plus grand, cette projection est le point  $y$  lui-même. (voir la figure 3). On en déduit que la variété stable du point  $y$  est périodique ; notons  $n$  sa période. Comme  $f^n|_{W^s(y)}$  est

une contraction,  $W^s(y)$  est la variété stable d'un point périodique. La dynamique de  $f^{-n}$  en restriction à cette variété invariante est une dilatation : en particulier, tout point a un nombre fini d'itérés négatifs par  $f$  qui appartiennent à un segment compact fixé de cette variété stable. Or, pour une infinité de valeurs de  $i$ ,  $f^{-n_i}(x)$  appartient à la variété stable locale de  $y$  : cette suite de points est donc finie (et en fait constante), c'est-à-dire que  $x$  est un point périodique de type s-bord.

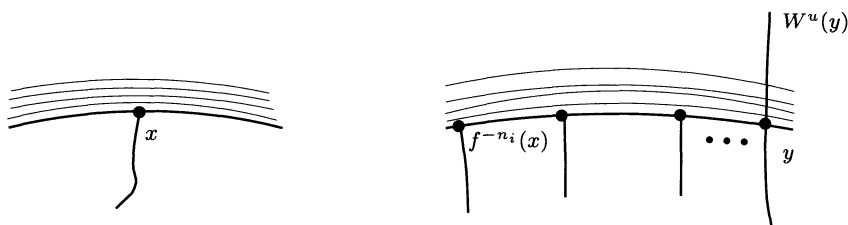


FIGURE 3. Accumulation d'itérés négatifs d'un point s-bord

Prouvons l'item (5). Soit  $x_0 \in W^s(K)$  un point s-bord, il existe un point  $x \in K$  tel que  $x_0 \in W^s(x)$ . Nous avons remarqué qu'il existe un intervalle  $\mathcal{I}$  d'extrémité  $x$ , contenu dans  $W^u(x)$  et disjoint de  $K$ . Les intervalles  $f^n(\mathcal{I})$ ,  $n \geq 0$  restent disjoints de  $K$ , et leur longueur reste supérieure à un nombre  $\varepsilon > 0$ . En effet, la variété instable locale de  $K$  est dilatée par  $f$  : il suffit de prendre  $\varepsilon$  plus petit qu'un minorant de la longueur de  $\mathcal{I}$  et de la longueur des séparatrices instables locales.

Montrons par l'absurde que tout point appartenant à l' $\omega$ -limite de  $x$  possède une séparatrice ne rencontrant pas  $K$ . Soit  $y \in \omega(x)$  appartenant à l'intérieur d'un segment instable  $[y_1, y_2]^u$  dont les extrémités appartiennent à  $K$ . Il existe  $k > 0$  tel que le segment  $[f^{-k}(y_1), f^{-k}(y_2)]^u$  est de longueur inférieure à  $\varepsilon$  ; le point  $f^{-k}(y)$  appartient aussi à  $\omega(x)$ . Soit  $(n_i)$  une suite tendant vers  $+\infty$  telle que  $f^{n_i}(x)$  converge vers  $f^{-k}(y)$ . En utilisant la structure de produit local au voisinage de  $f^{-k}(y)$ , on obtient une contradiction puisque la longueur des  $f^{n_i}(\mathcal{I})$  reste supérieure à  $\varepsilon$ .

De l'item précédent, on déduit que tout point de  $\omega(x)$  est un point périodique s-bord : on en déduit que  $x$  appartient à la variété stable d'une orbite périodique de type s-bord.

Voyons à présent l'item (6). Si  $K$  n'a pas de point s-bord, la structure de lamination locale de  $W^s(K)$  implique que  $W^s(K)$  contient un voisinage de chacun de ses points, donc est un ouvert :  $K$  est donc un attracteur hyperbolique.

Si de plus  $K$  n'a pas de point u-bord,  $W^u(K)$  est ouvert, ce qui implique que  $K = W^s(K) \cap W^u(K)$  est lui aussi ouvert :  $K = S$  et  $f$  est un difféomorphisme d'Anosov.

Enfin démontrons l'item (7). D'après l'item (5), tout point double s-bord est sur la variété stable d'un point périodique double s-bord, dont les deux séparatrices instables

(d'après (2)) sont disjointes de  $K$ . L'orbite de ce point périodique n'a pas d'intersection homoclinique. On en déduit que cette orbite périodique est une pièce basique de  $f$ , qui est minimale dans  $K$  pour la hiérarchie de Smale.  $\square$

**Définition 2.1.2.** — On appellera *séparatrice stable libre* une séparatrice d'un point périodique  $u$ -bord de  $K$  qui est stable et disjointe de  $K$ . On définit de même une *séparatrice instable libre*.

## 2.2. s-arches, u-arches, rectangles

La structure de produit local de  $K$  va nous permettre de distinguer certains rectangles de  $S$  et certains intervalles des courbes invariantes.

**Définition 2.2.1 (Rectangles).** — Soit  $R$  une partie de la surface  $S$ . On dira que  $R$  est un rectangle pour  $K$ , s'il existe deux segments  $I, J \subset \mathbb{R}$  et un homéomorphisme  $h: I \times J \rightarrow R$  ayant les propriétés suivantes :

Notons  $\partial I$  l'ensemble des extrémités du segment  $I$  (En particulier si  $I$  est réduit à un point, alors  $\partial I = I$ ). Alors on a :  $h(\partial I \times J) \subset W^u(K)$  et  $h(I \times \partial J) \subset W^s(K)$ .

Pour tout  $t \in J$ ,  $h(I \times \{t\})$  est soit disjoint de  $W^s(K)$  soit inclus dans  $W^s(K)$ , et de même, pour tout  $s \in I$ ,  $h(\{s\} \times J)$  est soit disjoint de  $W^u(K)$  soit inclus dans  $W^u(K)$ .

On notera  $\partial^s(R) = h(I \times \partial J)$  et on l'appellera le bord stable de  $R$ , et de même  $\partial^u(R) = h(\partial I \times J)$  sera le bord instable de  $R$ .

Remarquons que  $R$  peut être réduit à un intervalle ou même à un point ; on dira dans ce cas que  $R$  est un rectangle dégénéré.

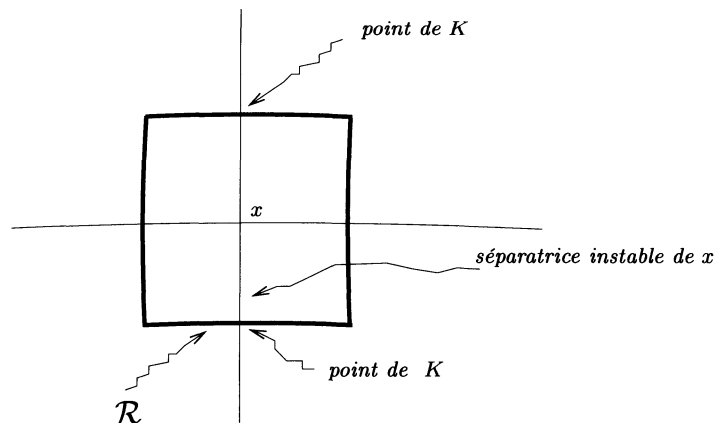


FIGURE 4. Situation interdite



**Remarque.** — Avec la définition ci-dessus, si  $x$  est un point périodique de type s-bord contenu dans un rectangle  $R$ , alors  $x$  est sur le bord stable de  $R$  : en effet, d'après la proposition 2.1.1, l'une de ses séparatrices instable est libre (c'est-à-dire disjointe de  $K$ ) (voir figure 4).

On utilisera parfois la notion de *rectangle immergé*, que l'on définit de façon identique à la définition ci-dessus, à ceci près que  $h$  est un homéomorphisme local, et non pas un homéomorphisme.

**Définition 2.2.2 (Arches).** — On appellera *u-arche* tout segment de variété instable d'un point de  $K$ , d'extrémités sur  $K$  et ne rencontrant  $K$  qu'en ses extrémités.

**Définition 2.2.3 (Arches équivalentes).** — On dira que deux *u-arches* différentes sont équivalentes s'il existe un rectangle non-dégénéré, éventuellement immergé, dont le bord instable est l'union des deux arches.

On définit de façon analogue la notion de *s-arches équivalentes*.

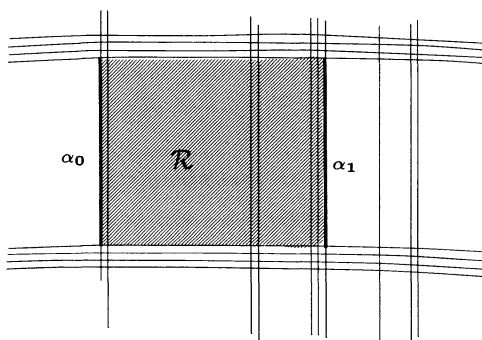


FIGURE 5. Arches équivalentes

### Remarques

0. Dans la définition ci-dessus nous avons imposé aux rectangles d'être non dégénérés pour éviter la pathologie représentée sur la figure 6
1. L'«équivalence» d'arches définie ci-dessus est bien une relation d'équivalence si l'on impose de plus qu'une arche est équivalente à elle-même. La réunion de deux rectangles ayant un côté commun est encore un rectangle qui peut cependant être seulement immergé même si les deux rectangles initiaux sont plongés. Ceci garantit la transitivité de la relation.
2. Si  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont deux *u-arches* équivalentes, alors, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f^n(\alpha_0)$  et  $f^n(\alpha_1)$  sont équivalentes : il suffit de considérer l'image par  $f^n$  du rectangle réalisant l'équivalence entre  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ .

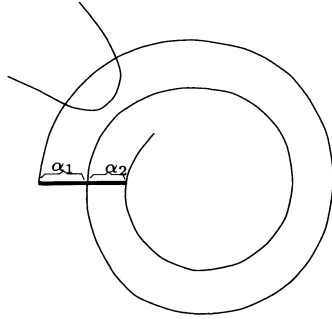


FIGURE 6. Deux arches  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  non équivalentes, dont l'union forme un rectangle dégénéré

3. D'après la remarque ci-dessus,  $f$  agit sur les classes d'équivalence d'arches : on pourra donc parler de *l'orbite pour  $f$  d'une classe d'équivalence d'arches*.
4. Soient  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  deux u-arches équivalentes et soit  $R$  le rectangle réalisant l'équivalence. L'intersection  $W^s(K) \cap R$  est réduite au bord stable  $\partial^s(R)$  de  $R$  (voir la figure 7).

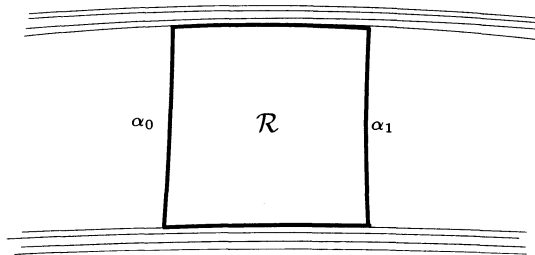


FIGURE 7. L'intérieur d'un rectangle réalisant l'équivalence de deux u-arches ne rencontre pas  $W^s(K)$

5. Dans la définition d'arches équivalentes, nous sommes obligés d'accepter des rectangles non-plongés quand  $K$  admet des points double-bord. En effet, la configuration suivante (voir figure 8) est possible :

Plus précisément, on peut montrer que si le rectangle réalisant l'équivalence entre deux arches  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  n'est pas plongé, ces deux arches ont leurs deux extrémités sur la même séparatrice. De plus, cette séparatrice est un double-bord. Enfin chacune des arches  $\alpha_i$  joint les deux côtés de la séparatrice.

6. Il existe exactement un rectangle définissant l'équivalence entre deux arches différentes.

Le but de ce paragraphe est de prouver :

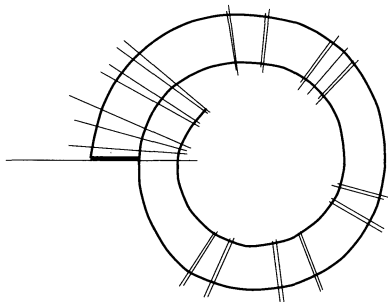


FIGURE 8. Un rectangle non-plongé

**Proposition 2.2.4.** — *L'ensemble des orbites (pour  $f$ ) de classes d'équivalence de  $u$ -arches est fini.*

*Démonstration*

**Lemme 2.2.5.** — *Fixons  $I$  un segment compact inclus dans une variété stable d'un point périodique de type  $s$ -bord, et ne contenant pas le point périodique. Alors l'ensemble des classes d'équivalence d'arches ayant au moins une extrémité sur  $I$  est fini.*

*Démonstration du lemme.* — Le segment  $I$  pouvant *a priori* être un double-bord, fixons un des côtés où  $I$  est un bord et considérons les segments de variétés instables d'origine sur  $I$  et partant de ce côté. Soit  $x$  un point de  $I \cap K$ . On sait que  $x$  n'est pas périodique, donc d'après l'item (4) de la proposition 2.1.1, la séparatrice instable issue de  $x$  (et partant du côté fixé) rencontre  $K$  en d'autres points. Par compacité de  $K$ , il existe un premier point  $y$  d'intersection de cette séparatrice avec  $K$ , et le segment instable  $[x, y]^u$  est une  $u$ -arche. Inversement, toute extrémité dans  $I$  d'une  $u$ -arche est un point de  $I \cap K$  :  $K \cap I$  est donc égal à l'ensemble des extrémités dans  $I$  de  $u$ -arches partant du côté fixé.

D'autre part, quitte à considérer l'image de la  $u$ -arche  $[x, y]^u$  par une puissance négative de  $f$ , on peut la supposer contenue dans un ouvert ayant une structure de produit local. On en déduit que, pour tout  $x \in K \cap I$ , il existe un voisinage  $U_x$  de  $x$  dans  $I$  tel que, pour tout  $z \in U_x \cap K$ , les  $u$ -arches issues de  $x$  et de  $z$  sont équivalentes : on en déduit le lemme par compacité de  $I \cap K$ .  $\square$

La proposition se déduit du lemme en considérant un domaine fondamental (compact) sur chaque séparatrice de type bord : chaque  $u$ -arche possède alors un itéré par  $f$  ayant l'une de ses extrémités sur les segments fixés, ce qui prouve la finitude de l'ensemble des orbites de classes d'équivalence d'arches.  $\square$

**Définition 2.2.6.** — *On appellera domaine d'une classe d'arche l'union des rectangles réalisant l'équivalence entre deux éléments de cette classe.*

*On dira qu'une arche est extrémale si elle est incluse dans le bord du domaine de sa classe (on voit facilement qu'une classe d'équivalence possède au plus 2 arches extrémales).*

### 2.3. Zips et attracteurs hyperboliques

Définissons un type de classe d'équivalence d'arches très particulier :

**Lemme 2.3.1.** — *Soit  $\alpha$  une  $u$ -arche et  $A$  sa classe d'équivalence. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1.  *$A$  possède au plus une arche extrémale, et n'est pas réduite à  $\alpha$ ,*
2.  *$A$  ne possède pas d'arche extrémale,*
3. *il existe  $n \neq 0$  tel que  $f^n(A) = A$ ,*
4. *il existe  $n \neq 0$  tel que  $f^n(\alpha)$  soit équivalente à  $\alpha$ ,*
5. *soit  $W$  une séparatrice stable sur laquelle  $\alpha$  possède une extrémité. Alors  $\alpha$  est équivalente à toute  $s$ -arche ayant une extrémité sur  $W$  (et partant du même côté de  $W$  que  $\alpha$ , si  $W$  est un double  $s$ -bord).*

Indiquons brièvement la démarche à suivre. L'équivalence entre (3) et (4) vient directement de la définition d'équivalence d'arches. On montrera que (4) implique (5) en remarquant que les arches ayant une extrémité sur  $W$  entre  $\alpha$  et  $f^n(\alpha)$  (et du même côté) sont alors équivalentes à  $\alpha$  ; cet intervalle contient un domaine fondamental de  $W$ , et l'on couvre alors  $W$  par les itérés de cet intervalle. Le fait que (5) implique (3) se déduit de la périodicité de la séparatrice  $W$ . Le fait que (1) ou (2) implique (5) peut se voir de la façon suivante : le choix d'une orientation de  $\alpha$  permet (unicité du rectangle définissant l'équivalence) d'orienter toutes les arches de la classe  $A$  de  $\alpha$  ; l'ensemble des origines (ou des extrémités) des arches de la classe  $A$  est l'intersection d'un intervalle de  $W$  avec  $K$  ; les extrémités, si elles existent, de cet ensemble doivent correspondre à des arches extrémales. (Nous laissons au lecteur le soin d'achever la démonstration de ce lemme.)

**Définition 2.3.2.** — *Si une classe d'équivalence de  $u$ -arches vérifie l'une des propositions du lemme 2.3.1, on dit que la classe d'équivalence  $A$  est un zip. On définit de même les zips pour les classes d'équivalence de  $s$ -arches.*

Un zip  $A$  sera dit *dégénéré* si une arche  $\alpha \in A$  a ses deux extrémités sur la même séparatrice stable (qui est dans ce cas un double  $s$ -bord) (voir la figure 10).

**Exemple.** — Si  $K$  est un attracteur hyperbolique transitif, non réduit à une orbite périodique, alors toute classe d'équivalence de  $s$ -arches est un zip non dégénéré : en effet toute séparatrice instable d'un point de  $K$  est incluse dans  $K$ , ce qui interdit l'existence de  $s$ -arche extrémale.

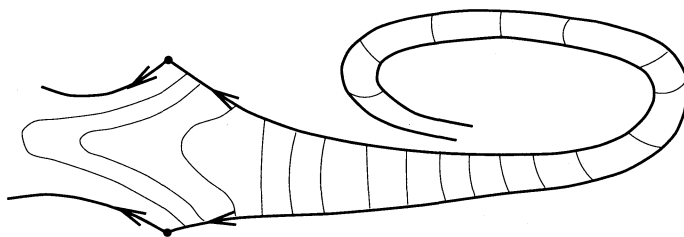


FIGURE 9. Un zip

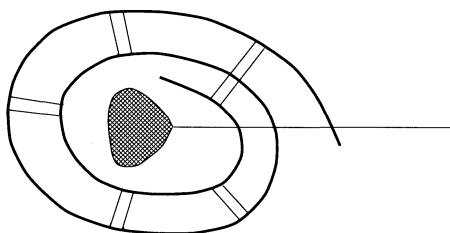


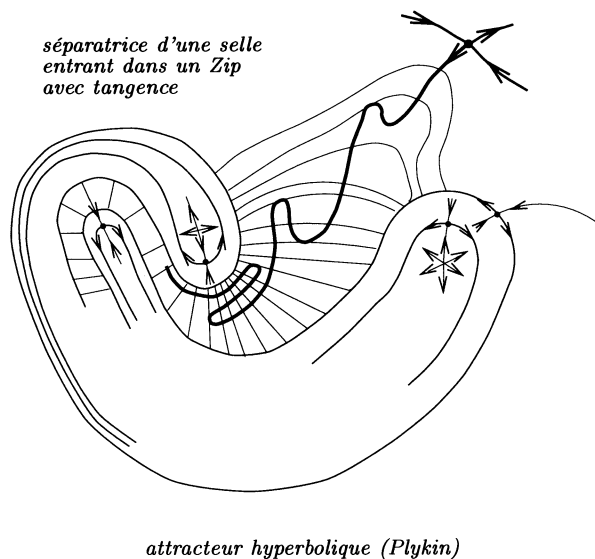
FIGURE 10. Un zip dégénéré

Le bassin d'attraction d'un attracteur hyperbolique non-périodique est feuilleté par les variétés stables des points de l'attracteur. L'hypothèse de transversalité forte des difféomorphismes de Smale entraîne alors d'importantes restrictions sur les variétés instables des autres pièces basiques qui rencontrent ce bassin d'attraction. Ces conditions sont si restrictives que, très souvent, un difféomorphisme  $f$  d'une surface compacte vérifiant l'Axiome A mais possédant un attracteur hyperbolique ne peut vérifier la transversalité forte : ceci fournit les seuls exemples (connus à ce jour) d'ouverts, pour la  $C^1$ -topologie, de difféomorphismes structurellement instables de surfaces compactes. Plus précisément :

*Parenthèse heuristique sur les ouverts d'instabilité :*

**Proposition 2.3.3.** — *Soit  $f$  un difféomorphisme d'une surface compacte, possédant un attracteur hyperbolique non-périodique transitif  $A$  et un point périodique  $p$ . On suppose que la variété instable de  $p$  rencontre le bassin d'attraction  $W^s(A)$  mais n'est pas topologiquement transverse au feuilletage défini sur  $W^s(A)$  par les variétés stables des points de  $A$ . Alors  $f$  appartient à l'intérieur, pour la  $C^1$ -topologie, de l'ensemble des difféomorphismes  $C^1$ -structurellement instables.*

La proposition se montre aisément en utilisant le fait que l'attracteur  $A$ , sa variété stable locale  $W_{loc}^s(A)$ , le point périodique  $p$  et sa variété instable locale dépendent

FIGURE 11.  $C^1$ -ouvert de difféomorphismes instables

continûment ( $C^0$ ) de la dynamique  $f$ , et le fait qu'une courbe ne soit pas topologiquement transverse à un feuilletage persiste par  $C^0$ -perturbations de la courbe et du feuilletage.

*Questions :*

1. Tout difféomorphisme  $f$ , appartenant à l'intérieur, pour la  $C^1$ -topologie, de l'ensemble des difféomorphismes  $C^1$ -instables, possède-t-il (quitte à remplacer  $f$  par  $f^{-1}$ ) un attracteur hyperbolique  $A$  et une selle dont la variété instable n'est pas topologiquement transverse au feuilletage stable de  $W^s(A)$  ?
2. Soit  $S$  une surface compacte. Les difféomorphismes vérifiant l'axiome A (mais pas forcément la transversalité forte) sont-ils denses dans  $\text{Diff}^1(S)$  pour la  $C^1$ -topologie ? (Rappelons que les difféomorphismes des surfaces vérifiant l'Axiome A ne sont pas denses pour la  $C^2$ -topologie (voir par exemple [PaTa]) et qu'en dimension  $\geq 3$  ils ne sont pas denses pour la  $C^1$ -topologie.

Fermons à présent cette parenthèse sur les ouverts d'instabilité, et voyons les conséquences de l'hypothèse de transversalité forte, pour un difféomorphisme de Smale possédant un attracteur non périodique :

**Théorème 2.3.4.** — *Soit  $f$  un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte sans bord, possédant un attracteur hyperbolique transitif  $K$  non-périodique. Toute pièce basique  $\Lambda$ , dont la variété instable  $W^u(\Lambda)$  rencontre le bassin d'attraction  $W^s(K)$ , est réduite à une orbite périodique. De plus,  $\Lambda$  est soit une orbite périodique répulsive,*

soit une selle dont chaque séparatrice stable est incluse dans le bassin de répulsion d'une orbite périodique répulsive.

**Lemme 2.3.5.** — Soit  $x \in \Lambda$  ayant une séparatrice  $c$  qui rencontre le bassin d'attraction de  $K$ . Alors  $x$  est périodique, et  $c$  est entièrement contenue dans le bassin d'attraction de  $K$ . En particulier, la variété instable de  $\Lambda$  ne contient aucune  $u$ -arche qui rencontre le bassin d'attraction de  $K$ .

*Démonstration.* — La séparatrice  $c$  rencontre transversalement une variété stable d'un point de  $K$  en un point  $y$ . Ce point  $y$  appartient soit à une  $s$ -arche, soit à une séparatrice stable libre. Comme un attracteur hyperbolique ne contient pas de  $s$ -bord, toute séparatrice stable libre issue d'un point de  $K$  est accumulée par des  $s$ -arches. La séparatrice instable  $c$  rencontre donc au moins une  $s$ -arche  $\alpha$  à extrémités sur  $K$ . La classe d'équivalence de  $\alpha$  est un zip  $Z$ . Le domaine du zip est l'image d'une immersion injective de  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ , où l'image de  $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$  est l'union des séparatrices instables bordant  $Z$  et où l'image des segments  $\{t\} \times [0, 1]$  sont les arches équivalentes à  $\alpha$ . On peut choisir cette immersion de telle façon que lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , la longueur de l'arche  $\{t\} \times [0, 1]$  tende vers 0.

La courbe  $c$  étant transverse aux  $s$ -arches de  $K$  et disjointe des séparatrices instables, elle « traverse entièrement  $Z$  » c'est-à-dire coupe toutes les  $s$ -arches de  $Z$ . Donc toute composante connexe de l'intersection  $c$  avec le domaine du zip  $Z$  contient l'attracteur dans son adhérence (comme les séparatrices du bord du zip). Cette composante connexe est donc de longueur infinie, et n'est contenue dans aucun segment compact de  $c$ . En particulier cette composante connexe n'est pas incluse dans une  $u$ -arche, ce qui implique (d'après la proposition 2.1.1) que  $c$  est une séparatrice d'un point  $x$  périodique, et est incluse dans le domaine de  $Z$ .  $\square$

**Remarque.** — Avec les hypothèses du lemme, la séparatrice instable  $c$  ne peut couper aucune séparatrice libre de  $K$  : en effet nous venons de montrer qu'elle est entièrement incluse dans le domaine d'un zip.

*Démonstration du théorème.* — Soit  $\Lambda$  une pièce basique dont la variété instable rencontre  $W^s(K)$ . On suppose que  $\Lambda$  n'est pas une orbite périodique répulsive. Rappelons que, pour tout point périodique  $x \in \Lambda$ , sa variété instable  $W^u(x)$  est dense dans  $W^u(\Lambda)$  donc rencontre  $W^s(K)$ . Le lemme 2.3.5 implique donc que tout point périodique de  $\Lambda$  est  $s$ -bord. Par ailleurs, une pièce basique ne possède qu'un nombre fini de points périodiques  $s$ -bords. Donc  $\Lambda$  est réduite à une orbite périodique de type selle.

Soit  $W^s$  l'une des séparatrices stables de  $\Lambda$ , et soit  $\Lambda_2$  une pièce basique dont la variété instable rencontre  $W^s$ . Pour achever la démonstration du théorème, nous devons montrer que  $\Lambda_2$  est une orbite périodique répulsive : montrons-le par l'absurde. Si  $\Lambda_2$  est de type selle, alors sa variété instable contient une séparatrice qui coupe transversalement  $W^s(\Lambda)$  donc s'accumule sur  $W^u(\Lambda)$  (d'après le  $\lambda$ -lemma). On en

déduit que cette séparatrice rencontre le bassin d'attraction de  $K$ , et nous avons vu que  $\Lambda_2$  est donc réduite à une selle périodique. Cependant, cette séparatrice n'est pas incluse dans  $W^s(K)$  (car rencontre  $W^s(\Lambda)$ ), ce qui contredit le lemme 2.3.5.  $\square$

**Remarque.** — Le théorème implique que les points du graphe de Smale au-dessus de  $K$  forment au plus deux étages : (éventuellement) un de selles, et un de sources, voir figure 12 :

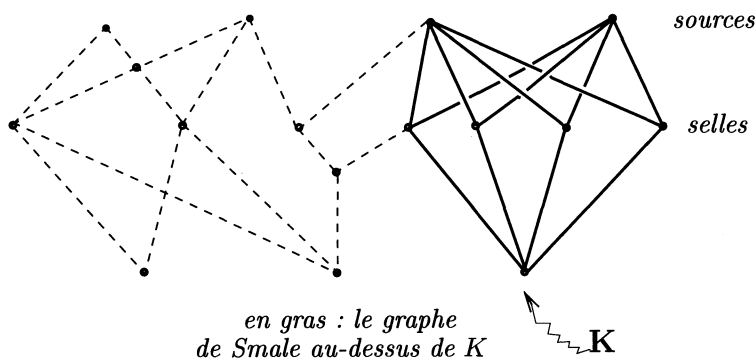


FIGURE 12. Le graphe de Smale au-dessus d'un attracteur non-périodique

**Remarque.** — Dans tout ce travail, nous avons introduit la notion d'ensemble hyperbolique saturé afin de classifier non seulement les pièces basiques mais aussi la façon dont s'intersectent les variétés stables et instables de pièces basiques différentes. Le théorème 2.3.4 nous dit que les intersections des variétés stables d'un attracteur hyperbolique et des variétés instables des autres pièces basiques sont très simples, et ne poseront aucun problème de classification.

Plus précisément, nous avons vu que toute séparatrice instable située au-dessus de l'attracteur  $A$  pour la hiérarchie de Smale est incluse dans un zip. Comme elle est transverse aux variétés stables, elle coupe toutes les arches du zip exactement une fois. Orientons les s-arches d'un zip de la façon suivante : l'orientation dynamique des séparatrices instables du zip (fuyant le point périodique) suivie de l'orientation de l'arche donne l'orientation de la surface. Ceci ordonne les points d'intersection des séparatrices instables situées au-dessus de l'attracteur et coupant une arche donnée. Cet ordre ne dépend pas de l'arche choisie dans un zip donné. Pour décrire complètement l'intersection du bassin d'attraction de  $A$  avec les variétés instables de pièces basiques (de type selle) situées au-dessus de  $A$ , il suffit de donner pour chaque zip de  $A$  la liste ordonnée des séparatrices incluses dans ce zip.

Par ailleurs, pour classifier les ensembles saturés, nous considérerons au chapitre 5 des partitions de Markov par rectangles disjoints, ce qui nous amènera à restreindre



notre étude aux ensembles saturés ne possédant ni attracteur ni répulseur hyperbolique non-périodique. Le théorème 2.3.4 nous dit d'une part que cette hypothèse n'est pas trop restrictive (puisque les difféomorphismes de Smale possédant des attracteurs ou des répulseurs non-périodiques sont très particuliers), et d'autre part qu'il sera aisé de compléter la classification en classifiant les attracteurs hyperboliques (sans trop s'occuper des intersections des variétés invariantes).

Pour voir la classification des attracteurs hyperboliques comme un cas particulier de celle des ensembles saturés de type selle, indiquons comment associer canoniquement un ensemble saturé, de type selle, à tout attracteur hyperbolique non-périodique. Il suffit, comme le fait Smale pour obtenir les difféomorphismes «DA» («dérivés d'Anosov») (voir [Sm] page 789 et [Wi1]), de «gonfler» les variétés instables de tous les points périodiques de plus petite période de l'attracteur. Ceci se fait par une bifurcation générique au voisinage de chacune de ces orbites périodiques, cette bifurcation étant de type selle-nœud ou de type doublement de période, suivant que les valeurs propres associées à cette orbite périodique sont positives ou négatives. C'est pourquoi nous allons nous concentrer (aux chapitres 5 et 6) sur l'étude des difféomorphismes n'ayant ni attracteur ni répulseur hyperbolique non-trivial.

#### 2.4. Où l'on utilise le fait que $S$ est de genre fini

Ce paragraphe présente, à plusieurs reprises, un argument géométrique simple qui va être la clef de deux théorèmes principaux de notre travail. La version la plus simple de cet argument est la remarque suivante :

**Remarque.** — Si  $D$  est un domaine dont les itérés par  $f$  sont deux-à-deux disjoints, alors  $D$  est homéomorphe à un domaine plan.

Une version plus élaborée est le résultat classique suivant :

**Théorème 2.4.1.** — *Etant donnée une surface compacte, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $N$ -uplet de courbes simples disjointes, il en existe deux dans la même classe d'homotopie libre.*

Faute d'avoir trouvée une référence où ce résultat est explicitement démontré, voici en deux mots l'argument de la preuve :

*Démonstration.* — une surface connexe compacte de caractéristique d'Euler  $\chi < 0$ , et dont le bord est formé de  $r$  courbes, se découpe en pantalons (disque à deux trous) (voir [FLP, exposé 4, appendice]) ; un calcul de caractéristique d'Euler montre qu'une telle décomposition est formée de  $-\chi$  pantalons, dont les bords forment un système de  $r/2 - 3\chi/2$  courbes simples disjointes non-homotopes. Toute autre courbe simple, disjointe des précédentes, soit borde un disque, soit est homotope à l'une des courbes précédentes.

Soit à présent un système  $\Gamma$  de courbes simples disjointes non-homotopes entre elles. Découpons la surface le long de ces courbes. On obtient des surfaces à bord dont aucune composante n'est une sphère, un disque, un tore ou un anneau, donc chacune est de caractéristique d'Euler strictement négative. Ceci montre que l'on peut compléter le système de courbes  $\Gamma$  de façon à obtenir un découpage en pantalons ; l'argument précédent montre que  $\Gamma$  contient au plus  $r/2 - 3\chi/2$  courbes.  $\square$

Voyons à présent une conséquence dynamique de cet argument topologique.

**Lemme 2.4.2.** — Soit  $K$  un ensemble hyperbolique saturé d'un difféomorphisme de Smale  $f$ . Soit  $\gamma$  une  $u$ -arche dont les extrémités  $x$  et  $y$  appartiennent à deux séparatrices stables ( $s$ -bords) distinctes  $W_1^s$  et  $W_2^s$  respectivement. Il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^n$  laisse invariante les séparatrices  $W_1^s$  et  $W_2^s$ , et que la courbe fermée  $\delta$  formée des 2 arches  $\gamma$  et  $f^n(\gamma)$ , et des segments stables joignant  $x$  à  $f^n(x)$  et  $y$  à  $f^n(y)$  borde un disque  $D$  d'intérieur disjoint de  $K$ .

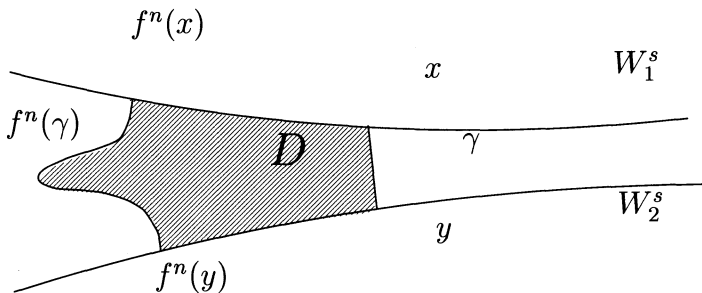


FIGURE 13. Pas de genre entre les arches

*Démonstration.* — Choisissons d'abord  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^n$  laisse globalement invariante chacune des séparatrices  $W_i^s$ . On remarque que, même si les deux séparatrices sont des double-bords,  $f^n(\gamma)$  est une  $u$ -arche partant et arrivant des mêmes côtés de  $W_1^s$  et  $W_2^s$  que  $\gamma$  : en effet, par hypothèse,  $f$  préserve l'orientation.

Appelons  $\delta$  la courbe fermée, formée des deux arches  $\gamma$  et  $f^n(\gamma)$ , et des segments stables joignant  $x$  à  $f^n(x)$  et  $y$  à  $f^n(y)$ . C'est une courbe fermée simple : en effet  $\gamma$  et  $f^n(\gamma)$  sont des  $u$ -arches, donc ne peuvent rencontrer les segments stables qu'en leurs extrémités, et les deux segments stables contenus dans  $\delta$  sont sur deux séparatrices distinctes.

Les itérés  $f^{2n \cdot i}(\delta)$  sont tous disjoints, puisque les segments instables sont des  $u$ -arches distinctes, et on vérifie facilement que les segments stables sont deux-à-deux disjoints. On utilise alors le théorème 2.4.1 pour en déduire qu'il existe  $i, j$  tels que  $f^{2n \cdot i}(\delta)$  et  $f^{2n \cdot j}(\delta)$  soient dans la même classe d'homotopie : en conséquence, ils bordent soit des disques disjoints, soit une couronne.

Montrons par l'absurde qu'ils ne peuvent pas border une couronne  $C$ .

La variété stable  $W_1^s$  ne traverse aucune courbe  $f^{n \cdot p}(\delta)$ , puisque les deux arches instables de  $\delta$  sont du même côté de  $W_1^s$  (voir la figure 14).

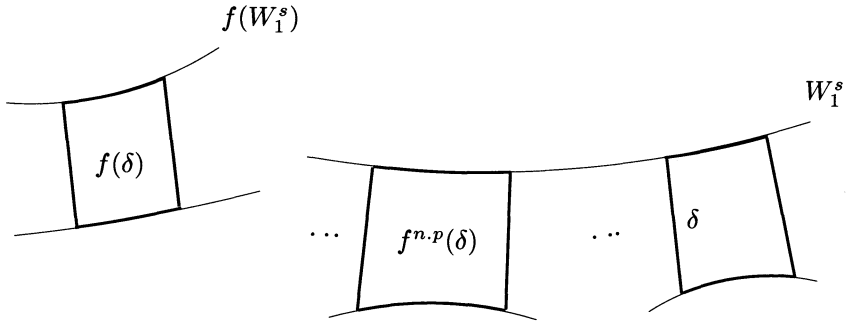


FIGURE 14. La variété stable  $W_1^s$  ne traverse pas la courbe  $f^{n \cdot p}(\delta)$

Par ailleurs  $f^{(2i-2j) \cdot n}(C)$  est une couronne dont le bord a une composante connexe et une seule en commun avec le bord de  $C$  : ces deux couronnes sont donc soit adjacentes soit incluses l'une dans l'autre. La réunion  $C \cup f^{(2i-2j) \cdot n}(C)$  est encore une couronne  $\mathcal{A}$ . La réunion des bords  $\partial C \cup \partial f^{(2i-2j) \cdot n}(C)$  est formée de trois courbes simples disjointes  $a, b$  et  $c$ , telles que  $a$  et  $c$  bordent  $\mathcal{A}$  et que  $b$  est une courbe essentielle contenue dans l'intérieur de  $\mathcal{A}$ . Remarquons que  $W_s^1$  a un segment en commun avec  $b$  mais ne traverse ni  $a$  ni  $b$  ni  $c$ , et donc se trouve entièrement contenue dans une couronne bordée soit par  $a$  et  $b$ , soit par  $b$  et  $c$ . Ceci contredit le fait que  $W_1^s$  rencontre  $a$  et  $c$ .

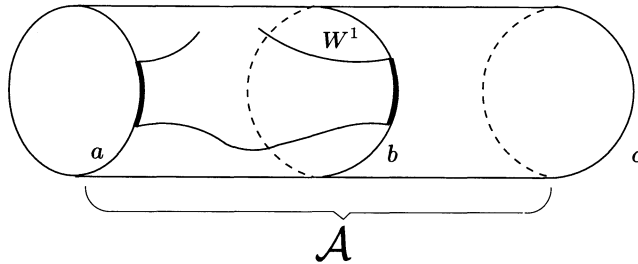


FIGURE 15. La variété stable et les couronnes

Il existe donc un itéré par  $f$  de  $\delta$  qui borde un disque donc tous les itérés de  $\delta$  bordent des disques : notons  $D$  celui qui est bordé par  $\delta$ . La non-existence de couronnes implique que ces disques sont deux-à-deux disjoints. Remarquons que les seules variétés stables de  $K$  qui rencontrent le bord de  $D$  sont  $W_1^s$  et  $W_2^s$ , et qu'elles ne traversent pas ce bord : toute variété stable de  $K$  rencontrant l'intérieur de  $D$  est

donc entièrement contenue dans  $D$ . La pièce basique dont elle provient est donc elle aussi entièrement contenue dans  $D$ . Chaque itéré  $f^{2 \cdot n \cdot p}(D)$  contiendrait au moins une pièce basique ce qui est impossible. On a bien montré que  $D$  est d'intérieur disjoint de  $K$ .  $\square$

### Corollaire 2.4.3

1. Avec les hypothèses du lemme ci-dessus, si  $p > 0$  est le plus petit entier tel que  $f^p(W_1^s) = W_1^s$ , alors  $f^p(W_2^s) = W_2^s$ , et la courbe  $\delta$  peut être construite à l'aide des arches  $\gamma$  et  $f^p(\gamma)$ .
2. Soit  $\gamma$  une  $u$ -arche dont les extrémités sont sur deux séparatrices différentes,  $W_1^s$  et  $W_2^s$ . Alors toute arche  $\gamma'$  ayant une extrémité sur  $W_1^s$  a son autre extrémité sur  $W_2^s$  ou sur  $W_1^s$ .
3. De plus, si l'autre extrémité de  $\gamma'$  est sur  $W_2^s$  alors le quadrilatère obtenu en joignant les deux arches  $\gamma$  et  $\gamma'$  par les segments stables des  $W_i^s$  qui joignent leurs extrémités borde un disque d'intérieur disjoint de  $K$ .
4. Enfin, orientons les séparatrices stables  $W_i^s$  vers le point périodique ; alors  $\gamma$  coupe  $W_1^s$  et  $W_2^s$  suivant la même orientation.

*Démonstration.* — Pour prouver l'item 1 il faut montrer que les deux séparatrices stables ont même période. Soit  $n$  un entier défini dans le lemme ci-dessus et soit  $0 < p \leq n$  tel que  $f^p$  laisse globalement invariante  $W_1^s$ . Alors  $f^p(\gamma)$  est une  $u$ -arche ayant une extrémité  $f^p(x)$  dans l'intervalle stable  $[x, f^n(x)]^s$ , qui part du même côté de  $W_1^s$  que  $\gamma$  (car  $f$  préserve l'orientation). Cette arche entre donc dans  $D$  au point  $f^p(x)$ . On en déduit que  $f^p(\gamma)$  est incluse dans  $D$ , et donc que  $f^p(y)$  appartient à  $W_1^s \cup W_2^s$ , et donc que  $f^p(W_2^s) = W_2^s$ .

Montrons l'item 2. Il existe  $m$  tel que  $\gamma'$  soit incluse dans le disque, d'intérieur disjoint de la pièce basique, qui est bordé par  $\gamma$ ,  $f^m(\gamma)$  et les segments stables qui les joignent, dont l'existence est assurée par le lemme ci-dessus. Les deux cas de l'item 2 sont obtenus par le fait qu'un segment instable, qui entre dans ce disque par l'un des deux bords stables, ne peut en ressortir que par l'un de ces bords stables. Si l'autre extrémité de  $\gamma'$  est sur  $W_2^s$ , alors il suffit de découper le disque précédent le long de  $\gamma'$ , pour obtenir le disque annoncé dans l'item 3.

Pour montrer l'item 4, il suffit de constater que l'orientation « vers le point périodique » des variétés stables, induit sur les côtés stables  $[x, f^p(x)]^s$  et  $[y, f^p(y)]^s$  de  $D$  l'orientation allant de  $x$  vers  $f^p(x)$  et de  $y$  à  $f^p(y)$ .  $\square$

De l'item (4) du corollaire 2.4.3, on déduit facilement le corollaire suivant :

**Corollaire 2.4.4.** — *Le « fer à cheval » représenté par la figure 16 n'est pas une pièce basique d'un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte.*

*Démonstration.* — (voir figure 16) L'arche stable  $\alpha$  coupe les variétés instables des points fixes  $p$  et  $q$  suivant des orientations différentes.  $\square$

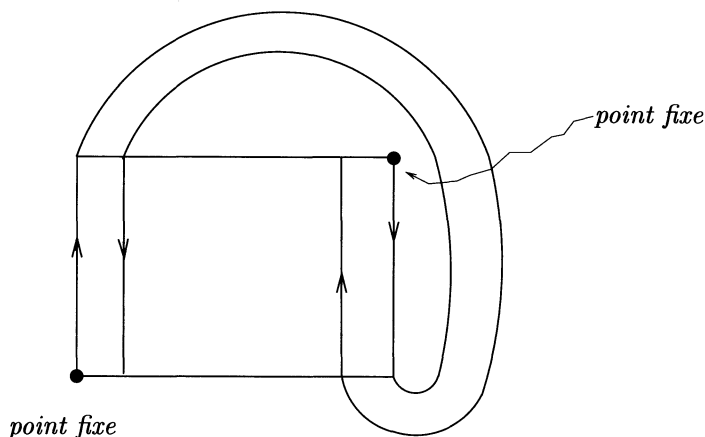


FIGURE 16. Cet ensemble hyperbolique n'est pas saturé

Par un raisonnement analogue à celui du lemme 2.4.2 on montre :

**Lemme 2.4.5.** — Soit  $\gamma$  une  $u$ -arche dont les extrémités sont situées sur la même séparatrice stable  $W^s$ , (et partant du même côté, si cette séparatrice est un double-bord). Alors la courbe fermée obtenue en joignant les extrémités de  $\gamma$  par le segment stable qui les joint est une courbe simple fermée qui borde un disque  $D$  d'intérieur disjoint de  $K$ . De plus, les itérés  $f^n(D)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  sont deux-à-deux disjoints.

En conséquence, tout segment instable entrant dans ce disque est une  $u$ -arche dont les extrémités sont contenues dans le segment de  $W^s$  joignant les extrémités de  $\gamma$ .

*Démonstration.* — Notons  $I$  le segment de variété stable joignant les extrémités de  $\gamma$ , et notons  $\delta = I \cup \gamma$ . Comme  $I$  et  $\gamma$  ne se touchent qu'en leurs extrémités, il est clair que  $\delta$  est une courbe fermée simple. Notons  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que tous les itérés de  $I$  par  $f^n$  soient deux-à-deux disjoints. Alors les itérés de  $\delta$  par  $f^n$  sont deux-à-deux disjoints : ceci permet de recommencer l'argument de la démonstration du lemme 2.4.2, et donc de montrer que  $\delta$  est le bord d'un disque  $D$  dont l'intérieur est disjoint de  $K$ , et dont tous les itérés par  $f^n$  sont deux-à-deux disjoints.

Montrons à présent que tous les itérés de  $D$  sont deux-à-deux disjoints. Il suffit bien sûr de montrer que tout itéré de  $D$  est disjoint de  $D$ . Soit  $i$  tel que  $f^i(D) \cap D \neq \emptyset$ . On sait que le bord d'un de ces deux disques n'est pas inclus dans l'intérieur de l'autre (puisque l'intérieur des disques est disjoint de  $K$ ). On en déduit que les deux bords se rencontrent, et donc soit  $\gamma = f^i(\gamma)$  (c'est-à-dire  $i = 0$ ), soit  $I \cap f^i(I) \neq \emptyset$ . Donc l'une des extrémités de ces intervalles appartient à l'autre. Comme  $\gamma$  et  $f^i(\gamma)$  partent

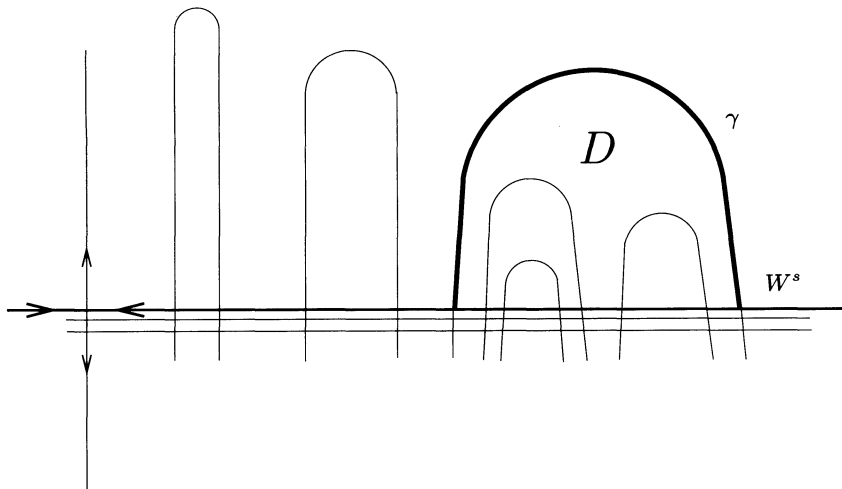


FIGURE 17. Disque associé à une arche dont les deux extrémités sont sur la même séparatrice

du même côté de la séparatrice, on en déduit que  $\gamma \subset f^i(D)$  ou  $f^i(\gamma) \subset D$ . Dans le premier de ces cas, on en déduit  $D \subset f^i(D)$  et donc  $I \subset f^i(I)$  ce qui implique l'existence d'un point fixe de  $f^i$  dans  $I$  si  $i \neq 0$ . On raisonne de même si  $f^i(\gamma) \subset D$ . On a donc montré :

$$D \cap f^i(D) \neq \emptyset \Rightarrow i = 0$$

□

**Lemme 2.4.6.** — Soit  $\gamma$  une  $u$ -arche joignant les deux côtés d'une même séparatrice double  $s$ -bord,  $W^s$ . Notons  $\delta$  la courbe fermée simple obtenue en joignant les extrémités de  $\gamma$  par le segment stable de  $W^s$ . Alors il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^n(\delta) \cup \delta$  soit le bord d'une couronne dont l'intersection avec  $W^s(K)$  est un segment contenu dans  $W^s$ .

On en déduit que toute  $u$ -arche ayant une extrémité sur  $W^s$  a ses deux extrémités sur  $W^s$ .

La démonstration est tout à fait dans le même esprit que celles des deux lemmes précédents, elle sera donc laissée au lecteur.

**Définition 2.4.7.** — On appelle *impasse* tout disque, d'intérieur disjoint de la pièce basique et dont le bord se réduit à une  $u$ -arche et une  $s$ -arche.

De la proposition 2.2.4 on déduit :

**Corollaire 2.4.8.** — Les deux arches formant le bord d'une impasse sont extrémales (dans leurs classes d'équivalence d'arches). En conséquence, l'ensemble des orbites des impasses est fini.

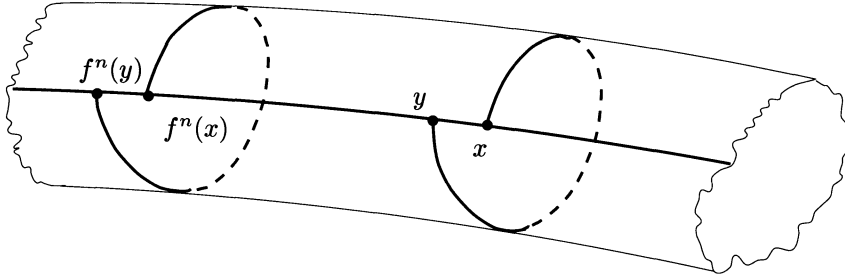


FIGURE 18. Arche joignant les deux côtés d'une séparatrice double-bord

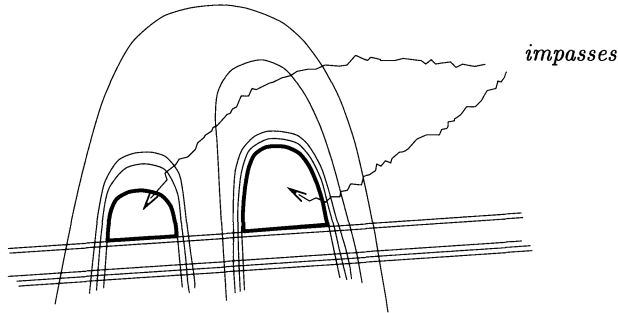


FIGURE 19. Une impasse

Nous avons défini un zip, comme étant une classe d'équivalence d'arches infinie (sans arches extrémales). Les deux séparatrices sur lesquelles s'appuient les arches du zip sont alors, en quelque sorte, asymptotes, se rapprochant indéfiniment l'une de l'autre : nous pourrions d'ailleurs, au chapitre 8 de ce travail, refermer le zip, tout le support du zip s'identifiant à une séparatrice. À l'opposé des zips, les impasses compliquent le dessin des variétés invariantes, celles-ci tournant autour des impasses. Il est naturel de penser que moins il existe d'orbites d'impasses et plus il y a de zips : c'est ce qu'exprime la proposition suivante.

**Proposition 2.4.9.** — *Si  $K$  ne possède aucune impasse, alors toutes les séparatrices stables ou instables de type bord des points de  $K$  portent des zips (en d'autres termes, toute classe d'équivalence d'arches est un zip).*

*Démonstration.* — La proposition découle des deux remarques suivantes :

Remarquons d'une part que le lemme 2.4.5 permet de montrer que l'existence d'une  $u$ -arche  $\gamma$ , dont les extrémités sont situées sur la même séparatrice stable (et partant du même côté), implique l'existence d'une impasse incluse dans le disque associé  $D$  à  $\gamma$  (il suffit en effet de considérer un disque minimal pour l'inclusion parmi les disques inclus dans  $D$  et bordés par l'union d'un segment stable et d'un segment instable).

D'autre part, soit  $\alpha$  une  $u$ -arche ayant ses deux extrémités sur deux séparatrices distinctes, soit  $p$  une période de ces séparatrices, et soit  $\Delta$  le disque associé par le lemme 2.4.2 à  $\alpha$  et  $f^p(\alpha)$ . Si  $\Delta$  ne contient pas de  $u$ -arche ayant ses extrémités sur la même séparatrice, alors  $\Delta$  est un rectangle (voir la définition 2.2.1) réalisant une équivalence entre les arches  $\alpha$  et  $f^p(\alpha)$ , et la classe d'équivalence de  $\alpha$  est donc un zip.  $\square$

Le chapitre 8 est consacré à l'étude des pièces basiques sans impasses : nous y montrons qu'en refermant tous les zips, on obtient un homéomorphisme de type pseudo-Anosov.

## 2.5. Itérés des arches dans un domaine invariant

La proposition 1.3.1 a construit un voisinage ouvert invariant  $U$  d'un ensemble hyperbolique saturé  $K$ , en saturant par  $f$  un voisinage de  $K$  de la forme  $\Sigma_1 \setminus \Sigma_0$ , où  $\Sigma_0, \Sigma_1$  forme une filtration adaptée à  $K$ .

Nous allons étudier dans ce paragraphe l'ensemble des points de  $U$  sur lesquels s'accroissent les itérés  $f^n(\alpha)$ , où  $\alpha$  est une arche de  $K$ .

**Lemme 2.5.1.** — *Soient  $K$  un ensemble hyperbolique saturé et  $U$  un voisinage invariant de  $K$  construit à partir d'une filtration par la proposition 1.3.1. Alors l'union d'un point périodique bord  $p$  de  $K$  et de l'une de ses séparatrices libres est fermé dans  $U$ .*

*Démonstration.* — Notons  $W^u$  une séparatrice instable libre d'un point périodique  $s$ -bord  $p$ . L'ensemble des séparatrices libres est fini, donc  $W^u$  est périodique : notons  $k$  sa période.

Soit  $q$  un point de  $W^u$ , et notons  $I$  le segment  $[q, f^k(q)]^u$  de  $W^u$ . Remarquons que  $W^u$  est l'union  $\bigcup_{\mathbb{Z}} f^n(I)$ . De plus l'union  $\{p\} \cup \bigcup_{-\infty}^{-1} f^n(I)$  est le segment compact  $[p, q]^u$ . Il suffit donc de montrer que  $\bigcup_0^{+\infty} f^n(I)$  est fermé dans  $U$ . Ceci est une conséquence facile de la proposition 1.3.5 : comme  $I$  est un compact disjoint de  $W^s(K)$ , seul un nombre fini de ses itérés positifs rencontre un compact donné de  $U$ . L'intersection de  $\{p\} \cup W^u$  avec tout compact de  $U$  est compacte, ce qui conclut.  $\square$

Nous allons à présent considérer l'ensemble des points de  $U$  sur lesquels s'accroissent les itérés d'une arche, instable pour se fixer les idées.

**Remarque.** — Soient  $\alpha$  une arche instable et  $(x_i)$  une suite de points de  $\alpha$  telle qu'il existe une suite  $(n_i)$  convergeant vers  $+\infty$  telle que  $(f^{n_i}(x_i))$  converge vers un point  $y$  de  $U$ . Alors les valeurs d'adhérence de la suite  $(x_i)$  sont réduites aux extrémités de  $\alpha$  : en effet, si une sous-suite de  $(x_i)$  converge vers un point  $x$  de  $\alpha$  (qui est compacte), alors tout voisinage compact de  $x$  possède une infinité d'itérés positifs rencontrant un voisinage compact de  $y$  inclus dans  $U$ . La proposition 1.3.5 implique alors que tout



voisinage compact de  $x$  rencontre  $W^s(K)$  qui est fermé d'après le corollaire 1.3.6 :  $x$  appartient donc à  $\alpha \cap W^s(K)$ , donc est l'une des extrémités de  $\alpha$ .

Considérons  $\alpha$  une arche instable de  $K$ , et une suite  $(x_i)$  de points de  $\alpha$  telle qu'il existe une suite  $(n_i)$  d'entiers, convergeant vers  $+\infty$  et telle que  $(f^{n_i}(x_i))$  converge vers un point  $y$  de  $U$ . D'après la remarque ci-dessus, quitte à prendre une sous-suite, nous supposons que la suite  $(x_i)$  converge vers une extrémité  $x$  de  $\alpha$ . Notons  $p$  le point périodique dont la variété stable contient  $x$ , et  $W^s$  la séparatrice stable de  $p$  contenant  $x$ . Notons  $W^u$  la séparatrice libre instable de  $p$  partant du même côté de  $W^s$  que  $\alpha$ . Notons  $k$  la période de la séparatrice  $W^s$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite  $(n_i)$  s'écrit de la forme  $n_i = (k \cdot m_i) + l$  où  $l$  est un entier indépendant de  $i$  et compris entre 0 et  $k - 1$ . Remarquons qu'alors la suite  $(f^{k \cdot m_i}(x_i))$  converge vers le point  $f^{-l}(y) \in U$  (voir la figure 20).

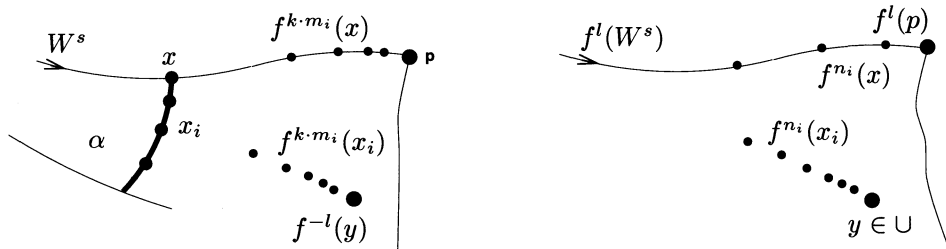


FIGURE 20. Où s'accumulent les arches

**Proposition 2.5.2.** — *Avec les notations ci-dessus, le point  $f^{-l}(y)$  appartient à la séparatrice libre  $W^u$ , ou est le point périodique  $p$ .*

*Démonstration.* — La démonstration étant triviale si la suite  $(x_i)$  contient une infinité de fois le point  $x$ , nous supposons que tous les  $x_i$  appartiennent à l'intérieur de l'arche  $\alpha$ .

Pour alléger les notations, nous supposons que  $l = 0$ , c'est-à-dire que les entiers  $n_i$  sont des multiples de la période  $k$ .

Le corollaire 1.3.6 dit que  $W^u(K)$  est fermé dans  $U$ , ce qui implique que  $y$  appartient à  $W^u(K)$ . On peut donc considérer la variété instable de  $y$ , ainsi que les deux séparatrices instables issues de  $y$ . Remarquons enfin que  $W^u(y)$  contient au moins un point de  $K$ .

**Lemme 2.5.3.** — *Le point  $y$  n'appartient à l'intérieur d'aucun segment instable ayant ses extrémités sur  $K$ . En conséquence, (d'après la proposition 2.1.1), le point  $y$  ou bien est un point périodique  $s$ -bord, ou bien appartient à une séparatrice libre instable d'un point périodique  $s$ -bord.*

*Démonstration du lemme.* — Supposons d'abord, par l'absurde, qu'il existe deux points  $y_1, y_2 \in W^u(y) \cap K$  tels que  $y$  appartienne à l'intervalle ouvert  $]y_1, y_2[{}^u$ . Fixons  $I$  un segment compact de  $W^u(y)$  contenant  $y_1$  et  $y_2$  dans son intérieur. Pour  $i$  assez grand,  $f^{n_i}(x_i)$  est très proche de  $y$ , et la dépendance continue des variétés instables implique l'existence d'un segment  $I_i$  proche de  $I$  contenu dans la variété instable  $W^u(f^{n_i}(x_i))$ , et contenant  $f^{n_i}(x_i)$  dans son intérieur. Pour  $i$  assez grand, la variété stable locale de  $y_1$  et celle de  $y_2$  coupent le segment  $I_i$  en un et un seul point, noté respectivement  $a_i$  et  $b_i$ , et  $f^{n_i}(x_i)$  appartient à l'intérieur du segment  $[a_i, b_i]{}^u$ . De plus, la longueur des segments  $[a_i, b_i]{}^u$  est uniformément bornée (par exemple, par la longueur de  $I$ ). Remarquons que  $a_i$  et  $b_i$  sont points d'intersection de  $W^s(K)$  et de  $W^u(K)$ , donc appartiennent à  $K$  (voir la figure 21).

Considérons à présent la suite des segments  $J_i = f^{-n_i}([a_i, b_i]{}^u)$ . C'est une suite de segments de la variété instable de  $x$ , ayant leurs extrémités sur des points de  $K$ , et  $J_i$  contient  $x_i$  dans son intérieur.

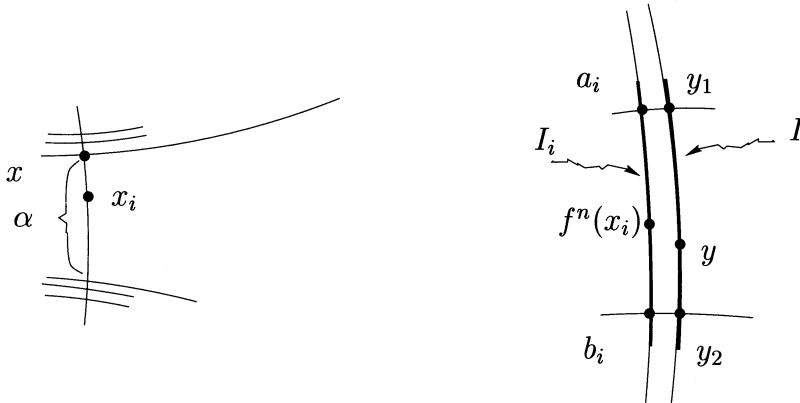


FIGURE 21

Montrons à présent que la longueur de  $J_i$  tend vers 0. Pour cela, considérons  $m > 0$  tel que  $f^{-m}(I)$  soit de longueur strictement inférieure à la taille  $\delta$  d'un voisinage  $O$  de  $K$  (i.e. la distance de  $K$  à  $S \setminus O$ ) sur lequel  $f^{-1}$  contracte uniformément les vecteurs tangents à  $W^u(K)$ . On écrit alors  $J_i = f^{-n_i+m}(f^{-m}([a_i, b_i]{}^u))$  et pour  $i$  assez grand  $f^{-m}([a_i, b_i]{}^u)$  est de longueur inférieure à  $\delta$  et a ses extrémités sur  $K$  : on montre par récurrence qu'à chaque itération par  $f^{-1}$ , un tel intervalle a sa longueur qui décroît d'un rapport uniforme, ce qui assure que l'intervalle itéré reste inclus dans  $O$ , et montre donc que l'itéré suivant a de nouveau sa longueur qui décroît d'un rapport uniforme.

Les segments  $J_i$  rencontrent l'intérieur de l'arche  $\alpha$  en  $x_i$ , et leur longueur tend vers 0 ; pour  $i$  assez grand, l'une des extrémités de  $J_i$  est donc incluse dans l'intérieur de  $\alpha$ , ce qui contredit le fait que  $J_i$  a ses extrémités dans  $K$ .

Nous avons donc montré que  $y$  n'est dans l'intérieur d'aucun segment instable à extrémités dans  $K$ , ce qui est équivalent d'après la proposition 2.1.1 à ce que  $y$  ou bien est un point périodique s-bord, ou bien appartient à une séparatrice libre instable d'un point périodique s-bord.  $\square$

*Fin de la démonstration de la proposition*

Notons  $y'$  le point périodique s-bord de  $W^u(y)$  (éventuellement  $y$  et  $y'$  peuvent être confondus). Montrons que  $y' = p$ . La démonstration est presque identique à celle du lemme ci-dessus, et nous réutiliserons donc les mêmes notations.

Soit  $I$  un segment de  $W^u(y)$  contenant  $y$  et  $y'$  dans son intérieur. Pour  $i$  assez grand,  $W^u(f^{n_i}(x_i))$  contient un segment  $I_i$  contenant  $f^{n_i}(x_i)$  dans son intérieur, et aussi proche que l'on veut de  $I$ . En particulier la variété stable locale de  $y'$  coupe  $I_i$  en un point  $a_i$  qui appartient donc à  $K$  (voir la figure 22). Notons  $J_i = f^{-n_i}([a_i, f^{n_i}(x_i)]^u)$ ; c'est un segment de variété instable, ayant une extrémité en  $x_i$  et l'autre en un point de  $K$ . De plus, un raisonnement identique à celui déjà utilisé pour le lemme permet de montrer que la longueur de  $J_i$  tend vers 0. On en déduit que, pour  $i$  assez grand,  $J_i$  contient le point  $x$ .

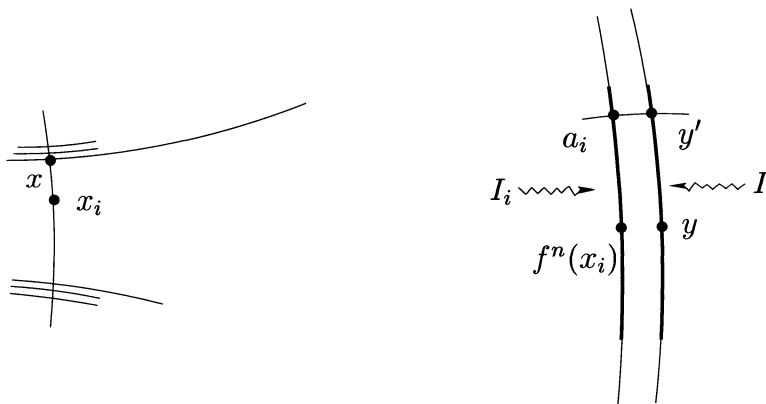


FIGURE 22

Donc pour  $i$  assez grand le segment  $[a_i, f^{n_i}(x_i)]^u$  contient le point  $f^{n_i}(x)$ . Or la suite  $f^{n_i}(x)$  converge vers  $p$ , puisque les  $n_i$  ont été supposés multiples de la période  $k$ . Donc  $p$  appartient au segment  $I$  et donc  $p = y'$  (une variété instable ne contient qu'un point périodique!).

On a donc déjà montré la proposition dans le cas où  $W^s$  n'est pas double s-bord. Pour conclure la démonstration dans le cas où  $p$  est un double s-bord, il reste à remarquer que les segments  $f^{n_i}([x, x_i]^u)$  convergent vers le segment  $[y', y]^u$  : comme  $f^{n_i}$  laisse la séparatrice  $W^s$  invariante et préserve l'orientation de  $S$ , on en déduit

que, dans le cas où  $y \neq y'$ , le point  $y$  est sur la séparatrice libre de  $y$  qui part du même côté de  $W^s$  que  $\alpha$ .  $\square$

**Corollaire 2.5.4.** — *Soit  $D$  un rectangle plongé dans  $U$ , dont le bord instable est formé de deux arches instables et dont les côtés stables sont portés par deux séparatrices stables  $W_1^s$  et  $W_2^s$  de points périodiques  $s$ -bords  $p_1$  et  $p_2$  (qui ont même période  $k$  d'après le lemme 2.4.3).*

*Alors, toute valeur d'adhérence dans  $U$  de la suite  $(f^{k \cdot n}(D))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ou bien est l'un des points périodiques  $p_i$ , ou bien appartient à l'une des séparatrices instables libres issues d'un des  $p_i$  et partant du même côté de  $W_i^s$  que les  $u$ -arches du bord de  $D$ .*

*Démonstration.* — Soit  $y$  une valeur d'adhérence de la suite  $(f^{k \cdot n}(D))$ . Il existe donc une suite  $(n_i)$  de multiples de  $k$ , tendant vers l'infini et telle que tout voisinage de  $y$  rencontre  $f^{n_i}(D)$ . Pour pouvoir appliquer la proposition 2.5.2, il suffit de montrer que tout voisinage assez petit de  $y$  rencontre  $f^{n_i}(\partial^u(D))$ .

Remarquons d'abord que les  $f^{n_i}(D)$  ont un diamètre qui reste loin de 0, car les itérés positifs des arches instables sont dilatés par  $f$ . Un petit voisinage  $V$  de  $y$  ne peut donc pas contenir  $f^{n_i}(D)$ . Si  $V$  est disjoint de  $\partial f^{n_i}(D)$  alors  $V \subset f^{n_i}(D)$ . Cependant, il existe  $m$  tel que  $\partial^s(D) \cap \partial^s(f^n(D)) = \emptyset$ , pour tout  $n \geq m$  : en effet, le bord stable de  $D$  étant formé de deux segments sur des séparatrices stables de points périodiques, il suffit d'itérer assez pour que ces segments soient inclus dans un tout petit voisinage des points périodiques. Les côtés instables de  $D$  étant des arches, il ne peuvent couper le bord stable de  $f^n(D)$ . On en déduit que pour  $n$  assez grand,  $D$  et  $f^n(D)$  sont disjoints, car de bords disjoints.

On en déduit que  $V$  n'est pas inclus dans les  $f^{n_i}(D)$  qui le rencontrent. Il existe donc des entiers  $i$  aussi grands que l'on veut tels que  $V$  rencontre le bord de  $f^{n_i}(D)$ . Si  $V$  rencontre le bord stable de  $f^{n_i}(D)$  pour une infinité de valeurs de  $i$ , alors  $V$  contient dans son adhérence l'un des deux points  $p_i$ . Si  $y$  n'est pas l'un des deux points  $p_i$ , et si  $V$  a été choisi assez petit, pour  $i$  assez grand  $V$  est disjoint du bord stable de  $f^{n_i}(D)$  et rencontre donc son bord instable. On conclut alors grâce à la proposition 2.5.2.  $\square$

## 2.6. Couplage de séparatrices, polygones d'arches

Ce paragraphe développe les conséquences des lemmes 2.4.2, 2.4.5 et du corollaire 2.4.3 :

Nous verrons que les séparatrices bords (plus précisément, s'il existe des double-bords, les côtés isolés des séparatrices bords), sont associées par paires de façon naturelle. Nous verrons de plus que les chaînes d'arches (courbes obtenues comme union d'arches, successivement stables et instables) sont de deux sortes : sauf un nombre fini

d'entre elles, ce sont des polygones finis, qui bordent des disques errants, les autres sont des chaînes infinies qui s'accroissent sur deux séparatrices libres.

**Définition 2.6.1.** — On appellera chaîne d'arches toute courbe connexe  $\gamma$ , formée alternativement de  $s$ -arches et de  $u$ -arches, et vérifiant l'hypothèse suivante :

si  $\alpha$  est une  $s$ -arche (resp.  $u$ -arche) contenue dans  $\gamma$  et qui est un double-bord, alors les deux  $u$ -arches (resp.  $s$ -arches) contenues dans  $\gamma$  et ayant une extrémité commune avec  $\alpha$ , partent du même côté de la séparatrice portant  $\alpha$ .

Une chaîne fermée s'appellera un polygone d'arches.

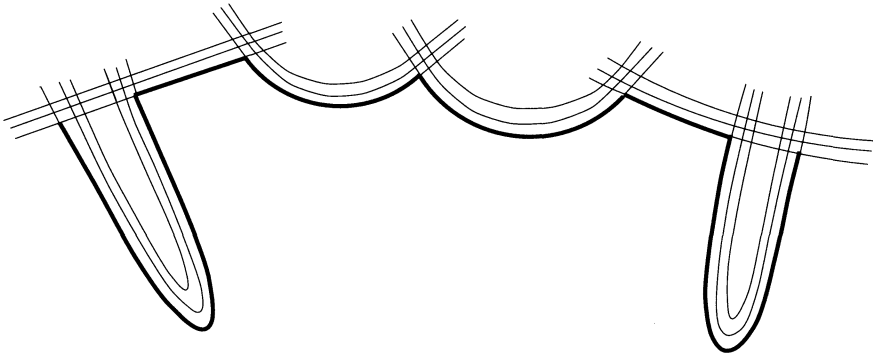


FIGURE 23. Une chaîne d'arches

**Remarques.** — L'hypothèse, imposant que les deux arches d'une chaîne ayant une extrémité commune avec une arche  $\alpha$  de cette chaîne en partent du même côté, entraîne facilement les propriétés suivantes :

1. Toute arche  $\alpha$  qui est contenue dans une séparatrice de type bord simple (pas double) est contenue dans exactement une chaîne d'arches maximale. Si  $\alpha$  est sur une séparatrice double-bord, chacun des côtés où elle est bord correspond à exactement une chaîne maximale contenant  $\alpha$ .
2. Toute arche d'une chaîne formée de plus de quatre arches est une arche extrême : en effet toute arche non-extrême de type bord est bordée (de chaque côté où elle est bord) par un disque dont le bord est formé de quatre arches, qui réalise l'équivalence entre cette arche et ses voisines.

**Lemme 2.6.2.** — Toute chaîne d'arches, contenue dans une partie compacte du complémentaire (dans la surface  $S$ ) de l'ensemble des points périodiques bord de  $K$ , est finie.

**Démonstration.** — Si la chaîne est infinie, elle contient une infinité d'arches extrêmes (d'après l'item 2 de la remarque ci-dessus). Comme il n'y a qu'un nombre fini

d'orbites d'arches extrémales (voir proposition 2.2.4), on en déduit qu'elle contient un nombre infini d'itérés de la même arche. Elle contient donc dans son adhérence un point périodique bord.  $\square$

**Corollaire 2.6.3.** — *Toute chaîne, contenant deux s-arches (ou deux u-arches) incluses dans des séparatrices différentes, est finie.*

*Démonstration.* — Soit  $C$  une chaîne possédant deux s-arches sur des séparatrices différentes. On peut choisir deux telles s-arches  $a_1$  et  $a_2$  reliées par une u-arche  $b$  de  $C$ . D'après le lemme 2.4.2, il existe  $n \in \mathbb{Z}$  et un disque  $D$  bordé par  $b$ ,  $f^n(b)$  et deux segments stables contenant l'un  $a_1$  l'autre  $a_2$ . Le fait que  $C$  soit une chaîne d'arches implique que  $C$  ne peut pas sortir du disque  $D$  : elle doit «rebondir» du bon côté chaque fois qu'elle rencontre le bord (voir la figure 24). Comme  $D$  ne contient pas de point périodique bord, nous pouvons appliquer le lemme 2.6.2.  $\square$

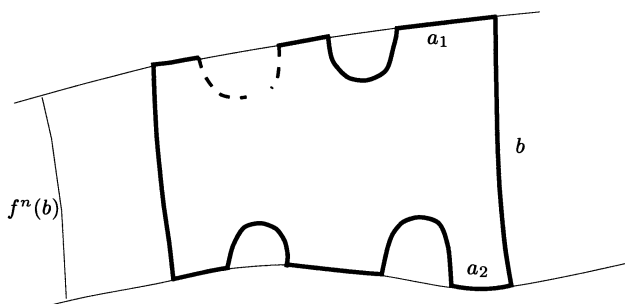


FIGURE 24

Voyons à présent le résultat principal de ce paragraphe :

**Proposition 2.6.4.** — *Soit  $W^s$  une séparatrice stable de type s-bord qui n'est pas disjointe de  $K$ , et qui n'est pas un double s-bord. Alors l'une des deux propriétés suivantes est réalisée (et une seule) :*

1. *Il existe une unique séparatrice stable  $W_1^s$  telle qu'il existe une arche instable ayant une extrémité sur  $W^s$  et une autre sur  $W_1^s$ . De plus  $W_1^s$  est de même période que  $W^s$ .*
2. *Il existe une séparatrice instable  $W^u$  et une courbe simple  $\gamma$  qui est une chaîne infinie d'arches contenues alternativement dans  $W^s$  et dans  $W^u$ . La séparatrice  $W^u$  et la courbe  $\gamma$  sont alors uniques. De plus, soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f^n(W^s) = W^s$ . Alors  $f^n(W^u) = W^u$  et  $f^n(\gamma) = \gamma$ .*

*Démonstration.* — S'il existe une u-arche ayant une seule extrémité sur  $W^s$ , le corollaire 2.4.3 montre directement que  $W^s$  vérifie l'item 1. Seul le second cas est à

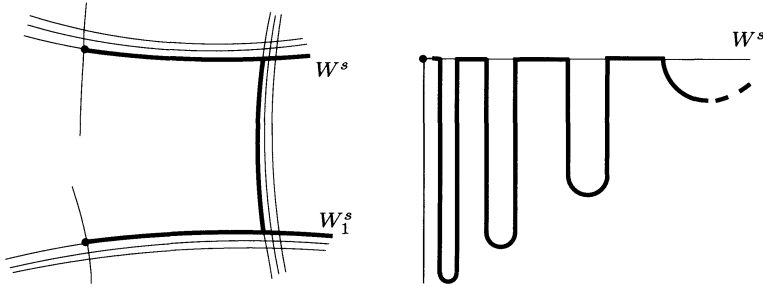


FIGURE 25. Séparatrices couplées ou chaîne infinie d’arches

démontrer. On suppose donc que toute u-arche ayant une extrémité sur  $W^s$  a ses deux extrémités sur  $W^s$ .

Le lemme 2.4.5 montre que, pour toute arche ayant ses extrémités sur  $W^s$ , la courbe simple fermée obtenue en joignant les extrémités de cette arche par un segment de  $W^s$  est le bord d’un disque d’intérieur disjoint de  $K$ . On a ainsi une famille de disques s’appuyant sur  $W^s$  le long d’un segment de leur bord. Si l’on considère deux disques ainsi définis, ils vérifient l’une des deux possibilités suivantes : ou bien ils sont disjoints, ou bien l’un d’eux est inclus dans l’autre. On peut donc les ordonner par l’inclusion. Nous allons désormais considérer les disques maximaux pour l’inclusion, le raisonnement ci-dessus montrant que toute arche ayant ses extrémités sur  $W^s$  est contenue dans un tel disque (voir figure 26).

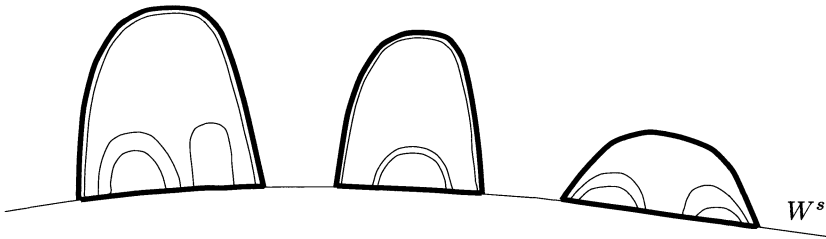


FIGURE 26. Disques maximaux associés aux u-arches à extrémités sur  $W^s$

Le bord instable d’un disque maximal est une u-arche extrémale pour sa classe d’équivalence. La proposition 2.2.4 implique donc que l’ensemble des orbites de tels disques est fini.

Les côtés stables de ces disques maximaux sont ordonnés par l’orientation dynamique (vers le point périodique) de  $W^s$  : on peut ainsi parler de disques maximaux successifs. Remarquons que tout point de  $W^s \cap K$  est l’extrémité d’une u-arche, donc appartient à un disque maximal. On en déduit que tout segment de  $W^s$  joignant deux disques maximaux successifs est d’intérieur disjoint de  $K$ , c’est-à-dire est une s-arche.

La courbe  $\gamma$  annoncée est obtenue en joignant les arches instables contenues dans le bord de ces disques maximaux, par les arches stables de  $W^s$  joignant deux disques successifs. La courbe  $\gamma$  est bien constituée de segments qui sont alternativement des s-arches ou des u-arches. On vérifie facilement que  $\gamma$  est invariante par  $f^n$ .

Le corollaire 2.6.3 montre que les u-arches incluses dans  $\gamma$  sont portées par la même séparatrice  $W^u$ . La courbe  $\gamma$  vérifie bien les propriétés annoncées.

Pour conclure la démonstration de la proposition, il reste à montrer que  $\gamma$  est unique. De même que dans la preuve du corollaire 2.6.3 on voit qu'une chaîne rencontrant l'intérieur d'un disque maximal est contenue dans ce disque et est finie d'après le lemme 2.6.2. De plus, une chaîne rencontrant le bord stable d'un disque maximal ou bien rencontre l'intérieur de ce disque (donc est finie), ou bien est un polygone à deux côtés formant le bord de ce disque. On en déduit que toute chaîne infinie d'arches d'intersection non-vide avec  $W^s$  est la courbe  $\gamma$  construite ci-dessus, ce qui conclut.  $\square$

**Remarque.** — Dans le cas où la séparatrice  $W^s$  est un double-bord stable, la proposition s'applique à chacun des côtés isolés de la séparatrice.

**Définition 2.6.5.** — *On dira que deux séparatrices distinctes de même nature (stable ou instable)  $W_1$  et  $W_2$  sont couplées s'il existe une arche ayant une extrémité sur chacune d'elles. Si la séparatrice  $W_1$  est double-bord, il faudra préciser de quel côté elle est couplée à  $W_2$  (chacun des côtés pouvant donner lieu à un couplage).*

On montre alors :

**Lemme 2.6.6.** — *Tout polygone (fini) d'arches borde un disque dont tous les itérés sont d'intérieurs deux-à-deux disjoints. De plus, l'ensemble des orbites de polygones d'arches qui ne sont pas des quadrilatères est fini.*

*Idée de démonstration.* — Dans le cas où le polygone contient deux s-arches (ou deux u-arches) sur deux séparatrices distinctes, le résultat est conséquence du lemme 2.4.2. En utilisant le lemme 2.4.6 on conclut de même quand une arche joint les deux côtés d'une même séparatrice.

Dans le cas restant, la séparatrice stable  $W^s$  portant les arches stables du polygone vérifie l'item 2 de la proposition 2.6.4. Remarquons qu'un polygone ne peut contenir une arche stable joignant deux disques maximaux (utilisés dans la démonstration de la proposition 2.6.4) : en effet une arche joignant deux disques maximaux fait partie d'une chaîne infinie. Le polygone est donc inclus dans l'un des disques maximaux.

Pour montrer la seconde partie du lemme, il suffit de remarquer que les arches formant un polygone qui n'est pas un quadrilatère sont extrémales, et que l'ensemble des orbites d'arches extrémales est fini.  $\square$



**Lemme 2.6.7.** — *Toute chaîne infinie d'arches est la courbe associée par la proposition 2.6.4 à une séparatrice s-bord non couplée, (ou à un côté non-couplé de séparatrice double s-bord).*

*Idée de démonstration.* — Soit  $c$  une chaîne infinie d'arches. D'après le corollaire 2.6.3 on montre que les s-arches de  $c$  sont toutes sur la même séparatrice  $W^s$ , et que les u-arches sont sur la même séparatrice  $W^u$ .

Supposons, pour simplifier, que  $W^s$  n'est pas double-bord et voyons par l'absurde que  $W^s$  n'est pas couplée. Soit  $\alpha$  une u-arche de  $c$ , et soit  $\beta$  une u-arche couplant  $W^s$  à une séparatrice  $W_0^s$ . On montre alors qu'il existe  $n, m \in \mathbb{Z}$  tels que l'intérieur de  $\alpha$  soit inclus dans l'intérieur du disque (construit par le lemme 2.4.2) bordé par  $f^n(\beta), f^m(\beta)$ , et deux segments stables de  $W^s$  et  $W_0^s$ . De même que pour le corollaire 2.6.3 on montre alors que  $c$  est entièrement contenue dans ce disque, et le lemme 2.6.2 assure alors que  $c$  est finie, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La fin de la démonstration de la proposition 2.6.4 assure alors que  $c$  est la courbe  $\gamma$  associée à  $W^s$ . □

Voyons enfin la position d'une chaîne infinie d'arches  $\gamma$  dans le voisinage invariant  $U$  de  $K$ , homéomorphe à une surface privée d'un ensemble fini de points, et qui a été construit par la proposition 1.3.1. Le lemme 2.6.7 ci-dessus montre que  $\gamma$  est la chaîne associée, par la proposition 2.6.4, à une séparatrice stable  $W_1^s$  et une séparatrice instable  $W_2^u$  non-couplées (ou à un côté non-couplé de séparatrice double-bord). De plus, les arches formant  $\gamma$  sont toutes extrémales, donc leurs orbites sont en nombre fini : pour comprendre l'adhérence de  $\gamma$ , il suffit donc de comprendre l'adhérence dans  $U$  d'une suite d'itérés d'une même arche. De la proposition 2.5.2 on déduit alors facilement :

**Lemme 2.6.8.** — *Soit  $\gamma$  une chaîne infinie d'arches. Soient  $p_1$  et  $p_2$  les points périodiques tels qu'une séparatrice stable  $W_1^s$  de  $p_1$  et une séparatrice instable  $W_2^u$  de  $p_2$  portent les arches de  $\gamma$ .*

*Notons  $W_1^u$  la séparatrice instable issue de  $p_1$  partant du même côté de  $W_1^s$  que les arches instables de  $\gamma$ . De même,  $W_2^s$  sera la séparatrice stable issue de  $p_2$  partant du même côté que les arches stables de  $\gamma$ .*

*Alors,  $\gamma \cup \{p_1, p_2\} \cup W_1^u \cup W_2^s$  est un fermé dans le voisinage  $U$  de  $K$  construit par la proposition 1.3.1.*

## CHAPITRE 3

### DOMAINE D'UN ENSEMBLE HYPERBOLIQUE SATURÉ

Dans toute cette partie,  $S$  désigne une surface compacte orientée,  $f$  un difféomorphisme de Smale de  $S$  préservant l'orientation, et  $K$  un ensemble hyperbolique saturé de  $f$  ne comportant pas d'orbite périodique source ou puits.

Le but de cette partie est de construire un voisinage invariant  $\Delta(K)$  de l'ensemble hyperbolique saturé  $K$ , qui soit de *topologie finie* (c'est-à-dire homéomorphe à une surface compacte privée d'un nombre fini de points), et minimal en un sens que l'on définira.

Remarquons qu'un tel ensemble doit contenir les courbes invariantes, stables et instables, de  $K$ . Le lemme 2.6.6, fournit des disques, bordés par des polygones d'arches de  $K$ , dont les itérés par  $f$  sont deux-à-deux disjoints. Si un point de l'intérieur d'un tel disque n'appartenait pas à  $\Delta(K)$ , ce voisinage ne pourrait pas être de topologie finie. Une première étape pour construire  $\Delta(K)$  consiste donc à « boucher les trous » de l'union des variétés invariantes de  $K$ .

L'ensemble (que l'on appellera *domaine restreint* de  $K$  et notera  $\delta(K)$ ), construit en bouchant tous les trous, n'est pas un voisinage de  $K$ , et a un bord souvent très irrégulier (son bord contient en général des chaînes infinies d'arches), que nous allons noyer de façon quasi-canonique dans un domaine de bord lisse (le *domaine* de  $K$ ), et nous verrons que notre construction est unique à conjugaison près.

Nous verrons alors que l'on peut reconstruire  $f$  à partir de sa restriction aux domaines d'ensembles hyperboliques saturés, en recollant ces domaines le long de leur bord : les différents recollements possibles sont décrits par une combinatoire finie, de façon analogue au raisonnement de Fleitman et Peixoto [Pe2] pour classifier les champs de vecteurs de type Morse-Smale des surfaces.

### 3.1. Le domaine restreint et sa position dans un voisinage invariant

**Définition 3.1.1.** — On appellera *domaine restreint* de  $K$  et on notera  $\delta(K)$  l'union des variétés invariantes de  $K$  et de tous les disques bordés par un polygone (fini) d'arches des variétés invariantes de  $K$

**Remarque.** — Tout ouvert de topologie finie, invariant par  $f$  et contenant  $K$  contient  $\delta(K)$  : en effet tout ouvert invariant contenant  $K$  contient  $W^s(K) \cup W^u(K)$ . De plus, si un ouvert invariant  $O$  contenant  $K$  ne contient pas un point  $x$  d'un disque  $D$  bordé par un polygone d'arches, alors il contient une courbe simple fermée  $\gamma \subset D \cap O$  faisant le tour de  $x$  dans  $D$ . Les  $f^i(\gamma)$  forment alors une famille infinie de courbes simples disjointes non-homotopes entre elles dans  $O$ , ce qui n'est pas compatible avec l'hypothèse «  $O$  de topologie finie ».

Nous avons vu que le théorème 1.1.16 assure l'existence d'une filtration  $\Sigma_0, \Sigma_1$  pour  $f$  adaptée à  $K$  ( $K$  étant l'ensemble invariant maximal de  $\Sigma_1 \setminus \Sigma_0$ ). De plus, la proposition 1.3.1 et le corollaire 1.3.6 montrent que l'union  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\Sigma_1 \setminus \Sigma_0)$  est un voisinage ouvert  $U$  de  $K$  qui possède pratiquement toutes les propriétés désirées. En effet :

1.  $U$  est invariant par  $f$  ;
2.  $U$  contient  $K$ , et toute partie compacte de  $U$  a son maximal invariant inclus dans  $K$  ;
3.  $U$  se compactifie en une surface compacte, en complétant la restriction de  $f$  à  $U$  par un nombre fini de points périodiques attracteurs ou répulseurs ;
4.  $W^u(K) \cup W^s(K)$  est fermée dans  $U$  ;
5. quitte à ôter de  $U$  l'union de ses composantes connexes disjointes de  $K$ , on peut supposer que toute composante connexe de  $U$  rencontre  $K$ .

Le seul défaut de l'ouvert  $U$  ci-dessus est de ne pas être canoniquement associé à  $K$  : il dépend du choix de la filtration. D'après la remarque ci-dessus,  $U$  contient  $\delta(K)$ , puisque l'item (3) assure qu'il est de topologie finie. Pour construire le domaine de  $K$ , nous allons découper dans  $U$  un voisinage de  $\delta(K)$ . Pour cela, nous avons besoin de comprendre la position de  $\delta(K)$  dans  $U$ , et en particulier de comprendre la topologie du complémentaire  $U \setminus \delta(K)$  de  $\delta(K)$  dans  $U$ .

Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante qui décrit les composantes connexes de  $U \setminus \delta(K)$ .

**Proposition 3.1.2.** — *Les composantes connexes de  $U \setminus \delta(K)$  sont en nombre fini.*

*Chacune de ces composantes connexes est homéomorphe au plan  $\mathbb{R}^2$  et est périodique ; la restriction de  $f^n$  à cette composante est conjuguée à une translation et laisse invariant chacune des feuilles d'un feuilletage trivial en droites proprement plongées dans  $U$ .*

*Le bord dans  $U$  de chaque composante connexe de  $U \setminus \delta(K)$  est l'union de deux connexes. Chacun de ces connexes est égal, soit à l'union des deux séparatrices libres d'un point périodique coin, soit à une chaîne infinie d'arches et son adhérence (une séparatrice stable et une instable toutes deux libres).*

La démonstration de cette proposition est décomposée en une succession de lemmes.

**Lemme 3.1.3.** — *Le domaine restreint  $\delta(K)$  est fermé dans  $U$ . De plus, le bord dans  $U$  de  $\delta(K)$  est contenu dans  $W^s(K) \cup W^u(K)$  qui est fermé dans  $U$ .*

*Démonstration.* — Soit  $(x_i)$  une suite de points de  $K$  convergeant vers un point  $x$  de  $U \setminus \text{Int}(\delta(K))$ . Nous devons montrer que  $x$  appartient à l'union des variétés invariantes de  $K$ . Si, pour une infinité de valeurs de  $i$ ,  $x_i$  appartient à  $W^s(K) \cup W^u(K)$ , on conclut par le fait que l'union des variétés invariantes de  $K$  est fermée dans  $U$  (corollaire 1.3.6). Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que chaque  $x_i$  appartient à l'intérieur  $O_i$  d'un disque bordé par un polygone d'arches  $P_i$  de  $K$ . Si, pour une infinité de valeurs de  $i$ , le disque ouvert  $O_i$  est le même, alors  $x$  appartient au disque fermé qui est inclus dans  $\delta(K)$ . Quitte à prendre une sous-suite, on peut donc supposer que les  $O_i$  sont deux-à-deux disjoints.

Tout voisinage  $O$  de  $x$  rencontre les ouverts  $O_i$ , pour  $i$  assez grand, mais n'est pas inclus dans  $O_i$  (car ceux-ci sont disjoints). En choisissant  $O$  connexe, ceci implique que  $O$  rencontre le bord de  $O_i$ , c'est-à-dire le polygone  $P_i$ . On vient de montrer que tout voisinage de  $x$  rencontre  $W^s(K) \cup W^u(K)$ , ce qui conclut.  $\square$

Soit  $C$  une composante connexe de  $U \setminus \delta(K)$ . Comme l'ensemble  $\delta(K)$  est fermé dans  $U$ , il contient la frontière dans  $U$  de  $C$ . De plus,  $C$  est un ouvert de  $U$ . Notons  $\text{Att}(C)$  la *frontière atteignable* de  $C$ , i.e. l'ensemble des points du bord de  $C$  qui sont extrémités de chemins continus dont l'intérieur est dans  $C$  (on parle aussi, classiquement, de frontière accessible). Remarquons que, pour tout ouvert  $O$  d'une surface,  $\text{Att}(O)$  est dense dans le bord  $\partial O$  (en effet, pour tout  $x \in \partial O$ , il existe  $y \in O$  aussi voisin que l'on veut de  $x$ ; parcourons depuis  $y$  un petit chemin géodésique joignant  $y$  à  $x$  : le premier point de  $\partial O$  que l'on rencontre est un point de  $\text{Att}(O)$  proche de  $x$ ). Pour comprendre le bord dans  $U$  de  $C$ , il nous suffit donc de comprendre l'adhérence dans  $U$  de  $\text{Att}(C)$ .

**Lemme 3.1.4.** — *Le bord atteignable  $\text{Att}(C)$  est une union de chaînes infinies d'arches, et de courbes formées d'un point périodique coin et de ses deux séparatrices libres.*

*Démonstration du lemme 3.1.4.* — Soit  $x \in \text{Att}(C) \cap W^s(K)$  et soit  $\sigma$  un chemin dans  $C$  atteignant  $x$ .

La variété stable portant  $x$  est s-bord ( $\sigma$  étant du côté isolé, ou de l'un des côtés isolés si  $x$  est un double s-bord). De plus, si  $x$  appartient à  $W^u(K)$ , il est de type coin ( $\sigma$  étant alors dans le secteur isolé).

Si  $x$  appartient à  $W^s(K) \setminus W^u(K)$ , il appartient soit à une  $s$ -arche de type bord, soit à une séparatrice libre de type bord ( $\sigma$  étant du côté isolé). Remarquons que cette arche ou cette séparatrice est alors toute entière contenue dans  $\text{Att}(C)$ .

Supposons que  $x$  appartienne à une arche. On a vu qu'un côté isolé d'une arche de type bord détermine une unique chaîne d'arches maximales  $\gamma$  et cette chaîne  $\gamma$  est contenue dans  $\text{Att}(C)$ . Si cette chaîne était finie,  $\gamma$  serait un polygone d'arches et  $C$  serait le disque bordé par ce polygone, or  $\delta(K)$  contient tous les disques de cette forme. La chaîne  $\gamma$  est donc infinie.

On fait un raisonnement symétrique quand  $x \in W^u(K) \cap \text{Att}(C)$ , ce qui conclut la démonstration du lemme.  $\square$

Remarquons que le bord de  $C$  contient toujours une séparatrice libre : en effet ou bien  $\text{Att}(C)$  en contient une, ou bien  $\text{Att}(C)$  contient une chaîne infinie dont l'adhérence contient une séparatrice libre stable et une séparatrice instable libre qui sont incluses dans l'adhérence de  $C$  : en particulier  $C$  ne peut être relativement compacte dans  $U$ .

**Corollaire 3.1.5.** — *L'ensemble des composantes connexes de  $U \setminus \delta(K)$  est fini.*

*Démonstration.* — Chaque séparatrice libre peut être dans le bord atteignable d'au plus deux composantes connexes, et les chaînes infinies d'arches contenues dans  $U$  sont dans le bord atteignable d'exactement une. Comme les chaînes infinies et les séparatrices libres sont en nombre fini, le lemme 3.1.4 assure que l'ensemble des composantes connexes de  $U \setminus W^s(K) \cup W^u(K)$  est lui aussi fini.  $\square$

Chacune des composantes connexes de  $U \setminus \delta(K)$  est donc périodique pour  $f$ . Quitte à remplacer  $f$  par l'un de ses itérés, nous supposons désormais que  $f$  laisse  $C$  globalement invariante.

**Lemme 3.1.6.** — *Soit  $C$  une composante connexe de  $U \setminus \delta(K)$ . Pour tout compact  $X \subset C$  et tout compact  $Y \subset U$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , si  $|n| \geq n_0$  alors  $f^n(X) \cap Y = \emptyset$ .*

*En particulier,  $f$  agit sur  $C$  de façon propre et libre.*

*Démonstration.* — Nous montrerons seulement que pour  $n > 0$  assez grand  $f^n(X) \cap Y = \emptyset$ , le cas  $n < 0$  s'obtenant en renversant la flèche du temps.

Rappelons que, par construction de  $U$ , il existe une filtration pour  $f$ ,  $\{\Sigma_0, \Sigma_1\}$  ayant les propriétés suivantes :

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\Sigma_1 \setminus \Sigma_0)$$

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\Sigma_1 \setminus \Sigma_0).$$

Remarquons qu'il existe  $k$  tel que  $Y$  soit inclus dans  $f^k(\Sigma_1)$ . Nous allons donc montrer que pour  $n > 0$  assez grand  $X \cap f^{-n}(\Sigma_1)$  est vide. Comme  $X \cap f^{-n}(\Sigma_1)$  est une suite décroissante de compacts, il suffit de montrer que  $X \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(\Sigma_1)$  est vide. Si tel n'était pas le cas,  $X$  contiendrait un point de la variété stable de  $K$  (d'après le lemme 1.3.5), ce qui contredirait la définition de  $\tilde{C}$ .  $\square$

**Corollaire 3.1.7.** — *Toute composante connexe  $C$  de  $U \setminus \delta(K)$  est homéomorphe au plan  $\mathbb{R}^2$ . De plus, la restriction de  $f$  à  $C$  est conjuguée à une translation.*

*Démonstration.* — Soit  $\gamma \subset C$  une courbe fermée simple : nous devons montrer que  $\gamma$  est le bord d'un disque inclus dans  $C$ .

Montrons d'abord, par l'absurde, que si  $\gamma$  borde un disque  $D$  dans  $U$ , ce disque est inclus dans  $C$ . En effet, dans le cas contraire,  $D$  contient des points de  $C$  et des points de  $\delta(K)$ , donc contient des points de  $\text{Att}(C)$  (car  $\text{Att}(C)$  est dense dans le bord de  $C$ ). Du lemme 3.1.4, on déduit alors que le disque  $D$  rencontre une variété invariante  $W$  de  $K$  de type bord. Toute variété invariante rencontrant  $D$  est incluse dans  $D$  (car est disjointe de  $\gamma$ ). Le point périodique contenu dans  $W$  appartient donc au disque  $D$ . Une séparatrice libre issue de ce point est donc incluse dans  $D$ , partie compacte de  $U$ . Ceci contredit le fait que le maximal invariant de toute partie compacte de  $U$  est inclus dans  $K$ .

Il reste donc à montrer que  $\gamma$  borde un disque dans  $U$ .

D'après le lemme 3.1.6, il existe  $n$  tel que tous les itérés  $f^{n \cdot k}(\gamma)$  sont deux-à-deux disjoints. Comme  $U$  est une surface compacte privée d'un nombre fini de points, il existe une couronne bordée par deux de ces itérés. Remarquons que cette couronne est entièrement incluse dans  $C$ , sinon (par le même argument que ci-dessus) elle contiendrait une séparatrice libre.

L'union des itérés de cette couronne est une immersion propre de  $S^1 \times \mathbb{R}$  dans  $U$  (d'après le lemme 3.1.6), d'image incluse dans  $C$ . Ceci implique que  $C$  est un cylindre et est une composante connexe de  $U$  disjointe de  $K$ , ce qui est contraire aux hypothèses sur  $U$ .

On a bien montré que  $C$  est simplement connexe, et est donc homéomorphe au plan  $\mathbb{R}^2$ .

L'action de  $f$  sur  $C$  étant propre et libre, le quotient de  $C$  par  $f$  est une surface (séparée), la projection étant le revêtement universel (et un revêtement cyclique). Le quotient est donc une surface de groupe fondamental égal à  $\mathbb{Z}$ , c'est-à-dire un cylindre. La restriction  $f$  à  $C$  est un automorphisme du revêtement du cylindre, donc est conjuguée à une translation.  $\square$

**Corollaire 3.1.8.** — *Soit  $C$  une composante connexe de  $U \setminus \delta(K)$  et soit  $k$  sa période pour  $f$ . Alors il existe un feuilletage de  $C$  dont chaque feuille est un plongement propre de  $\mathbb{R}$  dans  $U$  invariant par  $f^k$ . De plus si  $l_1$  et  $l_2$  sont deux feuilles disjointes de ce feuilletage, alors il existe un plongement propre de la bande  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  dans  $U$ ,*

à valeurs dans  $C$ , envoyant les horizontales  $\mathbb{R} \times \{t\}$  sur les feuilles de ce feuilletage, l'image de  $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$  étant  $l_1 \cup l_2$ . De plus, ce plongement conjugue  $f^k$  à la translation  $(s, t) \mapsto (s + 1, t)$ .

*Démonstration.* — On a vu dans la démonstration du corollaire 3.1.7 ci-dessus que le quotient de  $C$  par  $f^k$  est homéomorphe à un cylindre. On obtient le feuilletage annoncé en relevant sur  $C$  un feuilletage par cercles du cylindre. La propriété de l'immersion dans  $U$  des feuilles et des bandes est une conséquence facile du lemme 3.1.6. □

Le lemme 3.1.4 a montré que  $\text{Att}(C)$  était l'union de courbes qui sont chacune soit une chaîne infinie, soit une séparatrice d'un coin. Pour avoir démontré la proposition 3.1.2, il reste à voir que  $\text{Att}(C)$  est constitué exactement de deux de ces courbes. La démonstration de ce point est assez technique, mais l'idée est relativement simple ; la voici en quelques mots :

Le corollaire 3.1.7 assure que le quotient de  $C$  par  $f$  est un cylindre  $C/f$ . Un cylindre a deux bouts, et nous allons voir que chaque courbe  $\gamma$  composant  $\text{Att}(C)$  est naturellement associée à l'un des bouts de  $C/f$ . Pour cela, le lemme 3.1.11 va nous permettre de construire, pour chacune des courbes  $\gamma_i$  composant le bord atteignable de  $C$ , un segment  $\sigma_i$  « atteignant »  $\gamma_i$  : nous considérerons alors la projection du segment  $\sigma_i$  sur le cylindre  $C/f$  et nous verrons que l'on peut choisir  $\sigma_i$  de façon que sa projection soit une demi-droite proprement plongée dans  $C/f$ , c'est-à-dire de façon à ce qu'elle aille vers l'un des deux bouts de  $C/f$ . Le lemme 3.1.11 permet de plus de choisir la famille de segments  $\sigma_i$  de façon que leurs projections soient deux-à-deux disjointes. Si les courbes  $\gamma_i$  sont en nombre strictement supérieur à deux, il y en a deux, par exemple  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , dont les demi-droites associées se dirigent vers le même bout de  $C/f$ . Nous piègerons alors le segment  $\sigma_2$  entre deux itérés de  $\sigma_1$ , lui interdisant ainsi d'atteindre  $\gamma_2$ , ce qui donnera une contradiction.

La principale difficulté de cette preuve est le lemme 3.1.11 (construisant la famille de segments  $\sigma_i$ ). La démonstration de ce lemme a nécessité de définir la notion de *voisinages colliers linéarisants*, et de prouver l'existence de tels voisinages (lemme 3.1.10).

**Remarque.** — Le nombre des courbes composant  $\text{Att}(C)$  reste inchangé si l'on remplace  $f$  par l'un de ses itérés. On pourra donc supposer que  $f$  laisse invariante chaque séparatrice bord et chaque composante connexe de  $U \setminus \delta(K)$ . Nous ferons cette hypothèse dans les lemmes de la fin de ce paragraphe.

**Définition 3.1.9 (Voisinage collier linéarisant).** — Soit  $W^s$  une variété stable bord de  $K$  (avec un côté bord fixé si elle est double-bord). On appelle voisinage collier de  $W^s$  une immersion injective de  $\mathbb{R} \times [0, 1[$  dans  $S$  telle que  $W^s$  soit l'image de  $\mathbb{R} \times \{0\}$ . On dira que ce voisinage collier est linéarisant s'il est invariant par  $f$  et si la restriction de  $f$  à ce voisinage est conjuguée à la restriction d'une application linéaire hyperbolique à un demi-plan fermé bordé par l'une des droites propres.

**Remarques**

1. On peut choisir arbitrairement les valeurs propres de l'application linéaire hyperbolique.
2. La restriction d'une application linéaire hyperbolique au secteur compris entre deux branches d'hyperboles invariantes et une droite propre (voir la figure 1) est conjuguée à la restriction de cette application linéaire au demi-plan considéré plus haut.

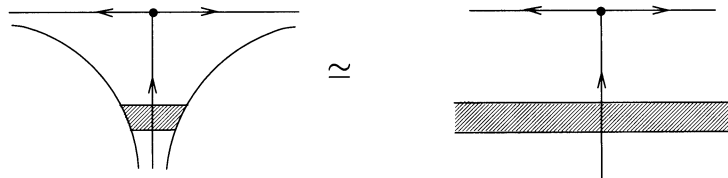


FIGURE 1

**Lemme 3.1.10.** — Pour tout point périodique  $s$ -bord  $p$  de  $K$ , notons  $(p, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in \{+, -\}$ , le point  $p$  muni d'un côté de sa variété stable où celle-ci est bord. Soit  $\{(p_1, \varepsilon_1), \dots, (p_k, \varepsilon_k)\}$  la famille de tous les points périodiques (ici fixes)  $s$ -bords de  $f$  munis d'un choix de côté  $s$ -bord : les points fixes doubles  $s$ -bords sont de ce fait représentés deux fois. Alors il existe une famille  $V_i \subset U$  de voisinages colliers linéarisants de  $f$ , telle que l'intersection  $V_i \cap V_j$  soit vide si  $p_i \neq p_j$ , ou réduite à  $W^s(p_i)$  si  $p_i = p_j$  (cas double-bord).

*Démonstration.* — Par souci de clarté, nous ne traiterons que le cas où  $K$  ne contient pas de double-bord.

Commençons par construire un voisinage collier linéarisant pour un point fixe  $p$  de  $f$  de type  $s$ -bord.

Notons  $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire définie par  $\mathcal{A}(x, y) = (x/2, 2y)$ . Remarquons que  $\mathcal{A}$  laisse invariante chaque hyperbole  $\Gamma_t$  d'équation  $x \cdot y = t$ . Pour tout  $t > 0$  on notera  $B_t = \{(x, y), y > 0 \text{ et } |x \cdot y| \leq t\}$ .

Pour tout point fixe  $p$  de type  $s$ -bord notons  $h: O \rightarrow \mathbb{R}^2$  un homéomorphisme conjuguant  $f$  à  $\mathcal{A}$  sur un petit voisinage  $O$  de  $p$ . On choisit  $h$  de façon que l'image de la séparatrice instable libre issue de  $p$  ait son image dans la demi-droite  $\{0\} \times [0, +\infty[$ . Choisissons  $\varepsilon > 0$  tel que le segment  $\{0\} \times [\varepsilon, 8\varepsilon]$  de la variété instable de  $(0, 0)$  pour  $\mathcal{A}$  soit inclus dans l'image de  $O$  par  $h$ . Notons  $A_t$  le disque topologique de  $\mathbb{R}^2$  bordé par la courbe fermée simple obtenue en joignant les extrémités des segments  $[-t/\varepsilon, t/\varepsilon] \times \{\varepsilon\}$  et  $[-t/2\varepsilon, t/2\varepsilon] \times \{2\varepsilon\}$  par des segments des hyperboles  $\Gamma_t$  et  $\Gamma_{-t}$  (voir la figure 2). Remarquons que l'intersection de  $A_t$  avec son image  $\mathcal{A}(A_t)$  est réduite au segment  $[-\frac{t}{2\varepsilon}, \frac{t}{2\varepsilon}] \times \{2\varepsilon\}$  et que, pour tout  $i \geq 2$ ,  $A_t$  est disjoint de ses itérés  $\mathcal{A}^i(A_t)$ . De plus



l'union de tous les itérés,  $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}^i(A_t)$ , est égale à  $B_t$  (en d'autre termes,  $A_t$  est un domaine fondamental de  $B_t$  pour  $\mathcal{A}$ ).

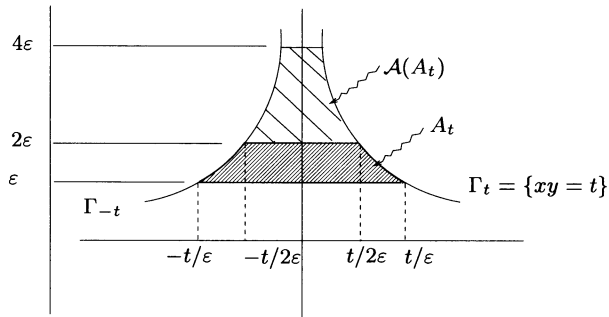


FIGURE 2. Choix d'un domaine fondamental d'un voisinage collier

Pour  $t$  assez petit,  $A_t$  et  $\mathcal{A}(A_t)$  sont inclus dans l'image de  $O$ . Notons  $C_t = h^{-1}(A_t)$ . Pour  $t$  petit,  $C_t$  est inclus dans un petit voisinage d'un domaine fondamental  $I$  de la séparatrice instable libre de  $p$  : en particulier  $C_t$  est disjoint de  $W^s(K)$ . On en déduit qu'il existe  $n_0 > 0$  tel que  $f^{n_0}(C_t) \cap \Sigma_1 = \emptyset$  (où  $\Sigma_1$  est la surface à bord ayant servi à construire  $U$ ). Comme le complémentaire de  $\Sigma_1$  est invariant par  $f$ , on obtient que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $C_t$  est disjoint de  $f^n(C_t)$ . De plus, pour  $t > 0$  assez petit et pour tout  $2 \leq n \leq n_0$ ,  $f^n(C_t)$  est contenu dans un petit voisinage du domaine fondamental  $f^n(I)$  de la séparatrice libre donc est disjoint de  $C_t$ . On en déduit que les itérés  $f^n(C_t)$  sont disjoints de  $C_t$  dès que  $|n| \geq 2$ .

Notons  $D_t = W^s(p) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(C_t)$ . Alors  $D_t$  est un voisinage collier linéarisant : en effet la restriction de  $h^{-1}$  à  $A_t$  se prolonge de façon unique en une immersion injective de  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}^n(A_t)$  sur  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(C_t)$  conjuguant les restrictions  $\mathcal{A}$  et de  $f$  à ces ensembles et cette immersion se prolonge par continuité, de  $\mathbb{R} \times \{0\}$  sur  $W^s(P)$ , par un homéomorphisme coïncidant avec  $h^{-1}$  au voisinage de  $(0, 0)$ .

Pour conclure la démonstration du lemme il reste à montrer que l'on peut choisir ces voisinages colliers linéarisants disjoints deux-à-deux. Soit  $p_1, \dots, p_k$  la famille des points s-bords fixes de  $f$  (supposé sans double-bord). Pour tout  $i$ , et tout  $t > 0$  petit, notons  $D_{i,t}$  le voisinage collier linéarisant construit ci-dessus. Alors pour  $t$  assez petit les  $D_{i,t}$  sont deux-à-deux disjoints : en effet, il suffit de vérifier que tout itéré de  $C_{i,t}$  est disjoint de tout itéré de  $C_{j,t}$  dès que  $i \neq j$ , ce que l'on montre par un raisonnement analogue à ci-dessus en utilisant que chaque  $C_{j,t}$  possède un itéré disjoint de  $\Sigma_0$ .  $\square$

**Lemme 3.1.11.** — *Supposons  $K$  sans double-bord.*

*Soit  $x_1, \dots, x_k \in K$  une famille finie de points de type coin et d'orbites distinctes. Alors il existe  $\sigma_1, \dots, \sigma_k \subset U$ ,  $k$  segments plongés dans  $U$ , ayant les propriétés suivantes :*

1. pour tout  $i$ , les itérés de  $\sigma_i \setminus \{x_i\}$  sont deux-à-deux disjoints,
2. pour tous  $i \neq j$ , les orbites de  $\sigma_i$  et de  $\sigma_j$  sont disjointes,
3. pour tout  $i$ ,  $\sigma_i$  admet  $x_i$  comme extrémité, et  $\sigma_i$  est transverse en  $x_i$  aux deux variétés (stable et instable) passant par  $x_i$ ,
4. pour tout  $i$ ,  $\sigma_i \setminus \{x_i\}$  est disjoint de  $W^s(K) \cup W^u(K)$ .

*Démonstration.* — Rappelons que l'on a supposé que les séparatrices bords sont toutes fixes pour  $f$ .

D'après le lemme 3.1.10 ci-dessus, on peut choisir un voisinage collier linéarisant  $D_p^s$  pour chaque point fixe  $p$  s-bord, de façon que les  $D_p^s$  soient deux-à-deux disjoints. De même on choisit des voisinages colliers linéarisants  $D_q^u$  pour les points fixes  $q$  u-bords.

Tout point coin  $x_i$  appartient à l'intersection  $E_i = D_{p_i}^s \cap D_{q_i}^u$  où  $p_i$  et  $q_i$  sont les points fixes des variétés stable et instable de  $x_i$ . En utilisant l'expression linéaire de la restriction de  $f$  à  $D_{p_i}^s$ , on choisit alors un segment  $\sigma_i$  d'extrémité  $x_i$  tel que  $\sigma_i \setminus x_i \subset \text{Int}(E_i)$ , et dont tous les itérés sont d'intérieurs disjoints (si  $x_i \neq p_i$ ,  $x_i$  est errant pour la dynamique linéarisée : il suffit donc de prendre  $\sigma_i$  assez petit ; si  $x_i = p_i$ , on choisit pour  $\sigma_i$  un petit segment radial situé dans le secteur bordé par les deux séparatrices libres).

Les items (1) et (3) sont déjà vérifiés. L'item (4) provient de ce que  $D_{p_i}^s$  et  $D_{q_i}^u$  ont été choisis d'intérieur disjoint de  $W^s(K)$  et de  $W^u(K)$  respectivement.

Montrons l'item (2).

Si  $p_i \neq p_j$ ,  $D_{p_i}^s$  et  $D_{p_j}^s$  sont alors deux voisinages colliers invariants et disjoints, ce qui assure que les itérés de  $\sigma_i$  et de  $\sigma_j$  sont disjoints.

Si  $x_i$  et  $x_j$  sont deux points non périodiques de la même variété stable, alors l'expression linéaire de  $f$  dans  $D_{p_i}^s$  montre qu'ils possèdent des voisinages dans  $D_{p_i}^s$  dont toutes les orbites par  $f$  sont disjointes : il suffit donc de choisir  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  assez petits.

Si  $x_i$  et  $x_j$  sont sur la même variété stable et que  $x_i$  est le point fixe,  $\sigma_i$  a été choisi dans le secteur libre (bordé par les séparatrices libres de  $x_i = p_i$ ), et ses itérés sont donc disjoints de  $\sigma_j$  (qui est inclus dans un autre secteur).  $\square$

**Remarque.** — Le lemme 3.1.11 admet bien sûr une version dans le cas où  $K$  possède des double-bords. Dans ce cas, il faut munir les points coins  $x_i$  d'un choix de secteurs où ces points sont coins. Dans chaque orbite d'un point coin, on peut alors choisir autant de  $x_i$  que de secteurs coins. Il faut alors remplacer l'item 2 du lemme, dans le cas où  $x_i$  et  $x_j$  correspondent à deux secteurs de la même orbite coin  $x$ , par la propriété : l'intersection de l'orbite de  $\sigma_i$  et de l'orbite de  $\sigma_j$  est réduite à l'orbite du point  $x$ .

La démonstration est pratiquement identique à celle du cas « sans double-bord », et est laissée au lecteur.

On peut maintenant conclure la démonstration de la proposition 3.1.2.

*Fin de la démonstration de la proposition 3.1.2.* — (Afin de simplifier l'exposition nous supposons que  $K$  est sans double-bord, ce qui nous permettra d'utiliser le lemme 3.1.11; la démonstration dans le cas «avec double-bord» est pratiquement identique, en utilisant la remarque ci-dessus).

On sait que  $\text{Att}(C)$  est une union finie de courbes qui sont soit des chaînes infinies, soit l'union d'un point fixe coin et de ses séparatrices libres. On choisit un point coin  $x_i$  sur chacune de ces courbes. Le lemme 3.1.11 permet de choisir pour tout  $i$  un segment  $\sigma_i$  d'extrémité  $x_i$ , tel que  $\sigma_i \setminus \{x_i\}$  soit inclus dans  $C$ , et que les chemins  $f^n(\sigma_i \setminus \{x_i\})$  soient deux-à-deux disjoints.

Alors les  $\sigma_i$  se projettent sur le cylindre en des courbes simples disjointes, proprement plongées  $\tilde{\sigma}_i$ . Si deux de ces courbes  $\tilde{\sigma}_1$  et  $\tilde{\sigma}_2$  vont vers le même bout du cylindre alors considérons un cercle  $c$  coupant  $\tilde{\sigma}_1$  en un et un seul point. Quitte à restreindre  $\sigma_2$  on peut supposer que  $\tilde{\sigma}_2$  est disjoint de  $c$ .

Considérons les deux relevés successifs  $\sigma_1$  et  $f(\sigma_1)$  et le segment relevé de  $c$  et joignant ces deux segments (voir la figure 3), ainsi que la courbe simple fermée construite en mettant bout à bout la courbe de  $\text{Att}(C)$  joignant l'extrémité de  $\sigma_1$  à son image, les segments  $\sigma_1$  et son image, et le segment relevé du cercle qui les joint. Cette courbe borde un disque d'intérieur contenu dans  $C$ . L'un des itérés de  $\sigma_2 \setminus x_2$  est inclus dans l'intérieur de ce disque, ce qui contredit le fait que  $\sigma_2$  a son extrémité sur une autre des courbes composant  $\text{Att}(C)$   $\square$

### 3.2. Domaine d'un ensemble hyperbolique saturé : définition et universalité

Dans ce paragraphe, nous reprenons les notations du paragraphe précédent :  $K$  est un ensemble hyperbolique saturé,  $\delta(K)$  est le domaine restreint de  $K$ , et  $U$  est l'ouvert invariant construit par la proposition 1.3.1. D'après la proposition 3.1.2, les composantes connexes de  $U \setminus \delta(K)$  sont en nombre fini, périodiques, homéomorphes au plan; de plus, chaque composante est munie d'un feuilletage produit dont les feuilles sont des droites invariantes par l'itéré de  $f$  correspondant à la période de la composante. Bien sûr, si  $C_0$  est une composante de  $U \setminus \delta(K)$  munie d'un feuilletage  $F$ , on pourra supposer que  $f(F)$  est le feuilletage dont est munie la composante  $f(C_0)$ . En d'autres termes,  $U \setminus \delta(K)$  est muni d'un feuilletage  $F$  invariant par  $f$  dont les feuilles sont des droites proprement plongées dans  $U$  et sont périodiques pour  $f$ , leur période coïncidant avec celle de la composante connexe qui les contient.

Pour toute orbite  $C = \{C_0, \dots, C_{k-1} = f^{k-1}(C_0)\}$  de composantes connexes de  $U \setminus \delta(K)$ , on choisit  $(\sigma_0, \gamma_0)$  deux feuilles distinctes de  $F$  contenues dans la composante  $C_0$ , et on note  $B_0 \subset C_0$  l'intérieur de la bande bordée par  $\sigma_0 \cup \gamma_0$ . Par construction du

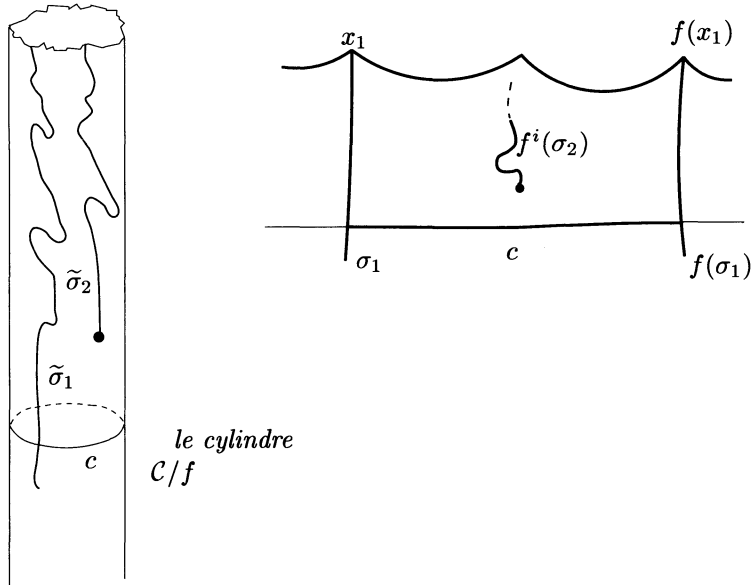


FIGURE 3. Un itéré de  $\sigma_2$  est piégé entre  $\sigma_1$  et  $f(\sigma_1)$

feuilletage  $F$  les feuilles  $\sigma_0$  et  $\gamma_0$  sont invariantes par  $f^k$ ; on en déduit que  $f^k(B_0) = B_0$ . On note  $B_i = f^i(B_0)$  et  $B(C) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (B_i) = \bigcup_0^{k-1} (B_i)$ .

Notons

$$\Delta(K) = U \setminus \bigcup_C (B(C)).$$

Remarquons que  $\Delta(K)$  est homéomorphe à une surface compacte à bord privée d'un ensemble fini de points. Nous dirons que  $\Delta(K)$  est une *surface à bord de topologie finie*.

**Définition 3.2.1.** — *Nous appellerons domaine de  $K$  tout voisinage  $O$  de  $K$  homéomorphe à  $\Delta(K)$  par un homéomorphisme coïncidant avec l'identité sur  $K$ , et conjuguant les restrictions de  $f$  à  $O$  et  $\Delta(K)$ .*

Notre construction du domaine semble dépendre de nombreux choix : choix de l'ouvert  $U$ , du feuilletage  $F$ , etc.. Le but de ce paragraphe est de montrer que le domaine de  $K$  est le « plus petit » voisinage invariant qui est une surface à bord de topologie finie, et qu'il est unique, à conjugaison près par des homéomorphismes égaux à l'identité sur  $\delta(K)$ .

La proposition suivante formalise le fait que  $\Delta(K)$  est le plus petit voisinage invariant de topologie finie : cette propriété s'appellera *versalité*

**Proposition 3.2.2 (Le domaine : versalité).** — *Pour tout voisinage  $D$  de  $K$  invariant par  $f$  et contenant  $\delta(K)$ , il existe un plongement de  $\Delta(K)$  dans  $D$  coïncidant avec l'identité sur le domaine restreint  $\delta(K)$  et commutant avec  $f$ .*

**Définition 3.2.3.** — *On appellera voisinage versel de  $K$  un voisinage  $D$ , invariant et de topologie finie, de  $K$  vérifiant la propriété de minimalité de la proposition 3.2.2 : pour tout voisinage invariant de topologie finie  $\tilde{D}$  de  $K$ , il existe un plongement de  $D$  dans  $\tilde{D}$  commutant avec  $f$  et coïncidant avec l'identité sur  $\delta(K)$ .*

#### Démonstration

0) Montrons d'abord que la classe de conjugaison de  $(\Delta(K), f)$  ne dépend pas du choix des feuilles  $\sigma, \gamma$  du feuilletage  $F$ .

Soit  $C$  une composante connexe de  $U \setminus \delta(K)$ , et par souci d'alléger les notations, supposons que cette composante soit fixe par  $f$ . Remarquons d'abord que l'espace des feuilles de la restriction du feuilletage  $F$  à  $C$  est  $\mathbb{R}$  (voir le corollaire 3.1.8). Choisissons donc 6 feuilles de façon ordonnée  $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$ , et pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$  notons  $B_i \subset C$  la bande bordée par  $\sigma_i$  et  $\gamma_i$ .

Alors, en utilisant le fait que la restriction de  $f$  à  $B_3$  est conjuguée à une translation, on construit facilement un homéomorphisme  $h$  de  $U$  commutant avec  $f$ , égal à l'identité hors de la bande  $B_3$  et tel que  $h(B_2) = B_1$ .

1) Soit  $D$  un voisinage de  $K$ , invariant par  $f$  et contenant  $\delta(K)$ . Remarquons que  $D \cap U$  est un voisinage invariant de  $K$  contenant  $\delta(K)$ . Nous pouvons donc supposer  $D \subset U$ . Considérons  $C$  une composante connexe de  $U \setminus \delta(K)$ , et notons  $\sigma < \gamma$  les feuilles de  $F$  qui sont les composantes du bord dans  $C$  de  $\Delta(K)$ .

Nous avons vu, dans la démonstration du corollaire 3.1.7, que le quotient de  $C$  par l'itéré de  $f$  correspondant à sa période est un cylindre  $\Gamma$ . De plus, le feuilletage  $F$  induit sur  $\Gamma$  un feuilletage produit en cercles.

Considérons la projection  $\bar{D}$  de  $D \cap C$  sur  $\Gamma$ . Montrons par l'absurde que  $\Gamma \setminus \bar{D}$  est relativement compact dans  $\Gamma$ . Supposons donc qu'il existe une suite de points  $(x_i) \subset \Gamma \setminus \bar{D}$  sortant de tout compact de  $\Gamma$  (voir la figure 4). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite  $(x_i)$  converge vers l'un des deux bouts du cylindre  $\Gamma$ . Par un argument tout à fait analogue à celui de la fin de la démonstration de la proposition 3.1.2, on montre alors que l'on peut extraire une sous-suite  $(x_{n_i})$  et pour tout  $i$  un relevé  $\tilde{x}_{n_i} \in C$  de  $x_{n_i}$ , de façon que la suite  $(\tilde{x}_{n_i})$  converge vers un point de  $\text{Att}(C) \subset W^s(K) \cup W^u(K)$ . Ceci contredit le fait que  $D$  est un voisinage invariant de  $K$ , et donc de ses variétés invariantes.

De l'argument ci-dessus, on déduit l'existence de feuilles  $\sigma_1 < \gamma_1$ , telles que toute feuille de  $C$  inférieure à  $\sigma_1$  ou supérieure à  $\gamma_1$  est incluse dans  $D$ .

D'après le point 0) de cette démonstration,  $D$  contient donc un voisinage de  $K$  homéomorphe à  $\Delta(K)$  par un homéomorphisme commutant avec  $f$  et égal à l'identité au voisinage de  $\delta(K)$  : la proposition est donc démontrée.  $\square$

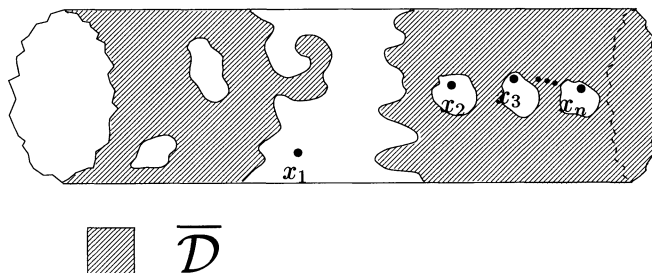


FIGURE 4. Suite de points hors de  $\bar{D}$ , convergeant vers l'un des bouts du cylindre  $\Gamma$

Le reste de ce paragraphe a pour but de formaliser et de montrer l'unicité du domaine. L'une des difficultés est que le domaine que nous avons défini n'est ni ouvert, ni fermé (nous compléterons le domaine au paragraphe 3.4, où les composantes du bord du domaine serviront à recoller entre eux les domaines des ensembles saturés et à reconstruire ainsi la dynamique globale). Remarquons que si l'on ôte au domaine  $\Delta(K)$  une des composantes connexes de son bord, on obtient un nouveau voisinage invariant de  $K$  homéomorphe à une surface compacte à bord privée d'un ensemble fini de points (on a remplacé une composante du bord joignant deux points enlevés par un point enlevé). Pour caractériser le domaine parmi ces divers voisinages, nous introduisons la notion de fermeture modulo  $f$  :

**Définition 3.2.4.** — *On dira qu'un ensemble  $E$  invariant par  $f$  est fermé modulo  $f$  si pour toute suite  $(x_i) \subset E, i \in \mathbb{N}$ , il existe une suite  $(n_i) \subset \mathbb{Z}$  telle que la suite de points  $(f^{n_i}(x_i))$  admette une sous-suite convergeant vers un point de  $E$ .*

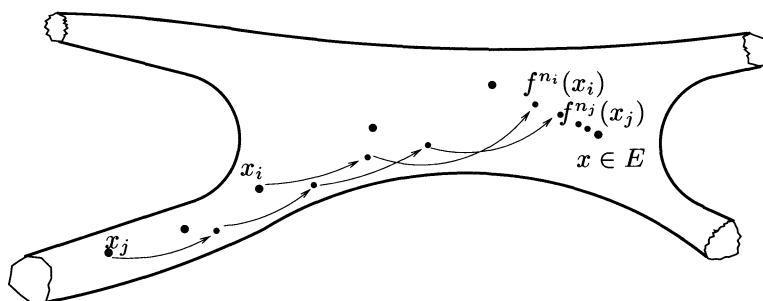


FIGURE 5. Un ensemble  $E$ , fermé modulo  $f$

**Remarque.** — L'ouvert  $U$  est fermé modulo  $f$ , car il est le saturé d'une partie compacte. Le domaine  $\Delta(K)$  est fermé modulo  $f$  car il est fermé dans  $U$ .

Remarquons que, pour caractériser  $\Delta(K)$  parmi les voisinages versels  $D$  de  $K$ , il suffit de considérer les voisinages  $D$  inclus dans l'intérieur de  $\Delta(K)$  : en effet, la propriété de versalité entraîne qu'ils sont conjugués à une partie de  $\Delta(K)$ , et le point 0 de la démonstration de la proposition 3.2.2 montre que  $\Delta(K)$  peut être plongé dans son intérieur.

**Proposition 3.2.5 (Le domaine : unicité).** — *Soit  $D$  un voisinage de  $K$ , inclus dans l'intérieur de  $\Delta(K)$ , invariant par  $f$ , et qui est une surface à bord de topologie finie. On suppose de plus que  $D$  est fermé modulo  $f$ , et que toute composante connexe de  $D$  contient au moins un point de  $K$ . Alors il existe un homéomorphisme  $h$  de  $D$  sur  $\Delta(K)$ , tel que  $h$  coïncide avec l'identité sur  $\delta(K)$  et conjugue la restriction de  $f$  à  $D$  et la restriction de  $f$  à  $\Delta(K)$ .*

**Lemme 3.2.6.** —  *$D$  est fermé dans  $\Delta(K)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $(x_i)$  une suite de points de  $D$  convergeant vers un point  $x$  de  $\Delta(K)$ . Si  $x$  appartient à  $\delta(K)$  alors  $x \in D$  : il n'y a rien à faire. Supposons désormais  $x \notin \delta(K)$ . Remarquons que, quitte à extraire une sous-suite, l'ensemble  $X = \{x\} \cup \{x_1, \dots, x_n \dots\}$  est une partie compacte d'une composante connexe de  $\Delta(K) \setminus \delta(K)$ . Comme  $D$  est fermé modulo  $f$ , quitte à extraire une sous-suite, il existe une suite  $(n_i) \subset \mathbb{Z}$  telle que la suite  $(f^{n_i}(x_i))$  converge vers un point  $y \in D$ . Cependant, étant donné un voisinage compact de  $y$  dans  $\Delta(K)$ , le lemme 3.1.6 implique que seul un nombre fini d'itérés du compact  $X$  rencontre ce voisinage : on en déduit que la suite  $(n_i)$  est bornée, et donc que  $y$  est un itéré de  $x$ . Comme  $D$  est invariant par  $f$  et  $y \in D$ , le point  $x$  appartient à  $D$ , c'est ce que nous devons montrer.  $\square$

*Démonstration de la proposition.* — Soit  $C$  une composante connexe de  $\Delta(K) \setminus \delta(K)$ ; quitte à remplacer  $f$  par un de ses itérés on supposera  $C$  invariante par  $f$ . Remarquons que  $C$  est homéomorphe à un demi-plan fermé sur lequel  $f$  agit comme une translation. Notons  $\gamma_1$  le bord de  $C$ .

Comme  $D$  est fermé dans  $\Delta(K)$ ,  $D \cap C$  est fermé dans  $C$ . Remarquons que le bord de  $D \cap C$  dans  $C$  est l'intersection avec  $C$  du bord de  $D$  : en effet,  $D$  étant inclus dans l'intérieur de  $\Delta(K)$  le bord de  $C$  est disjoint du bord de  $D$ . De plus, toute composante connexe du bord de  $D$  est disjointe de  $\delta(K)$  : toute composante du bord de  $D$  rencontrant  $C$  est donc incluse dans l'intérieur de  $C$ . On en déduit que le bord de  $D \cap C$  dans  $C$  est une union finie de courbes, et que  $D \cap C$  est une surface fermée à bord du demi-plan  $C$ , invariante par la translation  $f$ . Chaque composante du bord de  $D \cap C$  est invariante par une puissance de  $f$ .

Le quotient  $C/f$  de  $C$  par  $f$  est un cylindre  $[0, +\infty[ \times S^1$ . Le quotient  $(D \cap C)/f$  a pour bord le quotient du bord de  $D \cap C$ , c'est-à-dire un nombre fini de courbes fermées simples disjointes. Remarquons que toutes ces courbes sont essentielles (c'est-à-dire

non homotopes à zéro); en effet une courbe homotope à zéro a pour image inverse dans  $C$  une infinité de courbes fermées.

Si le nombre de ces courbes est plus grand que 1, alors le quotient  $(D \cap C)/f$  contient un anneau (homéomorphe à  $[0, 1] \times S^1$ ). Dans ce cas,  $D \cap C$  contient une bande  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  proprement plongée dans  $C$  et invariante par  $f$ . Une telle bande est une composante connexe de  $D$  qui ne rencontre pas  $K$ , ce qui contredit la définition de  $D$ .

Le bord de  $(D \cap C)/f$  est donc réduit à une unique courbe fermée simple. Donc  $(D \cap C)/f$  est un demi-cylindre fermé contenu dans  $C$ . Il existe un homéomorphisme  $h_C$  de  $C/f$  sur  $(D \cap C)/f$ , égal à l'identité au voisinage du bout de  $C/f$ . L'homéomorphisme  $h_C$  se relève en un homéomorphisme  $\tilde{h}_C$  de  $C$  sur  $D \cap C$ , commutant avec  $f$  et égal à l'identité près de  $\delta(K)$  (c'est-à-dire sur l'intersection avec  $C$  d'un voisinage de  $\delta(K)$ ). En recollant les homéomorphismes  $\tilde{h}_C$  obtenus pour toutes les composantes de  $\Delta(K) \setminus \delta(K)$  avec l'identité sur  $\delta(K)$  on obtient l'homéomorphisme annoncé.  $\square$

De la proposition et de la définition de la versalité, on déduit une définition intrinsèque du domaine :

**Corollaire 3.2.7.** — *Tout voisinage  $f$ -invariant et de topologie finie de  $K$  qui est versel, fermé modulo  $f$ , et dont toute composante connexe contient un point de  $K$ , est conjugué à  $\Delta(K)$  par un homéomorphisme coïncidant avec l'identité sur  $\delta(K)$ .*

### 3.3. Le graphe de Smale et les domaines

**Lemme 3.3.1.** — *Soient  $K$  et  $L$  deux ensembles hyperboliques saturés qui correspondent à des intervalles  $I$  et  $J$  de pièces basiques. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Toute pièce basique de  $I$  est non-comparable pour  $\prec$  à toute pièce basique de  $J$ .*
2. *Les domaines  $\Delta(K)$  et  $\Delta(L)$  peuvent être choisis disjoints.*

*Démonstration.* — Si  $\Delta(K) \cap \Delta(L) = \emptyset$ , alors les variétés invariantes de toute pièce basique de  $I$  sont disjointes des variétés invariantes des pièces basiques contenues dans  $J$ , ce qui entraîne que ces pièces basiques sont non-comparables. Il reste à montrer la réciproque :

Remarquons d'abord que  $I \cup J$  est un intervalle de pièces basiques. Notons  $U$  l'ouvert invariant homéomorphe à une surface compacte  $\tilde{S}$  privée d'un ensemble fini de points, construit par la proposition 1.3.1, et correspondant à l'intervalle  $I \cup J$ . Quitte à remplacer  $S$  et  $f$  par la surface  $\tilde{S}$  et le difféomorphisme de Smale  $\tilde{f}$  de cette proposition, on pourra supposer que  $S \setminus U$  se réduit à un ensemble fini de points périodiques attracteurs ou répulseurs.

Rappelons d'abord que la variété stable  $W^s(K)$  est l'union des variétés stables des pièces basiques contenues dans  $K$ . L'adhérence de cette variété stable est l'union des



variétés stables des pièces basiques supérieures ou égales à  $I$ . En particulier, c'est un compact disjoint de l'union des variétés invariantes de  $L$ . De plus les pièces basiques supérieures strictement à  $I$  sont des points répulseurs contenus dans  $S \setminus U$  : on en déduit que  $W^s(K)$  est un fermé de  $U$  disjoint des variétés invariantes de  $L$ . Il en va bien sûr de même de la variété instable de  $K$ , et des variétés invariantes de  $L$  :  $W^s(K) \cup W^u(K)$  et  $W^s(L) \cup W^u(L)$  sont deux fermés de  $U$  qui sont disjoints.

Notons  $M = K \cup L$  ; c'est un ensemble hyperbolique saturé (associé à l'intervalle  $I \cup J$ ). On considère son domaine  $\Delta(M)$ . Remarquons que  $\Delta(M)$  est localement connexe par arcs (car c'est une surface à bord), et que  $W^s(K) \cup W^u(K)$  et  $W^s(L) \cup W^u(L)$  sont des fermés de  $\Delta(M)$ . Supposons qu'il existe une composante connexe de  $\Delta(M)$  qui contienne à la fois des points de  $K$  et des points de  $L$  : il existe alors un chemin  $\sigma$  dans  $\Delta(M)$  d'intérieur disjoint des variétés invariantes de  $K$  et de  $L$ , ayant son origine dans  $W^s(K) \cup W^u(K)$  et son extrémité dans  $W^s(L) \cup W^u(L)$ .

Remarquons que  $\sigma$  est d'intérieur disjoint de  $\delta(M)$  : dans le cas contraire, l'intérieur de  $\sigma$  serait inclus dans l'intérieur d'un disque bordé par un polygone d'arches de  $L$  : ceci implique l'existence d'un polygone d'arches possédant des arches de  $K$  et des arches de  $L$ , ce qui contredit que leurs variétés invariantes soient disjointes.

L'intérieur de  $\sigma$  est donc contenu dans une composante connexe  $C$  de  $\Delta(M) \setminus \delta(M)$ , et a ses extrémités sur  $\delta(M)$ . Les extrémités de  $\sigma$  sont donc des points de  $\text{Att}(C)$ . Remarquons que, par construction du domaine, la frontière (dans  $\Delta(M)$ ) atteignable de toute composante connexe de  $\Delta(M) \setminus \delta(M)$  est exactement une courbe qui est ou bien une chaîne infinie d'arches, ou bien l'union d'un point périodique coin, d'une séparatrice libre stable et une séparatrice libre instable (en effet, la proposition 3.1.2 dit que les composantes connexes de  $U \setminus \delta(M)$  ont comme bord atteignable deux de ces courbes, et  $C$  a été obtenue en découpant une telle composante suivant une bande séparant ces deux courbes). Une telle courbe ne peut porter à la fois des points des variétés invariantes de  $K$  et des points des variétés invariantes de  $L$ , ce qui contredit la définition de  $\sigma$ .

Nous pouvons à présent conclure la démonstration du lemme. En effet l'union des composantes connexes de  $\Delta(M)$  non-disjointes de  $K$  est un voisinage invariant de topologie finie de  $K$  : d'après la proposition 3.2.2, on peut donc choisir  $\Delta(K)$  dans cette union. De même, on peut choisir  $\Delta(L)$  dans l'union des composantes connexes de  $\Delta(M)$  non-disjointes de  $L$ . Ces choix de domaines de  $K$  et  $L$  sont alors disjoints.  $\square$

**Corollaire 3.3.2.** — *Soient  $K$  et  $L$  deux ensembles hyperboliques saturés tels que toute pièce basique composant  $K$  soit non-comparable pour  $\prec$  à toute pièce basique composant  $L$ . Alors  $K \cup L$  est un ensemble hyperbolique saturé dont le domaine  $\Delta(K \cup L)$  est homéomorphe à l'union disjointe  $\Delta(K) \amalg \Delta(L)$  par un homéomorphisme commutant avec  $f$  et coïncidant avec l'identité sur  $\delta(K) \cup \delta(L)$ .*

*Démonstration.* — On a vu dans la démonstration du lemme 3.3.1 que l'on peut choisir les domaines  $\Delta(K)$  et  $\delta(L)$  de façon qu'ils soient disjoints et inclus dans  $\Delta(K \cup L)$

$L$ ). L'union  $\Delta(K) \cup \Delta(L)$  est alors un voisinage invariant de  $K \cup L$  de topologie finie, fermé modulo  $f$  et inclus dans  $\Delta(K \cup L)$ . La proposition 3.2.5 permet alors de conclure.  $\square$

Voici à présent une reformulation du corollaire 3.3.2 :

**Corollaire 3.3.3.** — *Soit  $I$  un intervalle de pièces basiques, et  $K$  l'ensemble hyperbolique saturé qui lui est associé. Soit  $G_I$  le sous-graphe du diagramme de Smale correspondant à  $I$ . Soient  $J_1, \dots, J_k$  les intervalles correspondant aux composantes connexes de  $G_I$ , et  $L_1, \dots, L_k$  les ensembles hyperboliques saturés qui leur sont associés.*

*Alors  $(\Delta(K), f)$  est conjugué à  $(\coprod_i (\Delta(L_i)), f)$  par un homéomorphisme égal à l'identité sur  $\delta(K)$ .*

Le but de cette fin de paragraphe est de montrer que, pour étudier la dynamique sur les domaines d'ensembles hyperboliques saturés, il suffit de considérer les ensembles hyperboliques saturés dont le domaine est connexe.

Soit  $(K, f)$  un ensemble hyperbolique saturé et  $\Delta(K)$  son domaine. Remarquons que  $\Delta(K)$  possède un nombre fini de composantes connexes, et que  $f$  induit une permutation sur l'ensemble de ces composantes connexes. Soit  $C_0$  l'une de ces composantes,  $k$  sa période pour  $f$ , et  $\Delta_0 = \bigcup_0^{k-1} f^i(C_0)$  l'union des composantes de l'orbite de  $C_0$ . L'ensemble  $K_0 = K \cap \Delta$  est alors un ensemble hyperbolique saturé, qui correspond à l'une des composantes connexes du diagramme de Smale de  $K$  ; son domaine est  $\Delta_0$ . On a donc déjà montré :

**Corollaire 3.3.4.** — *Pour tout ensemble hyperbolique saturé  $(K, f)$ , il existe une famille finie  $\{(K_i, f), 1 \leq i \leq l\}$  d'ensembles hyperboliques saturés tels que l'on ait :*

1. *Pour tout  $i$ , le domaine  $\Delta(K_i)$  possède une unique orbite de composantes connexes.*
2.  *$(\Delta(K), f)$  est l'union disjointe des  $(\Delta(K_i), f)$*

Le lemme 3.2.5 et le corollaire 3.2.7 permettent de montrer :

**Corollaire 3.3.5.** — *Soit  $(K, f)$  un ensemble hyperbolique saturé, et  $\Delta(K)$  son domaine.*

*Pour tout  $n \neq 0$ ,  $K$  est un ensemble hyperbolique saturé de  $f^n$  et son domaine pour  $f^n$  est  $\Delta(K)$ .*

Considérons à présent un ensemble hyperbolique saturé  $(K, f)$  dont le domaine  $\Delta(K)$  ne contient qu'une seule orbite de composantes connexes, et notons  $p$  la période de cette orbite. Alors le domaine de  $K$  pour  $f^p$  est encore  $\Delta(K)$  (d'après le corollaire 3.3.5) et possède donc  $p$  composantes connexes invariantes par  $f^p$ . Il est de plus clair que les restrictions de  $f^p$  à ces composantes connexes de  $\Delta(K)$  sont conjuguées deux-à-deux. On en déduit donc :

**Corollaire 3.3.6.** — Soit  $(K, f)$  un ensemble hyperbolique saturé dont le domaine ne contient qu'une orbite de composantes connexes et soit  $p$  sa période. Soit  $C$  une composante connexe de  $\Delta(K)$  et soit  $L = K \cap C$ . Alors :

1.  $L$  est un ensemble hyperbolique saturé de  $f^p$ , dont le domaine est  $C$  (donc est connexe).
2.  $(\Delta(K), f)$  est topologiquement conjugué à  $L \times \{1, \dots, p\}$  muni du difféomorphisme  $\phi$  défini par  $(\phi(x, i) = (x, i + 1)$  si  $i \neq p$ , et  $\phi(x, p) = (f^p(x), 1)$ .

Voici, pour finir ce paragraphe, une caractérisation des ensembles hyperboliques saturés dont le domaine est connexe.

**Lemme 3.3.7.** — Soit  $(K, f)$  un ensemble hyperbolique saturé. Alors  $\Delta(K)$  est connexe si et seulement si  $W^s(K) \cup W^u(K)$  est connexe.

*Démonstration.* — Si l'union des variétés invariantes de  $K$  est connexe, le domaine est lui aussi connexe car chacune de ses composantes connexes contient, par construction, un point de  $K$ . C'est la réciproque qu'il faut montrer.

Remarquons d'abord que, pour tout ensemble hyperbolique saturé, l'union de ses variétés invariantes possède un nombre fini de composantes connexes. En effet, le théorème spectral assure que toute pièce basique  $\Lambda$  est l'union d'un nombre fini de compacts  $\Lambda_i$  permutés par  $f$ , et tels que pour tous  $x, y \in \Lambda_i$ , la variété stable de  $x$  rencontre transversalement la variété instable de  $y$  : en particulier l'union des variétés stables et instables de  $\Lambda_i$  est connexe. On en déduit que  $W^s(\Lambda) \cup W^u(\Lambda)$  contient un nombre fini de composantes connexes ; il en est de même de  $W^s(K) \cup W^u(K)$ , qui est l'union des variétés invariantes des pièces basiques contenues dans  $K$ .

Les composantes connexes  $W^i$  de  $W^s(K) \cup W^u(K)$  sont permutées par  $f$ , et sont périodiques : notons  $p$  un multiple commun aux périodes de ces composantes connexes. Alors l'intersection  $K_i$  de  $K$  avec chacune des composantes connexes  $W^i$  de  $W^s(K) \cup W^u(K)$  est invariante par  $f^p$ , et est donc un ensemble hyperbolique saturé de  $f^p$ . De plus, pour  $i \neq j$ , les variétés invariantes de  $K_i$  sont disjointes de celles de  $K_j$  donc les pièces basiques de  $f^p$  contenues dans  $K_i$  sont non-comparables à celles contenues dans  $K_j$ . D'après le lemme 3.3.1, le domaine de  $K$  pour  $f^p$  contient au moins autant de composantes connexes que de  $K_i$  (et donc de  $W^i$ ). Or, le domaine de  $K$  pour  $f^p$  est égal au domaine  $\Delta(K)$  pour  $f$ . On a donc montré que si  $\Delta(K)$  est connexe,  $W^s(K) \cup W^u(K)$  aussi.  $\square$

### 3.4. Première réduction du problème de classification des difféomorphismes de Smale

Dans ce paragraphe, nous allons définir des règles de recollement des domaines d'une famille finie d'ensembles hyperboliques saturés  $K_i$  de difféomorphismes de Smale  $f_i$  sur différentes surfaces. Nous verrons que chaque règle de recollement des

domaines  $\Delta(K_i, f_i)$  construit une surface compacte munie d'une classe d'équivalence topologique de difféomorphismes de Smale. De plus, pour toute famille finie de domaines  $\Delta(K_i, f_i)$ , l'ensemble des règles de recollement est finie. Nous remarquerons de plus que chaque difféomorphisme peut être reconstruit par recollement des domaines de ses propres ensembles hyperboliques saturés.

Nous aurons ainsi montré que, pour classifier les difféomorphismes des surfaces compactes à conjugaison topologique près, il suffit de classifier (à conjugaison topologique près) les restrictions des difféomorphismes de Smale aux domaines des ensembles hyperboliques saturés.

Les domaines n'étant ni ouverts ni fermés, il sera plus commode de les compactifier.

Soit  $\Delta$  le domaine d'un ensemble hyperbolique saturé  $K$  d'un difféomorphisme  $f$  d'une surface  $S$ . Nous avons construit (voir la proposition 1.3.1) un difféomorphisme  $\tilde{f}$  d'une surface  $\tilde{S}$ , de sorte que  $\Delta$  soit obtenu à partir de l'ouvert  $U = \tilde{S} \setminus \{\text{sources, puits}\}$ , en coupant suivant des bandes disjointes, dont l'union est invariante par  $\tilde{f}$ , chaque bande joignant une source à un puits.

Dans  $\tilde{D}$  les sources et puits ont des voisinages divisés en secteurs alternativement dans une bande et dans  $\Delta$  (voir figure 6).

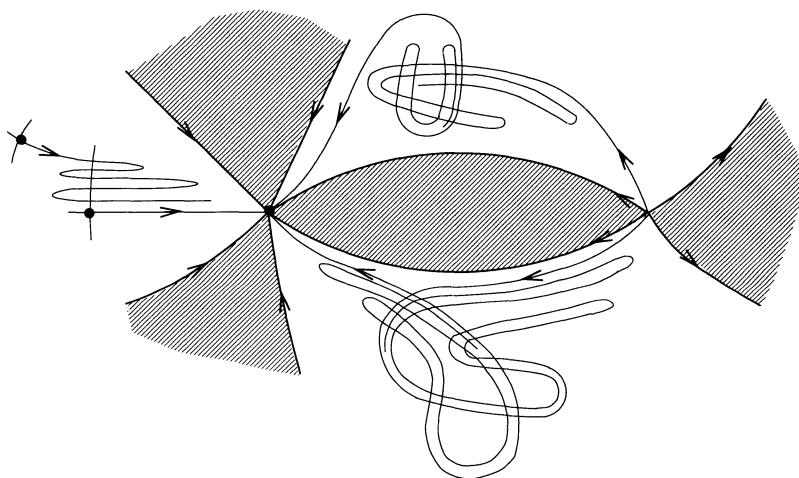


FIGURE 6. Les secteurs alternativement dans une bande ou dans  $\Delta$ , au voisinage d'un puits (à gauche)

Nous pouvons maintenant compléter  $\Delta$  en ajoutant un point à l'extrémité de chaque secteur de  $\Delta$  contenu dans un voisinage découpé comme ci-dessus d'une source ou d'un puits. Si la source ou le puits admet un voisinage qui n'est pas découpé, il suffit de rajouter ce point. Le résultat est une surface compacte à bord  $\overline{\Delta}$ . Par construction,  $\overline{\Delta} \setminus \Delta$  est un ensemble fini de points qui sont des sources ou des puits (pour la dynamique obtenue en complétant par continuité la restriction de  $f$  à  $\Delta$ ). Remarquons

que chaque composante du bord de  $\overline{\Delta}$  contient au moins une source et un puits, ces sources et puits étant alternés sur chacune des composantes du bord de  $D$ . Il sera commode de la visualiser comme une surface à bords et coins, les coins étant les sources et puits contenus dans le bord.

En souvenir des « *diamonds* » (carreaux) qu'utilise Peixoto pour classifier les champs de vecteurs Morse-Smale quasi-gradients, nous appellerons « *carreaux* » ces domaines complétés.

*Petite remarque sémantique.* — Nos carreaux généralisent les voisinages en étoile dont nous avons parlé dans l'introduction, et ne coïncident hélas pas avec les « *diamonds* » de Peixoto.

A chaque droite du bord de  $\Delta$  correspond un côté du carreau, c'est-à-dire un segment joignant un coin source à un coin puits. On appellera *orientation dynamique* d'un côté d'un carreau l'orientation qui va du coin source vers le coin puits.

Voyons à présent comment assembler les carreaux, et pour cela nous allons définir ce qu'est une règle de recollement.

Soient  $(\Delta_1, f_1), \dots, (\Delta_k, f_k)$  les restrictions de  $k$  difféomorphismes de Smale  $f_i$  (définis chacun sur une surface  $S_i$  orientée,  $f_i$  respectant l'orientation), aux domaines  $\Delta_i \subset S_i$  d'ensembles hyperboliques saturés  $K_i$ . On notera  $(\overline{\Delta}_i, f_i)$  les carreaux obtenus en complétant comme ci-dessus les domaines  $\Delta_i$ .

Soit  $\gamma$  un côté de  $\overline{\Delta}_i$ . On associe à  $\gamma$  un signe  $\varepsilon(\gamma) \in \{-1, 1\}$ , suivant que l'orientation de  $\gamma$  comme bord de  $\overline{\Delta}_i$  coïncide ou non avec l'orientation dynamique.

Remarquons que les côtés positifs et les côtés négatifs sont en même nombre puisqu'ils sont alternés sur chaque composante du bord. Notons  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  les ensembles de tous les côtés positifs et négatifs. Remarquons que les  $f^i$  induisent des permutations  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  sur les ensembles  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$ .

**Définition 3.4.1.** — *Avec les notations ci-dessus, on appellera règle de recollement de la famille de carreaux  $(\Delta_i, f_i)$ , une bijection  $\phi$  de  $\Gamma^+$  sur  $\Gamma^-$  conjuguant les permutations  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$ .*

**Proposition 3.4.2 (Les carrelages).** — *Soit  $\{(\overline{\Delta}_i, f_i), 1 \leq i \leq k\}$  une famille finie de carreaux, et soient  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  les ensembles des côtés positifs et négatifs de ces carreaux. Soit  $\phi: \Gamma^+ \rightarrow \Gamma^-$  une règle de recollement.*

*Il existe une famille d'homéomorphismes  $h_\gamma$  envoyant chaque côté positif  $\gamma$  sur son image  $\phi(\gamma)$ , de façon qu'en recollant les carreaux le long de leurs côtés par les homéomorphismes  $h_\gamma$ , on obtienne une surface compacte orientable sans bord munie d'un homéomorphisme préservant l'orientation, conjugué à un difféomorphisme de Smale.*

*De plus la classe de conjugaison de ce difféomorphisme ne dépend que des carreaux et de  $\phi$ .*

*Idée de démonstration.* — Si  $\gamma$  est un côté fixe pour  $\sigma^+$  alors  $\phi(\gamma)$  est fixe pour  $\sigma^-$  et les restrictions des  $f_i$  correspondants sur l'intérieur de ces deux côtés sont des translations. On peut donc choisir un homéomorphisme  $h_\gamma: \gamma \rightarrow \phi(\gamma)$  qui conjugue ces deux translations. Si  $\gamma$  est périodique de période  $p$ ,  $\phi(\gamma)$  aussi. On choisit un homéomorphisme  $h_\gamma$  conjuguant les restrictions des itérés  $f_i^p$  aux côtés  $\gamma$  et  $\phi(\gamma)$ . Sur l'itéré  $f_i^j(\gamma)$ , on obtiendra alors  $h_{f_i^j(\gamma)}$  en conjuguant  $h_\gamma$  par la  $j^{\text{ième}}$  puissance des  $f_i$  convenables.

On se convainc facilement qu'en recollant les  $\bar{\Delta}_i$  le long de leurs côtés par les homéomorphismes  $h_\gamma$ , on obtient une surface  $S$  compacte sans bord. Le fait que chaque côté positif soit recollé à un côté négatif assure que cette surface est orientée. De plus, les difféomorphismes  $f_i$  se recollent sur  $S$  en un homéomorphisme  $f$  qui préserve l'orientation de  $S$ .

Remarquons qu'en chaque point obtenu par recollement de puits (resp. des sources) des carreaux, cet homéomorphisme  $f$  est topologiquement contractant (resp. dilatant).

Soit  $\sigma$  une cicatrice, c'est-à-dire un segment de  $S$  obtenu par recollement de deux côtés. Remarquons que  $\sigma$  joint un puits à une source, et que  $\sigma$  privé de ses extrémités possède un voisinage qui est une bande invariante (par une puissance de  $f$ ) et que la dynamique sur cette bande invariante est conjuguée à une translation.

Les deux observations ci-dessus permettent de lisser la dynamique en un difféomorphisme de Smale (encore noté  $f$ ), et montrent que la classe de conjugaison topologique de ce difféomorphisme de Smale ne dépend pas du choix des homéomorphismes  $h_\gamma$ .  $\square$

Voyons à présent que tout difféomorphisme de Smale est obtenu par recollement de tels carreaux.

Soit  $f$  un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte orientable  $S$ . Notons  $U$  la surface  $S$  privée de ses points attracteurs ou répulseurs. Notons  $I$  l'ensemble des pièces basiques qui ne sont pas des points périodiques attracteurs ou répulseurs : c'est un intervalle de pièce basiques. Notons  $K$  l'ensemble hyperbolique saturé associé à l'intervalle  $I$ . Le domaine  $\Delta(K)$  est obtenu en ôtant à  $U$  l'intérieur d'un nombre fini de bandes disjointes proprement plongées dans  $U$  ; remarquons que l'union de ces bandes est invariante par  $f$ , et que chaque composante de leur bord joint un point attracteur à un point répulseur ; de plus, chacune de ces bandes  $B$  est périodique pour  $f$ , et la restriction de  $f^p$  à  $B$  (où  $p$  est la période de  $B$ ) est conjuguée à une translation.

Voyons que les bandes définissent une règle de recollement de l'ensemble des composantes connexes du bord de  $\Delta(K)$ . En effet, si  $B$  est une bande, on constate que l'orientation des composantes connexes du bord de  $B$  comme bord de  $\Delta(K)$  est compatible avec l'orientation dynamique sur l'une des deux composantes (notée  $\gamma_B$ ) et contraire à l'orientation dynamique sur l'autre (notée  $\phi(\gamma_B)$ ). La composante  $\gamma_B$  correspond donc à un côté positif et  $\phi(\gamma_B)$  à un côté négatif, et on vérifie que  $\phi$  définit une bijection de  $\Gamma^+$  sur  $\Gamma^-$  conjuguant les permutations induites par  $f$ .

La proposition suivante est alors immédiate :

**Proposition 3.4.3 (Le carrelage).** — *Avec les notations ci-dessus, en recollant le carreau  $\overline{\Delta}(K)$  par la règle de recollement  $\phi$ , on obtient la surface  $S$  munie de la classe de conjugaison du difféomorphisme  $f$ .*

En conclusion, une description combinatoire de la classe de conjugaison topologique d'un difféomorphisme de Smale sera donnée par une description combinatoire de sa restriction au domaine de l'ensemble hyperbolique saturé  $K$  associé à son diagramme de Smale privé des sources et des puits, et par une règle de recollement des côtés du carreau correspondant. De plus, d'après les corollaires 3.3.4 et 3.3.6,  $(\Delta(K), f)$  se reconstruit de façon simple à partir de domaines  $(\Delta(K_i), f^i)$  connexes.

Il nous suffit à présent de classifier les restrictions de difféomorphismes de Smale aux domaines connexes d'ensembles hyperboliques saturés.

## CHAPITRE 4

### CONSTRUCTION DE PARTITIONS DE MARKOV

Le but de cette partie est de donner un procédé de construction de partitions de Markov par des rectangles disjoints (éventuellement dégénérés, voir définition 2.2.1), pour tout un ensemble hyperbolique saturé  $K$  qui ne contient pas d'attracteur ni de répulseur.

Cette partie ne contient pas de résultats vraiment originaux : le fait que les ensembles hyperboliques de difféomorphismes de surfaces admettent des partitions de Markov par des rectangles est déjà connu. L'existence de ces partitions de Markov (par rectangles disjoints) est le seul résultat nécessaire aux parties suivantes de ce travail, et le lecteur peut donc lire les parties suivantes de façon indépendante, en admettant ce résultat.

Notre motivation pour écrire cette partie est double :

1. En général les auteurs demandent aux rectangles d'être d'intérieurs disjoints, alors que nous aurons besoin de rectangles disjoints. De plus, nous considérons des ensembles hyperboliques non transitifs, et l'existence de double-bords nous oblige à admettre des rectangles dégénérés (c'est-à-dire réduits à un segment ou à un point) : nous ne pouvons donc pas appliquer tels quels les résultats de la littérature.
2. Nous pensons qu'il sera prochainement possible d'exhiber, pour tout ensemble hyperbolique saturé dont le domaine est connexe, une famille finie de partitions de Markov (à conjugaison près par la dynamique). De plus, nous espérons que cette famille finie sera obtenue de façon algorithmique à partir d'une partition de Markov quelconque, ce qui permettra de décider si deux partitions de Markov décrivent ou pas le même ensemble hyperbolique. Il faudra pour cela disposer d'un procédé explicite de construction.

**Remarque.** — Le fait que nous demandons aux rectangles des partitions de Markov d'être disjoints nous a obligés à ne considérer, dans cette partie, que des ensembles



hyperboliques saturés ne possédant pas d'attracteur ou de répulseur hyperbolique (qu'il soit périodique ou non périodique).

#### 4.1. Quelques définitions

**Définition 4.1.1 (bonne partition de Markov).** — On appellera bonne partition de Markov pour  $K$  une famille finie  $M = \{R_i\}$  de rectangles disjoints recouvrant  $K$  telle que :

1. pour tout  $(i, j)$ , toute composante connexe de l'intersection  $R_i \cap f(R_j)$  est un rectangle dont le bord stable (resp. le bord instable) est inclus dans  $\partial^s(R_i)$  (resp. dans  $\partial^u(f(R_j))$ ), et rencontre chacune des composantes connexes de  $\partial^s(R_i)$  (resp.  $\partial^u(f(R_j))$ ).
2. Pour toute suite  $\{i_n\}, n \in \mathbb{Z}$  chaque composante connexe de l'intersection

$$\bigcap_{\mathbb{Z}} f^n(R_{i_n})$$

contient au plus un point qui appartient alors à  $K$ .

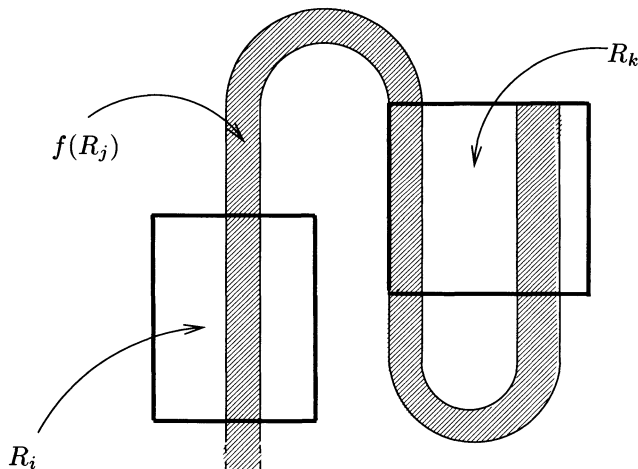


FIGURE 1. Comment l'image d'un rectangle traverse les rectangles

Nous allons chercher, dans la réunion des courbes s-bords et u-bords, les familles de segments qui formeront le bord des rectangles d'une bonne partition de Markov.

**Définition 4.1.2 (segment isolé).** — Un segment  $\sigma$  d'une variété stable  $W^s$  d'un point de  $K$  sera dit isolé si ses extrémités sont dans  $K$  et qu'il existe un intervalle ouvert  $\gamma$  de  $W^s$  contenant  $\sigma$  et tel que  $\gamma \cap K \subset \sigma$ .

On définit de façon analogue les segments instables isolés.

**Définition 4.1.3 (famille adaptée de segments stables).** — On dira que  $\delta^s$  est une famille adaptée de segments stables si :

1. Chaque composante connexe de  $\delta^s$  est un segment de variété stable de type  $s$ -bord isolé.
2. Tout point périodique de type  $s$ -bord appartient à  $\delta^s$ .
3.  $f(\delta^s) \subset \delta^s$ .
4. Pour tout  $x \in \delta^s \cap K$  non-périodique, il existe une  $u$ -arche ayant ses deux extrémités dans  $\delta^s$ , l'une d'elles étant  $x$ .

On définit de façon analogue les familles adaptées de segments instables.

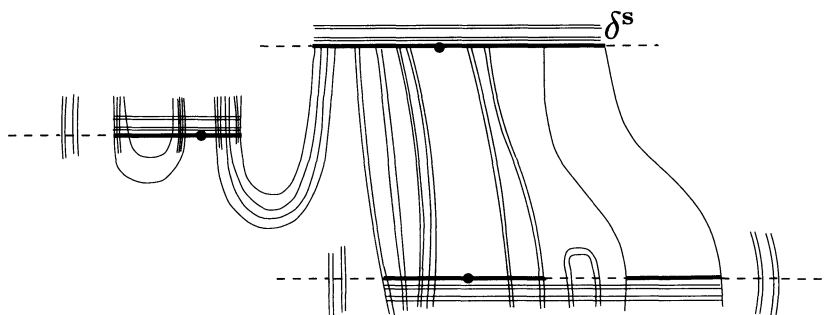


FIGURE 2. Une famille adaptée de segments stables

**Exemple.** — Soit  $\{R_i\}$  une famille finie de rectangles deux-à-deux disjoints recouvrant  $K$ . Si  $M = \{R_i\}$  est une bonne partition de Markov pour  $K$  alors  $\partial^s(M)$  et  $\partial^u(M)$  sont des familles adaptées de segments stables et instables respectivement.

En effet les items (1) et (3) sont conséquences directes de la définition de bonne partition de Markov ; l'item (2) se déduit de la remarque qui suit la définition 2.2.1 (définition d'un rectangle). Montrons l'item (4) : soit  $x \in \partial^s(M)$  non périodique, d'après l'item (4) de la proposition 2.1.1 la séparatrice instable de  $x$  sortant de  $M$  rencontre de nouveau  $K$ . Soit  $y$  le premier point appartenant à  $K$  de cette séparatrice ; l'arc  $[x, y]^u$  de cette séparatrice est l'arche cherchée.

**Définition 4.1.4 (Rails).** — Soit  $\delta^s$  une famille de segments stables  $s$ -bords. On appellera rail non-trivial s'appuyant sur  $\delta^s$  tout segment de variété instable de  $K$  non égal à une  $u$ -arche ni à un point, d'intérieur disjoint de  $\delta^s$  et ayant ses extrémités sur  $\delta^s$ . Un rail trivial est un point de  $\delta^s \cap K$  qui n'est l'extrémité d'aucun rail non trivial.

Deux rails  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  seront dit équivalents s'il existe un rectangle (éventuellement seulement immergé ou dégénéré) dont le bord stable est inclus dans  $\delta^s$  et tel que les rails  $\gamma_i$  sont chacun une composante de son bord instable.

**Exemple.** — Si  $\delta^s$  est le bord stable d'une partition de Markov, les rails sont les segments instables des rectangles, sauf dans un cas particulier : si les segments instables d'un rectangle sont des arches, alors les rails correspondants sont les extrémités de ces segments.

## 4.2. Rails et rectangles

Le but de ce paragraphe est de montrer la proposition suivante :

**Proposition 4.2.1.** — *Soit  $\delta^s$  une famille adaptée de segments stables. Alors il existe une (unique) famille finie de rectangles plongés deux-à-deux disjoints  $R_i$ , recouvrant  $K$  et vérifiant les propriétés suivantes :*

1.  $\partial^s(R_i) = R_i \cap \delta^s$
2. Toute composante connexe de  $W^u(K) \cap R_i$  est un rail s'appuyant sur  $\delta^s$ .
3. Tout rail est inclus dans l'un des  $R_i$ .
4. Deux rails sont équivalents si et seulement s'ils sont inclus dans le même  $R_i$ .

On appellera les  $R_i$  les domaines des classes d'équivalence de rails, (et dans la pratique on confondra souvent les  $R_i$  avec les classes d'équivalence).

*Démonstration.* — Montrons d'abord :

**Lemme 4.2.2.** — *Tout point de  $K$  appartient à un rail.*

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(\delta^s)$  est l'union des points périodiques s-bord et de toutes les séparatrices s-bord rencontrant  $K$ . Cette union est dense dans  $K$ .

Par définition des rails (éventuellement triviaux) tout point de  $K \cap \delta^s$  appartient à un rail. Considérons donc un point  $x \in K \setminus \delta^s$ .

Montrons, par l'absurde, que toute séparatrice  $W_+^u(x)$  issue de  $x$  rencontre  $\delta^s$ . On suppose donc  $W_+^u(x)$  disjointe de  $\delta^s$ , ce qui implique que, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $f^{-j}(W_+^u(x) \cap f^{-j}(\delta^s)) = \emptyset$ . Soit  $y$  un point de l' $\alpha$ -limite de  $x$ . Alors il existe une sous-suite  $(n_i) \subset \mathbb{N}$  tendant vers l'infini et telle que  $f^{-n_i}(W_+^u(x))$  converge vers une séparatrice  $W_+^u(y)$ .

Nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.2.3.** — *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la séparatrice  $W_+^u(y)$  est disjointe de  $f^{-n}(\delta^s)$ .*

*Démonstration.* — Supposons que  $W_+^u(y) \cap f^{-n}(\delta^s) \neq \emptyset$ . Si cette intersection contient un point intérieur à  $f^{-n}(\delta^s)$ , les séparatrices  $f^{-n_i}(W_+^u(x))$  qui s'accumulent sur  $W_+^u(y)$  finiront par couper  $f^{-n}(\delta^s)$ , ce qui contredit notre hypothèse, pour  $n_i > n$ . Cette intersection contient donc un point bord  $z$  de  $f^{-n}(\delta^s)$ . Le point  $z$  est un point u-bord (car les segments de  $\delta^s$  sont isolés). Les séparatrices  $f^{-n_i}W_+^u(x)$  ne peuvent

pas s'accumuler sur  $W_+^u(y)$  par un côté où  $z$  est isolé dans sa séparatrice stable. Ce qui contredit le fait que ces séparatrices ne rencontrent pas  $f^{-n}(\delta^s)$ .  $\square$

Nous pouvons à présent achever la démonstration du lemme 4.2.2 :

De la densité de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(\delta^s)$  et du lemme ci-dessus on déduit que  $W_+^u(y)$  est une séparatrice libre, donc que  $y$  est un point périodique s-bord et que  $y \in \delta^s$ . Pour terminer la démonstration, il y a trois cas à considérer (voir figure 3).

1. La suite  $(f^{-n_i}(x))$  contient une sous-suite qui s'accumule sur  $y$  du côté de la variété stable locale  $W_{loc}^s(y)$  qui contient la séparatrice  $W_+^u(y)$  : ceci n'est pas possible car les  $f^{-n_i}(x)$  sont des points de  $K$  ce qui contredirait le fait que le côté d'où part la séparatrice libre est bord.
2. La suite  $(f^{-n_i}(x))$  contient une sous-suite contenue dans la variété stable locale de  $y$  et qui s'accumule sur  $y$ . Ceci n'est pas possible car tout point possède un nombre fini d'itérés négatifs sur la variété stable locale d'un point périodique.
3. La suite  $(f^{-n_i}(x))$  contient une sous-suite qui s'accumule sur  $y$  du côté de  $W_{loc}^s(y)$  opposé à  $W_+^u(y)$ . Si  $y$  est un point intérieur à  $\delta^s$ , alors  $W_+^u(f^{n_i}(x))$  coupera  $\delta^s$ , ce qui contredit l'hypothèse. Si  $y$  est un point extrémal de  $\delta^s$ , on conclut de même, car les  $f^{n_i}(x)$  ne peuvent s'accumuler sur  $y$  du côté libre de  $W^u(y)$ .

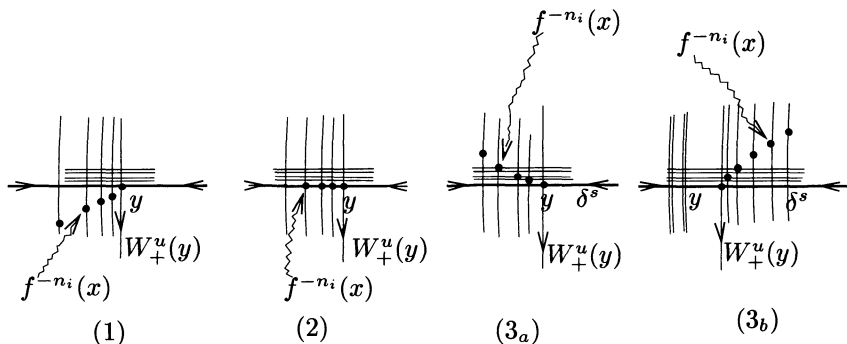


FIGURE 3. Trois cas pour la suite  $f^{-n_i}(x)$  qui converge vers  $y$

On a donc montré que toute séparatrice de  $x$  rencontrait  $\delta^s$ . On en déduit facilement que tout point de  $K \setminus \delta^s$  est sur un rail non-trivial. Pour le voir, il suffit de suivre chacune de ses séparatrices jusqu'au premier point où elle rencontre  $\delta^s$ .  $\square$

**Remarques.** — Le point  $x \in \delta^s$  est un rail trivial, si et seulement s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes :

1. soit le point  $x$  est un double-bord périodique ;

2. soit  $x$  est un double-bord et les deux arches issues de  $x$  sont à extrémités sur  $\delta^s$ . En effet, si tel n'était pas le cas, l'une des séparatrices instables issues de  $x$  rencontrerait  $K$  en un point  $y \notin \delta^s$  avant de rencontrer  $\delta^s$ ;  $x$  serait donc sur un rail non trivial.

**Lemme 4.2.4.** — *les rails sont deux-à-deux disjoints.*

*Démonstration.* — Si deux rails distincts  $\gamma$  et  $\sigma$  sont d'intersection non-vide, ils sont sur la même variété instable, qui est une droite immergée injectivement. Quand deux segments d'une même droite sont d'intersection non-vide, une extrémité d'un des segments appartient à l'autre segment. Cependant, par définition des rails,  $\gamma$  et  $\sigma$  ne contiennent pas de points de  $\delta^s$  dans leur intérieur, donc l'intérieur d'un rail ne peut contenir l'extrémité d'un autre rail : on en déduit que  $\gamma \cap \sigma$  est réduit à une extrémité  $x$  de ces intervalles. Cette extrémité appartient à  $\delta^s$  donc, par définition des familles adaptées, il existe une  $u$ -arche  $\alpha$  issue de  $x$  dont l'autre extrémité  $y$  appartient à  $\delta^s$ . Cependant  $\alpha$  est incluse dans l'un des deux rails  $\gamma$  ou  $\sigma$ . Ce rail contenant  $y \in \delta^s$  doit avoir  $y$  comme extrémité; d'autre part il a  $x$  comme extrémité, donc il est égal à l'arche  $\alpha$ , ce qui est en contradiction avec la définition des rails.  $\square$

On a donc montré que tout point  $x \in K \cap \delta^s$  est l'extrémité d'un unique rail, notons-le  $\gamma_x$ .

**Lemme 4.2.5.** — *Pour tout  $x \in K \cap \delta^s$ , il existe un voisinage  $U_x \subset \delta^s$  tel que, pour tout  $y \in K \cap U_x$ , le rail  $\gamma_y$  est équivalent au rail  $\gamma_x$ .*

*Démonstration.* — Ceci est une conséquence facile de la structure de produit local, et du fait que les segments composant  $\delta^s$  sont isolés.  $\square$

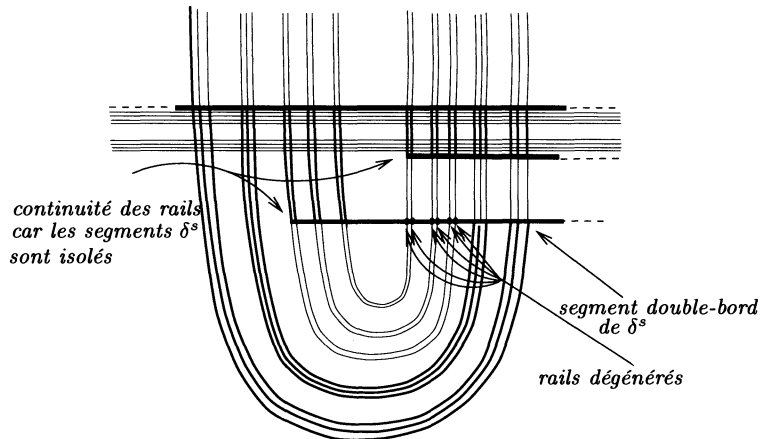


FIGURE 4. Les rails varient continûment

Du lemme 4.2.5 ci-dessus et de la compacité de  $K$ , on déduit que les classes d'équivalence de rails sont en nombre fini.

**Lemme 4.2.6.** — *Si deux rails  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont équivalents, il existe un rectangle plongé dont les  $\gamma_i$  sont les côtés instables et dont les côtés stables sont dans  $\delta^s$ .*

*Démonstration.* — Par définition de l'équivalence de rails, il existe un rectangle  $R$  dont les côtés instables sont les  $\gamma_i$  et dont les côtés stables sont dans  $\delta^s$ . Il reste à montrer que  $R$  est plongé (un rectangle dégénéré étant trivialement plongé, on supposera  $R$  non dégénéré). Pour cela il suffit de montrer que le bord de  $R$  est une courbe fermée simple. Or les côtés instables de  $R$  sont des rails (disjoints d'après le lemme 4.2.4), et les côtés stables sont inclus dans  $\delta^s$  donc sont, par définition d'un rail, disjoints de l'intérieur des côtés instables. On en déduit que, si  $R$  n'est pas plongé, alors les deux côtés stables de  $R$  sont d'intersection non-vide, donc une extrémité d'un des côtés stables est contenue dans l'autre côté stable. Par ce point passent alors deux rails distincts (contenus dans  $R$ ), ce qui est contraire au fait que les rails sont deux-à-deux disjoints (voir figure 5). Cette contradiction conclut la démonstration du lemme.  $\square$

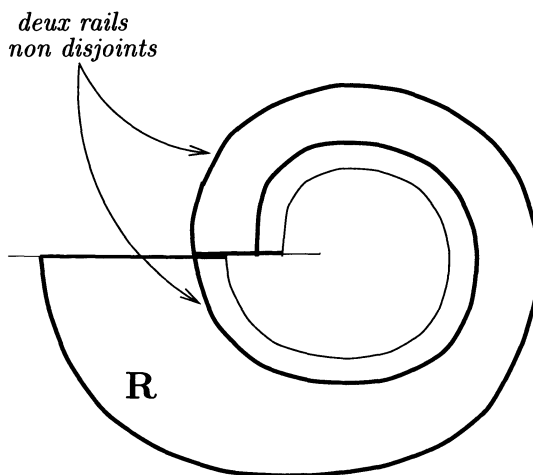


FIGURE 5. Situation impossible

Les rectangles  $R_i$  sont alors les rectangles, maximaux pour l'inclusion, parmi les rectangles définis par le lemme ci-dessus. Nous venons de terminer la démonstration de la proposition 4.2.1.  $\square$

**4.3. Découpage de rectangles et construction de partitions de Markov**

**Lemme et définition 4.3.1.** — Soit  $\delta^s$  une famille adaptée de segments stables et  $\delta^u$  une famille de segments instables, stable par  $f^{-1}$ . Alors  $\delta^s$ , privée de l'intérieur des  $s$ -arches ayant leurs deux extrémités sur  $\delta^u$ , est encore une famille adaptée. On dira que c'est la famille obtenue en découpant  $\delta^s$  le long de  $\delta^u$ , et on notera  $D_{\delta^u}(\delta^s)$ .

On découpera de façon analogue une famille adaptée instable par une famille de segments stables.

*Démonstration.* — Les items 1,2,4 de la définition des familles adaptées ne concernent que les points de  $\delta^s \cap K$ , et ces points sont inchangés par découpage. Seul l'item 3 est donc à démontrer :

Il faut démontrer que la nouvelle famille est encore  $f$ -invariante. Pour cela il suffit de remarquer que, si  $x \in \delta^s$  est tel que  $f(x)$  appartienne à l'intérieur d'une  $s$ -arche ayant ses extrémités sur  $\delta^u$ , alors  $x$  appartient à l'intérieur d'une  $s$ -arche à extrémités sur  $\delta^u$  : ceci est une conséquence facile du fait que  $\delta^s$  est invariant par  $f^{-1}$ .

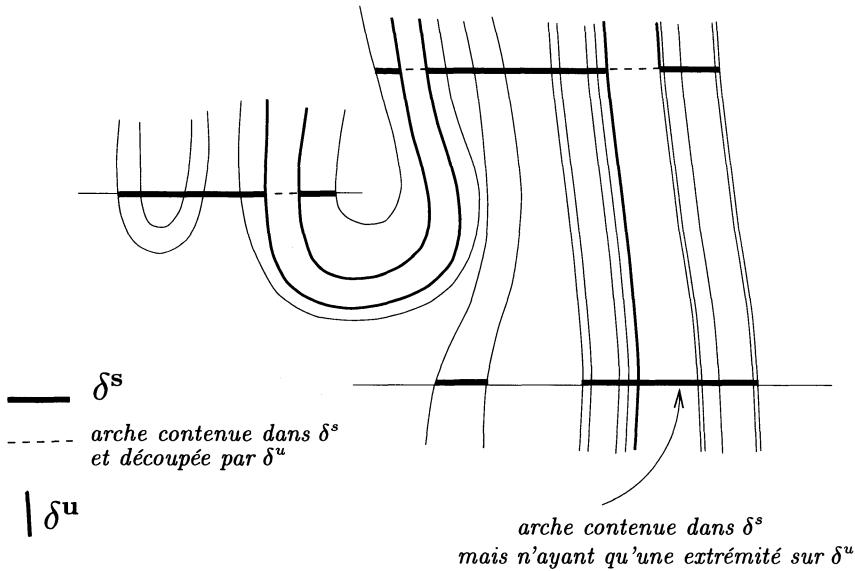


FIGURE 6. La famille obtenue en découpant  $\delta^s$  le long de  $\delta^u$

□

**Lemme 4.3.2.** — Soit  $\delta^s$  et  $\delta^u$  des familles adaptées de segments stables et instables, et soit  $\{R_i\}$  la famille de classes d'équivalence de rails d'extrémités sur  $\delta^s$ . Alors la famille des composantes connexes des intersections  $\delta^u \cap R_i$  est exactement  $D_{\delta^s}(\delta^u)$ .

*Démonstration.* — En effet, rappelons que  $\delta^u \setminus D_{\delta^s}(\delta^u)$  est l'union de l'intérieur des u-arches contenues dans  $\delta^u$  dont les extrémités sont sur  $\delta^s$ . Or, par définition des classes d'équivalence de rails, une telle u-arche n'est pas incluse dans un des  $R_i$ , mais a ses extrémités sur le bord stable des  $R_i$ . Réciproquement, tout segment de  $\delta^u$  d'intérieur disjoint des  $R_i$  mais ayant ses extrémités sur les  $R_i$  est une u-arche (car l'union des  $R_i$  contient  $K$ ) joignant deux points de  $\delta^s$ .  $\square$

**Théorème 4.3.3.** — *Soient  $\delta^s$  et  $\delta^u$  deux familles adaptées de segments stables et instables, vérifiant l'hypothèse suivante :*

*le bord stable (resp instable) des rectangles domaines des classes d'équivalence de rails associés à  $\delta^u$  (resp.  $\delta^s$ ) est contenu dans  $\delta^s$  (resp.  $\delta^u$ ).*

*Alors il existe une partition de Markov  $M$  génératrice de  $K$  par rectangles disjoints, dont le bord stable (resp. instable) soit  $D_{\delta^u}(\delta^s)$  (resp.  $D_{\delta^s}(\delta^u)$ ).*

*De plus cette partition est donnée comme l'ensemble des classes d'équivalence de rails associées à chacune des familles « découpées » ci-dessus.*

**Définition 4.3.4.** — *Sous les hypothèses du théorème (le bord stable (resp instable) des rectangles domaines des classes d'équivalence de rails associés à  $\delta^u$  (resp.  $\delta^s$ ) est contenu dans  $\delta^s$  (resp.  $\delta^u$ )), on dira que les familles  $\delta^s$  et  $\delta^u$  induisent la partition de Markov  $M$ .*

*Démonstration.* — Nous allons d'abord montrer que  $D_{\delta^s}(\delta^u) \cup D_{\delta^u}(\delta^s)$  est le bord d'une famille de rectangles. Nous montrerons alors que cette famille de rectangles est une partition de Markov.

Notons  $S = \{S_i\}$  la famille de classes d'équivalence de u-rails s'appuyant sur  $\delta^s$  : on a vu que  $S$  est une famille de rectangles disjoints.

Montrons d'abord le lemme suivant :

**Lemme 4.3.5.** — *Toute composante connexe de l'intersection d'un rectangle  $S_i$  avec  $\delta^u$  est un rail.*

*Démonstration.* — Par hypothèse,  $\delta^s$  contient les bords stables des classes d'équivalence de rails s'appuyant sur  $\delta^u$  : en particulier,  $\delta^s$  contient les extrémités de  $\delta^u$ . On en déduit qu'une composante connexe  $\gamma$  de  $S_i \cap \delta^u$  est soit réduite à une extrémité de  $\delta^u$  contenue dans le bord de  $S_i$ , soit est un rail. Supposons donc que  $\gamma$  n'est pas un rail, ceci implique que  $S_i$  n'est pas un segment stable (classe de rails dégénérés).

Alors, le point  $\gamma$  est une extrémité d'un rail non trivial  $\lambda \subset S_i$ , et est aussi une extrémité de  $\delta^u$ . Les segments composant  $\delta^u$  sont isolés donc il existe une u-arche  $a \subset \lambda$  ayant  $\gamma$  comme extrémité. Notons  $\beta$  l'autre extrémité de  $a$  (voir figure 7. Le rail stable passant par  $\beta$  et s'appuyant sur  $\delta^u$  est un rail extrémal, en effet le rail stable passant par  $\gamma$  est extrémal. L'arche  $a$  n'est pas contenue dans le rectangle défini par la classe du rail stable passant par  $\gamma$ , et donc joint le bord stable de ce rectangle au bord stable du rectangle correspondant à la classe du rail stable passant par  $\beta$ .



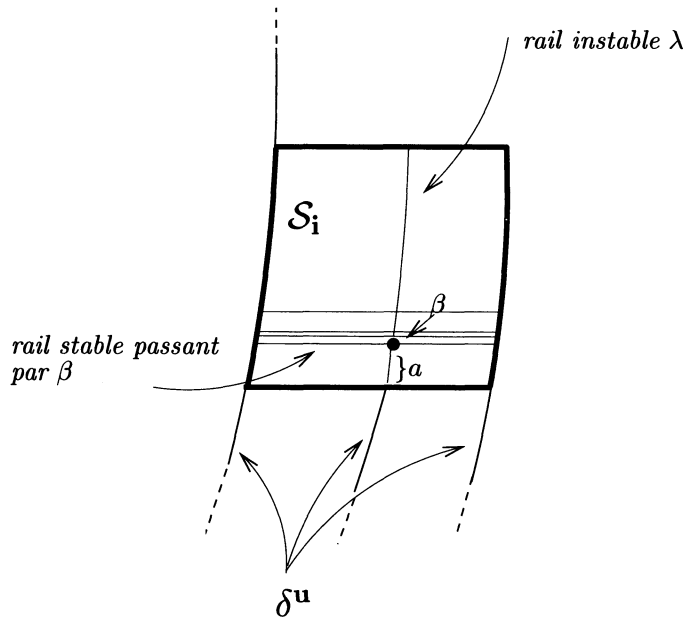


FIGURE 7. Si une composante de  $\delta^i \cap S_i$  n'est pas un rail

Donc, par hypothèse,  $\beta$  appartient à  $\delta^s$ . On en déduit que  $\lambda$  est réduit à la  $u$ -arche  $a$ , ce qui est contraire à la définition d'un rail.  $\square$

Nous allons à présent découper les rectangles  $S_i$  entre deux rails successifs (dans  $S_i$ ) et contenus dans  $\delta^u$ . Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.3.6.** — *Si  $\gamma$  est un rail inclus dans  $S_i \cap \delta^u$ , qui n'est pas contenu dans le  $u$ -bord de  $S_i$ , alors il existe un autre rail  $\tilde{\gamma} \subset (S_i \cap \delta^u)$  dont les points dans  $K$  sont reliés à ceux de  $\gamma$  par des  $s$ -arches contenues dans  $S_i$ .*

*Démonstration.* — Soit  $x$  l'une des extrémités de  $\gamma$ . Par définition de famille adaptée, il existe une  $s$ -arche  $a$  d'extrémité  $x$  et dont l'autre extrémité  $y$  appartient à  $\delta^u$ . De plus,  $\gamma$  n'étant pas dans le  $s$ -bord de  $S_i$ , l'arche  $a$  est incluse dans  $S_i$ .  $\tilde{\gamma}$  est alors le rail de  $S_i$  issu de  $y$ .  $\square$

**Remarque.** — Soit  $S_i$  un rectangle contenant un rail  $\gamma \subset \delta^u$  non contenu dans le bord instable de  $S_i$ , et  $\tilde{\gamma} \subset \delta^u \cap S_i$  un rail  $u$ -voisin de  $\gamma$  dont lemme ci-dessus assure l'existence. On considère le rectangle bordé par  $\gamma$ ,  $\tilde{\gamma}$  et par les arches contenues dans le bord stable de  $S_i$  joignant  $\gamma$  à  $\tilde{\gamma}$ . Notons  $O(\gamma, \tilde{\gamma})$  la partie obtenue en ôtant  $\gamma \cup \tilde{\gamma}$  au rectangle ci-dessus. Considérons l'union  $U = \bigcup_{(\gamma, \tilde{\gamma})} O(\gamma, \tilde{\gamma})$ .

Alors toute composante connexe de  $S_i \setminus U$  est un rectangle (éventuellement dégénéré).

**Définition 4.3.7.** — La famille  $M = \{R_j\}$  des rectangles construits à la remarque ci-dessus est appelée la famille découpée de  $S = \{S_i\}$  le long de  $\delta^u$ .

**Remarque.** — L'ensemble invariant  $K$  est inclus dans  $\bigcup_i (R_i)$ . En effet, nous avons démontré dans la proposition 4.2.1 que  $K$  est inclus dans  $\bigcup_i (R_i)$  et  $U = \bigcup_{(\gamma, \tilde{\gamma})} O(\gamma, \tilde{\gamma})$  ne contient aucun point de  $K$ .

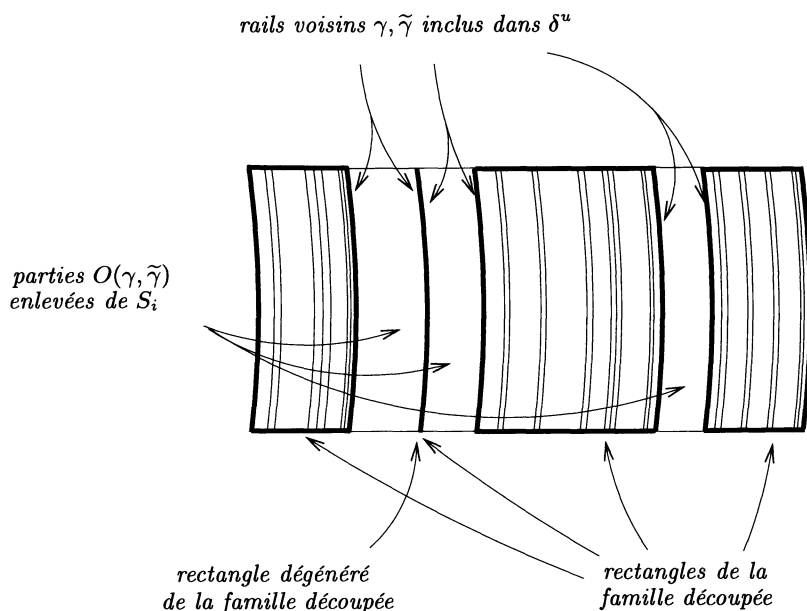


FIGURE 8. Découpage des rectangles  $S_i$  le long de  $\delta^u$

**Lemme 4.3.8.** — Le bord stable de la famille  $M$  définie ci-dessus par découpage est  $D_{\delta^u}(\delta^s)$  et son bord instable est  $D_{\delta^s}(\delta^u)$ .

**Démonstration.** — Voyons d'abord le bord instable de  $M$  :

Par définition des rectangles découpés  $R_j$ , leur bord instable est formé de segments qui sont des composantes connexes d'intersection de  $\delta^u$  avec les  $S_i$ ; en effet, un tel segment est soit un côté instable de  $S_i$  soit une composante connexe de l'intersection de  $\delta^u$  avec l'intérieur d'un rectangle  $S_i$ . Le lemme 4.3.2 démontre que ces composantes sont des composantes de  $D_{\delta^s}(\delta^u)$ , ce qui montre que  $\partial^s(M) \subset D_{\delta^s}(\delta^u)$ .

Réciproquement, le lemme 4.3.5 montre que toute composante connexe  $\gamma$  de  $D_{\delta^s}(\delta^u)$  est un rail inclus dans un  $S_i$ . Dans le cas où  $\gamma$  était un côté instable de  $S_i$ , alors  $\gamma$  sera encore un côté du rectangle  $R_j$  qui le contient. Dans le cas contraire, le lemme 4.3.6 assure que  $\gamma$  possède un rail voisin  $\tilde{\gamma} \subset \delta^s \cap S_i$ . Par l'opération de découpage entre

les rails  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$ ,  $\gamma$  devient un côté instable d'un des rectangles  $R_j$  ce qui montre que  $\partial^s(M) = D_{\delta^s}(\delta^u)$

Voyons à présent le bord stable de  $M$  : il est clair que l'on a  $\partial^s(M) \subset \delta^s$ . La différence  $\delta^s \setminus \partial^s(M)$  est formée de l'intérieur de segments joignant les  $R_i$  : il s'agit donc de s-arches, puisque  $\partial^s(M)$  contient  $\delta^s \cap K$  (voir la remarque ci-dessus). Ces s-arches ont leurs extrémités sur  $\delta^u$  puisqu'elles joignent des  $R_i$ . Nous venons de montrer l'inclusion  $D_{\delta^u}(\delta^s) \subset \partial^s(M)$ .

Réciproquement, soit  $a \subset \delta^s$  une s-arche ayant ses extrémités sur  $\delta^u$ . Si  $a$  n'était pas incluse dans un  $S_i$ , donc *a fortiori* pas dans un  $R_i$ , alors l'intérieur de  $a$  serait inclus dans  $\delta^s \setminus \partial^s(M)$ . Si  $a$  est incluse dans l'un des  $S_i$  alors les rails passant par ses extrémités sont des rails voisins contenus dans  $\delta^u$ , et donc l'arche  $a$  n'est pas incluse dans un  $R_i$ , et donc l'intérieur de  $a$  est inclus dans  $\delta^s \setminus \partial^s(M)$ .

On a maintenant montré que  $\partial^s(M)$  est obtenu à partir de  $\delta^s$  en ôtant l'intérieur de toute s-arche ayant ses extrémités sur  $\delta^u$ , ce qui conclut.  $\square$

Il reste à montrer que la famille  $M$  ainsi définie est bien une partition de Markov. Soient  $R_i$  et  $R_j$  deux rectangles de la famille  $M$ . Le fait que chaque composante connexe  $C$  de  $R_i \cap f(R_j)$  est un rectangle dont le bord stable est dans  $\partial^s(R_i)$  et le bord instable dans  $\partial^u(f(R_j))$  est une conséquence de l'invariance par  $f$  de  $D_{\delta^u}(\delta^s)$  et de l'invariance par  $f^{-1}$  de  $D_{\delta^s}(\delta^u)$ . Les deux cas à écarter (voir figure 9) sont :

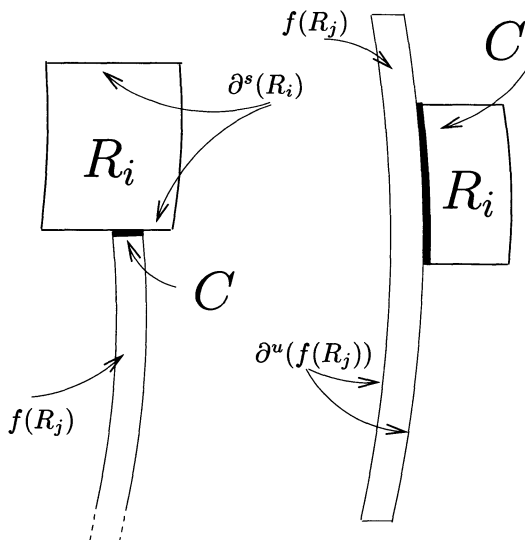


FIGURE 9. Situations interdites.

1. le bord stable de  $R_i$  a deux composantes connexes et  $C$  est un segment inclus dans l'une de ces composantes connexes,

- le bord instable de  $f(R_j)$  a deux composantes connexes, et  $C$  est un segment contenu dans l'une de ces composantes connexes.

Ecartons le premier cas. Montrons par l'absurde que, pour tout rail instable  $\gamma \subset R_j$ , une composante connexe  $c$  de  $f(\gamma) \cap R_i$  ne peut pas être réduite à une extrémité d'un rail non trivial. Supposons donc que  $c$  est l'extrémité du rail non trivial  $\lambda$ . Notons  $a \subset \lambda$  la  $u$ -arche d'extrémité  $c$ . Notons  $\beta$  l'autre extrémité de  $a$ .

Alors  $f^{-1}(a)$  est une arche ayant une extrémité sur le bord stable de  $R_j$  et d'intérieur disjoint de  $R_j$ . L'autre extrémité  $f^{-1}(\beta)$  de cette arche appartient au bord stable d'un autre rectangle. De l'invariance par  $f$  de  $\partial^s(M)$ , on déduit que  $\beta$  appartient à  $\partial^s(M)$ , et donc au bord stable de  $R_i$ . Le rail  $\lambda$  est exactement l'arche  $a$ , ce qui est interdit par la définition d'un rail.

On en déduit le fait que  $C$  rencontre les deux composantes connexes de  $\partial^s(R_i)$ . On montre de façon identique le fait que  $C$  rencontre chaque composante connexe de  $\partial^u(f(R_j))$ . La démonstration du théorème est maintenant complète.  $\square$

On déduit du théorème le corollaire suivant :

**Corollaire 4.3.9.** — *Soient  $\delta^s$  et  $\delta^u$  des familles adaptées de segments stables et instables respectivement. Alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\delta^s$  et  $f^n(\delta^u)$  induisent (voir la définition 4.3.4) une partition de Markov génératrice de  $K$ .*

*Démonstration.* — Le bord instable des classes de rails associés à  $\delta^s$  est formé d'un nombre fini de segments compacts des séparatrices non-libres des points périodiques  $u$ -bords. De plus  $\delta^u$  contient un segment non dégénéré, d'extrémité le point périodique, sur chacune de ces séparatrices. On en déduit que, pour  $n$  assez grand,  $f^n(\delta^u)$  contient le bord instable de toutes les classes de rails.

On montre de même que, pour  $n$  assez grand,  $f^{-n}(\delta^s)$  contient le bord stable des classes de rails associées à  $\delta^u$ , ce qui implique que  $\delta^s$  contient le bord stable des classes de rails associées à  $f^n(\delta^u)$ .

Les hypothèses du théorème sont alors vérifiées, ce qui conclut.  $\square$

#### 4.4. Existence de familles adaptées de segments stables

Une conséquence directe du corollaire est que pour prouver l'existence de partition de Markov génératrice de  $K$ , il suffit désormais de prouver l'existence d'une famille adaptée de segments stables.

**Lemme 4.4.1.** — *Soit  $\delta^s$  une famille de segments stables  $s$ -bords, isolés extérieurement, contenant tous les points périodiques  $s$ -bords, et telle que tout segment contient un point périodique.*

- Notons  $\delta_1^s$  l'union de tous les segments de variétés stables  $s$ -bords joignant un point périodique à un point qui est une extrémité d'une  $u$ -arche ayant au moins une extrémité sur  $\delta^s$ .

Alors  $\delta_1^s$  est une famille de segments isolés extérieurement, contenant tous les points périodiques  $s$ -bords, telle que pour tout point  $x \in K \cap \delta_1^s$  il existe une  $u$ -arche ayant  $x$  comme extrémité et ayant son autre extrémité sur  $\delta_1^s$ .

2. Notons  $\delta_2^s = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\delta_1^s)$ . Alors  $\delta_2^s$  est une famille adaptée.

*Démonstration.* — Montrons l’item (1). Remarquons d’abord que  $\delta_1^s$  contient  $\delta^s$ .

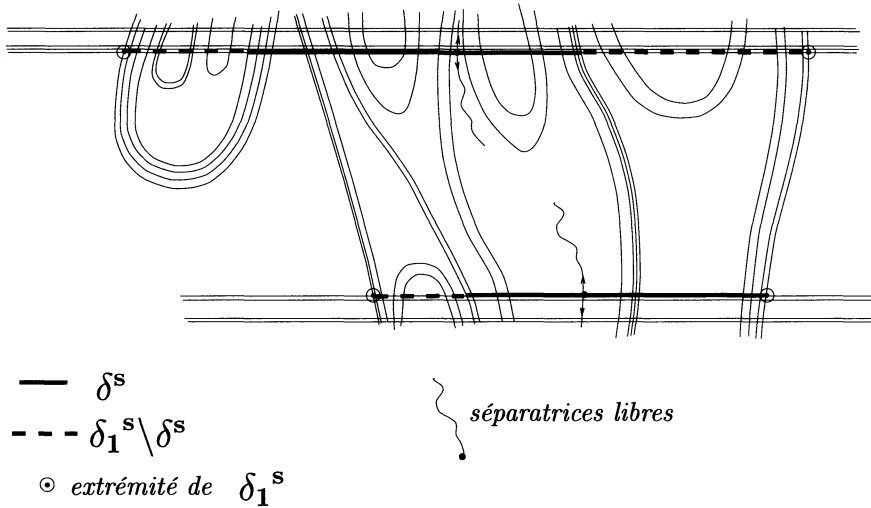


FIGURE 10. Construction de  $\delta_1^s$

Voyons à présent que chaque composante connexe de  $\delta_1^s$  est un segment isolé extérieurement : supposons par l’absurde qu’il existe une composante connexe  $\sigma$  de  $\delta_1^s$  qui est un segment stable non-isolé. Soit  $x$  une extrémité de  $\sigma$ , choisie d’un des côtés non-isolés de  $\sigma$  : il existe une suite  $(x_n)$  de points de  $K$  sur  $W^s(x) \setminus \sigma$ , convergeant vers  $x$ .

Remarquons d’abord que  $x$  ne peut être une extrémité de  $\delta^s$ , donc  $x \notin \delta^s$ .

On en déduit que  $x$  est l’autre extrémité d’une  $u$ -arche  $a$  ayant une extrémité  $y$  sur  $\delta^s$ . Notons  $y_n$  l’extrémité de la  $u$ -arche d’origine  $x_n$ , et partant du même côté que  $a$ . Pour  $n$  assez grand,  $y_n$  appartient à la même séparatrice que  $y$  et tend vers  $y$ . Comme les segments de  $\delta^s$  sont isolés, ceci implique que pour  $n$  assez grand,  $y_n$  appartient à  $\delta^s$  : il aurait donc fallu prolonger  $\sigma$  jusqu’aux  $x_n$ .

Montrons que, pour tout point  $x \in K \cap \delta_1^s$ , il existe une  $u$ -arche  $a$  ayant  $x$  comme extrémité et ayant une autre extrémité sur  $\delta_1^s$  :

Si  $x$  appartient à  $\delta^s$  ou si  $x$  est une extrémité d’une composante de  $\delta_1^s$ , il n’y a rien à faire. Soit donc  $x \in \delta_1^s \setminus \delta^s$  un point intérieur de  $\delta_1^s$ . Notons  $p$  le point périodique dont la variété stable contient  $x$ . Alors par définition de  $\delta_1^s$ , il existe  $y \in \delta_1^s$  tel que

$x \in [p, y]^s$  et il existe une arche  $\alpha$  ayant une extrémité en  $y$  et l'autre extrémité  $z$  sur  $\delta^s$ .

Si  $z$  est sur la même séparatrice que  $x$  et que  $y$ , alors  $x \in [z, y]^s$ . Le lemme 2.4.5 force l'arche issue de  $x$  et partant du même côté que  $\alpha$  à être contenue dans le disque bordé par  $[z, y]^s \cup [z, y]^u$ . Cette arche a donc son autre extrémité dans  $[y, z]^s \subset \delta_1^s$ , et c'est ce que l'on voulait montrer.

Si  $z$  est sur une autre séparatrice, notons  $q$  le point périodique dont est issue la séparatrice contenant  $z$ . Notons  $\beta$  l'arche partant de  $x$  du même côté que  $\alpha$ ; alors en utilisant cette fois le lemme 2.4.2 et le corollaire 2.4.3, on voit que l'autre extrémité de  $\beta$  appartient à  $[p, y]^s \cup [q, z]^s \subset \delta_1^s$ , ce qui conclut la preuve de l'item (1).

Montrons l'item (2).

Il se peut que  $\delta_1^s$  ne soit pas stable par  $f$  (seulement si les séparatrices des points s-bords ne sont pas fixes).

Remarquons d'abord que  $\delta_1^s$  est formé d'un nombre fini de segments compacts de séparatrices s-bords, et que  $\delta_1^s$  contient un voisinage du point périodique de chaque séparatrice qu'il rencontre : on en déduit que pour  $n \in \mathbb{N}$  assez grand  $f^n(\delta_1^s) \subset \delta_1^s$ . En particulier,  $\delta_2^s$  est une union finie d'itérés de  $\delta_1^s$ . On vérifie facilement que les items (1) (2) et (4) de la définition de familles adaptées persistent par unions finies, enfin  $f(\delta_2^s) \subset \delta_2^s$ , par construction, ce qui conclut.  $\square$



## CHAPITRE 5

# PARTITIONS DE MARKOV GÉOMÉTRISÉES ET CONJUGAISON TOPOLOGIQUE DE DIFFÉOMORPHISMES DE SMALE

Nous allons voir dans cette partie que la dynamique topologique d'un difféomorphisme de Smale, restreinte au domaine d'un ensemble saturé, est caractérisée par la donnée d'une partition de Markov, à laquelle on ajoute une information combinatoire finie qui décrit comment les images des rectangles de la partition coupent ces rectangles. Cette information combinatoire correspond, dans le cas unidimensionnel, à préciser la croissance ou la décroissance d'une application dilatante, sur chacun de ses intervalles de définition. Nous présentons d'abord le cas unidimensionnel, très simple, qui donne l'idée que nous utiliserons pour les difféomorphismes des surfaces, et qui sera aussi l'une des clefs de la démonstration. Nous montrerons que la combinatoire associée à une partition de Markov génératrice d'un ensemble hyperbolique (saturé ou non) caractérise la classe de conjugaison topologique de la restriction du difféomorphisme aux rectangles de la partition. Dans le cas où la partition de Markov définit un ensemble hyperbolique saturé, nous pourrons étendre la conjugaison au domaine de cet ensemble hyperbolique.

### 5.1. Le cas unidimensionnel

Soient  $I_1, \dots, I_n$   $n$  segments orientés (on peut les voir comme des segments disjoints de  $\mathbb{R}$ , la numérotation étant indépendante de la position de ces segments). Notons  $I$  la réunion disjointe de ces segments.

Nous allons étudier des fonctions de  $I$  dans  $I$ , que nous appellerons *markoviennes* : une telle application est définie partiellement sur  $I$  et son domaine de définition est une union finie de sous-segments de  $I$ , et contient les extrémités de chacun des segments de  $I$  ; sa restriction à chacune des composantes connexes du domaine de définition est différentiable et strictement monotone ; l'image de chaque composante connexe du domaine de définition est égale à l'un des intervalles  $I_j$  ; enfin elle est dilatante, c'est à dire que l'un de ses itérés a sa dérivée de module plus grand que 2 partout où cette dérivée est définie.



Nous allons montrer que la classe de conjugaison de ces applications ne dépend que d'un type combinatoire que nous allons définir.

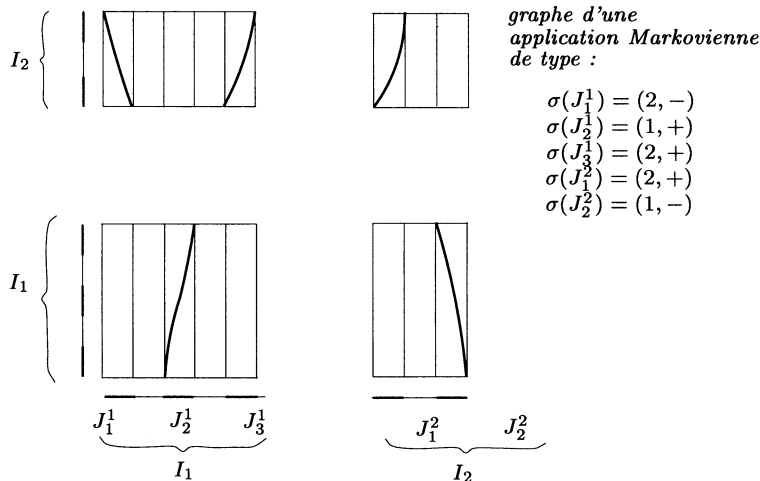


FIGURE 1. Une application markovienne et son type combinatoire

Définissons le type combinatoire d'une application  $f$  markovienne.

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  notons  $n_i > 0$  le nombre de sous-segments du domaine de définition de  $f$  contenus dans  $I_i$ , et appelons les  $J_j^i, j \in \{1, \dots, n_i\}$ , la numérotation étant compatible avec l'orientation de  $I_i$  :  $J_1^i$  a même extrémité inférieure que  $I_i$  et  $J_{n_i}^i$  à même extrémité supérieure que  $I_i$ . On notera  $J$  la réunion des intervalles  $J_j^i$ .

Appelons  $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$  l'ensemble des segments de  $I$ , et  $\mathcal{J}$  l'ensemble des sous-segments  $J_j^i$  de  $J$ .

**Définition 5.1.1.** — *Le type de l'application markovienne  $f$ , est l'application  $\sigma$  de  $\mathcal{J}$  dans  $\mathcal{I} \times \{-1, 1\}$  définie par :  $\sigma(J_j^i) = (k, \varepsilon)$  si  $f(J_j^i) = I_k$ , et  $\varepsilon = +1$  si la restriction de  $f$  à  $J_j^i$  est croissante et  $\varepsilon = -1$  sinon.*

**Remarque.** — Le type  $\sigma$  de  $f$  permet de construire la *matrice de Markov*  $(a_{s,t})$  de  $f$ . C'est une matrice  $(n, n)$  à coefficients entiers positifs,  $a_{s,t}$  étant le nombre de sous-intervalles de  $I_s$  dont l'image est  $I_t$ . Cette matrice donne la classe de conjugaison de la restriction de  $f$  à l'ensemble maximal invariant  $\bigcap_0^{+\infty} f^{-n}(I)$ . En effet, si les coefficients  $a_{s,t}$  de cette matrice sont tous égaux à 0 ou 1, l'*itinéraire* d'un point (suite des passages de ses itérés positifs dans les intervalles) le détermine. L'application « itinéraire » est alors une conjugaison entre la restriction de  $f$  à l'ensemble maximal invariant et le sous-shift (positif) de type fini correspondant à la matrice. Si certains coefficients de la matrice sont supérieurs à deux, on remarque que les segments  $J_j^i$  forment encore une partition de Markov de  $f$  et que la matrice associée a tous ses

coefficients égaux à 0 ou 1 ; cette nouvelle matrice est déterminée (à permutation près) par la précédente.

Cependant l'homéomorphisme de conjugaison entre deux applications markoviennes de même matrice ne peut en général pas s'étendre en un homéomorphisme de  $I$ , puisqu'il n'est pas *a priori* localement monotone.

**Proposition 5.1.2.** — Soit  $f: I \rightarrow I$  et  $g: \tilde{I} \rightarrow \tilde{I}$  deux applications markoviennes de même type.

1. Il existe un homéomorphisme  $h$  croissant de  $I$  dans  $\tilde{I}$  envoyant  $I_i$  sur  $\tilde{I}_i$ , tel que l'image du domaine  $J$  de  $f$  soit le domaine de définition  $\tilde{J}$  de  $g$  et que

$$g \circ h = h \circ f.$$

2. On peut de plus se donner a priori la restriction de  $h$  à  $I \setminus J$  pourvu qu'elle induise pour tout  $i$  un homéomorphisme croissant de  $I_i \setminus J$  sur  $\tilde{I}_i \setminus \tilde{J}$ .

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que, pour tout  $i$ ,  $I_i \setminus J$  et  $\tilde{I}_i \setminus \tilde{J}$  ont le même nombre de composantes connexes, chacune de ces composantes connexes étant un intervalle ouvert. On peut donc choisir un homéomorphisme  $h_0$  croissant de  $I_i \setminus J$  sur  $\tilde{I}_i \setminus \tilde{J}$ . Notons  $h_0$  l'homéomorphisme de  $I \setminus J$  sur  $\tilde{I} \setminus \tilde{J}$  obtenu comme union de ces homéomorphismes.

Notons  $O_0 = I \setminus J$ . Remarquons que  $f^{-1}(O_0)$  est disjoint de  $O_0$ , et donc les  $f^{-i}(O_0)$  sont des ouverts deux-à-deux disjoints. On notera  $O_k = \bigcup_0^k (f^{-i}(O_0))$ . Remarquons que  $O_k$  est l'union disjointe de  $O_0$  et de  $f^{-1}(O_{k-1})$ . On définit de même  $\tilde{O}_k$ .

Nous allons construire par induction sur  $k$  un homéomorphisme  $h_k$  de  $O_k$  sur  $\tilde{O}_k$ , coïncidant avec  $h_{k-1}$  sur  $O_{k-1}$ , et tel que, pour tout point  $x$  de  $O_k \cap J$  on ait  $h(f(x)) = g(h(x))$ ; de plus  $h_k$  induira un homéomorphisme croissant de  $O_k \cap I_i$  sur  $\tilde{O}_k \cap \tilde{I}_i$ .

Supposons donc  $h_{k-1}$  construit. On définit  $h_k$  de la façon suivante :

1. si  $x$  est un point de  $I \setminus J$  alors  $h_k(x) = h_0(x)$ .
2. si  $x$  est un point d'un intervalle  $O_k \cap J_j^i$ , alors  $f(x) \in O_{k-1}$ . D'autre part, notons  $l$  l'indice tel que  $f(x) \in I_l$ . Comme  $f$  et  $g$  ont même type,  $g$  induit un homéomorphisme de  $\tilde{J}_j^i$  sur  $\tilde{I}_l$ .

Le point  $h_k(x)$  est l'unique point de  $\tilde{J}_j^i$  dont l'image par  $g$  est  $h_{k-1}(f(x))$ .

On vérifie facilement que  $h_k$  est un homéomorphisme de  $O_k$  sur  $\tilde{O}_k$  qui prolonge  $h_{k-1}$  et qui conjugue  $f$  à  $g$ . Pour vérifier que la restriction de  $h_k$  à  $I_i$  est croissante, il faut juste rappeler que :

1. la numérotation des sous-intervalles  $J_j^i$  de  $I_i$ , et des sous-intervalles  $\tilde{J}_j^i$  de  $\tilde{I}_i$  est compatible avec les orientations respectives de  $I_i$  et de  $\tilde{I}_i$ .
2. La restriction de  $h_{k-1}$  à  $I_l$  est croissante (par l'hypothèse de récurrence)

3. Les restrictions de  $f$  et  $g$  à  $J_j^i$  et à  $\tilde{J}_j^i$  sont des homéomorphismes simultanément croissants ou décroissants sur respectivement  $I_l$  et  $\tilde{I}_l$ .

Voyons à présent comment construire  $h$  : remarquons d'abord que le fait que  $f$  soit dilatante permet de vérifier que  $\bigcap_0^{+\infty} f^{-k}(J)$  est d'intérieur vide, ou d'une façon équivalente que l'union croissante  $O_\infty$  des  $O_k$  forme un ouvert dense dans  $I$ . De même, l'union croissante  $\tilde{O}_\infty$  des  $\tilde{O}_k$  est un ouvert dense dans  $\tilde{I}$ . La suite des homéomorphismes  $h_k$  induit un homéomorphisme  $h_\infty$  de  $O_\infty$  sur  $\tilde{O}_\infty$ , conjuguant  $f$  à  $g$ , et dont les restrictions aux segments  $I_i$  sont strictement croissantes. Il reste à rappeler que toute bijection croissante d'une partie dense d'un intervalle sur une partie dense d'un autre intervalle se prolonge (de façon unique) par continuité en un homéomorphisme entre les intervalles : on en déduit que  $h_\infty$  se prolonge par continuité en un homéomorphisme  $h$  de  $I$  sur  $\tilde{I}$ , conjuguant  $f$  à  $g$ .  $\square$

**Remarque.** — Dans la proposition 5.1.2, le fait que  $f$  soit différentiable et dilatante a été utilisé uniquement pour prouver que le maximal invariant  $\bigcap_0^{+\infty} f^{-k}(I)$  est totalement discontinu. La proposition 5.1.2 pourra s'appliquer en remplaçant l'hypothèse de dilatation par l'hypothèse que le maximal invariant est totalement discontinu.

**Définition 5.1.3.** — Soient  $I_1, \dots, I_n$   $n$  segments orientés et  $I$  la réunion disjointe de ces segments.

Nous appellerons application continue markovienne une application  $f$  définie partiellement sur  $I$  et vérifiant :

1. le domaine de définition de  $f$  est une union finie de sous-segments de  $I$  qui contient les extrémités de chacun des segments de  $I$  ;
2. la restriction de  $f$  à chaque composante connexe du domaine de définition est un homéomorphisme sur l'un des intervalles  $I_j$
3. elle est topologiquement dilatante, c'est-à-dire que le maximal invariant

$$\bigcap_0^{+\infty} f^{-n}(I)$$

est totalement discontinu.

### Remarques

1. On a vu que l'homéomorphisme de conjugaison  $h$  construit à la proposition 5.4.1 dépend du choix d'un homéomorphisme  $h_0$  défini sur  $I \setminus J$ . Cependant la restriction de  $h$  au maximal invariant  $\bigcap_0^{+\infty} f^{-n}(I)$  ne dépend pas du choix de  $h_0$ , et est donc complètement déterminée par le type combinatoire de  $f$ .
2. Dans la définition d'application markovienne, certains des segments  $I_i$  peuvent être réduits à un point. Chacune des images successives par  $f$  de ce segment réduit à un point est encore un segment de  $\mathcal{I}$  réduit à un point. Il faut donner un sens à la monotonie (croissance ou décroissance) de la restriction de  $f$  à un

de ces segments dégénérés : pour cela on attache à ces points un signe (que l'on peut voir comme une orientation transverse). Pour définir le type combinatoire de  $f$ , il faut se fixer l'action de  $f$  sur ces signes (si  $f$  est définie et monotone au voisinage d'un de ces points, l'action de  $f$  est naturellement définie).

En utilisant le fait que  $f$  est dilatante (ou l'hypothèse ci-dessus que le maximal invariant est totalement discontinu) on montre facilement qu'un tel intervalle  $I_i$  est caractérisé par le fait que pour tout  $n \geq 0$  tout segment  $I_i$  inclus dans  $f^n(I_i)$  ne contient qu'un seul sous-segment  $J_j^l$ . Les segments réduits à des points sont donc caractérisés par le type combinatoire. La proposition 5.1.2 s'applique sans modification dans le cas où certains des  $I_i$  sont réduits à un point.

## 5.2. Partitions de Markov géométrisées

Le but de ce paragraphe est de formaliser de façon combinatoire une information géométrique ou topologique.

Soit  $K$  un ensemble hyperbolique saturé d'un difféomorphisme de Smale  $f$ , d'une surface compacte  $S$ . On supposera que  $S$  est orientée, et que  $f$  préserve l'orientation de  $S$ .

On suppose que  $K$  est de type selle, c'est-à-dire qu'il ne contient aucun attracteur ni aucun répulseur. On a vu alors que  $(f, K)$  admet une partition de Markov  $(R_i)$  dont les rectangles sont deux-à-deux disjoints, et dont les bords sont formés de deux segments de variétés stables s-bords et de deux segments instables u-bords.

Appelons « verticale » la direction instable et « horizontale » la direction stable. Alors,  $S$  étant orientée, une orientation des verticales donne une orientation des horizontales. Pour tout  $i$ , on fixe donc un choix d'orientation des verticales, ce qui induit une orientation des horizontales (on parlera parfois d'orientation « du bas vers le haut » pour les verticales et « de gauche à droite » pour les horizontales).

Remarquons que, pour tout rectangle  $R_i$  de la partition de Markov, chaque composante connexe des intersections  $R_i \cap f(R_j)$  est un rectangle dont les bords instables sont des segments verticaux joignant les côtés stables de  $R_i$  et dont les côtés stables sont des segments inclus dans les côtés stables de  $R_i$ . On appellera ces rectangles des sous-rectangles verticaux de  $R_i$ . Notons  $v_i$  le nombre de sous-rectangles verticaux de  $R_i$ . En particulier, tout segment horizontal coupe chacune de ces intersections en exactement un segment. L'orientation du segment horizontal induit donc une numérotation canonique des sous-rectangles verticaux de  $R_i$ . On les notera donc  $V_i^1, \dots, V_i^{v_i}$ ,  $V_i^1$  étant le sous-rectangle vertical le plus à gauche.

De même chaque composante connexe des intersections  $R_i \cap f^{-1}(R_j)$  est un rectangle dont les bords stables sont des segments horizontaux joignant les côtés instables de  $R_i$  et dont les côtés instables sont des segments inclus dans les côtés instables de  $R_i$ . On appellera ces rectangles des sous-rectangles horizontaux de  $R_i$ . Notons  $h_i$  le nombre de sous-rectangles horizontaux de  $R_i$ . En particulier, tout segment vertical

coupe chacun des sous-rectangles horizontaux en exactement un segment. L'orientation du segment vertical induit donc une numérotation canonique des sous-rectangles horizontaux de  $R_i$ . On les notera donc  $H_i^1, \dots, H_i^{h_i}, H_i^1$  étant le sous-rectangle horizontal le plus bas.

L'image par  $f$  d'un sous-rectangle horizontal est un sous-rectangle vertical. Donc  $f$  induit une bijection de l'ensemble  $\{H_i^j\}$  des sous-rectangles horizontaux sur l'ensemble  $\{V_i^k\}$  des sous-rectangles verticaux : en particulier ces deux ensembles ont même cardinal, ce qui s'exprime par :

$$\sum_i h_i = \sum_i v_i$$

Notons  $\phi$  l'application de  $\{H_i^j\}$  dans  $\{V_k^l\} \times \{-, +\}$  définie par  $\phi(H_i^j) = (V_k^l, +)$  (resp.  $\phi(H_i^j) = (V_k^l, -)$ ) si et seulement si l'image par  $f$  du sous-rectangle horizontal  $H_i^j$  est le sous-rectangle vertical  $V_k^l$  et que la restriction à  $H_i^j$  de  $f$  préserve (resp. inverse) les orientations des verticales fixées sur  $R_i$  et sur  $R_k$ .

Ces remarques justifient la définition suivante :

**Définition 5.2.1.** — On appellera « type géométrique » d'une partition de Markov, ou « partition de Markov géométrisée » la donnée de :

1. Un entier  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  (moralement, le nombre de rectangles)
2. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  deux entiers  $h_i, v_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , de façon que l'on ait :

$$\sum_i h_i = \sum_i v_i$$

3. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  deux ensembles finis

$$\{H_i^j, j \in \{1, \dots, h_i\}\} \quad \text{et} \quad \{V_i^k, k \in \{1, \dots, v_i\}\}$$

(moralement, les ensembles de sous-rectangles horizontaux et verticaux du rectangle  $R_i$ )

4. Une application  $\phi$  de l'ensemble  $\{H_i^j, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, h_i\}\}$  dans l'ensemble  $\{V_k^l, k \in \{1, \dots, n\}, l \in \{1, \dots, v_k\}\} \times \{-, +\}$ , induisant une bijection par « oubli des signes ».

**Remarque.** — Un type géométrique de partition de Markov (ou une partition de Markov géométrisée) est la donnée abstraite d'une application entre des ensembles finis, *a priori* sans rapport avec une partition de Markov d'un ensemble hyperbolique saturé d'un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte ; c'est pourquoi dans la définition ci-dessus nous avons indiqué ce que représentent *moralement* les éléments composant le type géométrique. Nous verrons d'ailleurs au chapitre 7 une condition nécessaire à ce qu'un type géométrique abstrait soit le type géométrique d'une partition de Markov d'un ensemble hyperbolique saturé d'un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte.

Le but de toute cette partie est alors de prouver le théorème suivant qui montre la pertinence de la notion de type géométrique d'une partition de Markov.

**Théorème 5.2.2 (Présentation du difféomorphisme sur un domaine)**

*Soient  $f$  et  $g$  deux difféomorphismes de Smale de deux surfaces compactes, soient  $K$  et  $L$  deux ensembles hyperboliques saturés pour  $f$  et  $g$  respectivement, et notons  $\Delta(K, f)$  et  $\Delta(L, g)$  leurs domaines respectifs. Supposons que  $K$  et  $L$  admettent des partitions de Markov ayant même type géométrique.*

*Alors, il existe un homéomorphisme de  $\Delta(K, f)$  sur  $\Delta(L, g)$  conjuguant  $f$  et  $g$ .*

En d'autres termes, ce théorème signifie qu'une partition de Markov géométrisée détermine (à conjugaison topologique près) la dynamique d'un difféomorphisme sur le domaine d'un ensemble hyperbolique saturé.

### 5.3. Feuilletages invariants

Le but de ce paragraphe est la construction de feuilletages invariants, stables et instables, qui serviront dans les prochains paragraphes à la construction d'un homéomorphisme de conjugaison des restrictions de deux difféomorphismes de Smale  $f$  et  $g$  aux domaines de deux ensembles hyperboliques saturés admettant des partitions de Markov de même type géométrique. En général, l'existence de polygones d'arches qui ne sont pas des rectangles (bordés par quatre arches) interdit l'existence de tels feuilletages sur tout le domaine d'un ensemble hyperbolique saturé (en effet le feuilletage stable étant tangent aux arches stables et transverse aux arches instables, son indice sur un tel polygone serait égal à  $2 - \frac{k}{2}$ , où  $k$  est le nombre de côtés du polygone; l'indice étant non nul, le feuilletage doit contenir des singularités dans le polygone). Bien que le voisinage feuilleté ne puisse pas être pris égal au domaine, nous aurons besoin qu'il soit assez grand pour contenir les rectangles de la partition de Markov; c'est ce qu'assure la proposition suivante :

**Proposition 5.3.1.** — *Soit  $K$  un ensemble hyperbolique saturé d'un difféomorphisme de Smale  $f$ . Il existe un voisinage  $U$  de  $K$ , invariant par  $f$ , et possédant les propriétés suivantes :*

1. *Il existe deux feuilletages transverses  $F^s$  et  $F^u$ , définis sur  $U$ , invariants par  $f$ , et tels que  $W^s(K)$  soit une union de feuilles de  $F^s$  et  $W^u(K)$  soit une union de feuilles de  $F^u$ .*
2. *Pour toute partition de Markov  $M$  de  $K$ , l'union des rectangles de  $M$  est incluse dans  $U$ .*

La démonstration de la proposition 5.3.1 est l'objet de tout ce paragraphe.

**Lemme 5.3.2.** — *Si  $U$  est un voisinage invariant de  $K$  alors tous les disques bordés par des polygones d'arches sont inclus dans  $U$ , sauf éventuellement un nombre fini d'orbites de disques.*

*Démonstration.* — Rappelons que (d'après le lemme 2.6.6) toutes les orbites de polygones d'arches sauf un nombre fini sont des quadrilatères, qui bordent des rectangles.

Soit  $V$  et  $\tilde{V}$  deux voisinages compacts de  $K$  contenus dans  $U$ , tels que  $\tilde{V}$  contient  $V$  dans son intérieur.

La compacité de  $\tilde{V}$  et l'uniforme transversalité sur  $\tilde{V}$  des variétés stables et instables permet de montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  avec la propriété suivante : Tout disque  $D \subset \tilde{V}$ , bordé par deux segments de feuilles stables et deux segments de feuilles instables, et tel qu'un côté stable et un côté instable sont de longueur supérieure à  $\varepsilon$ , est d'aire plus grande que  $\delta$ .

Quitte à diminuer  $\delta$ , on en déduit qu'un rectangle ayant un côté stable inclus dans  $V$  et de longueur supérieure à  $\varepsilon$ , et un côté instable de longueur plus grande que  $\varepsilon$  est d'aire plus grande que  $\delta$  : en effet, en utilisant la distance ( $> 0$ ) entre le bord de  $\tilde{V}$  et  $V$ , on montre qu'il existe  $\bar{\varepsilon}$  tel que tout rectangle du type précédent contient un disque bordé par quatre segments de feuilles stables et instables, contenu dans  $\tilde{V}$  et dont un côté stable et un côté instable sont de longueur plus grande que  $\bar{\varepsilon}$ . Il suffit alors de choisir la constante d'aire  $\delta$  associée à  $\bar{\varepsilon}$ .

Choisissons  $\varepsilon_2 > 0$  inférieur à la moitié de la distance de  $K$  au bord de  $V$ . Il existe  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$  tel que, dans toute orbite de segment stable, il en existe un dont la longueur est comprise entre  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  (il suffit de choisir  $\varepsilon_1$  plus petit que le quotient de  $\varepsilon_2$  par un majorant, sur la surface  $S$ , de la norme de la différentielle de  $f^{-1}$ ). Notons  $\delta_1$  la constante associée à  $\varepsilon_1$ .

Soit  $C$  un rectangle bordé par quatre arches, non contenu dans l'ouvert invariant  $U$ . Un de ses itérés a sa plus grande arche stable de longueur comprise entre  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  : il suffit de considérer la plus petite (dans  $\mathbb{Z}$ ) puissance  $\rho$  de  $f$  telle que l'une des arches stables du rectangle  $f^\rho(C)$  soit de longueur plus grande que  $\varepsilon_1$ . Comme le rectangle  $f^\rho(C)$  n'est pas inclus dans  $V \subset U$ , l'une de ses arches instables est de longueur supérieure à  $\varepsilon_2$ . L'aire de  $f^\rho(C)$  est donc supérieure à  $\delta_1$ . L'aire de  $S$  étant finie, il ne peut y avoir plus d'un nombre fini de rectangles d'aire supérieure à  $\delta_1$ , ce qui conclut.  $\square$

Le lemme suivant assure l'existence de petits voisinages de  $K$  tels que « toute orbite qui en sort n'y rentre plus jamais ».

**Lemme 5.3.3.** — *Soit  $K$  un ensemble hyperbolique saturé pour  $f$ . Alors  $K$  possède une base de voisinages  $U_a$ , tels que tout point  $x \in K$ , l'ensemble des entiers  $i \in \mathbb{Z}$  tels que  $f^i(x)$  appartienne à  $U_a$  soit un intervalle de  $\mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* — L'existence d'une filtration pour  $f$  montre (voir la démonstration de la proposition 1.3.1) que l'on peut trouver deux surfaces compactes à bord  $S_0$  et

$\bar{S}_0$  contenant  $K$  dans leur intérieur, telles que  $K$  est le maximal invariant de  $S_0 \cap \bar{S}_0$ , et que  $f(S_0)$  est contenu dans l'intérieur de  $S_0$  et  $f^{-1}(\bar{S}_0)$  est contenu dans l'intérieur de  $\bar{S}_0$ . Alors la famille  $f^a(S_0) \cap f^{-a}(\bar{S}_0)$  est la base de voisinage de  $K$  annoncée.  $\square$

**Lemme 5.3.4.** — *Tout ensemble hyperbolique saturé  $K$  possède un voisinage invariant  $U$  muni de deux feuilletages invariants  $F^s$  et  $F^u$  uniformément transverses sur les compacts de  $U$  et tels que  $W^s(K)$  et  $W^u(K)$  soient des unions de feuilles respectivement de  $F^s$  et  $F^u$ .*

*Démonstration.* — On sait l'existence de feuilletages invariants sur un voisinage  $O$  de  $K$  : Le lecteur trouvera dans [PaTa, pages 26,27] la construction (très simplement exposée) de ces feuilletages dans le cas particulier du fer à cheval de Smale ; la construction générale suit la même idée ; dans [PaTa, appendix 1, page 162], il trouvera un rapide survol de ce sujet ainsi que des références, en particulier [Mo1] et [HPPS]. Il reste à voir que l'on peut choisir un voisinage invariant.

Pour cela on choisit  $a$  tel que l'ouvert  $U_a$  construit ci-dessus soit inclus dans  $f^{-1}(O) \cap O \cap f(O)$ . On étend par  $f$  à  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U_a)$  la restriction à  $U_a$  des deux feuilletages invariants.  $\square$

**Corollaire 5.3.5.** — *On peut choisir l'ouvert feuilleté ci-dessus de façon qu'il contienne tout rectangle bordé par quatre arches.*

*Démonstration.* — Notons  $U$  l'ouvert feuilleté invariant donné par le lemme 5.3.4. D'après le lemme 5.3.2 il contient tous les rectangles bordés par quatre arches sauf ceux d'un nombre fini d'orbites. Choisissons, pour chacune de ces orbites, un rectangle  $C$ . Les feuilletages  $F^s$  et  $F^u$  sont définis au voisinage du bord de  $C$ . De plus les côtés stables de  $C$  sont des segments de feuilles de  $F^s$ , et  $F^s$  est transverse aux côtés instables de  $C$ . Il n'y a donc pas d'obstruction à prolonger à  $C$  la restriction du feuilletage  $F^s$  à un petit voisinage compact contenu dans  $U$  du bord de  $C$  (le feuilletage  $F^s$  ne tourne pas quand on parcourt le bord de  $C$ ). On peut de même prolonger  $F^u$  à  $C$ , en restant transverse à  $F^s$ . Appelons  $c \subset C$  le complémentaire dans  $C$  du petit voisinage de  $\partial C$  sur lequel nous n'avons pas modifié les feuilletages  $F^s$  et  $F^u$ . Le compact  $c$  étant disjoint de  $W^s(K) \cup W^u(K)$ , n'a qu'un nombre fini d'itérés contenus dans un compact fixé de  $U$ . On en déduit que  $U \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(c)$  est ouvert. On définit  $F^s$  et  $F^u$  sur  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(c)$  en prenant l'image par les itérés de  $f$  des feuilletages que nous venons de construire sur  $c$ . Nous obtenons ainsi deux feuilletages transverses invariants sur  $U \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(C)$ . On procède de même pour chaque orbite de rectangle non contenu dans  $U$ .  $\square$

On conclut la démonstration de la proposition par le lemme suivant :

**Lemme 5.3.6.** — *Soit  $U$  un voisinage de  $K$ , invariant par  $f$  et contenant tout rectangle bordé par quatre arches. Soit  $M$  une partition de Markov pour  $K$ .*

*Les rectangles de la partition de Markov  $M$  sont alors inclus dans  $U$ .*



*Démonstration.* — Il suffit de remarquer que  $U$  contient  $W^s(K) \cup W^u(K)$  et que tout point d'un rectangle de  $M$  qui n'est pas sur une variété invariante de  $K$  appartient à un rectangle bordé par quatre arches.  $\square$

#### 5.4. Conjugaison définie sur les rectangles d'une partition de Markov

Le but de ce paragraphe est de prouver la proposition suivante.

**Proposition 5.4.1.** — *Soient  $f$  et  $g$  deux difféomorphismes de Smale de deux surfaces compactes, et soient  $K$  et  $L$  des ensembles hyperboliques saturés respectivement de  $f$  et  $g$ . Soit  $U_f$  le voisinage de  $K$  invariant par  $f$  et muni de deux feuilletages transverses  $F_f^u$  et  $F_f^s$  invariants par  $f$ , dont la proposition 5.3.1 assure l'existence. Soit  $U_g$  le voisinage correspondant pour  $L$ . On suppose que  $K$  et  $L$  admettent des partitions de Markov  $M$  et  $\tilde{M}$  de même type géométrique; rappelons que les rectangles de ces partitions sont inclus dans  $U_f$  et  $U_g$ .*

*Alors il existe un homéomorphisme  $h$  de l'union  $R$  des rectangles de  $M$  sur l'union  $\tilde{R}$  des rectangles de  $\tilde{M}$ , préservant les restrictions des feuilletages stables et instables, préservant les orientations des verticales et des horizontales, et tel que, pour tout  $x \in R \cap f^{-1}(R)$  on ait  $h(f(x)) = g(h(x))$ .*

*Démonstration.* — Pour tout rectangle  $R_i$  notons  $I_i^u$  l'espace des feuilles de la restriction de  $F^s$  à  $R_i$ ; en d'autres termes,  $I_i^u$  est le quotient de  $R_i$  par  $F^s$ . Remarquons que  $I_i^u$  est un segment orienté par le choix d'orientation des verticales de  $R_i$ . On notera  $I^u$  l'union disjointe de ces segments orientés.

Remarquons que  $f$  induit naturellement une fonction  $f^u$  sur  $I^u$  dont le domaine de définition est l'union des segments  $J_j^i$  obtenus par passage au quotient des sous-rectangles horizontaux  $H_j^i$  par  $F^s$ : en effet l'image d'un segment de feuille de  $F^s$  contenue dans  $H_j^i$  est un segment de feuille d'un sous-rectangle vertical  $V_l^k$ . De plus la projection de  $V_l^k$  sur  $I_k^u$  est une surjection. On en déduit que la restriction de  $f^u$  à  $J_j^i$  est une bijection sur  $I_k^u$ : il manque juste à  $f^u$  d'être dilatante pour qu'elle soit markovienne. Cependant, le feuilletage  $F^s$  n'est pas *a priori* différentiable: les segments  $I^u$  n'ont donc pas de structure différentiable naturelle. En utilisant le fait que le difféomorphisme de Smale  $f$  dilate uniformément les vecteurs tangents au feuilletage instable  $F^u$ , on vérifie que le maximal invariant de  $f^u$  est totalement discontinu. La fonction  $f^u$  est donc une application continue markovienne (voir la définition 5.1.3).

Remarquons enfin que le type combinatoire  $\sigma^u$  de  $f^u$  est déterminé par le type géométrique de la partition  $\phi$  de Markov  $M$ :  $\sigma^u(J_j^i) = (I_k^u, \varepsilon)$  si  $\phi(H_j^i) = (V_l^k, \varepsilon)$ .

Définissons de même l'application continue markovienne  $g^u$ , par passage au quotient des rectangles  $\tilde{R}_i$  par le feuilletage  $\tilde{F}^s$ . Les applications  $f^u$  et  $g^u$  ont même type combinatoire, donc d'après la proposition 5.1.2 et la remarque qui la suit, il existe un homéomorphisme  $h^u: I^u \rightarrow \tilde{I}^u$  induisant un homéomorphisme croissant de  $I_i^u$  sur  $\tilde{I}_i^u$ , et conjuguant  $f^u$  à  $g^u$ .

On définit de même l'application continue markovienne  $(f^{-1})^s$  définie sur  $I^s$ , union des quotients des rectangles  $R_i$  par  $F^u$ . Les fonctions  $(f^{-1})^s$  et  $(g^{-1})^s$  étant de même type, il existe un homéomorphisme  $h^s$  de  $I^s$  sur  $\tilde{I}^s$  qui les conjugue.

Pour tout point  $x \in R_i$  on note  $x^u$  et  $x^s$  les projections de  $x$  sur  $I^u$  et  $I^s$  suivant les feuilletages  $F^s$  et  $F^u$ . On note  $h(x)$  l'unique point de  $\tilde{R}_i$  dont les projections sont  $h^u(x^u)$  et  $h^s(x^s)$ . L'application  $h$  ainsi définie est un homéomorphisme de l'union des  $R_i$  sur l'union des  $\tilde{R}_i$ , préservant l'orientation des verticales et des horizontales. De plus, pour tout  $i, j, k, l$  l'image par  $h$  du sous-rectangle  $H_j^i$  est le sous-rectangle  $\tilde{H}_j^i$ , et  $h(V_l^k) = \tilde{V}_l^k$ .

Il reste à présent à vérifier que  $h$  est bien une conjugaison des restrictions de  $f$  et  $g$  aux rectangles. En d'autres termes, nous devons montrer que, si  $x$  est un point d'un rectangle  $R_i$  tel que  $f(x)$  appartient à un rectangle  $R_k$  alors  $h(f(x)) = g(h(x))$ . Un tel point  $x$  appartient à un sous-rectangle horizontal  $H_j^i$ , et son image  $y = f(x)$  appartient à un sous-rectangle vertical  $V_l^k$ . Notons  $\tilde{x} = h(x) \in \tilde{H}_j^i$  et  $\tilde{y} = h(y) \in \tilde{V}_l^k$ . Comme la partition de Markov  $\{\tilde{R}_i\}$  a même type géométrique que  $\{R_i\}$ , l'image  $g(\tilde{x})$  appartient à  $\tilde{V}_l^k$ .

L'égalité  $\tilde{y}^u = h^u(f^u(x^u)) = g^u(h^u(x^u))$  implique que  $\tilde{y}$  et  $g(\tilde{x})$  appartiennent au même segment horizontal de  $\tilde{R}_k$ .

Notons  $v(\tilde{x})$  le segment vertical passant par  $\tilde{x}$  du rectangle  $\tilde{R}_i$ . L'image par  $g$  de ce segment peut contenir plusieurs segments verticaux de  $\tilde{R}_k$ . Cependant  $g(v(\tilde{x})) \cap \tilde{R}_k$  contient une unique composante  $v_l$  dans  $\tilde{V}_l^k$ .

De l'égalité  $\tilde{x}^s = h^s((f^{-1})^s(y^s)) = (g^{-1})^s(h^s(y^s))$  on déduit que l'image par  $g^{-1}$  du segment vertical de  $\tilde{R}_k$  passant par  $\tilde{y}$  est incluse dans le segment vertical  $v(\tilde{x})$ . De plus le point  $\tilde{y}$  appartient au sous-rectangle vertical  $V_l^k$ , il appartient donc à  $v_l$ . L'image par  $g^{-1}$  du segment vertical de  $\tilde{R}_k$  passant par  $g(\tilde{x})$  est elle aussi incluse dans  $v(\tilde{x})$ . Comme  $g(\tilde{x})$  appartient aussi à  $V_l^k$ , on en déduit de même qu'il appartient à  $v_l$ . On vient de vérifier que  $\tilde{y}$  et  $g(\tilde{x})$  appartiennent au même segment vertical de  $\tilde{R}_k$ ; comme ils appartiennent également au même segment horizontal, ils sont égaux.  $\square$

### Remarques

1. La figure 2 exhibe deux partitions de Markov d'ensembles hyperboliques saturés  $(K, f)$  et  $(L, g)$  qui n'ont pas même type géométrique bien que les dynamiques unidimensionnelles  $f^u$  et  $(f^{-1})^s$  utilisées dans la preuve de la proposition 5.4.1 soient de même type combinatoire que  $g^u$  et  $(g^{-1})^s$ . Dans un pareil cas, l'homéomorphisme  $h = (h^s, h^u)$  défini sur les rectangles n'est pas une conjugaison des restrictions de  $f$  et  $g$  aux rectangles.

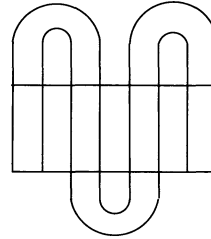
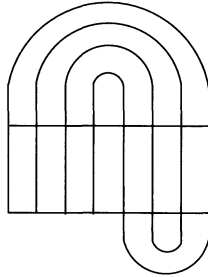
On ne peut pas construire un tel contre-exemple si la matrice d'incidence de la partition de Markov a tous ses coefficients égaux à 0 ou 1.

$f$  de type géométrique :

$$\begin{array}{ll} H^1 \rightarrow (V^1, +) & H^3 \rightarrow (V^3, +) \\ H^2 \rightarrow (V^4, -) & H^4 \rightarrow (V^2, -) \end{array}$$

$g$  de type géométrique :

$$\begin{array}{ll} H^1 \rightarrow (V^1, +) & H^3 \rightarrow (V^3, +) \\ H^2 \rightarrow (V^2, -) & H^4 \rightarrow (V^4, -) \end{array}$$



$f^u, g^u, (f^{-1})^s, (g^{-1})^s$  ont même type combinatoire :  
 $(J^1 \rightarrow +, J^2 \rightarrow -, J^3 \rightarrow +, J^4 \rightarrow -)$

FIGURE 2. Partitions de Markov induisant des mêmes dynamiques verticales et horizontales

2. La proposition 5.4.1 montre que le fait qu'un rectangle  $R_i$  d'une partition de Markov soit réduit à un segment stable, ou instable, ou à un point, est déterminé par le type géométrique de la partition de Markov.
3. L'homéomorphisme  $h$  construit ci-dessus n'est pas unique : il dépend des feuilletages  $F^s$  et  $F^u$ . De plus, d'après la remarque suivant la proposition 5.1.2, les homéomorphismes  $h^u$  et  $h^s$  peuvent être choisis arbitrairement sur les intervalles correspondant à l'espace séparant deux sous-rectangles horizontaux ou verticaux successifs.
4. La restriction de  $h$  à  $K$  ne dépend pas du choix de  $h$ .
5. La proposition 5.4.1 est valable pour des partitions de Markov génératrices d'ensembles hyperboliques qui ne sont pas saturés.

### 5.5. Extension de la conjugaison au domaine

Soit  $K$  et  $\tilde{K}$  deux ensembles hyperboliques saturés de deux difféomorphismes de Smale  $f$  et  $\tilde{f}$  sur deux surfaces  $S$  et  $\tilde{S}$ . On suppose que  $K$  et  $\tilde{K}$  admettent des partitions de Markov  $\{R_i\}$  et  $\{\tilde{R}_i\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , ayant même type géométrique  $(\{h_i\}, \{v_i\}, \phi)$ . Le paragraphe précédent a montré l'existence d'un homéomorphisme conjuguant les restrictions de  $f$  et  $\tilde{f}$  à l'union des rectangles. Dans ce paragraphe, nous allons chercher à étendre cette conjugaison à tout le domaine de  $K$  et  $\tilde{K}$ . Un premier pas sera de l'étendre à l'union des itérés par  $f$  des rectangles  $R_i$ . Pour pouvoir

ainsi pousser la conjugaison par  $f$ , il faut assurer « qu'une orbite qui sort de l'union des rectangles n'y rentre jamais » : c'est ce qu'assure la proposition suivante.

**Proposition 5.5.1.** — Soit  $R$  l'union des rectangles d'une partition de Markov d'un ensemble hyperbolique saturé  $K$ . Soit  $x \in R$  tel que  $f(x)$  n'appartient pas à  $R$  alors, pour tout  $n > 0$ ,  $f^n(x)$  n'appartient pas à  $R$ .

*Démonstration.* — Soit  $x_0 \in R$  tel que  $f(x_0) \notin R$ . Notons  $C$  l'adhérence de la composante connexe de  $R \setminus f^{-1}(R)$  qui contient  $x_0$  : c'est un rectangle (dégénéré si et seulement si le rectangle contenant  $x_0$  est réduit à un segment instable), dont le bord instable est formé de deux  $u$ -arches  $a_1$  et  $a_2$  (éventuellement confondues dans le cas dégénéré) ayant leurs extrémités sur deux sous-rectangles  $H_j^i$  et  $H_{j+1}^i$  successifs, et dont le bord stable  $\partial^s(C)$  est formé d'un des côtés stables de  $H_j^i$  et d'un des côtés stables de  $H_{j+1}^i$ . Nous allons vérifier que pour tout  $n > 0$ ,  $f^n(C) \cap R$  est égal à  $f^n(\partial^s(C))$  (voir la figure 3).

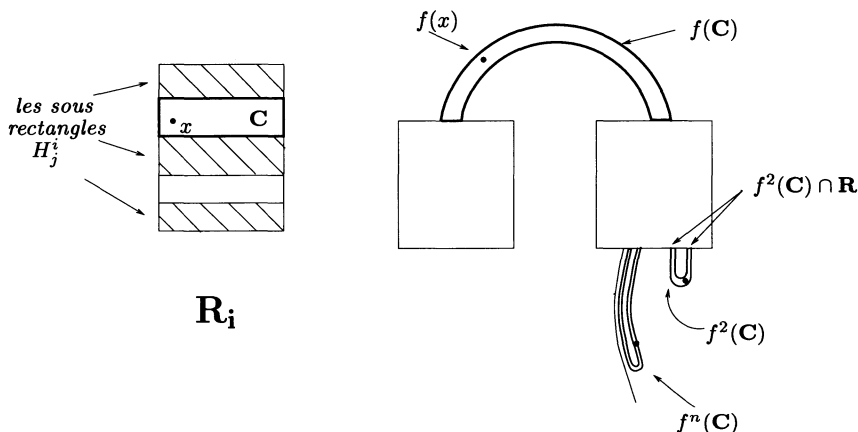


FIGURE 3. Itérés d'un « trou » entre deux sous-rectangles horizontaux

Nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 5.5.2.** — Soit  $a$  une  $u$ -arche d'intérieur disjoint de  $R$ , alors  $f(a)$  est une  $u$ -arche d'intérieur disjoint de  $R$

*Démonstration du lemme 5.5.2.* — Remarquons que  $a$  a ses extrémités  $x$  et  $y$  sur le bord stable de  $R$  qui est invariant par  $f$ , donc  $f(a)$  est une arche ayant ses extrémités sur le bord stable de  $R$ . De plus l'intérieur d'une arche est soit inclus dans  $R$  soit disjoint de  $R$ .

Si l'intérieur de  $f(a)$  n'est pas disjoint de  $R$  alors  $f(a)$  est un rail contenu dans un rectangle  $R_i$ , joignant  $f(x)$  à  $f(y)$ . Remarquons que  $x$  et donc  $f(x)$  sont éléments de  $K = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(R)$ . En particulier il existe un sous-rectangle vertical  $V_j^i$  qui contient

$f(x)$ . Ce sous rectangle vertical contient le rail instable de  $R_i$  qui passe par  $f(x)$ , en d'autres termes,  $f(a) \subset V_j^i$ . En conséquence,  $a$  est incluse dans  $f^{-1}(V_j^i)$  qui est un sous-rectangle horizontal inclus dans un  $R_j$ , ce qui contredit le fait que  $a$  est d'intérieur disjoint de  $R$ .  $\square$

Voyons à présent comment conclure la démonstration de la proposition 5.5.1.

Remarquons que  $C \cap W^s(K) = \partial^s(C)$ . En effet, comme  $C$  est un rectangle, tout segment stable qui le rencontre est un rail d'extrémités deux points de  $K$ . Or  $C \setminus \partial^s(C)$  est disjoint de  $K$  (maximal invariant de  $R$ ) car son image est par construction disjointe de  $R$ .

De plus tout itéré positif de  $\partial^s(C)$  par  $f$  est inclus dans  $\partial^s(R)$  et donc dans  $R$ .

En outre,  $W^u(K) \cap C$  est une union d'u-arches joignant les deux composantes de  $\partial^s(C)$ . L'image par  $f$  d'une telle u-arche est une u-arche ayant ses extrémités dans  $R$ , mais d'intérieur disjoint de  $R$ . D'après le lemme 5.5.2, les itérés positifs d'une telle arche sont tous d'intérieur disjoint de  $R$ .

Tout point  $x \in C \setminus (\partial^s(C) \cup W^u(K))$  appartient à l'intérieur d'un rectangle  $r$  bordé par deux arches stables contenues dans  $\partial^s(C)$  et deux arches instables  $a_1$  et  $a_2$  joignant leurs extrémités. Supposons par l'absurde qu'il existe un itéré positif  $f^n(x)$  appartenant à un  $R_i$ . Comme  $x$  (et donc  $f^n(x)$ ) n'appartient pas à  $W^s(K) \cup W^u(K)$ , il existe un rectangle  $r'$ , inclus dans  $R_i$ , bordé par quatre arches, et contenant  $f^n(x)$  dans son intérieur. Remarquons que deux rectangles bordés par quatre arches sont confondus dès que leurs intérieurs sont non-disjoints. On en déduit que  $f^n(r)$  (et donc  $f^n(a_1)$ ) est inclus dans  $R_i$ , ce qui est en contradiction avec le fait que  $f^n(a_1)$  est d'intérieur disjoint de  $R$ .  $\square$

**Corollaire 5.5.3.** — *Soit  $K$  et  $\tilde{K}$  deux ensembles hyperboliques saturés de deux difféomorphismes de Smale  $f$  et  $\tilde{f}$  sur deux surfaces  $S$  et  $\tilde{S}$ . On suppose que  $K$  et  $\tilde{K}$  admettent des partitions de Markov  $\{R_i\}$  et  $\{\tilde{R}_i\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , ayant même type géométrique. Notons  $R = \bigcup_i (R_i)$  et  $\tilde{R} = \bigcup_i (\tilde{R}_i)$ . Pour tout  $n > 0$  on notera  $R^n = \bigcup_{-n}^n (f^i(R))$  et  $\tilde{R}^n = \bigcup_{-n}^n (\tilde{f}^i(\tilde{R}))$ .*

*Soit  $h: R \rightarrow \tilde{R}$  un homéomorphisme conjuguant les restrictions à  $R$  et  $\tilde{R}$  de  $f$  et  $\tilde{f}$ . Pour tout  $n > 0$ , il existe un unique homéomorphisme  $h_n: R^n \rightarrow \tilde{R}^n$  conjuguant les restrictions à  $R^n$  et  $\tilde{R}^n$  de  $f$  et  $\tilde{f}$  et coïncidant avec  $h$  sur  $R$ .*

*Démonstration.* — Pour tout  $x \in R^n$  il existe  $i$  tel que  $f^i(x) \in R$ . Comme  $h$  conjugue les restrictions de  $f$  et  $\tilde{f}$  à  $R$  et  $\tilde{R}$ , si  $f^{i+1}(x)$  appartient aussi à  $R$ , on a

$$\tilde{f}^{-i}(h(f^i(x))) = \tilde{f}^{-i-1}(h(f^{i+1}(x))).$$

D'après la proposition 5.5.1, pour tout  $x \in R^n$  l'ensemble des entiers  $i \in \mathbb{Z}$  tels que  $f^i(x) \in R$  forme un intervalle de  $\mathbb{Z}$  : on en déduit que le point  $\tilde{f}^{-i}(h(f^i(x)))$  ne dépend pas du choix de  $i$  dans cet intervalle, et on note donc ce point  $h_n(x)$ . On vérifie que  $h_n$  est un homéomorphisme prolongeant  $h_{n-1}$ , et conjuguant  $f$  et  $\tilde{f}$ .  $\square$

Nous allons à présent chercher à étendre à l'adhérence de l'union croissante des  $R^n$  l'homéomorphisme de conjugaison  $h$ . Nous verrons que l'extension par continuité des homéomorphismes  $h_n$  nécessite de choisir de façon particulière l'homéomorphisme  $h$ . Pour comprendre cela nous devons d'abord analyser en quels points de  $\Delta(K)$  il peut y avoir des problèmes pour étendre la suite  $h_n$  par continuité.

**Lemme 5.5.4.** — Soit  $x_i \in R, i \in \mathbb{N}$  une suite de points vérifiant  $f(x_i) \notin R$ , et soit  $n_i > 0$  une suite d'entiers convergeant vers l'infini. On suppose que la suite  $f^{n_i}(x_i)$  converge vers un point  $y \in \Delta(K)$ . Alors  $y$  appartient à l'une des séparatrices libres instables d'un point périodique s-bord  $p$  de  $K$ , ou est égal à ce point périodique s-bord.

Si de plus la suite  $x_i$  converge vers un point  $x$ , alors  $x \in W^s(p)$

*Démonstration.* — Remarquons que les points  $x_i$  appartiennent à une union finie de rectangles dont l'intersection avec  $W^s(K)$  est incluse dans leurs côtés stables, et que ces côtés stables sont contenus dans des séparatrices stables de points périodiques bord. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les  $x_i$  appartiennent au même rectangle  $r$ . D'après le corollaire 2.5.4, le point  $y$  ou bien est égal à l'un des points périodiques s-bord  $p$  dont la variété stable porte un côté stable de  $r$ , ou bien appartient à l'une des séparatrices instables libres issues de  $p$ . Ceci montre la première partie du lemme.

Notons  $\sigma_i$  le segment de feuille de  $F^s$  passant par  $x_i$  et inclus dans  $r$ . Il coupe le bord instable de  $r$  en deux points  $x'_i$  et  $x''_i$  qui sont sur des u-arches. Remarquons que  $f$  contracte uniformément les vecteurs tangents à  $F^s$ , sur toute partie compacte de l'ouvert où  $F^s$  est défini. Or la suite  $f^{n_i}(x_i)$  converge vers  $y$  qui appartient à cet ouvert. On en déduit que la longueur des segments  $f^{n_i}(\sigma_i)$  tend vers 0 : pour conclure le lemme 5.5.4 il suffit à présent d'appliquer la proposition 2.5.2 à l'une des deux suites  $x'_i$  et  $x''_i$ .  $\square$

On en déduit que l'union de  $\bigcup_0^\infty R^n$  et des séparatrices libres est fermée dans  $\Delta(K)$ ; on note  $R^\infty$  cette union.

Nous avons vu que l'homéomorphisme  $h_{n+1}$ , défini sur  $R^{n+1}$ , prolonge  $h_n$ ; ceci permet de définir une unique application sur l'union croissante des  $R^n$ , que nous pourrions étendre à  $R^\infty$  par un choix d'homéomorphisme de conjugaison sur les séparatrices libres. L'ensemble des points où une telle application peut n'être pas continue, est réduit à l'union des séparatrices libres : c'est pourquoi nous allons d'abord fixer l'homéomorphisme de conjugaison  $h_{\text{libre}}$  sur l'union des séparatrices libres, puis nous choisirons l'homéomorphisme  $h: R \rightarrow \tilde{R}$  de façon compatible avec  $h_{\text{libre}}$ , et nous vérifierons alors que cet homéomorphisme s'étend continûment à l'adhérence dans  $\Delta(K)$  de l'union des  $R^n$ .

**Remarque.** — Soit  $K$  et  $\tilde{K}$  deux ensembles hyperboliques saturés, de  $f$  et de  $\tilde{f}$ , admettant des partitions de Markov géométriques  $\{R_i\}$  et  $\{\tilde{R}_i\}$  qui sont de même type géométrique  $\phi$ . Alors le type géométrique  $\phi$  induit une bijection naturelle entre

les ensembles de séparatrices libres de  $K$  et de  $\tilde{K}$ . Nous la noterons  $\phi_{\text{libre}}$ . De plus  $\phi_{\text{libre}}$  conjugue les permutations induites par  $f$  et  $\tilde{f}$  sur leur ensemble respectif de séparatrices libres.

En effet, d'après la proposition 5.4.1, il existe un homéomorphisme  $h$  de l'union des rectangles  $R_i$  sur l'union des  $\tilde{R}_i$  qui conjugue les restrictions de  $f$  et  $\tilde{f}$  à ces unions de rectangles. Soit  $x$  un point périodique de  $f$ , alors  $h(x)$  est un point périodique de  $\tilde{f}$ . De plus  $x$  et  $h(x)$  sont de même type (s-bord, u-bord, double s-bord, coin...). La restriction de  $h = (h^s, h^u)$  à  $K$  ne dépend pas du choix de  $h^s$  et de  $h^u$  sur les intervalles qui correspondent aux sous-rectangles (verticaux ou horizontaux) successifs. On en déduit que le type géométrique  $\phi$  de la partition de Markov induit une bijection naturelle  $\phi_{\text{per}}$  de l'ensemble des points périodiques bord de  $f$  sur ceux de  $\tilde{f}$ . Pour en déduire une bijection de leurs ensembles de séparatrices libres stables, il reste à considérer le cas des points double u-bord (qui possèdent deux séparatrices stables). Dans ce cas, le choix de l'orientation des horizontales des rectangles revient à fixer une orientation transverse du rectangle dégénéré et permet de distinguer les deux séparatrices. La bijection annoncée associera à la séparatrice droite ou gauche de  $x$  la séparatrice respectivement droite ou gauche de  $h(x)$ .

Le fait que les partitions de Markov ont même type géométrique, assure que ce choix commute avec l'itération par  $f$  et par  $\tilde{f}$ .

**Lemme 5.5.5.** — *Il existe un homéomorphisme  $h_{r,\text{mlibre}}$  de l'union des séparatrices libres de  $(K, f)$  sur l'union de celles de  $(\tilde{K}, \tilde{f})$  qui conjugue les restrictions de  $f$  et de  $\tilde{f}$  à ces ensembles, et qui induit la bijection  $\phi_{\text{libre}}$  sur les ensembles des séparatrices libres.*

*Démonstration.* — La démonstration est sans surprise : pour chaque orbite de séparatrices stables (pour se fixer les idées) on choisit une séparatrice  $W$ . Alors  $W$  et  $\phi_{\text{libre}}(W)$  ont même période  $n$  et les restrictions de  $f^n$  et  $\tilde{f}^n$  à ces séparatrices sont deux contractions, qui sont donc conjuguées par un homéomorphisme de  $W$  sur  $\phi_{\text{libre}}(W)$  ; il reste juste à propager par  $f$  et  $\tilde{f}$  cet homéomorphisme sur toute l'orbite de  $W$ .  $\square$

La proposition 5.4.1 a construit un homéomorphisme de conjugaison  $h$  de  $R$  dans  $\tilde{R}$ , produit de deux homéomorphismes  $h^s$  et  $h^u$  définis sur les quotients des rectangles  $I_i^s$  et  $I_i^u$ . Les homéomorphismes  $h^s$  et  $h^u$  dépendent du choix de ces homéomorphismes sur  $I_i^s \setminus \bigcup_j J_j^i$ . Nous allons à présent fixer ce choix de façon que  $h_{\text{libre}}$  soit le prolongement par continuité de  $h$ . Pour cela nous aurons besoin de définir les homéomorphismes d'holonomie des feuilletages  $F^s$  et  $F^u$ .

Reprenons donc précisément ces notations. On note  $I^u$  le quotient de  $R$  par la restriction à cet ensemble du feuilletage  $F^s$ . On note  $J^u \subset I^u$  les segments correspondant au quotient des sous-rectangles horizontaux  $H_j^i$ . Enfin, notons  $\mathcal{A}^u$  l'union disjointe des

adhérences des composantes connexes de  $I^u \setminus J^u$  : c'est une union finie de segments. On définit de même  $\tilde{I}^u$ ,  $\tilde{J}^u$  et  $\tilde{A}^u$ .

Rappelons que le difféomorphisme  $f$  induit une application markovienne  $f^u$  de  $J^u$  sur  $I^u$ .

Rappelons enfin que le type topologique de  $f^u$  et de  $\tilde{f}^u$  induit une bijection de l'ensemble des extrémités de  $J^u$  sur celles de  $\tilde{J}^u$ , et donc de l'ensemble des extrémités de  $\mathcal{A}^u$  sur celles de  $\tilde{\mathcal{A}}^u$ , et que cette bijection naturelle induit une bijection sur les ensembles de composantes connexes de  $\mathcal{A}^u$  et de  $\tilde{\mathcal{A}}^u$ .

Soit  $A \subset \mathcal{A}^u$  l'adhérence d'une composante connexe de  $I^u \setminus J^u$ . Rappelons qu'elle est naturellement orientée. Notons  $a^-$  et  $a^+$  ses extrémités inférieure et supérieure. Remarquons que  $A$  s'identifie à un segment transverse à  $F^s$ . On peut donc parler d'homéomorphisme d'holonomie de  $F^s$  défini sur des intervalles de  $A$ . Remarquons que  $a^-$  est un point s-bord, donc appartient à la variété stable d'un point périodique  $p(a^-)$ . Remarquons que les feuilles de  $F^s$  correspondant à un point  $x$  proche de  $a^-$  coupent une séparatrice libre  $W(a^-)$  du point périodique  $p(a^-)$ , en un point  $H(x)$  proche de  $p(a^-)$ . On définit de même  $H$  au voisinage de  $a^+$ .

On définit ainsi l'application d'holonomie  $H$ , au voisinage de chaque extrémité des composantes de  $\mathcal{A}^u$ .

**Lemme 5.5.6.** — *Notons  $\tilde{a}^-$  l'extrémité de  $\tilde{\mathcal{A}}^u$  correspondant à  $a^-$ . Alors, la séparatrice  $\tilde{W}(\tilde{a}^-)$  est  $h_{\text{libre}}(W(a^-))$ .*

*Démonstration.* — En effet  $a^-$  est l'extrémité supérieure d'un segment  $J_j^i$ , et par définition  $\tilde{a}^-$  est l'extrémité de  $\tilde{J}_j^i$ . Alors  $f^u$  et  $\tilde{f}^u$  sont de même type combinatoire  $\sigma$ , et  $\sigma(J_j^i) = \sigma(\tilde{J}_j^i)$  implique que  $f(a^-)$  et  $\tilde{f}(\tilde{a}^-)$  sont simultanément extrémité supérieure ou inférieure des segments  $I_k$  et  $\tilde{I}_k$ . En itérant ce procédé,  $(f^u)^n(a^-)$  et  $(\tilde{f}^u)^n(\tilde{a}^-)$  sont extrémités simultanément supérieure ou inférieure de segments de même indice. Voyons que l'orbite par  $f^u$  de  $a^-$  détermine le point périodique dont la variété stable contient  $a^-$ . L'orbite de  $a^-$  est prépériodique (l'ensemble des extrémités de  $I$  est fini) et soit  $p$  la période. Pour  $n$  assez grand,  $(f^u)^{n-p}(a^-)$  est un point fixe de  $(f^u)^p$  indépendant de  $n$ . Ce point correspond à un côté stable d'un rectangle  $R_l$ , dont l'image par  $f^p$  est incluse dans lui-même : il contient donc un unique point périodique qui est  $p(a^-)$ . Ce point ayant été déterminé par le type combinatoire de  $f^u$ , le point  $p(\tilde{a}^-)$  (obtenu par la même construction) est le point périodique  $\phi_{\text{per}}(p(a^-))$ . Ceci détermine la séparatrice instable libre  $W(a^-)$  si le point  $p(a^-)$  n'est pas double-bord. Dans le cas double bord le type combinatoire de  $f^u$  permet de suivre les signes tout au long de la construction et donc encore de déterminer  $W(a^-)$ .  $\square$

**Définition 5.5.7.** — *On dira qu'un homéomorphisme  $h^u : I^u \rightarrow \tilde{I}^u$ , qui conjugue  $f^u$  et  $\tilde{f}^u$ , est compatible avec l'homéomorphisme  $h_{\text{libre}}$  s'il vérifie la relation  $h_{\text{libre}} \circ H = \tilde{H} \circ h^u$  sur un voisinage dans  $\mathcal{A}^u$  de chacune des extrémités de  $\mathcal{A}^u$ .*

*On définit de façon analogue la notion d'homéomorphisme  $h^s$  compatible avec  $h_{\text{libre}}$ .*



(cette notion dépend bien sûr du choix des feuilletages  $F^s$  et  $F^u$ ).

**Lemme 5.5.8.** — *Il existe des homéomorphismes  $h^u$ , compatibles avec  $h_{\text{libre}}$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de définir  $h^u$  sur chaque composante  $A$  de  $\mathcal{A}^u$ . Notons  $\tilde{A}$  la composante correspondante de  $\tilde{\mathcal{A}}^u$ . Le lemme 5.5.6 permet de construire un homéomorphisme croissant  $h_A$  d'un voisinage des extrémités de  $A$  sur un voisinage des extrémités de  $\tilde{A}$  vérifiant la relation  $h_{\text{libre}} \circ H = \tilde{H} \circ h_A$ . Il suffit alors de prolonger  $h_A$  à  $A$ .  $\square$

**Lemme 5.5.9.** — *Soit  $h = (h^s, h^u): R \rightarrow \tilde{R}$  un homéomorphisme de conjugaison de  $f$  et  $\tilde{f}$ . Si les homéomorphismes  $h^s$  et  $h^u$  sont compatibles avec  $h_{\text{libre}}$ , alors  $h$  se prolonge de façon unique en un homéomorphisme  $h_\infty$  de l'adhérence dans  $\Delta(K)$  de  $\bigcup_n R^n$  sur l'adhérence de  $\bigcup_n \tilde{R}^n$  conjuguant  $f$  à  $\tilde{f}$ . De plus,  $h$  coïncide avec  $h_{\text{libre}}$  sur l'union des séparatrices libres.*

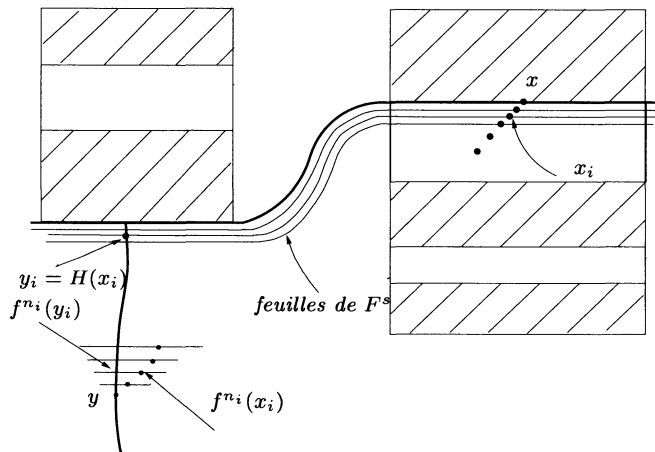


FIGURE 4. Continuité de  $h_\infty$  près d'une séparatrice libre

*Démonstration.* — Il faut montrer que si  $x_i$  est une suite de points de  $R$  telle que  $f(x_i) \notin R$  est si  $n_i$  est une suite convergente vers  $+\infty$  telle que la suite  $f^{n_i}(x_i)$  converge vers un point  $y$  de  $\Delta(K)$  (on a vu que  $y$  appartient à l'union des séparatrices libres instables), alors  $\tilde{f}^{n_i}(h(x_i))$  converge vers le point  $h_{\text{libre}}(y)$ . Quitte à choisir une sous-suite on peut supposer que les  $x_i$  convergent vers un point  $x$ . D'après le lemme 5.5.4,  $x$  appartient à la variété stable du point périodique dont est issue la séparatrice libre qui porte  $y$

Notons  $y_i = H(x_i)$ . Remarquons que  $f^{n_i}(y_i) = H(f^{n_i}(x_i))$  car le feuilletage  $F^s$  est invariant par  $f$ . On en déduit que la suite  $f^{n_i}(y_i)$  converge vers  $y$  (voir la figure 4).

Notons  $\tilde{y}_i = h_{\text{libre}}(y_i)$ . Alors la suite  $\tilde{f}^{n_i}(\tilde{y}_i) = h_{\text{libre}}(f^{n_i}(y_i))$  (puisque  $h_{\text{libre}}$  conjugue  $f$  à  $\tilde{f}$ ) converge vers  $\tilde{y} = h_{\text{libre}}(y)$ . D'autre part, comme  $h^u$  est compatible avec  $h_{\text{libre}}$  on a :  $\tilde{H}(h(x_i)) = h_{\text{libre}}(H(x_i)) = \tilde{y}_i$ . De plus, par invariance du feuilletage  $\tilde{F}^s$ , on a  $\tilde{H}(\tilde{f}^{n_i}(h(x_i))) = \tilde{f}^{n_i}(\tilde{y}_i)$ , et converge donc vers  $h_{\text{libre}}(y)$ . Il reste à remarquer que les segments de feuilles stables  $[\tilde{f}^{n_i}(h(x_i)), \tilde{f}^{n_i}(\tilde{y}_i)]^s$  sont les images par  $\tilde{f}^{n_i}$  des segments  $[h(x_i), \tilde{y}_i]^s$ . Or ces derniers sont de longueur bornée puisqu'ils convergent vers le segment de feuille stable joignant  $h(x)$  au point périodique. Comme  $\tilde{f}$  contracte uniformément les vecteurs tangents à  $\tilde{F}^s$  et que  $n_i$  tend vers l'infini, on en déduit que les longueurs des segments  $[\tilde{f}^{n_i}(h(x_i)), \tilde{f}^{n_i}(\tilde{y}_i)]^s$  convergent vers 0 ce qui implique que la suite  $\tilde{f}^{n_i}(h(x_i))$  converge vers  $\tilde{y}$ .  $\square$

La construction de  $h_\infty$  et l'invariance par  $f$  et  $\tilde{f}$  des feuilletages  $F^u, F^s$  et  $\tilde{F}^u, \tilde{F}^s$  impliquent de façon directe le corollaire suivant

**Corollaire 5.5.10.** — *Soit  $\beta$  une arche instable et  $x$  l'une de ses extrémités. Notons  $S(x)$  la séparatrice instable libre issue du point périodique de  $W^s(x)$  (et partant du même côté que  $\beta$ ). Notons  $\tilde{\beta}$  l'arche  $h_\infty(\beta)$  et  $\tilde{x} = h_\infty(x)$ , et  $S(\tilde{x})$  la séparatrice correspondante. Notons  $H_x$  et  $\tilde{H}_{\tilde{x}}$  les holonomies des feuilletages  $H^s$  et  $\tilde{H}^s$  définies d'un voisinage de  $x$  et  $\tilde{x}$  sur les séparatrices instables libres  $S(x)$  et  $S(\tilde{x})$ . Alors il existe un voisinage de  $x$  dans  $\beta$  tel que pour tout point  $y$  de ce voisinage on ait :*

$$h_{\text{libre}}(H_x(y)) = \tilde{H}_{\tilde{x}}(h_\infty(y))$$

(Il suffit en effet de ramener par une puissance de  $f$  l'arche  $\beta$  dans un des rectangles de la partition de Markov).

Rappelons que l'on a noté  $R^\infty$  l'union de  $\bigcup_n R^n$  et des séparatrices libres de  $K$ , nous avons vu que  $R^\infty$  est fermé dans  $\Delta(K)$ . Remarquons qu'il faut peut-être ajouter un nombre fini de séparatrices libres double-bord à l'adhérence dans  $\Delta(K)$  de  $\bigcup_n R^n$  pour obtenir  $R^\infty$ . On complète donc  $h_\infty$  sur  $R^\infty$  par  $h_{\text{libre}}$  sur ces séparatrices double-bord. On obtient ainsi un homéomorphisme de  $R^\infty$  que l'on appelle encore  $h_\infty$ .

**Lemme 5.5.11.** —  *$\delta(K) \setminus R^\infty$  est une union d'intérieurs de polygones d'arches dont les orbites pour  $f$  sont en nombre fini.*

*Démonstration.* — Le fermé invariant  $R^\infty$  contient  $W^s(K) \cup W^u(K)$ . Donc  $\delta(K) \setminus R^\infty$  est une union d'intérieurs de polygones d'arches : il reste à montrer que les orbites de ces polygones sont en nombre fini. Nous avons déjà vu que les orbites des polygones d'arches qui ne sont pas des rectangles sont en nombre fini : il nous reste donc à montrer que l'ensemble des orbites des rectangles d'arches non-inclus dans  $R^\infty$  sont en nombre fini. Pour cela nous utiliserons le lemme suivant :

**Lemme 5.5.12.** — *Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que tout rectangle bordé par des arches et possédant un côté stable et un côté instable de longueur inférieure à  $\varepsilon$  est inclus dans un rectangle  $R_i$ .*

*Démonstration.* — Pour cela, rappelons que nous avons choisi les rectangles de la partition de Markov deux à deux disjoints : on en déduit que toute arche assez petite a ses deux extrémités sur le même rectangle. De la structure de produit local de  $K$  on déduit que toute arche assez petite, ayant ses extrémités sur un rectangle  $R_i$ , est incluse dans  $R_i$  (voir la figure 5). Il reste juste à constater qu'un rectangle d'arches ayant un côté stable et un côté instable inclus dans  $R_i$  est lui-même inclus dans  $R_i$ .  $\square$

*situation impossible :*  
*une suite d'arches de longueur*  
*tendant vers 0, non-incluses dans  $R_i$*

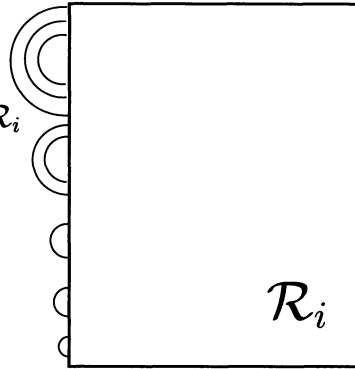


FIGURE 5. Les petites arches sont incluses dans les rectangles

*Fin de la démonstration du lemme 5.5.11.* — On choisit  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon$  de façon que le rapport  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  soit supérieur à la constante d'expansivité de  $f$  ; ainsi, toute arche instable possède un itéré par  $f$  dont la longueur est comprise entre  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . On a montré dans la démonstration du lemme 5.3.2 que l'ensemble des rectangles d'arches possédant un côté stable et un côté instable de longueur supérieure à  $\varepsilon_1$  est fini. On en déduit que les orbites de rectangles d'arches, sauf éventuellement pour un nombre fini d'entre elles, possèdent un itéré ayant un côté stable et un instable de longueur inférieure à  $\varepsilon$  : cet itéré est donc inclus dans un rectangle  $R_i$  d'après le lemme 5.5.12.  $\square$

Nous sommes désormais prêts à montrer :

**Lemme 5.5.13.** — *L'homéomorphisme  $h_\infty$  se prolonge en un homéomorphisme  $h_\delta$  de  $\delta(K)$  sur  $\delta(\tilde{K})$  conjuguant  $f$  et  $\tilde{f}$ .*

*Démonstration.* — D'après le lemme 5.5.11, il suffit de compléter  $h_\infty$  sur l'intérieur de polygones dont les orbites sont en nombre fini : on peut donc compléter  $h_\infty$  orbite par orbite (de polygones).

Soit  $\tilde{P}$  un polygone d'arches de  $K$ , bordant un disque (encore noté  $P$ ) non-inclus dans  $R^\infty$ . Remarquons que  $\partial P$  est inclus dans  $R^\infty$ , et que  $h_\infty(\partial P)$  est un polygone d'arches de  $\tilde{K}$  qui borde un disque  $\tilde{P}$ . De plus  $P$  et  $\tilde{P}$  ont même nombre de côtés stables. Rappelons enfin que les feuilletages  $F^s$  et  $F^u$  sont définis au voisinage de  $\partial P$ , et de même  $\tilde{F}^s$  et  $\tilde{F}^u$  sont définis au voisinage de  $\partial \tilde{P}$ .

**Définition 5.5.14.** — On dira qu'un homéomorphisme  $h_P: P \rightarrow \tilde{P}$  est compatible avec  $h_\infty$  s'il coïncide avec  $h_\infty$  sur  $\partial P$  et s'il existe un voisinage de  $\partial P$  et de  $\partial \tilde{P}$  tel que la restriction de  $h_\infty$  à ces voisinages conjugue les feuilletages  $F^s$  et  $F^u$  aux feuilletages  $\tilde{F}^s$  et  $\tilde{F}^u$ .

**Lemme 5.5.15.** — Il existe un homéomorphisme  $h_P: P \rightarrow \tilde{P}$  compatible avec  $h_\infty$ .

*Démonstration.* — Remarquons d'abord qu'au voisinage d'un coin  $x$  du polygone d'arches,  $h_P$  est uniquement déterminé par sa restriction aux arches issues de ce point et par l'hypothèse de conjugaison des feuilletages : tout point  $y$  proche de  $x$  se projette le long des feuilles de  $F^u$  et  $F^s$  sur les arches stable et instable issues de  $x$  ; notons  $y^s$  et  $y^u$  ses projections. Alors  $h_P(x)$  est le point d'intersection proche de  $\tilde{P}$  des feuilles instables et stables passant par  $h_\infty(y^s)$  et  $h_\infty(y^u)$ .

Voyons comment définir  $h_P$  au voisinage d'un de ses côtés, stable pour se fixer les idées. Soit  $\alpha$  un côté stable de  $P$  joignant les coins  $x$  et  $x'$ . Notons  $\beta$  et  $\beta'$  les arches instables issues de  $x$  et de  $x'$ . Soit  $y$  un point proche de  $\alpha$ . Sa projection  $y^s$  sur  $\alpha$  le long de  $F^u$  est bien définie, par contre il a deux projections naturelles le long de  $F^s$  sur le bord instable de  $P$  : une (notée  $y^u$ ) sur  $\beta$  et une (notée  $(y^u)'$ ) sur  $\beta'$  (voir la figure 6). Pour définir  $h_P(y)$  il suffit de vérifier que  $h_\infty(y^u)$  et  $h_\infty((y^u)')$  sont sur

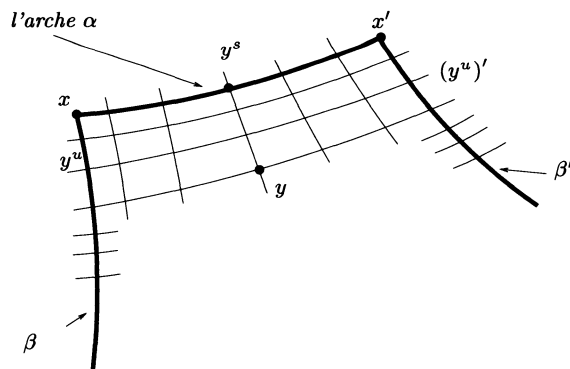


FIGURE 6. Au voisinage d'un côté stable : les deux projections sur les côtés instables

la même feuille de  $\tilde{F}^s$  : Notons  $H$  et  $H'$  les holonomies du feuilletage  $F^s$  définies au voisinage de  $x$  et  $x'$ , et à valeurs sur la séparatrice instable libre  $S(x) = S(x')$ . La

notion même d'holonomie implique que  $H(y^u) = H'((y^u)')$ . On définit de même les holonomies  $\tilde{H}$  et  $\tilde{H}'$  et le corollaire 5.5.10 nous assure que

$$\tilde{H}(h_\infty(y^u)) = h_{\text{libre}}(H(y^u)) = h_{\text{libre}}(H'((y^u)')) = \tilde{H}'(h_\infty((y^u)'))$$

Ceci montre que  $h_\infty(y^u)$  et  $h_\infty((y^u)')$  sont sur la même feuille de  $\tilde{H}^s$  : on peut donc bien définir  $h_P$  au voisinage de  $\alpha$ . On définit ainsi  $h_P$  sur un voisinage de  $\partial P$ , et on l'étend de façon quelconque à l'intérieur de  $P$ , quitte à restreindre d'abord le voisinage de  $\partial P$  où on vient de définir  $h_P$ .  $\square$

Le lemme suivant termine la démonstration du lemme 5.5.13.  $\square$

**Lemme 5.5.16.** — *Soit  $P$  un disque non-inclus dans  $R^\infty$  et bordé par un polygone d'arches de  $K$ , et  $\tilde{P}$  le polygone de  $\tilde{K}$  bordé par  $h_\infty(\partial P)$ . Soit  $h_P : P \rightarrow \tilde{P}$  un homéomorphisme compatible avec  $h_\infty$ . Alors il existe un unique homéomorphisme de  $R^\infty \cup \bigcup_{\mathbb{Z}}(f^n(P))$  sur  $\tilde{R}^\infty \cup \bigcup_{\mathbb{Z}}(\tilde{f}^n(\tilde{P}))$ , conjuguant les restrictions respectives de  $f$  et  $\tilde{f}$  et coïncidant avec  $h_\infty$  sur  $R^\infty$  et avec  $h_P$  sur  $P$ .*

*Démonstration.* — Rappelons que les séparatrices stables contenant les côtés stables de  $P$  sont couplées et ont donc même période  $p$ . Soit  $x_i$  une suite de points de  $P$  et  $n_i$  une suite d'entiers tendant vers  $+\infty$ , telle que la suite  $f^{p \cdot n_i}(x_i)$  converge vers un point  $y \in \delta(K)$ . Quitte à prendre une sous-suite on peut supposer que la suite  $x_i$  converge vers un point  $x$ . La même démonstration que celle du lemme 5.5.4 montre que le point  $y$  appartient à l'union d'une séparatrice instable libre et du point périodique  $p$  dont elle est issue, et que le point  $x$  appartient à la variété stable de  $p$ .

La suite des segments stables  $[x_i, H(x_i)]^s$  converge alors vers le segment  $[x, p]^s$ . Ces segments sont donc de longueur bornée.

Alors  $f^{p \cdot n_i}(H(x_i))$  converge vers  $y$  comme  $f^{p \cdot n_i}(x_i)$  puisque la longueur des segments stables  $f^{p \cdot n_i}([x_i, H(x_i)]^s)$  tend vers 0. La fin de la démonstration est identique à celle du lemme 5.5.9.  $\square$

Pour conclure la démonstration du théorème, il reste à prolonger  $h_\delta$  sur  $\Delta(K) \setminus \delta(K)$  en un homéomorphisme conjuguant  $f$  et  $\tilde{f}$ . Rappelons que  $\Delta(K) \setminus \delta(K)$  possède un nombre fini de composantes connexes qui sont des demi-plans dont l'adhérence dans  $\Delta(K)$  est soit la réunion d'un point périodique et de deux de ses séparatrices libres (une stable une instable), soit l'union d'une chaîne infinie d'arches et des deux séparatrices libres (munies de leur point périodique) sur lesquelles s'accumule la chaîne.

Chaque composante  $C$  de  $\Delta(K) \setminus \delta(K)$  est périodique pour  $f$  ; soit  $k$  sa période. De plus  $h_\delta$  est défini sur le bord de  $C$  dans  $\Delta(K)$ , et l'image  $h_\delta(\partial C)$  est de même nature (soit deux séparatrices libres et leur point périodique, soit l'adhérence d'une chaîne infinie), donc est le bord dans  $\Delta(\tilde{K})$  d'une composante connexe  $\tilde{C}$  de  $\Delta(\tilde{K}) \setminus \delta(\tilde{K})$ . On a ainsi une bijection naturelle de l'ensemble des composantes connexes de  $\Delta(K) \setminus \delta(K)$  sur l'ensemble de celles de  $\Delta(\tilde{K}) \setminus \delta(\tilde{K})$  qui commute avec les permutations induites respectivement par  $f$  et  $\tilde{f}$ .

Pour étendre  $h_\delta$  à toute l'orbite de  $C$ , il suffit d'étendre  $h_\delta$  à  $C$  en un homéomorphisme de l'adhérence de  $C$  (dans  $\Delta(K)$ ) sur celle de  $\tilde{C}$ , qui conjugue les restrictions de  $f^k$  et  $\tilde{f}^k$  à  $C$  et  $\tilde{C}$  : il suffira alors de pousser par  $f$  et par  $\tilde{f}$ , l'homéomorphisme ainsi construit sur l'orbite de  $C$ . Nous pourrions donc désormais (quitte à remplacer  $f$  par  $f^k$ ) ne considérer que des composantes  $C$  fixées par  $f$ .

**Remarque.** — L'union de  $\delta(K)$  et, pour toute composante connexe  $C$  de  $\Delta(K) \setminus \delta(K)$ , d'un voisinage invariant par  $f$  de  $\partial C$  dans l'adhérence de  $C$ , forme un voisinage invariant par  $f$  de  $\delta(K)$  dans  $\Delta(K)$  : la proposition 3.2.2 certifie que ce voisinage contient un plongement de  $\Delta(K)$ , qui prolonge l'identité sur  $\delta(K)$ .

La remarque ci-dessus montre que pour conclure le théorème, il suffit de savoir étendre l'homéomorphisme de conjugaison  $h_\delta$  à un voisinage invariant de  $\partial C$  dans l'adhérence de  $C$ , pour toute composante  $C$  de  $\Delta(K) \setminus \delta(K)$  invariante par  $f$ .

Dans le cas où  $\partial C$  est l'union d'un point fixe  $p$  et de deux séparatrices libres issues de  $p$ , on considère un petit voisinage de  $p$  dans  $C \cup \partial C$  qui est un « rectangle » pour les feuilletages  $F^s$  et  $F^u$  : on étend alors  $h_\delta$  à ce voisinage grâce aux deux projections sur les séparatrices, le long des feuilletages. Il reste alors juste à saturer par  $f$  ce voisinage de  $p$ .

Il reste donc à considérer le cas où  $\partial C$  est l'adhérence d'une chaîne infinie d'arches  $\gamma$ . Soit  $x$  une extrémité d'une des arches composant  $\gamma$ . Notons  $\sigma$  la chaîne finie d'arches joignant  $x$  à  $f(x)$ . On considère des voisinages  $V_\sigma$  de  $\sigma$  dans  $C \cup \partial C$ , construits de la façon suivante : un voisinage  $V_\sigma$  est l'union, sur l'ensemble des arches  $\alpha$  qui composent  $\sigma$ , de « rectangles pour les feuilletages  $F^s$  et  $F^u$  » admettant  $\alpha$  comme côté (voir la figure 7).

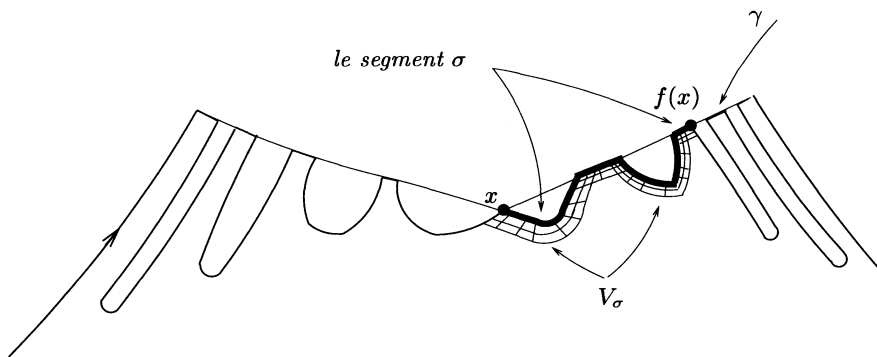


FIGURE 7. Un voisinage d'un intervalle fondamental  $\sigma$  d'une chaîne infinie

Tout voisinage de  $\sigma$  dans l'adhérence de  $C$  contient un voisinage de type  $V_\sigma$ . Notons  $\tilde{\sigma} = h_\delta(\sigma)$ . C'est un domaine fondamental de la chaîne infinie  $\tilde{\gamma} = h_\delta(\gamma)$ , et l'on peut de même définir les voisinages  $V_{\tilde{\sigma}}$ . On dira qu'un homéomorphisme  $h_\sigma$  d'un voisinage

$V_\sigma$  sur un voisinage  $V_{\tilde{\sigma}}$  est *compatible avec*  $h_\delta$  s'il coïncide avec  $h_\delta$  sur  $V_\sigma \cap \gamma$ , et s'il conjugue les restrictions à  $V_\sigma$  des feuilletages  $F^s$  et  $F^u$  aux restrictions à  $V_{\tilde{\sigma}}$  de  $\tilde{F}^s$  et  $\tilde{F}^u$ . Un argument analogue à la démonstration du lemme 5.5.15 montre l'existence d'un homéomorphisme  $h_\sigma$  compatible avec  $h_\delta$ , et on peut alors recopier la démonstration du lemme 5.5.16 pour vérifier que  $h_\delta$  et  $h_\sigma$  se prolongent de façon unique en un homéomorphisme de conjugaison de  $\delta(K) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V_\sigma)$  sur  $\delta(\tilde{K}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}^n(V_{\tilde{\sigma}})$ .

On conclut la démonstration du théorème par le lemme suivant :

**Lemme 5.5.17.** — *Notons  $\bar{\gamma}$  l'adhérence dans  $\Delta(K)$  de la chaîne infinie  $\gamma$ .*

*Alors  $\bar{\gamma} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V_\sigma)$  est un voisinage de  $\bar{\gamma}$  dans  $\bar{C}$  (adhérence dans  $\Delta(K)$  de la composante  $C$ ).*

*Démonstration.* — Soit  $p$  l'un des points fixes contenus dans  $\bar{\gamma}$ . Il suffit de vérifier que  $\bar{\gamma} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V_\sigma)$  contient un voisinage de  $p$  dans  $\bar{C}$ .  $\square$

## 5.6. Présentation finie d'un difféomorphisme de Smale, et bilan du problème de classification

Le but de ce paragraphe est de convaincre le lecteur que le théorème 5.2.2 joint aux propositions du paragraphe 3.4 donne une classification des difféomorphismes de Smale des surfaces compactes : à tout difféomorphisme de Smale on associe un nombre fini d'invariants qui caractérisent la classe de conjugaison de ce difféomorphisme. Ces invariants auront comme principal défaut de ne pas être définis de façon constructible.

Rappelons que les difféomorphismes d'Anosov du tore  $T^2$  sont classifiés par l'application linéaire qu'ils induisent sur l'homologie du tore. Le paragraphe 2.3 a montré comment associer à tout difféomorphisme de Smale une classe de conjugaison de difféomorphisme de Smale sans attracteur ni répulseur hyperbolique non réduit à une orbite périodique. Appelons difféomorphisme de Smale *à selles* un difféomorphisme de Smale dont tout attracteur ou répulseur est une orbite périodique. Nous allons classier ces difféomorphismes de Smale à selles.

Le théorème 5.2.2 affirme que la donnée d'une partition de Markov géométrisée d'un ensemble hyperbolique saturé  $K$  caractérise à conjugaison près la restriction du difféomorphisme au domaine  $\Delta(K)$ . Cependant, on peut associer une infinité de partitions de Markov géométrisées différentes à un triplet  $(f, K, \Delta(K))$ . Une façon immédiate d'en obtenir est de considérer l'intersection d'une partition de Markov avec un nombre fini de ses itérés. Malheureusement il n'est pas vrai que toutes les partitions de Markov associées à  $(f, K, \Delta(K))$  soient engendrées de cette façon par une partition de Markov « minimale ». Toutefois toute manière d'associer canoniquement un nombre fini de partitions de Markov géométrisées à la classe de conjugaison d'un triplet  $(f, K, \Delta(K))$  donne une classification combinatoire de ces triplets.

Soit  $M$  une partition de Markov associée à un ensemble hyperbolique  $K$ . Appelons *complexité* de  $M$  le nombre  $c(M) = \sum h_i = \sum v_i$ , nombre total des sous-rectangles horizontaux ou verticaux des rectangles de  $M$ .

Remarquons que l'image  $f(M)$  d'une partition de Markov est une partition de Markov de même complexité  $c(M)$  et de même type géométrique. C'est pourquoi nous parlerons d'orbites de partitions de Markov géométrisées.

**Proposition 5.6.1.** — *Soit  $(f, K, \Delta(K))$  un triplet formé d'un difféomorphisme de Smale à selles, d'un ensemble hyperbolique saturé  $K$  de  $f$  et de son domaine  $\Delta(K)$ . Les types géométriques de partitions de Markov de  $K$  de complexité minimale sont en nombre fini.*

*Démonstration.* — Les types géométriques abstraits (non nécessairement associés à une dynamique) de complexité donnée  $c$  sont en nombre fini.  $\square$

Cette proposition montre l'existence d'une classification (à conjugaison près) des triplets  $(f, K, \Delta(K))$ . Cependant nous n'avons pas d'algorithme permettant de construire les partitions de Markov de complexité minimale à partir d'une partition de Markov donnée. Pire, nous ne savons pas décider en général si une partition de Markov donnée est de complexité minimale. Nous espérons prochainement fournir une famille finie de partitions de Markov géométrisées canoniquement associée à un triplet  $(f, K, \Delta(k))$  construite à l'aide du dessin des courbes invariantes, et donner un algorithme permettant de les construire à partir d'une partition de Markov quelconque.

Soit  $f$  un difféomorphisme de Smale à selles, et  $K$  l'ensemble hyperbolique saturé associé au diagramme de Smale privé des sources et des puits. Le domaine  $\Delta(K)$  est une variété à bord orientée, ce bord est un nombre fini de copies de  $\mathbb{R}$ . La dynamique permute ces courbes. On a associé (voir paragraphe 3.4) un signe à chacune de ces courbes suivant que son orientation comme bord de  $\Delta(K)$  coïncide ou non avec son orientation dynamique. On note  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  les ensembles de ces courbes de signe respectivement positif ou négatif. Nous avons défini au paragraphe 3.4 une règle de recollement de  $\Delta(K)$  comme étant une bijection  $\Phi: \Gamma^+ \rightarrow \Gamma^-$  commutant avec la permutation de  $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$  induite par  $f$ . Nous avons vu qu'une règle de recollement permet de construire une surface compacte munie d'un difféomorphisme de Smale. Il n'y a qu'un nombre fini de règles. En choisissant bien la règle  $\Phi$  le difféomorphisme obtenu est conjugué à  $f$ .

Soit  $M$  l'ensemble des rectangles  $R_i$  d'une partition de Markov de  $K$ , les rectangles  $R_i$  étant munis d'une orientation des verticales et des horizontales. On note  $T$  le type géométrique de la partition. Nous allons compléter l'information combinatoire donnée par  $T$  de façon à déterminer la règle de recollement  $\Phi$ . La difficulté essentielle consiste à déterminer  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$ .



Rappelons d'abord que l'ensemble  $\Gamma$  est en bijection avec l'ensemble des composantes connexes de  $\Delta(K) \setminus \delta(K)$ . Le bord dans  $\Delta(K)$  de chacune de ces composantes connexes contient exactement une séparatrice libre instable. En examinant les deux cas possibles (composante dont le bord est l'union d'un point périodique coin et de deux de ses séparatrices libres, composante dont le bord contient une chaîne infinie d'arches) on constate qu'une composante connexe se trouve d'un seul côté de la séparatrice libre instable qui lui est associée. Chaque côté de séparatrice instable libre correspond à au plus une de ces composantes.

Chaque côté de séparatrice instable libre est déterminé sans ambiguïté par la donnée d'un rectangle  $R_i$  de  $M$  (celui où elle s'attache), de la direction  $h$  ou  $b$  (haut ou bas) dans laquelle elle s'éloigne du rectangle, et d'un côté  $d$  ou  $g$  (droite ou gauche) du rectangle. Nous avons ainsi une injection de  $\Gamma$  dans  $\{R_i\} \times \{h, b\} \times \{d, g\}$ . Notons  $C^+$  et  $C^-$  les images respectives par cette injection de  $\Gamma^+$  et de  $\Gamma^-$ . La règle de recollement  $\Phi$  induit une bijection  $\psi: C^+ \rightarrow C^-$ .

**Définition 5.6.2.** — *On appellera procédé de collage la donnée de parties disjointes  $C^+$  et  $C^-$  de  $\{R_i\} \times \{h, b\} \times \{g, d\}$  et d'une bijection  $\psi: C^+ \rightarrow C^-$ .*

Nous savions déjà que la donnée du difféomorphisme  $f$ , d'une partition de Markov  $M$  associée à son ensemble hyperbolique saturé maximal et d'un choix d'orientation des verticales et horizontales des rectangles détermine le type géométrique  $T$  de  $M$ ; nous venons de voir qu'elle détermine aussi le procédé de collage  $\psi: C^+ \rightarrow C^-$ .

**Définition 5.6.3.** — *Soit  $f$  un difféomorphisme de Smale à selles, préservant l'orientation, d'une surface compacte orientée, et soit  $K$  l'ensemble hyperbolique saturé maximal de  $f$ . On appellera présentation finie de  $f$  la donnée d'une partition de Markov  $M = \{R_i\}$  de  $K$  munie de son type géométrique  $T$  et du procédé de collage  $\psi: C^+ \rightarrow C^-$ .*

Le théorème 5.2.2 et la proposition 3.4.2 impliquent alors :

**Proposition 5.6.4.** — *Soient  $f$  et  $\tilde{f}$  deux difféomorphismes de Smale préservant l'orientation de surfaces compactes orientables  $S$  et  $\tilde{S}$ . Si  $f$  et  $\tilde{f}$  admettent une même présentation finie  $(M, T, \psi: C^+ \rightarrow C^-)$ , il existe un homéomorphisme de  $S$  sur  $\tilde{S}$  conjuguant  $f$  et  $\tilde{f}$ .*

Remarquons que, pour tout type géométrique  $T$  de partition de Markov, il existe un nombre fini de procédés de collage. Toute manière d'associer à un difféomorphisme de Smale  $f$  préservant l'orientation un nombre fini de types géométriques de son ensemble hyperbolique saturé maximal permet d'associer à  $f$  un nombre fini de présentations finies, ce qui donne une classification, à conjugaison topologique près, des difféomorphismes de Smale à selles.

Nous venons d'associer à un difféomorphisme de Smale des invariants combinatoires. Il est maintenant naturel de se demander quelles « présentations finies » abstraites correspondent à des difféomorphismes de Smale.

Pour cela il faut d'abord savoir quelles partitions de Markov géométrisées correspondent à des ensembles hyperboliques saturés :

**Exemple.** — On a vu que la partition de Markov géométrisée ayant un seul rectangle, deux sous-rectangles horizontaux, et décrite par :

$$\phi(H^1) = (V^1, +), \quad \phi(H^2) = (V^2, +)$$

ne correspond pas à un ensemble hyperbolique saturé d'un difféomorphisme d'une surface compacte (voir le corollaire 2.4.4).

**Définition 5.6.5.** — On dira qu'un type géométrique  $(n, \{h_i\}, \{v_i\}, \phi)$  de partition de Markov est réalisable s'il existe un difféomorphisme de Smale  $f$  d'une surface compacte, et  $K$  un ensemble hyperbolique saturé pour  $f$  admettant une partition de Markov dont le type géométrique soit  $(n, \{h_i\}, \{v_i\}, \phi)$ .

Le chapitre 7 définit le genre d'un type géométrique qui est un minorant du genre des surfaces sur lesquels le type est réalisable. Ce chapitre caractérise alors les types géométriques (sans double-bord) de genre fini. Le cas avec double-bord ne nous semble pas conceptuellement différent mais présente de nouvelles difficultés techniques.

Ensuite, il reste à comprendre quels procédés de collage sont réalisables. Le lecteur qui le désire pourra vérifier que la donnée d'un type géométrique  $T$  de partition de Markov réalisable détermine les parties  $C^+$  et  $C^-$  ainsi qu'une permutation de chacune de ces parties, induite par la combinatoire de  $T$ . Bien sûr, cette permutation coïncidera avec celle induite par tout difféomorphisme  $f$  réalisant  $T$ . Un procédé de collage  $\psi: C^+ \rightarrow C^-$  sera réalisable si  $\psi$  commute avec ces permutations.

Voici quelques indications succinctes :

1. Dans le cas sans double bord (ce qui est déterminé par  $T$  voir la proposition 7.2.2) le lecteur trouvera des indications utiles dans le chapitre 7 : dans ce chapitre, nous vérifions que le type géométrique  $T$  permet de déterminer les points périodiques bords ainsi que leurs séparatrices libres et non-libres, la permutation de ces séparatrices, les couplages entre les séparatrices non-libres, et enfin les points périodiques coins. On remarque alors que tout point de  $C = C^+ \cup C^-$  est associé soit à un coin, soit au côté d'une séparatrice instable libre correspondant à une séparatrice stable non-libre non-couplée.
2. Une fois la partie  $C \subset \{R_i\} \times \{b, h\} \times \{g, d\}$  déterminée, le signe de chaque élément de  $C$  est donné par la règle suivante : il est + pour  $(h, d)$  et  $(b, g)$  et – sinon.



## CHAPITRE 6

### LES DESSINS ET LA DYNAMIQUE

Le mathématicien qui présente à la craie sur le tableau un difféomorphisme de Smale du plan se contente souvent d'esquisser les variétés invariantes. Ce dessin représente-t-il vraiment une dynamique (à un choix d'itéré près) ? Le théorème 5.2.2 permet de répondre :

« *Oui, dans la mesure où le dessin détermine une partition de Markov géométrisée.* »

Plus formellement, notre but est de prouver :

**Théorème 6.0.6 (Dessin et dynamique).** — *Soient  $f$  et  $g$  deux difféomorphismes de Smale de surfaces compactes, et soient  $K$  et  $L$  des ensembles hyperboliques saturés de  $f$  et  $g$ , sans double-bord, et de domaines connexes. Supposons qu'il existe un homéomorphisme*

$$h: W^s(K) \cup W^u(K) \rightarrow W^s(L) \cup W^u(L),$$

*tel que pour tout point  $x$  de  $K$  les variétés stable et instable de  $h(x)$  soient les images par  $h$  des variétés stable et instable (respectivement) de  $x$ .*

*Alors, il existe deux entiers  $p$  et  $q$  strictement positifs, tels que la restriction de  $f^p$  au domaine  $\Delta(K)$  soit conjuguée à la restriction de  $g^q$  à  $\Delta(L)$ , par un homéomorphisme (qui coïncide avec  $h$  sur  $K$  sauf dans le cas où  $f$  est un difféomorphisme d'Anosov du tore  $T^2$ ).*

#### Remarques

1. Le théorème 6.0.6 est déjà connu dans le cas où  $f$  est un difféomorphisme d'Anosov : en effet, d'après [Fr1] et [Man] tout difféomorphisme d'Anosov d'une surface compacte est conjugué à un difféomorphisme d'Anosov linéaire du tore  $T^2$ . C'est alors un exercice d'algèbre de vérifier que deux difféomorphisme linéaires dont les feuilletages stables et instables sont conjugués possèdent des itérés conjugués. Cependant l'homéomorphisme conjuguant les feuilletages n'est

pas a priori une conjugaison : en effet, toute translation sur le tore préserve les feuilletages, mais l'image du point fixe 0 peut être un point non-périodique.

2. Si  $K$  contient une pièce basique  $\Lambda$  qui est un attracteur hyperbolique alors les hypothèses « sans double-bord » et « domaine connexe » impliquent que  $K$  est réduit à  $\Lambda$  et que  $\Delta(K)$  est le bassin d'attraction de  $\Lambda$  (voir le théorème 2.3.4). Le théorème dans ce cas peut s'obtenir de la façon suivante : le chapitre 8 (voir aussi [Ru]) montre que la dynamique restreinte au bassin d'attraction d'un attracteur hyperbolique est semi-conjugue à celle d'un homéomorphisme pseudo-Anosov, la semi-conjugaison consistant pour l'essentiel à écraser chaque s-arche en un point. On peut alors utiliser le résultat connu suivant : deux homéomorphismes pseudo-Anosov dont les feuilletages stable et instable sont conjugués par un homéomorphisme  $h$  possèdent des itérés qui sont conjugués par  $h$ .

Dans ce texte, nous nous consacrerons à la preuve du théorème pour le cas plus difficile des ensembles hyperboliques saturés ne contenant ni attracteur ni répulseur : le lecteur pourra en déduire une démonstration dans le cas d'un attracteur ou d'un répulseur hyperbolique.

La démonstration du théorème 6.0.6 se décompose en deux étapes. Dans un premier temps nous montrerons :

**Proposition 6.0.7.** — *Sous les hypothèses du théorème il existe  $p$  et  $q$  telle que  $h$  conjugue les restrictions de  $f^p$  et  $g^q$  à  $K$  et  $L$  respectivement.*

Nous concluons alors par la proposition suivante :

**Proposition 6.0.8.** — *Soient  $K$  et  $L$  deux ensembles saturés de  $f$  et  $g$  sans double-bord. On suppose qu'il existe un homéomorphisme*

$$h: W^s(K) \cup W^u(K) \rightarrow W^s(L) \cup W^u(L),$$

*conjuguant les restrictions de  $f$  et de  $g$  à  $K$  et  $L$  respectivement. Alors, les restrictions de  $f$  et  $g$  aux domaines de  $K$  et de  $L$  sont conjuguées, par un homéomorphisme coïncidant avec  $h$  sur  $K$ .*

Ensuite nous analyserons ce qui se passe lorsqu'on supprime les hypothèses «  $\Delta(K)$  connexe » et «  $K$  sans-double-bord ».

## 6.1. Points périodiques, pièces basiques, ordre de Smale

Soient  $(K, f)$  et  $(L, g)$  deux ensembles hyperboliques saturés, dont l'union des variétés invariantes est connexe, et sans double-bord. Soit  $h$  un homéomorphisme de l'union des variétés invariantes de  $K$  sur l'union de celles de  $L$ , l'image de la variété stable (resp. instable) d'un point étant la variété stable (resp. instable) du point image.

Notre but est de montrer que l'homéomorphisme  $h$  respecte la dynamique. Dans ce paragraphe nous allons voir les premiers lemmes élémentaires dans ce sens : l'homéomorphisme  $h$  respecte les points périodiques bords, les pièces basiques de ces points, et les pièces basiques extrémales pour l'ordre de Smale. Remarquons que le théorème 2.3.4 implique que si  $K$  possède un attracteur hyperbolique, alors  $K$  est réduit à cet attracteur ; les lemmes de ce paragraphe seront triviaux dans ce cas, et nous supposerons donc que  $K$  et  $L$  ne possèdent ni attracteur ni répulseur.

Rappelons que les points périodiques bords de  $K$  et de  $L$  sont en nombre fini, et qu'ils sont caractérisés par le fait de posséder au moins une séparatrice libre. On en déduit immédiatement :

**Lemme 6.1.1.** — *L'image par  $h$  d'un point périodique s-bord, u-bord, ou coin de  $K$  est un point respectivement s-bord, u-bord ou coin de  $L$*

Les points périodiques bord de  $K$  étant en nombre fini, il existe un itéré positif de  $f$  pour lequel tout point périodique bord est fixe. Désormais, quitte à remplacer  $f$  et  $g$  par un de leurs itérés positifs, nous supposerons que tout point périodique bord est fixe, ainsi que chacune des séparatrices qui en sont issues.

**Lemme 6.1.2.** — *Soit  $\Lambda$  une pièce basique d'un difféomorphisme de Smale  $f$ , et soit  $x \in \Lambda$  un point périodique. Soit  $I$  une séparatrice non-libre (comme séparatrice de  $\Lambda$  et pas seulement de  $K$ ) du point  $x$ , alors  $W^u(\Lambda)$  est contenue dans l'adhérence de  $I$ .*

*Démonstration.* — Rappelons que toute pièce basique  $\Lambda$  possède une orbite dense (par itération positive et par itération négative) dans  $\Lambda$ . Soit  $y_0$  un point de  $\Lambda$  sur la séparatrice non-libre  $I$ . Soit  $z$  un point d'orbite positive dense, suffisamment proche de  $y_0$  pour que sa variété stable locale coupe  $I$  en un point  $y$  (voir figure 1). Les ensembles  $\omega$ -limite de  $y$  et de  $z$  coïncident puisque les itérés positifs de  $[y, z]^s$  sont de longueur tendant vers 0. L'orbite de  $y$  (incluse dans  $I$ ) est donc comme celle de  $z$  dense dans  $\Lambda$ . La continuité des variétés invariantes prouve alors que  $I$  est dense dans  $W^u(\Lambda)$ .  $\square$

Le lemme 6.1.2 assure que, pour tout point fixe  $x \in \Lambda$ , sa variété stable et sa variété instable sont denses dans  $W^s(\Lambda)$  et  $W^u(\Lambda)$  respectivement. La structure de produit local au voisinage des points de  $\Lambda$  permet alors de montrer que  $\Lambda$  est l'adhérence de  $W^s(x) \cap W^u(x)$ . On en déduit donc :

**Lemme 6.1.3.** — *Soit  $x$  un point fixe de type bord de  $(K, f)$ , et soit  $\Lambda$  la pièce basique à laquelle il appartient. Alors  $h(\Lambda)$  est la pièce basique de  $(L, g)$  contenant  $h(x)$ .*

Soit  $A$  une pièce basique de  $(K, f)$ , maximale pour l'ordre de Smale. Ceci équivaut à ce que  $W^s(A) \cap K = A$ . On en déduit qu'un point périodique qui est u-bord en tant que point de  $A$  (c'est-à-dire qu'il possède une séparatrice stable disjointe de  $A$ ) est u-bord en tant que point de  $K$ . Comme  $A$  n'est pas (par hypothèse) un répulseur elle possède au moins un point périodique u-bord. Du lemme ci-dessus on déduit donc :

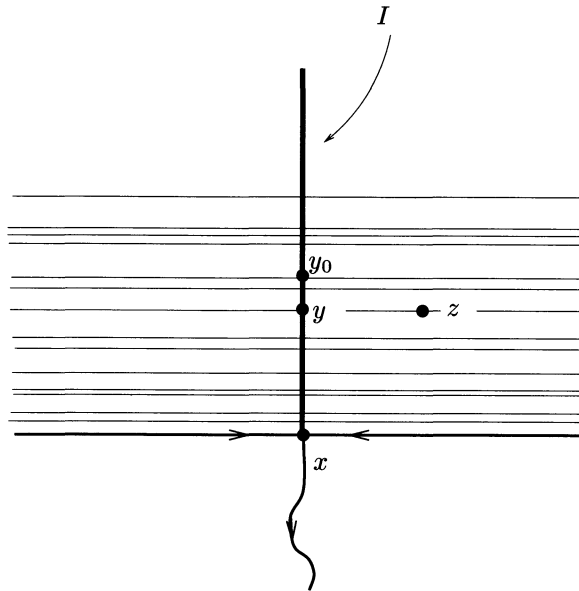


FIGURE 1

**Corollaire 6.1.4.** — *L'image par  $h$  d'une pièce basique de  $K$  maximale ou minimale pour  $\prec$  est une pièce basique de  $L$  (maximale ou minimale, respectivement).*

Du fait que  $K$  ne possède pas de double-bord on déduit qu'une pièce basique  $A$  de  $K$ , maximale pour  $\prec$ , n'est pas réduite à une orbite périodique (une telle orbite périodique serait double u-bord). D'autre part l'hypothèse «  $K$  sans répulseur » implique que  $A$  possède un point fixe  $x$  u-bord. Le point  $x$  possède au moins une séparatrice instable  $I_x$  non-libre. Le lemme 6.1.2 nous dit que  $I_x$  contient  $W^u(A)$  dans son adhérence.

Nous venons de montrer :

**Lemme 6.1.5.** — *Soit  $(K, f)$  un ensemble hyperbolique saturé sans double-bord, et tel que tout point périodique bord soit fixe.*

*Pour toute pièce basique  $A$  de  $K$  maximale pour  $\prec$ , il existe un point fixe u-bord  $x \in A$  de  $K$ , et une séparatrice instable  $I_x$  de  $x$  qui est dense dans  $W^u(A)$ .*

Rappelons que, pour toute pièce basique  $A$  de  $K$ , la variété instable  $W^u(A)$  contient dans son adhérence l'union des variétés instables des pièces basiques qui lui sont inférieures pour  $\prec$ . De la structure de produit local au voisinage des points de  $K$  on déduit alors :

**Lemme 6.1.6.** — Soient  $B \preceq A$  deux pièces basiques d'un ensemble hyperbolique saturé  $K$ . Soit  $I$  une séparatrice instable d'un point périodique de  $A$ , dense dans  $W^u(A)$ , et soit  $S$  une séparatrice stable d'un point fixe de  $B$  dense dans  $W^s(B)$ .

Alors,  $S \cap I$  contient dans son adhérence l'union des pièces basiques  $\Lambda$  vérifiant  $B \preceq \Lambda \preceq A$ .

**Corollaire 6.1.7.** — Soient  $A_1, \dots, A_i$  les pièces basiques maximales de  $K$ , et soient  $B_1, \dots, B_j$  les pièces basiques minimales. Pour tout  $k \leq i$ , on choisit une séparatrice instable  $I_k$  d'un point  $u$ -bord de  $A_k$ , telle que  $I_k$  soit dense dans  $W^u(A_i)$ . De même, pour tout  $l \leq j$  on choisit une séparatrice  $S_l$  d'un point fixe  $s$ -bord contenu dans  $B_l$ , telle que  $S_l$  soit dense dans  $W^s(B_l)$ .

Alors  $K$  est l'adhérence de l'union sur tous les couples  $(k, l)$  de l'intersection  $A_k \cap B_l$ .

Il reste une hypothèse sur  $K$  que nous n'avons pas encore utilisée : c'est la connexité de l'union de ses variétés invariantes. On en déduit

**Corollaire 6.1.8.** — Soient  $I_1, \dots, I_i$  et  $S_1, \dots, S_j$  les familles de séparatrices respectivement instables et stables associées aux pièces basiques respectivement maximales et minimales de  $K$ .

Alors, pour tout couple  $(k, l)$  il existe une suite  $k_1 = k, \dots, k_m$  et une suite  $l_1, \dots, l_m = l$  telles que pour tout  $s < m$ , les intersections  $I_{k_s} \cap S_{l_s}$  et  $S_{l_s} \cap I_{k_{s+1}}$  ne sont pas vides.

## 6.2. Conjugaison des dynamiques en restriction à $K$ et $L$

Nous allons à présent démontrer la proposition 6.0.7. Pour cela nous choisirons des itérés de  $f$  et  $g$  de façon à ce que  $h$  induise une conjugaison sur une orbite non-périodique d'une séparatrice d'un point bord. Nous propagerons alors à tout  $K$  cette conjugaison, le long des intersections des séparatrices des points périodiques bord. L'argument essentiel de cette preuve est la proposition suivante :

**Proposition 6.2.1.** — Soient  $I$  et  $S$  deux séparatrices (stable et instable) de deux points périodiques d'un ensemble hyperbolique saturé, et soit  $\phi$  un homéomorphisme de  $I \cup S$  possédant un point fixe, et induisant sur  $I$  et sur  $S$  un homéomorphisme préservant l'orientation. Alors,  $\phi$  coïncide avec l'identité sur  $I \cap S$ .

**Définition 6.2.2.** — Soit  $x$  un point d'intersection de deux séparatrices  $I$  et  $S$  issue de deux points périodiques  $y$  et  $z$ . Alors  $[x, y]^u \cap [x, z]^s$  est de cardinal fini. On appellera rang de  $x$  ce cardinal, et on le notera  $rg(x)$

On notera  $R_n(I, S)$  l'ensemble des points de  $I \cap S$  de rang inférieur ou égal à  $n$

(La notion de points de rang 1 est déjà utilisée par Birkhoff dans [Bi]).

Bien sûr,  $I \cap S$  est l'union croissante des  $R_n(I, S)$ .



**Lemme 6.2.3.** — *Pour tout  $n$ , l'ensemble des orbites de points de  $R_n(I, S)$  est fini.*

*Démonstration.* — Quitte à remplacer  $f$  par un itéré, on supposera que  $I$  et  $S$  sont invariantes par  $f$ . Soit  $x_0$  un point d'intersection de rang  $n$  de  $I$  et  $S$ . Toute orbite de points de  $I \cap S$  contient un point sur le segment  $[x_0, f(x_0)]^u \subset I$ . Remarquons que tout point de rang inférieur ou égal à  $n$ , contenu dans  $[x_0, f(x_0)]^u$  appartient à  $[z, x_0]^s$  (où  $z$  est le point périodique dont est issue  $S$ ). L'intersection de deux segments compacts de variétés invariantes est un ensemble fini, ce qui conclut.  $\square$

*Démonstration de la proposition 6.2.1.* — Quitte à remplacer  $f$  par un itéré positif, on suppose que  $f$  laisse invariante chacune des séparatrices  $I$  et  $S$ . Par hypothèse,  $\phi$  possède un point fixe. Nous supposons que ce point fixe  $x_0$  appartient à  $I$  (le raisonnement étant analogue dans le cas où ce point fixe appartient à  $S$ ). Nous allons montrer que pour tout  $n$ ,  $\phi$  coïncide avec l'identité sur  $R_n(I, S)$

Considérons  $\{x_0\} \cup R_n(I, S)$ . C'est un ensemble dont l'intersection avec tout segment compact de  $I$  est fini : on peut donc l'indexer par  $\mathbb{Z}$  de façon croissante pour l'orientation de  $I$  « fuyant le point fixe ». En outre,  $\phi$  laisse invariant cet ensemble (en effet, pour tout  $x \in I \cap S$  le rang de  $\phi(x)$  est le rang de  $x$ , et  $x_0$  est par hypothèse un point fixe de  $\phi$ ). On en déduit que  $\phi$  induit une bijection croissante de cet ensemble, ayant un point fixe, donc égale à l'identité (une bijection croissante de  $\mathbb{Z}$  fixant 0 est l'identité!). C'est ce que nous avons annoncé.  $\square$

*Démonstration de la proposition 6.0.7.* — Soient  $A_i$  les pièces basiques maximales de  $K$ ,  $B_j$  les pièces basiques minimales, et  $I_i$  et  $S_j$  des séparatrices instables et stables des  $A_i$  et  $B_j$ , denses dans  $W^u(A_i)$  et  $W^s(B_j)$ , respectivement. Soit  $p_1$  le point fixe s-bord dont  $I_1$  est issue, et soit  $W_1^s$  la séparatrice stable non-libre de  $p_1$ .

D'après le lemme 6.1.4,  $h(A_1)$  est une pièce basique maximale de  $L$ ,  $h(p_1)$  est un point périodique bord de  $h(A_1)$ , et  $h(I_1)$  et  $h(W_1^s)$  sont deux séparatrices de  $h(p_1)$  fixées par  $g$ .

On considère l'ensemble  $R_1 = R_1(h(I_1), h(W_1^s))$  des points d'intersection de rang 1 de ces deux séparatrices. Cet ensemble est infini mais rencontre tout segment compact de  $h(I_1)$  en un nombre fini de points. On peut donc l'indexer par  $\mathbb{Z}$  de façon croissante pour l'orientation de  $h(I_1)$  « fuyant le point périodique ». On vérifie que  $g$  et  $h \circ f \circ h^{-1}$  induisent deux bijections croissantes de cet ensemble : ces bijections correspondent donc chacune à une translation sur  $\mathbb{Z}$ , et on se convainc facilement que cette translation est d'un nombre positif. Il existe donc  $p$  et  $q$  tels que  $h \circ f^p \circ h^{-1}$  et  $g^q$  coïncident sur  $R_1$ . On considère alors  $\phi = g^{-q} \circ h \circ f^p \circ h^{-1}$ . D'après la proposition 6.2.1,  $\phi$  coïncide avec l'identité sur l'ensemble non vide  $h(I_1) \cap h(W_1^s)$ .

La proposition 6.2.1 montre alors que, pour tout  $j$  tel que  $S_j \cap I_1 \neq \emptyset$ ,  $\phi$  coïncide avec l'identité sur  $h(S_j \cap I_1)$ . On montre alors facilement, grâce au corollaire 6.1.8, que  $\phi$  vaut l'identité sur  $h(S_j \cap I_i)$  pour tout  $(i, j)$ , et donc sur  $h(K) = L$ , par densité.  $\square$

### 6.3. Image d'une partition de Markov et extension de la conjugaison au domaine

Soient  $(K, f)$  et  $(L, g)$  deux ensembles hyperboliques saturés sans double-bords. Soit  $h$  un homéomorphisme de l'union des variétés invariantes de  $K$  sur l'union de celles de  $L$ , qui induit une conjugaison des restrictions de  $f$  et  $g$  à  $K$  et  $L$ . Nous allons montrer que l'image par  $h$  d'une partition de Markov de  $K$  est une partition de Markov de  $L$  et que ces deux partitions de Markov ont même type géométrique : le théorème 5.2.2 permettra alors de montrer que les restrictions de  $f$  et  $g$  aux domaines de  $K$  et  $L$  sont conjuguées.

La première étape consiste à voir que les classes d'équivalence d'arches se lisent sur le dessin.

Remarquons d'abord que, comme  $K$  est sans double-bord, les  $s$ -arches ayant une extrémité sur une variété instable partent toujours du même côté (le côté isolé).

**Lemme 6.3.1.** — *Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux segments disjoints de  $W^u(L)$  tels que toute  $s$ -arche ayant son origine sur l'un de ces segments a son extrémité sur l'autre segment. Supposons de plus que l'holonomie (application de  $\lambda_1$  dans  $\lambda_2$  qui à l'origine d'une  $s$ -arche associe son extrémité) soit monotone. Alors, toutes les  $s$ -arches ayant une extrémité sur l'un des  $\lambda_i$  sont équivalentes.*

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que deux arches d'extrémités assez voisines sont équivalentes (puisqu'elles partent du même côté des segments  $\lambda_i$ ).

Il reste à montrer que deux  $s$ -arches  $s$ -bords issues de deux points successifs de  $\lambda_1 \cap K$  sont équivalentes. Remarquons d'abord que leurs extrémités sont des points successifs de  $\lambda_2 \cap K$  puisque l'holonomie est monotone. Le quadrilatère formé des deux  $s$ -arches et des  $u$ -arches contenues dans  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  joignant les extrémités de ces deux  $s$ -arches est un polygone d'arches puisque l'absence de double-bord force une arche à partir du côté libre d'une courbe invariante. Le lemme 2.6.6 assure que ce polygone borde un disque qui est le rectangle réalisant l'équivalence entre nos deux  $s$ -arches.  $\square$

**Corollaire 6.3.2.** — *Les images par  $h$  de deux  $s$ -arches équivalentes de  $K$  sont deux  $s$ -arches équivalentes de  $L$ .*

**Lemme 6.3.3.** — *Soit  $R$  un rectangle pour  $K$ , dont les côtés sont des segments isolés. Alors l'image par  $h$  du bord  $\partial(R)$  est le bord d'un rectangle  $S$  de  $L$ . De plus,*

$$h((W^s(K) \cup W^u(K)) \cap R) = (W^s(L) \cup W^u(L)) \cap S.$$

*Démonstration.* — Considérons le bord stable  $\partial^s$  du rectangle  $R$ , et notons  $\delta^s$  son image par  $h$ . On oriente les horizontales de  $R$ , et chaque composante de  $\partial^s$  hérite de cette orientation. On munit les segments composant  $\delta^s$  de l'orientation induite. On

appellera *rail* de  $\delta^s$  tout segment de variété instable de  $L$  d'intérieur disjoint de  $\delta^s$  et ayant ses deux extrémités sur  $\delta^s$ .

Soit  $\sigma \subset W^u(K)$  un segment vertical de  $R$ . Le segment  $h(\sigma)$  est un rail de  $\delta^s$  qui part du côté non-isolé de chacune des composantes de  $\delta^s$ . Remarquons que tout point  $x$  de  $L \cap \delta^s$  est l'extrémité d'un et un seul segment de type  $h(\sigma)$ ; ce segment est un rail, ce qui montre qu'il existe un unique rail partant de  $x$  du côté non-isolé de  $\delta^s$ , et que ce rail arrive sur l'autre composante de  $\delta^s$  également du côté non-isolé. Remarquons de plus que l'holonomie obtenue en suivant ces rails (l'application qui à l'origine associe l'extrémité) est croissante pour l'orientation.

Soit  $\sigma_0$  l'un des côtés instables de  $S$ . Pour montrer le lemme, il nous suffit de montrer que tout rail  $h(\sigma)$  est équivalent à  $h(\sigma_0)$ . Remarquons d'abord que la continuité des variétés instables et le fait que la restriction de  $h$  à chaque segment de  $\partial^s$  soit un homéomorphisme assure que tout rail ayant une extrémité assez proche d'un rail donné est équivalent à celui-ci. Les classes d'équivalence de rails induisent donc une partition de  $L \cap \delta^s$  par des ouverts disjoints qui sont donc en nombre fini par compacité de  $L \cap \delta^s$ . Ces ouverts sont donc des intersections avec  $L$  de segments compacts disjoints.

Soit  $\lambda_2$  le dernier (pour l'orientation de  $\delta^s$ ) rail équivalent à  $h(\sigma_0)$ . Nous allons montrer par l'absurde que  $\lambda_2$  est l'autre segment (noté  $h(\sigma_1)$ ) composant  $\delta^u$ , ce qui conclura.

Si  $\lambda_2$  n'est pas  $h(\sigma_1)$ , il existe un rail  $\lambda_3$  dont les extrémités suivent celles de  $\lambda_2$  (pour l'orientation de  $\delta^s$ ) (voir figure 2). Il nous reste juste à montrer que  $\lambda_2$  et

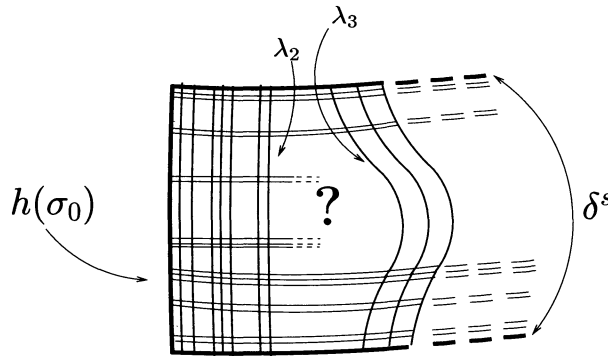


FIGURE 2. Le rail suivant  $\lambda_2$

$\lambda_3$  sont équivalents. Notons  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  les images réciproques par  $h$  de  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ . Ce sont deux segments verticaux successifs de  $R$  : en particulier, toute s-arche ayant son origine sur  $\sigma_2$  (resp.  $\sigma_3$ ) a son extrémité sur  $\sigma_3$  (resp.  $\sigma_2$ ), et l'holonomie est croissante pour un choix d'orientation des verticales de  $R$ . On en déduit que toute s-arche ayant son origine sur l'un des  $\lambda_i$  a son extrémité sur l'autre. De plus les arches partant

des extrémités des  $\lambda_i$  sont contenues dans  $\delta^s$ . Le lemme 6.3.1 montre que toutes les  $s$ -arches ayant une extrémité sur l'un des  $\lambda_i$  sont équivalentes. On déduit que  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont les côtés instables d'un rectangle dont le bord stable est contenu dans  $\delta^s$ .

Ce rectangle réalise une équivalence entre les rails  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ , et c'est précisément ce que nous voulions.  $\square$

Nous pouvons à présent supprimer l'hypothèse imposant que les côtés de  $R$  soient des segments isolés, puisque tout rectangle est inclus dans un rectangle vérifiant les hypothèses du lemme 6.3.3 :

**Corollaire 6.3.4.** — *Si  $R$  est un rectangle de  $K$ , alors  $h(\partial R)$  borde un rectangle  $S$  de  $L$ .*

Soit  $\mathcal{R} = \{R_i\}$  une partition de Markov de  $K$  par rectangles disjoints. Le lemme 6.3.3 assure que pour tout  $i$ ,  $h(\partial R_i)$  borde un rectangle  $S_i$  de  $L$ . Alors :

**Corollaire 6.3.5.** — *Les rectangles  $S_i$  définis ci-dessus recouvrent  $L$  et sont deux-à-deux disjoints.*

*Démonstration.* — C'est une conséquence directe de ce que  $h(K \cap R_i) = L \cap S_i$  (lemme 6.3.3).  $\square$

Pour montrer le théorème 6.0.6 ou la proposition 6.0.8 il faut à présent montrer que la famille de rectangles  $\{S_i\}$  est une partition de Markov de  $(L, g)$  de même type géométrique que  $\{R_i\}$ .

*Fin de la démonstration de la proposition 6.0.8.* — Notons  $\{H_i^j, V_k^l, \phi\}$  le type géométrique de la partition de Markov  $\{R_i\}$ .

Pour tout  $i, j, k, l$  notons  $\overline{H}_i^j, \overline{V}_j^k$  les rectangles de  $L$  bordés par l'image par  $h$  du bord de  $H_i^j$  et de  $V_k^l$ , respectivement.

Pour tout  $i$ ,  $\overline{H}_i^j$  est un sous rectangle horizontal de  $S_i$  : en effet, le bord instable de  $\overline{H}_i^j$  est contenu dans celui de  $S_i$ , et le bord stable de  $\overline{H}_i^j$  est l'union de deux rails stables de  $S_i$  (car image par  $h$  de rails du rectangle  $R_i$ ).

De plus ces rectangles sont deux-à-deux disjoints, et leur numérotation est compatible avec l'orientation du bord instable de  $S_i$  obtenue comme image par  $h$  de l'orientation des verticales de  $R_i$  : il suffit de vérifier cette compatibilité sur les côtés instables, et elle se déduit alors de la numérotation des  $H_i^j$ . Enfin, la famille des  $\overline{H}_i^j$  recouvre  $L \cap S_i$ .

De même, pour tout  $k$ , les  $\overline{V}_k^l$  forment une famille de sous-rectangles verticaux de  $S_k$ , deux-à-deux disjoints, recouvrant  $L \cap S_k$  et leur numérotation est compatible avec l'orientation du bord stable de  $S_k$  héritée par  $h$  de celle des horizontales de  $R_k$ .

Remarquons que pour connaître l'image d'un rectangle, il suffit de connaître l'image de ses quatre sommets. Les sommets  $a, b, c, d$  de  $H_i^j$  sont des points de  $K$  dont les images  $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$  sont les sommets de  $\overline{H}_i^j$  et appartiennent à  $L$ .

Soit  $V_k^l = f(H_i^j)$ , ses sommets sont  $f(a), f(b), f(c), f(d)$ . Par hypothèse,  $h$  est une conjugaison des restrictions de  $f$  et  $g$  à  $K$  et  $L$ , donc  $g(\bar{a}), g(\bar{b}), g(\bar{c}), g(\bar{d})$  sont les sommets du rectangle  $\bar{V}_k^l$ . Donc  $g(\bar{H}_i^j) = \bar{V}_k^l$ . On en déduit que  $\bar{H}_i^j$  est une composante connexe de  $S_i \cap g^{-1}(S_k)$ , dont l'image  $\bar{V}_k^l$  est une composante connexe de  $S_k \cap g(S_i)$ .

De plus, toute composante connexe de  $S_k \cap g(S_i)$  contient un point de  $L$  : en effet le bord d'une telle composante connexe est formé de segments stables et instables, dont les extrémités sont dans  $L$ . Comme les  $\bar{V}_k^l$  recouvrent  $L$ , cette composante connexe est l'un de ces rectangles verticaux. Ceci prouve que la famille  $\{S_i\}$  est une partition de Markov de  $(L, g)$ . Pour montrer que son type géométrique est le même que celui de  $\{R_i\}$ , il reste à vérifier que les restrictions de  $f$  et  $g$  à  $H_i^j$  et  $\bar{H}_i^j$  respectent ou inversent simultanément les orientations des verticales : comme aucun des rectangles (et sous-rectangles) n'est dégénéré (hypothèse sans double-bord), placer les sommets des images d'un rectangle  $\bar{H}_i^j$  détermine l'action de  $g$  sur l'orientation de ses verticales.  $\square$

#### 6.4. Contre-exemples, généralisations, conjectures

Dans ce paragraphe nous verrons pourquoi les hypothèses «  $\Delta(K)$  connexe » et «  $K$  sans double-bord » sont nécessaires pour le théorème 6.0.6 : sans ces hypothèses la dynamique restreinte au domaine de  $K$  peut posséder des régions où la « vitesse » de la dynamique peut être choisie de façon indépendante. Puis, pour analyser ce phénomène, nous définirons un *graphe de Smale enrichi* noté  $\tilde{\Gamma}$ , et nous esquisserons une généralisation du théorème 6.0.6 avec une hypothèse plus faible qui se lit sur  $\tilde{\Gamma}$ . Enfin nous proposerons quelques conjectures et problèmes qui comparent les dynamiques de deux ensembles hyperboliques dont les variétés invariantes sont homéomorphes, sans autres hypothèses.

Supposons d'abord que le domaine de  $K$  ne soit pas connexe : le difféomorphisme  $f$  induit une permutation de l'ensemble  $\{C_1, \dots, C_k\}$  des composantes connexes de  $\Delta(K)$ . Il existe  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^q$  laisse invariante chacune des composantes  $C_i$ . Pour tout  $i$  choisissons un entier  $\alpha_i \in \mathbb{Z}^*$  et considérons sur chaque  $C_i$  la restriction de  $f^{\alpha_i \cdot q}$ . La proposition 3.4.2 permet de construire une surface compacte  $\tilde{S}$  munie d'un difféomorphisme de Smale  $\tilde{f}$  possédant un ensemble hyperbolique saturé  $\tilde{K}$  dont le domaine est homéomorphe à  $\Delta(K)$  (on notera donc  $\tilde{C}_i$  les composantes connexes de  $\Delta(\tilde{K})$ ) et tel que la restriction de  $\tilde{f}$  à  $\tilde{C}_i$  soit conjuguée à la restriction de  $f^{\alpha_i \cdot q}$  à  $C_i$  (voir la figure 3).

Supposons à présent qu'il existe  $i \neq j$  tels que les restrictions de  $f^q$  à  $C_i$  et à  $C_j$  contiennent chacune une pièce basique non réduite à une orbite périodique. Choisissons alors  $\alpha_i$  différent de  $\alpha_j$ . On vérifie que  $f$  et  $\tilde{f}$  ne possèdent pas d'itérés  $f^n$  et  $\tilde{f}^n$  dont les restrictions à  $\Delta(K)$  et  $\Delta(\tilde{K})$  soient conjuguées.

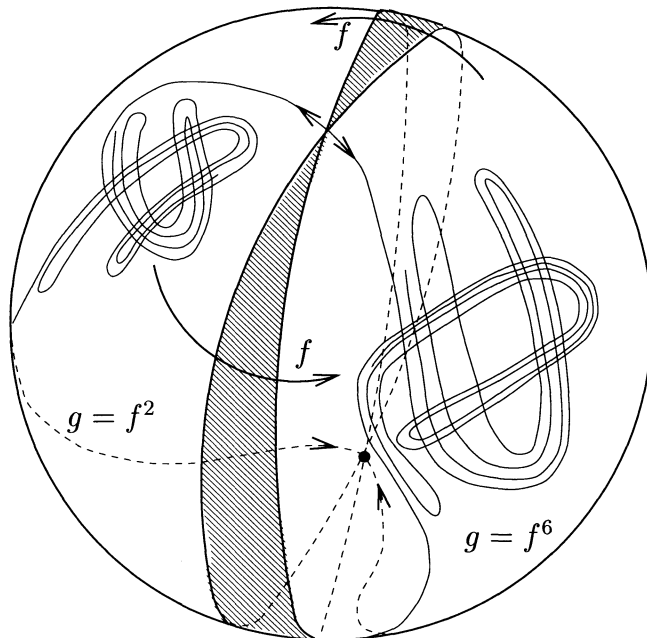


FIGURE 3. Quand  $\Delta(K)$  n'est pas connexe, les « vitesses » de la dynamique sur chaque composante peuvent être ajustées indépendamment

Voyons à présent un exemple de problème causé par la présence de double-bords. La figure 4 ci-dessous montre un ensemble hyperbolique saturé de domaine connexe, où le dessin ne détermine pas  $f$  à une puissance près.

Pour rendre compte de ces deux phénomènes, nous allons enrichir le diagramme de Smale de la façon suivante (une idée analogue a déjà été utilisée dans [La] et [F1]) :

Rappelons que le diagramme de Smale  $\Gamma$  d'un ensemble hyperbolique saturé  $K$  avait pour sommets l'ensemble des pièces basiques de  $K$ , et utilisait l'ordre  $\prec$  pour définir les arêtes (voir la définition 1.1.13 et la remarque qui suit). Rappelons encore que toute pièce basique  $\Lambda_i$  est l'union d'un nombre fini de compacts disjoints  $\Lambda_i^j$ , permutés par  $f$  et transitifs pour toute puissance de  $f$  les laissant invariants (voir le théorème 1.1.12). Les points de notre diagramme enrichi  $\tilde{\Gamma}$  sont

1. d'une part les  $\Lambda_i^j$ ,
2. d'autre part les quatre séparatrices des  $\Lambda_i^j$  qui sont des points périodiques selles.

On décrit une relation d'ordre (encore notée  $\prec$ ) qui généralise à  $\tilde{\Gamma}$  l'ordre de Smale. Voici la description précise de cet ordre :

1.  $\Lambda_i^j \prec \Lambda_k^l \iff W^s(\Lambda_i^j) \cap W^u(\Lambda_k^l) \neq \emptyset$

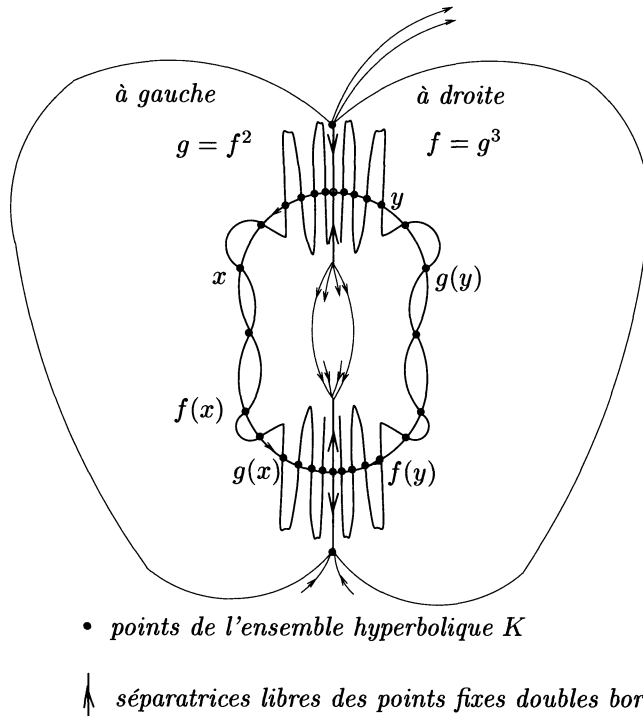


FIGURE 4. Un domaine découpé par les séparatrices libres des points fixes double-bords ; les dynamiques à droite et à gauche sont de vitesses indépendantes

2. Les séparatrices instables d'un point périodique selle sont inférieures pour  $\prec$  au point périodique selle, lui-même inférieur à ses séparatrices stables
3. une séparatrice instable est supérieure à toute séparatrice stable qu'elle coupe.
4. une séparatrice instable (resp. stable) est supérieure (resp. inférieure) à tout  $\Lambda_i^j$  dont elle coupe la variété stable (resp. instable).

On vérifie que  $\prec$  ainsi défini sur  $\tilde{\Gamma}$  est bien une relation d'ordre. On définit alors l'ensemble des arêtes orientées de  $\tilde{\Gamma}$  de la façon classique suivante :

Une arête joint deux sommets distincts  $p_1, p_2$  de  $\tilde{\Gamma}$  si  $p_2 \prec p_1$  et s'il n'existe aucun sommet  $p_3$  distinct de  $p_1$  et  $p_2$ , tel que  $p_2 \prec p_3 \prec p_1$ .

**Remarque.** — L'ensemble  $\tilde{\Gamma}$  se projette naturellement sur l'ensemble des points du graphe de Smale  $\Gamma$  de  $K$  : à chaque  $\Lambda_i^j$  on associe la pièce basique  $\Lambda_i$  correspondante ; à chaque selle et à ses séparatrices on associe l'orbite périodique de la selle. L'ordre  $\prec$  défini sur  $\tilde{\Gamma}$  passe au quotient par la projection en l'ordre  $\prec$  sur  $\Gamma$ .

Appelons graphe de Smale modifié et notons  $\Gamma^*$  le graphe  $\tilde{\Gamma}$  privé des points périodiques double-bord et de leurs séparatrices libres.

**Proposition 6.4.1.** — *La proposition 6.0.7 reste vraie si l'on remplace l'hypothèse « $K$  sans double-bord et  $\Delta(K)$  connexe» par l'hypothèse suivante*

*«Le graphe de Smale modifié  $\Gamma^*$  est connexe.»*

*Idée de la démonstration.* — Elle est identique à celle de la proposition 6.0.7 en remarquant que les corollaires 6.1.7 et 6.1.8 sont encore vrais avec la nouvelle hypothèse.  $\square$

**Conjecture 1.** — *Le théorème 6.0.6 reste vrai si l'on remplace l'hypothèse « $K$  sans double-bord et  $\Delta(K)$  connexe» par l'hypothèse «le graphe de Smale modifié  $\Gamma^*$  est connexe».*

Si  $\Gamma^*$  n'est pas connexe, alors la proposition 6.0.7 reste vraie sur chacune des composantes connexes. Voyons brièvement comment donner un sens précis à cette affirmation.

Soient  $\Gamma_i$  les composantes connexes de  $\Gamma^*$ . Notons  $\tilde{K}_i$  l'ensemble des points de  $K$  qui sont points d'intersection de variétés stables et instables correspondant à des sommets de  $\Gamma_i$ . L'ensemble  $\tilde{K}_i$  n'est pas *a priori* compact. Cependant, l'union de  $\tilde{K}_i$  et de l'ensemble des points périodiques double-bord possédant au moins une séparatrice qui est un point de  $\Gamma_i$  forme un compact que nous noterons  $K_i$ . Remarquons que  $f$  induit une permutation de l'ensemble des  $\Gamma_i$  et donc aussi des  $K_i$ . Soit  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $f^p$  laisse fixe chacun des  $K_i$ . On vérifie alors que  $K_i$  est un compact hyperbolique de  $f^p$ , *a priori* non-saturé. De plus  $K$  est l'union des  $K_i$ , et l'intersection  $K_i \cap K_j, i \neq j$  est réduite à un ensemble fini de points périodiques double-bord. On peut alors montrer :

**Proposition 6.4.2.** — *Soient  $(K, f)$  et  $(L, g)$  deux ensembles hyperboliques saturés de difféomorphismes de Smale de surfaces compactes, et soit  $h$  un homéomorphisme de l'union des variétés invariantes de  $K$  sur celles de  $L$ , préservant variétés stables et variétés instables.*

*Soit  $K_i$  un compact associé à l'une des composantes connexes de  $\Gamma^*(K)$ . Alors  $h(K_i) = L_i$  est un compact associé à l'une des composantes connexes de  $\Gamma^*(L)$ . De plus, il existe  $p_i, q_i \in \mathbb{N}^*$  tels que  $f^{p_i}$  et  $g^{q_i}$  laissent invariants respectivement  $K_i$  et  $L_i$  et tels que  $h$  induise une conjugaison des restrictions de  $f^{p_i}$  et  $g^{q_i}$  à  $K_i$  et  $L_i$  respectivement.*

Nous pensons de plus que l'on peut découper le domaine  $\Delta(K)$  suivant l'union des variétés stables des points double u-bord et des variétés instables des points double s-bord et que le théorème 6.0.6 est alors vrai sur chacune des composantes connexes du domaine ainsi découpé. Voici, sans démonstration, quelques énoncés qui nous semblent vrais, et qui donnent la généralisation complète du théorème 6.0.6.



Pour chaque point périodique  $x \in K$  de type double s-bord, les deux séparatrices instables de  $x$  sont libres, et l'on en déduit que la variété instable de  $x$  est un fermé de  $\Delta(K)$ . L'union des variétés instables des points périodiques double s-bord et des variétés stables des points périodiques double u-bord est alors un fermé de  $\Delta(K)$ , invariant par  $f$ . Notons le  $DB(K)$ . Découpons  $\Delta(K)$  suivant cet ensemble de courbes.

**Conjecture 2**

1. À chaque composante connexe  $\Gamma_i$  de  $\Gamma^*$  correspond une composante connexe de  $\Delta(K) \setminus DB(K)$ ; notons  $C_i$  l'adhérence dans  $\Delta(K)$  de cette composante connexe. Alors  $K_i$  est égal à  $K \cap C_i$ .
2. Soient  $(K, f)$  et  $(L, g)$  deux ensembles hyperboliques saturés de difféomorphismes de Smale de surfaces compactes, et soit  $h$  un homéomorphisme de l'union des variétés invariantes de  $K$  sur l'union de celles de  $L$ , préservant les variétés stables et instables. Alors pour tout  $i$  il existe  $p_i, q_i > 0$  et un homéomorphisme  $h_i$  de  $C_i$  sur  $\overline{C}_i$  conjuguant les restrictions de  $f^{p_i}$  et  $g^{q_i}$  à  $C_i$  et  $\overline{C}_i$ .

On peut encore chercher à affaiblir les hypothèses du théorème 6.0.6, en ne supposant pas que l'homéomorphisme  $h$  préserve les variétés stables ou instables. Cette hypothèse est bien sûr nécessaire dans le cas où  $(K, f)$  est un difféomorphisme d'Anosov du tore  $T^2$  ou plus généralement un attracteur hyperbolique : dans ce cas l'union des variétés invariantes de  $K$  est homéomorphe à une surface compacte privée d'un ensemble fini, et la seule donnée de cette surface ne suffit pas à caractériser la dynamique à itération près.

Considérons donc  $(K, f)$ , un ensemble hyperbolique saturé sans attracteur ni répulseur, et supposons  $K$  sans double-bord. La structure de produit local nous dit que chacune des laminations stable ou instable est localement de la forme « ensemble de Cantor  $\times \mathbb{R}$  », et qu'elles se coupent transversalement, formant ainsi un grillage. On peut montrer le lemme suivant :

**Lemme 6.4.3.** — Soit  $C_1, C_2, C_3, C_4$  quatre compacts de  $\mathbb{R}$  homéomorphes à des ensembles de Cantor. Soit  $h$  un homéomorphisme du grillage plan  $C_1 \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times C_2$  sur le grillage plan  $C_3 \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times C_4$ . Alors  $h$  vérifie l'une des deux affirmations suivantes :

1. L'image de toute droite verticale est une droite verticale et l'image de toute droite horizontale est une droite horizontale.
2. L'image de toute droite verticale est une droite horizontale et l'image de toute droite horizontale est une droite verticale.

Nous pensons qu'une version locale de ce lemme permet de montrer l'affirmation suivante :

**Conjecture 3.** — Soient  $(K, f)$  et  $(L, g)$  deux compacts hyperboliques saturés de difféomorphismes de Smale, sans double-bord et de domaines connexes, et sans attracteurs ni répulseurs. Soit  $h$  un homéomorphisme de l'union des variétés invariantes de  $K$

sur celles de  $L$ . Alors il existe un homéomorphisme de  $\Delta(K)$  sur  $\Delta(L)$ , conjuguant  $f$  et  $g$  et coïncidant avec  $h$  sur  $K$ .

Les ébauches de raisonnement qui nous permettent de croire en la conjecture ci-dessus sont mis en défaut par la présence de double-bord. Cependant, même dans le cadre de difféomorphisme de type Morse Smale nous n'avons pas trouvé d'autre type de contre-exemple que ceux présentés au début de ce paragraphe.

**Problème 6.4.4.** — *Que reste-t-il de la conjecture ci-dessus en présence de double-bord ?*

Rappelons enfin que pour les difféomorphismes d'Anosov du tore  $T^2$ , deux difféomorphismes possédant des feuilletages stables qui sont conjugués (mais pas *a priori* leurs feuilletages instables) possèdent des itérés qui sont conjugués. Ceci amène à se poser la question suivante

**Problème 6.4.5.** — *Soient  $(K, f)$  et  $(K', f')$  deux ensembles hyperboliques saturés tels qu'il existe un homéomorphisme  $h: W^s(K) \rightarrow W^s(K')$ . Cette seule information permet-elle de comparer les dynamiques de  $f$  et  $f'$  ?*



## CHAPITRE 7

### GENRE D'UNE PARTITION DE MARKOV GÉOMÉTRIQUE ET RÉALISABILITÉ (PAR C. BONATTI ET E. JEANDENANS)

Nous avons introduit, au paragraphe 5.6, la notion de type géométrique réalisable, nous en rappelons ici la définition :

**Définition 7.0.6.** — *Nous dirons que le type géométrique  $T = (n, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi)$  est réalisable s'il existe un difféomorphisme de Smale  $f$  d'une surface compacte et un ensemble hyperbolique saturé de  $f$  admettant une partition de Markov  $M$  dont le type géométrique est précisément  $T$ .*

Nous allons établir, dans ce chapitre, une condition nécessaire à la réalisabilité, du moins sous l'hypothèse que  $T$  ne possède pas de double-bord (cf. la définition 7.2.1 et la relation avec les double-bords d'un ensemble hyperbolique saturé au début du paragraphe 7.2).

Pour cela, nous définissons, au paragraphe 7.3, le genre  $g(T)$  du type géométrique  $T$  sans double-bord : aux paragraphes 7.1, 7.2 et 7.3, nous construisons, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , une surface à bord  $\mathcal{R}_m$  obtenue par recollement des  $m^{\text{ièmes}}$ -itérés des rectangles par une dynamique symbolisée par  $T$ . Cette construction est indépendante de la «réalisation» de  $T$  que l'on aura choisie. En particulier, si  $T$  est réalisable par un difféomorphisme de Smale  $f$  et un ensemble hyperbolique saturé  $K$  de  $f$  qui admet  $\{R_i\}$  comme partition de Markov, la surface  $\mathcal{R}_m$  est homéomorphe à l'union des  $j^{\text{ièmes}}$ -itérés des rectangles  $R_i$ , pour  $0 \leq j \leq m$ . La suite des  $\mathcal{R}_m$  est croissante pour l'inclusion ; la suite  $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , où  $g_m$  est le genre de  $\mathcal{R}_m$ , est donc croissante. Le genre de  $T$  sera la borne supérieure de  $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ .

Une condition nécessaire à la réalisabilité est que le genre de  $T$  soit fini. Nous pensons savoir montrer que cette condition est également suffisante, ceci sera l'objet d'un travail ultérieur.

La suite du chapitre consiste alors à caractériser les types géométriques de genre fini. Pour ce faire, nous mettons en évidence au paragraphe 7.4 trois types de positions

géométriques d'itérés des rectangles  $R_i$  qui forcent le genre de  $T$  à être infini : nous les appelons obstructions.

Nous montrons ensuite le théorème 7.4.8 qui donne l'équivalence entre la finitude de  $g(T)$  et le fait que la surface  $\mathcal{R}_{6n}$  (où  $n$  est le nombre de rectangles de  $T$ ) ne présente aucune des trois obstructions. La preuve de ce théorème occupe les paragraphes 7.5, 7.6, 7.7 (où l'on démontre la finitude du genre en l'absence d'obstruction) et 7.8 (qui donne la preuve de la réciproque).

Enfin, au paragraphe 7.9, nous montrons que si  $T$  ne possède qu'un unique rectangle, le genre  $g(T)$  est soit nul, soit infini. Nous donnons également, en conjecture, un majorant du genre d'un type géométrique sans double-bord et de genre fini.

### 7.1. HV-surfaces à bord et à coins

Dans ce paragraphe, nous allons construire des surfaces à bord et coins et munies de deux feuilletages transverses. Ces surfaces seront obtenues par recollement de rectangles le long de sous-rectangles. Afin de vérifier que le résultat est bien une surface, nous allons d'abord introduire la notion de HV-surface et montrer un lemme de construction par itération de ces surfaces.

**Définition 7.1.1.** — *Une HV-surface à bord et à coins est une surface topologique compacte  $S$  à bord, non nécessairement connexe, avec un atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}$  où les  $\phi_i$  sont des homéomorphismes tels que  $\phi_i(U_i)$  soit inclus soit dans*

$$Q = \{x \geq 0\} \cap \{y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$

*soit dans*

$$\tilde{Q} = \mathbb{R}^2 \setminus \text{Int}(Q) = \{x \leq 0\} \cup \{y \leq 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$

*où les changements de cartes  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$  sont des éléments du groupe produit  $\text{Homeéo}(\mathbb{R}) \times \text{Homeéo}(\mathbb{R})$ .*

**Définition 7.1.2.** — *Soit  $m$  un point d'une HV-surface à bord et à coins. On dira que  $m$  est :*

1. *un point intérieur s'il existe une carte en  $m$   $(U_i, \phi_i)$  telle que  $\phi_i(m)$  appartienne à l'intérieur de  $Q$  ou à l'intérieur de  $\tilde{Q}$ ,*
2. *un bord vertical s'il existe une carte en  $m$   $(U_i, \phi_i)$  telle que  $\phi_i(m)$  ait pour coordonnées  $(0, y)$  avec  $y \geq 0$  ( $\phi_i(m)$  appartient au bord vertical  $\{0\} \times [0, +\infty[$  de  $Q$  ou de  $\tilde{Q}$ ),*
3. *un bord horizontal s'il existe une carte en  $m$   $(U_i, \phi_i)$  telle que  $\phi_i(m)$  ait pour coordonnées  $(x, 0)$  avec  $x \geq 0$  ( $\phi_i(m)$  appartient au bord horizontal  $[0, +\infty[ \times \{0\}$  de  $Q$  ou de  $\tilde{Q}$ ),*

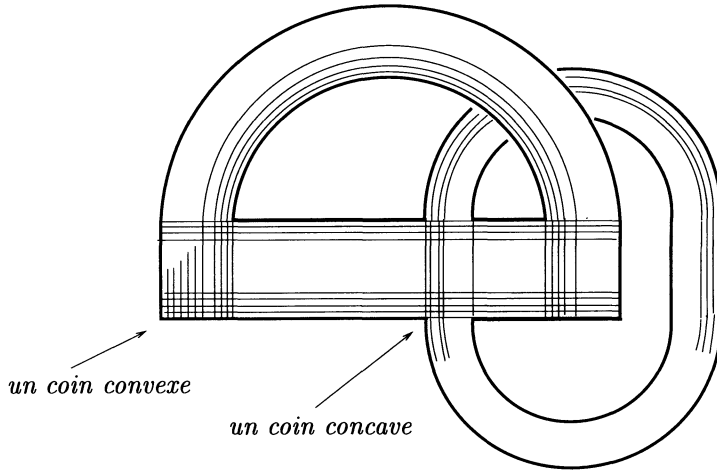


FIGURE 1. Une HV-surface à bord et à coins

4. un coin convexe s'il existe une carte  $(U_i, \phi_i)$  centrée en  $m$  telle que  $\phi_i(U_i)$  soit inclus dans  $Q$  et  $\phi_i(m) = (0, 0)$ ,
5. un coin concave s'il existe une carte  $(U_i, \phi_i)$  centrée en  $m$  telle que  $\phi_i(U_i)$  soit inclus dans  $\tilde{Q}$  et  $\phi_i(m) = (0, 0)$ .

**Remarque.** — L'ensemble des coins (concaves et convexes) de  $S$  est l'intersection du bord vertical et du bord horizontal de  $S$ .

**Remarque-notation.** — Toute HV-surface à bord et à coins  $S$  est munie de deux feuilletages transverses, que nous appellerons *feuilletage horizontal* et *feuilletage vertical*. Le premier est l'image réciproque par les  $\phi_i$  du feuilletage par les horizontales de  $Q$  ou  $\tilde{Q}$ , le second de leur feuilletage par les verticales. Nous qualifierons d'*horizontal* (resp. *vertical*) un segment de la surface  $S$  inclus dans son feuilletage horizontal (resp. vertical). Nous noterons  $\partial^h S$  le bord horizontal de  $S$  et  $\partial^v S$  son bord vertical. Le bord de  $S$  est l'union d'un nombre fini de segments horizontaux et de segments verticaux.

### Définition 7.1.3

1. Nous appellerons *sous-rectangle* tout disque topologique  $D$  tel qu'il existe  $(U, \phi)$  compatible avec l'atlas de la HV-surface  $S$  avec  $\phi(D) = [0, 1]^2$ .
2. Un *sous-rectangle horizontal* d'une HV-surface  $S$  est un sous-rectangle de  $S$  dont le bord vertical est inclus dans le bord vertical de  $S$ . Un sous-rectangle  $V$  de  $S$  est *vertical* si son bord horizontal  $\partial^h V$  est inclus dans  $\partial^h S$ .

**Lemme 7.1.4.** — Soit  $\Lambda$  une HV-surface à bord et à coins. Soit  $\Gamma$  une HV-surface à bord et à coins, qui est une union disjointe de rectangles.

Soient  $H_1, H_2, \dots, H_\mu$   $\mu$  sous-rectangles horizontaux de  $\Gamma$  deux-à-deux disjoints.

Soient  $V_1, V_2, \dots, V_\mu$   $\mu$  sous-rectangles verticaux de  $\Lambda$  deux-à-deux disjoints tels que, pour tout  $i$ , le bord horizontal de  $V_i$  soit disjoint des coins concaves de  $\Lambda$ .

Soit  $\Phi$  un homéomorphisme de l'union des  $H_i$  dans l'union des  $V_i$  tel que, pour tout  $i$ ,  $\Phi|_{H_i}$  soit un élément du groupe  $\text{Homeo}(\mathbb{R}) \times \text{Homeo}(\mathbb{R})$ .

Alors l'espace topologique  $S$  obtenu en recollant  $\Lambda$  et  $\Gamma$  par l'homéomorphisme  $\Phi$  est une HV-surface à bord et à coins.

*Démonstration.* — Remarquons que  $S$  est séparée car on a recollé deux ensembles compacts par un homéomorphisme le long de sous-ensembles compacts donc la relation d'équivalence par laquelle on quotiente est fermée (cf. [Go] p.25).

Dans  $S$ , la carte en un point  $m \in S$  n'appartenant pas à l'union des  $H_i$  (qui est égale à l'union des  $V_i$ ) est la même que la carte en  $m$  pour  $\Lambda$  ou  $\Gamma$ .

Soit  $m$  un point de  $S$  correspondant à un point  $m_\Lambda$  du sous-rectangle vertical  $V_i$  et à un point  $m_\Gamma = \Phi^{-1}(m_S)$  du sous-rectangle horizontal  $H_j$ .

Supposons que  $m_\Gamma$  soit un point de  $H_j \setminus \partial^h(H_j)$  ou de  $\partial^h\Gamma$ ; autrement dit, que  $m_\Gamma$  possède un voisinage  $U_\Gamma$  inclus dans  $H_j$ . Alors  $\Phi(U_\Gamma)$  est l'intersection avec  $V_i$  d'un voisinage  $U_\Lambda$  de  $m_\Lambda$  dans  $\Lambda$ . L'injection de  $U_\Lambda$  dans  $S$  définit alors un voisinage de  $m$  dans  $S$ , et donc une carte en ce point.

De même, si  $m_\Lambda \in V_i$  possède un voisinage dans  $\Lambda$  qui est inclus dans  $V_i$ , alors une carte en  $m_\Gamma$  donne une carte de  $S$  en  $m$ . En utilisant le fait que  $\partial^h(V_i)$  est inclus dans  $\partial^h(\Lambda)$ , on vérifie que si  $m_\Lambda$  ne possède pas cette propriété, alors il appartient à  $\partial^v(V_i)$ . De plus, soit  $m_\Lambda$  n'appartient pas à  $\partial^v(\Lambda)$ , soit  $m_\Lambda$  est un coin concave de  $\Lambda$ .

Les seuls points  $m$  de  $S$  au voisinage desquels nous n'avons pas encore défini de carte sont ceux tels que  $m_\Gamma$  appartient à un côté horizontal de  $H_j$  inclus dans  $\Gamma \setminus \partial^h(\Gamma)$  et où  $m_\Lambda$  est un point de  $\partial^v(V_i)$  qui soit est un coin concave de  $\Lambda$  soit n'appartient pas à  $\partial^v(\Lambda)$ .

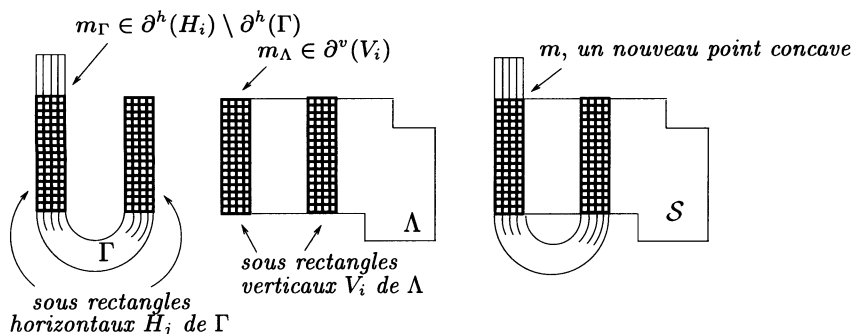
Comme  $m_\Gamma$  appartient à  $\partial^h(H_j)$ , le point  $m_\Lambda$  appartient à  $\partial^h(V_i)$  (donc est l'un des coins de  $V_i$ ) qui est disjoint des coins concaves de  $\Lambda$  par hypothèse. Il faut donc que  $m_\Lambda$  soit un point de  $\partial^v(V_i) \setminus \partial^v(\Lambda)$  : on se convainc facilement qu'en recollant un voisinage de  $m_\Gamma$  dans  $\Gamma$  à un voisinage de  $m_\Lambda$  dans  $\Lambda$  on obtient un voisinage de  $m$  qui en fait un coin concave de  $S$  (cf. la figure 2).

L'application  $\Phi$  de recollement est définie par morceaux par des éléments du groupe  $\text{Homeo}(\mathbb{R}) \times \text{Homeo}(\mathbb{R})$  donc les nouveaux changements de carte sont encore dans ce groupe.  $\square$

**Remarques.** — Soient  $\Lambda$  et  $\Gamma$  vérifiant les hypothèses du lemme 7.1.4 et soit

$$S = \left( \Lambda \amalg \Gamma \right) / \Phi$$

la HV-surface obtenue par recollement.

FIGURE 2. Les coins de  $S$ 

1. Le bord horizontal de  $S$  est l'union du bord horizontal de  $\Lambda$  privé de l'intérieur des côtés horizontaux des sous-rectangles  $V_i$  et du bord horizontal de  $\Gamma$  :

$$\partial^h S = ((\partial^h \Lambda) \setminus (\cup_i \partial^h V_i)) \cup \partial^h \Gamma.$$

2. Les coins concaves de  $S$  sont de deux sortes.

D'une part, les coins concaves de  $\Lambda$  sont encore des coins concaves de  $S$ . En effet, soit  $c$  un coin concave de  $\Lambda$ . Si  $c$  appartient à un sous-rectangle  $V_i$ , il est dans son bord vertical par hypothèse. Il existe alors un segment  $\sigma(c)$  dans le bord horizontal de  $\Lambda$ , issu de  $c$  et disjoint des côtés horizontaux de tous les sous-rectangles  $V_j$  (sur lesquels on fait les recollements). Par conséquent,  $\sigma(c)$  est encore un segment dans le bord horizontal de  $S$ , ce qui assure que  $c$  est un coin concave de  $S$ .

D'autre part,  $m$  est un nouveau coin concave de  $S$  si et seulement si le point  $m_\Gamma$  est dans le bord vertical de  $H_i$  sans être un coin de  $\Gamma$  et le point  $m_\Lambda$  est dans le bord horizontal de  $V_j = \Phi(H_i)$  sans être un coin (convexe) de  $\Lambda$ . Autrement dit,  $m_\Lambda$  est un coin d'un sous-rectangle vertical sans être un coin convexe de  $\Lambda$  et  $m_\Gamma$  est un coin d'un sous-rectangle horizontal de  $\Gamma$  sans être un coin de  $\Gamma$  (cf. la figure 2).

3. La projection canonique de  $\Lambda$  et celle de  $\Gamma$  dans  $S$  sont des plongements.

Soient  $\Lambda$  et  $\Gamma$  deux HV-surfaces vérifiant les hypothèses du lemme 7.1.4. Nous allons à présent analyser plus précisément le cas particulier suivant où l'on impose à  $\partial^h \Gamma$  d'être inclus dans l'union des côtés horizontaux des sous-rectangles horizontaux  $H_i$ . Cette nouvelle hypothèse équivaut au fait que, dans chaque rectangle  $R$  composante connexe de  $\Gamma$ , les sous-rectangles horizontaux extrémaux ont un côté horizontal qui coïncide avec un côté horizontal de  $R$ . Pour illustrer les deux lemmes que voici, cf. la figure 3.



**Lemme 7.1.5** Soient  $\Lambda$  et  $\Gamma$  deux HV-surfaces vérifiant les hypothèses du lemme 7.1.4. Supposons que  $\partial^h \Gamma$  soit inclus dans  $\partial^h(\cup_i H_i)$ . Appelons  $S$  la HV-surface à bord et à coins obtenue en quotientant l'union disjointe de  $\Lambda$  et de  $\Gamma$  par l'homéomorphisme  $\Phi$ .

Alors le bord horizontal de  $S$  est inclus dans le bord horizontal de  $\Lambda$ . Plus précisément,  $\partial^h S$  est égal à  $\partial^h \Lambda$  privé des côtés horizontaux de sous-rectangles verticaux  $V_i$  qui, dans  $S$ , ne sont pas identifiés par  $\Phi$  avec des segments de  $\partial^h \Gamma$ .

De plus, le bord horizontal de  $\Gamma$  est disjoint des coins concaves de la surface  $S$ .

*Démonstration.* — Montrons d'abord que le bord horizontal de  $\Gamma$  est dans  $(\cup_i \partial^h V_i) \subset \partial^h S$ . Chaque composante connexe de  $\partial^h \Gamma$  coïncide par hypothèse avec un côté horizontal de sous-rectangle horizontal. Ce côté s'identifie par  $\Phi$  dans  $S$  à un côté horizontal de sous-rectangle vertical de  $\Lambda$ , i.e. à un segment inclus dans  $\partial^h \Lambda$ . Comme on a :

$$\partial^h S = ((\partial^h \Lambda) \setminus (\cup_i \partial^h V_i)) \cup \partial^h \Gamma,$$

et qu'on vient de montrer que  $\partial^h \Gamma$  est dans  $\partial^h \Lambda$ , on a le premier point du lemme.

Le bord horizontal des sous-rectangles verticaux  $V_i$  est, par hypothèse, disjoint des coins concaves de  $\Lambda$ . Le bord horizontal de  $\Gamma$  est donc disjoint dans  $S$  des coins concaves de  $S$  qui proviennent des coins concaves de  $\Lambda$ . La remarque faite après le lemme 7.1.4 nous assure de plus que les nouveaux coins concaves de  $S$  proviennent d'un point  $m_\Gamma$  de  $\Gamma$  appartenant à  $\partial \Gamma \setminus \partial^h \Gamma$  et d'un point  $m_\Lambda$  de  $\Lambda$  qui est un coin de sous-rectangle vertical mais pas un coin de  $\Lambda$ . Le point  $m_\Lambda$  est donc une extrémité d'un côté horizontal de sous-rectangle vertical. Comme les côtés horizontaux des sous-rectangles verticaux  $V_i$  sont deux-à-deux disjoints dans le bord de  $\Lambda$  et que  $\partial^h \Gamma$  s'envoie par  $\Phi$  dans certains de ces segments,  $\partial^h \Gamma$  est également disjoint des nouveaux coins concaves de  $S$ .  $\square$

**Lemme 7.1.6.** — Sous les hypothèses du lemme 7.1.5, l'adhérence de toute composante connexe de  $S \setminus \Lambda$  est un rectangle dont les côtés horizontaux sont inclus dans le bord horizontal des sous-rectangles verticaux de  $\Lambda \subset S$ . De plus, ces rectangles sont deux à deux disjoints.

*Démonstration.* — On a vu, dans les remarques précédant le lemme 7.1.5, que  $\Lambda$  et  $\Gamma$  se plongeaient dans  $S$ . L'adhérence de  $S \setminus \Lambda$  est donc l'adhérence de  $\Gamma$  privée de son intersection avec  $\Lambda$ . Le résultat découle du fait que l'on recolle ces deux surfaces  $\Gamma$  et  $\Lambda$  le long de sous-rectangles deux-à-deux disjoints.  $\square$

## 7.2. Type géométrique sans double-bord et réalisation

Comme annoncé dans l'introduction de ce chapitre, nous voulons construire des surfaces compactes qui réaliseront  $T$ . La première étape de cette construction est de choisir des rectangles non dégénérés (i.e. non réduits à un segment voire à un point), munis d'une dynamique que symbolise l'application  $\Phi$  de  $T$ . Nous appellerons

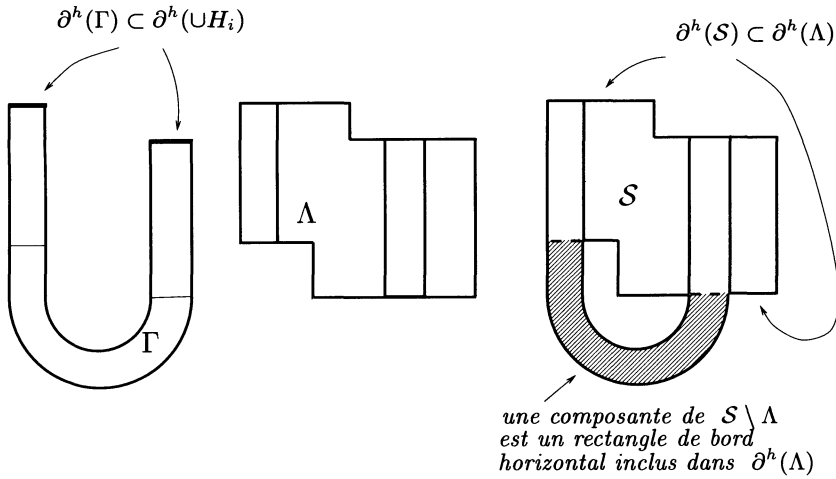


FIGURE 3.  $\partial^h \Gamma \subset \partial^h S$  et  $\text{Adh}(S \setminus \Lambda)$  est une union disjointe de rectangles

concrétisation une telle famille de rectangles munis de leur dynamique. Supposons que le type géométrique  $T$  d'une partition de Markov d'un ensemble hyperbolique saturé possède des double-bords. Toute concrétisation de  $T$  est soit non-hyperbolique, soit avec des rectangles dégénérés. Nous ne pouvons donc pas espérer construire une surface en recollant les rectangles d'une telle concrétisation et leurs itérés. Dans ce paragraphe, nous allons donc introduire et caractériser les types géométriques de partition de Markov sans double-bord. Nous vérifierons que cette notion correspond bien, si le type géométrique est réalisable, à la notion de double-bord introduite pour un ensemble hyperbolique saturé. Après avoir donné une caractérisation matricielle simple des types géométriques sans double-bord, nous montrerons qu'ils admettent une concrétisation hyperbolique, que nous appellerons réalisation.

Rappelons que  $T$  est la donnée de :

1. un entier non-nul  $n \in \mathbb{N}$ ,
2. pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , deux entiers non-nuls  $h_i, v_i \in \mathbb{N}$ , de façon que l'on ait :

$$\sum_i h_i = \sum_i v_i,$$

3. pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , deux ensembles finis  $\{h_i^j, \text{ pour } j \in \{1, \dots, h_i\}\}$  et  $\{v_i^k, \text{ pour } k \in \{1, \dots, v_i\}\}$ ,
4. et une application  $\Phi$  de l'ensemble  $\{h_i^j, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, h_i\}\}$  dans l'ensemble  $\{v_k^l, k \in \{1, \dots, n\}, l \in \{1, \dots, v_k\}\} \times \{-, +\}$ , induisant une bijection par « oubli des signes ».

**Définition 7.2.1.** — Nous dirons que  $T$  est un type géométrique avec double-bord(s) stable(s) s'il existe un cycle d'indices compris entre 1 et  $n$  :

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \cdots \rightarrow i_k \rightarrow i_{k+1} = i_1$$

tel que pour tout  $t \in \{1, 2, \dots, k\}$ , on ait l'entier  $h_{i_t}$  égal à 1 (donc le sous-ensemble  $\{h_{i_t}^j, j = 1, 2, \dots, h_{i_t}\}$  est réduit au singleton  $\{h_{i_t}^1\}$ ) et  $\Phi(h_{i_t}^1)$  égal à  $(v_{i_{t+1}}^l, \varepsilon)$  pour un certain  $l$  compris entre 1 et  $v_{i_{t+1}}$  et  $\varepsilon$  indifféremment égal à  $\pm 1$ .

On définit de même un type géométrique avec double-bord(s) instable(s) s'il existe un cycle d'indices tels que l'entier  $v_j$  correspondant soit égal à 1 et tels que l'antécédent par  $\Phi$ , quand on oublie le signe de  $v_j^1$ , soit un  $h_{j+1}^l$  pour  $l$  entre 1 et  $h_{j+1}$ .

Cette notion est compatible avec la notion de double-bord introduite précédemment, comme l'explique la proposition suivante :

**Proposition 7.2.2.** — Soit  $K$  un ensemble hyperbolique saturé de partition de Markov  $M$  de type géométrique  $T$ . On a équivalence entre :

1.  $K$  possède des double-bords stables (resp. instables),
2.  $T$  possède des double-bords stables (resp. instables).

*Démonstration.* — Supposons que  $K$  possède un double-bord stable. Il a alors un point périodique  $p$  double-bord stable. Les deux séparatrices instables issues de  $p$  sont libres donc sortent du rectangle de la partition de Markov contenant  $p$  sans rencontrer  $K$ . Par conséquent, le rectangle de la partition contenant  $p$  est réduit à un segment stable contenant  $p$ . Le sous-rectangle vertical image de ce segment est également un segment donc le rectangle de la partition de Markov qui le contient est lui aussi réduit à un segment. On construit ainsi facilement un cycle de rectangles réduits à des segments stables correspondant à l'orbite de  $p$ , ce qui prouve que le type géométrique  $T$  admet des double-bords stables.

Réciproquement, supposons que  $T$  possède des double-bords stables. Le choix du cycle  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  montre que l'image par  $f^k$  d'un segment vertical de  $R_{i_1}$  est exactement un segment vertical de  $R_{i_1}$ . L'application  $f^k$  envoie donc les côtés horizontaux de  $R_i$  dans eux-mêmes par une stricte contraction. Chacun des côtés horizontaux de  $R_i$  possède par conséquent un point périodique  $p_i$ . Le segment vertical instable passant par le point périodique  $p_i$  est donc fixe par  $f^k$ , et donc réduit au point  $p_i$ . On en déduit que le rectangle de la partition de Markov de  $K$  contenant  $p_i$  est réduit à un segment stable contenant  $p_i$ , ce qui équivaut à dire que  $p_i$  est un double-bord stable de  $K$ .  $\square$

Voyons à présent une autre caractérisation simple des types géométriques sans double-bord.

Étant donné un type géométrique  $T = (n, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi)$ , on définit sa *matrice d'incidence (avec multiplicité)*  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}(n, \mathbb{N})$  de la façon suivante : le coefficient  $a_{i,j}$  est le nombre de  $h_i^k$  dont l'image par  $\Phi$  (après oubli du signe) est de la forme  $v_j^l$ .

Dans le cas où  $T$  est le type géométrique d'une partition de Markov  $\{R_i\}$ , le coefficient  $a_{i,j}$  est le nombre de composantes connexes de  $f(R_i) \cap R_j$ .

**Remarque.** — Avec les notations ci-dessus, le terme  $h_i$  de  $T$  est la somme des coefficients de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A$ , c'est-à-dire  $h_i = \sum_j a_{i,j}$ . De même,  $v_j$  est la somme  $\sum_i a_{i,j}$  des coefficients de la  $j^{\text{ème}}$  colonne.

Nous allons voir que l'existence de double-bord se lit sur la somme des coefficients des lignes et des colonnes des itérés de la matrice  $A$ . Voici d'abord un lemme qui nous permettra de contrôler ces sommes.

**Lemme 7.2.3.** — Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice à coefficients dans  $\mathbb{N}$ , telle que la somme des coefficients d'une ligne ou d'une colonne quelconque est non-nulle. Pour tout  $k \geq 1$  et tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , notons  $\lambda_i^k$  (resp.  $\gamma_i^k$ ) la somme des coefficients de la  $i^{\text{ème}}$  ligne (resp. colonne) de la matrice  $A^k$ .

Alors, pour tout  $i$ , les suites  $(\lambda_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\gamma_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont croissantes.

*Démonstration.* — En effet, on vérifie que  $\lambda_i^{k+1} = \sum_l a_{i,l}^k \cdot \lambda_l$  et on conclut en remarquant que tous les  $\lambda_l$  sont plus grands que 1 et que  $\lambda_i^k = \sum_l a_{i,l}^k$ . On a les mêmes formules en remplaçant  $\lambda$  par  $\gamma$ .  $\square$

**Lemme 7.2.4.** — Le type géométrique  $T$  est sans double-bord si et seulement si, pour tout  $m > n$  et pour tout  $i$ , la somme  $\lambda_i^m$  (resp.  $\gamma_i^m$ ) des coefficients de la  $i^{\text{ème}}$  ligne (resp. colonne) de  $A^m$  est supérieure ou égale à 2.

*Démonstration.* — Il est facile de montrer par récurrence sur  $k$  que, pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. il existe une suite finie d'indices  $i = i_1, i_2, \dots, i_k = j$  telle que, pour tout  $t \in \{1, 2, \dots, k\}$ , l'entier  $h_{i_t}$  soit égal à 1 et que  $\Phi(h_{i_t}^1)$  soit égal (en oubliant le signe) à  $v_{i_{t+1}}^l$  pour un certain  $l$  compris entre 1 et  $v_{i_{t+1}}$  ;
2. le coefficient  $a_{i,j}^k$  de la matrice  $A^k$  est égal à 1 et pour tout  $l \neq j$  le coefficient  $a_{i,l}^k$  est nul.

On en déduit que l'existence d'un double-bord stable est équivalente à l'existence d'un entier  $k > 0$  et d'un indice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tels que la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A^k$  ait tous ses coefficients nuls excepté  $a_{i,i}^k$ . Ceci implique que pour tout  $m > 0$ , la somme des coefficients de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de l'itéré  $A^m$  sera égal à 1.

Réciproquement, soit  $k > n$  et  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tels que  $\lambda_i^k = 1$  ; alors d'après le lemme 7.2.3, pour tout  $l \leq k$ , la somme  $\lambda_i^l$  est égale à 1. Notons  $j$  tel que  $a_{i,j}^k$  soit l'unique coefficient non-nul de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A^k$ . Comme la suite finie  $i = i_1, \dots, i_k = j$  décrite dans la première propriété ci-dessus est de longueur supérieure à  $n$ , on en déduit l'existence d'un cycle définissant un double-bord stable pour  $T$  (cf. la définition 7.2.1).

On montre de même que l'existence d'un double-bord stable pour  $T$  est équivalente à ce que  $A^{n+1}$  possède une colonne dont la somme des coefficients est égale à 1.  $\square$

Maintenant que nous avons caractérisé les types géométriques sans double-bord, nous allons pouvoir donner la première étape de la construction des surfaces à bord  $\mathcal{R}_m$  annoncées en introduction de ce chapitre.

**Définition 7.2.5.** — Une concrétisation  $(\{R_i, i = 1, 2, \dots, n\}, \phi)$  du type géométrique  $T$  sans double-bord sera la donnée de :

1.  $n$  rectangles orientés  $R_i$  munis de leur feuilletage par les verticales, de leur feuilletage par les horizontales et d'une orientation des horizontales, les verticales étant orientées de telle sorte qu'un couple formé par une horizontale et une verticale munisse  $R_i$  de l'orientation directe,
2. pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$  et tout  $j$  entre 1 et  $h_i$ , un sous-rectangle horizontal  $H_i^j$  de  $R_i$ , les sous-rectangles  $H_i^j$  étant deux-à-deux disjoints,  $H_i^1$  (resp.  $H_i^{h_i}$ ) ayant son côté horizontal inférieur (resp. supérieur) coïncidant avec le côté horizontal inférieur (resp. supérieur) du rectangle  $R_i$  et la numérotation des  $H_i^j$  étant compatible avec l'orientation des verticales de  $R_i$ ,
3. pour tout  $i$  de 1 à  $n$  et tout  $j$  de 1 à  $v_i$ , un sous-rectangle vertical  $V_i^j$  de  $R_i$ , ces sous-rectangles étant deux-à-deux disjoints,  $V_i^1$  (resp.  $V_i^{v_i}$ ) ayant son côté vertical gauche (resp. droit) égal au côté vertical gauche (resp. droit) de  $R_i$  et la numérotation des  $V_i^j$  étant compatible avec l'orientation des horizontales de  $R_i$ ,
4. un homéomorphisme  $\phi$  de l'union  $\bigcup_{i,j} H_i^j$  dans l'union  $\bigcup_{k,l} V_k^l$  vérifiant la propriété suivante : pour tous  $i, j, k, l$  tels que  $\Phi(h_i^j) = (v_k^l, \varepsilon)$  avec  $\varepsilon = \pm 1$ , la restriction de  $\phi$  à  $H_i^j$  est un homéomorphisme dans  $V_k^l$  préservant l'orientation, conjuguant les feuilletages horizontaux et les feuilletages verticaux des sous-rectangles et préservant ou inversant l'orientation des verticales suivant que  $\varepsilon$  vaut 1 ou  $-1$  respectivement.

**Définition 7.2.6.** — On dira d'une concrétisation qu'elle est affine si pour tout  $(i, j)$ , la restriction de  $\phi$  au sous-rectangle  $H_i^j$  est une application affine sur le sous-rectangle vertical correspondant.

Les concrétisations ont comme essentiel défaut de ne pas être *a priori* hyperboliques. Nous allons à présent définir des concrétisations ayant une propriété topologique remplaçant l'hyperbolicité, nous les appellerons réalisations et ce sont elles qui nous serviront dans la suite à construire les HV-surfaces à bord et à coins  $\mathcal{R}_m$ .

Notons  $I_i^u$ , pour tout  $i$ , le quotient, par les horizontales, du rectangle  $R_i$  d'une concrétisation ; c'est un segment (non réduit à un point) orienté par l'orientation des verticales de  $R_i$ . L'image des  $h_i$  sous-rectangles horizontaux  $H_i^j$  de  $R_i$  est une famille de sous-segments  $J_i^j$  de  $I_i^u$  deux-à-deux disjoints et d'indexation croissante pour

l'ordre de  $R_i$ . Les extrémités de  $I_i^u$  sont extrémités de  $J_i^{h_i}$  et de  $J_i^l$ . L'homéomorphisme  $\phi$  a été choisi préservant les feuilles du feuilletage horizontal, il passe donc au quotient en une application  $\phi^u$ . Si  $\phi(H_i^j)$  est égal à  $V_k^l$ , la restriction de  $\phi^u$  à  $J_i^j$  est un homéomorphisme de  $J_i^j$  dans  $I_k^u$ .

De même, le passage au quotient par les verticales définit des segments  $I_i^s$  et  $\phi^{-1}$  passe au quotient en une application  $(\phi^{-1})^s$ .

**Définition 7.2.7.** — *Nous appellerons réalisation toute concrétisation du type géométrique  $T$  telle que les applications  $\phi^u$  et  $(\phi^{-1})^s$  définies ci-dessus sont continues markoviennes (cf. la définition 5.1.3).*

**Proposition 7.2.8.** — *Pour tout type géométrique sans double-bord, il existe au moins une réalisation.*

Tout type géométrique admet une concrétisation affine. La preuve de la proposition est donc une conséquence directe du lemme que voici :

**Lemme 7.2.9.** — *Soit  $T$  un type géométrique sans double-bord. Alors toute concrétisation affine de  $T$  est une réalisation.*

*Démonstration.* — Soit  $(\{R_i\}, \phi)$  une concrétisation affine de  $T$ . Nous allons montrer que  $\phi^{n+1}$  est hyperbolique, c'est-à-dire qu'en tout point de son domaine de définition sa différentielle dilate les vecteurs verticaux et contracte les vecteurs horizontaux : ainsi les applications  $(\phi^u)^{n+1}$  et  $((\phi^{-1})^s)^{n+1}$  seront-elles dilatantes donc markoviennes. Les arguments étant identiques pour  $\phi^u$  et  $(\phi^{-1})^s$ , nous ne donnons que la démonstration du caractère dilatant de  $\phi^u$ .

Le domaine de définition de l'application  $\phi^{n+1}$  est formé d'une union de sous-rectangles horizontaux deux-à-deux disjoints et inclus dans les  $H_i^j$  et l'image de chacun de ces sous-rectangles horizontaux est un sous-rectangle vertical inclus dans un  $V_k^l$ . La restriction de  $\phi^{n+1}$  à une composante connexe de son domaine de définition est affine et préserve le feuilletage horizontal et le feuilletage vertical. Notons  $A = (a_{i,j})$  la matrice d'incidence de  $T$ . Alors le coefficient  $a_{i,j}^{n+1}$  de la matrice  $A^{n+1}$  est égal au nombre de composantes connexes du domaine de définition de  $\phi^{n+1}$  incluses dans  $R_i$  dont l'image par  $\phi^{n+1}$  est incluse dans  $R_j$  (en d'autres termes,  $a_i^{n+1}$  est le nombre de composantes connexes de  $\phi^{n+1}(R_i) \cap R_j$ ).

D'après le lemme 7.2.4, la somme des coefficients d'une ligne quelconque de  $A^{n+1}$  est supérieure à 2, on en déduit que pour tout  $i$ ,  $R_i$  contient au moins deux composantes connexes du domaine de définition de  $\phi^{n+1}$ . Munissons chaque rectangle  $R_i$  d'une métrique euclidienne de telle sorte que la longueur des côtés verticaux et horizontaux soit égale à 1. Toute composante connexe  $\rho$  du domaine de définition de  $\phi^{n+1}$  est alors un sous-rectangle horizontal dont la longueur du côté vertical est strictement inférieure à 1 ; notons  $\varepsilon \in ]0, 1[$  la borne supérieure de ces longueurs. De plus, la composante connexe  $\rho$  s'envoie par une application affine sur un sous-rectangle vertical

dont, par définition, le côté vertical est de longueur 1. L'application  $\phi^{n+1}$  dilate donc strictement les vecteurs verticaux d'un facteur supérieur à  $1/\varepsilon$ . On en déduit que la différentielle de  $(\phi^u)^{n+1}$  est supérieure à  $1/\varepsilon$ , ce qui montre que  $\phi^u$  est dilatante.  $\square$

### 7.3. Genre d'une partition de Markov géométrisée

Soit  $T$  un type géométrique de partition de Markov sans double-bord. Dans ce paragraphe, nous allons construire, à partir d'une réalisation (dont la définition et l'existence ont été données dans le paragraphe 7.2), des HV-surfaces à bord et à coins  $\mathcal{R}_m$  munies d'une dynamique (nous les appellerons  $m^{\text{ième}}$ -réalisantes) qui caractériseront le type géométrique  $T$ . Ces surfaces compactes nous permettront de définir le genre d'un type géométrique de partition de Markov et, dans les paragraphes suivants, d'étudier la finitude éventuelle de ce genre. Rappelons que nous pouvons construire ces  $\mathcal{R}_m$  car les rectangles d'une réalisation de  $T$  sans double-bord ne sont pas dégénérés (*i.e.* non réduits à un segment voire à un point).

**Définition 7.3.1.** — Soit  $(\{R_i\}, \phi)$  une réalisation du type géométrique  $T$  sans double-bord. Nous appellerons trou horizontal de  $R_i$  et noterons  $\tilde{H}_i^j$  pour tout  $j = 1, 2, \dots, h_i - 1$  le sous-rectangle horizontal de  $R_i$  séparant les sous-rectangles horizontaux successifs  $H_i^j$  et  $H_i^{j+1}$ .

De même, nous appellerons trou vertical et noterons  $\tilde{V}_i^j$  le sous-rectangle vertical de  $R_i$  qui sépare les sous-rectangles verticaux successifs  $V_i^j$  et  $V_i^{j+1}$ .

**Définition 7.3.2.** — Soit  $(\{R_i\}, \phi)$  une réalisation du type géométrique  $T$  sans double-bord. Nous noterons  $\mathcal{R}$  l'union disjointe des  $n$  rectangles  $R_i$ .  $\mathcal{R} \times \{0\}$  sera notée  $\mathcal{R}_0$  et pour tout  $m > 0$ , nous noterons  $\mathcal{R}_m$  l'union disjointe de  $m + 1$  copies  $\mathcal{R} \times \{i\}$  de  $\mathcal{R}$  quotientée par la relation :

$$\forall i = 0, 1, \dots, m - 1 \quad (x, i) = (\phi^{-1}(x), i + 1)$$

partout où celle-ci a un sens. Nous appellerons  $\mathcal{R}_m$  la  $m^{\text{ième}}$ -réalisante de  $T$  relative à  $(\{R_i\}, \phi)$ .

**Lemme 7.3.3.** — Soit  $T$  un type géométrique sans double-bord. Soient  $(\{R_i\}, \phi)$  une réalisation et  $\mathcal{R}_m$  les réalisantes relatives à cette réalisation. Pour tout  $m \geq 0$ ,  $\mathcal{R}_m$  est une HV-surface à bord et à coins orientée.

*Démonstration.* — Montrons par récurrence sur  $k$  que  $\mathcal{R}_k$  est une HV-surface à bord et à coins orientée telle que les sous-rectangles  $V_i^j \times \{k\}$  soient verticaux et qu'ils aient leur bord horizontal disjoint des coins concaves de  $\mathcal{R}_k$  (*cf.* la figure 5).

- La surface  $\mathcal{R}_0$  vérifie clairement l'hypothèse : en tant qu'union disjointe de  $n$  rectangles du plan, c'est une HV-surface à bord et à coins orientée sans coin concave et les sous-rectangles  $V_i^j \times \{0\}$  sont verticaux par définition.

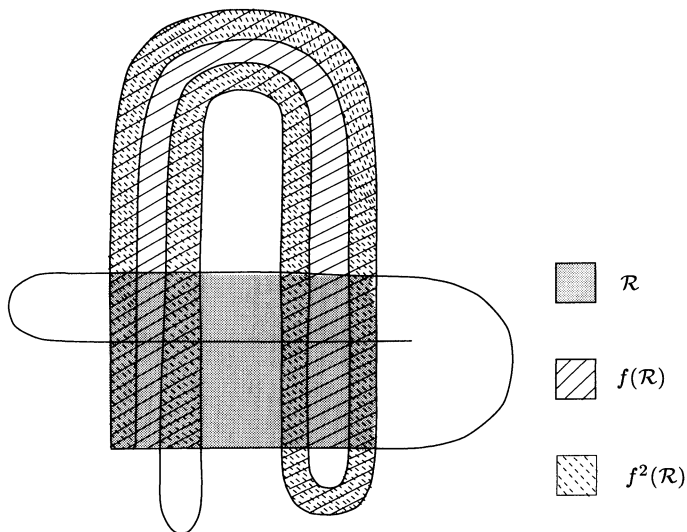


FIGURE 4. Les surfaces  $\mathcal{R}_0 = R$ ,  $\mathcal{R}_1 = R \cup f(R)$  et  $\mathcal{R}_2 = R \cup f(R) \cup f^2(R)$  du fer à cheval

- Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée pour  $\mathcal{R}_k$ ,  $k \leq r-1$ , et montrons que  $\mathcal{R}_r$  la vérifie aussi.  $\mathcal{R}_r$  est obtenue de  $\mathcal{R}_{r-1}$  en collant par  $\phi$ , sur les sous-rectangles verticaux  $V_i^j \times \{r-1\}$ , les sous-rectangles horizontaux  $H_i^j \times \{r\}$  de la surface  $\mathcal{R} \times \{r\}$  qui est une union d'un nombre fini de rectangles disjoints. Les surfaces  $\mathcal{R}_{r-1}$  et  $\mathcal{R} \times \{r\}$  vérifient les hypothèses du lemme 7.1.4 donc  $\mathcal{R}_r$  est une HV-surface à bord et à coins. L'application  $\phi$  préserve l'orientation donc  $\mathcal{R}_r$  est une surface orientée. De plus,  $\partial^h(\mathcal{R} \times \{r\})$  est une union finie de côtés horizontaux de sous-rectangles horizontaux donc le lemme 7.1.5 s'applique et nous donne :

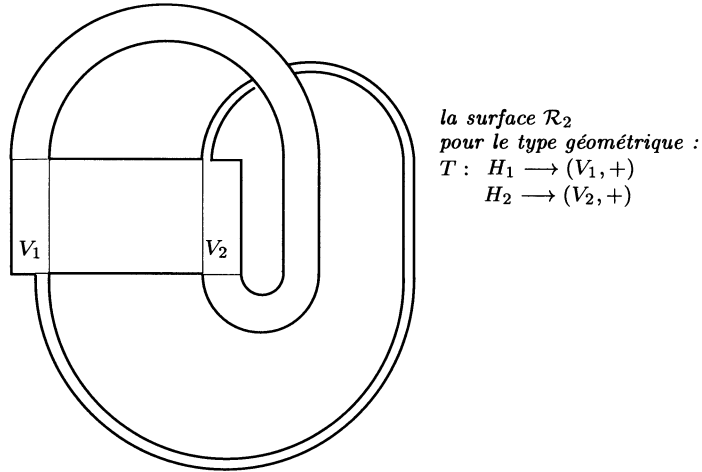
1. Le bord horizontal de tout sous-rectangle  $V_i^j \times \{r\}$  est inclus (par  $\phi$ ) dans le bord horizontal d'un sous-rectangle vertical  $V_k^l \times \{r-1\}$ . Les sous-rectangles  $V_i^j \times \{r\}$  sont donc bien des sous-rectangles verticaux de la surface  $\mathcal{R}_r$ .
2. Le bord horizontal de  $\mathcal{R} \times \{r\}$  est disjoint des coins concaves de  $\mathcal{R}_r$ . Par conséquent, les sous-rectangles verticaux  $V_i^j \times \{r\}$  ont leurs côtés horizontaux disjoints des coins concaves de  $\mathcal{R}_r$ .

□

**Définition 7.3.4.** — On appellera HV-homéomorphisme un homéomorphisme  $\psi$  d'une HV-surface à bord et à coins  $S$  dans une HV-surface à bord et à coins  $S'$  tel que  $\psi$  conjugue le feuilletage horizontal de  $S$  et celui de  $S'$  d'une part et le feuilletage vertical de  $S$  et celui de  $S'$  d'autre part.

**Remarques**



FIGURE 5.  $\mathcal{R}_m$  est une HV-surface à bord et à coins

1. Il existe un plongement  $\pi$  de  $\mathcal{R} \times \{i\}$  dans  $\mathcal{R}_m$  pour tout  $i \leq m$  et ce plongement  $\pi$  est un HV-homéomorphisme. C'est en particulier vrai pour  $i = 0$ , i.e. l'union disjointe  $\mathcal{R} = \coprod_i R_i$  se plonge dans  $\mathcal{R}_m$  pour tout  $m \geq 0$ ; nous noterons encore  $R_i$  l'image par  $\pi$  de  $R_i \times \{0\}$ .
2. Pour tout  $m' > m$ , il existe un HV-homéomorphisme de  $\mathcal{R}_m$  dans l'union  $\bigcup_{i=0}^m \pi(\mathcal{R} \times \{i\}) \subset \mathcal{R}_{m'}$  et un HV-homéomorphisme de  $\mathcal{R}_m$  dans  $\bigcup_{i=1}^{m+1} \pi(\mathcal{R} \times \{i\})$ .

Ces remarques nous permettent de considérer une dynamique sur  $\mathcal{R}_m$  : munissons  $\mathcal{R}_m$  de l'application  $\phi_m$  définie de la façon suivante :

$$\phi_m : \bigcup_{i=0}^{m-1} \pi(\mathcal{R} \times \{i\}) \longrightarrow \bigcup_{i=1}^m \pi(\mathcal{R} \times \{i\})$$

$$(x, i) \longmapsto (x, i + 1)$$

L'application  $\phi_m$  est clairement un HV-homéomorphisme sur son image.

**Remarque.** — Dans  $\mathcal{R}_m$ , pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$  et tout  $0 \leq k \leq m$ , l'image par  $\pi$  de  $R_i \times \{k\}$  est égale à  $\phi_m^k(R_i)$ .

**Proposition 7.3.5.** — Soient  $\mathcal{R}_m$  et  $\mathcal{R}'_m$  les  $m^{\text{ième}}$ -réalisantes respectives de deux réalisations  $(\{R_i\}, \phi)$  et  $(\{R'_i\}, \phi')$  d'un type géométrique  $T = (n, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi)$  sans double-bord. Alors il existe un HV-homéomorphisme  $\theta$  de  $\mathcal{R}_m$  dans  $\mathcal{R}'_m$  qui conjugue  $\phi_m$  et  $\phi'_m$ . De plus, l'image par  $\theta$  de  $R_i$  est  $R'_i$  pour tout  $i$  de 1 à  $n$  et  $\theta$  préserve l'orientation de gauche à droite des horizontales et l'orientation de bas en haut des verticales des rectangles  $R_i$  et  $R'_i$ .

*Démonstration.* — Nous avons obtenu précédemment (cf. la proposition 5.4.1) le résultat suivant : soient  $f$  et  $g$  deux difféomorphismes de Smale qui ont chacun un ensemble hyperbolique saturé de partition de Markov  $M_f$  et  $M_g$  respectivement, supposons que le type géométrique de  $M_f$  soit égal à celui de  $M_g$ . L'union des rectangles de  $M_f$  est alors homéomorphe à l'union des rectangles de  $M_g$  par un homéomorphisme qui préserve le feuilletage horizontal orienté et le feuilletage vertical orienté et qui conjugue  $f$  et  $g$ .

La clef de la démonstration de ce résultat est que les applications  $f^u$  et  $g^u$  (respectivement  $(f^{-1})^s$  et  $(g^{-1})^s$ ), obtenues par passage au quotient par le feuilletage stable (respectivement instable) de  $f$  et  $g$  (respectivement  $f^{-1}$  et  $g^{-1}$ ), sont des applications continues markoviennes de même type combinatoire. D'après la définition 7.2.7 de réalisation, les applications  $\phi^u, \phi'^u$  et  $(\phi^{-1})^s, (\phi'^{-1})^s$  sont continues markoviennes et de même type combinatoire car  $\phi$  et  $\phi'$  sont toutes les deux de type  $T$ . La preuve de la proposition 5.4.1 nous donne donc sans modification la conjugaison sur les rectangles avec les bonnes propriétés.

L'extension du résultat aux surfaces  $\mathcal{R}_m$  est obtenue en reprenant l'argument de la démonstration du corollaire 5.5.3. En effet, la preuve de ce corollaire repose sur le fait qu'un point qui sort de l'union des rectangles de la partition de Markov n'y revient jamais (cf. la proposition 5.5.1) et cette propriété est trivialement vérifiée par les surfaces  $\mathcal{R}_m$  car elle est à la base de leur construction.  $\square$

Avant de parler de genre d'une partition de Markov géométrisée, rappelons la définition du genre d'une surface compacte à bord :

**Définition 7.3.6.** — Si  $X$  est une surface compacte à bord, on appelle genre de  $X$  et on note  $g(X)$  la borne inférieure du genre des surfaces compactes sans bord qui contiennent une partie homéomorphe à  $X$ .

Voici une définition équivalente :

**Définition 7.3.7.** — Le genre  $g(X)$  d'une surface compacte à bord  $X$  est la borne supérieure des entiers  $g$  tels qu'il existe une famille de couples  $\{(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_g, \beta_g)\}$  où, pour tout  $i$ ,  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont des courbes fermées simples sur  $X$ , se coupant transversalement en un et un seul point, et telles que les unions  $\alpha_i \cup \beta_i$  sont deux-à-deux disjointes.

**Remarque.** — D'après l'inclusion naturelle de  $\mathcal{R}_m$  dans  $\mathcal{R}_{m+1}$ , la suite  $(g_m)$ , où  $g_m$  est le genre de  $\mathcal{R}_m$ , est croissante. De deux choses l'une : soit elle est stationnaire, soit elle tend vers  $+\infty$ .

**Définition 7.3.8.** — On appellera genre du type géométrique  $T$  sans double-bord la borne supérieure de la suite  $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ .

**Proposition 7.3.9.** — Si  $T$  est le type géométrique sans double-bord d'une partition de Markov  $M = \{R_i\}$  d'un ensemble saturé  $K$  d'un difféomorphisme de Smale  $f$  sur  $S$  et si  $\mathcal{R}_m$  est une réalisante de  $T$  relative à une réalisation quelconque de  $T$ , alors  $\bigcup_{j=0}^m (\bigcup_i f^j(R_i))$  est une HV-surface HV-homéomorphe à  $\mathcal{R}_m$ .

*Démonstration.* — Comme dans la démonstration de la proposition 7.3.5, la preuve est la même que celle du corollaire 5.5.3.  $\square$

**Corollaire 7.3.10.** — Si un type géométrique  $T$  sans double-bord est réalisable, alors son genre est fini.

#### 7.4. Description des obstructions et énoncé du théorème

Dans ce paragraphe, nous allons établir un critère qui permet de savoir si le genre d'un type géométrique sans double-bord est fini ou non. Ce critère se définit grâce aux réalisantes  $\mathcal{R}_m$  introduites au paragraphe 7.3. Nous sommes donc amenés à les étudier plus finement.

Soit  $(\{R_i\}, \phi)$  une réalisation du type géométrique  $T = (n, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi)$  sans double-bord.

**Définition 7.4.1.** — Le côté  $A$  du rectangle  $R$  est périodique s'il existe un entier  $k$  tel que  $\phi^k(A)$  soit inclus dans  $A$ .

**Définition 7.4.2.** — Soit  $A$  un côté  $p$ -périodique d'un rectangle d'une réalisation de  $T$ . Nous appellerons séparatrice embryonnaire de  $A$  tout segment obtenu comme composante connexe de  $A \setminus \phi^{kp}(A)$  pour  $k$  positif.

**Définition 7.4.3.** — Pour tout  $k = 1, 2, \dots, m$ , nous appellerons ruban de  $k^{\text{ième}}$ -génération de  $\mathcal{R}_m$  l'adhérence d'une composante connexe de  $\mathcal{R}_k \setminus \mathcal{R}_{k-1}$ .

**Remarque.** — Par le lemme 7.1.6, les rubans de  $k^{\text{ième}}$ -génération sont des rectangles deux-à-deux disjoints et leurs côtés horizontaux sont inclus dans  $\partial^h \mathcal{R}_m$  et donc dans  $\partial^h \mathcal{R}_0 = \partial^h (\bigsqcup R_i)$  par le lemme 7.1.5. Ils sont l'image par  $\phi_m^k$  des trous horizontaux de  $\mathcal{R}_0$  ou de façon équivalente l'image par le plongement  $\pi$  des trous horizontaux  $\tilde{H}_i^j \times \{k\}$ , pour  $0 < k \leq m$  (cf. la définition 7.3.1).

Pour tout  $k > 0$  et tout  $m \geq k$ , les rubans de  $k^{\text{ième}}$ -génération de  $\mathcal{R}_m$  sont au nombre de  $\sum_{i=1}^n h_i - n$ .

Nous avons vu au paragraphe 7.3 que les rectangles  $R_i \times \{0\}$  étaient plongés dans toutes les réalisantes  $\mathcal{R}_m$  de la réalisation  $(\{R_i\}, \phi)$  de  $T$  (nous avons noté  $R_i$  le rectangle de  $\mathcal{R}_m$  égal à  $R_i \times \{0\}$ ). Ceci nous invite au lemme suivant :

**Lemme 7.4.4.** — Quel que soit  $m > 0$ , l'adhérence de toute composante connexe de  $\mathcal{R}_m \setminus \bigsqcup_{i=1}^n R_i$  est un ruban de  $k^{\text{ième}}$ -génération pour un certain  $k \leq m$ .

*Démonstration.* — Par le lemme 7.1.5, le bord horizontal de  $\mathcal{R}_m$  est strictement inclus dans celui de  $\mathcal{R}_0$  qui n'est autre que l'union des côtés horizontaux des rectangles  $R_i$  :

$$\partial^h \mathcal{R}_m \subset \partial^h \mathcal{R}_{m-1} \subset \cdots \subset \partial^h \mathcal{R}_0.$$

Par construction, on a l'égalité  $\mathcal{R}_m \setminus \mathcal{R}_0 = \bigcup_{i=1}^m R_i \setminus R_{i-1}$ . L'adhérence de  $\mathcal{R}_m \setminus \mathcal{R}_0$  est donc l'union, pour  $i$  variant de 1 à  $m$ , des rubans de  $i^{\text{ième}}$ -génération de  $\mathcal{R}_m$ . Pour prouver le lemme, il nous reste à montrer que les rubans sont deux-à-deux disjoints. Deux rubans de même génération sont disjoints par le lemme 7.1.6. Montrons donc que deux rubans de générations différentes sont disjoints. Soit  $r$  un ruban de  $k^{\text{ième}}$ -génération et  $r'$  un ruban de  $l^{\text{ième}}$ -génération, pour  $l > k$ . Comme  $k < l$ , le ruban de  $k^{\text{ième}}$ -génération  $r$  est inclus dans la surface  $\mathcal{R}_{l-1}$ . Par le lemme 7.1.6, l'intersection du ruban de  $l^{\text{ième}}$ -génération  $r'$  et de la surface  $\mathcal{R}_{l-1}$  est réduite aux côtés horizontaux de  $r'$ , qui sont inclus dans le bord horizontal de  $\mathcal{R}_0$ . Par ailleurs,  $\mathcal{R}_0$  ne rencontre  $r$  que suivant ses côtés horizontaux car  $r \cap \mathcal{R}_{k-1} = \partial^h r$ . Reste à voir que  $\partial^h r \cap \partial^h r' = \emptyset$ . Comme, dans  $\mathcal{R}_k$ ,  $r$  est recollé suivant son bord horizontal sur  $\partial^h \mathcal{R}_{k-1}$ , l'intérieur des côtés horizontaux de  $r$  est disjoint du bord horizontal de  $\mathcal{R}_k$ . On en déduit que l'intersection de  $r$  avec le bord horizontal de  $\mathcal{R}_k$  est réduite à des coins concaves de  $\mathcal{R}_k$  (cf. la remarque après le lemme 7.1.4). Ces coins concaves sont aussi des coins concaves de  $\mathcal{R}_{l-1}$  d'après la même remarque. Dans  $\mathcal{R}_{l-1}$ , les côtés horizontaux de  $r'$  sont inclus dans les côtés horizontaux des sous-rectangles de  $\mathcal{R} \times \{l-1\}$  et ces segments sont inclus dans  $\partial^h \mathcal{R}_{l-1}$  et disjoints des coins concaves de  $\mathcal{R}_{l-1}$  d'après la démonstration du lemme 7.3.3. Ceci achève de montrer que  $r$  est disjoint de  $r'$ .  $\square$

Ce lemme nous autorise la définition suivante :

**Définition 7.4.5.** — *Nous appellerons ruban de  $\mathcal{R}_m$  l'adhérence d'une composante connexe du complémentaire dans  $\mathcal{R}_m$  de  $\coprod R_i$  ; c'est un ruban de  $k^{\text{ième}}$ -génération pour un certain  $k$  inférieur ou égal à  $m$ .*

**Lemme 7.4.6.** — *Appelons  $\mathcal{B}$  le complémentaire, dans le bord horizontal de  $\coprod R_i$ , de l'intérieur des côtés horizontaux des trous verticaux et de leurs itérés positifs par  $\phi$ . Quel que soit  $m > 0$ , tous les rubans de  $\mathcal{R}_m$  ont leurs côtés horizontaux dans  $\mathcal{B}$ .*

*Démonstration.* — Démontrons ce lemme par récurrence.

Tout ruban de  $1^{\text{ière}}$ -génération prolonge hors de  $\coprod R_i$  un sous-rectangle vertical de  $\coprod R_i$ . De plus,  $\partial^h(\coprod R_i)$  a pour image par  $\phi$  l'union des côtés horizontaux des sous-rectangles verticaux de  $\coprod R_i$  non prolongés par un ruban de  $1^{\text{ière}}$ -génération et cette union est invariante par itération positive. Les rubans de  $1^{\text{ière}}$ -génération sont donc disjoints de l'intérieur des itérés positifs des côtés horizontaux des trous verticaux.

Supposons que ce soit vrai pour les rubans de  $k^{\text{ième}}$ -génération pour tout  $k \leq l-1$  et montrons-le pour les rubans de  $l^{\text{ième}}$ -génération. Tout ruban  $r$  de  $l^{\text{ième}}$ -génération est l'itéré par  $\phi_m$  d'un ruban  $r'$  de  $(l-1)^{\text{ième}}$ -génération. Supposons que  $r$  ait un côté

horizontal  $c$  non disjoint de l'intérieur d'un itéré positif d'un côté horizontal de trou vertical, intervalle que nous notons  $\tau$ . L'intervalle  $\tau$  est un itéré strictement positif de l'intérieur d'un côté horizontal d'un trou vertical. En effet, les côtés horizontaux de trous verticaux sont d'intérieur disjoint des rubans de  $1^{\text{ième}}$ -génération et les rubans de génération plus grande ont leurs côtés horizontaux tous inclus dans l'union des côtés horizontaux des sous-rectangles verticaux de  $\coprod R_i$  non prolongés par un ruban de  $1^{\text{ième}}$ -génération. On peut donc considérer  $\phi_m^{-1}(\tau)$ . Son intérieur est non disjoint de  $\phi_m^{-1}(c)$  qui est un côté horizontal du ruban de  $(l-1)^{\text{ième}}$ -génération  $\phi_m^{-1}(r) = r'$ . Ceci contredit l'hypothèse de récurrence et achève la preuve.  $\square$

Afin d'énoncer le théorème donnant le critère que l'on cherche, décrivons maintenant quelques positions topologiques que peuvent prendre les rubans dans les réalisantes  $\mathcal{R}_m$ . Nous montrerons dans la suite que ces situations topologiques empêchent un type géométrique d'être de genre fini, et donc d'être réalisable. C'est pour cette raison que nous les nommons obstructions (cf. la figure 6).

**Définition 7.4.7.** — Soit  $\mathcal{R}_m$  une réalisante d'une réalisation  $(\{R_i, i = 1, 2, \dots, n\}, \phi)$  d'un type géométrique  $T$ .

1. Soit  $A$  un côté d'un rectangle  $R$  de la partition de Markov et soit  $r$  un ruban dont les deux côtés horizontaux sont inclus dans  $A$ . Nous dirons que la partition de Markov présente dans  $\mathcal{R}_m$  une obstruction (1) s'il existe un ruban  $r'$  dont un côté horizontal et un seul est inclus dans  $A$  entre les côtés horizontaux de  $r$ .
2. Soient  $A$  et  $A'$  deux côtés distincts parmi les  $2n$  côtés horizontaux des rectangles de la partition de Markov. Soit  $r$  un ruban dont un côté horizontal est inclus dans  $A$  et dont l'autre est dans  $A'$ . Les côtés horizontaux de  $r$  sont orientés en tant qu'horizontales de sous-rectangles horizontaux inclus dans un rectangle  $\pi(R_j \times \{k\})$  collé par  $\phi$  aux rectangles contenant  $A$  et  $A'$  dans leur bord.

Munissons  $A$  et  $A'$  de l'orientation compatible avec l'orientation des côtés horizontaux de  $r$ . Nous dirons que la partition de Markov présente dans  $\mathcal{R}_m$  une obstruction (2) s'il existe un ruban  $r'$  dont un côté horizontal  $\alpha$  est inclus dans  $A$  et l'autre  $\alpha'$  est inclus dans  $A'$ , l'ordre dans  $A$  (pour l'orientation fixée ci-dessus) de  $\alpha$  et de  $r \cap A$  étant l'inverse de l'ordre dans  $A'$  de  $\alpha'$  et de  $r \cap A'$ .

3. Soient  $S_1, S_2$  et  $S_3$  trois séparatrices embryonnaires distinctes et soit  $r$  un ruban dont les côtés horizontaux sont inclus l'un dans  $S_1$  et l'autre dans  $S_2$ . Nous dirons que la partition de Markov présente dans  $\mathcal{R}_m$  une obstruction (3) s'il existe un ruban  $r'$  dont un côté horizontal est dans  $S_1$  et l'autre est dans  $S_3$ .

**Théorème 7.4.8 (Le genre d'un type).** — Soit  $T$  un type géométrique sans double-bord, soient  $(\{R_i, i = 1, 2, \dots, n\}, \phi)$  une réalisation de  $T$  et  $\mathcal{R}_{6n}$  sa  $6n^{\text{ième}}$ -réalisante. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

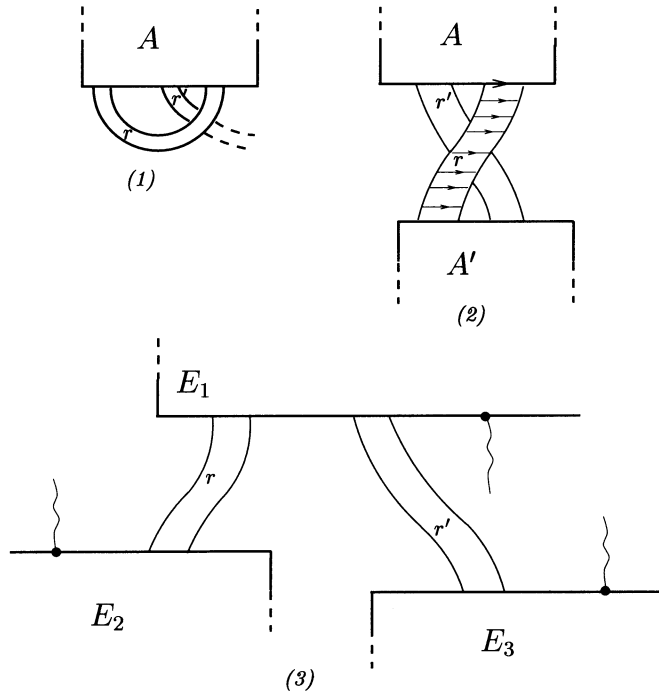


FIGURE 6. Les trois obstructions

1. La partition de Markov ne présente aucune des trois obstructions (1),(2),(3) dans  $\mathcal{R}_{6n}$ .
2. Le genre  $g(T)$  du type géométrique est fini.

### 7.5. Lemmes topologiques

Nous avons vu que les surfaces  $\mathcal{R}_m$  sont obtenues à partir de  $\coprod R_i$  en recollant le bord horizontal de rubans sur le bord de  $\coprod R_i$ . Ce qui nous intéresse est de contrôler le genre de la surface obtenue. Nous donnons, dans ce paragraphe, un lemme très simple et ses corollaires, qui vont permettre, suivant le cas, de majorer ou de minorer ce genre. Rappelons que deux définitions équivalentes du genre d'une surface compacte à bord ont été données à la fin du paragraphe 7.3.

**Définition 7.5.1.** — On dira qu'une surface compacte à bord  $\mathcal{D}$  est obtenue en attachant sans twist les anses  $A_i$ , pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sur le disque  $D$  le long de segments  $a_i, b_i$  si :

1.  $D$  est un disque inclus dans  $\mathcal{D}$  ;
2.  $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$  est une famille de  $2n$  segments de  $\partial D$  deux-à-deux disjoints ;

3.  $\{A_1, \dots, A_n\}$  est une famille de disques de  $\mathcal{D}$  deux-à-deux disjoints, telle que  $A_i \cap D$  est l'union  $a_i \cup b_i$  pour tout  $i$  ;
4.  $\mathcal{D}$  est l'union de  $D$  et des  $A_i$  ;
5. La surface  $\mathcal{D}$  est orientable.

**Lemme 7.5.2.** — Soit  $\mathcal{D}$  une surface compacte à bord obtenue en recollant sans twist des anses  $A_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sur un disque  $D$  le long de segments  $a_i, b_i$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La surface  $\mathcal{D}$  est de genre 0 (c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme de  $S$  sur une partie compacte de la sphère  $S^2$ ).
2. Pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ ,  $i \neq j$ , il existe un intervalle  $I \subset \partial D$  contenant  $a_i \cup b_i$  et disjoint de  $a_j \cup b_j$ .

*Démonstration.* — 1) Supposons  $\mathcal{D}$  plongée dans  $S^2$ . Soient  $i$  et  $j$  deux indices distincts. Considérons une courbe simple fermée  $\gamma$  obtenue comme union d'un segment dans  $D$  joignant un point  $x \in a_i$  à un point  $y \in b_i$  et d'un segment dans  $A_i$  joignant  $x$  à  $y$ . Alors la courbe simple fermée  $\gamma$  est disjointe de  $A_j$ , et disconnecte  $S^2$  en deux disques ouverts. De plus, l'intersection du bord de  $D$  avec chacun de ces disques est un intervalle ouvert : notons  $I_0$  celui de ces deux intervalles qui est inclus dans la composante connexe de  $S^2 \setminus \gamma$  qui contient  $A_j$ . Remarquons que les extrémités  $x$  et  $y$  de  $I_0$  appartiennent à  $a_i$  et  $b_i$  : on en déduit que  $I_0 \setminus (a_i \cup b_i)$  est un intervalle  $I$  de  $\partial D$  contenant  $a_j$  et  $b_j$  mais disjoint de  $a_i \cup b_i$  (cf. la figure 7). On a donc montré que la famille des segments  $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$  vérifie bien la propriété de l'item 2).

2) Supposons à présent la propriété de l'item 2) vérifiée par la famille

$$\{a_i, b_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}.$$

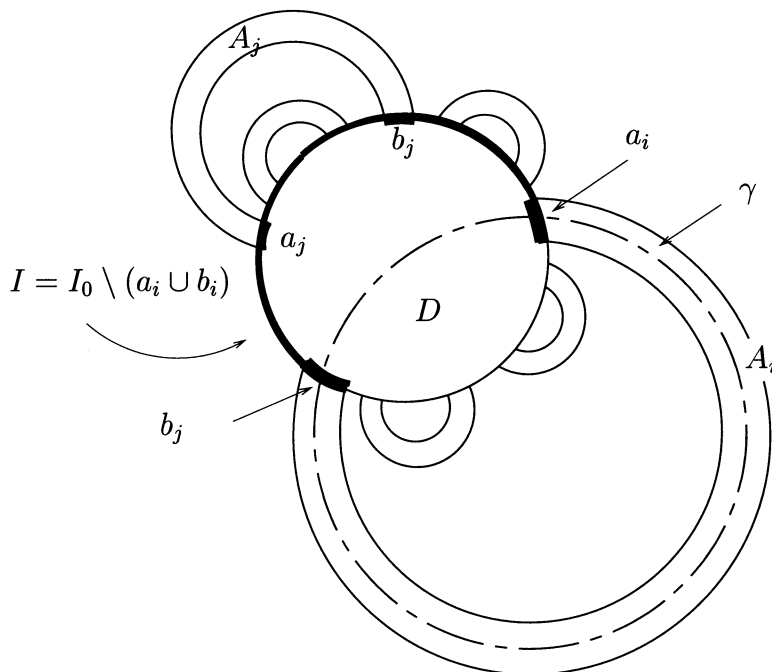
Nous allons montrer par récurrence sur  $n$  que la surface  $\mathcal{D}$  est plongeable dans la sphère.

Quand  $n = 0$ , il n'y a rien à faire, et quand  $n = 1$  l'hypothèse d'orientation sur l'homéomorphisme de recollement assure que  $\mathcal{D}$  est une couronne, donc est de genre 0.

Supposons que la propriété 2)  $\Rightarrow$  1) est vérifiée pour  $n \leq p-1$  et montrons-la pour  $n = p$ . Pour tout couple  $(i, j)$  d'indices différents, l'une des composantes connexes de  $\partial D \setminus a_i \cup b_i$  est disjointe de  $a_j \cup b_j$  ; notons-la  $J_{i,j}$ . Notons  $I_{i,j} = a_i \cup J_{i,j} \cup b_i$  : c'est le plus petit segment de  $\partial D$  contenant  $a_i \cup b_i$  et disjoint de  $a_j \cup b_j$ . Remarquons que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on a :

$$a_k \subset I_{i,j} \iff b_k \subset I_{i,j}$$

En effet, si  $k \neq i$ ,  $a_k \cup b_k$  est inclus dans l'une des composantes de  $\partial D \setminus (a_i \cup b_i)$ . On en déduit que si  $a_k$  n'est pas disjoint de  $I_{i,j}$  alors  $I_{k,j}$  est inclus dans  $I_{i,j}$ . Considérons la famille des segments  $I_{k,1}$ . Cette famille étant finie, il existe un indice  $k$  tel que  $I_{k,1}$

FIGURE 7.  $I$  isole  $a_i \cup b_i$  de  $a_j \cup b_j$ 

ne contient aucun  $I_{l,1}$ ,  $l \neq k$ , et donc  $I_{k,1}$  est disjoint de  $a_l \cup b_l$ . Quitte à changer l'indexation, on supposera que  $I_{p,1}$  est disjoint de tous les  $a_i \cup b_i$ ,  $1 < i < p$ .

La surface à bord  $C_p = D \cup A_p \subset \mathcal{D}$  est homéomorphe à une couronne. Notons  $\gamma_0$  la composante de son bord qui contient l'intervalle  $J_{p,1}$ , et  $\gamma_1$  l'autre composante. La courbe  $\gamma_1$  contient  $a_i \cup b_i$  pour tout  $i \neq p$ . Notons  $D_1$  le disque obtenu en recollant à la couronne  $C_p$  un disque  $\delta$  par un homéomorphisme de  $\gamma_0$  sur le bord de  $\delta$  (cf. la figure 8). Remarquons que le bord  $\partial D_1$  contient les segments  $\{a_1, b_1, \dots, a_{p-1}, b_{p-1}\}$ .

Il reste à montrer que  $D_1$  muni de cette famille de segments vérifie la propriété de l'item 2), ce qui permettra alors d'utiliser l'hypothèse de récurrence. Remarquons d'abord que le bord  $\partial D_1$  est l'union de l'intervalle  $\partial D \setminus I_{p,1}$  (qui contient tous les  $a_i \cup b_i$ ,  $i \leq p-1$ ) et d'un segment  $\sigma$  contenu dans le bord de l'anse  $A_p$ . Soient  $i, j \in \{1, \dots, p-1\}$ , deux indices distincts. Remarquons que le segment  $I_{i,j}$  ou bien contient  $I_{p,1}$ , ou bien est disjoint de  $I_{p,1}$ . Si le segment  $I_{i,j}$  est disjoint de  $I_{p,1}$ , il est donc inclus dans le bord de  $D_1$ , il n'y a donc rien à faire. Si  $I_{i,j}$  contient  $I_{p,1}$  alors il suffit de remplacer  $I_{i,j}$  par le segment  $\tilde{I}_{i,j} = (I_{i,j} \setminus I_{p,1}) \cup \sigma$  : c'est un segment de  $\partial D_1$  contenant  $a_i \cup b_i$  et disjoint de  $a_j \cup b_j$ .

□



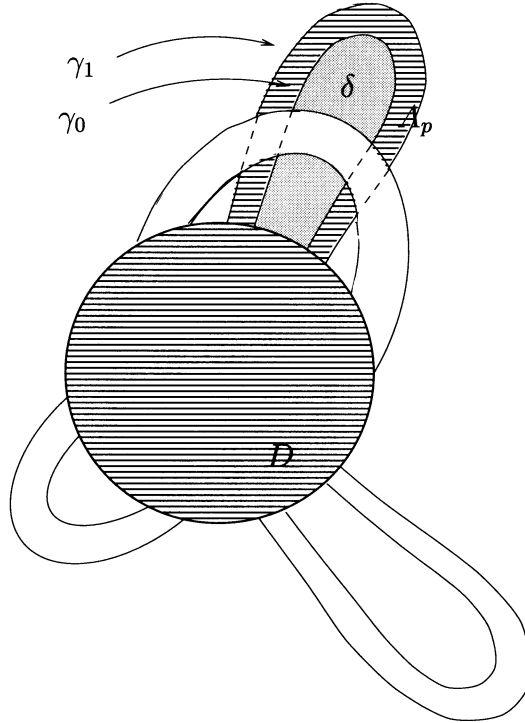


FIGURE 8. La couronne  $C_p$  et le disque  $D_1 = C_p \cup \delta$

**Lemme 7.5.3.** — Soit  $D \subset S^2$  une surface compacte obtenue en attachant sans twist des anses  $A_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  sur un disque  $D$  le long de segments  $a_i$  et  $b_i$ .

1. Soit  $\sigma \subset \partial D$  un segment disjoint des  $a_i$  et  $b_i$  pour tout  $i$ . Notons  $\nu$  le segment de  $\partial D$ , adhérence de  $\partial D \setminus \sigma$ . Alors il existe un disque  $\Delta \subset S^2$  contenant toute anse  $A_i$  et tel que  $\Delta \cap D = \nu$ .
2. Soient  $\sigma$  et  $\tilde{\sigma}$  deux segments disjoints de  $\partial D \setminus \bigcup_i (a_i \cup b_i)$ . Notons  $\mu$  et  $\tilde{\mu}$  les deux segments qui sont les adhérences des composantes connexes de  $\partial D \setminus (\sigma \cup \tilde{\sigma})$ . Alors il existe une anse  $A \subset S^2$  contenant toutes les anses  $A_i$ , et telle que son intersection avec  $D$  est exactement  $\mu \cup \tilde{\mu}$ .

*Démonstration.* — 1) On choisit un segment  $\sigma' \subset S^2$  de mêmes extrémités que  $\sigma$  (et  $\nu$ ), et dont l'intersection avec  $D$  est réduite à ses extrémités. La courbe  $\sigma' \cup \sigma$  est alors une courbe simple fermée. Elle borde deux disques dans  $S^2$  dont l'un est d'intérieur disjoint de  $D$ . L'autre disque contient  $D$ ; en coupant ce disque le long de  $\nu$  on voit qu'il est l'union de  $D$  et d'un disque  $\Delta$  bordé par la courbe simple fermée  $\sigma' \cup \nu$ . Le disque  $\Delta$  est le disque annoncé.

- 2) La démonstration est presque identique :

Choisissons  $\sigma'$  et  $\tilde{\sigma}'$  deux segments disjoints inclus dans  $S^2$  de mêmes extrémités que  $\sigma$  et  $\tilde{\sigma}$  respectivement, et dont l'intersection avec  $\mathcal{D}$  est réduite à leurs extrémités. Les courbes fermées simples disjointes  $\sigma \cup \sigma'$  et  $\tilde{\sigma} \cup \tilde{\sigma}'$  bordent des disques  $d$  et  $\tilde{d}$  disjoints et d'intérieur disjoint de  $\mathcal{D}$ . En ôtant à la sphère  $S^2$  l'intérieur des disques  $d$  et  $\tilde{d}$ , on obtient une couronne contenant  $\mathcal{D}$  et qui est l'union de  $D$  et de l'anse annoncée (voir figure 9).

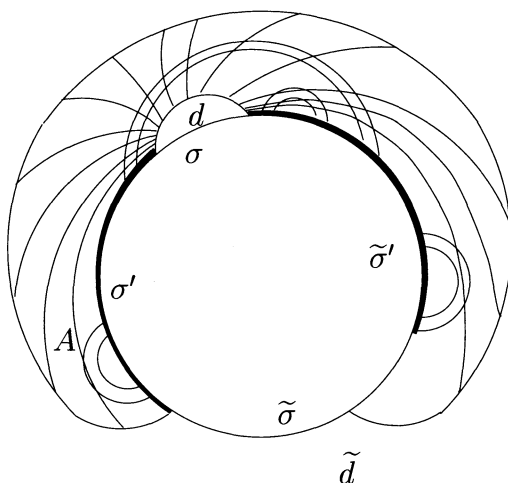


FIGURE 9. L'anse  $A$  contient toutes les anses  $A_i$

□

**Corollaire 7.5.4.** — Soit  $\mathcal{D}$  une surface obtenue en attachant sans twist une famille finie  $\mathcal{A}$  d'anses sur un disque  $D$ . Soient  $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n$  des segments emboîtés inclus dans  $\partial D$  tels que :

1. Toute anse attachée sur  $D$  est non-disjointe de  $I_n$ .
2. Pour tout  $i$ , toute anse  $A$  d'intersection non-vidue avec  $I_{i+1} \setminus I_i$  vérifie

$$A \cap D \subset I_{i+1} \setminus I_i.$$

On dira alors que  $\mathcal{A}$  est attachée sur  $I_{i+1} \setminus I_i$ , et on notera  $\mathcal{A}_{i+1}$  la famille des anses attachées sur cet intervalle.

3. Pour tout  $i$ , l'union de  $D$  et de toutes les anses attachées sur  $I_{i+1} \setminus I_i$  est une surface  $C_i$  de genre 0.

La surface  $\mathcal{D}$  est alors de genre 0.

*Démonstration.* — La démonstration se fait par récurrence sur  $n$ .

Si  $n = 1$ , il suffit d'appliquer le lemme 7.5.2.

Supposons donc la propriété vraie pour  $n \leq p - 1$  et montrons le résultat pour  $n = p$ . Notons  $\mathcal{D}_0$  la surface à bord obtenue en attachant sur  $D$  les anses attachées sur  $I_{p-1}$  (c'est à dire les anses appartenant à  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_p$ ). Par hypothèse de récurrence,  $\mathcal{D}_0$  est une surface de genre 0.

D'après le lemme 7.5.3, on peut plonger  $\mathcal{D}_0$  dans un disque  $D_1 = D \cup \Delta$  où  $\Delta$  est un disque dont l'intersection avec  $D$  est égale au segment  $I_{p-1}$ .

Remarquons que  $I_p \setminus I_{p-1}$  est naturellement inclus dans le bord de  $D_1$ . On en déduit que  $\mathcal{D}$  est naturellement incluse dans la surface à bord  $\mathcal{D}_1$  obtenue en attachant à  $D_1$  les anses de  $\mathcal{A}_p$  sur  $I_p \setminus I_{p-1}$ . Remarquons que  $\mathcal{D}_1$  est obtenue en recollant le disque  $\Delta$  sur la surface  $C_p$  le long du segment  $I_{p-1}$ . En recollant un disque sur une surface à bord, le long d'un segment de leur bord, on ne change pas le genre de la surface (la nouvelle surface se rétractant par déformation sur l'ancienne) : la surface  $\mathcal{D}_1$  est de genre 0 et donc *a fortiori*  $\mathcal{D}$  est de genre 0, ce qui conclut.  $\square$

Les lemmes précédents donnent des conditions pour qu'une surface à bord construite en attachant des anses sur un disque soit de genre 0. Nous aurons aussi besoin, au contraire, de minorer le genre d'une telle surface. C'est le rôle du lemme suivant :

**Lemme 7.5.5.** — *Soit  $D$  une surface à bord obtenue en attachant sans twist une famille finie  $\mathcal{A}$  d'anses sur une disque  $D$ . Soient  $I_1 \subset \dots \subset I_n$   $n$  segments emboîtés du bord de  $D$ . On suppose :*

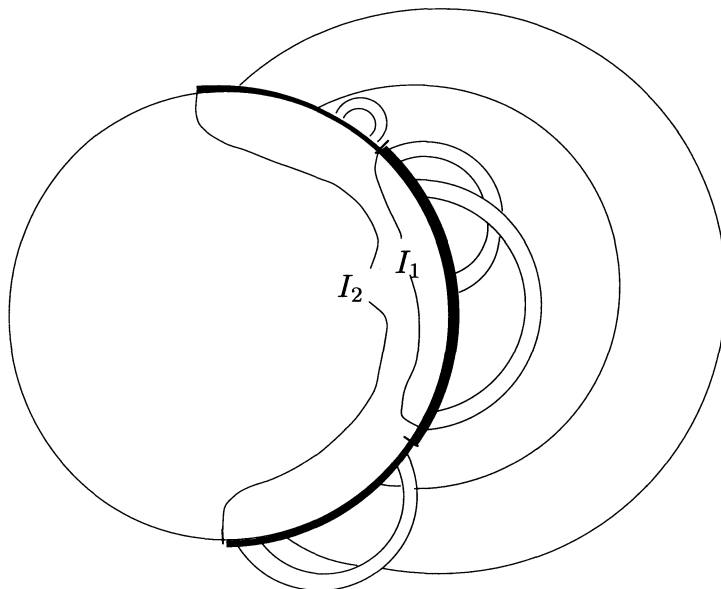
1. *Pour toute anse  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A \cap D \subset I_n$ .*
2. *Pour tout  $i$ , toute anse  $A$  d'intersection non-vide avec  $I_{i+1} \setminus I_i$  vérifie  $A \cap D \subset I_{i+1} \setminus I_i$ . On dira alors que  $A$  est attachée sur  $I_{i+1} \setminus I_i$ , et on notera  $\mathcal{A}_{i+1}$  la famille des anses attachées sur cet intervalle.*
3. *Pour tout  $i$ , l'union de  $D$  et de toutes les anses attachées sur  $I_{i+1} \setminus I_i$  est une surface  $C_i$  de genre  $g(C_i) \geq 1$ .*

*La surface  $\mathcal{D}$  est alors de genre supérieur à  $n$ .*

*Démonstration.* — La preuve se fait par récurrence sur  $n$ , le cas  $n = 1$  étant donné par l'hypothèse.

Supposons le lemme vrai pour  $n \leq p - 1$  et montrons-le pour  $n = p$ . Par hypothèse de récurrence, la surface  $\mathcal{D}_{p-1}$ , union de  $D$  et des anses de  $\mathcal{A}$  attachées sur  $I_{p-1}$ , est de genre au moins  $p - 1$  (cf. la figure 10).

Soit  $c$  un segment plongé dans  $D$ , de mêmes extrémités que  $I_{p-1}$ , et tel que  $c \cap \partial D$  soit réduit aux extrémités de  $c$ . Un tel segment coupe  $D$  en deux disques fermés :  $D_1$  bordé par  $I_{p-1} \cup c$  et  $D_2$  bordé par  $(\partial D \setminus I_{p-1}) \cup c$ . Notons  $E_1$  la surface obtenue en attachant à  $D_1$  les anses de  $\mathcal{A}$  attachées à  $I_{p-1}$ , et  $E_2$  la surface obtenue en attachant à  $D_2$  les anses de la famille  $\mathcal{A}_p$ . Remarquons que  $E_1$  a le même genre que  $\mathcal{D}_{p-1}$  (car  $\mathcal{D}_{p-1}$  se rétracte par déformation sur  $E_1$ ), en particulier  $g(E_1) \geq p - 1$ . De même  $E_2$  a le même genre que la surface  $C_p$ , donc est de genre supérieur à 1. Enfin,  $E_1$  et  $E_2$

FIGURE 10. Le genre de  $\mathcal{D}$  est supérieur à 2

sont naturellement incluses dans  $\mathcal{D}$  et sont d'intérieurs disjoints : le genre de  $\mathcal{D}$  est donc supérieur à  $g(E_1) + g(E_2)$  et donc à  $p$ .  $\square$

### 7.6. Domaines fondamentaux autonomes couplés

En vue de démontrer le théorème 7.4.8, nous allons construire, pour chaque séparatrice embryonnaire, un domaine fondamental avec de bonnes propriétés (nous les précisons bientôt). Comme au paragraphe 7.4, soit  $T = (n, \{h_i\}, \{v_i\}, \Phi)$  un type géométrique sans double-bord. Soient  $(\{R_i\}, \phi)$  une réalisation de  $T$  et pour tout  $m \geq 0$ ,  $\mathcal{R}_m$  sa  $m^{\text{ième}}$ -réalisante.

**Définition 7.6.1.** — *Nous dirons qu'un intervalle  $I$  de  $\mathcal{R}_m$  est compatible (avec les rubans) s'il est dans le bord horizontal de  $\coprod R_i \subset \mathcal{R}_m$  et si ses extrémités sont des points périodiques coins ou des extrémités de côtés horizontaux de rubans de  $\mathcal{R}_1$  pour l quelconque dans  $\mathbb{N}$ . Ceci est équivalent à dire que chaque extrémité de  $I$  a un itéré négatif par  $\phi$  qui est un coin d'un sous-rectangle horizontal d'un rectangle  $R_i$  de la partition de Markov.*

Tous les intervalles du bord horizontal de  $\coprod R_i$  (plongée dans  $\mathcal{R}_m$ ) que nous considérerons dans la suite seront des intervalles compatibles avec les rubans.

**Remarque.** — Soit  $I$  un intervalle compatible de  $\mathcal{R}_m$ . Pour tout entier  $l$  et pour tout ruban  $r$  de  $\mathcal{R}_l$ , l'intérieur de chacun des côtés horizontaux de  $r$  est soit disjoint de  $I$ , soit inclus dans  $I$  car on a montré que les rubans sont deux-à-deux disjoints et disjoints des points périodiques.

**Définition 7.6.2.** — On dira que l'intervalle  $I$  de  $\partial^h \coprod R_i \subset \mathcal{R}_m$  porte le ruban  $r$  de  $\mathcal{R}_m$  si  $r$  a au moins un côté horizontal inclus dans  $I$ .

**Définition 7.6.3.** — Soit  $I$  un intervalle de  $\partial^h \coprod R_i \subset \mathcal{R}_m$  compatible avec les rubans. On dira que  $I$  est saturé dans  $\mathcal{R}_s$ , pour  $s \leq m$ , si tout intervalle  $\sigma$  inclus dans  $I$  et disjoint des rubans portés par  $I$  vérifie qu'il existe  $j \leq s$  tel que l'intervalle itéré de  $\sigma$  par  $\phi_m^{-j}$  soit inclus dans un côté horizontal d'un trou vertical d'un rectangle  $R_k$  (cf. la définition 7.3.1).

**Lemme 7.6.4.** — Soit  $I$  un intervalle de  $\mathcal{R}_m$  saturé dans  $\mathcal{R}_s$ , pour  $s \leq m$ . Alors, pour tout entier  $l \geq s$ , aucun ruban de  $\mathcal{R}_l \setminus \mathcal{R}_s$  n'est porté par  $I$ . Autrement dit, tous les rubans que porte  $I$  dans la surface  $\mathcal{R}_l$  sont de génération au plus  $s$ .

*Démonstration.* — Par définition de saturation, les rubans portés par  $I$  sont inclus dans  $\mathcal{R}_s$  et  $I$  privé des côtés horizontaux des rubans qu'il porte est une union (finie) d'intervalles qui sont tous des itérés positifs par  $\phi_m$  de l'intérieur de côtés horizontaux de trous verticaux. Le lemme 7.4.6 assure alors qu'aucun ruban de  $\mathcal{R}_m$  ne peut rencontrer ces intervalles, ce qui conclut.  $\square$

### Remarques

1. Un intervalle  $I$  de  $\mathcal{R}_m$  saturé dans  $\mathcal{R}_k$ ,  $k < m$ , est saturé dans  $\mathcal{R}_l$  pour tout  $l \geq k$ .
2. L'image par  $\phi$  d'un intervalle de  $\mathcal{R}_m$  saturé dans  $\mathcal{R}_k$  est un intervalle saturé dans  $\mathcal{R}_{k+1}$ , pour tout  $k < m$ .
3. Soit  $\sigma$  un intervalle de  $\partial^h \mathcal{R}_m$  tel que  $\phi(\sigma)$  soit saturé de  $\mathcal{R}_k$ . Alors  $\sigma$  est un intervalle saturé de  $\mathcal{R}_k$ , pour  $k < m$ .

**Définition 7.6.5.** — On dira qu'un intervalle  $I$  de  $\mathcal{R}_m$  est autonome dans  $\mathcal{R}_k$  s'il est saturé dans  $\mathcal{R}_k$  et si tout ruban qui a un côté horizontal dans  $I$  a en fait ses deux côtés horizontaux dans  $I$ .

**Définition 7.6.6.** — On dira que deux intervalles  $I_1$  et  $I_2$  de  $\mathcal{R}_m$  sont autonomes couplés dans  $\mathcal{R}_k$  s'ils sont saturés dans  $\mathcal{R}_k$  et si tout ruban qui a un côté horizontal dans  $I_1 \cup I_2$  a ses deux côtés horizontaux dans  $I_1 \cup I_2$ .

**Définition 7.6.7.** — Soient  $E_1, E_2, \dots, E_m$  les séparatrices embryonnaires stables de  $\mathcal{R}_s$ . Nous dirons que l'ensemble d'intervalles  $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  est un système de domaines fondamentaux si, pour tout  $i$ ,  $C_i$  est inclus dans  $E_i$  et est un domaine fondamental pour  $\phi^{q_i}$ , où  $q_i$  est la période de  $E_i$ .

Le but de ce paragraphe est de chercher sous quelles conditions existe un système de domaines fondamentaux autonomes ou autonomes couplés :

**Proposition 7.6.8.** — *Si les obstructions (1),(2) et (3) sont écartées dans  $\mathcal{R}_{6n}$ , il existe un système de domaines fondamentaux autonomes ou autonomes couplés  $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ , chaque  $C_i$  étant inclus dans la séparatrice embryonnaire stable  $E_i$  de  $\mathcal{R}_{6n}$ .*

Pour prouver cette proposition, nous allons introduire le graphe  $G$  suivant : Notons  $A_j$ , pour  $j = 1, 2, \dots, 2n$ , les côtés horizontaux des  $n$  rectangles  $R_i$ . Le graphe  $G$  a  $2n$  sommets qui sont les  $A_j$  et présente une arête orientée de  $A_k$  à  $A_l$  si  $\phi(A_k)$  est un segment inclus dans  $A_l$  ( $G$  a donc  $2n$  arêtes). Ce graphe va nous permettre de déterminer l'indice  $k$  de la surface  $\mathcal{R}_k$  pour laquelle les domaines fondamentaux  $[x, \phi^q(x)]^s$  sont saturés, où  $x$  désigne une extrémité d'un côté horizontal périodique de rectangle de la partition et où  $q$  désigne la période de ce côté. Il nous faudra ensuite chercher à coupler des domaines fondamentaux définis grâce aux  $[x, \phi^q(x)]^s$  et à les rendre autonomes.

Rappelons que si  $A_j$ , pour  $j = 1, 2, \dots, 2n$ , désigne un des  $2n$  côtés horizontaux des rectangles  $R_i$  de la partition de Markov, le graphe  $G$  a pour sommets les  $A_j$  et présente une arête orientée de  $A$  à  $A'$  si  $\phi(A) \subset A'$  ( $G$  a donc  $2n$  arêtes).

**Définition 7.6.9.** — *Nous qualifierons d'extrémal un sommet de  $G$  auquel n'arrive aucune flèche. Le bord de  $G$  est l'ensemble des sommets extrémaux de  $G$ .*

*Propriétés du graphe  $G$  :*

1. Plusieurs flèches peuvent aboutir en un même sommet et d'un sommet ne part qu'une seule flèche.
2. Une orbite périodique de  $\phi$  sur le bord stable de  $\coprod_{i=1}^n R_i$  correspond à une boucle dans le graphe  $G$ . Réciproquement, toute boucle  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_p \rightarrow A_1$  de  $G$  décrit une orbite périodique de  $\phi$ .
3. Chaque composante connexe du graphe  $G$  comporte une unique boucle, éventuellement réduite à un point et une flèche de ce point à lui-même. La période de l'orbite périodique correspondante, si elle existe, est égale au nombre de sommets de cette boucle.
4. Soit  $A$  un sommet du graphe  $G$ . Notons  $l(A)$  le nombre maximal de flèches dans un chemin orienté aboutissant à  $A$ , sans passer deux fois par le même sommet si  $A$  est dans une boucle périodique. Désignons par  $q(A)$  la période de la boucle périodique de la composante connexe de  $G$  contenant  $A$ . Alors, pour tout  $A$  non périodique appartenant à  $G$ ,  $l(A)$  est strictement inférieur à  $2n - q(A)$  (où  $n$  est le nombre de rectangles de la partition de Markov), et pour tout  $A$  périodique,  $l(A)$  est strictement inférieur à  $2n$ .

**Lemme 7.6.10.** — *Tout sommet extrémal  $A$  de  $G$  correspond à un côté  $A$  de rectangle  $R_i$  saturé dans  $\mathcal{R}_1$  (ce côté est un segment de  $\mathcal{R}_m$ , pour  $m \geq 0$ ).*

*Démonstration.* — Soit  $R_i$  le rectangle de la partition dont  $A$  est un côté horizontal. Notons  $c_1, c_2, \dots, c_{v_i}$  les côtés horizontaux inclus dans  $A$  des sous-rectangles verticaux  $V_i^j$  de  $R_i$  et  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_{v_i-1}$  les côtés horizontaux des trous verticaux  $\tilde{V}_i^j$  de  $R_i$ . Comme  $A$  est extrémal, tout segment  $c_i$  est l'image d'un côté horizontal d'un sous-rectangle horizontal  $H_k^l$  qui n'est pas dans  $\partial^h R_k$  et  $c_i$  porte donc un ruban dans  $\mathcal{R}_1$ . □

**Lemme 7.6.11.** — *Soit  $A$  un sommet du graphe  $G$  qui n'est pas dans une boucle. Le sommet  $A$  correspond alors à un côté horizontal de rectangle  $R_i$  non périodique de  $\mathcal{R}_m$  qui est saturé dans  $\mathcal{R}_k$ , pour  $m \geq k \geq l(A) + 1$ .*

*Démonstration.* — Raisonnons par récurrence.

- Si  $A$  est extrémal, le lemme précédent donne le résultat.

- Supposons la propriété vraie pour  $l(A) \leq l - 1$  et montrons le résultat pour  $l(A) = l$ . Appelons  $c_1, c_2, \dots, c_{v_i}$  la trace dans  $A$  des sous-rectangles verticaux du rectangle  $R_i$  contenant  $A$ . Étudions  $\phi^{-1}(c_j)$ . Soit  $c$  est un segment de  $\mathcal{R}_m$  qui n'est pas dans le bord horizontal de  $\coprod_{i=1}^n R_i$  ( $c$  est vrai pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, v_i\}$  lorsque  $A$  est extrémal), auquel cas  $c_j$  supporte un ruban dans  $\mathcal{R}_k$  pour  $k \geq 1$ . Soit il existe une flèche de  $\phi^{-1}(A)$  vers  $A$  dans  $G$ . On a alors  $l(\phi^{-1}(c_j)) = l - 1$  donc, par hypothèse de récurrence,  $\phi^{-1}(c_j)$  est saturé dans  $\mathcal{R}_k$  avec  $k \geq l$ . Le segment  $c_j$  est donc saturé dans  $\mathcal{R}_k$  avec  $k \geq l + 1$ , d'après l'item 2) de la remarque faite au début de ce chapitre. Comme  $A \setminus \cup_{j=1}^{v_i} c_j$  est exactement l'union des côtés horizontaux inclus dans  $A$  des trous verticaux de  $R_i$  et qu'on vient de montrer que tout  $c_j$  est saturé dans  $\mathcal{R}_{l+1}$ , le segment  $A$  est saturé dans  $\mathcal{R}_{l+1}$ . □

**Lemme 7.6.12.** — *Soit  $A \times \{0\}$  inclus dans  $\mathcal{R}_{2n}$  un côté horizontal d'un rectangle de la partition de Markov. Supposons  $A$  périodique de période  $q$ . La (ou les deux) séparatrice(s) embryonnaire(s) de  $A \times \{0\}$  comporte(nt) (chacune) un domaine fondamental pour  $\phi^q$  qui est saturé dans  $\mathcal{R}_m$ ,  $m \geq 2n$ .*

*Démonstration.* — Soit  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_j \rightarrow A_1$  une boucle de  $G$ . Chaque séparatrice embryonnaire de  $A_k$  est de période  $j$  car  $\phi$  préserve l'orientation donc  $\phi^j$  l'orientation du segment  $A_k$ . Notons  $x_k$  et  $x'_k$  les extrémités non périodiques de  $A_k$ , de telle sorte que  $\phi(x_k)$  appartienne à  $[x_{k+1}, \phi^j(x_{k+1})]$ . (Si le point périodique de  $A_k$  est de type coin, seul  $x_k$  intervient.) Nous allons montrer que les domaines fondamentaux  $[x_k, \phi^j(x_k)]$  (idem  $[x'_k, \phi^j(x'_k)]$ ) sont saturés dans  $\mathcal{R}_{2n}$ . Pour tout  $k$ ,  $x_k$  est une extrémité d'un côté horizontal périodique de rectangle donc  $\phi(x_k)$  est une extrémité d'un côté horizontal périodique de sous-rectangle vertical. Par conséquent,  $[x_{k+1}, \phi(x_k)]$  est un intervalle qui contient un nombre entier de côtés horizontaux  $c_l$  de sous-rectangles verticaux (successifs). Cet intervalle est donc compatible avec les

rubans. L'image par  $\phi^{-1}$  de chacun de ces côtés  $c_l$  correspond à un sommet de  $G$  non périodique et appartenant à la composante connexe de  $G$  contenant la boucle  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_j \rightarrow A_1$ . Le côté  $\phi^{-1}(c_l)$  est donc saturé dans  $\mathcal{R}_{2n-j}$  par le lemme précédent. Le segment  $c_l$  est donc saturé dans  $\mathcal{R}_{2n-j+1}$  par le second item de la remarque faite au début de ce chapitre sur les intervalles saturés, donc  $[x_{k+1}, \phi(x_k)[$  a la même propriété. L'intervalle  $[x_{k+2}, \phi^2(x_k)[$  est l'union de  $[x_{k+2}, \phi(x_{k+1})[$ , qui est saturé dans  $\mathcal{R}_{2n-j+1}$ , et de  $[\phi(x_{k+1}), \phi^2(x_k)[$ , qui est saturé dans  $\mathcal{R}_{2n-j+2}$  en tant qu'image par  $\phi$  d'un intervalle saturé de  $\mathcal{R}_{2n-j+1}$ , donc  $[x_{k+2}, \phi^2(x_k)[$  est saturé dans  $\mathcal{R}_{2n-j+2}$ , etc. On obtient ainsi que  $[x_{k+j} = x_k, \phi^j(x_k)[$  est un intervalle saturé de  $\mathcal{R}_{2n-j+j}$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Lemme 7.6.13.** — *Soit  $r$  un ruban de  $\mathcal{R}_k$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ , tel qu'une composante connexe  $c$  de  $\partial^h r$  soit incluse dans une séparatrice embryonnaire  $E$ . Si  $D$  est un domaine fondamental de  $E$  qui est saturé dans  $\mathcal{R}_m$ , alors le ruban  $r$  possède un itéré dans  $\mathcal{R}_m$  dont le segment de bord horizontal itéré de  $c$  est inclus dans  $D$ .*

*Démonstration.* — En tant que segment de  $E$ ,  $c$  a un itéré  $c' = \phi^q(c)$  qui rencontre le domaine fondamental  $D$  (dans la surface  $\mathcal{R}_k$  pour tout  $k$ ). Comme  $c$  est un côté horizontal de ruban et que  $D$  est compatible,  $c'$  est inclus dans  $D$ . Le ruban  $\phi^q(r)$  de  $\mathcal{R}_{k+q}$  admet  $c'$  comme côté horizontal. Comme  $D$  est saturé dans  $\mathcal{R}_m$ , le ruban  $\phi^q(r)$  est un ruban de  $\mathcal{R}_m$ .  $\square$

**Définition 7.6.14.** — *Appelons domaines fondamentaux extrémaux les domaines fondamentaux saturés dans  $\mathcal{R}_{2n}$  construits dans la démonstration du lemme 7.6.12 (ils sont de la forme  $D = [x, \phi^q(x)]$  où  $x$  est une extrémité d'un côté horizontal  $q$ -périodique d'un rectangle de la partition de Markov).*

Les domaines fondamentaux extrémaux sont saturés dans  $\mathcal{R}_{2n}$ , mais on ne peut pas affirmer qu'un ruban qui part de l'un d'eux,  $D$ , va à un côté périodique. Soit  $r$  un ruban de  $\mathcal{R}_{2n}$  qui joint  $D$  à un côté non périodique  $A$ . Le domaine fondamental  $D$  est saturé dans la surface  $\mathcal{R}_{2n}$  donc, par la remarque 2) sur les intervalles saturés, le domaine fondamental  $\phi^{2n}(D)$  est saturé dans  $\mathcal{R}_{4n}$ . Le ruban  $\phi^{2n}(r)$  est alors un ruban de la surface  $\mathcal{R}_{4n}$  qui joint  $\phi^{2n}(D)$  à  $\phi^{2n}(A)$ . Les propriétés 3) et 4) du graphe  $G$  (disant que  $l(A) < 2n - q(A)$  et que  $q(A) \geq 1$ ) nous donnent que  $\phi^{2n}(A)$  est inclus dans un côté périodique.

On a ainsi prouvé le lemme suivant :

**Lemme 7.6.15.** — *Soit  $D$  un domaine fondamental extrémal. Alors le domaine fondamental  $\phi^{2n}(D)$  est saturé dans la surface  $\mathcal{R}_{4n}$  et tout ruban qui part de  $\phi^{2n}(D)$  arrive dans un côté périodique.*

**Remarque.** — Soit  $E$  une séparatrice embryonnaire. Il existe alors un domaine fondamental extrémal  $D$ , inclus dans une séparatrice embryonnaire qui est dans l'orbite



par  $\phi$  de  $E$ , tel que le domaine fondamental  $\phi^{2n}(D)$  soit inclus dans  $E$ . Ce domaine fondamental  $\phi^{2n}(D)$ , saturé dans  $\mathcal{R}_{4n}$ , va jouer dans la suite un rôle non trivial.

Le lemme 7.6.15 nous fournit des domaines fondamentaux saturés inclus dans les côtés périodiques, mais il ne nous permet pas d'en déduire directement des domaines fondamentaux autonomes couplés. L'un des problèmes est décrit par la situation suivante : Soient  $E$  et  $E'$  deux séparatrices embryonnaires. Soit  $D_1$  le domaine fondamental extrémal inclus dans  $E$  et soit  $\phi^{2n}(D_2) \subset E$  le domaine fondamental inclus dans  $E$  et signalé dans la remarque ci-dessus. Soient  $D'_1$  et  $\phi^{2n}(D'_2)$  les domaines fondamentaux analogues inclus dans  $E'$ . Appelons  $\gamma'$  l'union de  $D'_1$  et de l'intervalle de  $E'$  situé entre  $D'_1$  et  $\phi^{2n}(D'_2)$ . Il peut exister un ruban  $r$  de  $\mathcal{R}_{4n}$  joignant  $\phi^{2n}(D_2)$  à  $\gamma'$ . Le problème est qu'il peut aussi exister un ruban  $r'$  partant de  $\gamma'$  entre  $r \cap \gamma'$  et  $\phi^{2n}(D'_2)$  et aboutissant dans un côté non périodique (cf. la figure 11).

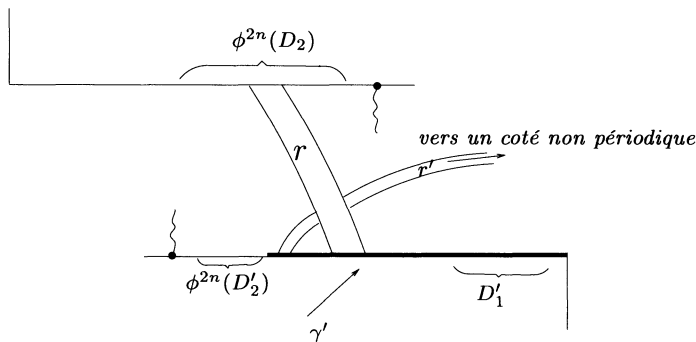


FIGURE 11. Une situation délicate

**Lemme 7.6.16.** — Soit  $E$  une séparatrice embryonnaire de période  $q$  contenant les domaines fondamentaux  $D = [x, \phi^q(x)[$  (extrémal) et  $\phi^{2n}(D') = [\phi^{2n}(x'), \phi^{2n+q}(x')[$ , où  $D'$  est extrémal. Alors le segment  $\gamma = [x, \phi^{2n+q}(x')[$  de  $E$  est saturé dans  $\mathcal{R}_{4n}$  donc dans  $\mathcal{R}_{6n}$ . De plus, pour tout entier naturel  $\alpha$  tel que  $0 \leq \alpha q \leq 2n$ , le domaine fondamental  $\phi^{2n+\alpha q}(D')$  de  $E$  est saturé dans  $\mathcal{R}_{6n}$  et tout ruban qui part de  $\phi^{2n+\alpha q}(D')$  arrive dans un côté périodique.

*Démonstration.* — Soit  $a$  tel que  $2n = b + qa$  avec  $0 \leq b < q$ . Le point  $\phi^b(x')$  appartient à  $D$ . L'intervalle  $\gamma$  est l'union de  $D$  et de  $\cup_{t=0}^a \phi^{b+ tq}(D')$ , donc est saturé car  $D$  et  $\phi^{b+ tq}(D')$  sont saturés dans  $\mathcal{R}_{4n}$ .

Pour tout entier  $0 \leq \alpha \leq 2n/q$ , le domaine fondamental  $\phi^{2n+\alpha q}(D')$  est saturé dans la surface  $\mathcal{R}_{4n+\alpha q}$  par la seconde remarque sur les intervalles saturés. Tout ruban de  $\mathcal{R}_{6n}$  qui part du domaine fondamental  $\phi^{2n+\alpha q}(D')$  a son itéré par  $\phi^{-\alpha q}$  qui part de  $\phi^{2n}(D')$ . Le lemme 7.6.15 permet alors de conclure.  $\square$

**Lemme 7.6.17.** — Soient  $r$  un ruban de  $\mathcal{R}_m$  et  $c$  un de ses côtés horizontaux. On suppose qu'il existe  $s > 0$  tel que  $\phi^{-s}(c)$  soit un segment  $c'$  inclus dans le bord horizontal de  $\coprod R_i$ . Alors il existe un ruban  $r'$  de  $\mathcal{R}_{m-s}$  tel que  $\phi^s(r') = r$ .

*Démonstration.* — Comme  $r$  est un ruban, il existe un trou horizontal  $\tilde{H}_i^j$  et  $t > 0$  tels que  $\phi^{-t}(c)$  soit un côté horizontal  $c_0$  de  $\tilde{H}_i^j$  (cf. le lemme 7.4.4). L'invariance par  $\phi$  de  $\partial^h \coprod R_i$  nous assure que tout itéré négatif ou nul de  $c_0$  est disjoint de  $\partial^h \coprod R_i$ . Remarquons que  $c'$  est égal à  $\phi^{t-s}(c_0)$ . Il est par hypothèse inclus dans le bord horizontal de  $\coprod R_i$  donc  $t - s$  est strictement positif. Le ruban  $\phi^{t-s}(\tilde{H}_i^j) = r'$  est le ruban annoncé.  $\square$

**Lemme 7.6.18.** — Soit  $E$  une séparatrice embryonnaire de période  $q$ .

1. Dans  $\mathcal{R}_{6n}$ , tout ruban qui part de  $E$  a un itéré joignant  $E$  à un côté périodique.
2. Soit  $r$  un ruban de  $\mathcal{R}_{6n}$  qui a un côté horizontal  $c$  dans  $E$  et l'autre  $c'$  dans un côté périodique. L'itéré par  $\phi^q$  ou  $\phi^{-q}$  de  $r$  est alors un ruban de la surface  $\mathcal{R}_{6n}$  dont le côté horizontal itéré de  $c$  est inclus dans  $E$  et dont l'autre côté horizontal (itéré de  $c'$ ) est inclus dans un côté périodique.

*Démonstration.* — Soient  $D$  le domaine fondamental extrémal de  $E$  et  $D'$  le domaine fondamental extrémal tel que  $\phi^{2n}(D')$  soit inclus dans  $E$ . L'intervalle  $\phi^{2n}(D')$  est saturé dans  $\mathcal{R}_{4n}$  par le lemme 7.6.15 donc dans  $\mathcal{R}_{6n}$ . Tout ruban de  $\mathcal{R}_{6n}$  qui part de  $E$  a alors un itéré qui part de  $\phi^{2n}(D')$  par le lemme 7.6.13 et aboutit dans un côté périodique par le lemme 7.6.15.

Soit  $r$  un ruban de  $\mathcal{R}_{6n}$  avec une composante connexe  $c$  de  $\partial^h r$  incluse dans  $E$  et l'autre  $c'$  incluse dans un côté périodique. La séparatrice embryonnaire  $E$  est un intervalle de la forme  $[x, \phi^{6n}(\tilde{x})[$  où  $x$  est l'extrémité de  $E$  qui est un coin du rectangle de la partition et  $\tilde{x}$  est une extrémité d'un côté périodique. Écrivons maintenant  $2n$  comme  $2n = b + aq$ , avec  $0 \leq b < q$  et soit  $\alpha \in \mathbb{N}$  tel que  $b + \alpha q \leq 6n < b + (\alpha + 1)q$ . La séparatrice embryonnaire  $E$  est alors l'union de  $D$ , des intervalles  $\phi^{b+aq}(D')$  où  $t \in \{0, 1, \dots, \alpha\}$  et de  $\phi^{6n}(\tilde{D})$ . Si  $c$  est inclus dans  $D \cup (\cup_{t=0}^{\alpha} \phi^{b+aq} D')$ , le ruban  $\phi^q(r)$  convient. En effet,  $\phi^{2n} D'$  est saturé dans  $\mathcal{R}_{4n}$  et  $q < 2n$  donc  $\phi^{2n+q} D'$  est saturé dans  $\mathcal{R}_{6n}$  donc  $\phi^q(r)$  est un ruban de  $\mathcal{R}_{6n}$ . De plus, il a ses deux côtés horizontaux dans des côtés périodiques puisqu'il est un itéré positif de  $r$ .

Si  $c$  est inclus dans  $(\cup_{i=a+1}^{\alpha} \phi^{b+iq} D') \cup \phi^{6n} \tilde{D}$ , le segment  $\phi^{-q}(c)$  est inclus dans un domaine fondamental  $\phi^{2n+sq} D'$ , avec  $0 \leq sq \leq 4n$ . Considérons  $\phi^{-(s+1)q}(c)$ . C'est un segment de  $\phi^{2n} D'$ . En particulier, ce segment est inclus dans  $\partial^h \coprod R_i$  et porte donc un ruban de  $\mathcal{R}_{6n}$  qui est  $\phi^{-(s+1)q}(r)$  par le lemme 7.6.17. De plus, le lemme 7.6.16 implique que ce ruban a son autre côté horizontal dans un côté périodique. Le ruban  $\phi^{sq}(\phi^{-(s+1)q}(r)) = \phi^{-q}(r)$  est un ruban de  $\mathcal{R}_{6n}$  et a ses deux côtés horizontaux dans des séparatrices embryonnaires.  $\square$

**Lemme 7.6.19.** — Soient  $E$  et  $E'$  deux séparatrices embryonnaires. Sous l'hypothèse que l'obstruction (3) est évitée dans  $\mathcal{R}_{6n}$ , si  $r$  est un ruban avec un côté horizontal dans  $E$  et l'autre dans  $E'$ , alors  $E$  et  $E'$  ont même période.

*Démonstration.* — Soit  $r$  un ruban joignant  $E$  à  $E'$ . Quitte à inverser les rôles de  $E$  et  $E'$ , on peut supposer la période  $q$  de  $E$  strictement inférieure à la période de  $E'$ . Par le lemme 7.6.18, l'un des rubans  $\phi^q(r)$  ou  $\phi^{-q}(r)$  est un ruban de  $\mathcal{R}_{6n}$  qui a une composante de bord horizontal dans  $E$  et l'autre dans un côté périodique mais pas dans  $E'$  par hypothèse sur les périodes. Ce ruban crée avec  $r$  une obstruction (3) dans  $\mathcal{R}_{6n}$ , ce qui donne une contradiction.  $\square$

Nous sommes à présent en mesure de construire le système de domaines fondamentaux autonomes couplés annoncé pour  $\mathcal{R}_{6n}$  et d'achever ainsi la preuve de la proposition 7.6.8.

Soient  $E$  une séparatrice embryonnaire de période  $q$ ,  $D$  le domaine fondamental extrémal tel que  $\phi^{2n}(D)$  soit inclus dans  $E$  (cf. la remarque après le lemme 7.6.15),  $E'$  une autre séparatrice embryonnaire de période  $q'$  et  $\phi^{2n}(D')$  comme pour  $E$ .

Étudions d'abord le cas où la séparatrice embryonnaire  $E'$  est différente de  $E$  et où la surface  $\mathcal{R}_{6n}$  admet un ruban  $r$  dont une composante connexe de bord horizontal est dans  $E$  et l'autre dans  $E'$ .

**Lemme 7.6.20.** — Si  $r$  est un ruban avec un côté horizontal dans  $E$  et l'autre dans  $E'$ , il existe un itéré de  $r$  joignant soit les domaines fondamentaux  $\phi^{2n}(D) \subset E$  et  $\phi^{2n-\alpha q}(D')$  de  $E'$  pour  $\alpha \geq 0$ , soit les domaines fondamentaux analogues en inversant les rôles de  $E$  et  $E'$ .

*Démonstration.* — En effet, par le lemme 7.6.19,  $E$  et  $E'$  ont même période  $q$  car on a supposé que l'obstruction (3) était écartée dans  $\mathcal{R}_{6n}$ . Par le lemme 7.6.15, le ruban  $r$  a un itéré  $\phi^{mq}(r)$  dans  $\mathcal{R}_{6n}$  qui part de  $\phi^{2n}(D)$  et arrive dans  $E'$  et un itéré  $\phi^{m'q}(r)$  (également dans  $\mathcal{R}_{6n}$ ) qui part de  $\phi^{2n}(D')$  et arrive dans  $E$ , car  $\phi^{2n}(D)$  et  $\phi^{2n}(D')$  sont saturés dans  $\mathcal{R}_{6n}$ . Quitte à inverser les rôles de  $E$  et  $E'$ , l'entier  $m$  est inférieur à l'entier  $m'$  et  $\phi^{mq}(r)$  joint  $\phi^{2n}(D)$  à  $\phi^{2n-\alpha q}(D') \cap S'$  pour un certain  $\alpha \geq 0$ .  $\square$

Soit  $r$  un ruban donné par le lemme précédent, dont un côté horizontal est dans  $\phi^{2n}(D) \cup \phi^{2n}(D')$  et dont l'autre côté horizontal est plus éloigné du point périodique de la séparatrice embryonnaire qui le contient que le domaine fondamental  $\phi^{2n}(D)$  ou  $\phi^{2n}(D')$  correspondant. Appelons  $x$  le point de  $r \cap E$  le plus éloigné sur  $E$  du point périodique associé à  $E$  et  $x'$  le point analogue sur  $E'$  (cf. la figure 12).

**Lemme 7.6.21.** — Les domaines fondamentaux  $C = [x, \phi^q(x)]^h$  et  $C' = [x', \phi^q(x')]^h$  sont saturés, autonomes et couplés.

*Démonstration.* — Les intervalles  $C$  et  $C'$  sont compatibles avec les rubans et sont inclus dans les segments saturés  $\gamma$  et  $\gamma'$  donnés par le lemme 7.6.16, ils sont donc saturés dans  $\mathcal{R}_{6n}$ . L'obstruction (1) est écartée dans la surface  $\mathcal{R}_{6n}$  donc tout ruban

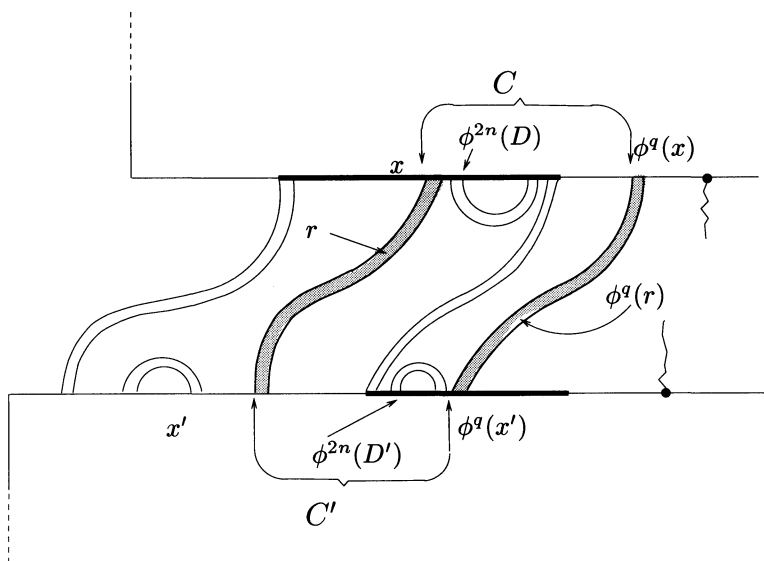


FIGURE 12. Domaines fondamentaux autonomes couplés

qui joint  $C$  à  $E$  (resp.  $C'$  à  $E'$ ) joint en fait  $C$  à  $C$  (resp.  $C'$  à  $C'$ ) ; comme l'obstruction (3) est écartée,  $E$  et  $E'$  sont couplées et comme l'obstruction (2) est écartée, tout ruban de  $C$  à  $E'$  aboutit en fait dans  $C'$ .  $\square$

Traisons enfin le cas d'une séparatrice embryonnaire  $E$  telle que tout ruban qui part de  $\phi^{2n}(D)$  aboutisse sur  $E$ . Soit  $\tilde{D}$  le domaine fondamental extrémal de  $E$  (donné par la définition 7.6.14). Soit  $\gamma$  le plus petit intervalle de  $E$  contenant  $\tilde{D}$  et  $\phi^{2n}(D)$ . Considérons tous les rubans de  $\mathcal{R}_{6n}$  ayant un côté horizontal dans  $\phi^{2n}(D)$  et l'autre dans  $\gamma$ . On note  $r$  celui d'entre eux qui aboutit dans  $\gamma$  le plus loin possible du point périodique de  $E$ , c'est un ruban de  $\mathcal{R}_{4n}$ . Soit  $x$  le point de  $\partial^h r$  le plus éloigné du point périodique de  $E$  et  $y$  l'autre extrémité du côté vertical de  $r$  passant par  $x$  (cf. la figure 13).

**Lemme 7.6.22.** — *Le domaine fondamental  $C = [x, \Phi^q(x)]^h$  est saturé et autonome.*

*Démonstration.* — Le domaine fondamental  $C$  est saturé dans  $\mathcal{R}_{6n}$ . En effet,  $C$  est inclus dans l'intervalle  $\gamma$  introduit juste avant l'énoncé du lemme et cet intervalle est celui qui apparaît dans le lemme 7.6.16. Le ruban  $\phi^q(r)$  est donc aussi un ruban de  $\mathcal{R}_{6n}$ . Vérifions que tout ruban qui part de  $C$  arrive dans  $C$ . Le point  $\phi^q(x)$  ne peut pas être entre  $x$  et  $y$  sur  $E$  car sinon, les rubans  $r$  et  $\phi^q(r)$  donneraient une obstruction (1) dans la surface  $\mathcal{R}_{6n}$ . Le point  $\phi^q(x)$  ne peut pas être entre  $\phi^{2n}(D)$  et le point périodique relatif à  $E$ , il se situe donc dans  $\phi^{2n}(D) \setminus ([x, y]^h \cap \phi^{2n}(D))$ . Un ruban qui part de  $C$  entre  $x$  et  $y$ , pour ne pas créer d'obstruction (1) avec  $r$ , arrive nécessairement dans  $C$ . Soit  $r'$  un ruban qui part de  $C$  entre  $y$  et  $\phi^q(x)$ . Par définition

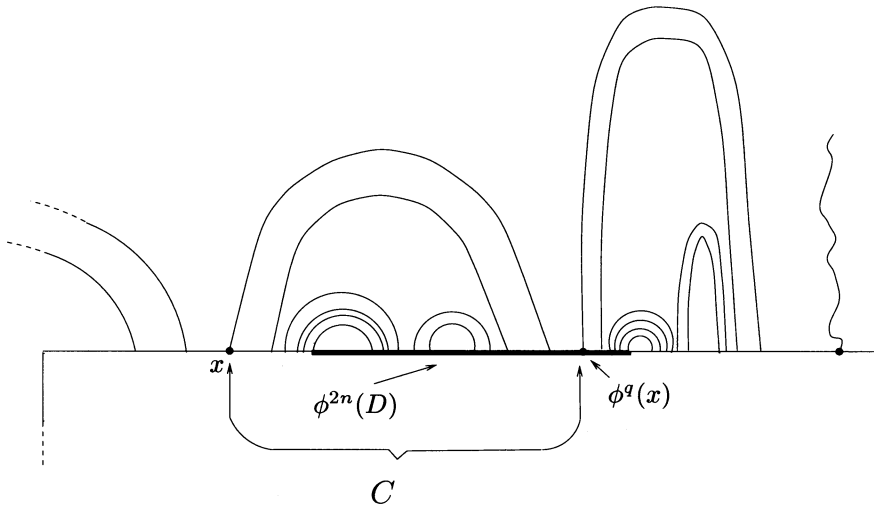


FIGURE 13. Choix de  $C$  si  $E$  est non couplée

de  $x$ , le segment de  $E$  entre les deux composantes de  $\partial^h r'$  ne peut pas contenir  $x$ . Il ne peut pas plus contenir  $y$ , sinon il créerait avec  $r$  une obstruction (1) dans  $\mathcal{R}_{6n}$ . Supposons que  $r'$  n'ait pas ses deux composantes de bord horizontal dans l'intervalle  $[y, \phi^q(x)]^h$  de  $C$ , soit  $c$  celle des deux qui n'est pas dans  $C$ . Par le lemme 7.6.13,  $r'$  a un itéré par  $\phi^{-q}$  qui joint  $C$  à  $E$  tel que l'itéré de  $c$  soit dans  $C$ . Comme cet itéré de ruban ne doit pas contredire la définition de  $x$  ni créer d'obstruction (1) dans  $\mathcal{R}_{6n}$  avec  $r$ , il joint nécessairement  $]y, \phi^q(x)]^h$  à  $]y, \phi^q(x)]^h$ . Ceci contredit l'hypothèse sur  $r'$  et montre que  $C$  est autonome.  $\square$

**7.7. Sans obstruction, le type géométrique  $T$  est de genre fini**

Soient  $(\{R_i\}, \phi)$  une réalisation du type géométrique  $T$  sans double-bord et  $\mathcal{R}_{6n}$  sa  $6n^{ième}$ -réalisante. Dans ce paragraphe, nous allons démontrer que si la partition de Markov de  $T$  ne présente pas les obstructions (1),(2) et (3) dans la surface  $\mathcal{R}_{6n}$ , le genre du type géométrique  $T$  est fini. Cette affirmation démontre le sens direct du théorème 7.4.8 qui est le résultat principal de ce chapitre :

**Proposition 7.7.1.** — *Si les obstructions sont écartées dans la surface  $\mathcal{R}_{6n}$ , le type géométrique  $T$  (sans double-bord) a un genre fini, qui est égal au genre  $g_{6n}$  de la surface  $\mathcal{R}_{6n}$ .*

Par la proposition 7.6.8 et puisque les obstructions sont écartées dans  $\mathcal{R}_{6n}$ , il existe un système  $\Sigma$  de domaines fondamentaux autonomes couplés dans  $\mathcal{R}_{6n}$ .

**Lemme 7.7.2.** — *Supposons que la surface  $\mathcal{R}_{6n}$  ne présente aucune des trois obstructions. Toute paire  $(C, C')$  de domaines fondamentaux couplés du système  $\Sigma$  vérifie la propriété suivante : Orientons  $C$  et  $C'$  vers leur point périodique. Soit  $r$  un ruban avec un côté horizontal dans  $C$  et l'autre dans  $C'$ , ses côtés horizontaux sont orientés en tant qu'images d'horizontales d'un certain rectangle. Si l'orientation du côté horizontal de  $r$  inclus dans  $C$  coïncide avec l'orientation de  $C$ , alors il en est de même de l'orientation de  $\partial^h r \cap C'$  et de l'orientation de  $C'$ .*

*Démonstration.* — Raisonnons par l'absurde. Soient  $C$  et  $C'$  deux domaines fondamentaux couplés du système  $\Sigma$  et  $r$  un ruban avec un côté horizontal dans  $C$  et l'autre dans  $C'$ . Supposons que le ruban  $r$  ait un côté horizontal orienté comme l'un des domaines fondamentaux et l'autre avec l'orientation contraire à celle de l'autre domaine fondamental. Cette propriété est stable par itération. Considérons, dans l'orbite de  $r$ , le premier ruban  $\tilde{r}$  dont les deux côtés horizontaux soient dans des côtés périodiques de rectangles de la partition de Markov. Ce ruban  $\tilde{r}$  est dans la surface  $\mathcal{R}_{2n}$ . (En effet, la longueur, dans le graphe  $G$ , des chemins disjoints des boucles est strictement inférieure à  $2n$ , cf. les propriétés du graphe  $G$  au paragraphe 7.6). L'obstruction (3) est évitée dans  $\mathcal{R}_{6n}$  donc les séparatrices embryonnaires  $E$  et  $E'$  contenant les côtés horizontaux de  $\tilde{r}$  ont même période  $q$  par le lemme 7.6.19. L'itéré  $\phi^q(\tilde{r})$  est un ruban de  $\mathcal{R}_{4n}$  car  $q \leq 2n$ , il a un côté horizontal dans  $E$  et l'autre dans  $E'$  et la propriété d'orientation vérifiée par  $\tilde{r}$  assure que  $\tilde{r}$  et son itéré  $\phi^q(\tilde{r})$  créent une obstruction (2). Ceci contredit l'hypothèse donc le lemme est prouvé.  $\square$

Pour démontrer la proposition 7.7.1, nous allons d'abord étudier le « genre local » de la surface  $\mathcal{R}_{6n}$  au voisinage des points périodiques bords. Moralement, les rubans portés par les domaines fondamentaux éléments de  $\Sigma$  ne doivent pas contribuer au genre de  $\mathcal{R}_{6n}$  car sinon, leurs itérés positifs vont également apporter du genre et le type géométrique  $T$  ne pourra pas avoir un genre fini.

**Définition 7.7.3.** — *Soit  $E$  une séparatrice embryonnaire non couplée. Si  $R$  est le rectangle de la partition de Markov contenant  $E$ , nous appellerons  $E$ -surface et noterons  $d(E)$  l'union du rectangle  $R$  et des rubans de  $\mathcal{R}_{6n}$  ayant leurs côtés horizontaux dans le domaine fondamental  $C$  élément de  $\Sigma$  et inclus dans  $E$ .*

**Définition 7.7.4.** — *Soient  $E$  et  $E'$  deux séparatrices embryonnaires distinctes couplées et  $C$  et  $C'$  les domaines fondamentaux éléments de  $\Sigma$  inclus respectivement dans  $E$  et  $E'$ .*

1. *Si  $E$  et  $E'$  sont dans le bord horizontal d'un même rectangle  $R$  de la partition de Markov, nous appellerons  $(E, E')$ -surface et noterons  $d(E, E')$  l'union du rectangle  $R$  et des rubans de la surface  $\mathcal{R}_{6n}$  ayant leurs côtés horizontaux dans  $C \cup C'$ .*

2. Supposons que  $E$  et  $E'$  soient dans le bord de deux rectangles différents,  $R$  et  $R'$  respectivement, de la partition de Markov. Nous appellerons alors  $(E, E')$ -surface et noterons  $d(E, E')$  l'union de  $R$ , de  $R'$  et des rubans de la surface  $\mathcal{R}_{6n}$  qui ont leurs côtés horizontaux dans  $C \cup C'$ .

**Proposition 7.7.5.** — Sous l'hypothèse que les obstructions (1), (2) et (3) n'existent pas dans la surface  $\mathcal{R}_{6n}$ , pour toute séparatrice embryonnaire  $\tilde{E}$  non couplée et pour toute paire de séparatrices embryonnaires couplées  $(E, E')$ , la  $\tilde{E}$ -surface  $d(\tilde{E})$  et la  $(E, E')$ -surface  $d(E, E')$  sont des surfaces planaires.

**Remarque-notation.** — Toute  $\tilde{E}$ -surface est un disque à anses au sens de la définition 7.5.1 : la surface  $d(\tilde{E})$  est le disque  $R$  sur le bord duquel sont attachées les anses obtenues comme l'adhérence des composantes connexes de  $d(\tilde{E}) \setminus R$ .

De même, toute  $(E, E')$ -surface peut se voir comme un disque  $\Delta(E, E')$  sur le bord duquel sont attachées les anses obtenues comme l'adhérence des composantes connexes de  $d(E, E') \setminus \Delta(E, E')$ . En effet, si  $E$  et  $E'$  sont couplées et incluses dans le bord horizontal d'un même rectangle  $R$  de la partition de Markov, le disque  $\Delta(E, E')$  est simplement  $R$ . Si  $E$  est dans le bord d'un rectangle  $R$  et  $E'$  dans le bord de  $R' \neq R$ , le lemme 7.7.2 et l'absence d'obstruction (2) dans  $\mathcal{R}_{6n}$  nous permettent de dire qu'il existe un ruban  $r_{(E, E')}$  avec un côté horizontal dans  $C$  et l'autre dans  $C'$  tel que tout autre ruban joignant  $C$  à  $C'$  a ses côtés horizontaux entre ceux de  $r_{(E, E')}$  et les points périodiques de  $E$  et  $E'$ . Dans ce cas, on définit le disque  $\Delta(E, E')$  comme l'union des deux rectangles  $R$  et  $R'$  et du ruban  $r_{(E, E')}$ .

D'après le lemme 7.5.2, la proposition 7.7.5 ci-dessus est alors équivalente à la proposition suivante, que nous allons démontrer :

**Proposition 7.7.6.** — Si les trois obstructions sont écartées dans la surface  $\mathcal{R}_{6n}$ , on a les propriétés suivantes :

1. Pour toute séparatrice embryonnaire  $\tilde{E}$  non couplée, quels que soient les rubans  $r$  et  $r'$  appartenant à  $d(\tilde{E})$ , il existe un intervalle  $I$  inclus dans  $\partial R$  (où  $R$  est le rectangle de la partition de Markov contenant  $\tilde{E}$ ) tel que les côtés horizontaux du ruban  $r$  sont tous deux inclus dans  $I$  et ceux du ruban  $r'$  sont tous deux inclus dans  $\partial R \setminus I$ .
2. Pour toutes séparatrices embryonnaires  $E$  et  $E'$  couplées, quels que soient les rubans  $r$  et  $r'$  de  $d(E, E')$ , il existe un intervalle  $I$  inclus dans le bord du disque  $\Delta(E, E')$  tel que  $I$  contienne les deux côtés horizontaux du ruban  $r$  et que  $\partial\Delta(E, E') \setminus I$  contienne les deux côtés horizontaux du ruban  $r'$ .

La démonstration de cette proposition se fait grâce aux deux lemmes suivants :

**Lemme 7.7.7.** — Soient, dans  $\mathcal{R}_{6n}$ , deux rubans  $r$  et  $r'$  dont les côtés horizontaux sont dans le bord du rectangle  $R$  de la partition de Markov. Supposons que tout intervalle

inclus dans le bord de  $R$  qui contient  $r \cap \partial R$  contienne aussi au moins une composante de  $r' \cap \partial R$ , alors la surface  $\mathcal{R}_{6n}$  présente une obstruction.

*Démonstration.* — Si l'un des rubans  $r$  ou  $r'$  a ses deux côtés horizontaux dans un même côté horizontal de  $R$ , alors  $r$  et  $r'$  donnent une obstruction (1).

Supposons donc que les rubans  $r$  et  $r'$  joignent un côté horizontal  $A$  de  $R$  à l'autre, que nous notons  $A'$ . Les segments  $A$  et  $A'$  sont tous deux orientés de gauche à droite en tant qu'horizontales du rectangle  $R$ . L'une des composantes connexes de  $\partial R \setminus \partial^h r$  contient le côté vertical gauche de  $R$ . Nous appellerons  $G$  cette composante connexe et  $D$  celle qui contient le côté vertical droit du rectangle  $R$ .

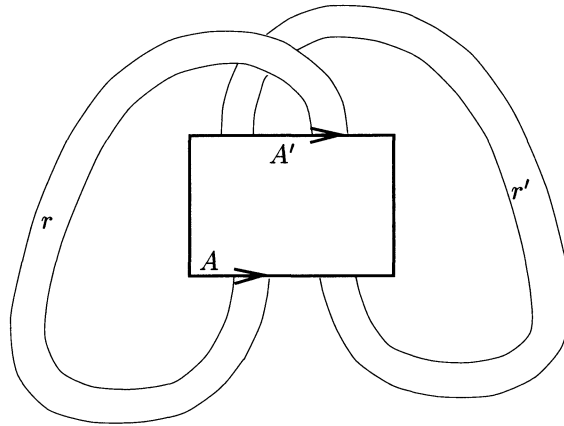


FIGURE 14. Les deux rubans donnent à  $\mathcal{R}_{6n}$  une obstruction (2)

Si  $r' \cap A$  précède  $r \cap A$  pour l'orientation de  $A$ ,  $r' \cap A$  est nécessairement inclus dans  $G$ . L'hypothèse implique alors que  $r' \cap A'$  est dans  $D$ . Ce segment  $r' \cap A'$  est donc après  $r \cap A'$  pour l'orientation de  $A'$ , ce qui décrit exactement une obstruction (2) (cf. la figure 14). En effet, le ruban  $r$  est un itéré positif par  $\phi_{6n}$  d'un trou horizontal d'un rectangle de la partition de Markov (cf. le lemme 7.4.4) donc ses côtés horizontaux sont orientés en tant qu'horizontales de rectangle. Comme la surface  $\mathcal{R}_{6n}$  est orientée (cf. le lemme 7.3.3), le bord horizontal de  $r$  induit une orientation sur  $A$  et  $A'$  compatible avec leur orientation en tant qu'horizontales de  $R$  (i.e. l'orientation naturelle et l'orientation induite sont soit les mêmes, soit inverses l'une de l'autre). Le lemme est donc démontré.  $\square$

**Lemme 7.7.8.** — *Soit, dans la surface  $\mathcal{R}_{6n}$ , un ruban  $\gamma$  qui joint deux côtés périodiques  $A$  et  $B$ ,  $A$  étant inclus dans le bord d'un rectangle  $R$  et  $B$  dans le bord d'un rectangle  $R' \neq R$ . Appelons  $D_\gamma$  le disque topologique égal à l'union des rectangles  $R$  et  $R'$  et du ruban  $\gamma$ . Supposons qu'il existe deux rubans  $r$  et  $r'$  de  $\mathcal{R}_{6n}$  tels que les côtés horizontaux de  $r$  et ceux de  $r'$  sont inclus dans  $A \cup B$  et tels que  $r'$  ait un et un*



*seul côté horizontal dans chaque composante de  $\partial D_\gamma \setminus \partial^h r$ . La surface  $\mathcal{R}_{6n}$  présente alors une obstruction.*

*Démonstration.* — Orientons  $A$  et  $B$  par l'orientation des côtés horizontaux du ruban  $\gamma$  (rappelons que  $\gamma$  est en fait un itéré par  $\phi_{6n}$  d'un trou horizontal de rectangle et à ce titre, ses horizontales sont orientées comme toute horizontale de rectangle).

Si  $r$  a ses deux côtés horizontaux dans  $A$ , de part et d'autre de  $\gamma \cap A$ , la surface  $\mathcal{R}_{6n}$  présente une obstruction (1). Si  $\partial^h r$  est inclus dans une composante de  $A \setminus (\gamma \cap A)$ ,  $\mathcal{R}_{6n}$  présente aussi une obstruction (1) car, dans cette composante connexe,  $r'$  a un et un seul côté horizontal entre ceux de  $r$ .

Si  $r$  part de  $A$  à gauche de  $\gamma \cap A$  et arrive dans  $B$  à droite de  $\gamma \cap B$ , ou réciproquement, les rubans  $r$  et  $\gamma$  présentent une obstruction (2).

Sinon, comme  $D_\gamma$  est orienté (car la surface  $\mathcal{R}_{6n}$  l'est),  $\partial D_\gamma \setminus \partial^h r$  a deux composantes connexes, appelons  $L$  celle qui contient l'intervalle de  $A$  situé entre  $\gamma \cap A$  et  $r \cap A$ . Remarquons que l'intervalle  $\sigma$  de  $B$  situé entre  $\gamma \cap B$  et  $r \cap B$  est dans  $L$ .

Le ruban  $r'$  n'a qu'un côté horizontal dans  $L$  par hypothèse. Posons, pour fixer les idées, que  $r' \cap L$  est inclus dans  $A$ . Si son autre côté horizontal est aussi dans  $A$ ,  $r'$  crée avec  $\gamma$  ou  $r$  une obstruction (1). Si son autre côté horizontal est dans  $B$ , il n'est pas dans  $\sigma$  donc il crée avec  $\gamma$  ou  $r$  une obstruction (2). □

*Démonstration de la proposition 7.7.6.* — D'une part, le lemme 7.7.7 démontre par contraposée la première propriété qu'affirme la proposition 7.7.6, d'autre part le lemme 7.7.8, avec  $D_\gamma = \Delta(E, E')$ , démontre la deuxième. □

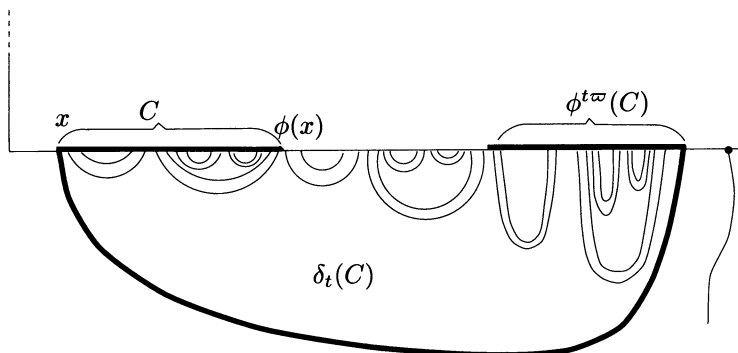
Si les obstructions sont écartées dans  $\mathcal{R}_{6n}$ , rappelons que la proposition 7.6.8 nous donne l'existence d'un système  $\Sigma$  de domaines fondamentaux autonomes couplés et que la proposition 7.7.5 implique que, pour toute séparatrice embryonnaire  $E$ , la  $E$ -surface  $d(E)$  ou la  $(E, E')$ -surface  $d(E, E')$ , suivant que le domaine  $C \in \Sigma$  inclus dans  $E$  est couplé ou non, est planaire. Appelons  $\varpi$  le *ppcm* des périodes des séparatrices embryonnaires.

**Lemme 7.7.9.** — *Soit  $C$  un domaine fondamental non couplé élément de  $\Sigma$ . Soit  $q$  la période de la séparatrice embryonnaire  $E$ . Soient  $\pi = \varpi/q$  et  $R$  le rectangle de la partition de Markov contenant  $C$  dans son bord.*

*Alors, pour tout  $t \geq 0$ , l'union du rectangle  $R$  et des rubans qui, dans  $\mathcal{R}_s$  pour tout  $s \geq 6n + t\varpi$ , sont portés par l'intervalle  $C_t$  égal à*

$$C \cup \phi^q(C) \cup \phi^{2q} \cup \dots \cup \phi^{t\varpi}(C) = \phi^{t\pi q}(C)$$

*est une surface planaire, que nous notons  $d^{t\varpi}(E)$ . Cette surface se plonge dans l'union de  $R$  et d'un disque  $\delta_t(C)$  qui contient tous les rubans portés par  $\partial d^{t\varpi}(E)$  et dont l'intersection avec  $R$  est réduite au segment  $\text{Adh}(C_t)$ .*

FIGURE 15. Pour  $C$  non couplé, le « genre local » est nul

*Démonstration.* — Appelons  $x$  l'extrémité de  $C$  la plus éloignée du point périodique  $p$  de la séparatrice embryonnaire  $E$ . Les segments suivants, inclus dans le bord de  $R$ , sont emboîtés :

$$I_0 = [x, p] \supset I_1 = [\phi^q(x), p] \supset \cdots \supset I_{t\pi} = [\phi^{t\pi q}(x), p] = [\phi^{t\omega}(x), p].$$

Pour tout  $j$ ,  $I_j \setminus I_{j+1} = \phi^{jq}(C)$ . On déduit de la proposition 7.7.5 que l'union du rectangle  $R$  et des rubans attachés sur  $I_j \setminus I_{j+1}$  est une surface plane pour tout  $j$ . Donc le corollaire 7.5.4 nous donne que la surface  $d^{t\omega}(E)$  est plane (cf. la figure 15). On peut par conséquent appliquer le premier item du lemme 7.5.3 à  $d^{t\omega}(E)$  pour obtenir un disque contenant tous ses rubans et recollé à  $R$  le long de  $\text{Adh}(C)$ .  $\square$

**Lemme 7.7.10.** — Soient  $C$  et  $C'$  deux domaines fondamentaux couplés éléments de  $\Sigma$  et inclus respectivement dans les séparatrices embryonnaires  $E$  et  $E'$ . Supposons que  $E$  et  $E'$  soient toutes deux dans le bord d'un même rectangle  $R$  de la partition de Markov. Soient  $q$  la période de  $E$  et  $\pi = \omega/q$ . Soit  $\Delta(E, E')$  le disque relatif à  $E$  et  $E'$  introduit dans la remarque juste avant la proposition 7.7.6.

Alors, pour tout  $t \geq 0$ , l'union du disque  $\Delta(E, E')$  et des rubans de  $\mathcal{R}_s$ , pour tout  $s \geq 6n + t\omega$ , qui ont leurs côtés horizontaux dans

$$(C \cup C') \cup (\phi^q(C \cup C')) \cup \cdots \cup (\phi^{t\omega}(C \cup C'))$$

est une surface plane, que nous appellerons  $d^{t\omega}(E, E')$ . Cette surface se plonge dans une couronne formée par l'union de  $R$  et d'une anse  $\hat{\rho}_t(C, C')$  recollée sur  $\partial R$  le long de  $(C \cup C') \cup \cdots \cup (\phi^{t\omega}(C \cup C'))$ .

*Démonstration.* — Soient  $p$  le point périodique de  $E$  et  $p'$  celui de  $E'$ . Rappelons que par le lemme 7.6.19, les points périodiques  $p$  et  $p'$ , s'ils sont différents, ont même période  $q$ .

Montrons d'abord que l'une des deux composantes connexes de  $\partial R \setminus (C \cup C')$  contient les deux points périodiques  $p$  et  $p'$ . C'est clair si  $p = p'$ . Sinon, le lemme 7.7.2

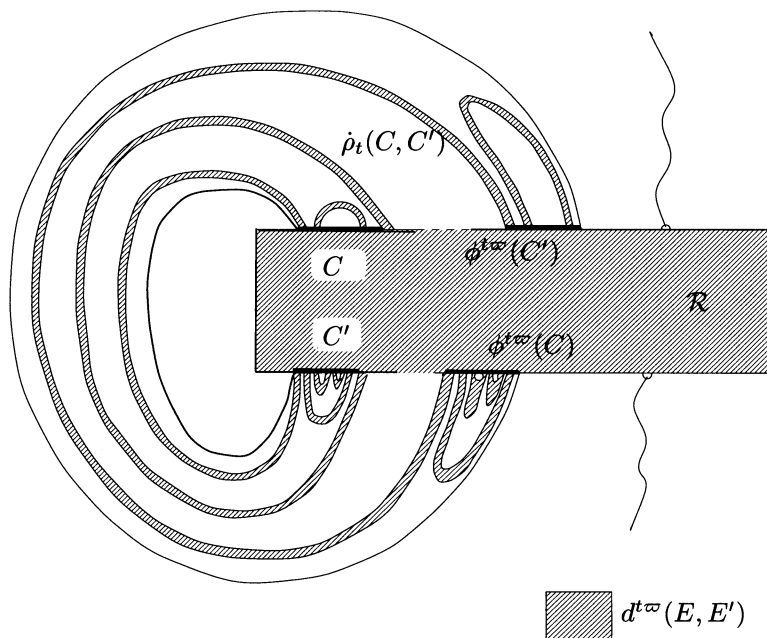


FIGURE 16. La couronne formée par  $R$  et l'anse  $\dot{\rho}_t(C, C')$

nous donne que les séparatrices embryonnaires  $E$  et  $E'$ , orientées vers leur point périodique, sont orientées toutes deux dans le même sens (de gauche à droite ou de droite à gauche). On en déduit le résultat (cf. la figure 16). Appelons  $I_0$  l'union de cette composante connexe contenant  $p$  et  $p'$  et des domaines fondamentaux  $C$  et  $C'$  et notons  $x$  et  $y$  les extrémités de  $I_0$ .

Définissons les segments emboîtés

$$I_1 = [\phi^q(x), \phi^q(y)] \subset I_0$$

$$I_2 = [\phi^{2q}(x), \phi^{2q}(y)] \subset I_1$$

...

$$I_{t\pi} = [\phi^{t\pi q}(x), \phi^{t\pi q}(y)] = [\phi^{t\varpi}(x), \phi^{t\varpi}(y)] \subset I_{t\pi-1}.$$

On déduit de la proposition 7.7.5 que, pour tout  $k$ , l'union de  $\Delta(E, E')$  et des rubans portés par  $I_k \setminus I_{k+1}$  est une surface plane (en remplaçant, dans  $d(E, E')$ , les rubans ayant leurs côtés horizontaux dans  $C \cup C'$  par les rubans ayant leurs côtés horizontaux dans  $I_k \setminus I_{k+1} = \phi^{kq}(C \cup C')$ ). Le corollaire 7.5.4 affirme alors que  $d^{t\varpi}(E, E')$  est plane. Le lemme 7.5.3, appliqué en prenant  $\mu = C \cup \phi^q(C) \cup \dots \cup \phi^{t\varpi}(C)$  et  $\mu' = C' \cup \phi^q(C') \cup \dots \cup \phi^{t\varpi}(C')$ , termine la preuve.  $\square$

**Lemme 7.7.11.** — Soient  $C$  et  $C'$  deux domaines fondamentaux couplés éléments de  $\Sigma$  et inclus respectivement dans les séparatrices embryonnaires  $E$  et  $E'$ . Supposons que  $E$

et  $E'$  soient incluses dans le bord de deux rectangles différents,  $R$  et  $R'$  respectivement. Soit  $q$  la période de  $E$ . Soient  $p$  et  $p'$  les points périodiques associés respectivement à  $E$  et  $E'$ . Notons  $\pi$  l'entier  $\varpi/q$ . Soit  $\Delta(E, E')$  le disque relatif à  $E$  et  $E'$  introduit dans la remarque juste avant la proposition 7.7.6.

Alors, pour tout  $t \geq 0$ , l'union du disque  $\Delta(E, E')$  et des rubans de  $\mathcal{R}_s$ , pour tout  $s \geq 6n + t\varpi$ , qui ont leurs côtés horizontaux dans

$$(C \cup C') \cup (\phi^q(C \cup C')) \cup \dots \cup (\phi^{t\varpi}(C \cup C'))$$

est une surface plane, que nous appellerons  $d^{t\varpi}(E, E')$ . Cette surface se plonge dans un disque formé par l'union de  $R$ , de  $R'$  et d'un rectangle  $\tilde{\rho}_t(C, C')$  dont un côté est recollé sur  $\partial R$  le long de  $C \cup \dots \cup (\phi^{t\varpi}(C))$  et l'autre sur  $\partial R'$  le long de  $C' \cup \dots \cup (\phi^{t\varpi}(C'))$ .

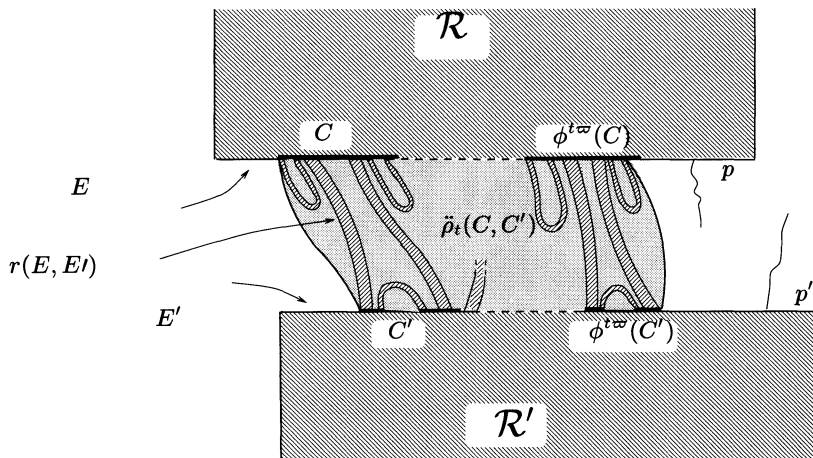


FIGURE 17. La surface  $d^{t\varpi}(E, E')$  est plane

*Démonstration.* — D'après le lemme 7.6.19, les points périodiques  $p$  et  $p'$  ont même période, égale à  $q$ .

Appelons  $A$  le côté horizontal de  $R$  qui contient  $C$ ,  $a$  le côté horizontal inclus dans  $C$  du ruban  $r_{(E, E')}$ ,  $A'$  et  $a'$  les segments analogues dans  $\partial R'$ . Le lemme 7.7.2 montre que les points périodiques  $p$  et  $p'$  sont tous les deux soit à droite, soit à gauche de  $a$  ou  $a'$  dans  $A \cup A'$  muni de l'orientation induite par celle des horizontales de  $r_{(E, E')}$ . Appelons  $x$  l'extrémité de  $C$  la plus proche de  $p$  et  $y$  celle de  $C'$  la plus proche de  $p'$ . Appelons  $I_0$  le segment de  $\partial\Delta(E, E')$  d'extrémités  $x$  et  $y$  qui contient les points périodiques  $p$  et  $p'$  ( $I_0$  est le complémentaire dans  $\partial\Delta(E, E')$  de l'intervalle union des intervalles entre  $a$  et  $p$  dans  $A$  et entre  $a'$  et  $p'$  dans  $A'$  et du côté vertical de  $r_{(E, E')}$  qui joint les extrémités de  $a$  et de  $a'$  concernées). Afin de bien considérer tous

les rubans portés par  $C \cup C'$  et autres que  $r_{(E,E')}$ , soit  $I_{-1}$  le plus petit segment de  $\partial\Delta(E, E')$  contenant  $I_0$  et les deux côtés horizontaux de tout ruban porté par l'union de l'intervalle de  $C$  entre  $a$  et  $x$  et de l'intervalle analogue de  $C'$ .

On peut, comme dans la preuve du lemme 7.7.10, définir des segments emboîtés de  $\partial\Delta(E, E')$  (cf. la figure 18) :

$$\begin{aligned}
 I_0 &\subset I_{-1} \\
 I_1 &= [\phi^q(x), \phi^q(y)] \subset I_0 \\
 I_2 &= [\phi^{2q}(x), \phi^{2q}(y)] \subset I_1 \\
 &\dots \\
 I_{t\pi} &= [\phi^{t\pi q}(x), \phi^{t\pi q}(y)] = [\phi^{t\varpi}(x), \phi^{t\varpi}(y)] \subset I_{t\pi-1}.
 \end{aligned}$$

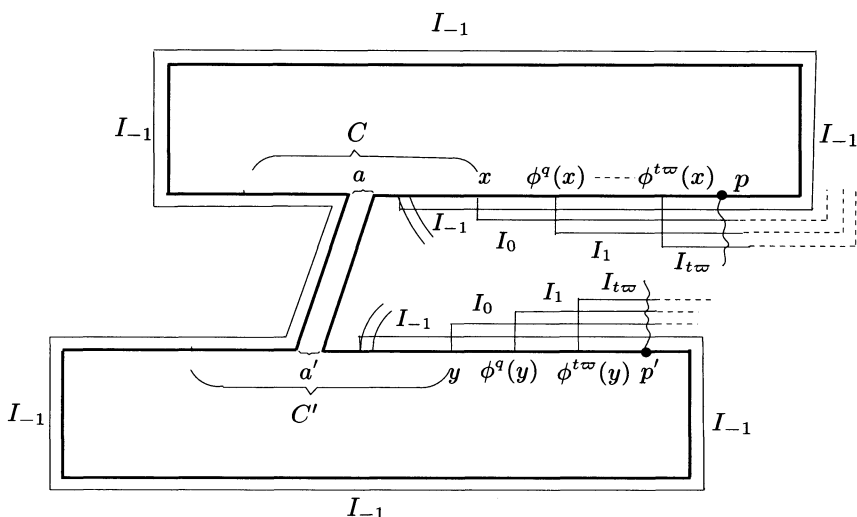


FIGURE 18. Les segments emboîtés

Soient  $z$  l'extrémité de  $C$  la plus éloignée du point périodique  $p$  et  $z'$  l'extrémité de  $C'$  la plus éloignée de  $p'$ . Le ruban  $r_{(E,E')}$  a été choisi de telle sorte que les rubans qui ont un côté horizontal inclus dans  $C$  entre  $z$  et  $a$  ont tous leurs deux côtés horizontaux dans  $C$  (entre  $z$  et  $a$ ). De même, les rubans qui ont un côté dans  $C'$  entre  $z'$  et  $a'$  ont tout leur bord horizontal entre  $z'$  et  $a'$ . Considérons l'union  $\tilde{\Delta}(E, E')$  de  $\Delta(E, E')$  et des rubans portés par  $I_{-1} \setminus I_{t\pi}$  : dans  $\tilde{\Delta}(E, E')$ , il n'y a donc pas de ruban porté par les sous-segments de  $I_{-1}$  situés entre  $z$  et  $a$  et entre  $z'$  et  $a'$ . Ici aussi, la proposition 7.7.5 et le corollaire 7.5.4 montrent que  $\tilde{\Delta}(E, E')$  est une surface plane. L'item 2 du lemme 7.5.3 nous donne alors une anse  $\alpha(E, E')$  contenant tous les rubans portés par  $I_{-1} \setminus I_{t\pi}$  et recollée sur  $\partial\tilde{\Delta}(E, E')$  le long de  $I_{-1} \setminus I_{t\pi}$ .

Considérons alors le disque  $D = R \cup \alpha(E, E') \cup R'$ . Sur son bord sont attachées l'anse  $r_{(E,E')}$  et les rubans qu'on a ignorés pour former  $\tilde{\Delta}(E, E')$  (cf. la figure 19).

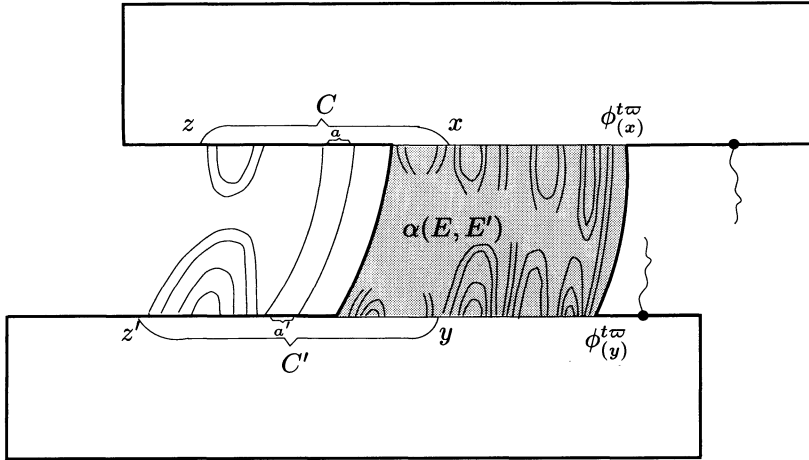


FIGURE 19. Le disque  $D = R \cup R' \cup \alpha(E, E')$  et les anses attachées sur son bord

Une des composantes connexes de  $\partial D \setminus \{z, z'\}$  contient les deux points périodiques, l'autre, que nous notons  $J$ , contient les côtés horizontaux de toutes les anses attachées sur le bord de  $D$ . En appliquant le lemme 7.5.3, on obtient un disque  $\tilde{D}$  qui contient toutes ces anses et dont l'intersection avec  $D$  est réduite au segment  $J$ .

Le rectangle  $\tilde{\rho}_t(C, C')$  annoncé est l'union de l'anse  $\alpha(E, E')$  et du disque  $\tilde{D}$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 7.7.1.* — Soit  $\tilde{\mathcal{R}}_t$  la surface obtenue de  $\mathcal{R}_{6n+t\omega}$  en la privant de l'intérieur et des côtés verticaux de tout ruban ayant un côté horizontal entre un domaine fondamental  $\phi^{t\omega}(C_i)$  et le point périodique  $p_i$  qui lui est associé. Pour tout  $m \geq 6n$ , il existe  $t_0 \geq m$  tel que  $\mathcal{R}_m$  soit incluse dans  $\tilde{\mathcal{R}}_t$  pour tout  $t \geq t_0$ . Il suffit donc de montrer que  $g(\tilde{\mathcal{R}}_t)$  est égal à  $g_{6n}$ .

Pour tout domaine fondamental  $C \in \Sigma$  non couplé, le lemme 7.7.9 nous donne un disque  $\delta_0(C)$ . De même, on associe à toute paire de domaines fondamentaux couplés éléments de  $\Sigma$  une anse  $\dot{\rho}_0(C, C')$  ou un rectangle  $\tilde{\rho}_0(C, C')$  par les lemmes 7.7.10 et 7.7.11. Soit  $\tilde{\mathcal{R}}_0$  la surface obtenue comme union de  $\tilde{\mathcal{R}}_0$ , des disques  $\delta_0(C)$  pour tous les  $C \in \Sigma$  non couplés, des anses  $\dot{\rho}_0(C, C')$  et des rectangles  $\tilde{\rho}_0(C, C')$  pour toutes les paires  $(C, C')$  de domaines fondamentaux couplés. Appelons  $\tilde{\mathcal{R}}_t$  l'union de  $\tilde{\mathcal{R}}_0$ , des disques  $\delta_t(C)$ , des anses  $\dot{\rho}_t(C, C')$  et des rectangles  $\tilde{\rho}_t(C, C')$ .

Par les lemmes 7.7.9, 7.7.10 et 7.7.11, la surface  $\tilde{\mathcal{R}}_t$  se plonge dans  $\tilde{\mathcal{R}}_t$ . De plus, chaque disque  $\delta_t(C)$  se rétracte par déformation sur  $\delta_0(C) \cup \text{Adh}(C_t)$ , chaque anse  $\dot{\rho}_t(C, C')$  sur  $\dot{\rho}_0(C, C') \cup (\phi^a(C \cup C')) \cup \dots \cup (\phi^{t\omega}(C \cup C'))$  et chaque rectangle  $\tilde{\rho}_t(C, C')$  sur  $\tilde{\rho}_0(C, C') \cup (\phi^a(C \cup C')) \cup \dots \cup (\phi^{t\omega}(C \cup C'))$ .

La surface  $\tilde{\mathcal{R}}_t$  se rétracte donc par déformation sur  $\tilde{\mathcal{R}}_0$ . Ceci implique que  $\mathcal{R}_{6n}$  et  $\tilde{\mathcal{R}}_t$  ont toutes les deux même genre que  $\tilde{\mathcal{R}}_0$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

**7.8. Les obstructions donnent à  $T$  un genre infini**

Nous allons montrer ici que si la surface  $\mathcal{R}_m$  présente l'une des obstructions (1), (2), (3) définies au paragraphe 7.4, le genre du type géométrique  $T$  sans double-bord est infini :

**Proposition 7.8.1.** — *S'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que la surface  $\mathcal{R}_m$  présente l'une des trois obstructions (1), (2) ou (3) (cf. la définition 7.4.7), le genre du type géométrique  $T$  est infini.*

Cette proposition est la réciproque de la proposition 7.7.1. Elle donne la fin de la démonstration du théorème 7.4.8 qui est l'objet principal de ce chapitre.

Dans tout ce paragraphe,  $\psi$  désignera la plus petite puissance de  $\phi$  laissant fixes toutes les séparatrices de l'homéomorphisme choisi pour la réalisation du type géométrique  $T$ .

Voici une série de lemmes dont les cinq premiers servent à montrer les trois derniers qui, eux, donnent la preuve de la proposition 7.8.1.

**Lemme 7.8.2.** — *Supposons qu'il existe, dans  $\mathcal{R}_m$ , une séparatrice embryonnaire  $E$  et un ruban  $r$  avec ses deux côtés horizontaux inclus dans  $E$ . S'il existe un ruban  $r'$  avec un côté horizontal dans  $E$  entre les deux composantes connexes de  $\partial^h r$  et l'autre dans  $E$  mais disjoint du plus petit segment contenant  $\partial^h r$ , alors la suite  $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini quand  $l$  tend vers l'infini.*

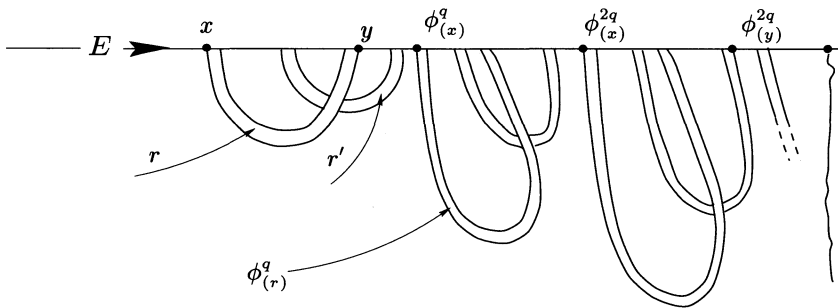


FIGURE 20. Les itérés de  $r$  et  $r'$  donnent du genre infini

*Démonstration.* — Soit  $[x, y] \subset E$  le plus petit segment contenant les côtés horizontaux de  $r$  et de  $r'$ , le point  $y$  étant entre  $x$  et le point périodique  $p$  de  $E$ . Soit  $q$  un entier tel que  $\psi^q([x, y])$  soit disjoint de  $[x, y]$  (il suffit que  $\psi^q(x)$  soit entre  $y$  et  $p$ ). Considérons  $R$ , le rectangle de la partition contenant  $E$  dans son bord. La surface  $R \cup r \cup r'$  est de genre 1 (cf. la définition à la fin du paragraphe 7.3) par le lemme 7.5.2. Les segments  $[x, p], [\psi^q(x), p], \dots, [\psi^{lq}(x), p]$  sont emboîtés donc le lemme 7.5.5 nous assure que la surface  $R \cup (r \cup r') \cup \dots \cup (\psi^{lq}(r) \cup \psi^{lq}(r'))$  est de genre au moins  $l$  (cf. la

figure 20). Le genre de toute surface  $\mathcal{R}_m$  contenant  $R \cup (r \cup r') \cup \dots \cup (\psi^{lq}(r) \cup \psi^{lq}(r'))$  est par conséquent supérieur ou égal à  $l$ . Comme dans ce cas la surface  $\mathcal{R}_{m+q}$  contient  $\psi^{(l+1)q}(r) \cup \psi^{(l+1)q}(r')$ , on a le résultat.  $\square$

**Lemme 7.8.3.** — *Supposons qu'il existe, dans  $\mathcal{R}_m$ , deux séparatrices embryonnaires  $E_1$  et  $E_2$  et deux rubans  $r_1$  et  $r_2$  joignant  $E_1$  à  $E_2$ . Supposons de plus qu'il existe un ruban  $r$  avec un côté horizontal dans  $E_1$  entre  $r_1 \cap E_1$  et  $r_2 \cap E_1$  tel que son autre côté horizontal soit dans  $E_2$  mais disjoint du plus petit segment  $a$  de  $E_2$  contenant  $(r_1 \cap E_2) \cup (r_2 \cap E_2)$ . Alors la suite  $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini quand  $l$  tend vers l'infini.*

*Démonstration.* — Soit  $R$  le rectangle de la partition de Markov contenant  $E_2$  dans son bord,  $\tilde{R}$  celui contenant  $E_1$  dans son bord. Soit  $r'$  un itéré positif de  $r$  par  $\psi$  (laissant fixes toutes les séparatrices) tel que :

1. le côté horizontal  $r' \cap E_2$  soit disjoint du segment  $a$ ,
2. le côté horizontal  $r' \cap E_1$  ne soit pas situé entre  $r_1 \cap E_1$  et  $r_2 \cap E_1$  (il est donc entre le point périodique  $p_1$  de  $E_1$  et  $(r_1 \cup r_2) \cap E_1$ ).

Appelons  $a'$  le plus petit segment de  $E_2$  contenant  $a$  et dont une extrémité est le point périodique  $p_2$  de  $E_2$  et  $b$  le plus petit segment de  $E_2$  contenant  $r \cap E_2$  et  $r' \cap E_2$ .

Étudions, dans un premier temps, le cas où les segments  $a$  et  $b$  sont disjoints, autrement dit où les côtés horizontaux  $r \cap E_2$  et  $r' \cap E_2$  sont tous deux inclus dans  $a'$  ou tous deux inclus dans  $E_2 \setminus a'$ . Considérons une horizontale  $\mathcal{H}$  du rectangle  $R$ . Les verticales de  $R$  issues des extrémités de  $a$  coupent  $\mathcal{H}$  chacune en un point, déterminant ainsi dans  $R$  un sous-rectangle  $R_a$  dont l'union avec les rubans  $r_1$  et  $r_2$  forme une anse  $A_a$  attachée sur  $E_1$ . On définit de même, grâce à  $\mathcal{H}$  et aux verticales de  $R$  issues des extrémités de  $b$ , un rectangle  $R_b$  dont l'union avec les rubans  $r$  et  $r'$  est une anse  $A_b$ , attachée elle aussi sur  $E_1$  (cf. la figure 21).

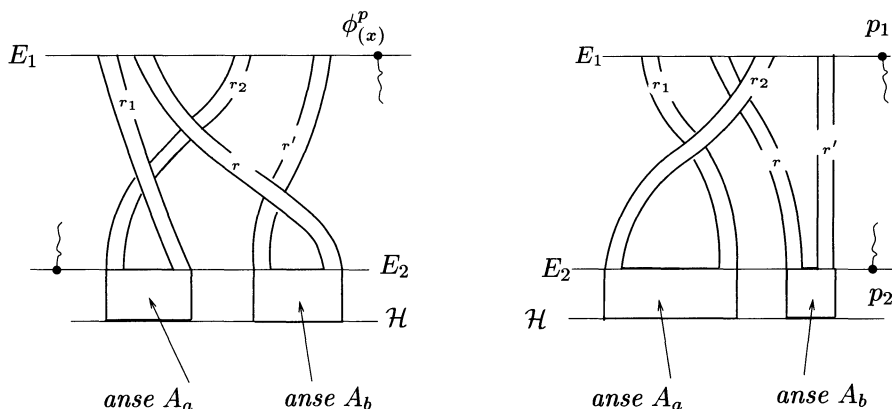


FIGURE 21. Les anses  $A_a$  et  $A_b$  : deux exemples



Nous allons utiliser  $A_a$  et  $A_b$  pour répéter l'argument de la preuve du lemme 7.8.2. Par le choix de  $r'$ , les anses  $A_a$  et  $A_b$  sont telles que leur union avec le rectangle  $\tilde{R}$  est une surface de genre 1 par le lemme 7.5.2. Soit  $x$  le point de  $E_1 \cap (r_1 \cup r_2)$  le plus éloigné du point périodique  $p_1$  de  $E_1$ . Le segment  $[x, p_1]$  de  $E_1$  contient les côtés horizontaux inclus dans  $E_1$  des quatre rubans  $r_1, r_2, r$  et  $r'$ . Soit  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $[\psi^q(x), p_1]$  soit disjoint de ces quatre côtés horizontaux. Nous pouvons alors définir des segments emboîtés en vue d'appliquer le lemme 7.5.5 qui va minorer le genre de l'union du rectangle  $\tilde{R}$  et des anses attachées sur son bord : soient

$$I_0 = [x, p_1] \supset I_1 = [\psi^q(x), p_1] \supset \cdots \supset I_l = [\psi^{lq}(x), p_1].$$

Pour  $j = 1, 2, \dots, l$ , prolongeons les rubans

$$\psi^{jq}(r_1), \psi^{jq}(r_2) \quad \text{d'une part et} \quad \psi^{jq}(r), \psi^{jq}(r') \quad \text{d'autre part}$$

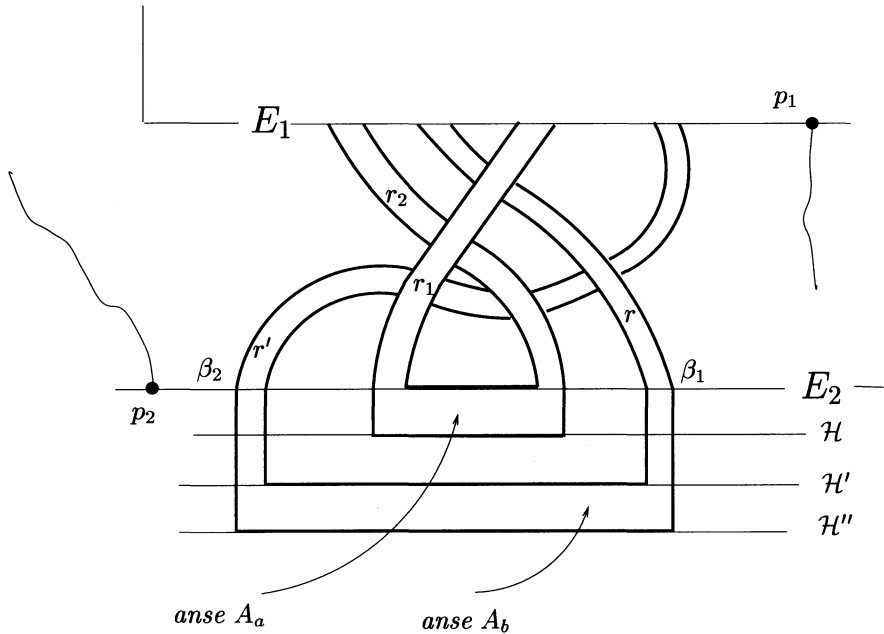
par un rectangle inclus dans  $R$  comme nous l'avons fait avec  $r_1, r_2$  et  $r, r'$  pour former les anses  $A_a$  et  $A_b$ . Nous obtenons ainsi deux nouvelles anses, notées respectivement  $A_a^{jq}$  et  $A_b^{jq}$ . Le lemme 7.5.5 affirme alors que la surface

$$\tilde{R} \cup (A_a \cup A_b) \cup \cdots \cup (A_a^{lq} \cup A_b^{lq})$$

est de genre au moins  $l$ . Le genre de toute surface  $\mathcal{R}_l$  contenant les rubans  $\psi^{lq}(r_1), \psi^{lq}(r_2), \psi^{lq}(r)$  et  $\psi^{lq}(r')$  (donc les anses  $A_a^{lq}$  et  $A_b^{lq}$ ) est par conséquent au moins  $l$ . Comme les anses  $A_a^{(l+1)q}$  et  $A_b^{(l+1)q}$  sont alors dans la surface  $\mathcal{R}_{l+q}$ , on a le résultat.

Traitons maintenant le cas où le segment  $a$  est inclus dans le segment  $b$ , autrement dit, d'après le choix de  $r'$ , où  $r \cap E_2$  est inclus dans  $E_2 \setminus a'$  et  $r' \cap E_2$  est inclus dans  $a'$  (en fait, dans  $a' \setminus a$ ). On reprend l'horizontale  $\mathcal{H}$  du cas précédent, en la choisissant suffisamment proche du côté horizontal de  $R$  contenant  $E_2$ . Reprenons aussi l'anse  $A_a$  construite grâce à  $\mathcal{H}$  et aux rubans  $r_1$  et  $r_2$ , ainsi que les anses  $A_a^{jq}$  contenant les itérés positifs par  $\psi$  de  $r_1$  et  $r_2$ . Comme  $a \subset b$ , la manière de construire l'anse  $A_b$  est légèrement différente. Soient  $\beta_1$  l'extrémité de  $b$  la plus éloignée du point périodique  $p_2$  et  $\beta_2$  son autre extrémité. Soient  $\mathcal{H}'$  et  $\mathcal{H}''$  deux horizontales de  $R$  plus éloignées de  $E_2$  que  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}'$  étant entre  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}''$ . Les verticales de  $R$  issues de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  coupent  $\mathcal{H}'$  et  $\mathcal{H}''$  et définissent ainsi un rectangle  $R_b$  inclus dans  $R$  et disjoint de l'anse  $A_a$ . Les segments verticaux de  $R$  joignant les extrémités de  $(r \cup r') \cap E_2$  autres que  $\beta_1$  et  $\beta_2$  au côté de  $R_b$  inclus dans  $\mathcal{H}'$  permettent, avec les verticales issues de  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , de prolonger dans  $R$  les rubans  $r$  et  $r'$  par deux rectangles. L'union de ces deux rectangles, de  $R_b$  et des rubans  $r$  et  $r'$  forme l'anse  $A_b$  (cf. la figure 22). La surface  $\tilde{R} \cup A_a \cup A_b$  est de genre 1. La fin de la démonstration est la même que dans le premier cas. □

**Lemme 7.8.4.** — *Supposons qu'il existe, dans  $\mathcal{R}_m$ , deux séparatrices embryonnaires  $E_1$  et  $E_2$  et deux rubans  $r_1$  et  $r_2$  joignant  $E_1$  à  $E_2$ . Supposons de plus qu'il existe un ruban  $r$  avec un côté horizontal dans  $E_1$  entre  $r_1 \cap E_1$  et  $r_2 \cap E_1$  et l'autre côté*

FIGURE 22. Les anses  $A_a$  et  $A_b$  lorsque  $a < b$ 

horizontal dans  $E_1$  mais hors du plus petit segment contenant  $(r_1 \cup r_2) \cap E_1$ . Alors la suite  $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini quand  $l$  tend vers l'infini.

*Démonstration.* — C'est la même que la preuve du lemme précédent, à ceci près qu'ici, l'anse  $B$  est simplement le ruban  $r$ .  $\square$

**Lemme 7.8.5.** — Supposons qu'il existe, dans  $\mathcal{R}_m$ , deux séparatrices embryonnaires  $E_1$  et  $E_2$  et deux rubans  $r_1$  et  $r_2$  joignant  $E_1$  à  $E_2$ . Supposons de plus qu'il existe un ruban  $r$  avec un côté horizontal dans  $E_1$  entre  $r_1 \cap E_1$  et  $r_2 \cap E_1$  tel que son autre côté horizontal soit dans une séparatrice embryonnaire  $E$  différente de  $E_1$  et de  $E_2$ . Alors la suite  $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini quand  $l$  tend vers l'infini.

*Démonstration.* — Elle est identique à la preuve du lemme 7.8.3 (cf. la figure 23).  $\square$

**Lemme 7.8.6.** — Supposons qu'il existe, dans  $\mathcal{R}_m$ , deux séparatrices embryonnaires  $E$  et  $E' \neq E$  et un ruban  $r$  avec un côté horizontal dans  $E$  et l'autre dans  $E'$ . Orientons  $E$  et  $E'$  vers leur point périodique. Si cette orientation induit deux orientations opposées sur les côtés horizontaux de  $r$ , alors la suite  $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini quand  $l$  tend vers l'infini.

*Démonstration.* — Considérons le triplet de rubans  $(r, \psi(r), \psi^2(r))$ ,  $a$  le plus petit segment inclus dans  $E$  et contenant  $(r \cup \psi^2(r)) \cap E$  et  $b$  le segment analogue dans

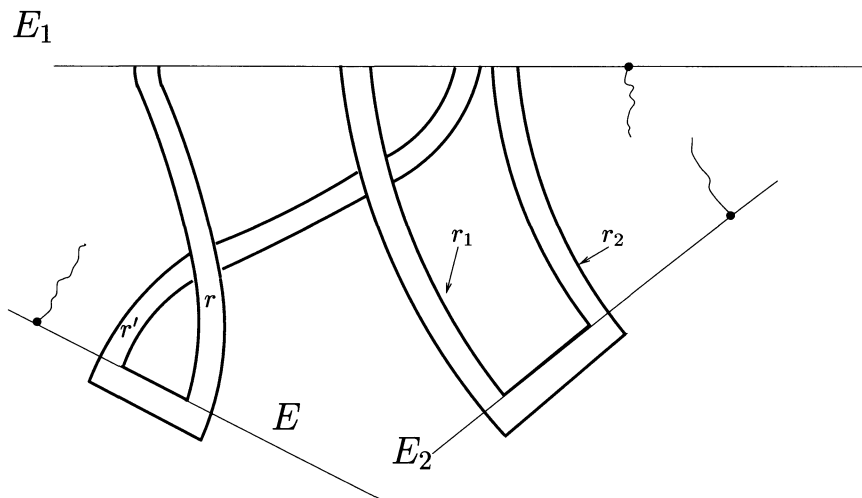
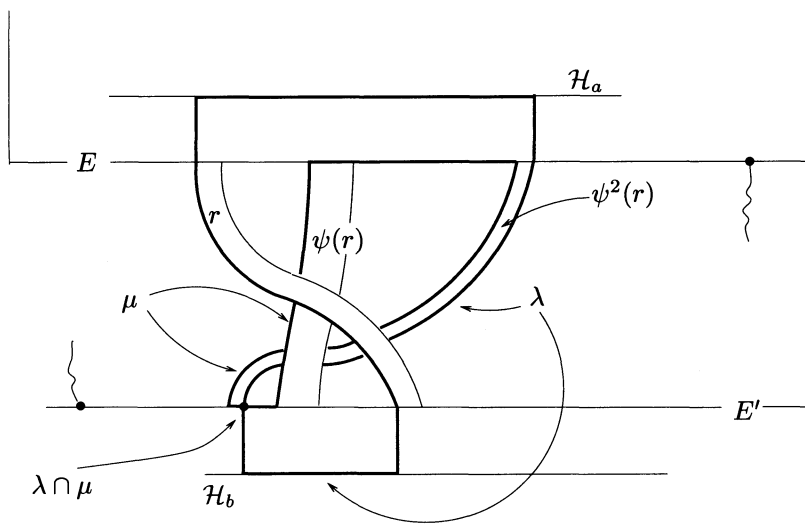


FIGURE 23. Le ruban  $r$  a un côté horizontal dans une troisième séparatrice

$E'$ . Les itérés par  $\psi^3$  de  $a$  et  $b$  sont deux-à-deux disjoints. Notons  $a_j$  et  $b_j$  respectivement les segments  $\psi^{3j}(a)$  et  $\psi^{3j}(b)$ . Soit  $\mathcal{H}_a$  une horizontale du rectangle contenant  $a$  dans son bord assez proche du côté contenant  $a$  et  $\mathcal{H}_b$  une horizontale du rectangle contenant  $b$  dans son bord assez proche du côté contenant  $b$ . Si  $a$  et  $b$  sont dans le bord d'un même rectangle  $R$ , les séparatrices embryonnaires  $E$  et  $E'$  ne peuvent pas être issues d'un même point périodique. En effet, comme  $\mathcal{R}_m$  est orientée, les côtés horizontaux de  $r$  munis de l'orientation induite par celle des séparatrices orientées vers leur point périodique ne peuvent pas, dans ce cas, être orientés en sens inverse. Le ruban  $r$  joint donc nécessairement les deux côtés horizontaux de  $R$ , ce qui assure qu'il n'y a pas d'ambiguïté pour choisir  $\mathcal{H}_a$  et  $\mathcal{H}_b$ .

Prolongeons les verticales issues des extrémités de  $a$  jusqu'à ce qu'elles coupent  $\mathcal{H}_a$  et appelons  $\alpha$  l'union des deux segments verticaux et du segment de  $\mathcal{H}_a$  joignant leurs extrémités. Soient  $x'$  et  $x''$  les points de  $b$  tels que  $x'$  et une extrémité de  $a$  soient dans un même côté du ruban  $r$  et  $x''$  et l'autre extrémité de  $a$  soient dans un même côté de  $\psi^2(r)$ . Prolongeons les verticales issues de  $x'$  et de  $x''$  jusqu'à ce qu'elles coupent l'horizontale  $\mathcal{H}_b$  et appelons  $\beta$  l'union des deux segments verticaux et du segment de  $\mathcal{H}_b$  joignant leurs extrémités. Nous pouvons alors considérer le lacet  $\lambda$  union de  $\alpha$ ,  $\beta$  et des côtés des rubans  $r$  et  $\psi^2(r)$  qui joignent leurs extrémités (cf. la figure 24). Les lacets analogues  $\lambda_j$  construits grâce aux segments  $\psi^{3j}(a)$  et  $\psi^{3j}(b)$ , aux rubans qui ont leurs côtés horizontaux dedans et aux segments  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  sont deux-à-deux disjoints.

Considérons un autre lacet,  $\mu$ , construit de la manière suivante :  $\mu$  contient une extrémité (quelconque) de  $b$  ainsi que les deux côtés de ruban issus de ce point. Le

FIGURE 24. Les lacets  $\lambda$  et  $\mu$ 

segment  $\mu \cap b$  ne rencontre  $\psi(r)$  qu'en un de ses sommets et se prolonge à partir de ce sommet par le côté vertical de  $\psi(r)$  qui en est issu. Enfin, l'intersection de  $\mu$  et de  $a$  est le segment dont les extrémités sont celles des côtés verticaux de rubans inclus dans  $\mu$ . De même que pour  $\lambda$ , les lacets  $\mu_j$  sont deux-à-deux disjoints.

Les lacets  $\lambda_j$  et  $\mu_j$  sont ainsi construits qu'ils se coupent transversalement en un et un seul point (itéré de  $x'$  si  $x' \in \mu$ , itéré de  $x''$  si  $x'' \in \mu$ ) et que les unions  $\lambda_j \cup \mu_j$  sont deux-à-deux disjointes.

Soit  $Y$  la surface union des (ou du) rectangles contenant  $E \cup E'$  et des rubans  $\psi^k(r)$  ayant leurs côtés horizontaux dans  $(a \cup a_1 \cup \dots \cup a_l) \cup (b \cup b_1 \cup \dots \cup b_l)$ . L'existence des  $l$  paires  $(\lambda_j, \mu_j)$  nous assure que le genre de  $Y$  est supérieur ou égal à  $l$  (cf. la définition du genre d'une surface compacte rappelée à la fin du paragraphe 7.3). Par conséquent, toute surface  $\mathcal{R}_m$  contenant  $\psi^{5l}(r)$  est de genre au moins égal à  $l$ .  $\square$

**Lemme 7.8.7.** — *Supposons que  $\mathcal{R}_{6n}$  présente une obstruction (3). Alors la suite  $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$ , où  $g_l$  est le genre de la surface  $\mathcal{R}_l$ , tend vers l'infini quand  $l$  tend vers l'infini.*

*Démonstration.* — Notons  $r$  et  $r_1$  les deux rubans créant une obstruction (3) et  $E$  la séparatrice embryonnaire qui contient un côté horizontal de  $r$  et un de  $r_1$ . Quitte à intervertir  $r$  et  $r_1$ , supposons que  $r \cap E$  est plus proche du point périodique  $p$  de  $E$  que  $r_1 \cap E$ . Soit  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $\psi^q(r_1 \cap E)$  soit situé dans  $E$  entre  $r \cap E$  et le point  $p$  (cf. la figure 25). On peut alors appliquer le lemme 7.8.5 pour achever la preuve de ce lemme-ci.

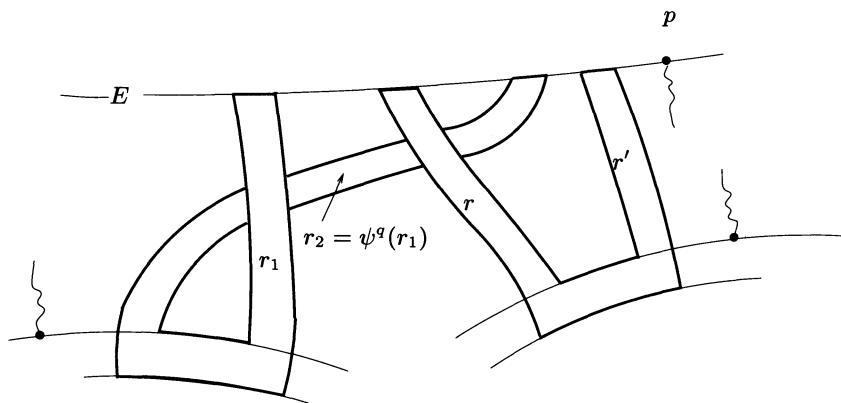


FIGURE 25. Les anses impliquées par l'obstruction (3)

□

**Lemme 7.8.8.** — *Supposons que  $\mathcal{R}_{6n}$  présente une obstruction (1). Alors la suite  $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$ , où  $g_l$  est le genre de la surface  $\mathcal{R}_l$ , tend vers l'infini quand  $l$  tend vers l'infini.*

*Démonstration.* — Appelons  $C$  le côté de rectangle dont parle l'obstruction (1),  $r_1$  le ruban qui joint  $C$  à lui-même et qui n'a entre ses deux côtés horizontaux qu'un et un seul côté horizontal du ruban  $r$ . Nous allons étudier successivement le cas où il n'y a pas de point périodique entre les deux composantes connexes de  $C \cap r_1$  et le cas où il y en a un.

Si  $C$  n'est pas périodique,  $r_1$  a un itéré positif par  $\psi$  dont les deux côtés horizontaux sont dans une séparatrice embryonnaire  $E$  et tel que l'itéré de  $r$  correspondant ait un côté horizontal dans  $E$  entre ceux de l'itéré de  $r_1$  et l'autre côté horizontal dans une séparatrice embryonnaire  $E'$ . Par ailleurs, si  $C \cap r_1$  est inclus dans une séparatrice embryonnaire  $E$ , le ruban  $r_1$  a un itéré positif par  $\psi$  tel que les côtés horizontaux de l'itéré correspondant de  $r$  soient inclus tous deux dans des séparatrices embryonnaires (dont l'une au moins est  $E$ ). Quitte à prendre des itérés de  $r_1$  et  $r$ , il suffit donc d'étudier le cas où  $C \cap r_1$  est inclus dans  $E$  et où  $r$  a un côté horizontal dans  $E$  entre ceux de  $r_1$  et l'autre dans  $E'$ . Si  $E'$  est égale à  $E$ , le lemme 7.8.2 donne le résultat. Supposons que les séparatrices embryonnaires  $E$  et  $E'$  soient distinctes (cf. la figure 26). Considérons, en plus des rubans  $r_1$  et  $r$ , l'itéré  $\psi^q(r)$  où  $q \in \mathbb{N}$  est tel que  $\psi^q(r) \cap E$  ne soit pas entre les côtés horizontaux de  $r_1$ . On applique alors le lemme 7.8.4 pour conclure.

Supposons enfin qu'il existe un point périodique  $p$  entre les composantes connexes de  $r_1 \cap C$ . Appelons  $E$  et  $E'$  les séparatrices embryonnaires issues de  $p$ , en posant que  $E'$  contient  $r \cap C$ . Quitte à prendre un itéré de  $r$ , on peut supposer que le côté

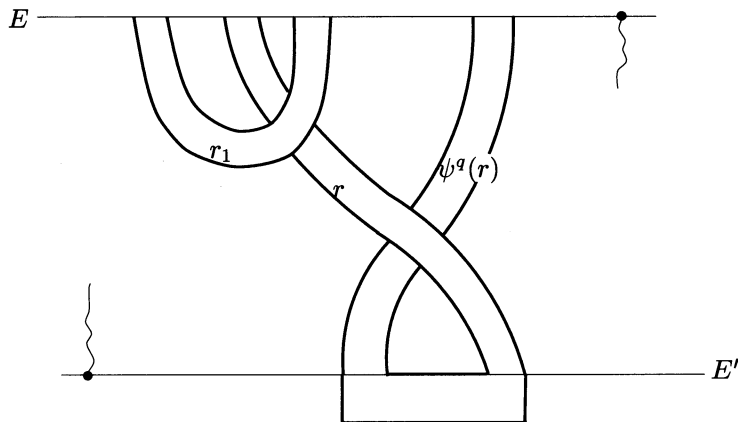


FIGURE 26. L'obstruction (1) avec  $E \neq E'$  et  $(r_1 \cap C) \subset E$

horizontal de  $r$  qui n'est pas entre les côtés horizontaux de  $r_1$  est dans une séparatrice embryonnaire  $E^*$  (cf. la figure 27).

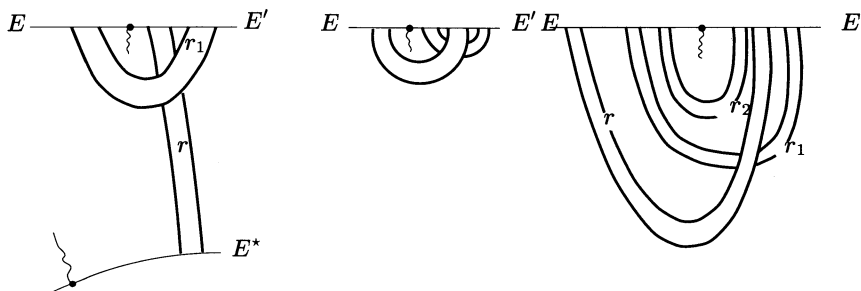


FIGURE 27. L'obstruction (1) avec un point périodique entre les côtés horizontaux de  $r_1$

Si cette séparatrice embryonnaire  $E^*$  est différente de  $E$  et  $E'$ , le lemme 7.8.5 donne le résultat. Si  $r$  a ses deux côtés horizontaux dans  $E' = E^*$ , on retombe dans le premier cas traité ici car il n'y a pas de point périodique entre les deux composantes connexes de  $r \cap E'$ . Si le ruban  $r$  a un côté horizontal dans  $E'$  et l'autre dans  $E$ , considérons l'itéré  $\psi^q(r_1) = r_2$ , où  $q$  est un entier tel que  $r_2 \cap E'$  est plus proche du point périodique  $p$  que  $r \cap E'$ . Le lemme 7.8.3 permet alors de conclure, ce qui termine la démonstration. □

**Lemme 7.8.9.** — *Supposons que  $\mathcal{R}_{6n}$  présente une obstruction (2). Alors la suite  $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$ , où  $g_l$  est le genre de la surface  $\mathcal{R}_l$ , tend vers l'infini quand  $l$  tend vers l'infini.*

*Démonstration.* — Soient  $A$  et  $A'$  les deux côtés horizontaux de rectangles et  $r$  et  $r'$  les deux rubans qui apparaissent dans l'obstruction (2).

Étudions d'abord le cas où il n'y a pas de point périodique ni entre  $r \cap A$  et  $r' \cap A$ , ni entre  $r \cap A'$  et  $r' \cap A'$ . Quitte à prendre des itérés de  $r$  et  $r'$ , on peut supposer que leurs côtés horizontaux sont en fait dans deux séparatrices embryonnaires  $E$  et  $E'$  (non nécessairement incluses dans deux côtés horizontaux différents de la partition de Markov). Supposons que  $r \cap E$  est plus proche du point périodique de  $E$  que  $r' \cap E$ . On a alors deux situations possibles :

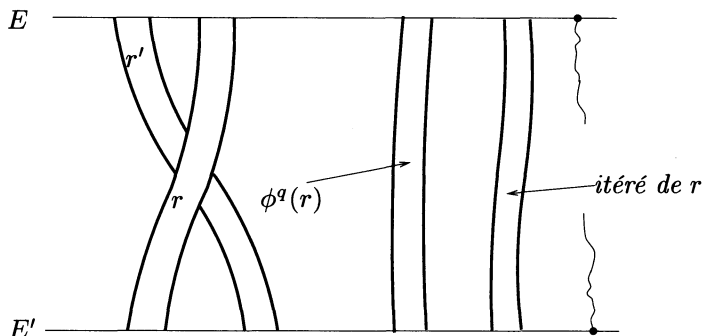


FIGURE 28. L'obstruction (2) avec  $r$  et  $r'$  joignant  $E$  à  $E' \neq E$

- Si  $E' = E$ , on a une obstruction (1) donc le lemme 7.8.8 donne le résultat.
- Si  $E' \neq E$  et si l'orientation de  $E$  et  $E'$  vers leur point périodique induit sur le côté horizontal de  $r$  et sur celui de  $r'$  inclus dans  $E$  la même orientation que sur leur côté horizontal inclus dans  $E'$ , soit  $q \in \mathbb{N}$  tel que l'itéré  $\psi^q(r)$  ait son côté horizontal dans  $E'$  plus proche du point périodique que  $r' \cap E'$  (cf. la figure 28). Le lemme 7.8.3 nous donne, dans ce cas, le résultat.
- Si  $E' \neq E$  et si les côtés horizontaux de  $r$  orientés par l'orientation induite par celle de  $E$  et  $E'$  vers leur point périodique sont opposées, on utilise le lemme 7.8.6.

Traisons maintenant le cas où il existe un point périodique  $p$  entre  $r \cap A$  et  $r' \cap A$ . Deux sous-cas se présentent (cf. la figure 29) :

- S'il y a aussi un point périodique  $p'$  entre  $r \cap A'$  et  $r' \cap A'$ , orientons les quatre séparatrices embryonnaires vers leur point périodique. Chacun des deux rubans  $r$  et  $r'$  vérifie les hypothèses du lemme 7.8.6, ce qui donne le résultat.
- S'il n'existe pas de point périodique entre  $r \cap A'$  et  $r' \cap A'$ , quitte à prendre des itérés de  $r$  et  $r'$ , on peut supposer que  $A'$  est périodique. Les rubans  $r$  et  $r'$  créent dans ce cas une obstruction (3), on applique le lemme 7.8.7 pour conclure.  $\square$

*Démonstration de la proposition 7.8.1.* — Les trois lemmes 7.8.7, 7.8.8 et 7.8.9 montrent successivement que chacune des trois obstructions correspond à une suite de genres  $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$  qui tend vers l'infini. Ils constituent donc la preuve de la proposition 7.8.1.  $\square$

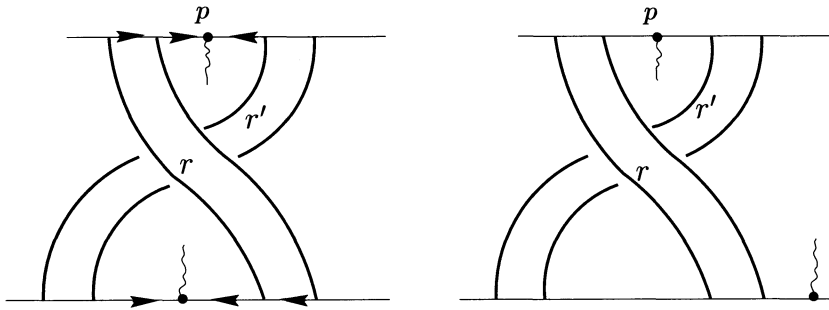


FIGURE 29. L'obstruction (2) avec un point périodique entre  $r \cap A$  et  $r' \cap A$

### 7.9. Le cas des types géométriques à un seul rectangle

Si l'on sait d'un type géométrique sans double-bord de partition de Markov qu'il est réalisable, le corollaire 7.3.10 assure que son genre est fini. Un problème intéressant et naturel est alors de calculer (ou au moins d'estimer) le genre de ce type géométrique réalisable.

Nous nous intéressons, dans ce paragraphe, au cas le plus simple : celui d'un type géométrique de genre fini sans double-bord  $T$  qui n'a qu'un seul rectangle  $R$ . Les résultats obtenus dans les paragraphes précédents (en particulier dans les paragraphes 7.3, 7.4, 7.5 et 7.8) vont nous permettre de montrer que  $T$  est de genre nul, *i.e.* qu'il existe une surface compacte *planaire* munie d'un difféomorphisme de Smale dont un ensemble hyperbolique admet une partition de Markov de type géométrique  $T$ .

**Proposition 7.9.1.** — *Soit  $T = (1, \{h\}, \{v = h\}, \Phi)$  un type géométrique sans double-bord de partition de Markov à un rectangle. Si  $T$  est de genre fini, son genre  $g(T)$  est nul.*

*Démonstration.* — Supposons que  $g(T) = g$  soit fini et ne soit pas nul. Le genre de  $T$  est défini indépendamment de la réalisation  $(\{R\}, \Phi)$  choisie (*cf.* le paragraphe 7.3 et en particulier la proposition 7.3.5). Considérons donc  $(\{R\}, \Phi)$  une réalisation quelconque de  $T$ . Appelons  $\mathcal{R}_m$  sa  $m^{\text{ième}}$ -réalisante et  $g_m$  le genre de cette surface compacte  $\mathcal{R}_m$ . Puisque  $g \neq 0$ , la proposition 7.7.1 nous affirme que  $g_6 = g$  est non nul.

Nous avons vu, au paragraphe 7.3, que le rectangle  $R$  se plongeait dans  $\mathcal{R}_m$  pour tout  $m$  donc en particulier dans  $\mathcal{R}_6$ . De plus, le lemme 7.4.4 implique que l'adhérence de  $\mathcal{R}_6 \setminus R$  est l'union (disjointe) de tous les rubans de  $\mathcal{R}_6$  (portés par  $\partial R$ ). La surface  $\mathcal{R}_6$  est donc un disque topologique  $\tilde{R}$  sur le bord duquel sont attachés sans twist, par leurs côtés horizontaux, un nombre fini de rubans  $r_i$ . Cette remarque nous place dans le cadre d'application des lemmes du paragraphe 7.5 (*cf.* la définition 7.5.1). Comme le genre de  $\mathcal{R}_6$  est non nul, le lemme 7.5.2 affirme qu'il existe deux rubans  $r$  et  $\tilde{r}$  de



$\mathcal{R}_6$  tels que les côtés horizontaux  $c$  et  $c'$  de  $r$  apparaissent dans  $\partial R$  en alternance avec les côtés horizontaux  $\tilde{c}$  et  $\tilde{c}'$  du ruban  $\tilde{r}$ .

Si l'un des deux rubans  $r$  ou  $\tilde{r}$  a ses deux côtés horizontaux dans un même côté horizontal du rectangle  $R$ , la surface  $\mathcal{R}_6$  présente une obstruction (1) donc le genre du type géométrique  $T$  est infini par le lemme 7.8.8, ce qui contredit l'hypothèse.

Il n'y a donc qu'un côté horizontal de  $r$  et qu'un côté horizontal de  $\tilde{r}$  dans chaque composante connexe de  $\partial^h R$ . L'hypothèse d'alternance de  $c, c'$  et  $\tilde{c}, \tilde{c}'$  dans le bord de  $R$  implique, d'après le lemme 7.7.7, que les rubans  $r$  et  $\tilde{r}$  créent une obstruction. En relisant la preuve de ce lemme, on peut même préciser que c'est une obstruction (2). Comme ci-dessus, il en découle que le genre du type géométrique est infini, par application du lemme 7.8.9, ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Conjecture 4.** — *Si  $T$  est un type géométrique de genre fini sans double-bord à  $n$  rectangles, alors son genre est inférieur à  $n(2n - 1)$ .*

*Idée d'esquisse de tentative d'ébauche de démonstration.* — Le genre de  $T$  est fini donc par la proposition 7.8.1, la surface  $\mathcal{R}_{6n}$  ne présente aucune des trois obstructions. La proposition 7.7.1 dit alors que le genre de  $T$  est égal au genre de  $\mathcal{R}_{6n}$ .

Si  $A$  et  $B$  sont deux côtés horizontaux dont au moins l'un est non-périodique, on déduit de l'absence d'obstructions (1) et (2) que l'union des rubans ayant leur bord horizontal dans  $A \cup B$  et des rectangles contenant  $A$  et  $B$  dans leur bord est une surface plane. Si  $A$  et  $B$  sont deux côtés périodiques, les propositions 7.6.8 (qui donne l'existence de domaines fondamentaux autonomes couplés  $C_A$  et  $C_B$ ) et 7.7.5 (qui dit que les rubans qui ont un côté horizontal dans  $C_A \cup C_B$  forment avec les rectangles contenant  $A$  et  $B$  une surface plane) permettent d'affirmer le même résultat : l'union des rectangles contenant  $A$  et  $B$  et des rubans avec leurs côtés horizontaux dans  $A \cup B$  est plane.

Considérons donc la sous-surface suivante de  $\mathcal{R}_{6n}$ , qui a même genre qu'elle : dans  $\mathcal{R}_{6n}$ , on supprime tout ruban qui a ses deux côtés horizontaux dans un même côté horizontal de rectangle et dès qu'il existe un ruban  $r$  avec un côté dans  $A$  et l'autre dans  $B \neq A$ , on supprime tous les rubans qui joignent  $A$  à  $B$  sauf  $r$ . Les  $n$  rectangles apportent  $2n$  côtés horizontaux donc  $n(2n - 1)$  paires différentes de côtés horizontaux. Cette construction revient donc à considérer l'union  $X$  des  $n$  rectangles et d'au plus  $n(2n - 1)$  rubans  $r_i$  tels que, pour tout  $i$ , les côtés horizontaux de  $r_i$  sont dans deux côtés horizontaux différents des rectangles de la partition et tels que, si  $r_i$  et  $r_j$  ont chacun un côté dans  $A$  et un côté dans  $B \neq A$ , alors  $i = j$ . Supprimer l'un de ces rubans diminue le genre de  $X$  d'au plus 1. Le genre de  $X$  est donc inférieur ou égal à  $n(2n - 1)$  et cette inégalité est encore vraie pour le genre de  $T$ .

On peut même espérer améliorer ce majorant en remarquant que l'absence d'obstruction (3) apporte une contrainte (non utilisée ici) sur les rubans  $r_i$  joignant deux côtés périodiques.  $\square$

## CHAPITRE 8

### PIÈCES BASIQUES ET HOMÉOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV (PAR C. BONATTI ET E. JEANDENANS)

Nous avons vu que toute classe d'équivalence d'arches d'un attracteur ou répulseur hyperbolique est un zip. D'autre part, G. Ruas montre dans sa thèse (voir [Ru]) que la restriction d'un difféomorphisme d'une surface compacte au bassin d'attraction d'un attracteur hyperbolique transitif est semi-conjugue à un homéomorphisme pseudo-Anosov (avec un ensemble fini de points marqués). Cette semi-conjugaison est très naturelle : elle consiste essentiellement à remplacer toute  $u$ -arche par un point. Ce travail n'a jamais été publié.

Le but de cette partie est de démontrer une généralisation du résultat de Ruas : nous considérons une pièce basique (ensemble hyperbolique saturé transitif) d'un difféomorphisme de Smale  $f$  d'une surface compacte, telle que ses variétés invariantes ne possèdent pas d'impasse, ce qui revient à dire que toute classe d'équivalence d'arches est un zip. Nous montrons que la restriction de  $f$  au domaine de la pièce basique est semi-conjugue à un homéomorphisme pseudo-Anosov, la semi-conjugaison consistant essentiellement à écraser en un point toute arche et tout rectangle bordé par quatre arches.

Dans un premier paragraphe, nous rappelons les définitions de bases concernant les homéomorphismes pseudo-Anosov avec points marqués. Puis nous rappellerons la notion de mesures de Margulis  $\nu^s$  et  $\nu^u$  transverses aux variétés invariantes d'une pièce basique : ces mesures sont l'équivalent des mesures transverses aux feuilletages stables et instables des homéomorphismes pseudo-Anosov. Le troisième paragraphe construit la relation d'équivalence par laquelle nous quotienterons le domaine  $\Delta(K)$  d'une pièce basique sans impasse  $(K, f)$ , et le quatrième paragraphe montrera que le quotient de  $\Delta(K)$  est une surface compacte et que  $f$  passe au quotient en un homéomorphisme pseudo-Anosov avec points marqués.

### 8.1. Rappels sur les homéomorphismes pseudo-Anosov

**Définition 8.1.1.** — Soit  $S$  une surface et  $\mathcal{F}$  un feuilletage de  $S$  avec singularités isolées. On appelle mesure transverse invariante par holonomie une mesure  $\mu$  définie sur chaque arc transverse au feuilletage et vérifiant la propriété suivante :

Soient  $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow S$  deux arcs transverses à  $\mathcal{F}$ , isotopes à travers des arcs transverses dont les extrémités restent dans la même feuille. Alors  $\mu(\alpha) = \mu(\beta)$ .

**Définition 8.1.2.** — Soit  $S$  une surface compacte, connexe. On dit qu'un homéomorphisme  $f: S \rightarrow S$  est un homéomorphisme pseudo-Anosov si :

1. il existe deux feuilletages  $\mathcal{F}^s$  stable et  $\mathcal{F}^u$  instable invariants par  $f$  ayant le même ensemble fini de singularités ;
2. chaque singularité de  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  est une selle à au moins trois séparatrices (voir figure 1) ;
3.  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  sont transverses (en dehors de leur lieu singulier) ;
4.  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  admettent chacun une mesure transverse invariante par holonomie,  $\mu^s$  et  $\mu^u$  respectivement et il existe un réel  $\lambda > 1$ , qu'on appelle le facteur de dilatation de  $f$ , tel que  $f_*(\mu^s) = \lambda^{-1}\mu^s$  et  $f_*(\mu^u) = \lambda\mu^u$ , où la mesure image  $f_*(\mu^s)$  d'un arc  $\alpha$  transverse à  $\mathcal{F}^s$  est défini par  $f_*(\mu^s)(\alpha) = \mu^s(f^{-1}(\alpha))$ .

On étend la notion d'homéomorphisme pseudo-Anosov en définissant les homéomorphismes pseudo-Anosov avec points marqués :

**Définition 8.1.3.** — Soit  $f$  un homéomorphisme d'une surface compacte  $S$ . Soit  $K$  un ensemble fini invariant par  $f$ . On dit que  $f$  est un homéomorphisme pseudo-Anosov avec les points de  $K$  marqués si  $f$  satisfait toutes les propriétés d'un homéomorphisme pseudo-Anosov excepté l'item 2), qu'on remplace par :

2') les feuilletages stable et instable de  $f$  admettent en tout point de  $K$  une singularité à une branche appelée épine, les autres singularités étant de type selle à au moins trois séparatrices (voir figure 1).

Nous utiliserons dans la suite un voisinage bien choisi d'une singularité d'un homéomorphisme pseudo-Anosov. Voyons à présent comment le construire (voir figure 2).

**Lemme 8.1.4.** — Soit  $s$  une singularité à  $n \geq 1$  séparatrices d'un homéomorphisme pseudo-Anosov avec points marqués. Alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , il existe un voisinage  $D$  de  $s$  ayant les propriétés suivantes :

1. Le bord de  $D$  est formé de  $n$  segments de feuilles du feuilletage instable alternés avec  $n$  segments de feuilles du feuilletage stable,
2. Pour toute séparatrice  $\sigma$  stable ou instable issue de  $s$ , la composante connexe de  $\sigma \cap D$  contenant  $s$  est de mesure (instable ou stable respectivement) égale à  $\varepsilon$ .

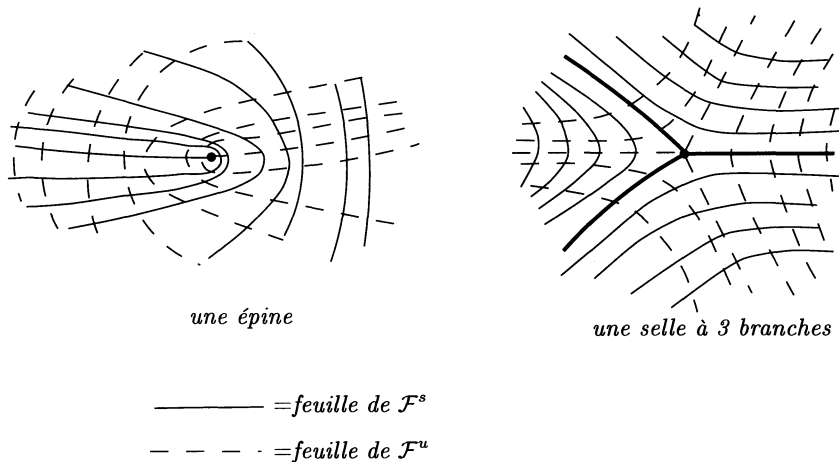


FIGURE 1. Singularités des feuilletages d'un homéomorphisme pseudo-Anosov

*Démonstration.* — Notons  $S_1, \dots, S_n$  les séparatrices de  $\mathcal{F}^s$  issues de  $s$ , la numérotation étant donnée par le sens direct correspondant à l'orientation de la surface et le choix de  $S_1$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $U_i$  la séparatrice de  $\mathcal{F}^u$  issue de  $s$  entre  $S_i$  et  $S_{i+1}$ .

Pour tout  $i$ , notons  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  les points des séparatrices  $S_i$  et  $U_i$  respectivement, tels que  $\mu^u([s, \alpha_i]^s) = \varepsilon = \mu^s([s, \beta_i]^u)$ . Pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, la feuille stable passant par  $\beta_i$  coupe la feuille instable passant par  $\alpha_i$  en un point  $\alpha_i^+$  tel que  $\mu^s([\alpha_i, \alpha_i^+]) = \varepsilon$  (de plus la mesure instable  $\mu^u([\alpha_i^+, \beta_i]^s)$  est égale à  $\varepsilon$ ). De même, on définit  $\alpha_i^-$  comme l'intersection du segment de feuille instable passant par  $\alpha_i$  et du segment de feuille stable passant par  $\beta_{i-1}$ .

Le bord du disque  $D$  est l'union des segments  $[\alpha_i^-, \alpha_i^+]^u$  et  $[\alpha_{i-1}^+, \alpha_i^-]^s$  (voir la figure 2). □

**Définition 8.1.5.** — On dira que le voisinage  $D$  défini ci-dessus est le voisinage régulier de  $s$  de taille  $\varepsilon$ .

**Remarque.** — Soient  $R_i = [-\varepsilon, \varepsilon] \times [0, \varepsilon] \times \{i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  rectangles du plan feuilletés par les segments horizontaux et verticaux et munis des mesures transverses invariantes  $dx$  et  $dy$ . Pour tout  $i = 1, \dots, n$ , soit  $g_i$  le difféomorphisme du segment  $[-\varepsilon, 0] \times \{0\} \times \{i\}$  de  $R_i$  sur le segment  $[0, \varepsilon] \times \{0\} \times \{i+1\}$  de  $R_{i+1}$  défini par  $g_i(t, 0, i) = (-t, 0, i+1)$ . L'espace-quotient

$$\mathcal{M} = \left( \prod_{i=1}^n R_i \right) / g_1, g_2, \dots, g_n$$

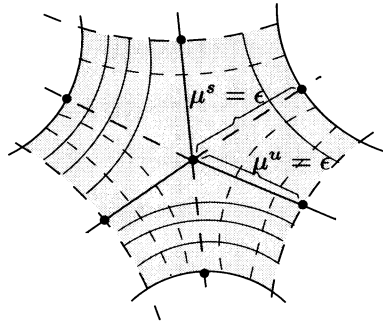


FIGURE 2. Un voisinage régulier de taille  $\epsilon$  d'une singularité

est alors une surface homéomorphe à un disque de  $\mathbb{R}^2$ , feuilletée par deux feuilletages transverses (appelés *feuilletage horizontal* et *feuilletage vertical*) admettant tous deux une unique singularité à  $n$  séparatrices en  $(0,0)$  (qui est l'image par le passage au quotient de l'origine de chaque rectangle  $R_i$ ) et munis de deux mesures transverses invariantes par holonomie que nous noterons  $dx$  et  $dy$  (voir la figure 3).

Dans le cas où  $n = 2$ , le point «singulier»  $(0,0)$  a deux séparatrices stables et deux instables, ce qui revient à dire que ce point n'est pas singulier. Nous ne pourrions cependant pas exclure ce cas.

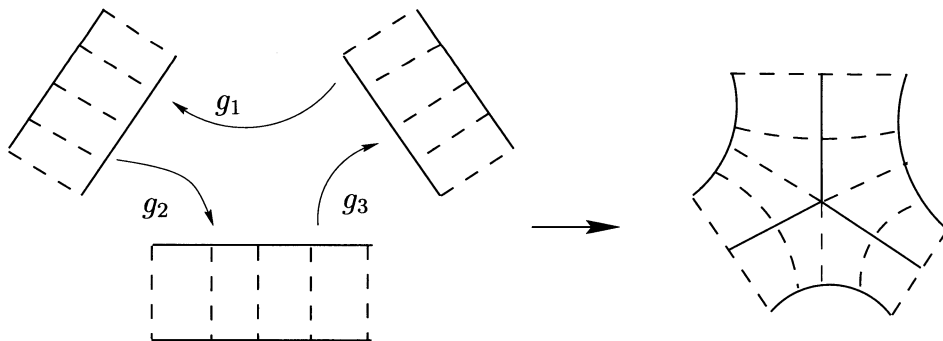


FIGURE 3. Modèle de taille  $\epsilon$  d'une singularité à 3 séparatrices

**Définition 8.1.6.** — *Le disque  $M$  muni des deux feuilletages (horizontal et vertical) et de leur mesure transverse ( $dy$  et  $dx$ , respectivement) s'appellera modèle de taille  $\epsilon$  d'une singularité à  $n$  séparatrices.*

On vérifie facilement qu'un voisinage de taille  $\epsilon$  est homéomorphe au modèle de taille  $\epsilon$  :

**Lemme 8.1.7.** — *Soit  $s$  une singularité à  $k$  séparatrices d'un homéomorphisme pseudo-Anosov. Soit  $D$  un voisinage de  $s$  de taille  $\varepsilon$ , et notons  $\mathcal{M}$  le modèle de taille  $\varepsilon$  d'une singularité à  $k$  séparatrices. Alors il existe un homéomorphisme  $h$  de  $D$  dans  $\mathcal{M}$  préservant l'orientation, les deux feuilletages transverses et les mesures transverses invariantes par holonomie.*

## 8.2. Mesures de Margulis

Ce paragraphe a pour but de construire les mesures de Margulis  $\nu^s$  et  $\nu^u$ , transverses aux variétés stables ou instables d'une pièce basique. Ces mesures sont classiquement contruites dans le cadre de champs de vecteurs de type Anosov (voir [Mar] ; c'est pourquoi nous en rappelons brièvement la construction ici pour les variétés invariantes d'une pièce basique d'un difféomorphisme d'une surface compacte.

**Proposition 8.2.1.** — *Soit  $K$  une pièce basique (non-réduite à une orbite périodique) d'un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte. Alors  $W^u(K)$  possède une mesure transverse invariante par holonomie, appelée mesure de Margulis instable et notée  $\nu^u$ , vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *La mesure de tout segment  $\sigma$  transverse à  $W^u(K)$  est strictement positive si et seulement si l'intérieur de  $\sigma$  rencontre  $W^s(K)$  ;*
2. *il existe une constante  $\lambda > 1$  telle que, pour tout segment  $\sigma$  transverse à  $W^u(K)$ , on ait  $\nu^u(f^{-1}(\sigma)) = \lambda \cdot \nu^u(\sigma)$ .*

**Remarque.** — Voici deux résultats classiques que nous ne redémontrons pas ici car nous ne les utiliserons pas.

1. La mesure  $\nu^u$  est unique à multiplication près par une constante, et  $\lambda$  est unique.
2. On définit de même la mesure  $\nu^s$  transverse à  $W^s(K)$ . Alors le produit  $\nu^s \cdot \nu^u$  défini sur la surface  $S$  une mesure invariante par  $f$  ; cette mesure est ergodique, et l'entropie de  $f$  pour cette mesure est égale à l'entropie topologique.

*Idée de la démonstration de la proposition.* — On a vu qu'une pièce basique  $K$  qui n'est ni un attracteur ni un répulseur possède une partition de Markov génératrice dont les rectangles  $R_i$  sont deux à deux disjoints. Nous allons définir la mesure  $\nu^u$  sur les segments horizontaux des  $R_i$  comme limite d'une suite de mesures.

Notons  $A = (a_{i,j})$  la matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  dont le coefficient  $a_{i,j}$  est le nombre de composantes connexes d'intersection de  $f(R_i) \cap R_j$

Soit  $m_i$  la mesure supposée des segments horizontaux de  $R_i$ . Pour vérifier les propriétés désirées, la mesure devra vérifier  $m_i = \lambda^{-1} \cdot \sum_j a_{j,i} \cdot m_j$ . On choisit donc pour  $\lambda$  l'unique valeur propre de  $A$  dont le vecteur propre a toutes ses coordonnées positives : d'après le théorème de Peron-Frobenius,  $\lambda$  est la plus grande valeur propre réelle. On note donc  $m_i$  la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée du vecteur propre de la transposée  ${}^t A$  de valeur propre  $\lambda$ .

Notons  $I_i$  le quotient de  $R_i$  par le feuilletage vertical : le segment  $I_i$  s'identifie aux segments horizontaux de  $R_i$ , c'est sur ces segments que l'on va définir  $\nu^u$ .

Choisissons une mesure  $\nu_0$  sur l'union des  $I_i$  dans la classe de la mesure de Lebesgue, et telle que la mesure de  $I_i$  pour  $\nu_0$  soit  $m_i$ . On note  $\nu_1$  la mesure dont le support est l'union des segments de  $I_i$  correspondant aux composantes connexes de  $R_i \cup f(R_j)$ ; sur chacune des composantes la mesure a une densité constante par rapport à  $\nu_0$ , de façon que la mesure de cette composante soit  $\lambda^{-1} \cdot m_j$ . Ainsi  $\nu_1(I_i) = \nu_0(I_0) = m_i$ . On définit  $\nu_n$  comme étant la mesure de support égale à l'union des intervalles de  $I_i$  correspondant à une composante d'intersection de  $R_i$  avec  $f^n(R_j)$ ,  $\nu_n$  étant de densité constante par rapport à  $\nu_0$  sur chacun de ses intervalles, et de mesure  $\lambda^{-n} \cdot m_j$ . On vérifie que la suite des mesures  $\nu_n$  ainsi construites converge faiblement vers une mesure  $\nu^u$ , qui vérifie alors les propriétés annoncées.

Dans le cas où  $K$  est un attracteur ou un répulseur hyperbolique, les rectangles d'une partition de Markov ne sont pas disjoints mais peuvent éventuellement s'intersecter le long d'un segment de leur bord. La construction des mesures de Margulis est identique à ci-dessus, en remarquant que ces intersections sont de mesure nulle.  $\square$

**Corollaire 8.2.2.** — *Pour tout segment  $\sigma = [a, b]$  transverse à  $W^u(K)$ , la fonction  $x \mapsto \nu^u([a, x])$  est continue sur  $\sigma$  et constante sur les intervalles d'intérieur disjoint de  $W^u(K)$ .*

### 8.3. Semi-conjugaison d'une pièce basique sans impasse à un homéomorphisme pseudo-Anosov

Dans tout ce chapitre, on considère une pièce basique  $K$  (ensemble saturé transitif) qui ne possède pas d'impasse (voir la définition 2.4.7). On a vu qu'alors les séparatrices de type bord portent toutes un zip (voir définition 2.3.2). Nous allons refermer les zips : un homéomorphisme pseudo-Anosov apparaît ! Plus précisément, nous allons écraser chaque arche et chaque rectangle bordé d'arches. Nous montrerons que le quotient du domaine  $\Delta(K)$  (voir la définition 3.2.1) est alors une surface compacte et que  $f$  passe au quotient en un homéomorphisme pseudo-Anosov. C'est ce qu'énonce le théorème suivant :

**Théorème 8.3.1.** — *Soit  $f$  un difféomorphisme de Smale d'une surface compacte orientée  $S$ , soit  $K$  une pièce basique et  $\Delta(K)$  son domaine.*

*Supposons qu'il n'existe pas d'impasse associée à  $K$ . Alors il existe une surface compacte  $\tilde{S}$ , un homéomorphisme pseudo-Anosov avec points marqués  $\Phi$  de  $\tilde{S}$  et une application continue surjective  $\pi$  de  $\Delta(K)$  sur  $\tilde{S}$  tels que :*

$$\pi \circ f|_{\Delta(K)} = \Phi \circ \pi.$$

*De plus la semi-conjugaison  $\pi$  est injective sur les orbites périodiques sauf sur celles de type bord (qui sont en nombre fini).*

Le reste de ce paragraphe est consacré à la définition de la relation d'équivalence par laquelle nous quotienterons le domaine  $\Delta(K)$ .

**Remarque.** — Comme  $K$  est transitif,  $K$  ne contient pas de point périodique double-bord (item (7) de la proposition 2.1.1). Par hypothèse,  $K$  ne possède pas d'impasse; nous avons vu que toute classe d'équivalence d'arche est un zip (non-dégénéré) : si  $W_1$  et  $W_2$  sont deux séparatrices distinctes de type bord, de même nature (stable ou instable) telles qu'il existe une arche ayant une extrémité sur  $W_1$  et l'autre sur  $W_2$ , alors toute arche ayant une extrémité sur  $W_1$  a son autre extrémité sur  $W_2$ .

**Définition 8.3.2.** — *On dira que deux séparatrices  $W_1$  et  $W_2$  de type bord et de même nature (stable ou instable) sont voisines s'il existe une arche ayant une extrémité sur  $W_1$  et l'autre sur  $W_2$ .*

*Deux points périodiques bords  $p_1$  et  $p_2$  seront dit voisins si (au moins) une séparatrice de  $p_1$  est voisine d'une séparatrice de  $p_2$ .*

**Remarques**

1. Un point périodique de type bord (ou coin) a au plus deux voisins.
2. Si l'un des voisins de  $p$  est égal à  $p$  alors  $p$  est son seul voisin.
3. Les voisins de  $p$  peuvent être confondus.

**Définition 8.3.3.** — *Nous appellerons cycle (ce nom sera justifié par le lemme 8.3.4) tout ensemble non vide  $C$  de points périodiques de type bord vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Si  $p$  appartient à  $C$ , ses voisins aussi.*
2. *Pour tout couple  $(p, q)$  d'éléments de  $C$ , il existe une chaîne  $\{p = p_0, p_1, \dots, p_k = q\}$  permettant de passer de  $p$  à  $q$  par relation de voisinage, chaque  $p_{i+1}$  étant voisin de  $p_i$  pour  $i = 0, 1, \dots, k - 1$ .*

**Remarques**

1. Les cycles sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence obtenue par saturation de la relation de voisinage.
2. Un cycle est un ensemble fini de points périodiques.

Considérons le graphe  $G$  défini de la façon suivante : les sommets de  $G$  sont les points périodiques de type bord de  $K$ , les arêtes sont les paires de séparatrices (de type bord) voisines. Une arête  $\{W_1, W_2\}$  joint les points  $p_1$  et  $p_2$  si  $W_1$  est issue de  $p_1$  (resp.  $p_2$ ) et si  $W_2$  est issue de  $p_2$  (resp.  $p_1$ ). Remarquons que les composantes connexes du graphes correspondent aux cycles définis ci-dessus : deux points périodiques appartiennent au même cycle  $C$  si et seulement s'ils sont deux sommets d'une même composante connexe de  $G$ .



Nous allons orienter les arêtes de  $G$  (en d'autres termes ordonner les paires de séparatrices voisines) de la manière suivante : munissons toute séparatrice de type bord de l'orientation qui fuit le point périodique ; d'après l'item (4) du corollaire 2.4.3, toute arche coupe suivant la même orientation les séparatrices sur lesquelles elle s'appuie. On oriente donc les arches de façon qu'un vecteur porté positivement par la séparatrice suivi d'un vecteur porté positivement par l'arche forment une base directe de la surface orientée  $S$ . Une arête joignant  $p_1$  à  $p_2$  et correspondant à la paire  $\{W_1, W_2\}$  ( $W_i$  issue de  $p_i$ ) sera orientée de  $p_1$  à  $p_2$  si une arche appuyée sur  $W_1$  et  $W_2$  va de  $W_1$  à  $W_2$ .

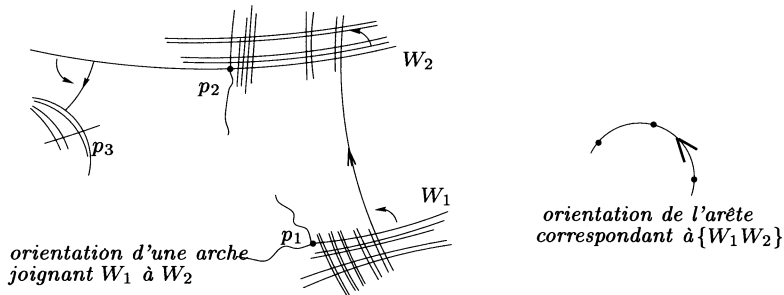


FIGURE 4. Orientation des arêtes du graphe  $G$

**Lemme 8.3.4.** — *Toute composante connexe de  $G$  est homéomorphe à un cercle. Les arêtes orientées comme ci-dessus le sont de façon compatible et induisent une orientation sur chacun des cercles.*

*Démonstration.* — De tout sommet partent exactement deux arêtes et toute arête joint exactement deux sommets. Ceci prouve que toute composante connexe est un cercle. Les deux séparatrices de chaque point périodique sont munies de l'orientation fuyant leur origine donc les arches portées par l'une des séparatrices y arrivent et les arches portées par l'autre en partent. Ceci termine la démonstration.  $\square$

**Lemme 8.3.5.** — *Dans un cycle, le nombre de points périodiques coins est pair.*

*Démonstration.* — Les arêtes du cercle correspondent à des paires de séparatrices de même nature (stable ou instable) donc il y a un nombre pair de séparatrices stables et un nombre pair de séparatrices instables, ce qui n'est pas le cas si le nombre de coins est impair (voir la figure 5).  $\square$

**Remarque.** — Comme toute classe d'équivalence d'arches de  $K$  est un zip, il n'existe pas d'arche extrême dans  $\Delta(K)$ . En particulier,  $K$  ne possède pas de chaîne infinie d'arches. De la proposition 3.1.2 et de la construction du domaine  $\Delta(K)$ , on déduit que toute composante connexe de  $\Delta(K) \setminus \delta(K)$  est un demi-plan dont le bord dans

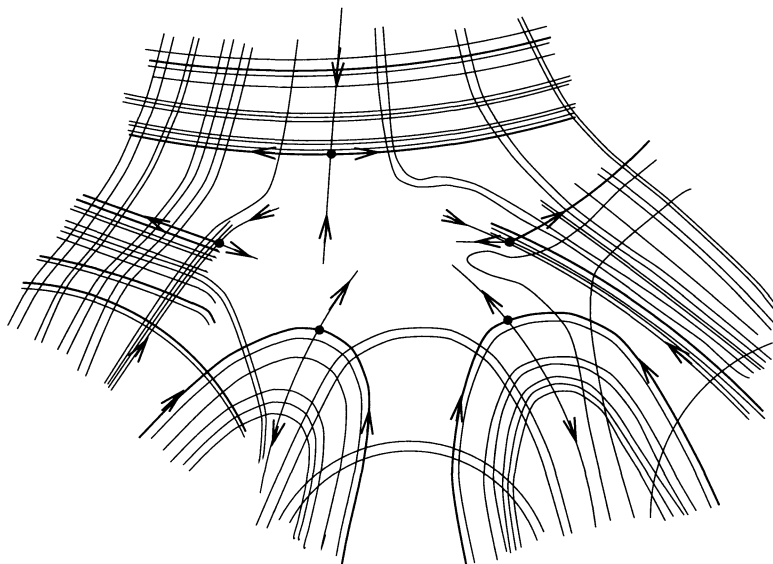


FIGURE 5. un cycle à 2 coins + 2 s-bords + 1 u-bord

$\Delta(K)$  est égal à l'union d'un point périodique coin et de ses deux séparatrices libres. De plus, toute courbe formée d'un point périodique coin  $p$  et de ses séparatrices libres est le bord d'une composante connexe de  $\Delta(K) \setminus \delta(K)$ . Enfin la pièce basique étant non-triviale, elle ne possède pas de double-bord : un point coin  $p$  de  $K$  n'est coin que dans l'un de ses secteurs, et il ne correspond qu'à une seule composante de  $\Delta(K) \setminus \delta(K)$  que l'on notera  $C(p)$ .

**Définition 8.3.6.** — Soit  $C$  un cycle. Nous noterons  $\mathcal{P}(C)$  l'union du cycle, des séparatrices libres issues d'un point du cycle et des composantes connexes  $C(p)$  de  $\Delta(K) \setminus \delta(K)$  pour chaque point périodique coin  $p$  du cycle.

**Remarque.** —  $\mathcal{P}(C)$  est un fermé de  $\Delta(K)$ . En effet, les séparatrices libres sont fermées dans  $\Delta(K)$  (voir lemme 2.5.1) et la proposition 3.1.2 montre que l'adhérence dans  $\Delta(K)$  d'une composante  $C(p)$  est l'union de  $C(p)$ , du point  $p$  et de ses deux séparatrices libres :  $\mathcal{P}(C)$  est donc une union finie de fermés.

**Lemme 8.3.7.** — Considérons les quatre familles de parties de  $\Delta(K)$  suivantes :

1. les singletons  $\{x \in K, x \text{ non bord}\}$ ,
2. les rectangles minimaux (dont le bord est constitué de deux arches stables et de deux arches instables),
3. les arches incluses dans une variété invariante non bord,
4. les ensembles  $\mathcal{P}(C)$ .

*L'ensemble de toutes ces parties forment une partition de  $\Delta(K)$  qui est invariante par  $f$ .*

*Démonstration.* — Deux telles parties sont disjointes ou confondues, et chacune de ces famille est invariante par  $f$  : nous devons juste montrer que tout point de  $\Delta(K)$  est dans l'union de toutes ces parties.

On a vu que toute composante connexe de  $\Delta(K) \setminus \delta(K)$  est incluse dans l'un des  $\mathcal{P}(C)$ . De plus,  $\delta(K)$  est l'union de  $W^s(K) \cup W^u(K)$  et de l'union des disques bordés d'arches.

De plus, comme toute classe d'équivalence d'arches est un zip, tout disque bordé d'arches est un rectangle et appartient donc à la deuxième famille de parties. Par ailleurs,  $W^s(K) \cup W^u(K)$  se décompose en l'union de l'ensemble des points de  $K$  non isolés dans  $K$ , qui est exactement la première famille, de l'ensemble des séparatrices libres (elles sont incluses dans  $\bigcup_{cycles}(\mathcal{P}(C))$  par définition) et de l'ensemble des arches. Ces dernières sont de deux sortes : les arches non isolées, qui forment les éléments de la troisième famille de parties, et les arches incluses dans le bord d'un polygone, qui ne peut être qu'un rectangle minimal (deuxième famille) comme on l'a vu plus haut.  $\square$

**Définition 8.3.8.** — *Nous appellerons  $\mathcal{R}$  la relation d'équivalence dont les classes sont les parties de  $U$  appartenant à l'une ou l'autre des quatre familles ci-dessus.*

Le théorème 8.3.1 est impliqué par la proposition suivante.

**Proposition 8.3.9.** — *Le quotient  $\tilde{S}$  de  $\Delta(K)$  par la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  est une surface séparée compacte. Le difféomorphisme  $C^1$ -structurellement stable  $f$  passe au quotient en un homéomorphisme de  $\tilde{S}$ . La variété stable de  $K$  et sa variété instable passent au quotient en deux feuilletages invariants de  $\tilde{S}$  transverses l'un à l'autre. Ils ont même ensemble fini de singularités qui sont soit des épines, soit homéomorphes à des selles à au moins trois séparatrices.*

*Les deux feuilletages invariants admettent chacun une mesure transverse invariante par holonomie et il existe un réel  $\lambda$  strictement plus grand que 1 tel que  $f_*(\mu^s) = \lambda^{-1}\mu^s$  et  $f_*(\mu^u) = \lambda\mu^u$*

## 8.4. Implosion des trous et des intervalles

Pour prouver que le quotient  $\tilde{S}$  de  $\Delta(K)$  par la relation  $\mathcal{R}$  est une surface munie de deux feuilletages transverses, nous allons exhiber une carte feuilletée au voisinage de chacun de ses points. La difficulté principale concerne les points de  $\tilde{S}$  correspondant aux cycles de  $K$ .

Nous considérons donc d'abord les rectangles minimaux, les arches et les points de  $K$  qui ne sont pas de type bord, *i.e.* les classes d'équivalence qui ne sont pas des  $\mathcal{P}(C)$ .

**Lemme 8.4.1.** — Soit  $\gamma$  une classe d'équivalence qui n'est pas de type  $\mathcal{P}(C)$ . Il existe alors une base de voisinages de  $\gamma$  par des rectangles.

*Démonstration.* — Si  $\gamma$  est un point de  $K$  non isolé, la propriété de produit local donne le résultat. Si  $\gamma$  est une arche non bord, elle admet un itéré  $\gamma'$  (positif si  $\gamma$  est stable, négatif sinon) de taille assez petite pour que la propriété de produit local permette de conclure.

Supposons que  $\gamma$  soit un rectangle minimal (c'est-à-dire bordé par quatre arches) et soit  $U$  un voisinage de  $\gamma$ . Soient  $a, b, c, d$  les quatre arches formant le bord de  $\gamma$ . Comme  $K$  ne possède pas de double-bord, il existe des arches  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$  et  $\tilde{d}$  disjointes de  $\gamma$ , contenues dans  $U$ , et aussi proches que l'on veut de  $a, b, c$  et  $d$ . On construit alors facilement un rectangle inclus dans  $U$  et contenant  $\gamma$  dans son intérieur, à l'aide de la structure de produit local aux sommets de  $\gamma$  et des arches  $a_n, b_n, c_n$  et  $d_n$  pour  $n$  assez grand. (voir la figure 6).  $\square$

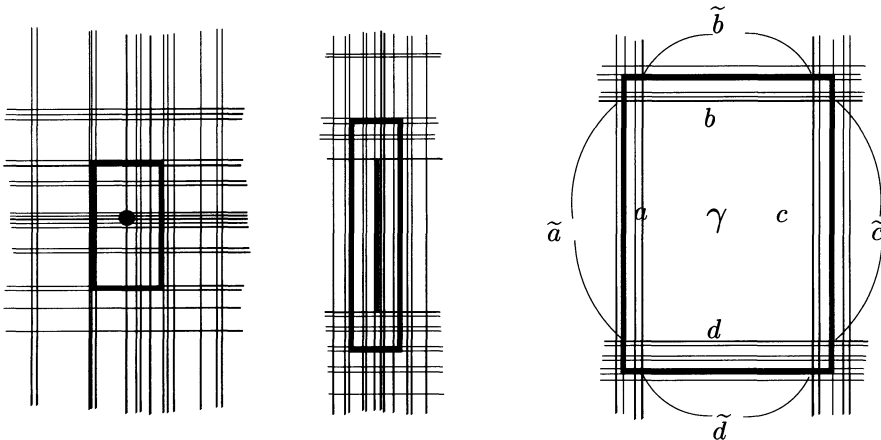


FIGURE 6. Rectangles voisins des points «réguliers» de  $\tilde{S}$

**Remarque.** — Aucun segment de variété stable ou instable de  $K$  n'est isolé des deux côtés (par hypothèse de transitivité) donc nous pouvons choisir les rectangles voisins de  $\gamma$  avec leur bord non isolé du côté intérieur. L'intérieur d'un tel rectangle est alors un ouvert saturé pour la relation d'équivalence.

**Lemme 8.4.2.** — Soit  $\mathcal{O}$  l'intérieur d'un rectangle dont chaque côté du bord est non isolé dans  $\mathcal{O}$ . Le quotient de  $\mathcal{O}$  par la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  est homéomorphe à un rectangle  $]a_1, a_2[ \times ]b_1, b_2[$  du plan.

De plus, la lamination de  $\mathcal{O}$  par les segments de variétés stables de  $W^s(K) \cap \mathcal{O}$  a pour image le feuilletage du rectangle par les horizontales, et la lamination induite par  $W^u(K) \cap \mathcal{O}$  a pour image le feuilletage par les verticales.

Enfin, la mesure de Margulis  $\nu^s$  passe au quotient en la mesure  $dt$  et la mesure  $\nu^u$  induit la mesure  $ds$ , où  $(s, t)$  sont les coordonnées canoniques de  $\mathbb{R}^2$ .

*Démonstration.* — D'après la définition de rectangle, il existe des coordonnées  $(s, t) \in [-1, 1]^2$  sur le rectangle fermé  $\overline{\mathcal{O}}$ , telles que les segments stables soient des segments horizontaux  $[-1, 1] \times \{t\}$  et que les segments instables soient des segments verticaux. Soient  $\nu^s$  et  $\nu^u$  les mesures de Margulis associées à  $(K, f)$ . La mesure  $\nu^s$  est définie sur les segments transverses à  $W^s(K)$  et est invariante par holonomie. On en déduit que l'intégrale de  $\nu^s$  sur un segment  $\{s\} \times [0, t]$  est indépendante de  $s$  : on la notera  $\int_0^t d\nu^s$ . On définit de même  $\int_0^s d\nu^u$  comme l'intégrale de  $\nu^u$  sur un segment  $[0, s] \times \{t\}$ .

Définissons alors l'application  $(\psi_1, \psi_2)$  de  $\mathcal{O}$  dans le rectangle  $]a_1, a_2[ \times ]b_1, b_2[$ , où  $a_2 = \int_0^1 d\nu^s$ ,  $a_1 = -\int_{-1}^0 d\nu^s$ ,  $b_2 = \int_0^1 d\nu^u$  et  $b_1 = -\int_{-1}^0 d\nu^u$ . Soit  $m \in \mathcal{O}$  de coordonnées  $(s, t)$  :

$$(\psi_1, \psi_2)(m) = (\varepsilon \int_0^s d\nu^u, \eta \int_0^t d\nu^s)$$

avec  $\varepsilon = +$  si  $s \geq 0$ ,  $\varepsilon = -$  sinon, et  $\eta = +$  si  $t \geq 0$ ,  $\eta = -$  sinon.

D'après le corollaire 8.2.2, les applications  $\psi_i$  sont continues. De plus, la mesure  $\nu^s(I)$  d'un intervalle vertical  $I$  est non-nulle si et seulement si l'intérieur de  $I$  rencontre  $W^s(K)$ .

En particulier, si  $a$  est une arche instable, son intérieur est disjoint de  $W^s(K)$ , donc la mesure stable de  $a$  est nulle, et son image par  $(\psi_1, \psi_2)$  est réduite à un point. De même, la mesure instable d'une arche stable est nulle. On montre de même que l'image par  $(\psi_1, \psi_2)$  d'un rectangle minimal est un point.

Voyons maintenant que l'image réciproque par  $(\psi_1, \psi_2)$  de tout point du rectangle  $]a_1, a_2[ \times ]b_1, b_2[$  est une classe d'équivalence. Soient  $p$  et  $q$  deux points de  $\mathcal{O}$  de coordonnées  $(s, t)$  et  $(x, y)$  respectivement. Si  $p$  et  $q$  ont même image par  $(\psi_1, \psi_2)$ , on a :

$$\int_0^s d\nu^u = \int_0^x d\nu^u \text{ et } \int_0^t d\nu^s = \int_0^y d\nu^s.$$

Or  $\int_0^s d\nu^u - \int_0^x d\nu^u = \int_x^s d\nu^u = 0$  représente l'intégrale de  $\nu^u$  sur le segment horizontal  $[x, s] \times \{t\}$ . Il est donc d'intérieur disjoint de  $W^u(K)$ . De même, le segment vertical  $\{y\} \times [y, t]$  est d'intérieur disjoint de  $W^s(K)$ . Ces deux segments mis bout à bout forment un chemin joignant  $p$  à  $q$  sans couper  $W^s(K) \cup W^u(K)$ . On en déduit que les points  $p$  et  $q$  appartiennent tous deux à une même arche stable ou instable ou à un même rectangle minimal.

Par conséquent, l'application  $(\psi_1, \psi_2)$  passe au quotient par la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  en une application  $(\Psi_1, \Psi_2)$  continue et bijective de  $\mathcal{O}/\mathcal{R}$  dans  $]a_1, a_2[ \times ]b_1, b_2[$ . Cette application est ouverte car l'image par  $(\psi_1, \psi_2)$  d'un ouvert saturé de  $\mathcal{O}$  est un ouvert du rectangle. L'application  $(\Psi_1, \Psi_2)$  est bien un homéomorphisme, la preuve du lemme est complète.  $\square$

### 8.5. Construction d'un voisinage d'un cycle

Considérons à présent une classe d'équivalence de type  $\mathcal{P}(C)$ . Notre but est de montrer que si  $C$  est un cycle à  $r$  éléments, composé de  $2n$  coins,  $p$  u-bords et  $q$  s-bords, alors la classe d'équivalence  $\mathcal{P}(C)$  possède un voisinage saturé pour la relation  $\mathcal{R}$  et dont le quotient par  $\mathcal{R}$  est un disque muni de deux feuilletages transverses possédant une singularité à  $n + p + q$  séparatrices admise pour un homéomorphisme pseudo-Anosov.

Dans ce paragraphe, nous allons construire un voisinage saturé convenable de  $\mathcal{P}(C)$  et le prochain paragraphe considèrera le quotient de ce voisinage par  $\mathcal{R}$ .

Les séparatrices non-bord issues d'un point périodique bord de  $C$  ainsi que les domaines des zips associés à  $C$  auront comme image les séparatrices issues du point singulier image de  $\mathcal{P}(C)$ . Voyons qu'ils sont munis d'un ordre cyclique naturel, ce qui nous permettra de les numérotter.

Rappelons que le cycle  $C$  correspond à une composante connexe  $\rho$  du graphe  $G$  dont les sommets sont les points périodiques bords et dont les arêtes sont les paires de séparatrices voisines. On a vu que  $\rho$  est un cercle naturellement orienté. Nous dirons qu'une arête de  $\rho$  est stable si elle correspond à une paire de séparatrices stables ; on parlera de même d'arêtes instables.

De plus, un point périodique  $p$  de  $C$  n'est pas un coin si et seulement si le sommet de  $\rho$  qui lui correspond est commun à deux arêtes de même nature, stable ou instable. Dans ce cas, il possède une séparatrice non-bord, qui est de nature (instable ou stable) différente des arêtes dont  $p$  est le sommet commun.

Considérons le graphe  $\rho'$  obtenu à partir de  $\rho$  de la façon suivante : on considère d'abord le graphe dual de  $\rho$ , en remplaçant les points par des arêtes et réciproquement : c'est encore topologiquement un cercle. Ses sommets correspondent aux paires de séparatrices voisines. Une arête  $a$  de ce graphe dual est orientée de l'arête entrant dans le sommet de  $\rho$  correspondant à  $a$  vers l'arête sortant de ce sommet. Pour obtenir  $\rho'$ , on complète ce graphe (en gardant son orientation) en lui ajoutant un sommet entre deux sommets successifs provenant d'arêtes de même nature : ce sommet correspond à la séparatrice non-bord du point périodique commun à ces deux arêtes de  $\rho$ .

Un sommet de  $\rho'$  correspond donc ou bien à une séparatrice non-bord ou bien à une paire de séparatrices voisines de  $C$ . De plus, la nature (stable ou instable) de ces séparatrices ou paire de séparatrices est alternée sur  $\rho'$ .

Remarquons enfin que les paires de séparatrices stables voisines correspondent aux zips instables (voir la définition 2.3.2). Cependant, nous appellerons *nature, stable ou instable*, d'un sommet de  $\rho'$  la nature de la séparatrice ou de la paire de séparatrices qui lui est associée.

**Lemme 8.5.1.** — *Si  $C$  est un cycle à  $2n$  coins,  $p$  u-bords et  $q$  s-bords, alors le graphe  $\rho'$  comporte  $n + p + q$  sommets stables alternés avec autant de sommets instables.*

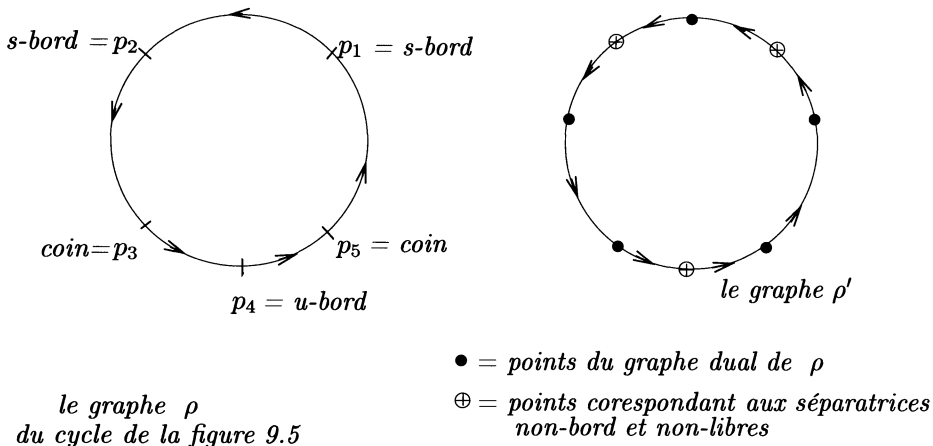


FIGURE 7. Les cercles  $\rho$  et  $\rho'$

*Démonstration.* — Comptons les séparatrices ou paires de séparatrices stables.

Les  $p$  points périodiques de type u-bord donnent exactement  $p$  séparatrices stables non-bord. Aux  $2n$  coins sont associées  $2n$  séparatrices stables bord (donc faisant partie de zips) et aux  $q$  points périodiques s-bords,  $2q$  séparatrices stables bord. Ces séparatrices forment  $1/2(2n + 2q)$  paires de séparatrices stables voisines, d'où le résultat. □

*Notation :* Choisissons arbitrairement un sommet stable de  $\rho'$  et notons le  $S_1$ . On notera  $S_1, U_1, \dots, S_{n+p+q}, U_{n+p+q}$  les sommets de  $\rho'$  pris dans leur ordre d'apparition quand on décrit le cercle orienté  $\rho'$ . Remarquons que les  $S_i$  correspondent aux sommets stables et les  $U_i$  aux sommets instables.

**Définition 8.5.2**

1. Soit  $p$  un point périodique bord de  $K$ . On appellera secteur de  $p$  tout rectangle (non dégénéré)  $R$  admettant  $p$  comme sommet.
2. Un secteur a exactement un côté stable et un côté instable d'origine  $p$ . Munissons ces côtés de l'orientation fuyant  $p$ . Si la base formée par le vecteur tangent en  $p$  au côté stable suivi du vecteur tangent en  $p$  au côté instable est directe, nous dirons que  $R$  est un secteur droit. Sinon,  $R$  sera appelé secteur gauche (voir figure 8).
3. Deux secteurs de  $p$  seront dits adjacents s'ils ont un côté commun, et si leur intersection est réduite à ce côté.

*Remarque.* — Avec la numérotation des sommets du graphe  $\rho'$ , soit  $i$  l'indice de la séparatrice ou paire de séparatrices  $U_i$  contenant le côté instable de  $R$  issu de  $p$ . Alors

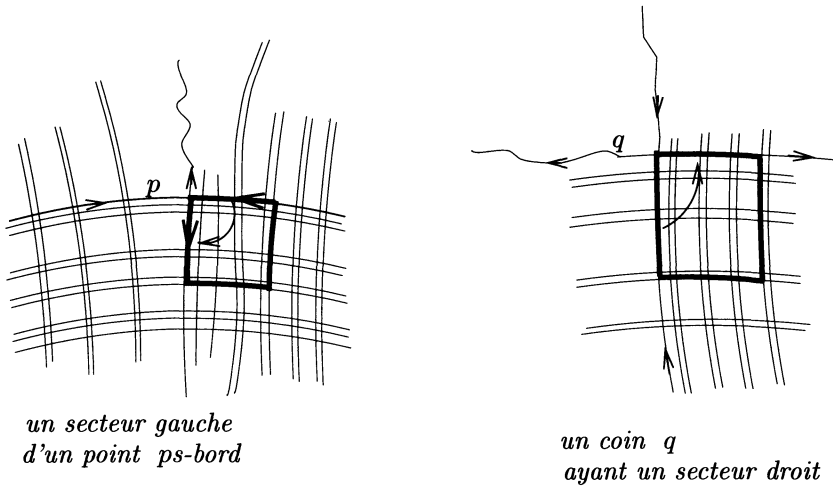


FIGURE 8. Secteurs des points périodiques bord

le côté stable de  $R$  issu de  $p$  peut être contenu dans  $S_i$  ou dans  $S_{i+1}$ . Dans le premier cas le secteur  $R$  est droit, dans le second cas il est gauche.

La structure de produit local de  $K$  et la finitude de l'ensemble des points périodiques bord permettent de montrer :

**Lemme 8.5.3.** — *On peut associer à tout point périodique coin  $p$  de  $K$  un secteur, noté  $D_p$  ou  $G_p$  suivant qu'il est droit ou gauche, et à tout point périodique bord  $p$  (non coin) de  $K$  deux secteurs adjacents, un droit  $D_p$  et un gauche  $G_p$ , de façon que deux secteurs distincts non disjoints soient associés au même point  $p$  et soient adjacents.*

**Remarque.** — Comme la mesure  $\nu^s$  de Margulis est non nulle sur tout segment instable rencontrant  $W^s(K)$  dans son intérieur, pour tout point  $p$  périodique et tout point  $q \in W^u(p) \cap K$  différent de  $p$ , la mesure du segment  $[p, q]^u$  est strictement positive : en particulier, la mesure stable d'un côté instable d'un secteur  $R_p$  est non nulle. De même, la mesure instable d'un côté stable d'un  $R_p$  est non nulle.

Nous noterons  $\zeta_0 > 0$  le minimum de l'ensemble de ces mesures stables et instables.

**Lemme 8.5.4.** — *Soit  $p$  un point périodique de  $K$  et  $W^s$  une séparatrice non libre issue de  $p$ . Alors,*

1. *Pour tout  $r > 0$ , il existe  $x \in W^s \cap K$  tel que  $\nu^u([p, x]^s) = r$ . Ce point est unique (et alors noté  $x(W^s, r)$ ) si et seulement si il n'est pas l'extrémité d'une  $s$ -arche. Dans le cas contraire, les extrémités de cette  $s$ -arche sont les seuls points répondant à la question. On notera  $x(W^s, r)$  celui des deux qui est le plus proche de  $p$  sur  $W^s$ .*



2. Si  $W_1^s$  et  $W_2^s$  sont deux séparatrices voisines de points périodiques  $p_1$  et  $p_2$ , alors, pour tout  $r > 0$ , les points  $x(W_1^s, r)$  et  $x(W_2^s, r)$  sont les extrémités d'une même  $u$ -arche.

On définit de même le point  $x(W^u, r)$  pour toute séparatrice non-libre instable  $W^u$ .

*Démonstration.* — L'item 1) est une conséquence directe du fait que  $\nu^u$  induit une mesure positive sur  $W^s$ , de support égal à  $W^s \cap K$ , et ne charge pas les singletons.

L'item 2) est conséquence de l'invariance de  $\nu^u$  par holonomie, et du fait que les séparatrices voisines portent un zip : si  $x \in W_1^s$  et  $y \in W_2^s$  sont les extrémités d'une même  $u$ -arche alors les mesures des segments  $[p_1, x]^s$  et  $[p_2, y]^s$  sont égales.  $\square$

**Définition 8.5.5.** — Pour tout  $\zeta < \zeta_0$ , un  $\zeta$ -secteur d'un point périodique  $p$  sera un secteur dont les côtés d'origine  $p$  ont comme autre extrémité les points  $x(W^s, \zeta)$  et  $x(W^u, \zeta)$ .

**Remarque.** — Soit  $\zeta < \zeta_0$ . Un point périodique coin a exactement un  $\zeta$ -secteur et un point périodique bord non coin deux  $\zeta$ -secteurs (qui sont adjacents).

Nous pouvons maintenant utiliser la numérotation des séparatrices ou paires de séparatrices d'un cycle pour attribuer un indice à tous les  $\zeta$ -secteurs des éléments de ce cycle. En général dans la suite, nous oublierons la dépendance en  $\zeta$  pour alléger les notations, quitte à la réintroduire quand ce sera nécessaire.

### Remarques et notations

1. Pour chaque  $U_i$ , il existe deux  $\zeta$ -secteurs dont le côté instable soit inclus dans  $U_i$ . De plus, l'un est droit et l'autre gauche, nous désignerons par  $D_i$  le premier et  $G_i$  le second.
2. Soit  $D_i$  un secteur droit d'un élément du cycle. D'après le lemme 8.5.4, si  $S_i$  est une paire de séparatrices, les secteurs  $D_i$  et  $G_{i-1}$  ne sont pas adjacents. Cependant, l'extrémité du côté stable de  $D_i$  inclus dans  $S_i$  est sur la même arche instable que le point analogue de  $G_{i-1}$ . Nous appellerons cette arche  $A_i$ .

De même, si  $U_i$  est une paire de séparatrices, nous appellerons  $B_i$  l'arche stable joignant les extrémités des côtés instables, inclus dans  $U_i$ , des  $\zeta$ -secteurs  $D_i$  et  $G_i$ .

**Lemme 8.5.6.** — Appelons côtés extérieurs d'un secteur ses deux côtés ne contenant pas le point périodique.

1. Soit  $C$  un cycle. L'union des côtés extérieurs des secteurs des éléments de  $C$ , des arches stables  $A_i$  et des arches instables  $B_i$  forme une courbe simple fermée qu'on appellera  $\gamma(C)$ .
2. Les courbes  $\gamma(C)$  sont deux à deux disjointes.

*Démonstration.* — Le premier item est clair d'après la définition des secteurs et la remarque précédant ce lemme. Le fait que les secteurs soient disjoints ou adjacents et que deux arches non disjointes soient confondues donnent l'item 2).  $\square$

Nous allons montrer que la courbe  $\gamma(C)$  borde un voisinage saturé de  $\mathcal{P}(C)$ . Ce voisinage sera formé de  $\mathcal{P}(C)$ , des secteurs et de « demi-zips » (voir la figure 9) que nous allons définir à présent.

Soit  $S_i$  une paire de séparatrices voisines stables qui portent un zip instable. Rappelons que le domaine du zip est l'image d'une immersion injective de  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  où l'image de  $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$  est  $S_i$ . L'arche  $A_i$  coupe le domaine du zip en deux composantes connexes.

**Définition 8.5.7.** — Appelons demi-zips (de taille  $\zeta$ ) et notons  $S_i$  l'union de  $A_i$  et de la composante du domaine du zip privé de  $A_i$  qui contient les deux intervalles de  $S_i$  qui joignent les extrémités de  $A_i$  aux points périodiques de  $S_i$ .

On définit de même les demi-zips  $U_i$ .

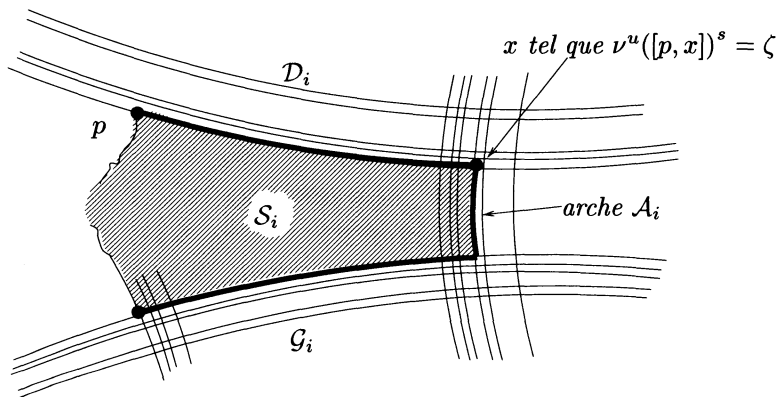


FIGURE 9. Un demi-zip de taille  $\zeta$

**Lemme 8.5.8.** — L'union du demi-zip  $S_i$  et des deux séparatrices instables libres issues des points périodiques de  $S_i$  est fermée dans le domaine  $\Delta(K)$ .

*Démonstration.* — Notons  $q$  la période des séparatrices et remarquons que l'arche  $f^q(A_i)$  est contenue dans  $S_i$ . Nous pouvons donc considérer le rectangle  $r$  bordé par  $A_i$ ,  $f^q(A_i)$  et les deux segments stables qui joignent leurs extrémités. Remarquons que le demi-zip  $S_i$  est l'union de tous les itérés positifs de  $r$  par  $f^q$ . Le lemme est alors une conséquence directe du corollaire 2.5.4.  $\square$

Nous sommes à présent en mesure de définir les voisinages saturés de  $\mathcal{P}(C)$  que nous avons annoncés.

**Lemme 8.5.9.** — *Pour tout  $\zeta \in ]0, \zeta_0[$ , la courbe  $\gamma(C, \zeta)$  sépare  $\Delta(K)$  en deux composantes connexes. La composante connexe de  $\Delta(K) \setminus \gamma(C, \zeta)$  qui contient  $C$  est un voisinage saturé pour  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{P}(C)$ , que l'on notera  $\mathcal{V}(C, \zeta)$ .*

*Les  $\mathcal{V}(C, \xi)$ , pour  $\xi \leq \zeta_0$ , forment une base de voisinages ouverts de  $C$  pour les voisinages saturés : si  $V$  est un voisinage saturé de  $C$ , il contient un  $\mathcal{V}(C, \xi)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\zeta < \zeta_0$ . Nous allons montrer que  $O = \mathcal{P}(C) \cup \bigcup_i (D_i \cup G_i \cup S_i \cup U_i) \setminus \gamma(C)$  est un ouvert fermé connexe de  $\Delta(K) \setminus \gamma(C)$ , saturé pour  $\mathcal{R}$ .

Les secteurs  $D_i$  et  $G_i$  sont compacts et en nombre fini. On a vu que  $\mathcal{P}(C)$  est fermé dans  $\Delta(K)$ , le lemme 8.5.8 assure que les demi-zips ont leur adhérence (comme partie de  $\Delta(K)$ ) incluse dans  $\mathcal{P}(C)$ . L'union  $\mathcal{P}(C) \cup \bigcup_i (D_i \cup G_i \cup S_i \cup U_i)$  est donc fermée dans  $\Delta(K)$ , aussi  $O$  est-il fermé dans  $\Delta(K) \setminus \gamma(C)$ .

Par construction,  $\bigcup_i (D_i \cup G_i \cup S_i \cup U_i) \setminus \gamma(C)$  est connexe. Par contre  $\mathcal{P}(C)$  ne l'est pas *a priori*, mais chacune de ses composantes connexes contient un point périodique bord, qui appartient aussi aux côtés non extérieurs d'un  $G_i$  ou d'un  $D_i$ . Donc  $O$  est connexe.

Voyons que  $O$  est ouvert : la difficulté réside aux points périodiques bords et aux séparatrices libres qui en partent. Soit  $p$  un point périodique élément de  $C$ . On se convainc facilement que tout point proche de  $p$  est soit dans un secteur, soit dans  $\mathcal{P}(C)$ , soit dans le domaine d'un demi-zip. Ceci montre que  $O$  est un voisinage de  $p$  (voir la figure 10).

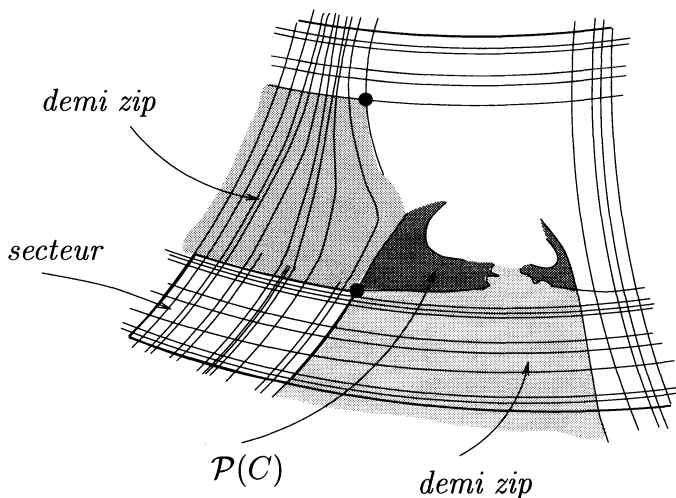


FIGURE 10.  $O$  est un voisinage de  $p$

Soit  $W$  une séparatrice libre de  $p$ , instable pour se fixer les idées. L'intersection d'un voisinage de  $p$  dans  $O$  avec l'union de  $\mathcal{P}(C)$  et des demi-zips instables (portés par

des séparatrices stables) donne un voisinage  $U$  inclus dans  $O$  de tout point de  $W$  assez proche de  $p$  (voir la figure 10). Comme les demi-zips instables et  $\mathcal{P}(C)$  sont invariants par  $f^q$  (où  $q$  désigne la période de  $p$ ), les itérés positifs par  $f^q$  de  $U$  fournissent des voisinages de tout point de  $W$ .

Il reste à montrer que l'ouvert  $O$  est saturé. Pour cela, rappelons que, dans la définition des  $\zeta$ -secteurs, nous avons choisi leurs côtés extérieurs non isolés en tant que variété stable ou instable dans le secteur (voir le choix des points  $x(W^s(p), \zeta)$ ,  $x(W^u(p), \zeta)$ ). On en déduit que l'intérieur des secteurs est saturé. Pour la même raison, les demi-zips privés de l'arche  $A_i$  ou  $B_i$  (qui est précisément leur intersection avec  $\gamma(C)$ ) sont saturés. Enfin,  $\mathcal{P}(C)$  est saturé par définition. L'ouvert  $O$  est l'union de ces parties saturées.

Montrons maintenant que, si  $V$  est un voisinage saturé de  $\mathcal{P}(C)$ , il existe  $\zeta$  tel que  $V$  contienne  $\mathcal{V}(C, \zeta)$ . Les points périodiques bords n'appartiennent pas au bord de  $V$  et ils ne sont pas isolés dans  $K$  sur leurs séparatrices non libres. Il existe donc  $\zeta > 0$  tel que, pour chaque point périodique  $p$ , les  $\zeta$ -secteurs de  $p$  sont inclus dans  $V$ . Le saturé de l'union de ces secteurs est exactement l'adhérence dans  $\Delta(K)$  de  $\mathcal{V}(C, \zeta)$ .  $\square$

## 8.6. Implosion des trous et des intervalles au voisinage d'un cycle

**Lemme 8.6.1.** — *Soit  $C$  un cycle à  $2n$  coins,  $p$   $u$ -bords et  $q$   $s$ -bords. Soit  $\mathcal{M}$  un modèle de taille  $\zeta$  d'une singularité à  $n + p + q$  séparatrices.*

*Il existe une application  $g$  de  $\mathcal{V}(C, \zeta)$  sur  $\mathcal{M}$  vérifiant les propriétés suivantes :*

1.  $g$  est une surjection continue ;
2.  $g(\mathcal{P}(C))$  est l'origine du modèle  $\mathcal{M}$  ;
3. l'image par  $g$  de tout segment de variété stable est inclus dans une feuille du feuilletage horizontal et toute feuille du feuilletage horizontal est l'image par  $g$  d'un ou de deux segment(s) stable(s). Idem pour les segments instables et le feuilletage vertical ;
4. la mesure-image de la mesure de Margulis  $\nu^u$  est la mesure transverse au feuilletage horizontal  $dy$  : si  $\alpha$  est un segment transverse au feuilletage horizontal,  $dy(\alpha)$  est égal à  $\nu^u(g^{-1}(\alpha))$ . Idem  $\nu^s$  et  $dx$  ;
5. l'image réciproque par  $g$  de tout point de  $\mathcal{M}$  est une classe d'équivalence de  $\mathcal{R}$  et  $g$  passe au quotient en un homéomorphisme de  $\mathcal{V}(C, \zeta)/\mathcal{R}$  sur  $\mathcal{M}$ .

*Démonstration.* — Nous allons définir par morceaux l'application  $g$  (selon que le point  $m$  appartient à un secteur, à un demi-zip ou à  $\mathcal{P}(C)$ ) et montrer que la définition est cohérente sur le bord de ces morceaux, avant de vérifier que  $g$  induit bien un homéomorphisme sur le quotient. La figure 11 illustre cette preuve.

On définit  $g$  sur  $\mathcal{P}(C)$  comme l'application constante sur l'origine de  $\mathcal{M}$ .

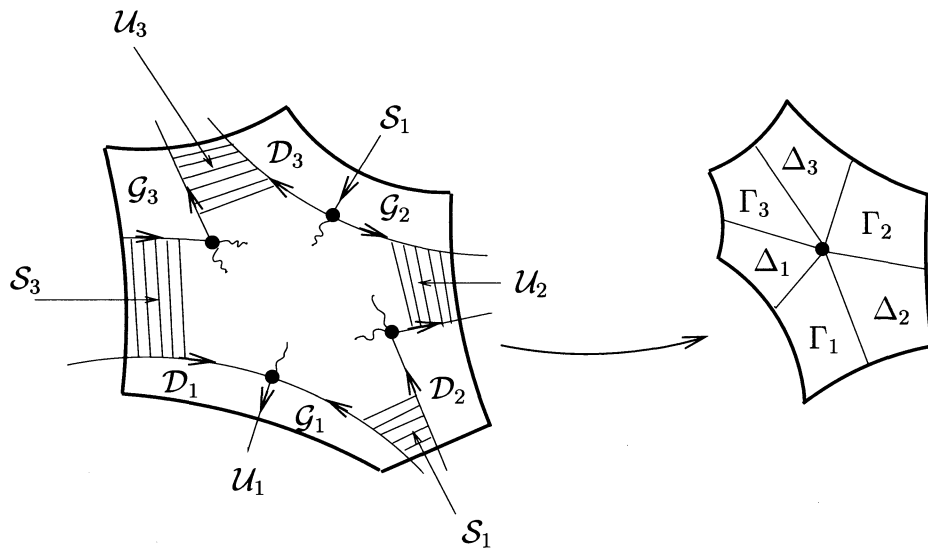


FIGURE 11. Au voisinage d'un cycle

Appelons  $\Delta_i$  le secteur  $[0, \zeta]^2 \times \{i\}$  de  $\mathcal{M}$ ,  $\sigma_i$  son côté  $[0, \zeta] \times \{0, i\}$  et  $\tau_i$ , son côté  $\{0\} \times [0, \zeta] \times \{i\}$ . Nous noterons  $\Gamma_i$  le secteur  $] - \zeta, 0] \times [0, \zeta] \times \{i\}$ .

À tout élément du cycle  $\mathcal{C}$ , nous avons associé un secteur  $D_i$  ou  $G_i$ . Rappelons que ces secteurs sont des rectangles. On peut donc choisir des coordonnées sur ces rectangles de façon que les segments stables soient horizontaux et les instables verticaux et que le point périodique de  $D_i$  soit le coin  $(0, 0)$ . Pour tout  $m$  de coordonnées  $(x, y)$  appartenant à  $D_i$ , on notera  $\int_0^x d\nu^u$  et  $\int_0^y d\nu^s$  les mesures pour  $\nu^u$  et  $\nu^s$  respectivement des segments de coordonnées  $[0, x] \times \{y\}$  et  $\{x\} \times [0, y]$ . Nous définissons  $g$  de  $D_i$  dans  $\Delta_i$  par :

$$m \mapsto \left( \int_0^x d\nu^u, \int_0^y d\nu^s, i \right).$$

De même que dans la démonstration du lemme 8.4.2, on montre que  $g$  ainsi défini est une surjection continue telle que l'image inverse de tout point par  $g$  est une classe d'équivalence de  $\mathcal{R}$ .

De façon semblable, l'application  $g$  est définie de  $G_i$  dans  $\Gamma_i$  par :

$$m \mapsto \left( - \int_0^x d\nu^u, \int_0^y d\nu^s, i \right).$$

Ainsi avons-nous envoyé tout point périodique bord en l'origine du modèle. De plus, remarquons que si  $D_i$  et  $G_i$  sont des secteurs adjacents, les deux définitions de  $g$  coïncident sur leur côté commun. Si  $G_i$  et  $D_{i+1}$  sont adjacents, sur leur côté commun, les deux définitions de  $g$  sont les mêmes car le point  $(-x, 0) \times \{i\}$  est égal dans  $\mathcal{M}$  au point  $(x, 0) \times \{i + 1\}$ .

Reste à définir  $g$  sur les demi-zips privés de l'arche  $A_i$  ou  $B_i$ .

Envoyons le demi-zip  $S_i \setminus \{A_i\}$  sur l'intervalle semi-ouvert  $\sigma_i$  : Soit  $p$  le point périodique du secteur  $D_i$  (ayant un côté commun avec  $S_i \setminus \{A_i\}$ ). Pour tout  $m$  appartenant à  $S_i \setminus \{A_i\}$ , soit  $c(m)$  un segment joignant  $m$  à la séparatrice stable de  $S_i \setminus \{A_i\}$  issue de  $p$ . Si  $m$  appartient à une arche instable, on appelle  $m'$  l'extrémité de cette arche appartenant à la séparatrice stable de  $p$ . Dans le cas contraire,  $m$  appartient à un rectangle minimal et on choisit pour  $m'$  un point quelconque de l'arche stable du bord de ce rectangle incluse dans la séparatrice stable de  $p$ .

Définissons  $g$  du demi-zip sur  $\sigma_i$  par :

$$g(m) = (\nu^u([p, m']^s, 0, i).$$

Comme  $\nu^u$  est à support dans  $K$ , cette définition ne dépend pas du choix de  $m'$ . De plus, elle coïncide avec la définition précédente de  $g$  sur  $D_i$ .

Soit  $\bar{p}$  le point périodique du secteur  $G_{i-1}$ , qui a un côté stable dans une séparatrice du demi-zip  $S_i$ . Soit  $m$  un point de ce côté stable. En tant que point de  $S_i$ , on lui a associé un point  $m'$  appartenant à la séparatrice stable issue de  $p$ . En utilisant le fait que la mesure de Margulis  $\nu^u$  est invariante par holonomie, on montre que les segments  $[\bar{p}, m]^s$  et  $[p, m']^s$  ont même mesure instable. On en déduit que les deux valeurs de  $g$  en  $m$  sont égales dans  $\mathcal{M}$ .

On définit de la même manière  $g$  du demi-zip  $U_i \setminus \{B_i\}$  dans l'intervalle  $\tau_i$  et cette définition est compatible avec la définition de  $g$  sur les côtés inclus dans  $U_i$  des secteurs  $D_i$  et  $G_i$ .

Par construction,  $g$  vérifie les quatre premiers items et de même que dans le lemme 8.4.2, l'image réciproque d'un point de  $\mathcal{M}$  est une classe d'équivalence.

L'application passe donc au quotient en une bijection continue. Pour être un homéomorphisme, il lui faut encore être ouverte. Remarquons qu'en toute classe d'équivalence, nous avons exhibé une base de voisinages ouverts dans  $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \zeta)$  qui sont saturés. Ce sont soit des rectangles privés de leur bord, soit des  $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \xi)$  avec  $0 < \xi < \zeta$ . L'image par  $g$  de tels ouverts saturés sont des ouverts de  $\mathcal{M}$ , ce qui conclut. □

**Lemme 8.6.2.** — *Le quotient  $\tilde{S}$  du domaine  $\Delta(K)$  de la pièce basique  $K$  par la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  est une surface séparée.*

*Démonstration.* — Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $\tilde{S}$ . Ils se relèvent dans  $\Delta(K)$  en deux classes d'équivalence,  $x'$  et  $y'$  respectivement. Nous devons montrer que  $x'$  et  $y'$  admettent des voisinages saturés disjoints. Nous allons choisir ces voisinages parmi ceux construits aux lemmes 6 et 8.5.9 Le seul cas délicat est celui où  $x'$  est un  $\mathcal{P}(C)$  et  $y'$  une classe d'un autre type. Soit  $\mathcal{V}(C)$  un voisinage saturé de  $x'$ . Si  $y'$  est disjoint de l'adhérence  $\text{Adh}(\mathcal{V}(C))$  dans  $\Delta(K)$ , le complémentaire du saturé de  $\text{Adh}(\mathcal{V}(C))$  est un voisinage saturé ouvert de  $y'$ . Si  $y'$  est dans l'intérieur de  $\mathcal{V}(C)$ ,  $y$  étant non nul et  $\mathcal{M} \subset S$  étant séparé, on trouve deux ouverts qui séparent  $x$  et  $y$ . Enfin, si

$y'$  est une classe non disjointe de la courbe  $\gamma(\mathcal{C})$ , on considère un voisinage saturé qui est l'intérieur d'un rectangle dont les mesures (stable et instable) des côtés sont inférieures à  $\zeta/10$ . Ce rectangle est disjoint de  $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \zeta/2)$ .  $\square$

Remarquons que les cartes feuilletées que nous avons construites sont munies de mesures transverses aux deux feuilletages qui proviennent des mesures de Margulis des variétés invariantes de  $K$ . Les changements de cartes préservent ces mesures. Pour achever la démonstration du théorème 8.3.1 il reste à montrer que la surface  $\tilde{S}$  est bien compacte.

**Lemme 8.6.3.** — *Le domaine  $\Delta(K)$  privé de l'union (sur l'ensemble des cycles  $\mathcal{C}$ ) des voisinages ouverts  $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \zeta)$  est compact.*

*Démonstration.* — Soit  $(x_n)$  une suite de points de  $\Delta(K)$  privé des  $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \zeta)$  : en particulier les points  $x_n$  appartiennent au domaine restreint  $\delta(K)$  privé des séparatrices libres et de l'intérieur des demi-zips. Nous allons montrer que la suite  $(x_n)$  possède une sous-suite convergente dans  $\Delta(K)$  (et donc dans  $\Delta(K)$  privé de l'ouvert union des  $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \zeta)$ ). Si la suite  $(x_n)$  contient une infinité de points dans  $K$ , cela découle de la compacité de  $K$ . On supposera donc que les  $x_n$  n'appartiennent pas à  $K$ . Ils appartiennent donc à des arches ou à des rectangles bordés d'arches. Rappelons que les arches appartiennent toutes à un nombre fini de zips, et que tout rectangle bordé d'arches est inclus dans l'intersection d'un zip stable et d'un zip instable (ou plus exactement dans l'intersection de leur domaine, nuance que l'on se permet d'oublier dans ce qui suit).

Supposons d'abord qu'il existe une infinité de  $x_n$  qui appartiennent chacun à une arche stable  $a_n$ . Quitte à prendre une sous-suite, on peut donc choisir un zip stable  $Z$  qui est la classe d'équivalence de toutes les arches  $a_n$ . Soit  $\mathcal{S}$  le demi-zip de  $Z$  dont on a ôté l'intérieur : rappelons qu'il est bordé par une arche  $A$ . Notons  $q$  la période des séparatrices instables qui portent le zip  $Z$ , et  $R$  le rectangle bordé par  $A$ ,  $f^q(A)$  et par deux segments instables contenus dans les séparatrices instables de  $Z$ . C'est un domaine fondamental de  $Z$ , et tout itéré négatif  $f^{-m \cdot q}(R)$  est inclus dans le demi-zip  $\mathcal{S}$ . On en déduit qu'il existe une suite  $(y_n)$  de points de  $R$  et une suite  $(k_n) \subset \mathbb{N}$  tels que pour tout  $n$ ,  $x_n = f^{k_n}(y_n)$ . Notons  $b_n = f^{-k_n}(a_n)$  l'arche stable passant par  $y_n$ . Si la suite  $(k_n)$  est bornée, les points  $x_n$  appartiennent à l'union d'un ensemble fini d'itérés de  $R$ , qui est compacte et incluse dans  $\Delta(K)$ . La suite  $(x_n)$  possède alors une sous-suite convergente dans  $\Delta(K)$  et c'est ce que l'on voulait. Si la suite  $(k_n)$  n'est pas bornée, quitte à prendre une sous-suite on peut supposer qu'elle tend vers  $+\infty$ . La longueur de l'arche stable  $a_n$  tend alors vers zéro : en effet,  $a_n = f^{k_n}(b_n)$ , et la longueur des arches stables  $b_n$  est uniformément bornée. On en déduit que la distance de  $x_n$  aux extrémités de l'arche  $a_n$  tend vers zéro, et donc aussi la distance de  $x_n$  à  $K$ . Comme  $K$  est compact, on peut extraire une sous-suite de  $(x_n)$  convergeant vers un point de  $K$ , ce qui conclut.

On raisonne de même dans le cas où une infinité de  $x_n$  appartiennent à une arche instable. Il reste donc à considérer le cas où une infinité de points  $x_n$  appartiennent chacun à l'intérieur d'un rectangle  $r_n$  bordé d'arches. Remarquons que chacun de ces rectangles est inclus dans l'intersection d'un zip stable et d'un zip instable. Quitte à prendre une sous-suite, on peut alors supposer qu'il existe un zip stable  $Z^s$  et un zip instable  $Z^u$  tel que pour tout  $n$  le rectangle  $r_n$  soit inclus dans  $Z^s \cap Z^u$ . On procède alors comme pour le cas précédent : on choisit un domaine fondamental  $d^s$  de  $Z^s$  dont tous les itérés négatifs sont inclus dans le demi-zip  $\mathcal{S}$  associé à  $Z^s$ , et un domaine fondamental  $d^u$  de  $Z^u$  dont les itérés positifs sont dans le demi-zip  $\mathcal{U}$  associé à  $Z^u$ . Chaque rectangle  $r^n$  est donc inclus dans une intersection  $f^{k_n}(d^s) \cap f^{-l_n}(d^u)$ , où  $(k_n)$  et  $(l_n)$  sont deux suites d'entiers positifs. Si l'une ou l'autre de ces suites est bornée, la suite  $x_n$  est incluse dans l'union d'un nombre fini d'itérés de  $d^u$  ou de  $d^s$ , ce qui permet de trouver une sous-suite convergeant dans  $\Delta(K)$ . Si chacune de ces suites est non-bornée donc (quitte à prendre une sous-suite) tend vers  $+\infty$ , on montre que le bord de  $r_n$  est de longueur tendant vers zéro, on en déduit que le diamètre de  $r_n$  tend vers zéro, et donc que la distance de  $x_n$  à  $K$  tend vers 0. Il existe alors une sous-suite de  $(x_n)$  convergeant vers un point de  $K$ . Ceci achève la démonstration de ce lemme.  $\square$

**Corollaire 8.6.4.** — *La surface  $\tilde{S}$  est compacte.*

*Démonstration.* — Nous allons montrer que  $\tilde{S}$  est l'union d'un nombre fini de compacts. En effet le lemme ci-dessus montre que  $\Delta(K)$  privé des ouverts  $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \zeta)$  est compact ; son quotient l'est donc aussi. La surface  $\tilde{S}$  est l'union de ce compact et du quotient des adhérences dans  $\Delta(K)$  des  $\mathcal{V}(\mathcal{C}, \zeta)$ . Or ces quotients sont homéomorphes à des disques fermés (modèles des singularités).  $\square$





## BIBLIOGRAPHIE

- [AbSm] R. Abraham, S. Smale, *Nongenericity of  $\Omega$ -stability*, Global Analysis I, Proc. Symp. Pure Math., 1968, AMS 14 (1970), p. 5-8.
- [ABS] V.S. Afraimovich, V.V. Bykov et L.P. Shil'nikov, *On the appearance and structure of the Lorenz attractor*, Dokl. Acad. Sci. USSR 234, (1977), p. 336-339.
- [AnPo] A.A. Andronov, L.S. Pontriaguine, *systemes grossiers*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 14 (1937) p. 247-250.
- [A1] D.V. Anosov, *Geodesic flows on closed riemannian manifolds with negative curvature*, Proc. of the Steklov Inst. of Math. (translated by the AMS) 90 (1967).
- [A2] D.V. Anosov, *Structurally stable systems*, Proc. Steklov Inst. Math. 169 (1985) p. 61-95.
- [ArGr1] S.Kh Aranson, V.Z. Grines, *The topological classification of cascade on closed two-dimensional manifolds*, Russian Math. Surv. 45 N1 (1990) p. 1-35.
- [ArGr2] S.Kh Aranson, V.Z. Grines, *Cascade on surfaces*, Encyclopædia of Mathematical Sciences 66 Dynamical Systems IX, Springer Verlag (1995) p. 141-175.
- [Be] A. Bezen, *On the topological properties and the topological conjugacy of two-dimensional Morse-Smale diffeomorphisms*, Random Comput. Dynam. 2 N2 (1994) p. 183-203.
- [BezGr1] A.N. Bezdenezhnykh, V.Z. Grines, *Realization of gradient-like diffeomorphisms of two-dimensional manifolds*, N.F. Otrokov (éditeur) Differ. Integral'nyi Uravn., Gor'kij Gos. Univ. (1985), p. 33-37.
- [BezGr2] A.N. Bezdenezhnykh, V.Z. Grines, *Diffeomorphism with orientable heteroclinic sets on two-dimensional manifolds*, E.A. Leontovich-Andronov (éditeur) Trud. Mezhvuz. Temat. Sb. Nauchn. Metody Kachestvennoj Teorii Differents Uravn. Gor'kij Gos. Univ. (1985) p. 139-152.

- [BezGr3] A.N. Bezdenezhnykh, V.Z. Grines, *Dynamical properties and topological classification of gradient-like diffeomorphisms on two-dimensional manifolds, parties 1 et 2*, E.A. Leontovich-Andronov (éditeur) Trud.Mezhvuz. Temat. Sb. Nauchn. Metody Kachestvennoj Teorii Differents Uravn. Gor'kij Gos. Univ. (1985) 22-38 et (1987) p. 24-31.
- [Bi] G.D. Birkhoff, *Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques*, *Memoriae Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei* 93 vol.1 (1935) 85-216 et œuvres complètes vol. 2 Dover (1968).
- [BeHa1] M. Bestvina et M. Handel, *Train tracks and automorphisms of free groups*, *Ann. of Math.*, 135, (1992) p. 1-51.
- [BeHa2] M. Bestvina et M. Handel, *Train-tracks for surface homeomorphisms*, *Topology* 34 N.1 (1995) p. 109-140.
- [BlFr] P. Blanchard, J. Franks, *An obstruction to the existence of certain dynamics in surface diffeomorphisms*, *Ergod. Th. and Dyn. Sys.* 1 (1981) p. 255-260.
- [Bo1] R. Bowen, *Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms*, *Amer. J. of Math.* 42 (1970), 725-747.
- [Bo2] R. Bowen, *Topological entropy and Axiom A*, *Proc. Symp. Pure Math.* Vol 14 AMS, Providence, R.I. (1970) p. 23-41.
- [Ch] J. Christy, *Branched surfaces and attractors. I : dynamic branched surfaces*, *Trans. of the AMS* 336 N2, april 1993, p. 759-784.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach et V. Poénaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, *Astérisque* 66-67 (1979).
- [Fe] J. Fehrenbach, *Roots and symetries of pseudo Anosov homéomorphisms*, preprint INLN (1997).
- [Fl] G. Fleitas, *Classification of gradient like flows on dimension two and three*, *Bol. Soc. Mat. Brasil* 6 (1975).
- [Fr1] J. Franks, *Anosov diffeomorphisms*, *Proc. Symp. Pure Maths* 14 (1970) p. 61-93.
- [Fr2] J. Franks, *Homology and dynamical systems*, volume CBMS 49. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island (1982).
- [Fri] D. Fried, *Subshifts on surfaces*, *Ergod. Th. and Dyn. Sys.* 2 (1982) p. 15-21.
- [Go] C. Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann (1971).
- [Gr1] V.Z. Grines, *The topological conjugacy of diffeomorphisms of a two-dimensional manifold on one-dimensional orientable basic set I*, (En russe) *Trudy Moskow. Mat. Obsch* 32 (1975) p. 35-60.
- [Gr2] V.Z. Grines, *The topological conjugacy of diffeomorphisms of a two-dimensional manifold on one-dimensional orientable basic set II*, (En russe) *Trudy Moskow. Mat. Obsch* 34 (1977) p. 243-252.

- [Gr3] V.Z. Grines, *Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic trajectories on surfaces*, (En russe) Mat. Zametki 54 N3 (1993) p. 3-17, et traduction dans Math. Notes 54(1993), p. 881-889 (1994).
- [Gr4] V.Z. Grines, *Structural stability and the asymptotic behaviour of invariant manifolds of A-diffeomorphisms of surfaces*, Journal of Dynamical and Control Systems 3 N1 (1997) p. 91-110.
- [Gr5] V.Z. Grines, *On topological classification of structurally stable diffeomorphisms of surfaces with one-dimensional attractors and repellers*, Matem. Sborn.188 N4 (1997) p. 57-94.
- [Gr6] V.Z. Grines, *Representation of one-dimensional attractors and repellers of A-diffeomorphisms of surfaces by hyperbolic homeomorphisms*, Matem. Zametki. (1997) à paraître.
- [GrKa1] V.Z. Grines, Kh.Kh. Kalay, *The topological classification of basic sets with no pairs of conjugate points of A-diffeomorphisms of surfaces*, Gorkii State University, Gorkii (1988) p. 1-95.
- [GrKa2] V.Z. Grines, Kh.Kh. Kalay, *On the topological equivalence of diffeomorphisms with non-trivial basic sets on two-dimensional manifolds*, Methods of the qualitative theory of differential equations, Gorkii State University, Gorkii (1988) p. 40-48.
- [GuMoNe] J. Guckenheimer, J. Moser, Sh. Newhouse, *Dynamical Systems*, C.I.M.E. lectures, Bressanone, Italy, June 1978, Progress in Math. 8, 1980.
- [GuWi] J. Guckenheimer et R.F. Williams, *Structural stability of Lorenz attractors*, Publ. Math. de l'I.H.E.S. 50 (1979), 307-320.
- [Ha] J. Hadamard, *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles*, Bull. Soc. Math. France, 29 (1901) p. 223-226.
- [Han] M. Handel, *Global shadowing of pseudo-Anosov homeomorphism*, Erg. Th. and Dyn. Sys. 5 (1985) p. 373-377.
- [He] G. Hemion, *On the classification of homéomorphisms of 2-manifolds and the classification of 3-manifolds*, Acta Math1-2 (1979) p. 125-155.
- [HPPS] M. Hirsch, J. Palis, C. Pugh et M. Shub, *Neighbourhoods of hyperbolic sets*, Inventiones Math. 9, (1970), p. 121-134.
- [Je] E. Jeandenans, *Difféomorphismes hyperboliques des surfaces et combinatoire des partitions de Markov*, thèse de doctorat de l'université de Bourgogne, Dijon, 20 sept 1996.
- [La] R. Langevin, *Quelques nouveaux invariants des difféomorphismes Morse-Smale d'une surface*, Annales Inst. Fourier 43 (1993) Fasc.1 p. 265-278.
- [Lo1] J. Los, *Pseudo-Anosov maps and invariant train tracks in the disc : a finite algorithm*, Proc. London Math Soc. (1993).
- [Lo2] J. Los, *On the conjugacy problem for automorphisms of free groups*, Topology 35, 3,(1996) p. 779-806.

- [Lor] E.N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmosph. Sci. 20 (1963), p. 130-141.
- [Ma] R. Mañé, *A proof of the  $C^1$ -stability conjecture*, Publ. Math. I.H.E.S. 66 (1988), p. 161-210.
- [Man] A. Manning, *There are no new Anosov diffeomorphisms on tori*, Amer. J. Math. 96 (1974), p. 422-429
- [Mar] G.A. Margulis, *Certain measures associated with  $U$ -flows on compact manifolds*, Func. Anal. and its Appl. 4, (1970) p. 55-67.
- [Mo] J. Moser, *On a theorem of Anosov*, J. Diff. Equ. 5 (1969) p. 411-440.
- [Mo1] J. Moser, *Stable and random motions in dynamical systems*, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, (1973).
- [Mos] L. Mosher, *The classification of Pseudo-Anosovs*, London Math. Soc. Lect. Notes 112 (1986) 13-75.
- [NePa] S. Newhouse et J. Palis, *Hyperbolic nonwandering sets on two-dimensional manifolds*, Dyn. Systems, Peixoto ed., Salvador (1973 ) p. 293-301.
- [Pa] J. Palis, *On Morse-Smale dynamical systems*, Topology 8 (1969) p. 385-405.
- [PM] J. Palis et W. De Melo, *Geometric theory of dynamical systems*, Springer-Verlag, (1982).
- [PaSm] J. Palis et S. Smale, *Structural stability theorems*, Proc. of Symposia in Pure Mathematics (Global Analysis) 14 (1970) 223-231.
- [PaSu] W. Parry et D. Sullivan, *A topological invariant of flows on one dimensional spaces*, Topology 14 (1975), p. 297-299.
- [PaTa] J. Palis et F. Takens, *Homoclinic bifurcations and chaotic dynamics*, Cambridge Uni.Press (1993).
- [PePe] M.C. Peixoto et M. Peixoto, *Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions*, Anais da Acad. Bras de Ciências 31, (1959).
- [Pe1] M. Peixoto, *Structural stability on two dimensional manifolds*, Topology 1, 1962.
- [Pe2] M. Peixoto, *On the classification of flows on 2-manifolds*, Salvador Symp. in Dynamical Systems, Academic Press (1973).
- [Per1] O. Perron, *Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen*, Math. Zeit. 29 (1928), p. 129-160.
- [Per2] O. Perron, *Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzengleichungen*, J. Reine Angew. Math 161 (1929), 41-64.
- [Per3] O. Perron, *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen*, Math. Zeit.32 (1930), p. 703-728.
- [Pl1] R.V. Plykin, *On hyperbolic attractors of diffeomorphisms*, Usp.Math. Nauk 35, No 4, (1980) p. 94-104 [English Transl. Russ. Math. Survey 35, No 3, p. 109-121 ].

- [Pl2] R.V. Plykin, *On hyperbolic attractors of diffeomorphisms (non-orientable case)*, Usp.Math. Nauk 35, No 4, (1980) p. 186-187 [English Transl. Russ. Math. Survey 35, No 4, p. 186-187].
- [Pl3] R.V. Plykin, *On the geometry of hyperbolic attractors of smooth cascades*, Usp.Math. Nauk 39, No 6, (1984) 75-113 [English Transl. Russ. Math. Survey 39, No 6, p. 85-131].
- [Po] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Les grands classiques Gauthier-Villars, librairie Blanchard.
- [Pu] C. Pugh, *The closing lemma*, Amer. J. Math 89 (1967), p. 956-1009.
- [PuSh1] C. Pugh, M. Shub, *Suspending subshifts*, in C. Percelli and R. Sacksteder editors, Contributions to Geometry and Analysis. London Math. Soc., Johns Hopkins University Press, 1981.
- [Ro] J.W. Robbin, *A structural stability theorem*, Annals of Math. 94 (1971), p. 447-493.
- [R] C. Robinson, *Structural stability of  $C^1$ -diffeomorphisms*, J. Diff. Equ. 22 (1976), p. 28-73.
- [Ru] G. Ruas, *Atratores hiperbólicos de codimensão um e classes de isotopia em superfícies*, Informes de Matemática, I.M.P.A. Série F-01/82, ( 1982) (prépublication).
- [Sh] M. Shub, *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Astérisque 56 (1978).
- [Si] Ya.G. Sinai, *Markov partitions and  $C$ -diffeomorphisms*, Funkts. Anal. Prilozh. 2, No 1, (1968) p.64-69 [English Transl. Funct. Anal. Appl. 2, p. 61-82].
- [Sm] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. A.M.S. 73 (1967), p. 747-817.
- [Wi1] R. Williams, *The 'DA' maps of Smale and structural stability*, Global Analysis, Proc. Symp in Pure Math. XIV, Amer. Math Soc (1970), p. 329-334.
- [Wi2] R. Williams, *Classifications of subshifts of finite type*, Annals of Math. 98 (1973) p.120-153 et Errata Annals of Math. 99 (1974) p. 380-381.
- [Wi3] R. Williams, *Classifications of one-dimensional attractors*, Proc. Symp Pure Math. 14 (1970) p. 341-363.