

# Astérisque

FRANÇOISE DAL'BO

MARC PEIGNÉ

**Comportement asymptotique du nombre de géodésiques fermées sur la surface modulaire en courbure non constante**

*Astérisque*, tome 238 (1996), p. 111-177

<[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1996\\_\\_238\\_\\_111\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__238__111_0)>

© Société mathématique de France, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU NOMBRE DE GÉODÉSQUES FERMÉES SUR LA SURFACE MODULAIRE EN COURBURE NON CONSTANTE

**Françoise DAL'BO & Marc PEIGNÉ**

Soit  $\bar{g}_\varepsilon$  une perturbation de la métrique hyperbolique sur  $M = \mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , nous démontrons que le nombre de géodésiques fermées sur  $(M, \bar{g}_\varepsilon)$  de longueur au plus  $a$  est équivalent quand  $a$  tend vers  $+\infty$  à  $e^{a\delta_\varepsilon}/a\delta_\varepsilon$  (où  $\delta_\varepsilon$  est l'exposant critique de la série de Poincaré associée à  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ ). La démonstration de ce résultat repose sur un codage des géodésiques fermées de  $(M, \bar{g}_\varepsilon)$  relié au développement en fractions continues des réels et sur l'utilisation d'un théorème du renouvellement harmonique nécessitant une étude spectrale précise de l'opérateur de transfert mis en jeu. Nous retrouvons également par cette méthode probabiliste la distribution asymptotique des constantes de Lévy des nombres quadratiques.

Let  $\bar{g}_\varepsilon$  be a variation of the hyperbolic metric on  $M = \mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , we prove that the number of closed geodesics on  $(M, \bar{g}_\varepsilon)$  with length less or equal to  $a$  is equivalent to  $e^{a\delta_\varepsilon}/a\delta_\varepsilon$  (where  $\delta_\varepsilon$  is the critical exponent of the Poincaré series associated with  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ ). The proof of this result is based on a coding of closed geodesics related to the continuous fractions expansion of the reals and on an harmonic renewal theorem which requires a precise description of the spectrum of the appropriate transfer operator. Using this probabilistic method, we give a new proof of the asymptotic distribution of the Lévy constants of the quadratic numbers.



# TABLE DES MATIÈRES

	<b>Introduction</b>	<b>115</b>
<b>1</b>	<b>Codage des géodésiques de <math>M</math> en courbure constante</b>	<b>121</b>
1.1	Points de changement des géodésiques de $\mathbb{H}^2$	122
1.2	Propriétés des éléments hyperboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$	125
1.3	Passage au quotient	127
<b>2</b>	<b>Flot géodésique et codage en courbure constante</b>	<b>129</b>
2.1	Représentation du flot géodésique par un flot spécial	129
2.2	Lien entre mesure de Gauss et mesure de Liouville	130
<b>3</b>	<b>Comportement asymptotique du nombre de géodésiques fermées de <math>M</math> en courbure constante</b>	<b>131</b>
3.1	Le théorème A se déduit du théorème B	132
3.2	Démonstration du théorème B	134
<b>4</b>	<b>Distribution asymptotique des constantes de Lévy des nombres quadratiques</b>	<b>139</b>
4.1	Résumé de la démonstration du théorème 4.0.1, partie (i)	140
4.2	Résumé de la démonstration du théorème 4.0.1 partie (ii)	142
<b>5</b>	<b>Étude du comportement asymptotique du potentiel harmonique d'une marche de Markov sur <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>145</b>
5.1	Démonstration du théorème du renouvellement harmonique	147
5.2	Le couple $(P, f)$ vérifie les hypothèses $H_0, H_1, H_2, H_3, H_4$	151
<b>6</b>	<b>Perturbation de la métrique de Poincaré sur <math>M</math></b>	<b>155</b>
6.1	Codage des géodésiques fermées de $(M, \bar{g}_\varepsilon)$	155
6.2	Transformation dilatante et mesure $T_\varepsilon$ -invariante sur $\Lambda^+$	157
6.3	Comportement asymptotique de $\pi_\varepsilon(a)$	161
6.4	Le couple $(P_\varepsilon, f_\varepsilon)$ vérifie les hypothèses $H_0, H_1, H_2, H_3, H_4$	165
6.5	Mélange du flot géodésique sur $(M, \bar{g}_\varepsilon)$	171
	<b>Bibliographie</b>	<b>175</b>



# INTRODUCTION

Notons  $d$  la distance de Poincaré sur  $\mathbb{H}^2$  et  $\bar{g}$  la métrique de Poincaré sur la surface modulaire  $M = \mathbb{H}^2/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ . Soit  $\varepsilon \geq 0$ , une métrique  $\bar{g}_\varepsilon$  sur  $M$  est une  $\varepsilon$ -perturbation de  $\bar{g}$  si la distance  $d_\varepsilon$  induite par  $\bar{g}_\varepsilon$  sur  $\mathbb{H}^2$  et la courbure  $K_\varepsilon$  de  $(M, \bar{g}_\varepsilon)$  satisfont les hypothèses suivantes :

1. Pour tous  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ ,

$$(1 + \varepsilon)^{-1}d(z_1, z_2) \leq d_\varepsilon(z_1, z_2) \leq (1 + \varepsilon)d(z_1, z_2).$$

En d'autres termes, les espaces métriques  $(\mathbb{H}^2, d)$  et  $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$  sont  $(1 + \varepsilon, 0)$ -quasi-isométriques [11].

2. Il existe  $b \in ]0, 1]$  et  $R > 0$  tels que pour tout  $z \in \mathbb{H}^2$ ,  $K_\varepsilon(z) \leq -b^2$  et  $K_\varepsilon(z) = -1$  si  $\mathrm{Im}z \geq R$ .

En d'autres termes, la courbure de  $M$  est strictement négative et égale à  $-1$  dans la pointe.

Une telle métrique est obtenue par exemple en perturbant la métrique  $\bar{g}$  « régulièrement » dans un compact de  $M$ .

Notons  $\delta_\varepsilon$  l'exposant critique de la série de Poincaré  $\sum_{\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} e^{-sd_\varepsilon(i, \gamma(i))}$ , si  $\varepsilon = 0$  alors  $\delta_0 = 1$ , nous démontrons le

**Théorème A.** — *Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , le nombre  $\pi_\varepsilon(a)$  de géodésiques primitives fermées orientées de  $(M, \bar{g}_\varepsilon)$  de longueur au plus  $a$  soit équivalent à  $e^{a\delta_\varepsilon}/a\delta_\varepsilon$  lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ .*

Si  $\varepsilon \neq 0$ , ce théorème est nouveau, le cas de la courbure variable ayant été abordé (à notre connaissance) jusqu'à présent pour des variétés compactes ([23], [20] et [27] pour le problème plus général des flots d'axiome  $A$ ). La méthode classique utilisée en courbure variable s'appuie sur l'existence d'une partition de Markov associée au flot géodésique, garantie par la compacité de la variété. Cette méthode semble s'étendre au cas convexe cocompact mais n'est apparemment pas adaptée à l'étude des variétés avec pointes.

Si  $\varepsilon = 0$ , la courbure est alors constante égale à  $-1$  et dans ce cas le théorème A est connu ([15], [26], [10]). Différentes méthodes ont été développées

en courbure constante. L'une d'elles, basée sur la formule des traces de Selberg [29], est particulièrement bien adaptée aux variétés de volume fini (même infini si la variété est une surface dont l'exposant critique  $\delta \in ]\frac{1}{2}, 1]$  (cf. [10]) et précise dans certains cas [15] l'asymptotique par un reste. Cette approche ne paraît pas appropriée à la courbure variable.

La méthode que nous utilisons ici pour démontrer le théorème A a été introduite par S. Lalley [19] pour dénombrer les géodésiques fermées des quotients de  $\mathbb{H}^n$  par des groupes de Schottky (dans [8] nous étendons cette étude à des groupes libres contenant des transformations paraboliques). Le fait que les groupes de Schottky soient purement hyperboliques est essentiel dans le travail de S. Lalley, cela assure, dans le codage des géodésiques fermées mis en jeu, le caractère dilatant du décalage et la régularité höldérienne de la fonction plafond. Dans notre cas, afin de conserver cette propriété de dilatation, nous sommes amenés à introduire un codage d'alphabet infini. Nous compensons cette difficulté en exploitant la géométrie du problème et notamment la dynamique des transformations de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ .

Voici le résumé du déroulement de la démonstration du théorème A :

Notons  $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$  le bord de  $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$  (cf. [11] chap. 7). Nous introduisons une transformation dilatante  $T_\varepsilon$  sur  $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ , traduisant la dynamique des éléments de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  sur le bord. Nous codons alors les géodésiques fermées de  $(M, \bar{g}_\varepsilon)$  par des points  $T_\varepsilon$ -périodiques de  $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$  et exprimons leur longueur à l'aide d'une fonction  $f_\varepsilon$  définie sur  $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ . En un deuxième temps nous construisons une mesure de probabilité  $\nu_\varepsilon$  sur  $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$  invariante par  $T_\varepsilon$  et absolument continue par rapport à la mesure de Patterson  $\sigma_\varepsilon$  [17]. Nous relierons ensuite  $\pi_\varepsilon(a)$  aux mesures  $N_{(\xi, a)}^\varepsilon$  définies pour tout  $\xi \in \partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$  et pour toute fonction continue par morceaux et bornée  $\varphi$  sur  $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$  par

$$N_{(\xi, a)}^\varepsilon(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\xi' / T_\varepsilon^{2n} \xi' = \xi} \varphi(\xi') \mathbf{1}_{[0, a]}(S_{2n} f_\varepsilon(\xi'))$$

où  $S_{2n} f_\varepsilon(\xi') = f_\varepsilon(\xi') + f_\varepsilon(T_\varepsilon \xi') + \dots + f_\varepsilon(T_\varepsilon^{2n-1} \xi')$ .

Le théorème A se déduit alors du

**Théorème B.** — Soient  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  et  $A$  un intervalle de  $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$  tel que  $\nu_\varepsilon(A) > 0$ . Lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$   $N_{(\xi, a)}^\varepsilon(\mathbf{1}_A)$  est équivalent à  $h_\varepsilon(\xi) \sigma_\varepsilon(A) e^{a\delta_\varepsilon} / a\delta_\varepsilon$  uniformément par rapport à  $\xi \in \partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$  (la fonction  $h_\varepsilon$  représentant la densité de  $\nu_\varepsilon$  par rapport à  $\sigma_\varepsilon$ ).

Les mesures  $N_{(\xi, a)}^\varepsilon$  s'expriment comme potentiel harmonique de la chaîne de Markov  $(Y_n, f_\varepsilon(Y_1) + \dots + f_\varepsilon(Y_n))$  sur  $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , les transitions du processus  $Y_n$  étant gouvernées par l'opérateur  $P_\varepsilon$  adjoint de  $T_\varepsilon$  par rapport à  $\nu_\varepsilon$ . Après une étude spectrale précise de  $P_\varepsilon$ , on montre que le théorème B découle directement du résultat général suivant : soient  $X$  un espace métrique compact,  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov sur  $X$  de noyau de transition  $Q$  et  $g$  une fonction borélienne positive sur  $X$  ; on note  $\tilde{Q}$  le noyau de transition sur  $X \times \mathbb{R}$  associé à la chaîne de Markov  $(X_n, g(X_1) + \dots + g(X_n))_{n \geq 0}$ . On a le

**Théorème du renouvellement harmonique.** — Supposons que le couple  $(Q, g)$  satisfasse les hypothèses  $H_0, H_1, H_2, H_3$  et  $H_4$  explicitées dans le paragraphe 5. Soient  $\mu$  l'unique mesure de probabilité  $Q$ -invariante sur  $X$  et  $m$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ . La famille de mesures  $\left(a \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \tilde{Q}^n((x, a), dy, dt)\right)$  converge vaguement lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$  vers la mesure produit  $\mu(dy) \otimes m(dt)$  uniformément par rapport à  $x \in X$ .

Pour démontrer ce théorème nous reprenons des arguments développés dans [1], [13] et [21]. Soulignons que l'étude directe du comportement asymptotique de ces potentiels évite l'utilisation, comme dans [19] d'un théorème des grands écarts. L'étude spectrale de  $P_\varepsilon$  permet aussi d'appliquer un théorème du renouvellement « classique » (c'est-à-dire sans le facteur  $\frac{1}{n}$ ) et, en reprenant les arguments de Y. Guivarc'h et J. Hardy [13], d'obtenir la

**Proposition.** — Pour tout  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent de  $(M, \bar{g}_\varepsilon)$  est mélangeant relativement à la mesure  $\overline{\mu_\varepsilon} \otimes \overline{m}$  (voir § 6.5).

La démonstration que nous proposons de ce résultat repose sur l'étude de l'opérateur de transfert  $P_\varepsilon$ .

Nous donnons également une application de notre méthode « probabiliste » à l'arithmétique en retrouvant des résultats de C. Faivre concernant la distribution asymptotique des constantes de Lévy des nombres quadratiques. Introduisons brièvement quelques notations : si  $x \in ]0, 1[$  est un irrationnel quadratique, on note  $N(x)$  la plus petite période de son développement en fractions continues et  $\ell(x)$  la « longueur » de  $x$  définie par  $\ell(x) = -2 \sum_{i=0}^{N(x)-1} \log T^i(x)$  si  $N(x)$  est pair et  $\ell(x) = -4 \sum_{i=0}^{N(x)-1} \log T^i(x)$  sinon. De plus, si  $[a_0(x), a_1(x), \dots]$  est le développement en fractions continues de  $x$ , on pose  $\frac{p_n(x)}{q_n(x)} = [a_0(x), \dots, a_n(x)]$ ; si  $x$  est un irrationnel quadratique alors la suite  $\left(\frac{1}{n} \log q_n(x)\right)_{n \geq 1}$  converge vers un réel noté  $\beta(x)$  et appelé « constante de Lévy » de  $x$ . Nous avons le

**Théorème [9].** — Soient  $a > 0$  et  $\mathcal{Y}_a$  l'ensemble des irrationnels quadratiques  $x \in ]0, 1[$  tels que  $\ell(x) \leq a$ .

- i) Le cardinal de  $\mathcal{Y}_a$  est équivalent à  $\frac{3 \log 2}{\pi^2} e^a$  lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ .
- ii) La somme  $\sum_{x \in \mathcal{Y}_a} \beta(x)$  est équivalente à  $\frac{e^a}{4}$  lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ .





## À PROPOS DU PLAN...

Les paragraphes 1 à 5 sont rédigés dans le but d'exposer une méthode nouvelle permettant de retrouver des résultats connus. Suite à la rédaction de ce travail nous avons été encouragés à l'adapter au cas de la courbure « légèrement » variable. Souhaitant conserver l'esprit initial dans lequel nous nous étions placés, nous avons ajouté le paragraphe 6 dans lequel nous indiquons les modifications à apporter à la démonstration du théorème A en courbure constante pour obtenir l'asymptotique de  $\pi_\varepsilon(a)$  avec  $\varepsilon \neq 0$ . Cette extension à la courbure variable s'appuie sur différents travaux parus sur les variétés hyperboliques (au sens de M. Gromov). Les références que nous utilisons sont : le livre de É. Ghys et P. de la Harpe [11], un article de M. Bourdon [4] sur le bord des CAT(-1)-espaces et un article de V. Kaimanovitch [17] sur les mesures invariantes.

*Nous tenons à remercier Y. Guivarc'h pour ses précieux conseils, E. Le Page pour l'intérêt permanent qu'il a porté à ce travail ainsi que L. Guillopé pour la précision avec laquelle il a lu notre première rédaction.*

*Les discussions que nous avons eues avec F. Ledrappier et ses encouragements nous ont aidés à aboutir à la rédaction du paragraphe 6.*



# 1 CODAGE DES GÉODÉSQUES DE $M$ EN COURBURE CONSTANTE

Jusqu'au paragraphe 4, la surface modulaire est munie de la métrique de Poincaré.

Le codage décrit dans ce paragraphe est bien connu ([30], [14]). Nous développons ici la présentation donnée dans [14].

On rappelle que  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  est engendré par la translation  $\tau_1(z) = z + 1$  et la rotation d'ordre trois  $r(z) = \frac{z-1}{z}$ . Soit  $D$  le domaine fondamental de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  représenté par la figure 1.1, la réunion  $D \cup rD \cup r^2D$  forme un triangle idéal dont les images par  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  pavent  $\mathbb{H}^2$  (Fig. 1.2).

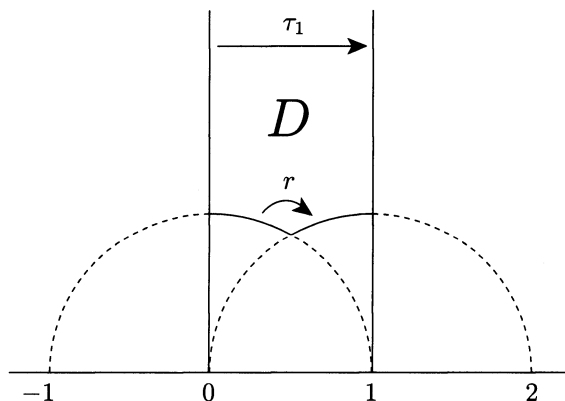


FIG. 1.1.

Les côtés de ces triangles idéaux appelés *lignes de Farey* correspondent aux images par  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  de l'axe imaginaire  $L = \{iy \mid y > 0\}$ . Notons  $\bar{L}$  la projection sur  $M$  de  $L$ , les deux points  $iy$  et  $r^2\tau_1(iy)$  de  $L$ , se projettent donc sur le même point de  $\bar{L}$ .

Dans la suite du texte, le terme *géodésique* de  $\mathbb{H}^2$  est synonyme de géodésique orientée d'extrémités irrationnelles. Une telle *géodésique* coupe une infinité de lignes de Farey et se projette sur  $M$  en une géodésique orientée restant dans un compact. Pour alléger le texte, on appelle *géodésique* de  $M$  la projection sur  $M$  d'une *géodésique*

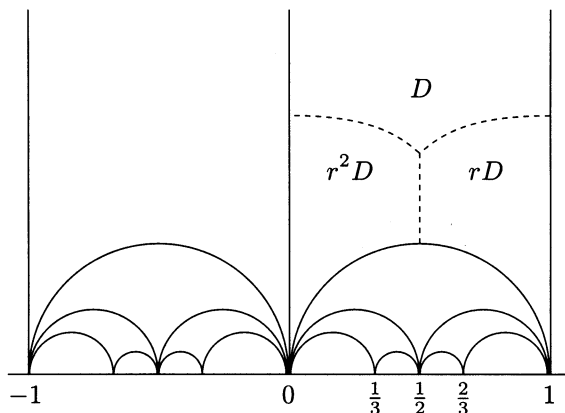


FIG. 1.2.

de  $\mathbb{H}^2$ . Pour coder les *géodésiques* de  $M$ , l'idée est d'associer à chaque *géodésique* ses points d'intersection avec  $\bar{L}$  (fig. 1.3) ce qui sur  $\mathbb{H}^2$  revient à associer à une *géodésique* ses points d'intersection avec les lignes de Farey.

### 1.1 Points de changement des géodésiques de $\mathbb{H}^2$

Soit  $\alpha$  une *géodésique* de  $\mathbb{H}^2$  ; elle coupe une infinité de lignes de Farey. Choisissons un point  $F_0$  situé à l'intersection d'une ligne de Farey  $L_0$  et de  $\alpha$ . En se déplaçant sur  $\alpha$  à partir de  $F_0$  dans le sens positif (resp. sens négatif), on rencontre successivement des lignes de Farey  $L_1, L_2, \dots$  (resp.  $L_{-1}, L_{-2}, \dots$ ) en des points  $F_1, F_2, \dots$  (resp.  $F_{-1}, F_{-2}, \dots$ ) appelés *points de Farey* de  $\alpha$  (fig. 1.4). Nous orientons les géodésiques  $L_n$  selon la convention :  $(\alpha, L_n) \in ]0, \pi[$ . Notons  $\gamma_n$  l'unique élément de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  envoyant l'axe imaginaire  $L$  orienté dans le sens croissant sur  $L_n$  ; on obtient ainsi une suite bilatère  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  d'éléments de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ .

Soit  $\tau_{-1} = r\tau_1$  ; pour tout  $z \in \mathbb{H}^2$  on a  $\tau_{-1}(z) = \frac{z}{z+1}$ .

**Lemme 1.1.1.** — Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , il existe  $\varepsilon_{n+1} \in \{\pm 1\}$  tel que  $\gamma_{n+1} = \gamma_n \tau_{\varepsilon_{n+1}}$ .

*Démonstration.* — La géodésique  $\gamma_n^{-1}(\alpha)$  coupe  $\gamma_n^{-1}(L_n) = L$  au point de Farey  $\gamma_n^{-1}(F_n)$ . Le point de Farey suivant est  $\gamma_n^{-1}(F_{n+1})$  et se situe sur  $\gamma_n^{-1}(L_{n+1}) = \gamma_n^{-1}\gamma_{n+1}(L)$ . Deux cas se présentent (fig. 1.5) : soit  $\gamma_n^{-1}(L_{n+1}) = \tau_1(L)$  soit  $\gamma_n^{-1}(L_{n+1}) = \tau_{-1}(L)$ .

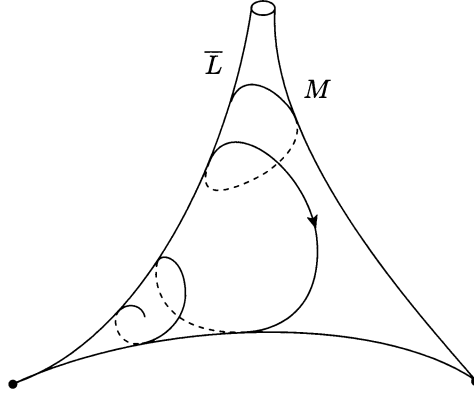


FIG. 1.3.

**Corollaire 1.1.2.** — Il existe une suite  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$  formée de  $+1$  et de  $-1$  telle que :

1. si  $n \geq 1$ , alors  $\gamma_n = \gamma_0 \tau_{\varepsilon_1} \cdots \tau_{\varepsilon_n}$
2. si  $n \leq 0$ , alors  $\gamma_n = \gamma_0 \tau_{\varepsilon_0}^{-1} \tau_{\varepsilon_{-1}}^{-1} \cdots \tau_{\varepsilon_{n+1}}^{-1}$

Parmi les points de Farey de  $\alpha$  on distingue les points particuliers suivants :

**Définition 1.1.3.** — Le point  $F_n$  est un point de changement de  $\alpha$  si  $\varepsilon_n \neq \varepsilon_{n+1}$ .

Soit  $C_0$  un point de changement de  $\alpha$ . Par une construction analogue à celle des points de Farey, on associe à  $\alpha$  la suite  $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  des points de changement rencontrés en se déplaçant sur  $\alpha$  à partir de  $C_0$ . Les points  $C_n$  se situent sur des lignes de Farey orientées notées  $\gamma_{C_n}(L)$  (fig. 1.6). En utilisant le corollaire 1.1.2 on montre la

**Propriété 1.1.4.** — Il existe une suite bilatère d'entiers strictement positifs  $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  et  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$  tels que :

1. si  $k \geq 1$ , alors  $\gamma_{C_k} = \gamma_{C_0} \tau_{\varepsilon}^{n_1} \tau_{-\varepsilon}^{n_2} \cdots \tau_{(-1)^{k+1} \varepsilon}^{n_k}$
2. si  $k \leq 0$ , alors  $\gamma_{C_k} = \gamma_{C_0} \tau_{-\varepsilon}^{-n_0} \tau_{\varepsilon}^{-n_{-1}} \cdots \tau_{(-1)^{k+1} \varepsilon}^{-n_{k+1}}$

Soit  $s(z) = -\frac{1}{z}$ , on a la relation  $\tau_{\varepsilon}^{-1} = s \tau_{-\varepsilon} s$ . Par conséquent si  $k \leq 0$  on a  $\gamma_{C_k} = \gamma_{C_0} s \tau_{\varepsilon}^{n_0} \tau_{-\varepsilon}^{n_{-1}} \cdots \tau_{(-1)^{k+1} \varepsilon}^{n_{k+1}} s$ .

Les extrémités de  $\alpha$  se déduisent de la suite  $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  grâce à la

**Proposition 1.1.5.** — Soient  $\xi_-$  et  $\xi$  les extrémités de  $\alpha$  orientée de  $\xi_-$  vers  $\xi$ ; on a

$$\xi_- = \gamma_{C_0} s([n_0 n_{-1} n_{-2} \cdots]^{-\varepsilon}) \quad \text{et} \quad \xi = \gamma_{C_0}([n_1 n_2 n_3 \cdots]^{-\varepsilon})$$

où  $[n_1 n_2 n_3 \cdots] = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} [n_1 n_2 n_3 \cdots n_{\ell}]$  avec la convention  $[n_1] = \frac{1}{n_1}$  et  $[n_1 n_2 n_3 \cdots n_{\ell}] = 1/(n_1 + [n_2 n_3 \cdots n_{\ell}])$  pour  $\ell > 1$ .

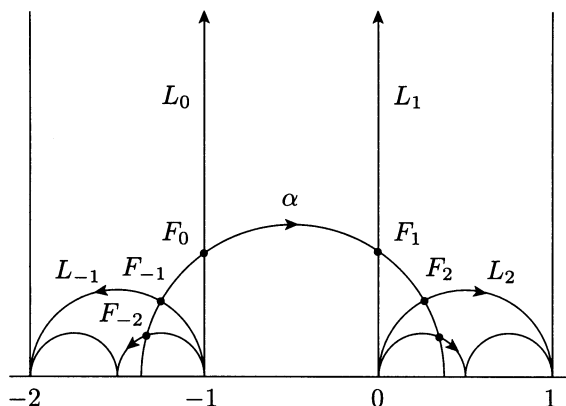


FIG. 1.4.

*Démonstration.* — Commençons par le cas  $k \geq 1$  et  $\varepsilon = -1$ . On remarque que

$$\tau_{-1}^{n_1} \cdots \tau_{(-1)^k}^{n_k}(0) = [n_1 n_2 \cdots n_{k'}] \quad \text{et} \quad \tau_{-1}^{n_1} \cdots \tau_{(-1)^k}^{n_k}(\infty) = [n_1 n_2 \cdots n_{k''}]$$

avec si  $k$  est pair,  $k' = k$ ,  $k'' = k - 1$  et sinon,  $k' = k - 1$ ,  $k'' = k$ . Ces deux suites de fractions convergent quand  $k$  tend vers  $+\infty$ , vers un même nombre  $x \in [0, 1]$  dont le développement en fractions continues est  $[n_1 n_2 \cdots]$ . Par conséquent,  $\gamma_{C_k}(0)$  et  $\gamma_{C_k}(\infty)$  convergent vers  $\gamma_{C_0}(x)$ . La suite des points de changement  $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\alpha$  converge donc vers  $\gamma_{C_0}(x)$  ce qui entraîne que  $\xi = \gamma_{C_0}(x)$ . Si maintenant on suppose  $k \geq 1$  et  $\varepsilon = 1$ , on a alors

$$\tau_1^{n_1} \cdots \tau_{(-1)^{k+1}}^{n_{k+1}}(0) = n_1 + [n_2 \cdots n_{k'}] \quad \text{et} \quad \tau_1^{n_1} \cdots \tau_{(-1)^{k+1}}^{n_{k+1}}(\infty) = n_1 + [n_2 \cdots n_{k''}]$$

et le raisonnement précédent s'applique en remplaçant  $x$  par  $x^{-1}$ . Le cas où  $k \leq 0$  se traite de façon analogue.

On est à présent en mesure de coder les *géodésiques* de  $\mathbb{H}^2$  marquées en des points de changement. Etant donné une *géodésique*  $\alpha$  de  $\mathbb{H}^2$  et  $C_0$  un point de changement sur  $\alpha$ , on associe à  $(\alpha, C_0)$  le quadruplet  $([n_0 n_{-1} \cdots], [n_1 n_2 \cdots], \varepsilon, \gamma_{C_0})$ . On note  $\Theta$  la transformation de décalage sur les quadruplets définie par

$$\Theta([n_0 n_{-1} \cdots], [n_1 n_2 \cdots], \varepsilon, \gamma) = ([n_1 n_0 n_{-1} \cdots], [n_2 n_3 \cdots], -\varepsilon, \gamma \tau_\varepsilon^{n_1}).$$

Remarquons que la projection de  $\Theta$  sur la seconde coordonnée correspond à l'application de Gauss  $T$  (déjà introduite par A. Broise § 3) qui à  $x \in ]0, 1]$  associe la partie fractionnaire de  $\frac{1}{x}$ . Les propriétés suivantes découlent directement du codage.

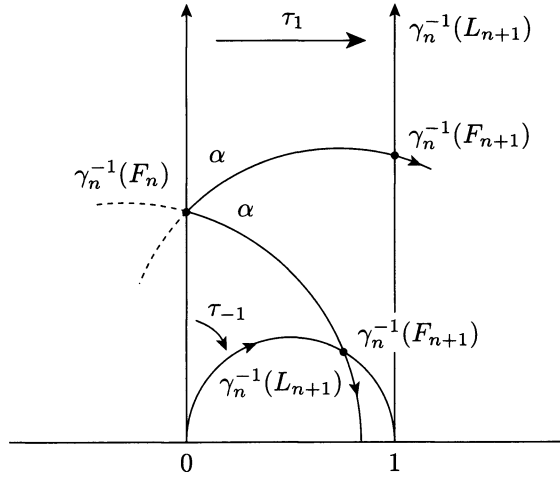


FIG. 1.5.

**Propriétés 1.1.6.** —

1. Soit  $C_1$  le point de changement de  $\alpha$  qui suit  $C_0$ , le couple  $(\alpha, C_1)$  est codé par  $\Theta([n_0 n_{-1} \cdots], [n_1 n_2 \cdots], \varepsilon, \gamma_{C_0})$ .
2. Soit  $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , le couple  $(g(\alpha), g(C_0))$  est codé par  $([n_0 n_{-1} \cdots], [n_1 n_2 \cdots], \varepsilon, g\gamma_{C_0})$ .

En résumé, une géodésique  $\alpha$  de  $\mathbb{H}^2$  d'extrémités  $\xi_-$  et  $\xi$  marquée en un point de changement  $C$  est codée par l'unique quadruplet  $(x_-, x, \varepsilon, \gamma) \in ]0, 1]^2 \times \{\pm 1\} \times \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  défini par :

1.  $C \in \gamma(L)$  et  $(\alpha, \gamma(L)) \in ]0, \pi[$ ;
2.  $\xi = \gamma(x^{-\varepsilon})$ ;
3.  $\xi_- = \gamma s(x_-^{-\varepsilon})$ .

**1.2 Propriétés des éléments hyperboliques de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$** 

Soient  $\gamma$  une transformation hyperbolique de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  et  $\text{Fix}(\gamma)$  la géodésique fixée par  $\gamma$  orientée du point répulsif vers le point attractif de  $\gamma$ . Choisissons sur  $\text{Fix}(\gamma)$  un point de changement  $C_0$  et notons  $(x_-, x, \varepsilon, \gamma_0)$ , le quadruplet associé au couple  $(\text{Fix}(\gamma), C_0)$ . Comme  $(\text{Fix}(\gamma), \gamma(C_0)) = (\gamma \text{Fix}(\gamma), \gamma(C_0))$ , le couple  $(\text{Fix}(\gamma), \gamma(C_0))$  est représenté d'après la propriété 1.1.6 par  $(x_-, x, \varepsilon, \gamma_0)$ . Par ailleurs,  $\gamma(C_0)$  est un point de changement  $C_k$  avec  $k \geq 1$ ; donc, toujours d'après la même propriété, on a  $(x_-, x, \varepsilon, \gamma_0) = \Theta^k(x_-, x, \varepsilon, \gamma_0)$ . En développant  $x_-$  et  $x$  en fractions continues et en revenant à la définition de  $\Theta$ , on établit la :



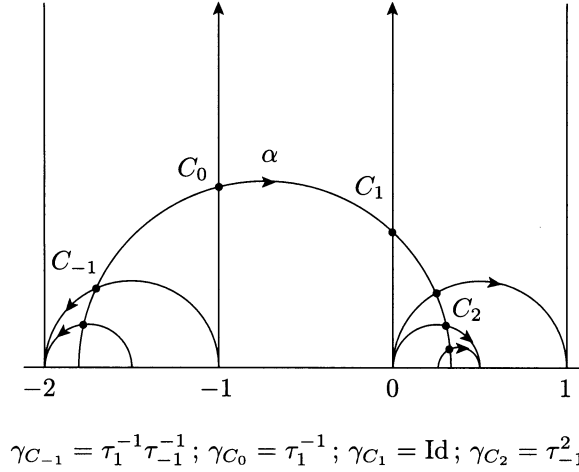


FIG. 1.6.

**Proposition 1.2.1.** — Soit  $\gamma$  un élément hyperbolique de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ . Il existe  $\gamma_0 \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z}), \varepsilon \in \{\pm 1\}$ , une suite d'entiers  $(n_i)_i$  strictement positifs et un entier pair  $k \geq 1$  tels que :  $\gamma = \gamma_0 \tau_\varepsilon^{n_1} \cdots \tau_{-\varepsilon}^{n_k} \gamma_0^{-1}$ . De plus, les extrémités de  $\text{Fix}(\gamma)$  sont  $\xi_- = \gamma_0 s([\overline{n_k n_{k-1} \cdots n_1}]^{-\varepsilon})$  et  $\xi = \gamma_0 ([\overline{n_1 n_2 \cdots n_k}]^{-\varepsilon})$  où  $[\overline{n_1 \cdots n_k}]$  désigne la fraction continue  $T$ -périodique de période  $[n_1 n_2 \cdots n_k]$ .

Notons qu'alors  $(\text{Fix}(\gamma), C_0)$  est codé par le quadruplet  $([\overline{n_k n_{k-1} \cdots n_1}], [\overline{n_1 n_2 \cdots n_k}], \varepsilon, \gamma_0)$ . Déterminons le module de la valeur propre  $|\lambda_\gamma| > 1$  de  $\gamma$ . D'après la proposition précédente, on peut se restreindre au cas où  $\gamma = \tau_\varepsilon^{n_1} \cdots \tau_{-\varepsilon}^{n_k}$ . Le lemme suivant se trouve dans [2] et [30], nous reprenons ici la démonstration de M. Bauer.

**Lemme 1.2.2 (Lemme clef).** — La valeur propre supérieure à 1 de  $\tau_\varepsilon^{n_1} \cdots \tau_{-\varepsilon}^{n_k}$  est égale à  $\prod_{p=0}^{k-1} (T^p([\overline{n_1 \cdots n_k}]))^{-1}$ .

*Démonstration.* — Soient  $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $M_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  les matrices de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , associées à  $\tau_1$  et  $\tau_{-1}$ . D'après la proposition 1.2.1 on a :

$$M_\varepsilon^{n_1} \cdots M_{-\varepsilon}^{n_k} \begin{pmatrix} [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-\varepsilon} \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-\varepsilon} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Les matrices  $M_1^n$  et  $M_{-1}^n$  s'écrivent également  $M_1^n = S D_n$  et  $M_{-1}^n = D_n S$  avec  $D_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}$  et  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Puisque  $S^2 = \text{Id}$ , la relation (\*) devient

$$D_{n_1} \cdots D_{n_k} \begin{pmatrix} 1 \\ [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-1} \end{pmatrix}.$$

L'égalité  $D_{n_k} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ n_k + \frac{1}{x} \end{pmatrix}$  nous donne

$$D_{n_1} \cdots D_{n_k} \begin{pmatrix} 1 \\ [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-1} \end{pmatrix} = [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-1} D_{n_1} \cdots D_{n_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ [\overline{n_k n_1 \cdots n_{k-1}}]^{-1} \end{pmatrix}$$

ce qui entraîne

$$D_{n_1} \cdots D_{n_k} \begin{pmatrix} 1 \\ [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-1} \end{pmatrix} = [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-1} [\overline{n_2 \cdots n_k n_1}]^{-1} [\overline{n_k n_1 \cdots n_{k-1}}]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ [\overline{n_1 \cdots n_k}]^{-1} \end{pmatrix}$$

### 1.3 Passage au quotient

Une géodésique  $\bar{\alpha}$  de  $M$  est marquée en un point de changement  $\bar{C}$  si elle se relève sur  $\mathbb{H}^2$  en une géodésique  $\alpha$  marquée en un point de changement  $C$ .

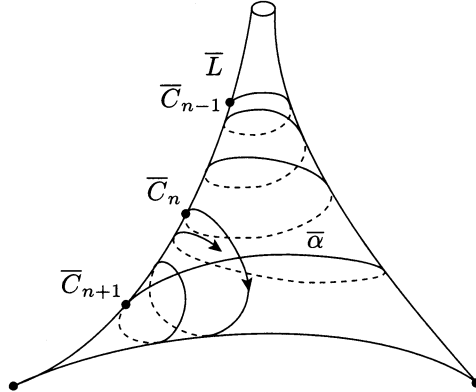


FIG. 1.7.

D'un point de vue géométrique, si  $\bar{C}_{n-1}$ ,  $\bar{C}_n$ ,  $\bar{C}_{n+1}$  sont trois points de changement consécutifs sur  $\bar{\alpha}$ , l'un des deux arcs géodésiques  $\bar{C}_{n-1}\bar{C}_n$ ,  $\bar{C}_n\bar{C}_{n+1}$  tourne autour de la pointe et l'autre non (Fig. 1.7).

Les différents relevés sur  $\mathbb{H}^2$  de  $(\bar{\alpha}, \bar{C})$  correspondent aux images par  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  de  $(\alpha, C)$ . Si  $(\alpha, C)$  est codé par  $(x_-, x, \varepsilon, \gamma)$  (cf. § 1.1), l'ensemble de tous ses relevés est représenté par  $\{(x_-, x, \varepsilon, g\gamma), g \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})\}$  (cf. propriété 1.1.6). Pour coder  $(\bar{\alpha}, \bar{C})$  choisissons le représentant  $(x_-, x, \varepsilon, \text{Id})$ , noté plus simplement  $(x_-, x, \varepsilon)$ . Géométriquement,  $(x_-, x, \varepsilon)$  représente l'unique géodésique marquée de  $\mathbb{H}^2$  se projetant sur  $(\bar{\alpha}, \bar{C})$  dont les extrémités  $\xi_-$ ,  $\xi$  vérifient :  $\xi_- < 0$ ,  $\xi > 0$ ,  $(1 + \xi_-)(1 - \xi) < 0$ , et qui est marquée en son point d'intersection avec l'axe imaginaire  $L$ .

Si maintenant  $\bar{\alpha}$  est une géodésique primitive fermée de  $M$ , elle se relève sur  $\mathbb{H}^2$  en un axe  $\text{Fix}(\gamma)$  d'un élément hyperbolique  $\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  primitif (i.e.  $\gamma \neq \gamma^n$  avec

$g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  et  $n > 1$ ). Soit  $P \in \mathrm{Fix}(\gamma)$ , la longueur de  $\bar{\alpha}$  est égale à la distance de Poincaré de  $P$  à  $\gamma(P)$ , c'est-à-dire à  $2 \log |\lambda_\gamma|$  où  $\lambda_\gamma$  est la valeur propre de module  $> 1$  de  $\gamma$ . Soit  $(x, x_-, \varepsilon)$  le triplet codant  $(\bar{\alpha}, \bar{C})$ . D'après la proposition 1.2.1, il existe un entier pair  $k \geq 1$  et  $k$  entiers strictement positifs  $(n_i)_{i=1}^k$  tels que  $x = [\overline{n_1 \cdots n_k}]$  et  $x_- = [\overline{n_k \cdots n_1}]$ . Pour coder  $(\bar{\alpha}, \bar{C})$  on peut ne retenir que  $(x, \varepsilon)$  puisque  $x_-$  se déduit directement de  $x$ . Le couple  $\Theta([\overline{n_1 \cdots n_k}], \varepsilon) = ([\overline{n_2 \cdots n_k n_1}], -\varepsilon)$  code la géodésique marquée au point de changement qui suit  $\bar{C}$ . La géodésique  $\bar{\alpha}$  contient donc  $k$  points de changement différents et d'après le Lemme-Clef 1.2.2 on a la

**Propriété 1.3.1.** — Soit  $(\bar{\alpha}, \bar{C})$  une géodésique fermée et marquée de  $M$  codée par le couple  $([\overline{n_1 \cdots n_k}], \varepsilon)$ . La longueur de  $\bar{\alpha}$  est égale à  $-2 \log \prod_{p=0}^{k-1} T^p[\overline{n_1 \cdots n_k}]$ .

En résumé, une géodésique fermée de  $M$  est codée par un couple  $(x, \varepsilon) \in ]0, 1] \times \{\pm 1\}$  vérifiant  $T^k x = x$  pour un certain entier pair  $k \geq 1$ . Soit  $f(x) = -2 \log x$ ; la longueur de  $\bar{\alpha}$  est égale à  $S_k f(x) = f(x) + f(Tx) + \cdots + f(T^{k-1}x)$  (où  $k$  est la plus petite période de  $x$ ). Ce codage permet d'exprimer le nombre  $\pi_0(a)$  de géodésiques fermées primitives de longueur au plus  $a$  sur  $M$  munie de la métrique de Poincaré sous la forme :

$$\pi_0(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \#\{x \in ]0, 1] \mid T^{2n}x = x,$$

$$S_{2n}f(x) \leq a \text{ et } 2n \text{ est la plus petite période paire de } x\}.$$

**Remarque.** — Si on remplace  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  par un sous-groupe  $\Gamma$  d'indice fini, les couples  $(\bar{\alpha}, \bar{C})$  de la surface  $S = \mathbb{H}^2/\Gamma$  sont alors codés par  $(x_-, x, \varepsilon, \bar{\gamma}_i) \in ]0, 1]^2 \times \{\pm 1\} \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma$ . Notons  $F = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma$ ; le nombre  $\pi_\Gamma(a)$  de géodésiques fermées de  $S$  de longueur au plus  $a$  s'écrit alors :

$$\pi_\Gamma(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \#\{(x, \varepsilon, \bar{\gamma}) \in ]0, 1] \times \{\pm 1\} \times F \mid \hat{T}^{2n}(x, \varepsilon, \bar{\gamma}) = (x, \varepsilon, \bar{\gamma}),$$

$$S_{2n}f(x) \leq a \text{ et } 2n \text{ est la plus petite période paire de } x\}.$$

où  $\hat{T}(x, \varepsilon, \bar{\gamma}) = (Tx, -\varepsilon, \bar{\gamma}\tau_\varepsilon^{[1/x]})$ .

## 2 FLOT GÉODÉSIQUE ET CODAGE EN COURBURE CONSTANTE

Notons  $(a_t)_{t \in \mathbb{R}}$  le flot géodésique défini sur le fibré unitaire tangent de la surface  $M$  privée de ses points singuliers.

### 2.1 Représentation du flot géodésique par un flot spécial

Soit  $\bar{G}$  l'ensemble des *géodésiques* de  $M$  marquées en un point de changement. Cet ensemble est une section du flot géodésique puisque l'orbite par ce flot d'une *géodésique*  $\bar{\alpha}$  marquée en un point quelconque rencontre  $\bar{G}$ . À tout couple  $(\bar{\alpha}, \bar{C}) \in \bar{G}$ , on associe le réel strictement positif  $t(\bar{\alpha}, \bar{C})$  correspondant au temps de premier retour de  $a_t(\bar{\alpha}, \bar{C})$  sur  $\bar{G}$ . Notons  $\bar{T}$  l'application de Poincaré sur  $\bar{G}$  définie par  $\bar{T}(\bar{\alpha}, \bar{C}) = a_{t(\bar{\alpha}, \bar{C})}(\bar{\alpha}, \bar{C})$ ; le réel  $t(\bar{\alpha}, \bar{C})$  représente la distance de  $\bar{C}$  au point de marquage de  $\bar{T}(\bar{\alpha}, \bar{C})$ .

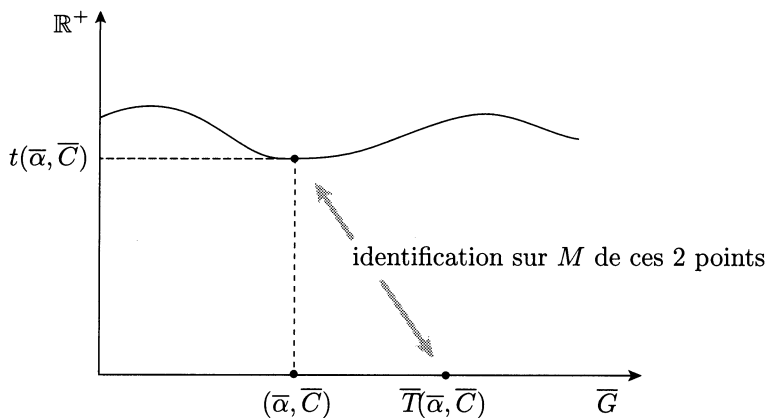


FIG. 2.1.

## 2.2 Lien entre mesure de Gauss et mesure de Liouville

La relation que nous établissons entre ces deux mesures est connue ([30]). Relevons la situation sur  $\mathbb{H}^2$  et notons  $G$  l'ensemble des *géodésiques* de  $\mathbb{H}^2$  d'extrémités  $\xi_-$  et  $\xi$  vérifiant :  $\xi_- < 0, \xi > 0, (1 + \xi_-)(1 - \xi) < 0$ . D'après les § 1.1 et 1.2, une *géodésique* marquée  $(\bar{\alpha}, \bar{C})$  de  $\bar{G}$  codée par  $(x_-, x, \varepsilon)$  se relève en une unique géodésique de  $G$  d'extrémités  $\xi_- = \left(-\frac{1}{x_-}\right)^{-\varepsilon}$ ,  $\xi = x^{-\varepsilon}$ , marquée en son point d'intersection avec l'axe imaginaire. Notons  $T_1$  l'application sur  $G$  qui relève  $\bar{T}$ . L'image par  $T_1$  d'une géodésique  $\alpha$  de  $G$  d'extrémités  $\xi_-, \xi$  est la géodésique  $\gamma(\alpha)$  où  $\gamma = \tau_1^{-[\xi]}$  si  $\xi > 1$  et  $\gamma = \tau_{-1}^{-[\xi^{-1}]}$  si  $\xi < 1$ . Il existe donc une partition dénombrable  $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $G$  telle que sur chaque  $G_i$  l'application  $T_1$  corresponde à l'action d'un élément  $\tau_{\varepsilon_i}^{-n_i}$ . Soit  $\mu$  la restriction à  $G$  de la mesure de Liouville  $\frac{d\xi_- d\xi}{|\xi_- - \xi|^2}$  sur le fibré unitaire tangent de  $\mathbb{H}^2$ , où  $|\xi_- - \xi|$  désigne ici la longueur euclidienne de la corde reliant  $\xi_-$  à  $\xi$ . L'invariance de  $\mu$  sous l'action de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  entraîne son invariance sous l'action de  $T_1$ .

Si maintenant on code les éléments de  $G$  par les triplets  $(x, x_-, \varepsilon)$  de  $[0, 1]^2 \times \{-1, 1\}$ , l'application  $T_1$  se traduit par le décalage  $\Theta$ , et  $\mu$  devient la mesure  $\Theta$ -invariante (encore notée  $\mu$ ) définie par  $\mu(dx_- dx d\varepsilon) = \frac{dx_- dx}{(1 + x x_-)} (\delta_{+1} + \delta_{-1})(d\varepsilon)$ . Considérons la projection  $p$  de  $[0, 1]^2 \times \{\pm 1\}$  sur la seconde coordonnée et l'application de Gauss  $T$  sur  $]0, 1[$ . Puisque  $p \circ \Theta = T \circ p$ , la mesure image  $p(\mu)$  est  $T$ -invariante. Pour tout borélien  $A$  de  $[0, 1]$ , on a  $p(\mu)(A) = \mu([0, 1] \times A \times \{\pm 1\})$  ce qui s'écrit encore

$$p(\mu)(A) = 2 \int_A dx \int_0^1 \frac{dx_-}{(1 + x x_-)^2} = 2 \int_A \frac{dx}{1 + x}.$$

Après normalisation de  $p(\mu)$ , on retrouve la mesure de Gauss (introduite également par A. Broise § 4.4) sur  $[0, 1]$  définie par  $h(x) dx$  où  $h(x) = \frac{1}{(1+x) \log 2}$ .

### 3 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU NOMBRE DE GÉODÉSQUES FERMÉES DE $M$ EN COURBURE CONSTANTE

On rappelle que le codage des géodésiques fermées de  $M$  (§ 1.3) conduit à l'expression suivante de  $\pi_0(a)$  :

$$\pi_0(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \# \{x \in ]0, 1[ \mid T^{2n}x = x,$$

$S_{2n}f(x) \leq a \text{ et } 2n \text{ est la plus petite période paire de } x\}.$

Dans ce paragraphe, nous démontrons le

**Théorème 3.0.1 (Théorème A en courbure constante).** — *Le nombre  $\pi_0(a)$  de géodésiques primitives fermées de  $M$  (ou d'un revêtement fini de  $M$ ) de longueur au plus  $a$  est équivalent à  $\frac{e^a}{a}$  lorsque  $a \rightarrow +\infty$ .*

Pour  $a > 0$ , on pose  $N(a) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \# \{x \in ]0, 1[ \mid T^{2n}x = x \text{ et } S_{2n}f(x) \leq a\}$  ; on a  $N(a) - N(\frac{a}{2}) \leq \pi_0(a) \leq N(a)$ . Pour établir le théorème A, il suffit donc de montrer que  $N(a)$  est équivalent à  $\frac{e^a}{a}$  lorsque  $a \rightarrow +\infty$ . Pour ce faire, nous reprenons une idée de S. Lalley [19] et approchons  $N(a)$  par des quantités de la forme

$$N_{(x,a)}(\mathbf{1}_{[\alpha,\beta]}) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{\{y \mid T^{2n}(y)=x\}} \mathbf{1}_{[\alpha,\beta]}(y) \mathbf{1}_{[0,a]}(S_{2n}f(y))$$

où  $[\alpha, \beta]$  est un intervalle inclus dans  $]0, 1[$  et  $x$  un élément de  $]0, 1[$ . En exprimant  $N_{(x,a)}$  comme potentiel harmonique d'un opérateur positif  $\tilde{P}$  (§ 3.2), on obtient le

**Théorème 3.0.2 (Théorème B en courbure constante).** — *Soit  $[\alpha, \beta] \subset ]0, 1[$  ; lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ ,  $N_{(x,a)}(\mathbf{1}_{[\alpha,\beta]})$  est équivalent à  $\frac{\beta-\alpha}{(1+x)\log 2} \times \frac{e^a}{a}$  uniformément par rapport à  $x \in ]0, 1[$ .*

Ce théorème permet d'expliciter le comportement asymptotique de  $N(a)$  (§ 3.1) ; sa preuve se fait en appliquant le théorème du renouvellement harmonique au couple  $(P, f)$  (§ 3.2).

### 3.1 Le théorème A se déduit du théorème B

*Notation.* — Soit  $x = [n_1, n_2, \dots]$ ; pour tout entier  $p \geq 1$ , on note  $R_p(x)$  le rationnel  $[n_1, n_2, \dots, n_p]$ .

La première étape consiste à relier  $N(a)$  aux mesures  $N_{(x,a)}$ . Pour ce faire, nous fixons  $k \geq 1$  et nous numérotions les différents  $k$ -uplets d'entiers non nuls :

$$\mathbb{N}^{*k} = \left\{ \left( n_1^{(i)}, \dots, n_k^{(i)} \right), i \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Pour chaque  $i \geq 1$ , nous notons  $I_i$  l'intervalle formé des irrationnels  $x \in ]0, 1]$  tels que  $R_k(x) = [n_1^{(i)}, \dots, n_k^{(i)}]$  et nous fixons un élément  $x^{(i)} \in I_i$ ; remarquons que  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  forme une partition de l'ensemble des irrationnels de  $]0, 1]$ . Soit  $x \in I_i$ ; si  $x$  vérifie  $T^{2n}x = x$  pour un certain entier  $n \geq 1$ , on lui associe le réel  $x' \in I_i$  tel que  $R_{2n}(x') = R_{2n}(x)$  et  $T^{2n}x' = x^{(i)}$  :

$$x = [p_1 p_2 \cdots p_{2n} p_1 p_2 \cdots] \longleftrightarrow x' = [p_1 p_2 \cdots p_{2n} n_1^{(i)}, \dots, n_k^{(i)}, \dots] \quad (3.1)$$

$$\text{avec } p_1 = n_1^{(i)}, p_2 = n_2^{(i)}, \dots, p_k = n_k^{(i)}. \quad (3.2)$$

On construit ainsi une bijection entre l'ensemble des  $x \in I_i$  tels que  $T^{2n}x = x$  pour un certain entier  $n \geq 1$  et l'ensemble des  $x' \in I_i$  tels que  $T^{2n}x' = x^{(i)}$ ; soulignons que pour tout  $0 \leq \ell \leq 2n$ , on a  $R_{2n+k-\ell}(T^\ell x) = R_{2n+k-\ell}(T^\ell x')$ . Le lemme 3.1.1 permet un contrôle précis de  $|f(T^\ell x) - f(T^\ell x')|$ .

**Lemme 3.1.1.** — *Il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  et  $A > 0$  tels que pour tout  $p \geq N_0$  et tous irrationnels  $x, y \in ]0, 1]$  vérifiant  $R_p(x) = R_p(y)$ , on ait  $|\log x - \log y| \leq \frac{A}{2^p}$ .*

Grâce à ce lemme, on a

$$|S_{2n}f(x) - S_{2n}f(x')| \leq A \sum_{p=k}^{+\infty} \frac{1}{2^p} = \varepsilon_k$$

d'où les inégalités

$$\sum_{i=1}^{+\infty} N_{(x^{(i)}, a - \varepsilon_k)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq N(a) \quad (*) \quad \text{et} \quad N(a) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} N_{(x^{(i)}, a + \varepsilon_k)}(\mathbf{1}_{I_i}) \quad (**).$$

Notons que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0$ . Le comportement asymptotique de  $N(a)$  est donc étroitement lié à celui de  $N_{(x,a)}$ . Le théorème B est démontré dans le paragraphe 3.2; admettons le momentanément et expliquons comment le théorème A s'en déduit.

*Démonstration du théorème A.* — Le lemme de Fatou appliqué à l'inégalité (\*) nous donne

$$e^{-\varepsilon_k} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{m(I_i)}{(1 + x^{(i)}) \log 2} \leq \liminf_{a \rightarrow +\infty} \frac{a}{e^a} N(a)$$

où  $m(I_i)$  désigne la mesure de Lebesgue de l'intervalle  $I_i$ . Le passage à la limite lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$  dans l'inégalité (\*\*) est plus délicat et nécessite un argument

de domination afin de pouvoir utiliser le théorème de Lebesgue. Signalons que cette difficulté n'existe pas dans [19], puisque dans ce cas la famille des indices  $i$  est finie. Le lemme suivant résout cette difficulté.

**Lemme 3.1.2.** — *Il existe une suite  $(C_j)_{j \geq 1}$  de  $\mathbb{R}^+$ , vérifiant  $\sum_{j=1}^{+\infty} C_j < +\infty$  telle que pour tout  $a > 0$  et tout  $i \geq 1$ , on ait  $N_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq C_i \frac{e^a}{a}$ .*

Grâce à ce lemme et au théorème B, nous avons  $\limsup_{a \rightarrow +\infty} \frac{a}{e^a} N(a) \leq e^{\varepsilon k} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{m(I_i)}{(1+x^{(i)}) \log 2}$ . Il suffit pour achever la preuve du théorème A de faire tendre  $k$  vers  $+\infty$  et de remarquer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{m(I_i)}{(1+x^{(i)}) \log 2} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^{(i)}) \log 2} = 1.$$

Démontrons maintenant les lemmes 3.1.1 et 3.1.2.

*Démonstration du lemme 3.1.1.* — Pour tout irrationnel  $x \in ]0, 1[$ , on a  $|x - R_p(x)| \leq \frac{1}{2^{p-1}}$  ([K]). En notant  $n_1 = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ , on obtient pour  $p \geq 3$ ,

$$|x - R_p(x)| = \left| \frac{1}{n_1 + Tx} - \frac{1}{n_1 + R_{p-1}(Tx)} \right| \leq \frac{|Tx - R_{p-1}(Tx)|}{n_1^2} \leq \frac{x}{2^{p-3}}$$

d'où la double inégalité  $1 - \frac{1}{2^{p-3}} \leq \frac{R_p(x)}{x} \leq 1 + \frac{1}{2^{p-3}}$ . Puisque  $R_p(x) = R_p(y)$ , on a alors

$$\frac{1 - \frac{1}{2^{p-3}}}{1 + \frac{1}{2^{p-3}}} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{1 + \frac{1}{2^{p-3}}}{1 - \frac{1}{2^{p-3}}}$$

Il existe donc deux constantes  $A$  et  $N_0$  indépendantes de  $x$  et  $y$  telles que pour  $p \geq N_0$ , on ait  $|\log x - \log y| \leq \frac{A}{2^p}$ .

*Démonstration du lemme 3.1.2.* — On a

$$N_{(x^{(i)}, a)} \mathbf{1}_{I_i} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{\{y \mid T^{2n}(y) = x^{(i)}\}} \mathbf{1}_{I_i}(y) \mathbf{1}_{[0, a]}(S_{2n}f(y)).$$

Sans perdre en généralité, on peut supposer que  $k = 2\ell$ . Notons que si  $R^n(x) = [p_1 \cdots p_n]$  alors  $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = p_1$ ,  $\lfloor \frac{1}{Tx} \rfloor = p_2, \dots, \lfloor \frac{1}{T^{n-1}x} \rfloor = p_n$ , d'où  $S_n f(x) \geq \log p_1 \cdots p_n$ . Décomposons alors  $N_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i})$  en  $N'_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) + N''_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i})$  avec

$$N'_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) = \sum_{n=1}^{\ell} \frac{1}{n} \sum_{\{y \mid T^{2n}(y) = x^{(i)}\}} \mathbf{1}_{I_i}(y) \mathbf{1}_{[0, a]}(S_{2n}f(y))$$

et

$$N''_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) = \sum_{n=\ell+1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{\{y \mid T^{2n}(y) = x^{(i)}\}} \mathbf{1}_{I_i}(y) \mathbf{1}_{[0, a]}(S_{2n}f(y)).$$



Pour tout  $1 \leq n \leq \ell$ , si  $y \in I_i$  et  $T^{2n}y = x^{(i)}$  alors  $R_{2n}(y) = R_{2n}(x^{(i)})$  et donc  $S_n f(y) \geq 2 \log n_1^{(i)} \cdots n_n^{(i)}$ . Par conséquent

$$N'_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq \sum_{n=1}^{\ell} \frac{1}{n} \mathbf{1}_{[0, a]}(2 \log n_1^{(i)} \cdots n_n^{(i)}).$$

La fonction  $x \mapsto \frac{e^x}{1+x}$  étant croissante sur  $\mathbb{R}^+$ , on a pour tout réel  $a$  positif

$$\mathbf{1}_{[0, a]} \leq \mathbf{1}_{[0, \frac{e^a}{1+a}]} \left( \frac{e^x}{1+x} \right) \leq \frac{e^a}{a} \frac{1+x}{e^x}$$

d'où  $N'_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq C'_i \frac{e^a}{a}$  avec  $C'_i = \sum_{n=1}^{\ell} \frac{1}{n} \frac{1+2 \log n_1^{(i)} \cdots n_n^{(i)}}{(n_1 \cdots n_n)^2}$ . Notons que la série  $\sum_{i=1}^{+\infty} C'_i$  est convergente.

Majorons maintenant le terme  $N''_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i})$ . On a

$$N''_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) = \sum_{n=\ell+1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{\{z \mid T^{2n-\ell}(z) = x^{(i)}\}} \sum_{\{y \mid T^\ell(y) = z\}} \mathbf{1}_{I_i}(y) \mathbf{1}_{[0, a]}(S_{2n-\ell} f(z) + S_\ell f(y)).$$

La condition  $y \in I_i$  entraîne  $R_\ell(y) = [n_1^{(i)} \cdots n_\ell^{(i)}]$  d'où  $S_\ell f(y) \geq A_i$  avec  $A_i = 2 \log n_1^{(i)} \cdots n_\ell^{(i)}$ . On obtient alors  $N''_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq N_{(x^{(i)}, a-A_i)}(\mathbf{1}_{[0, 1]})$ .

D'après le théorème B, il existe  $A > 0$  tel que  $N_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq A \frac{e^{a-A_i}}{1+a-A_i}$  pour tous  $i \in \mathbb{N}^*$  et  $a > A_i$ . Pour  $A_i \leq 1$ , on obtient  $N_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq A \frac{e^a}{a} \leq A \frac{e^a}{a} A_i e^{-A_i}$ . Il suffit pour conclure de remarquer que la série  $\sum_i A_i e^{-A_i}$  est convergente.

### 3.2 Démonstration du théorème B

Introduisons l'opérateur de transfert associé à la transformation  $T$ , c'est-à-dire l'opérateur  $P$  adjoint de  $T$  par rapport à la mesure de Gauss  $\nu(dx) = h(x) dx$  avec  $h(x) = \frac{1}{(1+x) \log 2}$ . Pour toute fonction borélienne bornée  $\varphi$  sur  $]0, 1]$ , on a

$$\forall x \in ]0, 1], \quad P\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+x}{(n+x)(n+1+x)} \varphi\left(\frac{1}{n+x}\right) = \frac{1}{h(x)} \sum_{\{y \mid T(y)=x\}} h(y) e^{-f(y)} \varphi(y)$$

avec  $f(y) = -2 \log y$ . Les itérés de  $P$  sont donnés par la formule

$$\forall n \geq 1, \quad P^n \varphi(x) = \frac{1}{h(x)} \sum_{\{y \mid T^n(y)=x\}} h(y) e^{-S_n f(y)} \varphi(y) \text{ avec } S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k.$$

**Remarques.** —

1. La mesure de Gauss  $\nu$  étant une probabilité  $T$ -invariante, l'opérateur  $P$  est markovien, i.e.  $P1 = 1$ .
2. La transformation  $T$  est définie sur  $]0, 1]$  mais prend ses valeurs dans l'intervalle compact  $[0, 1]$ ; ainsi, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $T(\frac{1}{n}) = 0$ . L'opérateur  $P$  joue le rôle d'inverse de  $T$ , ce qui explique que les formules ci-dessus restent valables pour toute fonction borélienne bornée  $\varphi$  définie sur le compact  $[0, 1]$ ; dans le paragraphe 5.2, nous montrerons même que  $P$  opère sur l'espace des fonctions lipschitziennes sur  $[0, 1]$ .

Dans le paragraphe 2.2, nous avons vu que l'intervalle  $[0, 1]$  peut être lu comme une section du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent de  $M$ , la transformation  $T$  correspondant alors à l'application de premier retour sur cette section; le flot géodésique sur  $M$  induit une autre transformation  $\tilde{T}$  définie sur le produit croisé  $]0, 1] \times \mathbb{R}$  par  $\tilde{T}(x, s) = (Tx, s + f(x))$ .

D'un point de vue géométrique, il serait plus satisfaisant de remplacer  $f$  par la fonction hauteur  $t$  (§ 2.1) correspondant à la distance parcourue entre deux points de changement consécutifs sur une géodésique. Néanmoins, lorsque  $x$  vérifie  $T^n x = x$ , on a  $S_n t(x) = S_n f(x)$ ; dans un certain sens, on peut donc dire que la transformation « mémorise » la distance parcourue entre deux passages consécutifs sur la section.

La mesure  $\nu \otimes m$  sur le produit  $]0, 1] \times \mathbb{R}$  est  $\tilde{T}$ -invariante. Comme précédemment, introduisons l'adjoint  $\tilde{P}$  de la transformation  $\tilde{T}$  par rapport à la mesure  $\nu \otimes m$ ; pour toute fonction borélienne bornée  $\psi$  sur  $]0, 1] \times \mathbb{R}$  on a

$$\begin{aligned} \tilde{P}\psi(x, s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+x}{(n+x)(n+1+x)} \psi\left(\frac{1}{n+x}, s - f\left(\frac{1}{n+x}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{h(x)} \sum_{\{y \mid T(y)=x\}} h(y) e^{-f(y)} \psi(y, s - f(y)) \end{aligned}$$

Les itérés de  $\tilde{P}$  sont donnés par  $\tilde{P}^n \psi(x, s) = \frac{1}{h(x)} \sum_{\{y \mid T^n(y)=x\}} h(y) e^{-S_n f(y)} \psi(y, s - S_n f(y))$ .

Notons  $\chi_a(s) = e^{-s} \mathbf{1}_{[-a, 0]}(s)$ . Pour tout  $(x, a) \in ]0, 1] \times \mathbb{R}^+$  et toute fonction borélienne bornée  $\varphi$  sur  $[0, 1]$  on a alors  $N_{(x,a)}(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tilde{P}^{2n} \left(\frac{\varphi}{h} \otimes \chi_a\right)(x, 0)$ .

**Remarque.** — Lorsque l'on remplace  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  par un sous-groupe  $\Gamma$  d'indice fini, le nombre  $\pi_\Gamma(a)$  de géodésiques fermées de longueur au plus  $a$  de la surface  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  s'écrit (voir remarque du § 1.3) :

$$\pi_\Gamma(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} \#\{(x, \varepsilon, \bar{\gamma}) \in ]0, 1] \times \{\pm 1\} \times F \mid \hat{T}^{2n}(x, \varepsilon, \bar{\gamma}) = (x, \varepsilon, \bar{\gamma}),$$

$$S_{2n} f(x) \leq a \text{ et } 2n \text{ est la plus petite période paire de } x\}.$$

avec  $F = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma$  et  $\hat{T}(x, \varepsilon, \bar{\gamma}) = (Tx, -\varepsilon, \bar{\gamma}\tau_\varepsilon^{[1/x]})$ .

Notons  $m'$  la mesure uniforme sur  $\{\pm 1\} \times F$ ; la mesure  $\nu \otimes m'$  est  $\hat{T}$ -invariante. L'opérateur  $\hat{P}$ , adjoint de  $\hat{T}$  par rapport à la mesure  $\nu \otimes m'$  s'écrit alors

$$\hat{P}\varphi(x, \varepsilon, \bar{\gamma}) = \sum_{\{y \mid T(y)=x\}} \frac{h(y)}{h(x)} e^{-f(y)} \varphi(y, -\varepsilon, \bar{\gamma} \tau_{-\varepsilon}^{-[\frac{1}{v}]})$$

pour toute fonction borélienne bornée  $\varphi$  sur  $[0, 1] \times \{\pm 1\} \times F$ . L'étude du comportement asymptotique de  $\pi_\Gamma(a)$  est modélée sur celle de  $\pi_0(a)$ , en changeant  $P$  en  $\hat{P}$  et en reprenant les arguments développés dans ([14]).

*Démonstration du théorème B.* — Notons  $g$  la fonction indicatrice de l'intervalle  $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ . Fixons  $\varepsilon > 0$  et posons  $K = \lceil \frac{\alpha}{\varepsilon} \rceil$ . On a

$$\sum_{\ell=0}^{K-1} e^{\ell\varepsilon} \mathbf{1}_{[-(\ell+1)\varepsilon, -\ell\varepsilon]} \leq \chi_a \leq \sum_{\ell=0}^K e^{(\ell+1)\varepsilon} \mathbf{1}_{[-(\ell+1)\varepsilon, -\ell\varepsilon]}$$

d'où les deux inégalités

$$h(x) \sum_{\ell=0}^{K-1} e^{\ell\varepsilon} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \tilde{P}^{2n} \left( \frac{g}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-(\ell+1)\varepsilon, -\ell\varepsilon]} \right) (x, 0) \leq N_{(x,a)}(g)$$

et

$$N_{(x,a)}(g) \leq h(x) \sum_{\ell=0}^K e^{(\ell+1)\varepsilon} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \tilde{P}^{2n} \left( \frac{g}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-(\ell+1)\varepsilon, -\ell\varepsilon]} \right) (x, 0).$$

Notons que, d'après la définition de  $\tilde{P}$ , pour tout  $\ell \geq 1$  on a

$$\tilde{P}^{2n} \left( \frac{g}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-(\ell+1)\varepsilon, -\ell\varepsilon]} \right) (x, 0) = \tilde{P}^{2n} \left( \frac{g}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-\varepsilon, 0]} \right) (x, \ell\varepsilon).$$

Ainsi, nous sommes amenés à étudier le comportement lorsque  $\ell$  tend vers  $+\infty$  du potentiel  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \tilde{P}^{2n}((x, \ell\varepsilon), dy dt)$ . Cette étude fait l'objet du paragraphe 5; nous montrons en particulier dans ce paragraphe que le couple  $(P, f)$  vérifie les hypothèses  $H_0, H_1, H_2, H_3$ , et  $H_4$  du théorème de renouvellement harmonique 5.0.2. En appliquant ce théorème au couple  $(P^2, f + f \circ T)$  on obtient

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,1]} \left| \ell \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tilde{P}^{2n} \left( \frac{g}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-\varepsilon, 0]} \right) (x, \ell\varepsilon) - \nu \left( \frac{g}{h} \right) \right| = 0. \quad (*)$$

Par ailleurs, nous avons le

**Lemme 3.2.1.** — Soient  $(u_\ell(x))_{\ell \geq 0}$  une suite de fonctions strictement positives sur  $[0, 1]$  et  $(v_\ell)_{\ell \geq 0}$  une série à termes positifs divergente. Sous l'hypothèse  $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{u_\ell(x)}{v_\ell} - 1 \right| = 0$ , on a

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{\sum_{\ell=0}^n u_\ell(x)}{\sum_{\ell=0}^n v_\ell} \right| = 0.$$

En combinant ce lemme avec l'égalité (\*), on obtient

$$\sum_{\ell=1}^K e^{\ell\varepsilon} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tilde{P}^{2n} \left( \frac{\varphi}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-(\ell+1)\varepsilon, -\ell\varepsilon]} \right) (x, 0) \underset{K \rightarrow +\infty}{\sim} \left( \sum_1^K \frac{e^{\ell\varepsilon}}{\ell} \right) \int_0^1 \varphi(t) dt$$

uniformément par rapport à  $x \in [0, 1]$ .

Remarquons l'équivalence  $\sum_{\ell=1}^K \frac{e^{\ell\varepsilon}}{\ell} \underset{K \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{K\varepsilon}}{K\varepsilon}$ ; le choix de  $\varepsilon$  étant arbitraire, on obtient finalement  $N_{(x,a)}(\varphi) \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} h(x) \frac{e^a}{a} \int_0^1 \varphi(t) dt$  uniformément par rapport à  $x \in [0, 1]$ , ce qui achève la démonstration du théorème B.



## 4 DISTRIBUTION ASYMPTOTIQUE DES CONSTANTES DE LÉVY DES NOMBRES QUADRATIQUES

Nous expliquons ici comment retrouver par la méthode développée dans le paragraphe précédent des résultats déjà démontrés dans C. Faivre [9]. Soient  $x$  un irrationnel de  $]0, 1]$ ,  $[n_1(x), n_2(x), \dots]$  son développement en fractions continues et  $\frac{p_k(x)}{q_k(x)}$  le rationnel  $[n_1(x), \dots, n_k(x)]$  (cf. proposition 1.1.5). Le théorème de P. Lévy [22] établit, pour presque tout  $x \in ]0, 1]$  la convergence suivante :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \log q_k(x) = \frac{\pi^2}{12 \log 2}.$$

Supposons maintenant que  $x$  soit un irrationnel quadratique, c'est-à-dire racine d'un polynôme du second degré à coefficients entiers ; son développement en fractions continues est alors périodique et l'on a  $x = [n_1(x), \dots, n_N(x)]$  où  $N$  est la plus petite période de ce développement. Dans [9], C. Faivre montre que la suite  $(\frac{1}{k} \log q_k(x))_{k \geq 1}$  converge vers la « constante de Lévy »  $\beta(x) = -\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log T^i(x)$ . Lorsque  $N$  est pair, d'après le paragraphe 1, le réel  $x$  code une géodésique fermée de  $M$  marquée en un point de changement, de longueur  $\ell(x) = -2 \sum_{i=0}^{N-1} \log T^i(x) = S_N f(x)$ . Lorsque  $N$  est impair il faut doubler la période ; le réel  $x = [\overline{a_1 \cdots a_N a_1 \cdots a_N}]$  code alors une géodésique fermée de  $M$  marquée en un point de changement, de longueur  $\ell(x) = -4 \sum_{i=0}^{N-1} \log T^i(x) = 2S_N f(x)$ .

En supposant l'équivalent  $\frac{e^a}{a}$  de  $\pi_0(a)$  *a priori* connu, C. Faivre établit le théorème suivant :

**Théorème 4.0.1 ([9]).** — Soient  $a$  un réel positif et  $\mathcal{G}_a$  l'ensemble des nombres irrationnels quadratiques  $x$  de  $[0, 1]$  tels que  $\ell(x) \leq a$ .

- i) Le cardinal  $\#\mathcal{G}_a$  est équivalent à  $\frac{3 \log 2 e^a}{\pi^2}$  lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ .
- ii) La somme  $\sum_{x \in \mathcal{G}_a} \beta(x)$  est équivalente à  $\frac{e^a}{4}$  lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ .

Comme corollaire immédiat, C. Faivre obtient la convergence suivante :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\#\mathcal{G}_a}{\sum_{x \in \mathcal{G}_a} \beta(x)} = \frac{\pi^2}{12 \log 2}$$

qui exprime le fait qu'en « moyennisant » convenablement les constantes  $\beta(x)$  on retrouve asymptotiquement la constante  $\frac{\pi^2}{12 \log 2}$  établie par P. Lévy.

#### 4.1 Résumé de la démonstration du théorème 4.0.1, partie (i)

Notons  $\mathcal{G}_a^p$  (resp.  $\mathcal{G}_a^i$ ) l'ensemble des éléments de  $\mathcal{G}_a$  dont la plus petite période du développement en fractions continues est paire (resp. impaire). On a

$$\begin{aligned} \#\mathcal{G}_a^p &= \sum_{n=1}^{+\infty} \#\{x \in ]0, 1[ \mid T^{2n}x = x, \quad S_{2n}f(x) \leq a \text{ et } 2n \text{ plus petite période}\} \\ \#\mathcal{G}_a^i &= \sum_{n=0}^{+\infty} \#\left\{x \in ]0, 1[ \mid T^{2n+1}x = x, \quad S_{2n+1}f(x) \leq \frac{a}{2} \text{ et } 2n+1 \text{ plus petite période}\right\} \end{aligned}$$

L'assertion (i) du théorème 4.0.2 résultera des deux lemmes suivants :

**Lemme 4.1.1.** — *Le cardinal de  $\mathcal{G}_a^p$  est équivalent à  $\frac{3 \log 2}{\pi^2} e^a$  lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ .*

**Lemme 4.1.2.** — *Le cardinal de  $\mathcal{G}_a^i$  est équivalent à  $\frac{3 \log 2}{\pi^2} e^{\frac{a}{2}}$  lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ .*

Pour établir ces lemmes, nous suivons la méthode développée dans le paragraphe 3 ; nous indiquons seulement ici les étapes essentielles de la preuve du lemme 4.1.1, celles de la preuve du lemme 4.1.2 étant rigoureusement les mêmes.

Soit  $U(a) = \sum_{n \geq 1} \#\{x \in ]0, 1[ \mid T^{2n}x = x \text{ et } S_{2n}f(x) \leq a\}$ .

En utilisant l'encadrement  $U(a) - U(\frac{a}{2}) \leq \#\mathcal{G}_a^p \leq U(a)$ , on constate que pour établir le lemme 4.1.1, il suffit de montrer que  $U(a)$  est équivalent à  $\frac{3 \log 2}{\pi^2} e^a$  lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ .

#### Étape 1. Perturbation des points périodiques.

Pour toute fonction borélienne positive  $\varphi$  sur  $[0, 1]$ , on considère le noyau  $U_{(x,a)}(\varphi)$  défini par :

$$U_{(x,a)}(\varphi) = \sum_{n \geq 1} \sum_{\{y \mid T^{2n}y = x\}} \varphi(y) \mathbf{1}_{[0,a]}(S_{2n}f(y));$$

En introduisant pour  $k$  fixé, la partition  $(I_i)_{i \geq 1}$  du § 3.1, on obtient les inégalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} U_{(x^{(i)}, a - \varepsilon_k)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq U(a) \tag{*}$$

et

$$U(a) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} U_{(x^{(i)}, a + \varepsilon_k)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq U(a) \tag{**}$$

avec  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0$ .

## Étape 2. Théorème du renouvellement « classique » et comportement des $U_{(x,a)}(\varphi)$ .

En introduisant le noyau  $\tilde{P}$  associé au couple  $(P, f)$ , on obtient

$$U_{(x,a)}(\varphi) = h(x) \sum_{n \geq 1} \tilde{P}^{2n} \left( \frac{\varphi}{h} \otimes \chi_a \right) (x, 0)$$

où  $h(x) = \frac{1}{(1+x) \log 2}$  et  $\chi_a(s) = e^{-s} \mathbf{1}_{[-a,0]}(s)$ .

Fixons alors  $\varepsilon > 0$  et posons  $K = \left[ \frac{a}{\varepsilon} \right]$ . On a

$$\sum_{\ell=0}^{K-1} e^{\ell\varepsilon} \mathbf{1}_{[-(\ell+1)\varepsilon, -\ell\varepsilon]} \leq \chi_a \leq \sum_{\ell=0}^K e^{(\ell+1)\varepsilon} \mathbf{1}_{[-(\ell+1)\varepsilon, -\ell\varepsilon]}$$

d'où les deux inégalités

$$h(x) \sum_{\ell=0}^{K-1} e^{\ell\varepsilon} \sum_{n \geq 1} \tilde{P}^{2n} \left( \frac{\varphi}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-\varepsilon, 0]} \right) (x, \ell\varepsilon) \leq U_{(x,a)}^k(\varphi)$$

et

$$U_{(x,a)}(\varphi) \leq h(x) \sum_{\ell=0}^{K-1} e^{(\ell+1)\varepsilon} \sum_{n \geq 1} \tilde{P}^{2n} \left( \frac{\varphi}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-\varepsilon, 0]} \right) (x, \ell\varepsilon)$$

En appliquant le théorème de renouvellement « classique » (§ 5) au couple  $(P^2, f + f \circ T)$ , on établit la convergence suivante :

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} \tilde{P}^{2n} \left( \frac{\varphi}{h} \otimes \mathbf{1}_{[-\varepsilon, 0]} \right) (x, \ell\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{E} \nu \left( \frac{\varphi}{h} \right)$$

uniformément par rapport à  $x \in [0, 1]$ , avec  $E = \int_0^1 (f(t) + f \circ T(t)) \nu(dt) = 2\nu(f) = \frac{\pi^2}{3 \log 2}$ . En appliquant alors le lemme 3.2.1, et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on montre que lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ , le réel  $U_{(x,a)}(\varphi)$  est équivalent à  $h(x) \frac{3 \log 2}{\pi^2} e^a \int_0^1 \varphi(t) dt$  uniformément par rapport à  $x \in [0, 1]$ .

## Étape 3. Asymptotique de $U(a)$

Reprenons ici les inégalités (\*) et (\*\*) de l'étape 1. Le lemme de Fatou appliqué à (\*) donne :

$$\frac{e^{-\varepsilon_k}}{E} \sum_{i=1}^{+\infty} m(I_i) h(x^{(i)}) \leq \liminf_{a \rightarrow +\infty} \frac{U(a)}{e^a}.$$



Par ailleurs, en adaptant la preuve du lemme 3.1.2, on établit l'existence d'une série à termes positifs convergente  $(D_i)_{i \geq 1}$  telle que  $U_{(x^{(i)}, a)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq D_i e^a$ . Ceci autorise le passage à la limite dans (\*\*)

$$\limsup_{a \rightarrow +\infty} \frac{U(a)}{e^a} \leq \frac{e^{\varepsilon_k}}{E} \sum_{i=1}^{+\infty} m(I_i) h(x^{(i)}).$$

Pour achever la preuve du lemme 4.1.1, il suffit de faire tendre  $k$  vers  $+\infty$ .

## 4.2 Résumé de la démonstration du théorème 4.0.1 partie (ii)

L'assertion ii) du théorème 4.0.1 résultera des deux lemmes suivants :

**Lemme 4.2.1.** — La somme  $\sum_{x \in \mathcal{Y}_a^p} \beta(x)$  est équivalente à  $\frac{e^a}{4}$  lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ .

**Lemme 4.2.2.** — La somme  $\sum_{x \in \mathcal{Y}_a^i} \beta(x)$  est équivalente à  $\frac{e^{\frac{a}{2}}}{4}$  lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ .

Indiquons les étapes essentielles de la preuve du lemme 4.2.1. On a

$$\sum_{x \in \mathcal{Y}_a^p} \beta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n} \sum_{\substack{\{x \mid T^{2n}x=x\} \\ 2n \text{ plus petite période}}} S_{2n}f(x) \mathbf{1}_{[0,a]}(S_{2n}f(x)).$$

Posons  $V(a) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n} \sum_{\{x \mid T^{2n}x=x\}} S_{2n}f(x) \mathbf{1}_{[0,a]}(S_{2n}f(x))$ . On vérifie que pour établir le lemme 4.2.1, il suffit de montrer que  $V(a)$  est équivalent à  $\frac{e^a}{4}$  lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ .

### Étape 1. Perturbation des points périodiques.

Posons  $V_{(x,a)}(\varphi) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n} \sum_{\{y \mid T^{2n}y=x\}} \varphi(y) S_{2n}f(y) \mathbf{1}_{[0,a]}(S_{2n}f(y))$ .

Du lemme 3.1.1 découlent les deux inégalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} V_{(x^{(i)}, a - \varepsilon_k)}(\mathbf{1}_{I_i}) - \frac{\varepsilon_k}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} N_{(x^{(i)}, a - \varepsilon_k)}(\mathbf{1}_{I_i}) \leq V(a) \quad (*)$$

et

$$V(a) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} V_{(x^{(i)}, a + \varepsilon_k)}(\mathbf{1}_{I_i}) + \frac{\varepsilon_k}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} N_{(x^{(i)}, a + \varepsilon_k)}(\mathbf{1}_{I_i}) \quad (**)$$

avec  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k = 0$ .

**Étape 2. Théorème du renouvellement harmonique et comportement de  $V_{(x,a)}(\varphi)$ .**

On a  $V_{(x,a)}(\varphi) = \frac{h(x)}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \tilde{P}^{2n} \left( \frac{\varphi}{h} \otimes \xi_a \right) (x, a)$  avec  $\xi_a(t) = -te^{-t} \mathbf{1}_{[-a,0]}(t)$ .

En approchant alors  $\xi_a$  par une fonction en escalier et en appliquant le théorème de renouvellement harmonique au couple  $(P^2, f + f \circ T)$ , on montre que  $V_{(x,a)}(\varphi)$  est équivalent à  $\frac{h(x)}{4} e^a \int_0^1 \varphi(t) dt$  lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$

**Étape 3. Asymptotique de  $V(a)$ .**

Le lemme de Fatou permet de passer à la limite en  $a$  dans l'inégalité (\*) de l'étape 1 ; pour faire de même dans l'inégalité (\*\*), on adapte le lemme 3.1.2 et on utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue. On conclut en faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$ .



## 5 ÉTUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU POTENTIEL HARMONIQUE D'UNE MARCHE DE MARKOV SUR $\mathbb{R}$

On considère un espace métrique compact  $(X, d)$  et une probabilité de transition  $Q(x, dy)$  sur  $X$ . Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov de noyau  $Q$  sur  $X$ , définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Le noyau  $Q$  contrôle les transitions du processus  $(X_n)_{n \geq 0}$  : le point  $x \in X$  est transformé en  $y$  avec la probabilité  $Q(x, dy)$ . On associe au noyau  $Q$  un opérateur (noté encore  $Q$ ) défini sur l'espace des fonctions boréliennes bornées  $\varphi$  sur  $X$  par :

$$\forall x \in X, \quad Q\varphi(x) = \int_X \varphi(y) Q(x, dy).$$

Soit  $g$  une fonction borélienne positive sur  $X$  ; on établit sous certaines hypothèses un théorème limite relatif aux sommes ergodiques  $S_n = \sum_{k=1}^n g(X_k)$ . Pour ce faire, on se place sur l'espace produit  $X \times \mathbb{R}$  et l'on considère sur cet espace la chaîne de Markov  $(X_n, S_n)_{n \geq 0}$  de noyau de transition  $\tilde{Q}$  : le point  $(x, s)$  est transformé en  $(y, s - g(y))$  avec la probabilité  $Q(x, dy)$ . Ainsi, pour toute fonction borélienne bornée  $\varphi$  sur  $X \times \mathbb{R}$ , on a

$$\tilde{Q}\varphi(x, s) = \int_X \varphi(y, s - g(y)) Q(x, dy).$$

Fixons  $(x, a) \in X \times \mathbb{R}$ . Les trajectoires partant de  $(x, a)$  de la chaîne  $(X_n, S_n)_{n \geq 0}$  s'écrivent  $(X_n(\omega), S_n(\omega))_{n \geq 0}$  avec  $X_0(\omega) = x$  et  $S_n(\omega) = a - \sum_{k=1}^n g(X_k(\omega))$ . Notons que les transitions sur  $X \times \mathbb{R}$  de cette chaîne sont gouvernées par le noyau  $\tilde{Q}$  ; on dit que  $(X_n, S_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne *semi-markovienne* sur  $X \times \mathbb{R}$ . Le processus  $(S_n)_{n \geq 0}$  apparaît comme une généralisation des marches aléatoires à pas indépendants sur  $\mathbb{R}$  et est parfois appelé « marche de Markov » sur  $\mathbb{R}$  ([12]).

Fixons un intervalle  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Le théorème du renouvellement ([5]) donne le comportement asymptotique du temps moyen de passage  $T_{(x,a)}(I)$  dans l'intervalle  $I$  du processus  $(S_n)_{n \geq 0}$  lorsque le point origine  $S_0 = a$  est « rejeté » en  $+\infty$  ; l'expression « temps moyen » signifie que l'on pondère les différentes trajectoires du

processus  $(S_n)_{n \geq 0}$  par leurs probabilités de réalisation. Si on note  $\mathbb{E}_{(x,a)}[\varphi(X_n, S_n)] = \mathbb{E}[\varphi(X_n, S_n) |_{X_0=x, S_0=a}]$ , on a :

$$T_{(x,a)}(I) = \mathbb{E}_{(x,a)} \left[ \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_I(S_n) \right] = \sum_{n \geq 0} \tilde{Q}^n(\mathbf{1}_X \otimes \mathbf{1}_I)(x, a).$$

Lorsque  $g$  est constante sur  $\mathbb{R}$ , égale à  $E > 0$ , pour tout  $\omega \in \Omega$  on a  $S_n(\omega) = S_0(\omega) - nE$ ; ainsi pour toute trajectoire partant de  $a$  assez grand, le temps moyen de passage dans  $I$  est approximativement  $\frac{m(I)}{E}$  où  $m(I)$  désigne la longueur de  $I$ . Si  $g$  n'est pas constante, le fait de « rejeter »  $a$  en  $+\infty$ , permet d'atteindre un régime stationnaire lors du passage dans l'intervalle  $I$ ; on peut alors remplacer  $g$  par « la valeur moyenne »  $E$  des variables aléatoires  $g(X_k)$  ce qui donne le même comportement asymptotique que lorsque  $g$  est constante.

Nous introduisons la famille  $(Q_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  des opérateurs « transformée de Fourier » associés au couple  $(Q, g)$  et définis, pour toute fonction borélienne bornée  $\varphi$  sur  $X$ , par

$$Q_\lambda \varphi(x) = \int_X \varphi(y) e^{i\lambda g(y)} Q(x, dy).$$

Soit  $L(X)$  l'espace des fonctions lipschitziennes sur  $X$ , muni de la norme

$$\|\varphi\| = |\varphi|_\infty + m(\varphi) \text{ avec } |\varphi|_\infty = \sup_{x \in X} |\varphi(x)| \text{ et } m(\varphi) = \sup_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{d(x, y)}.$$

Introduisons les hypothèses suivantes :

**H<sub>0</sub>**  $Q$  opère sur  $L(X)$ .

**H<sub>1</sub>** Il existe sur  $X$  une unique mesure de probabilité  $Q$ -invariante  $\mu$  et le rayon spectral sur  $L(X)$  de l'opérateur  $R = Q - \mu$  est strictement inférieur à 1.

**H<sub>2</sub>** Le rayon spectral sur  $L(X)$  des opérateurs  $Q_\lambda$  est inférieur ou égal à 1 et, pour  $\lambda$  non nul, l'opérateur  $(I - Q_\lambda)$  est inversible sur  $L(X)$ .

**H<sub>3</sub>**  $\sup_{x \in X} Qg^3(x) < +\infty$  et  $\int_X g(x) \mu(dx) > 0$ .

**H<sub>4</sub>** Les opérateurs  $Q_\lambda$  opèrent sur  $L(X)$  et la fonction  $\lambda \rightarrow Q_\lambda$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  de  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  dans l'espace de Banach  $(\mathcal{L}(L(X), \|\cdot\|), \|\cdot\|)$  des applications linéaires sur  $(L(X), \|\cdot\|)$  muni de la norme usuelle.

Lorsque  $g$  est une fonction lipschitzienne et positive sur  $X$ , l'hypothèse **H<sub>3</sub>** est satisfaite; si de plus,  $Q$  opère sur  $L(X)$  (hypothèse **H<sub>0</sub>**), il en est de même pour les opérateurs  $Q_\lambda$  et l'on montre aisément que la fonction  $\lambda \mapsto Q_\lambda$  est  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{L}(L(X), \|\cdot\|)$  ([13]). Dans l'exemple que nous traitons,  $g(x) = -2 \log x$  n'est pas lipschitzienne sur  $]0, 1]$ , la condition **H<sub>4</sub>** ne se déduit donc plus des hypothèses **H<sub>0</sub>** et **H<sub>3</sub>**; la « géométrie » de l'opérateur  $P$  intervient alors fortement. Enfin, l'hypothèse **H<sub>2</sub>** est parfois délicate à vérifier ([26], [28]); dans l'exemple géométrique traité ici, la vérification de cette condition repose sur le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [16]. Dans ce qui suit,  $m$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  et l'on pose  $\mu(g) = \int_X g(x) \mu(dx)$ .

**Théorème 5.0.1 (Théorème du renouvellement).** — Supposons que le couple  $(Q, g)$  vérifie les hypothèses  $H_0, H_1, H_2, H_3$  et  $H_4$ . Alors, lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ , la famille de mesures  $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{Q}^n((x, a), dy dt)\right)_{a>0}$  converge vaguement vers la mesure  $\frac{1}{\mu(g)}\mu(dy) \otimes m(dt)$ , uniformément par rapport à  $x \in X$ .

On trouve dans ([13]) une preuve de ce théorème dans le cas particulier où  $g \in L(X)$ . Le problème de la convergence uniforme est traité en détail dans ([25]). Enfin, dans ([2]) est abordé le cas où la fonction  $g$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ . Sous les hypothèses  $H_0, H_1, H_2, H_3$  et  $H_4$  la preuve s'adapte aisément. Dans le paragraphe 5.1, nous établissons une variante de ce théorème.

**Théorème 5.0.2 (Théorème du renouvellement harmonique).** — Sous les hypothèses  $H_0, H_1, H_2, H_3$  et  $H_4$ , la famille de mesures  $\left(a \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \tilde{Q}^n((x, a), dy dt)\right)_{a>0}$  converge vaguement lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$  vers la mesure  $\mu(dy) \otimes m(dt)$ , uniformément par rapport à  $x \in X$ .

Dans le paragraphe 5.2, nous montrerons que le couple  $(P, f)$  introduit dans le paragraphe 3 vérifie les hypothèses  $H_0, H_1, H_2, H_3$  et  $H_4$ .

## 5.1 Démonstration du théorème du renouvellement harmonique

Par un argument probabiliste classique ([5]), il suffit pour prouver le théorème 5.0.2 de montrer que, pour tout fonction  $\varphi \in L(X)$  et toute fonction  $u$  strictement positive sur  $\mathbb{R}$  et dont la transformée de Fourier  $\hat{u}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact, on a :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sup_{x \in X} \left| a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tilde{Q}^n(\varphi \otimes u)(x, a) - \mu(\varphi) \int_{\mathbb{R}} u(y) dy \right| = 0.$$

En utilisant la transformée de Fourier inverse, on établit les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1[ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} \tilde{Q}^n(\varphi \otimes u)(x, a) &= \int_0^t \sum_{n=1}^{+\infty} s^{n-1} \tilde{Q}^n(\varphi \otimes u)(x, a) ds \\ &= \int_0^t \sum_{n=1}^{+\infty} s^{n-1} \mathbb{E}_{(x,0)}[\varphi(X_n) u(a + S_n)] ds \\ &= \int_0^t \sum_{n=1}^{+\infty} s^{n-1} \mathbb{E}_{(x,0)}[\varphi(X_n) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\lambda) e^{i\lambda(a+S_n)} d\lambda] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda a} \hat{u}(\lambda) \left( \int_0^t \sum_{n=1}^{+\infty} s^{n-1} Q_\lambda^n \varphi(x) ds \right) d\lambda \end{aligned}$$

l'interversion des signes  $\sum$  et  $\int$  étant possible puisque  $t \in [0, 1[$ .

Comme  $s \in [0, 1[$ , les opérateurs  $(I - sQ_\lambda)$  sont inversibles sur  $L(X)$  et l'on a  $\sum_{n=1}^{+\infty} s^{n-1} Q_\lambda^n = (I - sQ_\lambda)^{-1} \circ Q_\lambda$ . Posons alors

$$I_{(x,a,t)}(u, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda a} \hat{u}(\lambda) \left( \int_0^t (I - sQ_\lambda)^{-1} (Q_\lambda \varphi)(x) ds \right) d\lambda;$$

pour démontrer le théorème 5.0.2, il nous faut établir la convergence suivante :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sup_{x \in X} \left| a \lim_{t \rightarrow 1} I_{(x,a,t)}(u, \varphi) - \mu(\varphi) \hat{u}(0) \right| = 0.$$

L'étude, lorsque  $t \rightarrow 1$ , de l'intégrale  $\int_0^t (I - sQ_\lambda)^{-1} (Q_\lambda \varphi)(x) ds$  est étroitement liée au comportement au voisinage de 0 de la fonction  $\lambda \mapsto (I - sQ_\lambda)^{-1}$  (définie sur  $\mathbb{R}^*$  d'après l'hypothèse  $H_4$ ). Le lemme suivant est démontré à la fin de ce paragraphe.

**Lemme 5.1.1.** — *Sous les hypothèses  $H_0, H_1, H_3$  et  $H_4$ , il existe  $\delta > 0$  tel que*

$$\forall \lambda \in [-\delta, \delta] \quad Q_\lambda = k(\lambda) \mu_\lambda + R_\lambda$$

où

1.  $k(\lambda)$  est la valeur propre dominante de  $Q_\lambda$  sur  $L(X)$ .
2.  $\mu_\lambda$  est le projecteur propre sur  $L(X)$  associé à  $k(\lambda)$  et  $R_\lambda$  est un opérateur borné sur  $L$  de rayon spectral  $\rho(R_\lambda)$  strictement inférieur à 1.
3.  $R_\lambda \mu_\lambda = \mu_\lambda R_\lambda = 0$ .
4. Les fonctions  $\lambda \rightarrow k(\lambda), R_\lambda, \mu_\lambda$  sont de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $[-\delta, \delta]$ .

De plus, il existe une fonction  $\theta: \lambda \mapsto \theta(\lambda)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[-\delta, \delta]$  telle que  $k(\lambda) = 1 + i\mu(g)\lambda + \lambda^2\theta(\lambda)$ .

Décomposons  $\hat{u}$  en  $\hat{u}_1 + \hat{u}_2$ , le support (compact)  $U_1$  de  $\hat{u}_1$  étant inclu dans  $\mathbb{R}^*$  et celui de  $\hat{u}_2$  dans  $[-\delta, \delta]$ . Sous les hypothèses  $H_2$  et  $H_4$ , la fonction  $(s, \lambda) \mapsto (I - sQ_\lambda)^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}^*$ . Elle est donc bornée sur  $[0, 1] \times U_1$ , ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 3 ; en particulier, il existe une constante  $K_1$  (indépendante de  $x \in X$  puisque les opérateurs mis en jeu sont bornés sur  $L(X)$ ) telle que pour tout  $a > 0$  et tout  $x \in X$ , on ait

$$\left| \lim_{t \rightarrow 1} I_{(x,a,t)}(u_1, \varphi) \right| \leq \frac{K_1}{a^3},$$

inégalité qui découle du lemme classique suivant :

**Lemme 5.1.2.** — *Soient  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que les fonctions  $f, f', \dots, f^{(k)}$  sont intégrables sur  $\mathbb{R}$ . Alors, pour tout réel  $a$ , on a*

$$\left| a^k \int_{\mathbb{R}} e^{ixa} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| dx.$$

Étudions maintenant l'intégrale  $I_{(x,a,t)}(u_2, \varphi)$ . D'après le lemme 5.1.2, pour tous  $s \in [0, 1[$  et  $\lambda \in [\delta, -\delta]$ , on a :

$$(I - sQ_\lambda)^{-1} = \frac{1}{1 - sk(\lambda)}\mu_\lambda + (I - sR_\lambda)^{-1}$$

Notons  $J_{(x,a,t)}$  l'intégrale  $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda a} \hat{u}_2(\lambda) \left( \int_0^t (I - sR_\lambda)^{-1} (Q_\lambda \varphi)(x) ds \right) d\lambda$ . La fonction  $(s, \lambda) \mapsto (I - sR_\lambda)^{-1}$  étant de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $[0, 1] \times [-\delta, \delta]$ , il existe, comme pour l'intégrale  $I_{(x,a,t)}(u_1, \varphi)$ , une constante  $K_2 > 0$  telle que pour tout  $a > 0$  et tout  $x \in X$ , on ait :

$$\left| \lim_{t \rightarrow 1} J_{(x,a,t)} \right| \leq \frac{K_2}{a^3}.$$

Il nous reste donc à étudier le comportement lorsque  $t \rightarrow 1$  de l'intégrale

$$J'_{(x,a,t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda a} \hat{u}_2(\lambda) \mu_\lambda(Q_\lambda \varphi)(x) \left( \int_0^t \frac{ds}{1 - sk(\lambda)} \right) d\lambda.$$

Pour ce faire, on effectue une intégration par partie, si bien que cette intégrale se décompose en  $K_{(x,a,t)} + L_{(x,a,t)}$  avec

$$K_{(x,a,t)} = \frac{-1}{2i\pi a} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda a} \hat{u}_2(\lambda) \mu_\lambda(Q_\lambda \varphi)(x) \frac{k'(\lambda)}{k(\lambda)} \frac{t}{1 - tk(\lambda)} d\lambda$$

$$L_{(x,a,t)} = \frac{-1}{2i\pi a} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda a} \left( \frac{d}{d\lambda} (\hat{u}_2(\lambda) \mu_\lambda(Q_\lambda \varphi)(x)) - \hat{u}_2(\lambda) \mu_\lambda(Q_\lambda \varphi)(x) \frac{k'(\lambda)}{k(\lambda)} \right) \int_0^t \frac{ds}{1 - sk(\lambda)} d\lambda.$$

L'étude du comportement lorsque  $t$  tend vers 1 de l'intégrale  $K_{(x,a,t)}$  est délicate et fait apparaître une identité approchée. Le lemme suivant est démontré à la fin du paragraphe.

**Lemme 5.1.3.** — *Soit  $f$  une fonction continue sur  $[-\delta, \delta]$  telle que  $\lambda \rightarrow b(\lambda) = \frac{f(\lambda) - f(0)}{\lambda}$  admette un prolongement continu en 0. On a*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\lambda a} \frac{f(\lambda)}{1 - tk(\lambda)} d\lambda = \\ \frac{f(0)}{\mu(g)} \left( \pi + \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin \lambda a}{\lambda} d\lambda \right) - \frac{i}{\mu(g)} \int_{-\delta}^{\delta} b(\lambda) e^{i\lambda a} d\lambda - \frac{i}{\mu(g)} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\lambda f(\lambda) \theta(\lambda)}{1 - k(\lambda)} e^{i\lambda a} d\lambda. \end{aligned}$$

Appliquons le lemme 5.1.3 à la fonction  $f_x(\lambda) = \hat{u}_2(\lambda) \mu_\lambda(Q_\lambda \varphi)(x) \frac{k'(\lambda)}{k(\lambda)}$ . Cette fonction étant de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[-\delta, \delta]$ , la fonction  $b_x: \lambda \mapsto \frac{f_x(\lambda) - f_x(0)}{\lambda}$  est continûment dérivable sur  $[-\delta, \delta]$ ; on obtient alors, via le lemme 5.1.3, l'existence d'une constante  $K_3 > 0$  telle que, pour tout  $a > 0$  et  $x \in X$ , on ait :

$$\left| \lim_{t \rightarrow 1} aK_{(x,a,t)} - \mu(\varphi) \hat{u}(0) \right| \leq \frac{C_3}{a};$$



Enfin notons que la fonction  $\lambda \mapsto \int_0^1 \frac{ds}{1-sk(\lambda)}$  est intégrable sur  $[-\delta, \delta]$ . L'intégrale  $L_{(x,a,t)}$  converge donc, quand  $t$  tend vers 1, vers

$$L_{(x,a,1)} = \frac{-1}{2i\pi a} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda a} \left( \frac{d}{d\lambda} (\hat{u}_2(\lambda)\mu_\lambda(Q_\lambda\varphi)(x)) - \hat{u}_2(\lambda)\mu_\lambda(Q_\lambda\varphi)(x) \frac{k'(\lambda)}{k(\lambda)} \right) \int_0^1 \frac{ds}{1-sk(\lambda)} d\lambda.$$

et l'on a  $\sup_{\substack{x \in X \\ a > 0}} a |L_{(x,a,1)}| < +\infty$ . Par conséquent, on a de même

$\sup_{\substack{x \in X \\ a > 0}} a \left| \lim_{t \rightarrow 1} J'_{(x,a,t)} \right| < +\infty$ . En remplaçant dans l'intégrale  $J'_{(x,a,t)}$  la fonction  $\lambda \mapsto \hat{u}_2(\lambda)\mu_\lambda(Q_\lambda\varphi)(x)$  par  $\lambda \mapsto \frac{d}{d\lambda} (\hat{u}_2(\lambda)\mu_\lambda(Q_\lambda\varphi)(x)) - \hat{u}_2(\lambda)\mu_\lambda(Q_\lambda\varphi)(x) \frac{k'(\lambda)}{k(\lambda)}$ , on obtient l'existence d'une constante  $K_4 > 0$  telle que, pour tout  $x \in X$  et tout  $a > 0$ , on ait

$$\left| \lim_{t \rightarrow 1} L_{(x,a,t)} \right| \leq \frac{K_4}{a^2}.$$

Pour résumer, on a décomposé  $I_{(x,a,t)}(u, \varphi)$  en  $I_{(x,a,t)}(u_1, \varphi) + J_{(x,a,t)} + K_{(x,a,t)} + L_{(x,a,t)}$  et établi l'existence de constantes  $K_1, K_2, K_3$  et  $K_4$  telles que

$$\begin{aligned} \left| \lim_{t \rightarrow 1} a I_{(x,a,t)}(u_1, \varphi) \right| &\leq \frac{K_1}{a^2}, \\ \left| \lim_{t \rightarrow 1} a J_{(x,a,t)} \right| &\leq \frac{K_2}{a^2}, \\ \left| \lim_{t \rightarrow 1} a K_{(x,a,t)} - \mu(\varphi)\hat{u}(0) \right| &\leq \frac{K_3}{a}, \\ \text{et } \left| \lim_{t \rightarrow 1} a L_{(x,a,t)} \right| &\leq \frac{K_4}{a}. \end{aligned}$$

Il nous reste à démontrer les lemmes 5.1.1 et 5.1.3.

*Démonstration du lemme 5.1.1.* — La décomposition spectrale sur  $L(X)$  des opérateurs  $Q_\lambda$ ,  $\lambda \in [-\delta, \delta]$ , découle de celle de  $Q$  et du fait que  $Q_\lambda$  est une perturbation de classe  $\mathcal{C}^3$  de l'opérateur  $Q$  au voisinage de 0. Pour obtenir la dernière assertion du lemme, il suffit de faire le développement limité d'ordre 3 de  $k(\lambda)$  au voisinage de 0 et de calculer  $k'(0)$ ; ce dernier point mérite d'être explicité. Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$Q_{\lambda/n}^n \mathbf{1}(x) = \mathbb{E}_x \left[ e^{i\lambda/n S_n} \right] = k \left( \frac{\lambda}{n} \right)^n \mu_{\lambda/n} \mathbf{1}(x) + R_{\lambda/n}^n \mathbf{1}(x).$$

En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{i}{n} \mathbb{E}_x \left[ S_n e^{i\lambda/n S_n} \right] &= k' \left( \frac{\lambda}{n} \right) k \left( \frac{\lambda}{n} \right)^{n-1} \mu_{\lambda/n} \mathbf{1}(x) + \\ &+ \frac{1}{n} k \left( \frac{\lambda}{n} \right)^n \mu'_{\lambda/n} \mathbf{1}(x) + \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} R_{\lambda/n}^\ell R'_{\lambda/n} R_{\lambda/n}^{n-\ell-1} \mathbf{1}(x) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{i}{n} \mathbb{E}_x [S_n] = k'(0) + \frac{1}{n} \mu'_0 \mathbf{1}(x) + \frac{1}{n} R^{n-1} R'_0 \mathbf{1}(x).$$

On conclut en intégrant les deux membres de l'égalité par rapport à la mesure  $\mu$  puis en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ .

*Démonstration du lemme 5.1.3.* — On a

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(\lambda) e^{i\lambda a} \left( \frac{1}{1 - tk(\lambda)} - \frac{1}{1 - t(1 + i\mu(g)\lambda)} \right) d\lambda = t \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\lambda^2 f(\lambda) \Theta(\lambda)}{(1 - tk(\lambda))(1 - t(1 + i\mu(g)\lambda))} e^{i\lambda a} d\lambda$$

ainsi, grâce au théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow 1} \int_{-\delta}^{\delta} f(\lambda) e^{i\lambda a} \left( \frac{1}{1 - tk(\lambda)} - \frac{1}{1 - t(1 + i\mu(g)\lambda)} \right) d\lambda = -\frac{1}{i\mu(g)} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\lambda f(\lambda) \Theta(\lambda)}{1 - k(\lambda)} e^{i\lambda a} d\lambda.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(\lambda) e^{i\lambda a}}{1 - t(1 + i\mu(g)\lambda)} d\lambda &= \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1 - t}{(1 - t)^2 + t^2 \mu(g)^2 \lambda^2} f(\lambda) e^{i\lambda a} d\lambda + \\ &\quad + \frac{ti\mu(g)}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\lambda(f(\lambda) e^{i\lambda a} - f(-\lambda) e^{-i\lambda a})}{(1 - t)^2 + t^2 \mu(g)^2 \lambda^2} d\lambda \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow 1} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(\lambda) e^{i\lambda a}}{1 - t(1 + i\mu(g)\lambda)} d\lambda = \frac{f(0)}{\mu(g)} \left( \pi + \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin \lambda a}{\lambda} d\lambda \right) + \frac{i}{\mu(g)} \int_{-\delta}^{\delta} b(\lambda) e^{i\lambda a} d\lambda.$$

## 5.2 Le couple $(P, f)$ vérifie les hypothèses $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3, \mathbf{H}_4$

Introduisons les « opérateurs de Fourier »  $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  définis, pour toute fonction borélienne bornée  $\varphi$  sur  $[0, 1]$  et pour  $x \in [0, 1]$ , par  $P_\lambda \varphi(x) = P(e^{i\lambda f} \varphi)(x)$ , ce qui s'écrit encore

$$P_\lambda \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+x}{(n+x)(n+1+x)} e^{2i\lambda \log(n+x)} \varphi\left(\frac{1}{n+x}\right).$$

Soit  $L$  l'espace des fonctions lipschitziennes sur  $[0, 1]$ , normé par

$\|\varphi\| = |\varphi|_\infty + m(\varphi)$  où  $|\cdot|_\infty$  désigne la norme de la convergence uniforme sur  $[0, 1]$  et  $m(\varphi) = \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|}$ ; l'espace  $(L, \|\cdot\|)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace de Banach et l'application identité est compacte de  $(L, \|\cdot\|)$  dans  $(L, |\cdot|_\infty)$ . Nous allons montrer que les opérateurs  $P_\lambda$  opèrent sur  $L$  et contrôler leur spectre sur cet espace. Dans la proposition suivante,  $\nu$  désigne la mesure de Gauss introduite dans le paragraphe 2.2.

**Proposition 5.2.1.** —

1. L'opérateur  $P$  opère sur  $L$  et le rayon spectral sur  $L$  de l'opérateur  $P - \nu$  est strictement inférieur à 1.
2. Pour  $\lambda$  non nul, l'opérateur  $P_\lambda$  opère sur  $L$  et son rayon spectral sur  $L$  est strictement inférieur à 1.

*Démonstration.* — Nous énonçons tout d'abord deux lemmes dont les preuves reposent sur des arguments développés dans ([14]) et qui vont nous permettre de contrôler le spectre des opérateurs  $P_\lambda$ .

**Lemme 5.2.2.** — *Il existe deux constantes positives  $A$  et  $B$  telles que, pour toute fonction  $\varphi \in L$  et tout réel  $\lambda$ , on ait*

$$|P_\lambda \varphi|_\infty \leq |\varphi|_\infty \text{ et } \|P_\lambda \varphi\| \leq \frac{5}{8} \|\varphi\| + (A + B|\lambda|) |\varphi|_\infty.$$

**Lemme 5.2.3.** — *Soient  $\varphi \in L$  et  $\alpha$  un nombre complexe de module 1. Si  $P_\lambda \varphi = \alpha \varphi$ , alors  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = 0$ , et  $\varphi$  est constante sur  $[0, 1]$ .*

Les inégalités du lemme 5.2.2 montrent que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , l'opérateur  $P_\lambda$  est un opérateur de Doeblin-Fortet sur  $L$  à puissances bornées ([16], [24]) ; ainsi d'après le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu ([16], [24]),  $P_\lambda$  a au plus un nombre fini de valeurs propres de module 1, les sous-espaces propres associés sont de dimension finie et le reste du spectre est inclu dans un disque de rayon strictement inférieur à 1. Lorsque  $\lambda$  est non nul, l'opérateur  $P_\lambda$  ne possède pas de valeur propre de module 1 (lemme 5.2.3) si bien que son rayon spectral est strictement inférieur à 1. (Hypothèse  $H_2$ ). En revanche, pour  $\lambda = 0$ , la valeur propre 1 est simple, l'espace propre  $\ker(P - \text{Id})$  est celui des fonctions constantes sur  $[0, 1]$ , et le projecteur propre associé à 1 s'identifie à une mesure de probabilité  $P$ -invariante sur  $[0, 1]$ . Ainsi, on peut écrire  $P = \nu + R$  avec  $\rho(R) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|R^n\|^{1/n} < 1$ . (Hypothèse  $H_1$ ).

*Démonstration du lemme 5.2.2.* — La première inégalité découle du fait que  $P$  est un opérateur markovien sur  $[0, 1]$ . Posons  $p_n(x) = \frac{1+x}{(n+x)(n+1+x)}$  ; pour tous  $x, y \in [0, 1]$  et  $n \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} |P_\lambda \varphi(x) - P_\lambda \varphi(y)| &\leq |\varphi|_\infty \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |p_n(x) - p_n(y)| + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(y) \left| e^{i\lambda \log(n+x)} - e^{-i\lambda \log(n+y)} \right| \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(y) \left| \varphi\left(\frac{1}{n+x}\right) - \varphi\left(\frac{1}{n+y}\right) \right| \\ &\leq |\varphi|_\infty \left( 6|x-y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(y) \left| \sin\left(\frac{\lambda}{2} \log\left(\frac{n+x}{n+y}\right)\right) \right| \right) \\ &\quad + m(\varphi) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n(y)}{n^2} |x-y| \end{aligned}$$

d'où la seconde inégalité du lemme.

*Démonstration du lemme 5.2.3.* — Considérons d'abord le cas où  $\lambda = 0$ . Les égalités  $P(\varphi) = e^{i\theta} \varphi$  et  $\nu P = \nu$  entraînent  $P|\varphi|(x) = |\varphi(x)|$ ,  $\nu(dx)$ -presque sûrement ; les fonctions  $\varphi$  et  $P\varphi$  étant continues sur  $[0, 1]$  et le support de  $\nu$  étant  $[0, 1]$ , cette égalité est en fait satisfaite pour tous les points  $x$  de  $[0, 1]$ .

Soient  $x_0$  et  $x_1$  dans  $[0, 1]$  tels que  $|\varphi(x_0)| = \inf_{x \in [0, 1]} |\varphi(x)|$  et  $|\varphi(x_1)| = \sup_{x \in [0, 1]} |\varphi(x)|$ ; par convexité on a

$$\forall n \geq 1 \quad |\varphi(x_0)| = \left| \varphi \left( \frac{1}{n+x_0} \right) \right| \quad \text{et} \quad |\varphi(x_1)| = \left| \varphi \left( \frac{1}{n+x_1} \right) \right|$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient  $|\varphi(x_0)| = |\varphi(0)|$  et  $|\varphi(x_1)| = |\varphi(0)|$ ; ainsi,  $\varphi$  est de module constant sur  $[0, 1]$ .

Montrons à présent que la fonction  $\varphi$  est constante sur  $[0, 1]$ ; en supposant  $\varphi$  non nulle, l'égalité  $P\varphi = e^{i\theta}\varphi$  nous donne

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \geq 1 \quad \varphi \left( \frac{1}{n+x} \right) = e^{i\theta}\varphi(x).$$

Ainsi, pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a  $\varphi(x) = e^{-i\theta}\varphi(0)$ ; la fonction  $\varphi$  est donc constante sur  $[0, 1]$  et  $e^{i\theta} = 1$ .

Considérons à présent le cas où  $\lambda$  est quelconque. Les égalités  $P_\lambda\varphi = e^{i\theta}\varphi$  et  $\nu P = \nu$  entraînent  $P|\varphi| = |\varphi|$  et donc  $\varphi$  est de module constant sur  $[0, 1]$ . Par convexité, on obtient

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \geq 1 \quad e^{2i\lambda \log(n+x)}\varphi \left( \frac{1}{n+x} \right) = e^{i\theta}\varphi(x)$$

d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2i\lambda \log(n+x)} = e^{-i\theta} \frac{\varphi(x)}{\varphi(0)}$ ; en particulier

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{2i\lambda \log(2n+x)}}{e^{2i\lambda \log(n+x)}} = e^{2i\lambda \log 2} = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{2i\lambda \log(3n+x)}}{e^{2i\lambda \log(n+x)}} = e^{2i\lambda \log 3} = 1$ , d'où  $\lambda = 0$ . Pour  $\lambda \neq 0$ , l'opérateur  $P_\lambda$  ne possède donc pas de valeur propre de module 1.

Il nous reste à étudier la régularité de la fonction  $\lambda \mapsto P_\lambda$ . Nous avons la

**Proposition 5.2.4.** — *L'application  $\lambda \mapsto P_\lambda$  est développable en série entière en tout point de  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* — Fixons  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ; pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a

$$P_{\lambda_0+t}\varphi(x) = P \left( \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(it)^\ell}{\ell!} e^{i\lambda_0 f} f^\ell \varphi \right) (x).$$

Nous allons montrer que pour  $|t|$  assez petit la série  $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(it)^\ell}{\ell!} e^{i\lambda_0 f} f^\ell$  est normalement convergente dans  $(L, \|\cdot\|)$ . En posant alors

$$\forall \varphi \in L \quad S_N(\lambda_0, t)(\varphi) = \sum_{\ell=0}^N \frac{(it)^\ell}{\ell!} P(e^{i\lambda_0 f} f^\ell \varphi)$$

on en déduit que la suite d'opérateurs  $(S_N(\lambda_0, t))_{N \geq 1}$  converge vers  $P_{\lambda_0+t}$  dans l'espace  $(\mathcal{L}(L, \|\cdot\|), \|\cdot\|)$  des applications linéaires de  $(L, \|\cdot\|)$ ; ainsi la fonction  $\lambda \mapsto P_\lambda$  est développable en série entière au voisinage de  $\lambda_0$  et

$$\forall \ell \geq 1, \forall \varphi \in L \quad \frac{dP_\lambda}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0}(\varphi) = i^\ell P(e^{i\lambda_0 f} f^\ell \varphi).$$

Il nous suffit donc de montrer que la série  $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(it)^\ell}{\ell!} e^{i\lambda_0 f} f^\ell$  est normalement convergente dans  $(L, \|\cdot\|)$ .

Pour tout  $n \geq 1$  et pour tout  $x \in [0, 1]$ , posons  $f_n(x) = 2 \log(n + x)$ ; on a  $\|f_n\|_\infty \leq 2 \log(n + 1)$ ,  $m(f_n) \leq 2$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\|e^{i\lambda f_n}\| \leq 1 + |\lambda| m(f_n)$ .

Par ailleurs, il existe  $K > 0$  tel que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\|p_n\| \leq \frac{K}{n^2}$ . Il existe donc une constante  $C > 0$  telle que

$$\begin{aligned} \|P(e^{i\lambda_0 f} f^\ell)\| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|p_n\| \|e^{i\lambda_0 f_n}\| \|f_n\|^\ell \\ &\leq C \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2 + 2 \log(n + 1))^\ell}{n^2}. \end{aligned}$$

Notons que la somme  $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|t|^\ell (2 + 2 \log(n + 1))^\ell}{\ell! n^2} = e^{2|t|} \sum_{n \geq 1} \frac{(n + 1)^{2|t|}}{n^2}$  est finie si  $|t| < 1/2$ ; par conséquent, pour  $|t| < 1/2$ , la série  $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{|t|^\ell}{\ell!} \|P(e^{i\lambda_0 f} f^\ell)\|$  converge. Ceci achève la démonstration de la proposition 5.2.4.

## 6 PERTURBATION DE LA MÉTRIQUE DE POINCARÉ SUR $M$

Fixons à présent une *perturbation*  $\bar{g}_\varepsilon$  de la métrique de Poincaré sur  $M$ . On note  $d_\varepsilon$  la distance induite par la métrique relevée sur  $\mathbb{H}^2$ ,  $K_\varepsilon$  la courbure de  $\bar{g}_\varepsilon$  et  $d$  la distance de Poincaré sur  $\mathbb{H}^2$ . On rappelle que les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

1. Pour tous  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ ,

$$(1 + \varepsilon)^{-1}d(z_1, z_2) \leq d_\varepsilon(z_1, z_2) \leq (1 + \varepsilon)d(z_1, z_2).$$

2. Il existe  $b \in ]0, 1]$  et  $R > 0$  tels que pour tout  $z \in \mathbb{H}^2$ ,  $K_\varepsilon(z) \leq -b^2 < 0$ . et  $K_\varepsilon(z) = -1$  si  $\text{Im } z \geq R$ .

L'hypothèse (1) traduit le fait que les espaces métriques  $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$  et  $(\mathbb{H}^2, d)$  sont quasi-isométriques et l'hypothèse (2) entraîne que  $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$  est un  $\text{CAT}(-b^2)$ -espace [4]. On note  $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$  son bord (au sens des classes d'équivalences de rayons géodésiques asymptotes) et  $\partial \mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

### 6.1 Codage des géodésiques fermées de $(M, \bar{g}_\varepsilon)$

Soient  $\xi \in \partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$  et  $r_\varepsilon(t)$  un rayon géodésique pointé en  $\xi$ . Étant donnés  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ , la limite, quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , de  $d_\varepsilon(z_1, r_\varepsilon(t)) - d_\varepsilon(z_2, r_\varepsilon(t))$  existe et est indépendante du rayon choisi, on la note  $B_\xi^\varepsilon(z_1, z_2)$  ([4], [11]). Géométriquement  $|B_\xi^\varepsilon(z_1, z_2)|$  correspond à la distance entre les horosphères basées en  $\xi$  et passant respectivement par  $z_1, z_2$ . Si  $\xi_\gamma$  est le point fixe attractif d'une isométrie hyperbolique  $\gamma$  de  $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$ , la quantité  $B_{\xi_\gamma}^\varepsilon(z, \gamma(z))$  est indépendante de  $z$  et correspond au déplacement  $d_\gamma$  d'un point de l'axe de  $\gamma$  sous l'action de  $\gamma$ . Nous choisissons comme point base dans  $\mathbb{H}^2$  le point  $i$ , on pose :

$$d_\gamma = B_{\xi_\gamma}^\varepsilon(i, \gamma(i)).$$

Soient  $\xi_1, \xi_2 \in \partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$  et  $z$  un point appartenant à la géodésique passant par  $\xi_1$  et  $\xi_2$  ; le produit de Gromov  $(\xi_1 | \xi_2)_\varepsilon$  défini par

$$(\xi_1 | \xi_2)_\varepsilon = \frac{1}{2} (B_{\xi_1}^\varepsilon(i, z) + B_{\xi_2}^\varepsilon(i, z))$$

est indépendant du point  $z$  et représente, au signe près, la distance entre les horosphères passant par  $i$  et basées respectivement en  $\xi_1, \xi_2$ .

Considérons sur  $\partial_\varepsilon\mathbb{H}^2 \times \partial_\varepsilon\mathbb{H}^2$  l'application  $D_\varepsilon$  définie par

$$D_\varepsilon(\xi_1, \xi_1) = 0$$

$$D_\varepsilon(\xi_1, \xi_2) = e^{-b(\xi_1|\xi_2)_\varepsilon} \text{ (où } b \text{ est la borne supérieure de la courbure } K_\varepsilon\text{).}$$

L'espace  $\mathbb{H}^2$  muni de la distance  $bd_\varepsilon$  étant un CAT(-1)-espace,  $D_\varepsilon$  est une *distance visuelle* sur  $\partial_\varepsilon\mathbb{H}^2$  ([4]). Ce résultat est dû à M. Bourdon que nous remercions ici pour les éclaircissements qu'il nous a apportés sur les CAT(-1)-espaces. On note  $D_0 = D$ .

Le théorème suivant établit une correspondance entre les deux espaces métriques  $(\partial_\varepsilon\mathbb{H}^2, D_\varepsilon)$  et  $(\partial\mathbb{H}^2, D)$ .

**Théorème 6.1.1 ([11] Proposition 4.14).** — *L'application  $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon) \xrightarrow{\text{Id}} (\mathbb{H}^2, d)$  s'étend en un homéomorphisme bi-Hölder  $(\partial_\varepsilon\mathbb{H}^2, D_\varepsilon) \xrightarrow{\varphi} (\partial\mathbb{H}^2, D)$  équivariant par rapport à l'action de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  (i.e.  $\varphi \circ \gamma = \gamma \circ \varphi$ ).*

Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ ; on définit le produit de Gromov sur  $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$  par

$$(z_1 | z_2)_\varepsilon = 1/2 (d_\varepsilon(i, z_1) + d_\varepsilon(i, z_2) - d_\varepsilon(z_1, z_2)).$$

On note  $(z_1 | z_2)_0 = (z_1 | z_2)$ . Les espaces  $(\mathbb{H}^2, d)$  et  $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$  étant quasi-isométriques, il existe  $A_1 > 0$  tel que ([11] p. 90)

$$(1 + \varepsilon)^{-1}(z_1 | z_2) - A_1 \leq (z_1 | z_2)_\varepsilon \leq (1 + \varepsilon)(z_1 | z_2) + A_1. \quad (*)$$

Considérons  $\xi_1, \xi_2 \in \partial_\varepsilon\mathbb{H}^2$  et  $r_1(t), r_2(t)$  les rayons géodésiques issus de  $i$  et pointés respectivement en  $\xi_1, \xi_2$ . En appliquant l'inégalité (\*) à  $r_1(t)$  et  $r_2(t)$  et en utilisant le fait que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (r_1(t), r_2(t))_\varepsilon = (\xi_1 | \xi_2)_\varepsilon$  on conclut qu'il existe  $B > 1$  tel que

$$\frac{1}{B} [D(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2))]^{b(1+\varepsilon)} \leq D_\varepsilon(\xi_1, \xi_2) \leq B [D(\varphi(\xi_1), \varphi(\xi_2))]^{b/1+\varepsilon} \quad (**)$$

Cette inégalité précise le théorème 6.1.1. On déduit du théorème 6.1.1 le

**Corollaire 6.1.2.** —

1. Une transformation de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  fixe le même nombre de points sur  $\partial_\varepsilon\mathbb{H}^2$  que sur  $\partial\mathbb{H}^2$ .
2. L'ensemble limite de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  agissant sur  $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$  est  $\partial_\varepsilon\mathbb{H}^2$ .

Notons  $\xi_{-1}$  le point fixe de  $\tau_{-1}$  agissant sur  $\partial_\varepsilon\mathbb{H}^2$  et  $\Lambda$  l'ensemble  $\partial_\varepsilon\mathbb{H}^2$  privé de l'orbite sous  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  de  $\xi_{-1}$ . En utilisant le théorème 6.1.1 et le codage des points de  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  en fractions continues développé dans le paragraphe 1, on obtient la

**Proposition 6.1.3 (codage des points de  $\Lambda$ ).** — Soit  $\xi \in \Lambda$ , il existe une unique suite  $\omega(\xi)$  de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$

$$\omega(\xi) = \tau_r^{sn_1}, \tau_{-r}^{sn_2}, \tau_r^{sn_3}, \dots \text{ où } n_i \in \mathbb{N}^* \text{ et } r, s \in \{\pm 1\}$$

telle que

$$\xi = \lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_r^{sn_1} \cdots \tau_{(-1)^{k+1}r}^{sn_k}(\xi_{-1}).$$

*Notation.* — On note  $\Lambda^+$  l'ensemble des  $\xi \in \Lambda$  tels que le premier terme de  $\omega(\xi)$  soit de la forme  $\tau_{-1}^n$  ou  $\tau_1^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . (Remarquons que  $\varphi(\Lambda^+) = \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}^+$ ).

On rappelle (proposition 1.2.1) que toute transformation hyperbolique de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  est conjuguée à une transformation de la forme  $\tau_r^{n_1} \tau_{-r}^{n_2} \cdots \tau_{-r}^{n_k}$  avec  $r \in \{\pm 1\}$ ,  $k \in 2\mathbb{N}^*$ , et  $n_i \in \mathbb{N}^*$ . Considérons à présent une géodésique primitive fermée  $\bar{\alpha}$  sur  $(M, \bar{g}_\varepsilon)$  de longueur  $\ell_\varepsilon(\bar{\alpha})$ , il existe donc  $\gamma = \tau_r^{n_1} \tau_{-r}^{n_2} \cdots \tau_{-r}^{n_k}$  dont l'axe se projette sur  $\bar{\alpha}$ . Notons  $\xi_\gamma$  le point fixe attractif de  $\gamma$  sur  $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$ , on a la relation :

$$\ell_\varepsilon(\bar{\alpha}) = B_{\xi_\gamma}^\varepsilon(i, \gamma(i)).$$

Soient  $\xi \in \Lambda^+$  et  $\omega_1$  le premier terme de la suite  $\omega(\xi)$  on définit  $T_\varepsilon : \Lambda^+ \rightarrow \Lambda^+$  et  $f_\varepsilon : \Lambda^+ \rightarrow \Lambda^+$  par :

$$T_\varepsilon(\xi) = \omega_1^{-1}\xi \text{ et } f_\varepsilon(\xi) = B_\xi^\varepsilon(i, \omega_1(i)).$$

Remarquons que  $T_\varepsilon^k \xi_\gamma = \xi_\gamma$  et  $S_k f_\varepsilon(\xi_\gamma) = f_\varepsilon(\xi_\gamma) + \cdots + f_\varepsilon(T^{k-1} \xi_\gamma) = \ell_\varepsilon(\bar{\alpha})$ . Fixons  $a > 0$  et notons  $\pi_\varepsilon(a)$  le nombre de géodésiques primitives fermées orientées de  $(M, \bar{g}_\varepsilon)$  de longueur au plus  $a$ , en reprenant les arguments développés dans le paragraphe 1, on obtient la relation :

$$\pi_\varepsilon(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} \# \{ \xi \in \Lambda^+ \mid T_\varepsilon^{2n} \xi = \xi, 2n \text{ plus petite période de } \xi, S_{2n} f_\varepsilon(\xi) \leq a \}.$$

*Remarque.* — Si  $\varepsilon = 0$ , autrement dit si la courbure est constante on obtient

$$\pi_0(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} \# \{ x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+ \mid T_0^{2n} x = x, 2n \text{ plus petite période de } x, S_{2n} f_0(x) \leq a \}.$$

Cette expression de  $\pi_0(a)$  diffère de celle donnée à la fin du paragraphe 1, toutefois en prenant l'image de l'intervalle  $[1, +\infty[$  par la transformation  $1/x$ , en remplaçant  $T_0$  par l'application de Gauss  $T$  et  $f_0(x)$  par  $f(x) = \log x$  (qui est cohomologue à  $B_x(i, \tau_{-1}^n i)$  si  $x = [n_1, n_2, \dots]$ ), on retrouve l'expression initiale de  $\pi_0(a)$ .

## 6.2 Transformation dilatante et mesure $T_\varepsilon$ -invariante sur $\Lambda^+$

En revenant à la définition de  $D_\varepsilon$  et en utilisant les propriétés de  $B_\xi^\varepsilon(z_1, z_2)$  on obtient pour tout  $\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  et tous  $\xi_1, \xi_2 \in \partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$  :

$$D_\varepsilon(\gamma(\xi_1), \gamma(\xi_2)) = e^{\frac{1}{2}(B_{\xi_1}^\varepsilon(i, \gamma^{-1}(i)) + B_{\xi_2}^\varepsilon(i, \gamma^{-1}(i)))} D_\varepsilon(\xi_1, \xi_2). \quad (*)$$



Remarquons que si  $\gamma$  est parabolique et si  $\xi_\gamma$  est son point fixe  $B_{\xi_1}^\varepsilon(i, \gamma^{-1}(i)) = 0$ . En effet,  $B_{\xi_1}^\varepsilon(i, \gamma^{-1}(i)) = \frac{1}{n} B_{\xi_1}^\varepsilon(i, \gamma^{-n}(i)) \leq \frac{1}{n} d_\varepsilon(i, \gamma^{-n}(i)) \leq \frac{1}{n}(1 + \varepsilon)d(i, \gamma^{-n}(i))$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} d_\varepsilon(i, \gamma^{-n}(i)) = 0$ . On obtient en particulier

$$D_\varepsilon(\gamma(\xi), \xi_\gamma) = D_\varepsilon(\xi_1, \xi_2) e^{\frac{1}{2} B_{\xi_1}^\varepsilon(i, \gamma^{-1}(i))}.$$

On rappelle que  $f_\varepsilon(\xi) = B_\xi^\varepsilon(i, \tau_s^n(i))$  où  $\tau_s^n$  est le premier terme du développement de  $\xi$ .

**Proposition 6.2.1.** — *Il existe  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha > 0$  tels que pour tout  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  et  $\xi \in \Lambda^+$  :*

$$S_N f_\varepsilon(\xi) > \alpha.$$

En utilisant la relation (\*) on déduit le

**Corollaire 6.2.2.** — *Pour tout  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , il existe  $\beta > 1$  tel que pour tout  $\xi \in \Lambda^+$  dont le développement commence par  $\tau_r^{n_1}, \tau_{-r}^{n_2}, \dots, \tau_{-r}^{n_N}$  on ait :*

$$e^{B_\xi^\varepsilon(i, \tau_s^{n_1} i) + B_{T(\xi)}^\varepsilon(i, \tau_{-s}^{n_2} i) + \dots + B_{T^{N-1}(\xi)}^\varepsilon(i, \tau_{-s}^{n_N} i)} > \beta.$$

En particulier si  $\xi_1, \xi_2 \in \Lambda^+$  et si  $\omega(\xi_1), \omega(\xi_2)$  commencent par les mêmes  $N$  premiers termes alors

$$D_\varepsilon(T_\varepsilon^N \xi_1, T_\varepsilon^N \xi_2) > \beta^b D_\varepsilon(\xi_1, \xi_2).$$

Avant de démontrer la proposition, commençons par démontrer les deux lemmes suivants.

**Lemme 6.2.3.** — *Il existe  $A > 0$  tel que pour tous  $\xi \in \partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$  et  $z \in \mathbb{H}^2$  :*

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)^{-1} (B_{\varphi(\xi)}(i, z) - (\varepsilon^2 + 2\varepsilon) d(i, z)) - A &\leq B_\xi^\varepsilon(i, z) \\ &\leq (1 + \varepsilon) (B_{\varphi(\xi)}(i, z) + (1 - (1 + \varepsilon)^{-2}) d(i, z)) + A. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Soient  $\xi \in \Lambda$  et  $r_\varepsilon(t)$  le rayon géodésique issu de  $i$  dans  $(\mathbb{H}^2, d)$  et pointé en  $\xi$  ; pour tout  $z \in \mathbb{H}^2$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (z | r_\varepsilon(t))_\varepsilon = \frac{1}{2} (d_\varepsilon(z, i) + B_\xi^\varepsilon(i, z))$$

De même si  $r(t)$  représente la rayon géodésique issu de  $i$  dans  $(\mathbb{H}^2, d)$  et pointé en  $\varphi(\xi)$  :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (z | r(t)) = \frac{1}{2} (d(z, i) + B_{\varphi(\xi)}(i, z))$$

Appliquons l'inégalité (\*) du paragraphe 6.1 aux points  $r_\varepsilon(t)$  et  $z$  :

$$(1 + \varepsilon)^{-1} (z | r_\varepsilon(t)) - A_1 \leq (z | r_\varepsilon(t))_\varepsilon \leq (1 + \varepsilon) (z | r_\varepsilon(t)) + A_1. \quad (6.1)$$

Pour faire tendre  $t$  vers  $+\infty$ , nous avons à estimer  $(z \mid r_\varepsilon(t))$ . Le demi-plan de Poincaré étant log 3-hyperbolique, on a ([11] p. 28) :

$$(z \mid r_\varepsilon(t)) \geq \min \{ (z \mid r(t)), (r(t) \mid r_\varepsilon(t)) \} - \log 3. \quad (6.2)$$

Par ailleurs, le triangle géodésique de sommets  $r_\varepsilon(t)$ ,  $r(t)$ ,  $i$  est 4 log 3-fin ([11] p. 41), et donc ([11] p. 38) :

$$d(i, [r_\varepsilon(t), r(t)]) \leq (r_\varepsilon(t) \mid r(t)) + 4 \log 3. \quad (6.3)$$

Les points  $r_\varepsilon(t)$  et  $r(t)$  convergent vers  $\varphi(\xi)$ , ce qui entraîne que la distance du point  $i$  au segment géodésique  $[r_\varepsilon(t), r(t)]$  converge vers  $+\infty$ . On déduit alors des inégalités 6.2 et 6.3 que pour  $t$  grand

$$(z \mid r_\varepsilon(t)) \geq (z \mid r(t)) - \log 3.$$

L'inégalité suivante (pour  $t$  grand) découle alors de 6.1 :

$$(1 + \varepsilon)^{-1}(z \mid r(t)) - (1 + \varepsilon)^{-1} \log 3 - A_1 \leq (z \mid r_\varepsilon(t))_\varepsilon.$$

En faisant tendre  $t$  vers  $+\infty$  et en utilisant l'hypothèse de quasi-isométrie  $d_\varepsilon(i, z) \leq (1 + \varepsilon) d(i, z)$ , on obtient l'existence d'une constante  $B \in \mathbb{R}$  telle que pour tous  $z \in \mathbb{H}^2$  et  $\xi \in \Lambda^+$  :

$$(1 + \varepsilon)^{-1} B_{\varphi(\xi)}(i, z) + d(i, z)[(1 + \varepsilon)^{-1} - (1 + \varepsilon)] + B \leq B_\xi^\varepsilon(i, z).$$

La majoration est obtenue en intervertissant les rôles de  $d_\varepsilon$  et  $d$ .

**Lemme 6.2.4.** — *Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $\eta > 0$  tels que pour tous  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  et  $x \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}^+$  dont le développement en fractions continues est  $\tau_s^{n_1}, \tau_{-s}^{n_2}, \dots, \tau_{(-1)^{k+1}s}^{n_k}, \dots$  l'inégalité suivante soit satisfaite :*

$$B_x(i, \tau_s^{n_1}(i)) - (2\varepsilon + \varepsilon^2) d(i, \tau_s^{n_1}(i)) > \eta.$$

*Démonstration.* — Soit  $x \notin \mathbb{Q}$  et  $0 < x < 1$ , son développement en fractions continues est de la forme  $\tau_{-1}^{n_1} \tau_1^{n_2} \tau_{-1}^{n_3} \dots$ . On pose  $x_1 = \tau_{-1}^{-n_1} x$ . Un calcul élémentaire montre que

$$\begin{aligned} B_x(i, \tau_{-1}^{n_1} i) &= \log \frac{x_1^2 + (n_1 x_1 + 1)^2}{1 + x_1^2} \\ d(i, \tau_{-1}^{n_1} i) &= \log \frac{1}{2} \left( 2 + n_1^2 + n_1 \sqrt{n_1^2 + 4} \right) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} B_x(i, \tau_{-1} i) \geq \log 2 & \text{si } n_1 = 1 \\ B_x(i, \tau_{-1}^{n_1} i) \geq \log \frac{1 + (n_1 + 1)^2}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons  $\varepsilon_1 = 2\varepsilon + \varepsilon^2$ , on a

$$\begin{cases} B_x(i, \tau_{-1}i) - \varepsilon_1 d(i, \tau_{-1}i) \geq \log \frac{2^{1+\varepsilon_1}}{(3+\sqrt{5})^{\varepsilon_1}} & \text{si } n_1 = 1 \\ B_x(i, \tau_{-1}^{n_1}i) - \varepsilon_1 d(i, \tau_{-1}^{n_1}i) \geq \log \frac{5^{1-\varepsilon_1}}{2} & \text{si } n_1 \geq 2 \end{cases}$$

En prenant  $\varepsilon$  suffisamment petit on obtient le lemme.

Il reste le cas où  $x > 1$ ; notons  $\tau_1^{-n_1}, \tau_{-1}^{-n_2} \dots$  son développement en fractions continues. Soit  $s(z) = -\frac{1}{z}$ , on rappelle que  $s\tau_1^{-n_1}s = \tau_{-1}^{n_1}$ , ainsi  $d(i, \tau_1^{n_1}i) = d(i, \tau_{-1}^{n_1}i)$  et  $B_x(i, \tau_{-1}^{-n_1}i) = B_{1/x}(i, \tau_{-1}^{n_1}i)$  ce qui nous ramène au cas précédent.

*Démonstration de la proposition 6.2.1.* — Soient  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\xi \in \Lambda^+$ . On pose  $\omega(\xi) = \tau_s^{n_1} \tau_{-s}^{n_2} \dots$ . Par définition  $S_k f_\varepsilon(\xi) = B_\xi^\varepsilon(i, \tau_s^{n_1} \tau_{-s}^{n_2} \dots \tau_{(-1)^{k+1}s}^{n_k}(i))$ , ainsi d'après le lemme 6.2.3,

$$S_k f_\varepsilon(\xi) \geq (1 + \varepsilon)^{-1} \left( S_k f_0(\varphi(\xi)) - (\varepsilon^2 + 2\varepsilon) d(i, \tau_s^{n_1} \dots \tau_{(-1)^{k+1}s}^{n_k}(i)) \right) - A.$$

Notons  $x = \varphi(\xi)$ ; on a

$$S_k f_0(x) = f_0(x) + f_0(Tx) + \dots + f_0(T^{k-1}x)$$

et

$$d(i, \tau_s^{n_1} \dots \tau_{(-1)^{k+1}s}^{n_k}(i)) \leq \sum_{p=1}^k d(i, \tau_{(-1)^{p+1}s}^{n_p}(i))$$

ainsi

$$S_k f_\varepsilon(\xi) \geq (1 + \varepsilon)^{-1} \left( \sum_{p=1}^k f_0(T^{p-1}x) - (\varepsilon^2 + 2\varepsilon) d(i, \tau_{(-1)^{p+1}s}^{n_p}(i)) \right) - A.$$

Comme  $f_0(T^p x) = B_{T^p x}(i, \tau_{(-1)^{p+1}s}^{n_p}(i))$  on obtient grâce au lemme 6.2.4 l'inégalité  $S_k f_\varepsilon(\xi) \geq (1 + \varepsilon)^{-1} \times k\eta - A$ . Il suffit alors de choisir  $k$  assez grand, de sorte que  $(1 + \varepsilon)^{-1} \times k\eta - A > 0$ .

Notons  $\sigma_\varepsilon(d\xi)$  une mesure de Patterson sur  $\Lambda$  et  $\delta_\varepsilon$  l'exposant critique de la série de Poincaré  $\sum_{\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})} e^{-s d_\varepsilon(i, \gamma(i))}$ . Puisque la courbure de  $M$  est égale à  $-1$  en dehors d'un compact (hypothèse 2), on a  $\sigma_\varepsilon(\Lambda) > 0$ . En courbure constante ( $\varepsilon = 0$ ), la mesure  $\sigma_0$  correspond à la mesure de Lebesgue et  $\delta_0 = 1$ . La construction de la mesure  $\sigma_\varepsilon$  est due, en courbure variable, à V. Kaimanovitch; nous le remercions ici pour les discussions que nous avons eues avec lui sur ce sujet. Pour tout borélien  $A$  de  $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$  et tout  $\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , la relation suivante est vérifiée :

$$\sigma_\varepsilon(\gamma(A)) = \int_A e^{\delta_\varepsilon b B_\xi^\varepsilon(i, \gamma^{-1}i)} \sigma_\varepsilon(d\xi).$$

À l'aide de  $\sigma_\varepsilon$ , on construit la mesure  $\mu_\varepsilon(d\xi_- d\xi)$  sur  $\Lambda \times \Lambda$  définie par

$$\mu_\varepsilon(d\xi_- d\xi) = \frac{\sigma_\varepsilon(d\xi_-)\sigma_\varepsilon(d\xi)}{D_\varepsilon(\xi, \xi_-)^{2\frac{\delta_\varepsilon}{b}}}.$$

Il découle de l'égalité (\*) introduite au début du paragraphe 6.2 que  $\mu_\varepsilon$  est invariante sous l'action de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ .

Soit  $s \in \{\pm 1\}$ , introduisons les ensembles  $\Lambda_s^+ = \{\xi \in \Lambda^+ \mid \omega(\xi) = \tau_s^{n_1} \tau_s^{n_2} \dots\}$  et  $\Lambda_s^- = \{\xi \in \Lambda - \Lambda^+ \mid \omega(\xi) = \tau_s^{-n_1} \tau_s^{-n_2} \dots\}$ . L'ensemble  $\varphi(\Lambda_s^+)$  (resp.  $\varphi(\Lambda_s^-)$ ) représente les réels positifs (resp. négatifs) dont le développement en fractions continues commence par  $\tau_s^n$  (resp.  $\tau_s^{-n}$ ). On note  $\bar{\Lambda} = \bigcup_{s=\pm 1} \Lambda_s^- \times \Lambda_s^+$ ; l'image par  $\varphi \times \varphi$  de  $\bar{\Lambda}$  est relativement compacte dans  $\varphi(\Lambda) \times \varphi(\Lambda)$  privé de la diagonale, il existe donc  $c > 0$  tel que pour tout  $(\xi_-, \xi) \in \bar{\Lambda}$ ,

$$D_\varepsilon(\xi_-, \xi) \geq c > 0.$$

Ceci montre que la mesure  $\mu_\varepsilon$  en restriction à  $\bar{\Lambda}$  est finie. Considérons l'application  $\bar{T}_\varepsilon$  sur  $\bar{\Lambda}$  définie par  $\bar{T}_\varepsilon(\xi_-, \xi) = (\omega_1^{-1} \xi_-, T_\varepsilon \xi)$  où  $\omega_1$  désigne le premier terme de  $\omega(\xi)$ , l'invariance de  $\mu_\varepsilon$  par  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  entraîne  $\bar{T}_\varepsilon \mu_\varepsilon = \mu_\varepsilon$ . Soient  $c_1^{-1} = \mu_\varepsilon(\bar{\Lambda})$  et  $\bar{\Lambda} \xrightarrow{p} \Lambda$  la projection de  $(\xi_-, \xi)$  sur  $\xi$ , la mesure  $\nu_\varepsilon$  définie sur  $\Lambda$  par  $\nu_\varepsilon = c_1 p(\mu_\varepsilon)$  est une mesure de probabilité  $T_\varepsilon$ -invariante. De façon plus explicite,  $\nu_\varepsilon(d\xi)$  est définie par :

$$\nu_\varepsilon(d\xi) = h_\varepsilon(\xi) \sigma_\varepsilon(d\xi) \text{ où } h_\varepsilon(\xi) = \int_{\Lambda_s^-} \frac{\sigma_\varepsilon(d\xi_-)}{D_\varepsilon(\xi, \xi_-)^{2\frac{\delta_\varepsilon}{b}}} \text{ si } \xi \in \Lambda_s^+.$$

### 6.3 Comportement asymptotique de $\pi_\varepsilon(a)$

Nous détaillons ici les modifications à apporter au paragraphe 3 pour obtenir le théorème A lorsque  $\varepsilon$  est non nul. Pour tout point  $\xi \in \Lambda^+$  et tout borélien  $A \subset \Lambda^+$ , posons

$$N_{(\xi, a)}^\varepsilon(\mathbf{1}_A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} \sum_{\{\eta \mid T_\varepsilon^{2n} \eta = \xi\}} \mathbf{1}_A(\eta) \mathbf{1}_{[0, a]}(S_{2n} f_\varepsilon(\eta)).$$

Soit  $P_\varepsilon$  l'opérateur adjoint de  $T_\varepsilon$  relativement à la mesure  $\nu_\varepsilon$ ; pour toute fonction borélienne bornée  $\varphi$  de  $\Lambda^+$  dans  $\mathbb{C}$ , on a

$$\forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad P_\varepsilon \varphi(\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)}{h_\varepsilon(\xi)} e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)} \varphi(\tau_{-r}^n \xi).$$

Notons  $\tilde{P}_\varepsilon$  l'adjoint par rapport à la mesure  $\nu_\varepsilon \otimes m$  de la transformation  $\tilde{T}_\varepsilon$  définie par  $\tilde{T}_\varepsilon(\xi, s) = (T_\varepsilon(\xi), s + f_\varepsilon(\xi))$ ; pour toute fonction borélienne  $\Psi$  de  $\Lambda^+ \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  on a

$$\forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad \tilde{P}_\varepsilon \Psi(\xi, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)}{h_\varepsilon(\xi)} e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)} \Psi(\tau_{-r}^n \xi, t - f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)).$$

En posant  $\chi_a(t) = e^{-\delta_\varepsilon t} \mathbf{1}_{[-a,0]}(t)$  on obtient

$$N_{(\xi,a)}^\varepsilon(\mathbf{1}_A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} h_\varepsilon(\xi) \tilde{P}_\varepsilon^{2n} \left( \frac{\mathbf{1}_A}{h_\varepsilon} \otimes \xi_a \right) (\xi, 0).$$

Dans le paragraphe 6.4 nous montrons qu'il existe  $\varepsilon_0$ , tel que pour  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  le couple  $(P_\varepsilon, f_\varepsilon)$  vérifie les hypothèses  $H_0, H_1, H_2, H_3$  et  $H_4$  du théorème du renouvellement harmonique (théorème 5.0.2). Admettons cette propriété; on obtient alors le

**Théorème 6.3.1 (Théorème B).** — *Soit  $A$  un borélien de  $\Lambda^+$  tel que  $\nu_\varepsilon(A) > 0$  et dont la frontière est  $\nu_\varepsilon$ -négligeable. Lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ , le nombre  $N_{(\xi,a)}^\varepsilon(\mathbf{1}_A)$  est équivalent à  $h_\varepsilon(\xi) \sigma_\varepsilon(A) \frac{e^{\delta_\varepsilon a}}{\delta_\varepsilon a}$  uniformément par rapport à  $\xi \in \Lambda^+$ .*

Pour obtenir le comportement asymptotique de  $\pi_\varepsilon(a)$  nous suivons le paragraphe 3.1. Nous relient donc  $\pi_\varepsilon(a)$  aux quantités  $N_{(\xi,a)}^\varepsilon(\mathbf{1}_A)$ . Fixons un entier pair  $k > 0$  et une numérotation  $((n_1^{(j)}, \dots, n_k^{(j)}))_{j \geq 1}$  de tous les  $k$ -uplets différents d'entiers strictement positifs. Soient  $r = \pm 1$  et  $j \geq 1$ , on note  $\Lambda_{rj}^+$  l'ensemble des points  $\xi$  de  $\partial_\varepsilon \mathbb{H}^2$  dont le développement  $\omega(\xi)$  commence par  $\tau_r^{n_1^{(j)}}, \tau_{-r}^{n_2^{(j)}}, \dots, \tau_{-r}^{n_k^{(j)}}$ . Soit  $\xi_{rj}$  un point fixé dans  $\Lambda_{rj}$ ; à tout  $\xi \in \Lambda_{sj}$  tel que  $T_\varepsilon^{2n} \xi = \xi$  on associe le point  $\xi' \in \Lambda_{rj}$  défini par  $T_\varepsilon^{2n} \xi' = \xi_{rj}$ . Il nous reste à présent à contrôler les variations de  $f_\varepsilon$  (analogue du lemme 3.1.1) et sa taille (analogue du lemme 3.1.2). Le lemme suivant est essentiel pour cette étude.

**Lemme 6.3.2.** — *Il existe  $C > 0$  et, pour tout  $n \geq 1$ , il existe  $K_n > 0$  tels que*

1. *Pour tout  $\xi \in \Lambda_{-r}^+$ ,*

$$\frac{1}{C} K_n \leq e^{bf_\varepsilon(\tau_r^n \xi)} \leq C K_n.$$

2. *Pour tous  $\xi, \eta \in \Lambda_{-r}^+$ ,*

$$\left| e^{bf_\varepsilon(\tau_r^n \xi)} - e^{bf_\varepsilon(\tau_r^n \eta)} \right| \leq C K_n D_\varepsilon(\xi, \eta).$$

De plus,  $\frac{1}{K} n^{\frac{2b}{1+\varepsilon}} \leq K_n \leq K n^{2b(1+\varepsilon)}$ .

*Démonstration.* — On suppose  $r = 1$  et on note  $\xi_1$  le point fixe de  $\tau_1$ .

1. — Soit  $\xi \in \Lambda_{-1}^+$ , on rappelle que  $f_\varepsilon(\tau_1^n \xi) = B_\xi^\varepsilon(i, \tau_1^n i)$ . En utilisant la relation (\*) du paragraphe 6.2 et le fait que  $B_{\xi_1}^\varepsilon(i, \tau_1^{-1}(i)) = 0$  on obtient

$$e^{bf_\varepsilon(\tau_1^n \xi)} = \frac{D_\varepsilon^2(\xi, \xi_1)}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \xi, \xi_1)}.$$

Les espaces  $(\partial\mathbb{H}^2, D)$  et  $(\partial_\varepsilon\mathbb{H}^2, D_\varepsilon)$  étant en correspondance bi-Hölder, il existe  $A > 1$  tel que  $D_\varepsilon(\eta, \xi) < A$  pour tous  $\xi, \eta \in \Lambda^+$  et de plus  $D_\varepsilon(\Lambda_{-1}^+, \xi_1) > \frac{1}{A}$ . Par conséquent

$$\frac{1}{A^2} \times \frac{1}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \xi, \xi_1)} \leq e^{bf_\varepsilon(\tau_1^n \xi)} \leq \frac{A^2}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \xi, \xi_1)}.$$

Pour tous  $\eta_1, \eta_2 \in \Lambda^+$  posons  $\Delta_1(\eta_1, \eta_2) = \frac{D_\varepsilon(\eta_1, \eta_2)}{D_\varepsilon(\eta_1, \xi_1)D_\varepsilon(\eta_2, \xi_1)}$ . Remarquons que si  $\eta_1, \eta_2 \in \Lambda_{-1}^+$  alors  $\Delta_1(\eta_1, \eta_2) \leq A^3$ . On vérifie de plus que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\Delta_1(\tau_1^n \eta_1, \tau_1^n \eta_2) = \Delta_1(\eta_1, \eta_2)$ . Fixons un point  $\xi_0 \in \Lambda_{-1}^+$ , on déduit de la propriété précédente que  $\Delta_1(\xi, \xi_0) < A^3$ .

Ainsi  $\left| \frac{1}{D_\varepsilon(\tau_1^n \xi, \xi_1)} - \frac{1}{D_\varepsilon(\tau_1^n \xi_0, \xi_1)} \right| \leq \Delta_1(\tau_1^n \xi, \tau_1^n \xi_0) = \Delta_1(\xi, \xi_0)$ . En utilisant le fait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_1^n \xi_0 = \xi_1$  on obtient l'existence d'une constante  $K > 0$  telle que pour  $n$  assez grand

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} D_\varepsilon(\tau_1^n \xi_0, \xi_1) &\leq \frac{D_\varepsilon(\tau_1^n \xi_0, \xi_1)}{1 + A^3 D_\varepsilon(\tau_1^n \xi_0, \xi_1)} \leq D_\varepsilon(\tau_1^n \xi, \xi_1) \\ &\leq \frac{D_\varepsilon(\tau_1^n \xi_0, \xi_1)}{1 - A^3 D_\varepsilon(\tau_1^n \xi_0, \xi_1)} \leq K D_\varepsilon(\tau_1^n \xi_0, \xi_1). \end{aligned}$$

L'assertion 1 découle directement de cette inégalité, la constante  $K_n$  est ici égale à  $\frac{1}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \xi_0, \xi_1)}$ . D'après l'inégalité (\*\*\*) du paragraphe 6.1 on a

$$\frac{1}{B^2 D(\varphi(\xi_0), \varphi(\xi_1))^{\frac{2b}{1+\varepsilon}}} \leq K_n \leq \frac{B^2}{D(\varphi(\tau_1^n \xi_0), \varphi(\xi_1))^{2b(1+\varepsilon)}}.$$

Un calcul explicite en courbure constante conduit à l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{K} n^{\frac{2b}{1+\varepsilon}} \leq K_n \leq K n^{2b(1+\varepsilon)}.$$

2. — Soient  $\xi, \eta \in \Lambda_{-1}^+$ . Posons  $\lambda(\xi, \eta) = |e^{bf_\varepsilon(\tau_1^n \xi)} - e^{bf_\varepsilon(\tau_1^n \eta)}|$ . On a

$$\begin{aligned} \lambda(\xi, \eta) &= \left| \frac{D_\varepsilon^2(\xi, \xi_1)}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \xi, \xi_1)} - \frac{D_\varepsilon^2(\eta, \xi_1)}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \eta, \xi_1)} \right| \text{ d'où} \\ \lambda(\xi, \eta) &\leq D_\varepsilon^2(\xi, \xi_1) \left| \frac{1}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \xi, \xi_1)} - \frac{1}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \eta, \xi_1)} \right| + \frac{1}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \eta, \xi_1)} |D_\varepsilon^2(\xi, \xi_1) - D_\varepsilon^2(\eta, \xi_1)| \\ &\leq A^2 \left| \frac{1}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \xi, \xi_1)} - \frac{1}{D_\varepsilon^2(\tau_1^n \eta, \xi_1)} \right| + e^{bf_\varepsilon(\tau_1^n \eta)} A^2 |D_\varepsilon^2(\xi, \xi_1) - D_\varepsilon^2(\eta, \xi_1)|. \end{aligned}$$

L'assertion 2 se déduit alors de l'assertion 1 et de la relation :

$$D_\varepsilon(\xi, \eta) = e^{\frac{b}{2}(f_\varepsilon(\tau_1^n \eta) + f_\varepsilon(\tau_1^n \xi))} D_\varepsilon(\tau_1^n \eta, \tau_1^n \xi).$$

Le cas où  $r = -1$  se traite de la même façon.

On déduit de ce lemme l'analogue du lemme 3.1.1.

**Corollaire 6.3.3.** — Soit  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  (donné dans la proposition 6.2.1), il existe  $0 < \rho < 1, N_0 > 1$  et deux constantes  $B$  et  $C$  tels que pour tout  $p > N_0$  et tous  $\xi, \eta \in \Lambda^+$  dont les développements  $\omega(\xi), \omega(\eta)$  coïncident jusqu'au rang  $p$  on ait

$$|f_\varepsilon(\xi) - f_\varepsilon(\eta)| \leq BD_\varepsilon(T_\varepsilon\xi, T_\varepsilon\eta) \leq C\rho^p.$$

*Démonstration.* — Soient  $\xi, \eta \in \Lambda_r^+$  dont les développements commencent par  $\tau_r^n$  et coïncident jusqu'au rang  $p$ ; d'après le lemme 6.3.2, on a

$$\left| \frac{e^{bf_\varepsilon(\xi)}}{e^{bf_\varepsilon(\eta)}} - 1 \right| \leq \frac{CK_n D_\varepsilon(T_\varepsilon\xi, T_\varepsilon\eta)}{\frac{K_n}{C}} \leq C^2 D_\varepsilon(T_\varepsilon\xi, T_\varepsilon\eta).$$

Par ailleurs d'après le corollaire 6.2.2, pour  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , il existe  $\beta > 1$  tel que pour tous  $\eta_1, \eta_2$ , dont les développements ont les mêmes  $N$  premiers termes on ait

$$D_\varepsilon(T_\varepsilon^N \xi, T_\varepsilon^N \eta) \geq \beta D_\varepsilon(\xi, \eta).$$

Les suites  $\omega(\xi)$  et  $\omega(\eta)$  coïncident jusqu'au rang  $p$ , donc

$$D_\varepsilon(T_\varepsilon\xi, T_\varepsilon\eta) \leq A \left( \frac{1}{\beta} \right)^\ell \text{ avec } \ell = \left\lfloor \frac{p-1}{N} \right\rfloor.$$

Le corollaire se déduit de cette inégalité et du fait que  $|\log(1+u)| < 2|u|$  au voisinage de 0.

Revenons à l'approximation des points périodiques. On suppose  $k \geq N_0$ . Soit  $\xi \in \Lambda^+$  tel que  $T_\varepsilon^{2n}\xi = \xi$ ; d'après le corollaire 6.3.3,  $|S_{2n}f_\varepsilon(\xi) - S_{2n}f_\varepsilon(\xi')| \leq \theta_k$  où  $\theta_k = A \sum_{p=k}^{+\infty} \frac{1}{\beta^p}$ . Notons  $N^\varepsilon(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} \# \{ \xi \in \Lambda^+ \mid T_\varepsilon^{2n}\xi = \xi \text{ et } S_{2n}f_\varepsilon(\xi) \leq a \}$ . On a l'encadrement suivant :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{r=\pm 1} N_{(\xi_{rj}, a-\theta_k)}^\varepsilon (\mathbf{1}_{\Lambda_{rj}}) \leq N^\varepsilon(a) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{r=\pm 1} N_{(\xi_{rj}, a+\theta_k)}^\varepsilon (\mathbf{1}_{\Lambda_{rj}}).$$

Il nous reste pour obtenir l'asymptotique de  $\pi_\varepsilon(a)$  à démontrer un analogue du lemme 3.1.2. En reprenant la démonstration de ce lemme, on constate que le seul point à vérifier est l'existence pour tous  $r = \pm 1$  et  $j \geq 1$  d'une constante  $\alpha_{rj}$  vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $\forall \xi \in \Lambda_{rj}^+ \quad S_k f_\varepsilon(\xi) \geq \alpha_{rj}$ .
2.  $\sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{r=\pm 1} \alpha_{rj} e^{-\alpha_{rj}} < +\infty$ .

L'existence des constantes  $\alpha_{rj}$  découle du

**Lemme 6.3.4.** — Il existe  $D > 0$  tel que pour tout  $\xi \in \Lambda_{r,}^+$ , on ait :

$$\frac{2}{1+\varepsilon} \log n - D \leq f_\varepsilon(\tau_r^n \xi) \leq 2(1+\varepsilon) \log n + D.$$

*Démonstration.* — Ce lemme est une conséquence directe du lemme 6.3.2 (1) et de l'encadrement de  $K_n$ .

D'après le lemme 6.3.4, on a  $S_k f_\varepsilon(\xi) \geq \frac{2}{1+\varepsilon} \log(n_1^{(j)} \dots n_k^{(j)}) - kD$  si  $\xi \in \Lambda_{rj}^+$ . En choisissant  $\varepsilon < 1$ , la constante  $\alpha_{rj} = \frac{2}{1+\varepsilon} \log(n_1^{(j)} \dots n_k^{(j)}) - kD$  vérifie les hypothèses (1) et (2).

#### 6.4 Le couple $(P_\varepsilon, f_\varepsilon)$ vérifie les hypothèses $H_0, H_1, H_2, H_3, H_4$

Dans le paragraphe précédent, nous avons expliqué comment le théorème A se déduit du théorème B. Pour établir ce dernier théorème, il suffit de prouver que le couple  $(P_\varepsilon, f_\varepsilon)$  vérifie les hypothèses  $H_0, H_1, H_2, H_3$ , et  $H_4$  du théorème du renouvellement harmonique (Théorème 5.0.2).

L'opérateur  $P_\varepsilon$  est l'adjoint de  $T_\varepsilon$  relativement à la mesure de probabilité  $h_\varepsilon(\xi)\sigma_\varepsilon(d\xi)$  sur  $\Lambda^+$ ; ainsi, pour toute fonction borélienne bornée  $\varphi$  de  $\Lambda^+$  dans  $\mathbb{C}$  on a

$$\forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad P_\varepsilon \varphi(\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)}{h_\varepsilon(\xi)} e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)} \varphi(\tau_{-r}^n \xi).$$

Remarquons que  $P_\varepsilon$  s'étend aux fonctions boréliennes bornées de  $\overline{\Lambda^+}$  dans  $\mathbb{C}$  et que  $\overline{\Lambda^+}$  est compact. On rappelle (paragraphe 6.2) que si  $\xi \in \Lambda_r^+$ , alors  $h_\varepsilon(\xi) = \int_{\Lambda_{-r}^-} \frac{\sigma_\varepsilon(d\xi_-)}{D_\varepsilon(\xi, \xi_-)^{2\frac{\delta_\varepsilon}{b}}}$ . De par son expression, lorsque  $\frac{\delta_\varepsilon}{b} < 1$  (resp.  $\frac{\delta_\varepsilon}{b} \geq 1$ ), la fonction  $h_\varepsilon$  est  $\frac{\delta_\varepsilon}{b}$ -höldérienne (resp. lipschitzienne) sur chaque ensemble  $(\Lambda_r^+, D_\varepsilon)$ .

Posons  $\alpha = \frac{\delta_\varepsilon}{b}$ ; pour fixer les idées, nous supposons  $\alpha = \frac{\delta_\varepsilon}{b} < 1$ , l'autre cas se traitant de façon analogue.

Introduisons l'espace  $L_\alpha(\Lambda^+)$  des fonctions  $\varphi$  de  $\Lambda^+$  dans  $\mathbb{C}$  telles que  $\|\varphi\| = |\varphi|_\infty + m(\varphi) < +\infty$  avec  $m(\varphi) = \sup_{s=+1} \sup_{\substack{\xi, \eta \in \Lambda_s^+ \\ \xi \neq \eta}} \frac{|\varphi(\xi) - \varphi(\eta)|}{D_\varepsilon(\xi, \eta)^\alpha}$ . La fonction  $h_\varepsilon$  étant  $\alpha$ -höldérienne et bornée, on a  $h_\varepsilon \in L_\alpha(\Lambda^+)$ . Nous allons montrer que  $P_\varepsilon$  opère sur  $L_\alpha(\Lambda^+)$  et contrôler son spectre sur cet espace; pour ce faire, nous décrivons d'abord la régularité sur  $\Lambda^+$  des fonctions  $p_n, n \geq 1$  définies par

$$\forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad p_n(\xi) = \frac{h_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)}{h_\varepsilon(\xi)} e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)}.$$

Pour tout  $\varphi \in L_\alpha(\Lambda^+)$ , notons  $\varphi_n$  la fonction définie par  $\forall \xi \in \Lambda_r^+, \varphi_n(\xi) = \varphi(\tau_{-r}^n \xi)$ . Nous avons :

**Lemme 6.4.1.** — *Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour tout  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , les fonctions  $p_n, n \geq 1$ , appartiennent à  $L_\alpha(\Lambda^+)$  et tel que la série  $\sum_{n \geq 1} \|p_n\|$  soit convergente. De plus, pour tout  $\varphi \in L_\alpha(\Lambda^+)$ , la famille  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  est bornée dans  $(L_\alpha(\Lambda^+), \|\cdot\|)$ .*

*Démonstration.* — Montrons tout d'abord que les fonctions  $p_n, n \geq 1$ , sont bornées sur  $\Lambda^+$  et que la série  $\sum_{n \geq 1} |p_n|_\infty$  est convergente. D'après le lemme 6.3.2, il existe



$C_1 > 0$  tel que

$$\forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} \leq \frac{C_1}{n^{2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}}$$

d'où, pour tout  $n \geq 1$ ,  $|p_n|_\infty \leq \frac{C_1}{n^{2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}} \left| \frac{1}{h} \right|_\infty |h|_\infty < +\infty$ .

La série de Poincaré  $\sum_{\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})} e^{-sd_\varepsilon(i, \gamma(i))}$  converge pour  $s > \delta_\varepsilon$ , on a  $\delta_0 = 1$  et  $d_\varepsilon(i, \gamma(i)) \leq (1+\varepsilon)d(i, \gamma(i))$ ; donc  $\delta_\varepsilon \geq \frac{1}{1+\varepsilon}$ . La série  $\sum_{n \geq 1} |p_n|_\infty$  converge si  $\frac{2\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon} > 1$  et en particulier si  $\frac{2}{(1+\varepsilon)^2} > 1$ .

Étudions maintenant la régularité des fonctions  $p_n$ ,  $n \geq 1$ ; pour tous  $\xi, \eta \in \Lambda_r^+$  on a

$$\left| e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} - e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \eta)} \right| = \frac{|e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} - e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \eta)}|}{e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \eta)}}.$$

Rappelons que  $\alpha = \frac{\delta_\varepsilon}{6} < 1$ ; ainsi, d'après le lemme 6.3.2, il existe  $C_2 > 0$  telle que

$$\left| e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} - e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \eta)} \right| \leq \frac{C_2 D_\varepsilon^\alpha(\xi, \eta)}{n^{2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}}. \quad (*)$$

Par ailleurs, pour tous  $\xi, \eta \in \Lambda_s^+$ , et tout  $n \geq 1$  on a

$$D_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi, \tau_{-r}^n \eta) = e^{-\frac{\delta_\varepsilon}{2}(f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi) + f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \eta))} D_\varepsilon(\xi, \eta)$$

si bien que, d'après le lemme 6.3.2 (i), il existe  $C_3 > 0$  telle que :

$$\forall \xi, \eta \in \Lambda_r^+, \forall n \geq 1 \quad D_\varepsilon^\alpha(\tau_{-r}^n \xi, \tau_{-r}^n \eta) \leq \frac{C_3}{n^{2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}} D_\varepsilon^\alpha(\xi, \eta). \quad (**)$$

Combinons maintenant ces deux inégalités pour contrôler le coefficient  $m(p_n)$ ; pour tous  $\xi, \eta \in \Lambda_r^+$ , on a

$$\begin{aligned} |p_n(\xi) - p_n(\eta)| &\leq \left| \frac{1}{h_\varepsilon(\xi)} - \frac{1}{h_\varepsilon(\eta)} \right| h_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi) e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} \\ &\quad + \frac{1}{h_\varepsilon(\eta)} |h_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi) - h_\varepsilon(\tau_{-r}^n \eta)| e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} \\ &\quad + \frac{h_\varepsilon(\tau_{-r}^n \eta)}{h_\varepsilon(\eta)} \left| e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} - e^{-\delta_\varepsilon f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \eta)} \right| \\ &\leq C_4 \left( \frac{m\left(\frac{1}{h_\varepsilon}\right) |h_\varepsilon|_\infty}{n^{2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}} + \frac{\left|\frac{1}{h_\varepsilon}\right|_\infty m(h_\varepsilon)}{n^{4\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}} + \frac{\left|\frac{1}{h_\varepsilon}\right|_\infty |h_\varepsilon|_\infty}{n^{2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}} \right) D_\varepsilon^\alpha(\xi, \eta), \end{aligned}$$

où  $C_4$  est une constante strictement positive. Il existe donc  $C > 0$  telle que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\|p_n\| \leq \frac{C}{n^{2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}}$ . La fonction  $p_n$  appartient donc à  $L_\alpha(\Lambda^+)$  et pour  $\varepsilon$  assez petit (plus précisément si  $2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon} > 1$ ) la série  $\sum_{n \geq 1} \|p_n\|$  est convergente.

Pour établir la deuxième assertion du lemme, il suffit de remarquer que grâce à l'inégalité (\*\*\*) ci-dessus, on a

$$m(\varphi_n) \leq \frac{C_3}{n^{2\frac{\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}} m(\varphi).$$

Ceci achève la démonstration du lemme 6.4.1.

**Corollaire 6.4.2 (Hypothèse  $H_0$ ).** — Pour  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , l'opérateur  $P_\varepsilon$  opère continûment sur  $L_\alpha(\Lambda^+)$  et  $P\mathbf{1}_{\Lambda^+} = \mathbf{1}_{\Lambda^+}$ .

*Démonstration.* — Soit  $\varphi \in L_\alpha(\Lambda^+)$ . On a  $\|P_\varepsilon\varphi\| \leq \sum_{n \geq 1} p_n \|\varphi_n\|$  si bien que d'après le lemme précédent, pour  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , il existe  $K > 0$  tel que

$$\|P_\varepsilon\varphi\| \leq K \|\varphi\|.$$

Pour montrer que  $P_\varepsilon\mathbf{1}_{\Lambda^+} = \mathbf{1}_{\Lambda^+}$ , il suffit de rappeler que  $P_\varepsilon$  est l'adjoint de  $T_\varepsilon$  par rapport à  $\nu_\varepsilon$  et que la mesure  $\nu_\varepsilon$  est une mesure de probabilité  $T_\varepsilon$ -invariante sur  $\Lambda^+$ . Ainsi  $P_\varepsilon\mathbf{1}_{\Lambda^+}(\xi) = \mathbf{1}_{\Lambda^+}(\xi)$  pour  $\nu_\varepsilon$ -presque tout  $\xi$ ; cette égalité est en fait vérifiée en tout point  $\xi$  de  $\Lambda^+$  puisque  $P_\varepsilon\mathbf{1}_{\Lambda^+}$  est continue sur  $\Lambda^+$  et que le support de  $\nu_\varepsilon$  est  $\Lambda^+$ .

Introduisons à présent les opérateurs transformée de Fourier  $P_{\lambda,\varepsilon}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , associés au couple  $(P_\varepsilon, f_\varepsilon)$  et définis par

$$\forall \varphi \in L_\alpha(\Lambda^+), \forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad P_{\lambda,\varepsilon}\varphi(\xi) = \sum_{n \geq 1} p_n(\xi) e^{i\lambda f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)} \varphi(\tau_{-r}^n \xi);$$

D'après le corollaire 6.3.3, on a :

$$\begin{aligned} \forall \xi, \eta \in \Lambda_r^+ \quad \left| e^{i\lambda f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)} - e^{i\lambda f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \eta)} \right| &\leq \left| e^{i\lambda(f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi) - f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \eta))} - 1 \right| \\ &\leq |\lambda| |f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi) - f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \eta)| \leq B |\lambda| D_\varepsilon(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant  $\varphi(\tau_{-r}^n \xi)$  par  $\varphi_{\lambda,n}(\xi) = e^{i\lambda f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)} \varphi(\tau_{-r}^n \xi)$  dans la preuve du lemme 6.4.1 on montre que la famille des  $(\varphi_{\lambda,n})_{n \geq 1}$  est bornée dans  $(L_\alpha(\Lambda^+), \|\cdot\|)$ . Comme dans le corollaire 6.4.2, on en déduit que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $P_{\lambda,\varepsilon}$  opère sur  $(L_\alpha(\Lambda^+), \|\cdot\|)$ .

Il nous reste à contrôler le spectre de  $P_{\lambda,\varepsilon}$  sur  $L_\alpha(\Lambda^+)$  (hypothèses  $H_1$  et  $H_2$ ). Nous allons utiliser le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu. Les hypothèses de ce théorème sont vérifiées grâce au lemme suivant (analogue du lemme 5.2.2).

**Lemme 6.4.3.** — Pour  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho \in ]0, 1[$  et deux constantes positives  $A$  et  $B$  tels que, pour tout  $\varphi \in L_\alpha(\Lambda^+)$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  on ait :

$$\|P_{\lambda,\varepsilon}\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \quad \text{et} \quad \|P_{\lambda,\varepsilon}^N \varphi\| \leq \rho \|\varphi\| + (A + B|\lambda|) \|\varphi\|_\infty.$$

*Démonstration.* — Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et toute fonction  $\varphi \in L_\alpha(\Lambda^+)$  on a

$$|P_{\lambda, \varepsilon} \varphi|_\infty \leq P_\varepsilon |\varphi|_\infty \leq |\varphi|_\infty$$

d'où la première inégalité.

Nous allons maintenant établir la deuxième inégalité en supposant  $\lambda = 0$ ; on se ramène à ce cas en remplaçant  $\varphi(\tau_{-r}^n \xi)$  par  $\varphi(\tau_{-r}^n \xi) e^{i\lambda f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)}$  dans ce qui suit.

D'après le corollaire 6.2.2 il existe  $\beta > 1$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tous  $\xi$  et  $\eta$  dont les développements  $\omega(\xi)$  et  $\omega(\eta)$  coïncident jusqu'au rang  $N$  on ait :

$$D_\varepsilon(T_\varepsilon^N \xi, T_\varepsilon^N \eta) \geq \beta D_\varepsilon(\xi, \eta). \quad (*)$$

Pour tous  $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}^*$  notons  $p_{k_1 \dots k_N}$  la fonction définie par

$$\forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad p_{k_1 \dots k_N}(\xi) = p_{k_1}(\xi) p_{k_2}(\tau_{-r}^{k_1} \xi) \cdots p_{k_N}(\tau_{(-1)N-r}^{k_{N-1}} \cdots \tau_{-r}^{k_1} \xi).$$

Soulignons que pour tout  $\xi \in \Lambda_r^+$ ,  $\sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} p_{k_1 \dots k_N}(\xi) = 1$  car  $P_\varepsilon^N \mathbf{1} = \mathbf{1}$ .

On a pour tout  $\xi \in \Lambda_r^+$ ,  $P_\varepsilon^N \varphi(\xi) = \sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} p_{k_1 \dots k_N}(\xi) \varphi(\tau_{(-1)N-r}^{k_N} \cdots \tau_{-r}^{k_1} \xi)$ . Ainsi, pour tous  $\xi, \eta \in \Lambda_r^+$ , on obtient :

$$\begin{aligned} |P_\varepsilon^N \varphi(\xi) - P_\varepsilon^N \varphi(\eta)| &\leq \sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} p_{k_1 \dots k_N}(\xi) \left| \varphi(\tau_{(-1)N-r}^{k_N} \cdots \tau_{-r}^{k_1} \xi) - \varphi(\tau_{(-1)N-r}^{k_N} \cdots \tau_{-r}^{k_1} \eta) \right| \\ &\quad + |\varphi|_\infty \sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} |p_{k_1 \dots k_N}(\xi) - p_{k_1 \dots k_N}(\eta)| \\ &\leq m(\varphi) \sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} p_{k_1 \dots k_N}(\xi) D_\varepsilon^\alpha(\tau_{(-1)N-r}^{k_N} \cdots \tau_{-r}^{k_1} \xi, \tau_{(-1)N-r}^{k_N} \cdots \tau_{-r}^{k_1} \eta) \\ &\quad + |\varphi|_\infty \sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} |p_{k_1 \dots k_N}(\xi) - p_{k_1 \dots k_N}(\eta)| \end{aligned}$$

À partir de l'inégalité (\*) on obtient

$$\sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} p_{k_1 \dots k_N}(\xi) D_\varepsilon^\alpha(\tau_{(-1)N-r}^{k_N} \cdots \tau_{-r}^{k_1} \xi, \tau_{(-1)N-r}^{k_N} \cdots \tau_{-r}^{k_1} \eta) \leq \frac{1}{\beta} D_\varepsilon^\alpha(\xi, \eta).$$

Par ailleurs  $D_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi, \tau_{-r}^n \eta) = e^{-\frac{\beta}{2}(f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi) + f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \eta))} D_\varepsilon(\xi, \eta)$ ; donc d'après le lemme 6.3.2, il existe  $C_1 > 0$  tel que pour tous  $\xi, \eta \in \Lambda_r^+$ , on ait  $D_\varepsilon^\alpha(\tau_{-r}^n \xi, \tau_{-r}^n \eta) \leq C_1 D_\varepsilon^\alpha(\xi, \eta)$ , d'où :

$$\sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} |p_{k_1 \dots k_N}(\xi) - p_{k_1 \dots k_N}(\eta)| \leq \sum_{\ell=1}^N \sum_{k_1 \dots k_N \geq 1} M_{k_1 \dots k_N}(\ell, \xi, \eta)$$

avec

$$\begin{aligned}
 M_{k_1 \dots k_N}(\ell, \xi, \eta) &= p_{k_1 \dots k_{\ell-1}}(\xi) \\
 &\quad \left| p_{k_\ell} \left( \tau_{(-1)^{\ell-1} r}^{k_{\ell-1}} \dots \tau_{-r}^{k_1} \xi \right) - p_{k_\ell} \left( \tau_{(-1)^{\ell-1} r}^{k_{\ell-1}} \dots \tau_{-r}^{k_1} \eta \right) \right| \\
 &\quad p_{k_{\ell+1} \dots k_N} \left( \tau_{(-1)^{\ell} r}^{k_\ell} \dots \tau_{-r}^{k_1} \eta \right) \\
 &\leq \sum_{\ell=1}^N \sum_{k_\ell \geq 1} m(p_{k_\ell}) C_1^{\ell-1} D_\varepsilon^\alpha(\xi, \eta)
 \end{aligned}$$

et  $\sum_{n \geq 1} m(p_n) < +\infty$  d'après le lemme 6.4.1. Finalement il existe une constante  $K > 0$  telle que  $m(P^N \varphi) \leq \frac{1}{\beta^\alpha} m(\varphi) + K \|\varphi\|_\infty$ , d'où  $\|P^N \varphi\| \leq \rho m(\varphi) + A \|\varphi\|_\infty$  avec  $\rho = \frac{1}{\beta^\alpha} \in ]0, 1[$  et  $A = K + 1$ .

D'après le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu, l'opérateur  $P_{\varepsilon, \lambda}$  sur  $L_\alpha(\Lambda^+)$  a au plus un nombre fini de valeurs propres de module 1 ; les sous-espaces propres associés sont de dimension finie et le reste du spectre est inclus dans un disque de rayon strictement inférieur à 1. Pour que les hypothèses  $H_1$  et  $H_2$  soient vérifiées par le couple  $(P_\varepsilon^2, f_\varepsilon + f_\varepsilon \circ T_\varepsilon)$  il nous reste à établir le :

**Lemme 6.4.4.** — Soient  $\varphi \in L(\Lambda^+)$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  tels que  $P_{\varepsilon, \lambda} \varphi = e^{i\theta} \varphi$ . Deux cas peuvent alors se présenter :

1.  $\lambda = 0$ ,  $e^{i\theta} = 1$  et  $\varphi$  est constante sur  $\Lambda^+$  ;
2.  $\lambda = 0$ ,  $e^{i\theta} = -1$  et  $\varphi = C \left( \mathbf{1}_{\Lambda_1^+} - \mathbf{1}_{\Lambda_{-1}^+} \right)$ .

*Démonstration.* — Considérons d'abord le cas où  $\lambda = 0$ . On a  $P_\varepsilon \mathbf{1}_{\Lambda_1^+} = \mathbf{1}_{\Lambda_{-1}^+}$ ,  $P_\varepsilon \mathbf{1}_{\Lambda_{-1}^+} = \mathbf{1}_{\Lambda_1^+}$  et  $P_\varepsilon^2$  opère sur chacun des espaces  $L(\Lambda_{+1}^+)$  et  $L(\Lambda_{-1}^+)$  ; il suffit donc de montrer que  $e^{i2\theta} = 1$  et que  $\varphi$  est constante sur  $\Lambda_1^+$  et  $\Lambda_{-1}^+$ .

Les égalités  $P_\varepsilon \varphi = e^{i\theta} \varphi$  et  $\nu_\varepsilon P_\varepsilon = \nu_\varepsilon$  entraînent  $P_\varepsilon |\varphi|(\xi) = |\varphi(\xi)|$ ,  $\nu_\varepsilon(d\xi)$ -presque sûrement ; les fonctions  $\varphi$  et  $P_\varepsilon \varphi$  étant continues sur  $L(\Lambda_{+1}^+)$  et  $L(\Lambda_{-1}^+)$ , et le support de  $\nu_\varepsilon$  étant  $\Lambda^+$ , cette égalité est satisfaite en tout point  $\xi \in \Lambda^+$ .

Étudions par exemple la restriction de  $\varphi$  à  $\Lambda_1^+$  ; il existe  $\xi_0$  et  $\xi_1$  dans  $\overline{\Lambda_1^+}$  tels que  $|\varphi(\xi_0)| = \inf_{\xi \in \Lambda_1^+} |\varphi(\xi)|$  et  $|\varphi(\xi_1)| = \sup_{\xi \in \Lambda_1^+} |\varphi(\xi)|$ . Par convexité on a

$$\forall n, m \geq 1 \quad |\varphi(\xi_0)| = |\varphi(\tau_1^n \tau_{-1}^m \xi_0)| \quad \text{et} \quad |\varphi(\xi_1)| = |\varphi(\tau_1^n \tau_1^m \xi_1)|.$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  on obtient  $|\varphi(\xi_0)| = |\varphi(\xi_1)|$  et  $\varphi$  est donc de module constant sur  $\Lambda_1^+$  ; l'égalité  $P_\varepsilon \varphi = e^{i2\theta} \varphi$  nous donne alors, par convexité

$$\forall \xi \in \Lambda_1^+, \forall n, m \geq 1 \quad \varphi(\tau_1^n \tau_{-1}^m \xi) = e^{2i\theta} \varphi(\xi).$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient  $\varphi(\xi) = e^{-2i\theta} \varphi(\text{Fix}(\tau_1))$  ; la fonction  $\varphi$  est donc constante sur  $\Lambda_1^+$  et  $e^{2i\theta} = 1$ .

Considérons à présent le cas où  $\lambda$  est quelconque. Les égalités  $P_\lambda \varphi = e^{i\theta} \varphi$  et  $\nu_\varepsilon P_\varepsilon = \nu_\varepsilon$  entraînent  $P_\varepsilon |\varphi| = |\varphi|$  et donc  $\varphi$  est de module constant sur  $\Lambda^+$ . Par convexité, on obtient

$$\forall \xi \in \Lambda_r^+, \forall n \geq 1 \quad e^{i\lambda f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} \varphi(\tau_{-r}^n \xi) = e^{i\theta} \varphi(\xi)$$

d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{i\lambda f_\varepsilon(\tau_{-r}^n, \xi)} = e^{i\theta} \frac{\varphi(\xi)}{\varphi(\text{Fix}(\tau_{-r}))}$ . En particulier, pour toute suite  $(n_k)_{k \geq 1}$  strictement croissante d'entiers on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{i\lambda(f_\varepsilon(\tau_{-r}^{n_k+1} \xi) - f_\varepsilon(\tau_{-r}^{n_k} \xi))} = 1$ . D'après le lemme 6.3.2, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi) = +\infty$  et d'autre part  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\varepsilon(\tau_{-r}^{n+1} \xi) - f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi) = 0$

$$\left( \text{car } \left| f_\varepsilon(\tau_{-r}^{n+1} \xi) - f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi) \right| = \left| B_{\tau_{-r}^n, \xi}^\varepsilon(\tau_{-r}^{-1} i, \tau_{-r}^n i) - B_{\tau_{-r}^n, \xi}^\varepsilon(i, \tau_{-r}^n i) \right| = \left| B_{\tau_{-r}^n, \xi}^\varepsilon(i, \tau_{-r}^{-1} i) \right|, \right. \\ \left. \text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| B_{\tau_{-r}^n, \xi}^\varepsilon(i, \tau_{-r}^{-1} i) \right| = \left| B_{\text{Fix}(\tau_{-r})}^\varepsilon(i, \tau_{-r}^{-1} i) \right| = 0 \right).$$

Nous avons le

**Lemme 6.4.5.** — Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ . Alors, pour tout  $a > 0$ , il existe une suite strictement croissante d'entiers  $(n_k)_{k \geq 1}$  telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (u_{n_{k+1}} - u_{n_k}) = a.$$

*Démonstration.* — Il suffit de poser  $n_0 = 1$  et  $n_{k+1} = \sup\{p > n_k \mid u_p \leq u_{n_k} + a\}$ , pour tout  $k \geq 1$ .

On applique ce lemme à la suite  $f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)$ ; pour tout  $a > 0$  on a  $e^{i\lambda a} = 1$  d'où  $\lambda = 0$ . Ainsi, lorsque  $\lambda$  est non nul,  $P_{\varepsilon, \lambda}^2$  ne possède pas de valeurs propres de module 1 si bien que son rayon spectral sur  $L_\alpha(\Lambda^+)$  est strictement inférieur à 1 (Hypothèse H<sub>2</sub>). En revanche, pour  $\lambda = 0$ , la valeur propre 1 est simple, l'espace propre associé est celui des fonctions constantes sur  $\Lambda^+$  et le projecteur propre s'identifie à une mesure de probabilité  $P_\varepsilon$ -invariante sur  $\Lambda^+$ ; on peut alors écrire  $P_\varepsilon^2 = \nu_\varepsilon + R_\varepsilon$  avec  $\rho(R_\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_\varepsilon^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$  (Hypothèse H<sub>1</sub>).

L'hypothèse H<sub>3</sub> est simple à vérifier puisque d'une part, d'après le lemme 6.4.1 il existe  $C_1 > 0$  tel que

$$\forall n \geq 1 \quad \|p_n\| \leq \frac{C_1}{n^{\frac{2\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}} \quad (\text{avec } \frac{2\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon} > 1 \text{ pour } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$$

et d'autre part, d'après le lemme 6.3.4, il existe  $C_2 > 0$  tel que

$$\forall n \geq 1, \forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad |f_\varepsilon(\tau_{-r}^n \xi)| \leq 2(1 + \varepsilon) \log n + C_2.$$

Par conséquent, pour tout  $\xi \in \Lambda_r^+$ , on a  $|P_\varepsilon f_\varepsilon^3(\xi)| \leq C_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2(1+\varepsilon) \log n + C_2)^3}{n^{\frac{2\delta_\varepsilon}{1+\varepsilon}}}$ , qui est fini; en particulier  $\nu_\varepsilon(f_\varepsilon^3) = \nu_\varepsilon(P_\varepsilon f_\varepsilon^3) < +\infty$ .

Par ailleurs, d'après le corollaire 6.2.2, il existe  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $C_0 > 0$  tels que pour tout  $\xi \in \Lambda_r^+$ , on ait  $S_N f_\varepsilon(\xi) \geq C_0$ . Ainsi  $\nu_\varepsilon(f_\varepsilon) = \frac{1}{N} \nu_\varepsilon(S_N f_\varepsilon) \geq C_0$ . L'hypothèse H<sub>3</sub> est donc bien satisfaite. Il nous reste à vérifier l'hypothèse H<sub>4</sub>. Nous avons la

**Proposition 6.4.6.** — *L'application  $\lambda \mapsto P_{\varepsilon, \lambda}$  est développable en série entière en tout point de  $\mathbb{R}$ .*

La preuve de cette proposition est analogue à celle de la proposition 5.2.4. Les seules modifications à apporter portent sur les ordres de grandeur des normes des fonctions  $\xi \mapsto p_n(\xi)$  et  $\xi \mapsto f_\varepsilon(\tau_r^n \xi)$ ; d'après les lemmes 6.3.4 et 6.4.1, il existe des constantes  $C_1$  et  $C_2$  telles que

$$\forall n \geq 1 \quad \|p_n\| \leq \frac{C_1}{n^{1+\varepsilon}} \text{ et } \forall \xi \in \Lambda_r^+ \quad |f_\varepsilon(\tau_r^n \xi)| \leq 2(1 + \varepsilon) \log n + C_2.$$

Ces majorations permettent d'établir l'analyticité sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $\lambda \mapsto P_{\varepsilon, \lambda}$ .

## 6.5 Mélange du flot géodésique sur $(M, \bar{g}_\varepsilon)$

On rappelle (§ 6.2) que toute géodésique orientée de  $M$  se relève de façon unique en une géodésique orientée de  $(\mathbb{H}^2, d_\varepsilon)$  dont les extrémités  $\xi_-, \xi$  appartiennent à l'ensemble  $\bar{\Lambda} = \bigcup_{s=\pm 1} \Lambda_{-s}^- \times \Lambda_s^+$ . L'ensemble  $E$  formé des éléments  $((\xi_-, \xi), t)$  de  $\bar{\Lambda} \times \mathbb{R}$  tels que  $0 \leq t \leq f_\varepsilon(\xi)$ , quotienté par la relation  $((\xi_-, \xi), f_\varepsilon(\xi)) \sim (\bar{T}_\varepsilon(\xi_-, \xi), 0)$  s'identifie au fibré unitaire tangent  $UM$  de  $(M, \bar{g}_\varepsilon)$  (voir § 6.2 pour la définition de  $\bar{T}_\varepsilon$ ).

Rappelons que la mesure définie sur  $\bar{\Lambda} \times \mathbb{R}$  par

$$(\mu_\varepsilon \otimes m)(d\xi_- d\xi dt) = \frac{\sigma_\varepsilon(d\xi_-)\sigma_\varepsilon(d\xi)}{D_\varepsilon(\xi_-, \xi)^{\frac{2\delta_\varepsilon}{b}}} m(dt)$$

est invariante par l'application qui à  $((\xi_-, \xi), t)$  associe  $(\bar{T}_\varepsilon(\xi_-, \xi), t - f_\varepsilon(\xi))$  et par le flot  $(a_s)_{s \in \mathbb{R}}$  défini par  $a_s((\xi_-, \xi), t) = ((\xi_-, \xi), t + s)$ . Notons  $(\bar{a}_s)_{s \in \mathbb{R}}$  la projection de  $(a_s)_{s \in \mathbb{R}}$  sur  $E$ , ce flot correspond au flot géodésique sur  $UM$ . La mesure  $\mu_\varepsilon \otimes m$  induit sur  $E$  une mesure  $\overline{\mu_\varepsilon \otimes m}$  invariante par le flot  $(\bar{a}_s)_{s \in \mathbb{R}}$ . On déduit de l'étude spectrale des opérateurs  $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  la

**Proposition 6.5.1.** — *Pour tout  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent de  $(M, \bar{g}_\varepsilon)$  est mélangeant relativement à la mesure  $\overline{\mu_\varepsilon \otimes m}$ .*

*Démonstration.* — Nous adaptons ici la démonstration de Y. Guivarc'h et J. Hardy [13] du mélange d'un flot spécial construit à l'aide d'une fonction höldérienne sur un sous-décalage de type fini.

Quitte à normaliser  $\mu_\varepsilon$  on a  $\overline{\mu_\varepsilon \otimes m}(E) = \nu_\varepsilon(f_\varepsilon)$ ; pour établir la proposition, il faut montrer que pour toutes fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  de  $L^2(E, \overline{\mu_\varepsilon \otimes m})$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I_t(\Phi, \Psi) = \frac{1}{\nu_\varepsilon(f_\varepsilon)} \overline{\mu_\varepsilon \otimes m}(\Phi) \overline{\mu_\varepsilon \otimes m}(\Psi)$$

avec  $I_t(\Phi, \Psi) = \int_E \Phi((\xi_-, \xi), s) \Psi \circ \bar{a}_t((\xi_-, \xi), s) \overline{\mu_\varepsilon \otimes m}(d\xi_- d\xi ds)$ .

Par un argument de densité, il suffit d'établir cette convergence pour toute fonction  $\Phi$  (resp.  $\Psi$ ) de la forme  $\varphi \otimes u$  (resp.  $\psi \otimes v$ ) où  $\varphi$  est höldérienne sur  $\bar{\Lambda}$ ,  $u$  est une fonction

de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et le support de  $\varphi \otimes u$  est inclus dans  $\{((\xi_-, \xi), s) \in \bar{\Lambda} \times \mathbb{R} \mid 0 < s < f_\varepsilon(\xi)\}$  (idem pour  $\psi$  et  $v$ ); comme  $(\psi \otimes v)((\xi_-, \xi), s - S_n f_\varepsilon(\xi)) = 0$  pour tout  $n \neq 0$ , on peut écrire

$$\psi(\xi_-, \xi)v(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi(\bar{T}_\varepsilon^n(\xi_-, \xi))v(s - S_n f_\varepsilon(\xi))$$

d'où  $(\psi \otimes v) \circ \bar{a}_t((\xi_-, \xi), s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi(\bar{T}_\varepsilon^n(\xi_-, \xi))v(s + t - S_n f_\varepsilon(\xi))$  et on obtient alors

$$I_t(\varphi \otimes u, \psi \otimes v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\bar{\Lambda} \times \mathbb{R}} \varphi(\xi_-, \xi)u(s)\psi(\bar{T}_\varepsilon^n(\xi_-, \xi))v(s + t - S_n f_\varepsilon(\xi))\mu_\varepsilon \otimes m(d\xi_- ds).$$

Remarquons que  $\varphi$  et  $\psi$  s'identifient à des fonctions des suites bilatères  $(\tau_i^{n_i})_{i \in \mathbb{Z}}$ , avec  $\omega(\xi_-) = (\tau_{-i}^{-n_i})_{i \leq 0}$  et  $\omega(\xi) = (\tau_i^{n_i})_{i \geq 1}$ . En utilisant de nouveau un argument de densité dans  $L^2(\bar{\Lambda}, \mu_\varepsilon)$  il suffit de considérer les projections de  $\varphi$  et  $\psi$  sur les espaces correspondant aux suites unilatères de coordonnées d'indices  $\geq -\ell$  avec  $\ell \geq 0$ ; quitte à translater par une puissance de  $\bar{T}_\varepsilon$  (ce qui ne modifie pas l'intégrale ci-dessus car la mesure  $\mu_\varepsilon$  est  $\bar{T}_\varepsilon$ -invariante), il suffit alors de considérer le cas  $\ell = 0$ , c'est-à-dire le cas où  $\varphi$  et  $\psi$  appartiennent à  $L_\alpha(\Lambda^+)$ .

On a alors

$$\begin{aligned} I_t(\varphi \otimes u, \psi \otimes v) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\Lambda^+ \times \mathbb{R}} \frac{\varphi(\xi)}{h_\varepsilon(\xi)} u(s)\psi(T_\varepsilon^n \xi)v(s + t - S_n f_\varepsilon(\xi))\nu_\varepsilon(d\xi)m(ds) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\Lambda^+ \times \mathbb{R}} \tilde{P}_\varepsilon^n\left(\frac{\varphi}{h_\varepsilon} \otimes \check{u}\right)(\xi, t - s)\psi(\xi)v(s)\nu_\varepsilon(d\xi)m(ds) \end{aligned}$$

avec  $\check{u}(s) = u(-s)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . D'après l'étude spectrale des  $P_{\varepsilon, \lambda}$ , le couple  $(P_\varepsilon, f_\varepsilon)$  vérifie les hypothèses  $H_0, H_1, H_2, H_3$  et  $H_4$ . En utilisant alors le théorème 5.0.1 (théorème du renouvellement « classique ») on a

$$\forall (\xi, s) \in \Lambda^+ \times \mathbb{R} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{P}_\varepsilon^n(\varphi \otimes \check{u})(\xi, t - s) = \frac{\nu_\varepsilon(\varphi) \int_{\mathbb{R}} u(s)m(ds)}{\nu_\varepsilon(f_\varepsilon)}.$$

Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue nous donne alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I_t(\varphi \otimes u, \psi \otimes v) = \frac{\overline{\mu_\varepsilon \otimes m}(\varphi \otimes u) \overline{\mu_\varepsilon \otimes m}(\psi \otimes v)}{\nu_\varepsilon(f_\varepsilon)}$$

d'où la proposition.

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES GÉODÉSIQUES FERMÉES

IRMAR

Université de Rennes I

Campus de Beaulieu

35042 RENNES CEDEX

France

[dalbo@univ-rennes1.fr](mailto:dalbo@univ-rennes1.fr)

[peigne@univ-rennes1.fr](mailto:peigne@univ-rennes1.fr)





## Bibliographie

- [1] BABILLOT (M). — *Théorie du renouvellement pour des chaînes semi-markoviennes transientes*, Ann. I.H.P. 24 n° 4, (1988) 507–569.
- [2] BAUER (M). — *Dilatations and continued fractions* Linear Algebra and its applications, 174 (1992) 183–213.
- [3] BEARDON (A.-F). — *The Hausdorff dimension of singular sets of properly discontinuous group*, Amer. J. Math. 88 (1966) 722–736.
- [4] BOURDON (M). — *Structures conformes au bord et flot géodésique d'un  $CAT(-1)$ -espace*, L'Enseignement Mathématique, 41 (1995) 63–102.
- [5] BREIMAN (L). — *Probability*, Addison Wesley (1968).
- [6] BOWEN (R), SERIES (C). — *Markov maps associated to Fuchsian groups* Publ. IHES 50 (1979), 153–170.
- [7] DOEBLIN (N), FORTET (R). — *Sur les chaînes à liaisons complètes*, Bull. Soc. Math. France 65, (1937) 132–148.
- [8] DAL'BO (F), PEIGNÉ (M). — *Groupes de Ping-Pong et géodésiques fermées en courbure  $-1$* , Annales de l'Institut Fourier, 46, n° 3 (1996).
- [9] FAIVRE (C). — *Distribution of Lévy constants for quadratic numbers*, Acta. Arith., LXI.1 (1992) 13–34.
- [10] GUILLOPE (L). — *Fonctions Zeta de Selberg et surfaces de géométrie finie*, Adv. Studies in Pure Math., 21 (1992) 33–70.
- [11] GHYS (Ét), DE LA HARPE (P). — *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhaël Gromov*, Progress in Mathematics, Vol. 83, Birkhäuser (1990).
- [12] GUIVARC'H (Y). — *Application d'un théorème limite local à la transience et à la récurrence de Marches de Markov*, Springer Verlag, Lect. Notes n° 1096, (1984), 301–332.
- [13] GUIVARC'H (Y), HARDY (J). — *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov*, Ann. I.H.P., Vol. 24, n° 1, 1988, p. 73–98.

- [14] GUIVARC'H (Y), LE JAN (Y). — *Asymptotic winding of the geodesic flow on modular surfaces and continued fractions* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t. 26, (1993) 23-50.
- [15] HEIJHAL (D). — *The Selberg trace formula and the Riemann zeta function*, Duke Math. J., 43 (1976) 441-482.
- [16] HENNION (H). — *Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipschitziens*, Proceeding of the A.M.S., n° 118 (1993) 627-634.
- [17] KAIMANOVITCH (V). — *Invariant measures of the geodesic flow and measures at infinity on negative curved manifolds*, Ann. I.H.P., Vol. 53, n°4 (1990) 361-393.
- [18] KHINTCHINE (A.-Y). — *Continued fractions*, The university of Chicago Press, Chicago 1964.
- [19] LALLEY (S.-P). — *Renewal theorems in symbolic dynamics, with applications to geodesic flows, non euclidean tessellations and their fractal limits*, Acta Math., 163 (1989) 1-55.
- [20] LALLEY (S.-P). — *Closed geodesics in homology classes on surfaces of variable negative curvature*, Duke Math. Journal, Vol. 58, n°3 (1989) 795-821.
- [21] LE PAGE (E). — *Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires*, Springer Verlag, Lect. Notes, n° 928, (1982) 258-303.
- [22] LÉVY (P). — *Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue*, Bull. S.M.F., 57 (1929) 178-194.
- [23] MARGULIS (G.-A). — *Applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature*, Functionnal Anal. Appl., 3 (1969) 335-336.
- [24] NORMAN (X). — *Markov processes and learning models*, New York Academy Press, Vol. 84, 1972.
- [25] PEIGNÉ (M). — *Vitesse de convergence dans le théorème du renouvellement sur  $\mathbb{R}$* , Cahier des séminaires de Rennes, 1989-1990.
- [26] POLLICOTT (M). — *Distribution of closed geodesics on the modular surface and quadratic irrationals*, Bull. S.M.F., 114 (1986) 431-446.
- [27] PARRY (W), POLLICOTT (M). — *An analogue of prime number theorem for closed orbits of axiom A flows* Ann. of Prob.n 118 (1983) 573-591.
- [28] RUELE (D). — *Thermodynamic Formalism*, Addison-Wesley, 1978.
- [29] SELBERG (A). — *Harmonic analysis and discontinuous group in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc., 20 (1956) 47-87.

- [30] SERIES (C). — *The Modular Surface and continued fractions* J. London Math. Soc., Vol. 31, (1985) 69–80.