J. W. PITMAN

M. YOR

Quelques identités en loi pour les processus de Bessel

Astérisque, tome 236 (1996), p. 249-276

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__249_0>

Quelques identités en loi pour les processus de Bessel

J. W. Pitman, M. Yor

Résumé. — Nous rassemblons certaines identités en loi concernant les intégrales de R^{-1}, R^2, ainsi que le supremum de R, processus de Bessel de dimension 1, 2 ou 3, puis nous les étendons convenablement à toute dimension. Ces généralisations mettent en jeu certains processus qui "interpolent" entre les ponts et les processus de Bessel. Elles interviennent aussi bien dans des études appliquées, par exemple : calcul de prix d'options, que pour certaines questions d'équations non linéaires.

1. Introduction.

(1.0) Dans toute la suite, $(R_t, t \geq 0)$ désigne un processus de Bessel de dimension $\delta > 0$, issu de 0, et $(r(t), 0 \leq t \leq 1)$ est le pont de Bessel standard, (c'est-à-dire : qui satisfait $r(0) = r(1) = 0$), de dimension δ. Pour la définition précise de ces processus, voir, par exemple, Revuz-Yor [23], chapitre XI.

(1.1) L'objet de ce travail est de démontrer, et de rassembler certaines identités en loi, nouvelles, ou bien un peu éparpillées dans la littérature, concernant les fonctionnelles : $\int_0^1 \frac{ds}{R_s}$, $\int_0^1 ds\, R_s^2$, $\sup_{s \leq 1} R_s$, ainsi que les fonctionnelles correspondantes pour r. Nous avons présenté ces identités, pour les dimensions $\delta = 1, 2, 3$, dans les deux tableaux suivants :

Cette recherche a été réalisée en partie avec l'aide de NSF Grant DMS-9404345.

Dimension δ	Décomposition canonique	Identité en loi
1	$R_t = \beta_t + L_t$	$L_t \underset{\text{p.s.}}{=} \sup_{s\le t}(-\beta_s)$
2	$R_t = \beta_t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s}$	$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{R_s} \overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{s\le t}\lvert\beta_s\rvert$
3	$R_t = \beta_t + \int_0^t \frac{ds}{R_s}$	$\int_0^t \frac{ds}{R_s} \overset{\text{(loi)}}{=} S_t + I_t$

Tableau I

Dimension δ	Décomposition canonique	Identité en loi
1	$r(t) \equiv \lvert b(t)\rvert$ $= \gamma(t) - \int_0^t \frac{ds\, r(s)}{(1-s)} + \ell_t$	$\ell_1 \overset{\text{(loi)}}{=} 2S^{(b)}$
2	$r(t) = \gamma(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{r(s)} - \int_0^t \frac{ds\, r(s)}{(1-s)}$	$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{r(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{s\le 1} R_3(s)$
3	$r(t) = \gamma(t) + \int_0^t \frac{ds}{r(s)} - \int_0^t \frac{ds\, r(s)}{(1-s)}$	$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{r(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} S^{(b)} + I^{(b)}$ $\overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{s\le 1} r(s)$

Tableau II

(1.2) Voici quelques précisions concernant les *Notations* utilisées dans les deux Tableaux ci-dessus.

Dans le Tableau I, $(\beta_t, t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien issu de 0; $S_t = \sup_{s\le t}\beta_s$, $I_t = -\inf_{s\le t}\beta_s$, $L_t = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t ds\, 1\!\!1_{(R_s\le\varepsilon)}$ $(\delta = 1)$; les deux dernières identités en loi $[\delta = 2,3]$ ont lieu à t fixé; la première identité est une identité presque sûre entre les deux processus $(L_t, t\geq 0)$ et $\left(\sup_{s\le t} -\beta_s, t \geq 0\right)$.

Dans le Tableau II, $\left(b(t), t\leq 1\right)$ désigne un pont brownien standard, $S^{(b)} = \sup_{s\le 1} b(s)$, $I^{(b)} = -\inf_{s\le 1} b(s)$, $\left(\gamma(t), t\geq 0\right)$ désigne un mouvement brownien réel, $\left(R_3(t), t\geq 0\right)$ désigne un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0; enfin, on note :

$$\ell_t = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t ds\, 1\!\!1_{\left(\lvert b(s)\rvert\le\varepsilon\right)} \qquad (\delta = 1)$$

(1.3) L'organisation de ce travail est la suivante :

– dans le paragraphe 2, nous montrons les identités en loi du Tableau I, et nous les étendons sous des formes convenables à toute dimension δ;

– dans le paragraphe 3, nous faisons de même avec les identités en loi du Tableau II;

– dans le paragraphe 4, on exploite les identités de Ciesielski-Taylor [6] pour obtenir une identité en loi (cf : Théorème 3) dans laquelle l'un des membres est $\sup_{s\leq 1} R(s)$;

– dans le paragraphe 5, nous étudions les lois conjointes de $\left(R_1, \int_0^1 \frac{ds}{R_s}\right)$; en fait, ces résultats sont présentés pour une famille de processus qui "interpolent" entre les processus et les ponts de Bessel, comprenant en particulier les méandres.

(1.4) Les origines et les motivations de ce travail sont variées :

a) tout d'abord, nous résolvons ici une ancienne question posée dans le dernier chapitre de notre article [20], à savoir : expliciter la loi conjointe de $\left(R_t, \int_0^t \frac{ds}{R_s}\right)$, R étant un procesus de Bessel;

b) nous aurions souhaité également donner une présentation plus "transparente" que celle qui figure en [5] des calculs de transformées de Fourier des lois de valeurs principales associées aux temps locaux browniens;

c) nous sommes parvenus, par hasard, à l'identité en loi du Tableau I pour $\delta = 2$, en nous intéressant aux propriétés d'intégrabilité du temps local d'intersection renormalisé $(\gamma_t, t \geq 0)$ pour le mouvement brownien plan;
nous montrons, en appendice, à l'aide des formules de Tanaka-Rosen que pour t fixé, γ_t possède des moments exponentiels. Une démonstration élémentaire (c'est-à-dire, ne s'appuyant pas sur le calcul stochastique) vient d'être donnée indépendamment par J.F. Le Gall [14];

d) enfin, nous sommes heureux de mentionner qu'une partie des identités en loi qui figurent dans ce travail joue un rôle important pour certains calculs exacts de prix d'options (B. Leblanc [13]) ainsi que pour les estimations de solutions fondamentales d'équations non linéaires (Benachour-Roynette-Vallois [1]).

Remerciements : Nous remercions le referee pour ses remarques simplificatrices, et sa lecture soigneuse qui nous a permis de rectifier les valeurs des paramètres qui figurent dans l'énoncé du Théorème 1.

2. Démonstrations et extensions à toute dimension des identités en loi du Tableau I.

(2.1) Comme cela a déjà été dit en **(1.2)**, l'identité pour $\delta = 1$ est une identité presque sûre entre les deux processus indiqués. Cette identité, très classique, est démontrée habituellement grâce au lemme de Skorokhod (voir [23], p. 222–223).

(2.2) Soit maintenant $\delta > 1$. Une première étape dans la démonstration des identités en loi pour $\delta = 2$, et $\delta = 3$ consiste à utiliser l'identité :

$$(2.a)_\delta \qquad \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{R_s} \overset{\text{(loi)}}{=} \left(\int_0^1 ds\, \widehat{R}_s^2\right)^{-\frac{1}{2}} ,$$

où $(R_s, s \geq 0)$, resp : $(\widehat{R}_s, s \geq 0)$ désigne ici un processus de Bessel de dimension δ (> 1), resp : $\widehat{\delta} = 2\delta - 2$, issu de 0.

L'identité en loi *(2.a)*$_\delta$ figure en ([23], p. 417), où il est montré qu'elle découle de la propriété de scaling :

$$(2.b) \qquad (R_{cs}; s \geq 0) \overset{\text{(loi)}}{=} (\sqrt{c}\, R_s, s \geq 0)$$

de R (et $\widehat{R}$), et de la représentation suivante de R, en fonction (implicite!) de $\widehat{R}$ (voir la Proposition 1.11 de [23]) : R étant donné, il existe un processus de Bessel $\widehat{R}$, de dimension $\widehat{\delta}$ tel que :

$$(2.c) \qquad R_t = \tfrac{1}{4}\, \widehat{R}^2\left(\textstyle\int_0^t \frac{ds}{R_s}\right), \quad t \geq 0 .$$

(2.3) Ces rappels étant faits, nous montrons maintenant la seconde identité en loi du Tableau I : dans le cas $\delta = 2$, l'identité *(2.a)*$_{\delta=2}$ nous donne, puisque $\widehat{\delta} = \delta = 2$:

$$(2.d) \qquad \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{R_s} \overset{\text{(loi)}}{=} \left(\int_0^1 ds\, R_s^2\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Or, on voit facilement, par identification des transformées de Laplace, ou bien à l'aide du théorème de Ray-Knight pour les temps locaux browniens (cf. paragraphe 4.1 de [29]) que l'on a :

$$(2.e) \qquad \int_0^1 ds\, R_s^2 \overset{\text{(loi)}}{=} T_1 \overset{\text{def}}{=} \inf\{t : |\beta_t| = 1\} .$$

Or, toujours grâce au scaling brownien, on a :

$$(2.f) \qquad T_1 \overset{\text{(loi)}}{=} \left(\sup_{s \leq 1} |\beta_s|\right)^{-2} .$$

Finalement, à l'aide de *(2.d)*, *(2.e)* et *(2.f)*, on obtient l'identité en loi cherchée.

(2.4) Dans le cas $\delta = 3$, on a $\widehat{\delta} = 4$; nous allons utiliser ici des arguments semblables à ceux développés en **(2.3)**, mais en remplaçant maintenant T_1 par $\theta_c \overset{\text{def}}{=} \inf\{t \geq 0 : S_t + I_t \geq c\}$.

D'une part, on utilise l'identité en loi *(2.a)*$_\delta$, pour $\delta = 3$, et la forme explicite de la transformée de Laplace de : $\int_0^1 ds\, \widehat{R}_s^2$, qui est :

$$\text{(2.g)} \qquad \mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 ds\, \widehat{R}_s^2\Big)\Big] = \frac{1}{(\operatorname{ch}\lambda)^{\widehat{\delta}/2}}$$

(voir, par exemple, Pitman-Yor [21], ou Yor [29], p. 16).

Pour $\delta = 3$, on a $\dfrac{\widehat{\delta}}{2} = \delta - 1 = 2$, et on déduit de *(2.g)* l'identité en loi

$$\int_0^1 ds\, \widehat{R}_s^2 \overset{\text{(loi)}}{=} T_1 + \tilde{T}_1 ,$$

où $\tilde{T}_1$ est une copie indépendante de T_1, variable définie en *(2.e)*.

D'autre part, d'après Imhof [10], ou Vallois ([24], [25]), on a :

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2}\theta_c\Big)\Big] = \mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\lambda^2 c^2}{8}\theta_2\Big)\Big] = \frac{1}{\left(\operatorname{ch}\frac{\lambda c}{2}\right)^2} .$$

En particulier, on a : $\theta_2 \overset{\text{(loi)}}{=} T_1 + \tilde{T}_1$; or, par scaling, $\theta_2 \overset{\text{(loi)}}{=} \dfrac{4}{(S_1 + I_1)^2}$. En comparant ces différentes identités en loi, on obtient finalement

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{R_s} \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{S_1 + I_1}{2} ,$$

ce qui démontre la dernière identité en loi du Tableau I.

(2.5) Nous montrons maintenant comment on peut généraliser les identités en loi du Tableau I, à toute dimension $\delta > 1$.

Désignons par $(C_a^{\widehat{\delta}}; a \geq 0)$ le processus des temps locaux, sur tout $\mathbb{R}_+$, associé au processus $\left(|\beta_t| + \frac{2}{\widehat{\delta}}\ell_t \equiv |\beta_t| + \frac{1}{\delta-1}\ell_t \;;\; t \geq 0\right)$.

Rappelons l'extension suivante des théorèmes de Ray-Knight (cf. Le Gall-Yor [16]) :

$$(\widehat{R}_a^2; a \geq 0) \overset{\text{(loi)}}{=} (C_a^{\widehat{\delta}}; a \geq 0) ,$$

où $(\widehat{R}_a; a \geq 0)$ désigne toujours un processus de Bessel de dimension $\widehat{\delta}$, issu de 0. On en déduit :

$$\int_0^1 da\, \widehat{R}_a^2 \overset{\text{(loi)}}{=} \int_0^\infty ds\, \mathbb{1}_{\left(|\beta_s| + \frac{2}{\widehat{\delta}}\ell_s \leq 1\right)} .$$

Admettons pour l'instant que l'on puisse trouver un processus $(Z_t^\delta, t \geq 0)$ ayant la propriété de scaling du mouvement brownien, et tel que :

$$\int_0^\infty ds\, \mathbb{1}_{\left(|\beta_s| + \frac{2}{\widehat{\delta}}\ell_s \leq 1\right)} \overset{\text{(loi)}}{=} T_1(Z^\delta) \overset{\text{def}}{=} \inf\{t : Z_t^\delta = 1\} .$$

On pourra alors déduire de ces différentes identités en loi, considérées conjointement avec *(2.a)*$_\delta$ l'identité :

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{R_s} \overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{t\le 1} Z_t^\delta \,.$$

Le théorème suivant montre que l'on peut réaliser complètement ce programme, tout au moins pour certaines valeurs de δ.

THÉORÈME 1 : *Soit* $\frac{3}{2} < \delta$, *et* $(\beta_t, t \ge 0)$ *mouvement brownien réel, issu de* 0.

1) Il existe un unique processus $(Z_t, t \ge 0)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$, *solution de l'équation :*

$$\textit{(2.h)} \qquad Z_t = \beta_t + (2-\delta)\, S_t^Z + \ell_t^Z \,,$$

où $S_t^Z \overset{\text{def}}{=} \sup_{s\le t} Z_s$, *et* $(\ell_t^Z, t \ge 0)$ *désigne le temps local en* 0 *de* Z. *On notera* $Z_t \equiv Z_t^\delta$.

2) On a les identités en loi :

$$\left(\int_0^1 \frac{ds}{R_s}\right)^2 \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{4}{\int_0^1 ds\, \widehat{R}_s^2} \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{4}{T_1(Z^\delta)} \overset{\text{(loi)}}{=} \left(2 S_1^{Z^\delta}\right)^2 ,$$

où R, *resp :* $\widehat{R}$, *désigne un processus de Bessel de dimension* δ, *resp :* $\widehat{\delta} = 2(\delta-1)$, *issu de* 0, *et, finalement :*

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{R_s} \overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{s\le 1} Z_s^\delta \,.$$

Démonstration : (i) Admettons provisoirement la première assertion du théorème. D'après les remarques qui précèdent l'énoncé, il nous suffit de vérifier, pour démontrer la seconde assertion, que l'on a :

$$\textit{(2.i)} \qquad \int_0^\infty ds\, \mathbb{1}_{\left(|\beta_s| + \frac{1}{\alpha}\ell_s \le 1\right)} \overset{\text{(loi)}}{=} T_1(Z^\delta) \,.$$

Pour simplifier l'écriture, posons $\alpha = \frac{\widehat{\delta}}{2} = \delta - 1$, et écrivons le membre de gauche de *(2.i)* en nous appuyant sur le théorème de Pitman [19] permettant de représenter le processus de Bessel de dimension 3 $(R_t, t \ge 0)$ comme $(2S_t - B_t, t \ge 0)$, où $(B_t, t \ge 0)$ est un mouvement brownien réel, et $S_t = \sup_{s\le t} B_s$.

On a tout d'abord, d'après la représentation de Lévy du mouvement brownien réfléchi :

$$\left(|\beta_t| + \tfrac{1}{\alpha}\ell_t\,,\ t \ge 0\right) \overset{\text{(loi)}}{=} \left((1+\tfrac{1}{\alpha})S_t - B_t\,;\ t \ge 0\right),$$

puis, on écrit :

$$X_t \stackrel{\text{def}}{=} (1+\tfrac{1}{\alpha})S_t - B_t = R_t + (\tfrac{1}{\alpha}-1)J_t\,, \qquad \text{où} \quad J_t = \inf_{u\geq t} R_u\,.$$

On retourne ensuite le processus (X_t) en $L = \sup\{t : X_t = 1\}$. En conséquence de l'égalité suivante entre processus :

$$\inf_{s\geq t} X_s = \frac{1}{\alpha}\, J_t\,,$$

on obtient : $L = \tau_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t : B_t = \alpha\} = \sup\{t : R_t = \alpha\}$, puis, d'après Williams [27], $(\beta_t = \alpha - R_{L-t}\,;\ t \leq L)$ est un mouvement brownien arrêté en son premier temps de passage en α. On obtient alors aisément :

$$1 - X_{L-t} = \beta_t + (\tfrac{1}{\alpha}-1)\sigma_t\,, \qquad \text{où} \quad \sigma_t = \sup_{s\leq t} \beta_s\,,$$

et on a aussi : $\tau_\alpha = \inf\{t : \beta_t + (\frac{1}{\alpha}-1)\sigma_t = 1\}$.

On en déduit :

$$\int_0^\infty dt\, \mathbb{1}_{(X_t\leq 1)} = \int_0^L dt\, \mathbb{1}_{(X_{L-t}\leq 1)} = \int_0^L dt\, \mathbb{1}_{(1-X_{L-t}\geq 0)} \stackrel{\text{(loi)}}{=} \int_0^{\tau_\alpha} dt\, \mathbb{1}_{\left(\beta_t + (\frac{1}{\alpha}-1)\sigma_t \geq 0\right)}\,.$$

On a donc pu représenter le membre de gauche de *(2.i)* sous la forme

$$\int_0^{\tau_\alpha} dt\, \mathbb{1}_{\left(\beta_t + (\frac{1}{\alpha}-1)\sigma_t \geq 0\right)}\,.$$

Posons maintenant $\nu = \frac{1}{\alpha} - 1$, et écrivons la formule de Tanaka pour $(\beta_t + \nu\sigma_t)^+$. Il vient :

$$(\beta_t + \nu\sigma_t)^+ = \int_0^t \mathbb{1}_{(\beta_s+\nu\sigma_s\geq 0)}\, d(\beta_s + \nu\sigma_s) + \tfrac{1}{2}\ell_t^\nu\,,$$

où $(\ell_t^\nu, t \geq 0)$ désigne le temps local en 0 de $(\beta_t + \nu\sigma_t, t \geq 0)$. Posons maintenant : $Y_t = \beta_t + \nu\sigma_t$; alors : $S_t^Y = (\nu+1)\,\sigma_t$. On a donc :

$$Y_t^+ = \int_0^t \mathbb{1}_{(Y_s\geq 0)}\, d\beta_s + \frac{\nu}{\nu+1}\, S_t^Y + \tfrac{1}{2}\ell_t^\nu\,.$$

Notons $(\mu_t, t \geq 0)$ l'inverse du processus croissant $\left(\int_0^t ds\, \mathbb{1}_{(Y_s\geq 0)}, t \geq 0\right)$, et remarquons que, à l'aide de la propriété de scaling du mouvement brownien, on a : $\int_0^\infty ds\, \mathbb{1}_{(Y_s\geq 0)} = \infty$ p. s.

On montre alors que le processus $(Z_t = Y_{\mu_t}^+\,,\ t \geq 0)$ satisfait :

$$Z_t = \tilde{\beta}_t + \frac{\nu}{\nu+1}\, S_t^Z + \ell_t^Z\,,$$

où $(\tilde{\beta}_t)$ est un mouvement brownien réel ; cette dernière équation est précisément l'équation *(2.h)*.

(ii) Nous montrons maintenant la première assertion du théorème. Réécrivons l'équation *(2.h)* sous la forme :

$$(2.h)_a \qquad Z_t = \beta_t + aS_t^Z + \ell_t^Z \,, \quad t \geq 0 \,,$$

où l'on a posé : $a = 2-\delta$. La condition : $\frac{3}{2} < \delta$ équivaut à : $a < \frac{1}{2}$. D'après la remarque qui suit la Proposition 6.2 de [17], un argument de point fixe permet alors de résoudre l'équation $(2.h)_a$ en montrant l'existence et l'unicité d'une solution forte : on commence par appliquer le lemme de Skorokhod pour écrire :

$$\ell_t^Z = \sup_{s \leq t} (-\beta_s - aS_s^Z) \,,$$

puis on utilise l'argument de point fixe.

Remarque : Il est vraisemblable que l'on puisse remplacer la condition : $\frac{3}{2} < \delta$, qui figure dans l'énoncé du théorème, par la condition moins restrictive : $\delta > 1$.

Toutefois, il faudrait (par exemple) pouvoir montrer l'existence et l'unicité d'une solution forte de $(2.h)_a$, pour tout $a < 1$. Cette difficulté a déjà été rencontrée en [17], Proposition 6.2, et résolue uniquement lorsque l'on considère l'équation

$$Z_t = \varepsilon + \beta_t + a\, S_t^Z + \ell_t^Z \,, \qquad \text{pour} \quad \varepsilon > 0 \,.$$

(2.6) En complément aux identités en loi démontrées ci-dessus, il nous a paru intéressant de développer les calculs explicites suivants, qui caractérisent, via une transformation de Laplace (en t) la loi conjointe de

$$\left(R_t \,, \ H_t \overset{\text{def}}{=} \int_0^t \frac{ds}{R_s}\right) .$$

Nous allons utiliser la notation et les hypothèses suivantes : S_θ désigne un temps exponentiel de paramètre $\frac{\theta^2}{2}$ ($\theta > 0$), indépendant du processus de Bessel $(R_s, s \geq 0)$, de dimension $\delta > 1$, issu de 0.

On a alors le

THÉORÈME 2 : *1) Soit $\delta > 1$. Pour tous $a \geq 0$, $b \geq 0$, on a :*

$$\mathbb{E}[\exp(-aR_{S_\theta} - bH_{S_\theta})] = \int_0^\infty du \, \exp(-bu)\, (\delta-1) \left(\frac{\theta}{2} \operatorname{sh} \frac{\theta u}{2}\right) \left[\operatorname{ch} \frac{\theta u}{2} + \frac{a}{\theta} \operatorname{sh} \frac{\theta u}{2}\right]^{-\delta} .$$

2) En particulier, on a :

$$\mathbb{P}(H_{S_\theta} \in du) = (\delta-1) \left(\frac{\theta}{2} \operatorname{sh} \frac{\theta u}{2}\right) \left(\operatorname{ch} \frac{\theta u}{2}\right)^{-\delta} du \,,$$

ou, de façon équivalente :

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\theta}{2} H_{S_\theta}\right) \stackrel{(\text{loi})}{=} U^{-\frac{1}{\delta-1}},$$

où U désigne une variable uniforme sur $[0,1]$.

3) Enfin, on a : $\mathbb{E}\big[\exp(-aR_{S_\theta}) \,\big|\, H_{S_\theta} = u\big] = \left(1 + \frac{a}{\theta} \operatorname{th} \frac{\theta u}{2}\right)^{-\delta}$*, ou encore, de façon équivalente :*

$$\textit{conditionnellement à } H_{S_\theta} = u, \quad R_{S_\theta} \stackrel{(\text{loi})}{=} \frac{\operatorname{th} \frac{\theta u}{2}}{\theta} Z_\delta ,$$

où Z_δ désigne une variable gamma de paramètre δ, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(Z_\delta \in dx) = \frac{dx}{\Gamma(\delta)} x^{\delta-1} \exp(-x) . \qquad (x > 0)$$

Démonstration : Définissons :

$$\Phi \equiv \Phi_\theta(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\Big[\lambda \int_0^\infty dt\, e^{-\lambda t} e^{-(aR_t + bH_t)}\Big] \equiv \mathbb{E}\Big[e^{-(aR_{S_\theta} + bH_{S_\theta})}\Big]$$

où l'on a noté : $\lambda = \frac{\theta^2}{2}$.

En faisant le changement de variables $u = H_t$ dans l'intégrale en (dt), et en utilisant la relation *(2.c)*, il vient :

$$\begin{aligned}\Phi &= \lambda \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty du \left(\frac{1}{4}\widehat{R}_u^2\right) \exp\left(-\tfrac{\lambda}{4}\textstyle\int_0^u dv\, \widehat{R}_v^2 - \tfrac{a}{4}\widehat{R}_u^2\right) \exp(-bu)\Big] \\ &= \lambda \int_0^\infty du \exp(-bu)\, \mathbb{E}\Big[\left(\tfrac{1}{4}\widehat{R}_u^2\right) \exp\left(-\tfrac{a}{4}\widehat{R}_u^2 - \tfrac{\lambda}{4}\textstyle\int_0^u dv\, \widehat{R}_v^2\right)\Big]\end{aligned}$$

À l'aide de la formule suivante (voir, par exemple, Yor [29], p. 16) :

$$\textit{(2.j)} \qquad \mathbb{E}\Big[\exp\left(-\alpha \widehat{R}_u^2 - \tfrac{\beta^2}{2}\textstyle\int_0^u dv\, \widehat{R}_v^2\right)\Big] = \left(\operatorname{ch}(\beta u) + 2\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{sh}(\beta u)\right)^{-(\delta-1)}$$

que nous allons appliquer avec : $\alpha = \dfrac{a}{4}$, et $\beta = \dfrac{\theta}{2}$, on obtient, en dérivant les deux membres de *(2.j)* par rapport à α :

$$\mathbb{E}\Big[\left(\frac{1}{4}\widehat{R}_u^2\right) \exp -\left(\frac{a}{4}\widehat{R}_u^2 + \frac{\theta^2}{8}\int_0^u dv\, \widehat{R}_v^2\right)\Big] = \left(\frac{\delta-1}{\theta}\operatorname{sh}\frac{\theta u}{2}\right)\left(\operatorname{ch}\frac{\theta u}{2} + \frac{a}{\theta}\operatorname{sh}\frac{\theta u}{2}\right)^{-\delta} .$$

On déduit de cette dernière formule l'expression de

$$\Phi \equiv \mathbb{E}\big[\exp\left(-aR_{S_\theta} - bH_{S_\theta}\right)\big]$$

présentée dans le théorème. Les assertions 2) et 3) du théorème découlent aisément de cette expression de Φ.

3. Démonstration et extension à toute dimension des identités en loi du Tableau II.

(3.1) Soit $\delta = 1$. Nous allons combiner, pour le *mouvement brownien* $(\beta_t, t \geq 0)$, l'identité en loi de Paul Lévy, et la transformation de Sparre-Andersen due à Karatzas-Shreve (voir, par exemple, Bertoin [2], Embrechts-Rogers-Yor [7], et Yor [32] pour cette combinaison) :

notons $$A_1^+ = \int_0^1 ds\, 1\!\!1_{(\beta_s > 0)} \qquad \text{et} \qquad \theta_1^+ = \sup\{s < 1 : S_s = \beta_s\}\ ;$$

on obtient l'identité en loi suivante :

$$(\beta_1^+ + \tfrac{1}{2}L_1, \beta_1^- + \tfrac{1}{2}L_1, A_1^+) \overset{\text{(loi)}}{=} (S_1, S_1 - \beta_1, \theta_1^+) \tag{3.a}$$

et ses conséquences :

$$(|\beta_1| + L_1, \beta_1, A_1^+) \overset{\text{(loi)}}{=} (2S_1 - \beta_1, \beta_1, \theta_1^+) \tag{3.b}$$

et

$$(\tfrac{1}{2}L_1, \beta_1, A_1^+) \overset{\text{(loi)}}{=} (\min(S_1, S_1 - \beta_1), \beta_1, \theta_1^+)\ . \tag{3.c}$$

En conditionnant l'une ou l'autre de ces identités par $\beta_1 = 0$, on obtient en particulier la première identité en loi du Tableau II.

(3.2) Soit maintenant $\delta > 1$. Une première étape pour la démonstration des identités pour $\delta = 2$ et $\delta = 3$ est la relation suivante :

pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne, on a :

$$\lambda_\delta\, \mathbb{E}\left[f\left(\tfrac{1}{2}\int_0^1 \tfrac{ds}{r(s)}\right) \left(\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{ds}{r(s)}\right)^{\delta-2} \right] = \lambda_{\hat{\delta}}\, \mathbb{E}\left[f\left(\left(\int_0^1 ds\, \hat{r}^2(s)\right)^{-\frac{1}{2}} \right)\right] \tag{3.d$_\delta$}$$

où l'on a noté : $\lambda_\delta = \left(2^{\frac{\delta}{2}-1}\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^{-1}$. La relation *(3.d)$_\delta$* est obtenue en particularisant avec $p = q = 2$ la relation du Théorème 3.5, p. 432 de [23], laquelle découle de la relation *(2.c)*.

(3.3) Nous montrons maintenant la seconde identité en loi du Tableau II : dans le cas $\delta = 2\ (= \hat{\delta})$, la relation *(3.d)$_{\delta=2}$* nous donne :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{r(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} \left(\int_0^1 ds\, r^2(s)\right)^{-\frac{1}{2}}\ . \tag{3.e}$$

Ensuite, on peut montrer, de différentes manières, que les variables $\int_0^1 ds\, r^2(s)$ et $T_1^{(3)} \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t : R_t^{(3)} = 1\}$ ont même loi : elles ont pour transformée de Laplace commune, en $\frac{\lambda^2}{2}$, la fonction : $\frac{\lambda}{\operatorname{sh}\lambda}$; plus profondément, le processus des temps locaux $\left(L^a_{T_1^{(3)}} ; 0 \le a \le 1\right)$ de $\left(R_u^{(3)}, u \le T_1^{(3)}\right)$ est un carré de pont de Bessel de dimension 2 (voir D. Williams [27], ou Pitman-Yor [21]).

Finalement, on a, à l'aide d'arguments usuels de scaling :

$$\left(\int_0^1 ds\, r^2(s)\right)^{-\frac{1}{2}} \stackrel{\text{(loi)}}{=} \sup_{s\le 1} R_s^{(3)} ,$$

et la seconde identité du Tableau II découle alors de *(3.e)*.

(3.4) Les deux identités en loi :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{r(s)} \stackrel{\text{(loi)}}{=} \sup_{s\le 1} r(s) \qquad \text{et} \qquad S^{(b)} + I^{(b)} \stackrel{\text{(loi)}}{=} \sup_{s\le 1} r(s)$$

peuvent être obtenues respectivement comme conséquences d'une part d'une transformation, due à Jeulin, des temps locaux de l'excursion brownienne normalisée, et, d'autre part, des résultats de Vervaat liant b et r; pour une discussion de ces résultats, voir par exemple Biane-Yor [5].

4. Quelques compléments relatifs au supremum d'un pont ou d'un processus de Bessel.

(4.1) Dans les Tableaux I et II, les supremum de certains processus, ou ponts, de Bessel, apparaissent à plusieurs reprises. Il semble donc naturel de chercher des identités en loi concernant ces processus, qui soient analogues à celles dégagées dans les paragraphes 2 et 3.

$(R_t, t \ge 0)$ désignant un processus de Bessel de dimension $\delta > 0$, issu de 0, le processus $\left(R_t^* \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{s\le t} R_s\, ,\ t \ge 0\right)$ hérite de la propriété de scaling *(2.b)* de R; on a donc :

$$(4.a) \qquad (R^*_{cs}\, ;\ s \ge 0) \stackrel{\text{(loi)}}{=} (\sqrt{c}\, R^*_s\, ,\ s \ge 0)\, .$$

Ainsi, le lemme suivant, qui nous permettra d'étendre de façon très générale le point 2) du Théorème 2, s'applique en particulier au processus $(R^*_t\, ,\ t \ge 0)$.

LEMME : *Soit $(X_t, t \ge 0)$ processus croissant continu tel que $\mathbb{P}(X_1 > 0) = 1$, qui satisfait : $(X_{cs}\, ,\ s \ge 0) \stackrel{\text{(loi)}}{=} (\sqrt{c}\, X_s\, ,\ s \ge 0)$.*

Notons $T_* = \inf\{t : X_t > 1\}$, *et définissons la fonction* $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1,\infty[$ *par :*

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{v^2}{2}T_*\Big)\Big] = \frac{1}{\varphi(v)}\,.$$

Soit, d'autre part, S_θ *une variable exponentielle de paramètre* $\dfrac{\theta^2}{2}$*, indépendante de* $(X_t, t \geq 0)$.

On a alors :

$$\varphi(\theta X_{S_\theta}) \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{1}{U}\,,$$

où U *désigne une variable uniforme sur* $[0,1]$.

Démonstration : (i) Remarquons tout d'abord que, grâce à la propriété de scaling de X, on a : $\theta X_{S_\theta} \overset{\text{(loi)}}{=} \left(\frac{S}{T_*}\right)^{1/2}$, où l'on a noté : S pour S_1, pour simplifier l'écriture.

Écrivons ensuite, pour $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, fonction borélienne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(\varphi(\theta X_{S_\theta}))] = \mathbb{E}\left[f\left(\varphi\left(\left(\frac{S}{T_*}\right)^{\frac12}\right)\right)\right] &= \tfrac12 \int_0^\infty dt\, e^{-\frac{t}{2}}\, \mathbb{E}\Big[f\Big(\varphi\Big(\big(\tfrac{t}{T_*}\big)^{\frac12}\Big)\Big)\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty v\,dv\, T_* \exp\Big(-\frac{v^2}{2}T_*\Big) f(\varphi(v))\Big]\end{aligned}$$

Or, on a : $\mathbb{E}\Big[(vT_*)\exp\Big(-\dfrac{v^2}{2}T_*\Big)\Big] = \dfrac{-\varphi'(v)}{(\varphi(v))^2}$, d'où l'on déduit finalement : $\mathbb{E}[f(\varphi(\theta X_{S_\theta}))] = \int_1^\infty \frac{du}{u^2} f(u)$, ce qui démontre le lemme. ∎

COROLLAIRE (Kent [11]) : *Soit* $\delta > 0$, *et* $T_1^{(\delta)} = \inf\{t : R_t = 1\}$, *où* $(R_t\,,\ t \geq 0)$ *désigne un processus de Bessel de dimension* δ*, issu de* 0. *On a alors :*

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{v^2}{2}T_1^{(\delta)}\Big)\Big] = \frac{1}{\Phi_\delta(v)}\,,$$

où : $\Phi_\delta(v) = 2^\nu\Gamma(\nu+1)\,I_\nu(v)\,v^{-\nu}$, $\nu = \frac{\delta}{2} - 1$, *et* I_ν *désigne la fonction de Bessel modifiée d'indice* ν.

On a alors, avec les notations du Lemme :

$$\Phi_\delta(\theta R^*_{S_\theta}) \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{1}{U}\,.$$

(4.2) Nous cherchons maintenant, par analogie avec les développements du paragraphe 2, des identités en loi dans lesquelles figure, dans l'un des membres, la variable R_1^* (avec les notations ci-dessus).

Pour cela, nous rappelons tout d'abord les identités de Ciesielski-Taylor [6] (voir également Biane [3] pour de nombreuses généralisations, Getoor-Sharpe [9] pour une extension à toutes les dimensions $\delta > 0$, et Yor [28]) :

si R_δ désigne le processus de Bessel de dimension $\delta > 0$, issu de 0 on a :

(*4.b*) pour $x > 0$ fixé, $$\int_0^\infty ds \mathbb{1}_{\left(R_{\delta+2}(s)\leq x\right)} \overset{\text{(loi)}}{=} T_x^\delta \overset{\text{def}}{=} \inf\{t : R_\delta(t) = x\}$$

(Ciesielski-Taylor [6] ont obtenu ces identités pour δ entier).

Introduisons d'autre part, pour tout $\alpha \geq 0$:

$$\eta_\alpha^{\delta+2} \overset{\text{def}}{=} \inf\left\{x : \int_0^\infty ds\, \mathbb{1}_{\left(R_{\delta+2}(s)\leq x\right)} > \alpha\right\}.$$

Le processus $(\eta_\alpha^{\delta+2}, \alpha \geq 0)$ hérite de $R_{\delta+2}$ sa propriété de scaling :

(*4.c*) pour $\lambda > 0$, $$(\eta_{\lambda\alpha}^{\delta+2}\, ;\ \alpha \geq 0) \overset{\text{(loi)}}{=} (\sqrt{\lambda}\, \eta_\alpha^{\delta+2}\, ;\ \alpha \geq 0).$$

On peut maintenant énoncer et démontrer le

THÉORÈME 3 : *Pour tout $\delta > 0$ et tout $\alpha > 0$ fixé, on a :*

(*4.d*) $$\eta_\alpha^{\delta+2} \overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{s\leq\alpha} R_\delta(s)$$

Démonstration : D'après les propriétés de scaling *(4.a)* et *(4.c)*, il suffit de démontrer l'identité *(4.d)* pour $\alpha = 1$. Or, le membre de gauche, resp : de droite, a même loi que :

$$\left(\int_0^\infty ds\, \mathbb{1}_{\left(R_{\delta+2}(s)\leq 1\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \text{resp : } \ (T_1^\delta)^{-\frac{1}{2}}.$$

Le résultat cherché découle alors des identités de Ciesielski-Taylor *(4.b)*. ∎

5. Du processus au pont de Bessel, en passant par les méandres.

(5.1) Outre les identités en loi présentées ci-dessus dans les Tableaux I et II, il existe des identités en loi concernant le méandre brownien $(\rho(s), s \leq 1)$ défini par :

(*5.a*) $$\rho(s) = \frac{1}{\sqrt{1-g}} \left|\beta_{g+s(1-g)}\right|, \quad s \leq 1,$$

où $g = \sup\{t < 1 : \beta_t = 0\}$, et $(\beta_t, t \leq 1)$ désigne le mouvement brownien réel issu de 0. En effet, on a (voir, par exemple, Biane-Yor [5])

(*5.b*) $$\int_0^1 \frac{ds}{\rho(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} 2 \sup_{s\leq 1} |b(s)| \overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{s\leq 1} \rho(s),$$

où $(b(s), s \leq 1)$ désigne un pont brownien standard.

Il nous a semblé naturel de chercher à obtenir des identités en loi pour toute une famille de processus $\rho_{m,d}$, qui réalisent une interpolation entre les processus de Bessel $(R_\delta(t)\,,\ t \le 1)$ et les ponts de Bessel $(r_\delta(t)\,,\ t \le 1)$.

De façon précise, définissons $\rho_{m,d}(t) = \left(r_m^2(t) + R_d^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}$, où r_m et R_d désignent respectivement le pont de Bessel de dimension m, et le processus de Bessel de dimension d, issu de 0. On note $\mathbb{M}^{m,d}$ la loi de $\rho_{m,d}$, définie sur l'espace canonique $C([0,1],\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{F} = \sigma\{X_s\,,\ s \le 1\}$, avec $X_s(\omega) = \omega(s)$.

Rappelons le résultat d'absolue continuité suivant

THÉORÈME 4 ([29], Chapitre 3) : *Désignons par $\mathbb{P}^\delta$ la loi de R_δ. On a, pour tous $m \ge 0$, et $d > 0$:*

$$\mathbb{M}^{m,d} = \frac{c_{m,d}}{X_1^m} \cdot \mathbb{P}^{m+d}\,,$$

avec $c_{m,d} = \mathbb{M}^{m,d}(X_1^m) = \mathbb{P}^d[X_1^m] = \left(\mathbb{P}^{m+d}\left[\frac{1}{X_1^m}\right]\right)^{-1} = 2^{\frac{m}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{m+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$.

Remarque : Signalons une erreur typographique dans la formule donnée en [29], Théorème 3.9, pour la constante $c_{m,d}$. En fait, si nous désignons par $c^*_{m,d}$ la constante erronée donnée en [29], on a $c^*_{m,d} = c_{d,m} \equiv 2^{\frac{d}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{m+d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$.

Dans la suite, nous considérerons plus particulièrement les cas suivants :

(i) $\underline{m = 0}$; $\mathbb{M}^{0,d} = \mathbb{P}^d$

(ii) $\underline{m = 1}$; cette valeur du paramètre m est particulièrement intéressante pour notre étude de la loi de $H_1 = \int_0^1 \frac{ds}{X_s}$, car la propriété de scaling pour $(X_t\,,\ t \ge 0)$ sous $\mathbb{P}^\delta$ implique :

$$\mathbb{P}^\delta\left[\frac{1}{X_1}\,\Big|\, H_1\right] = 2\,H_1\,. \tag{5.c}$$

Cette formule est un cas particulier des résultats qui figurent dans l'Appendice 2.

En conséquence, on a, pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne :

$$\mathbb{P}^\delta\left[H_1\,\varphi(H_1)\right] = \mathbb{P}^\delta\left[\frac{1}{2X_1}\,\varphi(H_1)\right]\,. \tag{5.c'}$$

Ainsi, de la loi de H_1, relativement à $\mathbb{M}^{1,\delta-1}$, on déduit immédiatement celle de H_1, relativement à $\mathbb{P}^\delta$.

(iii) $\underline{m = \delta - 2}$, $\underline{d = 2}$; dans le cas particulier $\delta = 3$, c'est-à-dire : $m = 1$, et $d = 2$, $\mathbb{M}^{1,2}$ est la loi du méandre brownien présenté en *(5.a)*. Plus généralement, d'après le Corollaire 3.9.1, p. 44 de [29], pour : $2 < \delta < 4$, $\mathbb{M}^{\delta-2,2}$ est la loi du méandre : $\left(\left(\sqrt{1-g_\gamma}\right)^{-1} R_\gamma\left(g_\gamma + u(1-g_\gamma)\right)\,;\ u \le 1\right)$ associé au processus de Bessel de dimension $\gamma = \delta - 2$; on a posé ici : $g_\gamma = \sup\{t < 1 : R_\gamma(t) = 0\}$.

(iv) $\underline{m=2}$, $\underline{d=\delta-2}$; d'après le Corollaire 3.9.2, p. 44 de [29], la probabilité $\mathbb{M}^{2,\delta-2}$, pour $\delta>2$, est la loi du processus $\left(\frac{1}{\sqrt{L_\delta}}\, R_\delta(uL_\delta)\,,\ u\leq 1\right)$, où $L_\delta=\sup\{t: R_\delta(t)=1\}$. Notons que : $c_{2,d}=d=\delta-2$.

(v) $\underline{m=\delta}$, $\underline{d=0}$; $\mathbb{M}^{\delta,0}$ est la loi du pont de Bessel de dimension δ. En faisant décroître d vers 0 dans la relation d'absolue continuité du Théorème 4, on obtient l'approximation suivante :

$$\mathbb{M}^{m,0}=\lim_{d\to 0}(\mathbb{M}^{m,d})=\lim_{d\to 0}\left(\frac{d}{2}\right)\frac{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}{X_1^m}\cdot\mathbb{P}^{m+d}$$

où $\lim\limits_{d\to 0}$ indique la convergence étroite des probabilités sur $C([0,1],\mathbb{R}_+)$. Pour cela, on a utilisé la formule explicite pour $c_{m,d}$, qui implique :

$$\frac{1}{d}\,c_{m,d}\underset{d\to 0}{\longrightarrow}2^{\frac{m}{2}-1}\Gamma(\tfrac{m}{2})\ .$$

(5.2) Nous nous proposons maintenant de décrire et de caractériser la loi conjointe de $\left(h_{m,d},\rho_{m,d}(1)\right)$, où l'on a posé : $h_{m,d}=\int_0^1\frac{ds}{\rho_{m,d}(s)}$. En d'autres termes, on étudie, sous $\mathbb{M}^{m,d}$, la loi conjointe de $\left(\int_0^1\frac{ds}{X_s},X_1\right)$. Pour cela, remarquons que, d'après la formule *(2.c)* ci-dessus, et la propriété de scaling, on a la

PROPOSITION 1 : *Soit $(R_t\,,\ t\geq 0)$, resp : $(\widehat{R}_t\,,\ t\geq 0)$, processus de Bessel, issu de 0, de dimension $\delta>1$, resp : $\widehat{\delta}=2(\delta-1)$. Alors, pour toute fonction $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$, borélienne, on a :*

$$\text{(5.d)}\qquad \mathbb{E}[f(R_1,H_1)]=\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{\widehat{R}_1^2}{2Y}\Big)\,f\Big(\frac{\widehat{R}_1^2}{2\sqrt{Y}}\,,\,\frac{2}{\sqrt{Y}}\Big)\Big]$$

où l'on a posé : $H_1=\int_0^1\frac{ds}{R_s}$ et $Y=\int_0^1 ds\,\widehat{R}_s^2$.

Commentaires : 1) De façon analogue à ce qui a été fait dans la démonstration du Théorème 2 ci-dessus, la formule *(5.d)* nous permet de ramener l'étude de la loi de (R_1,H_1) à celle de $(\widehat{R}_1,Y)$, laquelle peut être appréhendée grâce à la formule *(2.j)*, que nous réécrivons ici :

$$\text{(2.j)}\qquad \mathbb{E}\Big[\exp\Big(-a\widehat{R}_1^2-\frac{z^2Y}{2}\Big)\Big]=\Big(\operatorname{ch}z+\frac{2a}{z}\operatorname{sh}z\Big)^{-(\delta-1)}.$$

La loi de $\widehat{R}_1^2$ est bien connue, i.e. : $\widehat{R}_1^2\overset{\text{(loi)}}{=}2Z_{(\delta-1)}$, où Z_a désigne une variable gamma de paramètre a; la formule *(2.j)* peut donc être écrite sous la forme conditionnelle :

$$\text{(2.j')}\qquad \mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{z^2Y}{2}\Big)\,\Big|\,\widehat{R}_1=r\Big]=\Big(\frac{z}{\operatorname{sh}z}\Big)^{\delta-1}\exp-\frac{r^2}{2}(z\coth z-1)\ .$$

Nous utiliserons, par la suite, la conséquence suivante de la formule *(2.j)* (ou de *(2.j')*) :

$$(2.j") \qquad \mathbb{E}\left[\frac{1}{(\widehat{R}_1^2)^{m-1}} \exp\left(-\frac{z^2 Y}{2}\right)\right] = \gamma_{m,\delta} \left(\frac{z}{2 \operatorname{sh} z}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} z}\right)^{\delta-m},$$

formule valable pour $\delta > (m \vee 1)$, avec $\gamma_{m,\delta} = \dfrac{\Gamma(\delta-m)}{\Gamma(\delta-1)}$.

Démonstration de la formule (2.j") : On peut supposer tout d'abord la condition : $1 < m < \delta$ satisfaite. On a alors :

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{(\widehat{R}_1^2)^{m-1}} \exp\left(-\frac{z^2 Y}{2}\right)\right] = \frac{1}{\Gamma(m-1)} \int_0^\infty da\, a^{m-2}\, \mathbb{E}\left[\exp\left(-a\widehat{R}_1^2 - \frac{z^2 Y}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m-1)} \int_0^\infty da\, a^{m-2} \left(\operatorname{ch} z + \frac{2a}{z} \operatorname{sh} z\right)^{-(\delta-1)}.$$

Or, on a, en posant : $A = \operatorname{ch} z$ et $B = 2\dfrac{\operatorname{sh} z}{z}$:

$$\int_0^\infty da \frac{a^{m-2}}{(A+aB)^{\delta-1}} = \gamma_{m,\delta} \frac{1}{B^{m-1} A^{\delta-m}},$$

ce qui entraîne aisément la formule *(2.j")*.

2) Il découle de la formule *(2.c)* qui lie les processus de Bessel R et $\widehat{R}$ que l'inverse du processus croissant $(H_t\,,\ t \geq 0)$ est :

$$\tfrac{1}{4} Y_t \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{1}{4} \int_0^t du\, \widehat{R}_u^2 .$$

En conséquence des propriétés de scaling de R et $\widehat{R}$, on a :

$$(5.d') \qquad H_1 \stackrel{\text{(loi)}}{=} \frac{2}{\sqrt{Y}} .$$

Il découle alors, en particulier, de la formule *(5.c)* que l'on a :

$$\mathbb{E}\left[\frac{\widehat{R}_1^2}{2Y} \middle| Y = y\right] = 1 ,$$

soit :

$$(5.d") \qquad \mathbb{E}[\widehat{R}_1^2 | Y] = 2Y .$$

Une variante utile de la formule *(5.d)* est la formule suivante

$$(5.d)_{\alpha,m} \quad \mathbb{E}\left[f(R_1, H_1) \frac{H_1^\alpha}{R_1^m}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{(\widehat{R}_1^2)^{1-m}}{\sqrt{Y}} 2^{m+\alpha-1} Y^{\frac{m-(\alpha+1)}{2}} f\left(\frac{\widehat{R}_1^2}{2\sqrt{Y}}, \frac{2}{\sqrt{Y}}\right)\right].$$

Cette variante est une conséquence immédiate de la formule *(5.d)*.

3) Prenons maintenant $\alpha = 0$ dans la formule $(5.d)_{\alpha,m}$, et écrivons $(5.d)_{0,m}$ en utilisant la relation d'absolue continuité entre $\mathbb{M}^{m,d}$ et $\mathbb{P}^{\delta}$ d'une part, et entre $\mathbb{M}^{\widehat{m},\widehat{d}}$ et $\mathbb{P}^{\widehat{\delta}}$ d'autre part (on a posé : $\widehat{m} = 2(m-1)$, $\widehat{\delta} = 2(\delta-1)$, $\widehat{d} = 2(\widehat{\delta}-\widehat{m}) = 2d$).

On obtient alors :

$$(5.d.1)_m \qquad \mathbb{M}^{m,\delta-m}[f(R_1,H_1)] = \frac{c_{m,d}\,2^{m-1}}{c_{\widehat{m},\widehat{d}}}\,\mathbb{M}^{\widehat{m},\widehat{\delta}-\widehat{m}}\Big[Y^{\frac{m}{2}-1} f\Big(\frac{\widehat{R}_1^2}{2\sqrt{Y}}, \frac{2}{\sqrt{Y}}\Big)\Big].$$

En particulier, pour $m = 2$, on a :

$$(5.d.1)_{m=2} \qquad \mathbb{M}^{2,\delta-2}[f(R_1,H_1)] = \mathbb{M}^{2,\widehat{\delta}-2}\Big[f\Big(\frac{\widehat{R}_1^2}{2\sqrt{Y}}, \frac{2}{\sqrt{Y}}\Big)\Big]. \qquad \blacksquare$$

Nous appliquons maintenant la formule $(5.d)_{\alpha,m}$ à l'étude de la loi de H_1 relativement à la probabilité $\mathbb{M}^{m,\delta-m}$.

PROPOSITION 2 : *Pour tous δ, m, tels que : $\delta > 1$, et $\delta > m \geq 0$, on a :*

$$(5.e)_{m,\delta} \qquad \begin{aligned}&\mathbb{M}^{m,\delta-m}\Big(H_1^{m-1}\exp\Big(-\frac{\xi^2}{2}H_1^2\Big)\Big)\\ &\qquad = \alpha_{m,\delta}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \exp(2i\xi z)\Big(\frac{z}{\operatorname{sh} z}\Big)^{m-1}\frac{1}{(\operatorname{ch} z)^{\delta-m}}\end{aligned}$$

où : $\alpha_{m,\delta} = 2^{\frac{3}{2}(m-1)}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\Gamma(\frac{\delta}{2})}{\Gamma(\delta-1)}\dfrac{\Gamma(\delta-m)}{\Gamma(\frac{\delta-m}{2})}$.

En particulier, on a :

(i) pour $m = 1$, et $\delta > 1$,

$$(5.f)_{\delta} \qquad \mathbb{M}^{1,\delta-1}\Big(\exp\Big(-\frac{\xi^2}{2}H_1^2\Big)\Big) = \alpha_{1,\delta}\int_{-\infty}^{\infty} dz\,\exp(2i\xi z)\Big(\frac{1}{\operatorname{ch} z}\Big)^{\delta-1},$$

avec $\alpha_{1,\delta} \equiv \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\Gamma(\frac{\delta}{2})}{\Gamma(\frac{\delta-1}{2})}$, et donc :

$$(5.f)'_{\delta} \qquad \mathbb{M}^{1,\delta-1}\Big(\exp\Big(-\frac{\xi^2}{2}H_1^2\Big)\Big) = \left|\frac{\Gamma(\frac{\delta-1}{2}+i\xi)}{\Gamma(\frac{\delta-1}{2})}\right|^2.$$

(ii) pour $m > 1$, on obtient, en faisant tendre m vers δ :

$$(5.g)_m \qquad \mathbb{M}^{m,0}\Big\{H_1^{m-1}\exp\Big(-\frac{\xi^2}{2}H_1^2\Big)\Big\} = \alpha_{m,m}\int_{-\infty}^{\infty} dz\,\exp(2i\xi z)\Big(\frac{z}{\operatorname{sh} z}\Big)^{m-1}$$

avec : $\alpha_{m,m} = \dfrac{2^{\frac{3m-5}{2}}}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(m-1)}$.

En conséquence, si l'on prend, dans la formule $(5.e)_{m,\delta}$, $\delta - m = m-1$, c'est-à-dire : $\delta = 2m-1$, et que l'on compare les formules $(5.e)_{m,2m-1}$ et $(5.g)_m$, on déduit de la formule de duplication :

$$\operatorname{sh}(2z) = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z$$

l'identité en loi suivante :

COROLLAIRE 2.1 : *On note* $h_{m,d} = \displaystyle\int_0^1 \frac{ds}{\rho_{m,d}(s)}$, *avec les notations introduites en* **(5.1)**. *On a :* $h_{m,m-1} \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{1}{2} h_{m,0}$.

Remarque : L'énoncé de la Proposition 2 est écrit à l'aide des paramètres m et δ, alors que celui du Théorème 4 est écrit à l'aide de m et d. Rappelons la relation : $\delta = d - m$; ces deux choix différents nous permettent d'obtenir des formules relativement simples pour les constantes $c_{m,d}$ et $\alpha_{m,\delta}$.

Démonstration de la Proposition 2 : On prend $\alpha = m-1$ dans la formule $(5.d)_{\alpha,m}$ et on pose, pour simplifier les notations : $d = \delta - m$. On a alors, par définition de $\mathbb{M}^{m,d}$, pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne :

$$\text{(5.h)} \quad \begin{aligned} \mathbb{M}^{m,d}\left(H_1^{m-1}\varphi(H_1)\right) &= c_{m,d}\, \mathbb{E}^{\delta}\left[\frac{H_1^{m-1}}{R_1^m}\,\varphi(H_1)\right] \\ &= c_{m,d}\, 2^{2(m-1)}\, \widehat{\mathbb{E}^{\delta}}\left[\frac{1}{(\widehat{R}_1^2)^{m-1}\sqrt{Y}}\,\varphi\Big(\frac{2}{\sqrt{Y}}\Big)\right]. \end{aligned}$$

Introduisons maintenant N variable gaussienne centrée, indépendante de R ; on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^{m,d}\left(H_1^{m-1}\exp\Big(-\frac{\xi^2}{2}H_1^2\Big)\right) &= \mathbb{M}^{m,d}\left(H_1^{m-1}\exp(i\xi N H_1)\right) \\ \text{(d'après (5.h))} \qquad &= c_{m,d}\, 2^{2(m-1)}\, \widehat{\mathbb{E}^{\delta}}\left[\frac{1}{(\widehat{R}_1^2)^{m-1}\sqrt{Y}}\exp\Big(2i\xi\frac{N}{\sqrt{Y}}\Big)\right] \\ &= c'_{m,d}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\, \widehat{\mathbb{E}^{\delta}}\left[\frac{1}{(\widehat{R}_1^2)^{m-1}}\exp\Big(2i\xi\frac{x}{\sqrt{Y}}\Big)\frac{1}{\sqrt{Y}}\right] \\ &= c'_{m,d}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \exp(2i\xi z)\, \widehat{\mathbb{E}^{\delta}}\left[\frac{1}{(\widehat{R}_1^2)^{m-1}}\exp\Big(-\frac{z^2 Y}{2}\Big)\right], \end{aligned}$$

où l'on a posé : $c'_{m,d} = c_{m,d}\, 2^{2(m-1)} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

On déduit maintenant la formule $(5.e)_{m,\delta}$ de la formule *(2.j")*, en posant :

$$\alpha_{m,\delta} = c'_{m,d}\,\gamma_{m,\delta}\,\frac{1}{2^{m-1}} = c_{m,d}\,\frac{2^{m-1}}{\sqrt{2\pi}}\,\gamma_{m,\delta}. \qquad \blacksquare$$

Remarque : Les calculs ci-dessus permettent, par exemple, d'obtenir une expression, et les propriétés asymptotiques, de la transformée de Mellin :

$$F(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dv}{(\operatorname{ch} v)^\zeta} ,$$

qui joue un rôle important en [18].

Posons $\delta = \zeta + 1$. De l'égalité :

$$\widehat{\mathbb{E}^\delta}\Big[\exp\Big(-\frac{v^2}{2} Y\Big)\Big] = (\operatorname{ch} v)^{-\zeta} ,$$

on déduit :

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\mathbb{E}^\delta}\Big[\frac{1}{\sqrt{Y}}\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \mathbb{E}^\delta[H_1] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\delta - 1} \mathbb{E}^\delta[R_1] \qquad \text{(d'après la formule d'Itô)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\zeta} \mathbb{E}\big[(2Z_{\frac{\zeta}{2}})^{\frac{1}{2}}\big] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\zeta} \frac{\Gamma(\frac{\zeta}{2}+1)}{\Gamma(\frac{\zeta+1}{2})} \\ (*) \qquad &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{\zeta}{2})}{\Gamma(\frac{\zeta+1}{2})} \equiv 2^{-\zeta} \frac{\Gamma(\zeta)}{[\Gamma(\frac{\zeta+1}{2})]^2} . \end{aligned}$$

La dernière formule est celle qui figure en [18], et la dernière égalité découle de la formule de duplication de la fonction Γ :

$$\Gamma(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{\zeta - \frac{1}{2}} \Gamma(\tfrac{\zeta}{2}) \Gamma(\tfrac{\zeta+1}{2}) .$$

La formule $(*)$ ci-dessus peut également être déduite directement de *(5.f)*$_\delta$, où l'on prend $\xi = 0$, ce qui donne : $2\int_0^\infty dz \frac{1}{(\operatorname{ch} z)^{\delta-1}} = \frac{1}{\alpha_{1,\delta}}$. ∎

(5.3) Nous donnons maintenant une description de la loi conjointe de

$$\big(h_{m,d} \,;\, \rho_{m,d}(1)\big)$$

en termes de variables beta et gamma.

Bien que cela puisse paraître étonnant au premier abord, les résultats les plus remarquables, et les plus simples à décrire, le sont pour les processus $\rho_{1,d}$. En fait, les simplifications qui ont lieu dans ce cas particulier ($m = 1$) sont dues pour l'essentiel à la propriété de scaling, comme le montre la petite discussion du point (ii) qui suit l'énoncé du Théorème 4. De façon précise, on a le

THÉORÈME 5 : *Soit $d > 0$, et N une variable gaussienne, centrée, réduite, indépendante du processus $\left(X_t \equiv \rho_{1,d}(t)\,,\ t \le 1\right)$.*

Alors, la loi de $N\left(\int_0^1 \frac{ds}{X_s}\,,\ X_1\right)$, *sous* $\mathbb{M}^{1,d}$ *est celle de :*

$$\left(\log(Z_{d/2}) - \log(Z'_{d/2})\ ;\ Z_{d/2} - Z'_{d/2}\right)\,,$$

où $Z_{d/2}$ et $Z'_{d/2}$ désignent deux variables gamma, de paramètre $\frac{d}{2}$, indépendantes.

Remarque : Dans le cas $d = 2$, le processus $\left(\rho_{1,2}(t)\,,\ t \le 1\right)$ est, d'après le point (iii) qui suit l'énoncé du Théorème 4, le méandre brownien $\left(m(t)\,,\ t \le 1\right)$, et le résultat du Théorème 5 peut être exprimé comme suit :

$$N\left(\int_0^1 \frac{ds}{m(s)}\,,\ m(1)\right) \stackrel{\text{(loi)}}{=} (\log Z - \log Z'\ ;\ Z - Z')\,,$$

où Z et Z' sont deux variables exponentielles d'espérance 1, indépendantes.

C'est ce cas particulier, présenté en [5], Théorème 5.4, (1), de façon légèrement différente, qui nous a suggéré l'énoncé général du Théorème 5.

Démonstration du Théorème 5 : a) Pour simplifier l'écriture, posons $\alpha = \frac{d}{2}$. Rappelons ensuite que, à l'aide de l'algèbre des variables beta-gamma, on a :

$$(Z_\alpha\ ;\ Z'_\alpha) \stackrel{\text{(loi)}}{=} (U_\alpha Z_{2\alpha}\ ;\ (1-U_\alpha) Z_{2\alpha})\,,$$

où U_α, désigne une variable beta de paramètres (α, α), et $Z_{2\alpha}$ une variable gamma de paramètre (2α), et U_α et $Z_{2\alpha}$ sont supposées indépendantes. À l'aide de la représentation ci-dessus du couple $(Z_\alpha\ ;\ Z'_\alpha)$, on a :

$$\begin{aligned}\left(\left|\log(Z_\alpha) - \log(Z'_\alpha)\right|\ ;\ |Z_\alpha - Z'_\alpha|\right) &\stackrel{\text{(loi)}}{=} \left(\left|\log\left(\frac{U_\alpha}{1-U_\alpha}\right)\right|\ ;\ |1-2U_\alpha| Z_{2\alpha}\right) \\ &\stackrel{\text{(loi)}}{=} \left(\left|\log\left(\frac{1+X_\alpha}{1-X_\alpha}\right)\right|\ ;\ X_\alpha Z_{2\alpha}\right)\end{aligned}$$

où l'on a posé $X_\alpha = |2U_\alpha - 1|$.

Remarquons maintenant que si l'on note $Y_\alpha = \log\left(\frac{1+X_\alpha}{1-X_\alpha}\right)$, on a : $X_\alpha = \operatorname{th} \frac{Y_\alpha}{2}$.

b) Pour démontrer le théorème, il nous suffit donc de montrer les résultats suivants :

(i) la loi de $N \int_0^1 \frac{ds}{X_s}$ sous $\mathbb{M}^{1,d}$ est celle de $\log \frac{Z_\alpha}{Z'_\alpha}$;

(ii) conditionnellement à $|N| \int_0^1 \frac{ds}{X_s} = y$, la loi de $|N| X_1$ est celle de $\left(\operatorname{th} \frac{y}{2}\right) Z_{2\alpha} \equiv \left(\operatorname{th} \frac{y}{2}\right) Z_d$.

c) — Le point (i) ci-dessus découle de la formule *(5.f)*$_\delta$, ou de *(5.f)*$'_\delta$: en effet, d'après ces formules, les deux variables qui figurent en (i) ci-dessus ont la même fonction caractéristique. Remarquons encore que, d'après la formule *(5.f)*$_\delta$, on a :

$$\mathbb{M}^{1,\delta-1}\big(|N|H_1 \in dy\big) = \alpha_{1,\delta}\, \frac{dy}{\big(\mathrm{ch}\,\frac{y}{2}\big)^{\delta-1}} \,.$$

— Pour démontrer le point (ii) ci-dessus, nous reprenons le calcul fait dans la démonstration du Théorème 2, en considérant maintenant :

$$\tilde{\Phi}_\theta \equiv \tilde{\Phi}_\theta(a,b) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\Big[\frac{1}{R_{S_\theta}}\ \exp -(aR_{S_\theta}+bH_{S_\theta})\Big]$$

Prenons $\theta = 1$, et posons $S \equiv S_1$. À l'aide de la propriété de scaling, on a :

$$\tilde{\Phi}_1 = \mathbb{E}\Big[\frac{1}{\sqrt{S}R_1}\ \exp -\sqrt{S}(aR_1+bH_1)\Big] = \mathbb{E}\Big[\frac{1}{R_1}\ \exp -|N|(aR_1+bH_1)\Big] \,.$$

D'autre part, il découle de la formule *(2.j)* que l'on a :

$$\tilde{\Phi}_1 = \int_0^\infty dy\, e^{-by}\,\big(\mathrm{ch}\,\tfrac{y}{2} + a\ \mathrm{sh}\,\tfrac{y}{2}\big)^{-(\delta-1)} \,.$$

En comparant les deux dernières formules, on obtient :

$$\mathbb{M}^{1,\delta-1}\big(\exp -(b|N|H_1 + a|N|R_1)\big) = \alpha_{1,\delta} \int_0^\infty dy\, e^{-by}\,\big(\mathrm{ch}\,\tfrac{y}{2} + a\ \mathrm{sh}\,\tfrac{y}{2}\big)^{-(\delta-1)} \,,$$

d'où l'on déduit le point (ii) ci-dessus. ∎

Nous abordons maintenant le cas général, plus compliqué à décrire; la démonstration, très semblable à celle du Théorème 5, est laissée au lecteur.

THÉORÈME 6 : *Soit $d > 0$, et $0 < m < 2$; soit également N_m une variable symétrique, indépendante du processus $\big(X_t \equiv \rho_{m,d}(t)\ ;\ t \le 1\big)$, et telle que :*

$$|N_m| \stackrel{\text{(loi)}}{=} \big(2Z_{1-\frac{m}{2}}\big)^{\frac{1}{2}} \,.$$

Alors, la loi de $N_m \Big(\displaystyle\int_0^1 \frac{ds}{X_s}\,,\, X_1\Big)$ *sous* $\mathbb{M}^{m,d}$ *est celle de :*

$$\big(\log(Z_\alpha^{(m)}) - \log(Z'^{(m)}_\alpha)\ ;\ Z_\alpha^{(m)} - Z'^{(m)}_\alpha\big) \,,$$

où $\alpha = \frac{d}{2}$, et les variables $Z_\alpha^{(m)}$ et $Z'^{(m)}_\alpha$ sont définies à l'aide d'un couple de variables indépendantes $(U_\alpha^{(m)}, \overline{Z}_d)$, de la façon suivante :

$$Z_\alpha^{(m)} = U_\alpha^{(m)}\overline{Z}_d \quad ; \qquad Z'^{(m)}_\alpha = (1-U_\alpha^{(m)})\overline{Z}_d \,,$$

$\overline{Z}_d$ désignant une variable gamma de paramètre d.

(5.4) Nous discutons maintenant quelques cas particulièrement intéressants.

(a) Le résultat du Corollaire 2.1 de la Proposition 2, qui consiste en l'identité en loi : $h_{m,m-1} \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{1}{2} h_{m,0}$ nous permet de compléter le Tableau II, relatif aux ponts de Bessel, pour les dimensions $d = 2$ et $d = 3$, de la façon suivante :

$$\text{(5.i)} \qquad \int_0^1 \frac{ds}{\rho_{2,1}(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{r_2(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{s \leq 1} R_3(s)$$

$$\text{(5.j)} \qquad \int_0^1 \frac{ds}{\rho_{3,2}(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{r_3(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{s \leq 1} r_3(s) \, .$$

(b) L'égalité en loi des deux expressions qui figurent à gauche et à droite de *(5.i)*, c'est-à-dire :

$$\text{(5.i)}' \qquad \int_0^1 \frac{ds}{\rho_{2,1}(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} \sup_{s \leq 1} R_3(s)$$

peut, compte tenu de la représentation de $\rho_{2,1}$ à l'aide du processus de Bessel de dimension 3, présentée en (iv) à la suite de l'énoncé du Théorème 4, être considérée comme une autre manière d'exprimer l'identité de Knight [12] :

$$\text{(5.k)} \qquad \frac{A^+_{\tau_s}}{M^2_{\tau_s}} \overset{\text{(loi)}}{=} 4\, T_1^{(3)} \equiv 4 \inf\{t : R_3(t) = 1\} \, ,$$

où $A_t^+ = \int_0^t du\, \mathbb{1}_{(B_u > 0)}$, $M_t = \sup_{u \leq t} B_u$, et $(\tau_s \, , \, s \geq 0)$ désigne l'inverse du temps local en 0 de B, mouvement brownien réel issu de 0.

En effet, la représentation en question implique que le membre de gauche de *(5.i)'* a même loi que :

$$\int_0^1 \frac{du}{\frac{1}{\sqrt{L_3}} R_3(L_3 u)} \equiv \frac{1}{\sqrt{L_3}} \int_0^{L_3} \frac{dv}{R_3(v)}$$

(où l'on a noté : $L_3 = \sup\{t : R_3(t) = 1\}$) alors que, par scaling, le membre de droite de *(5.i)'* a même loi que $\left(T_1^{(3)}\right)^{-1/2}$.

En conséquence, l'identité *(5.i)'* peut être réécrite sous la forme :

$$\text{(5.i)}'' \qquad \left(\int_0^{L_3} \frac{dv}{R_3(v)}\right)^{-2} L_3 \overset{\text{(loi)}}{=} T_1^{(3)} \, .$$

Nous pouvons maintenant généraliser l'identité *(5.i)'* de la façon suivante

PROPOSITION 3 : *Soit $\delta > 2$; posons $\mu = \frac{1}{\delta - 2}$.*
On a alors, pour $s > 0$ fixé :

$$(5.i')_\delta \qquad \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{\rho_{2,\delta-2}(s)} \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{I^{(\mu)}(\tau_s^\mu)}{\left(A^{\mu,-}(\tau_s^\mu)\right)^{1/2}}$$

où l'on a posé : $I^{(\mu)}(t) = \sup_{s\le t}(-X_s^{(\mu)})$, $A_t^{\mu,-} = \int_0^t ds \mathbb{1}_{(X_s^{(\mu)}\le 0)}$, $X_t^{(\mu)} = |B_t| - \mu \ell_t$, $t \ge 0$, *et enfin :* $\tau_s^\mu = \inf\{u : \ell_u^{(\mu)} > s\}$, (ℓ_t), *resp :* $(\ell_t^{(\mu)})$, *désignant le temps local en* 0 *de* B, *resp :* $X^{(\mu)}$.

Nous donnons tout d'abord une démonstration calculatoire de *(5.i')*$_\delta$, en nous appuyant sur l'extension suivante de l'identité de Knight, rappelée ci-dessus :

$$(5.l) \qquad \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\frac{A^{\mu,-}(\tau_s^\mu)}{\left(I^{(\mu)}(\tau_s^\mu)\right)^2}\right)\right] = \left(\frac{\lambda}{\operatorname{sh}\lambda}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda}\right)^{\frac{1}{\mu}}$$

(rappelons également que $\frac{1}{\mu} = \delta - 2$).

La formule *(5.l)* est précisément le premier résultat du Théorème 9.3 de [29].

Ainsi, si l'on pose $K^2 \equiv \frac{A^{\mu,-}(\tau_s^\mu)}{\left(I^{(\mu)}(\tau_s^\mu)\right)^2}$, la formule *(5.e)*$_{2,\delta}$ nous permet d'écrire :

$$\mathbb{M}^{2,\delta-2}\left(H_1 \exp\left(-\tfrac{\xi^2}{2}H_1^2\right)\right) = \alpha_{2,\delta}\int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(2i\xi z)\,\mathbb{E}\left[\exp\left(-\tfrac{z^2}{2}K^2\right)\right].$$

En faisant le changement de variables $z = \frac{u}{K}$ dans le membre de droite, on obtient :

$$\mathbb{M}^{2,\delta-2}\left(H_1 \exp\left(-\tfrac{\xi^2}{2}H_1^2\right)\right) = c\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{K}\exp\left(-\frac{2\xi^2}{K^2}\right)\right],$$

où c est une constante qui ne dépend que de δ.

On déduit de cette identité : $h_{2,\delta-2} \overset{\text{(loi)}}{=} \frac{2}{K}$, c'est-à-dire *(5.i')*$_\delta$.

En fait, une bien meilleure compréhension de l'identité en loi *(5.i')*$_\delta$ peut être obtenue grâce au théorème de Ray-Knight suivant, relatif aux temps locaux de $\left(X_t^{(\mu)} ; t \le \tau_s^\mu\right)$; ce théorème est énoncé et démontré en ([29], p. 127).

THÉORÈME 7 : *Soient $s > 0$, et $\mu > 0$. On note $(\lambda_{(s)}^x ; 0 \le x \le 1)$ le processus (continu en x) des temps d'occupation définis de la façon suivante :*

$$(5.m) \qquad \frac{1}{\left(I^{(\mu)}(\tau_s^\mu)\right)^2}\int_0^{\tau_s^\mu} du\,\mathbb{1}_{(X_u\le 0)}\,f\left(1 + \frac{X_u}{I^{(\mu)}(\tau_s^\mu)}\right) = \int_0^1 dx\,f(x)\,\lambda_{(s)}^x,$$

pour toute fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne.

Alors $\left((\lambda_{(s)}^x)^{1/2} ; 0 \le x \le 1\right)$ a pour loi $\mathbb{M}^{2,\frac{2}{\mu}}$.

COROLLAIRE 7.1 : *Soit $\delta \geq 2$. On pose $\mu = \frac{1}{\delta-2}$. On a alors*

$$\left(\tfrac{1}{2}\, h_{2,\delta-2}\ ;\ \rho_{2,\delta-2}(1)\right) \overset{\text{(loi)}}{=} \left(\frac{I^{(\mu)}(\tau_s^\mu)}{\left(A^{\mu,-}(\tau_s^\mu)\right)^{1/2}}\ ;\ \frac{s}{\left(A^{\mu,-}(\tau_s^\mu)\right)^{1/2}}\right).$$

Démonstration : En combinant la formule *(5.d.1)$_{m=2}$* et le Théorème 7 ci-dessus, on obtient, pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ borélienne :

$$\text{(5.n)} \qquad \mathbb{M}^{2,\delta-2}(f(R_1, H_1)) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{\lambda^1_{(s)}}{2\left(\int_0^1 dx\, \lambda^x_{(s)}\right)^{1/2}}\ ;\ \frac{2}{\left(\int_0^1 dx\, \lambda^x_{(s)}\right)^{1/2}}\right)\right].$$

Or, il résulte de la formule *(5.m)* que l'on a :

$$\left(\left(\int_0^1 dx\, \lambda^x_{(s)}\right)^{-\frac{1}{2}}\ ;\ \lambda^x_{(s)}\right) \equiv \left(\frac{I^{(\mu)}(\tau_s^\mu)}{\left(A^{\mu,-}(\tau_s^\mu)\right)^{1/2}}\ ;\ \frac{s}{I^{(\mu)}(\tau_s^\mu)}\right)$$

Le résultat du corollaire découle alors de *(5.m)*.

Appendice 1 : Sur l'intégrabilité du temps local d'intersection renormalisé du mouvement brownien plan.

$(B_t\,,\ t \geq 0)$ désigne ici un mouvement brownien plan, issu de 0. Le temps local d'intersection renormalisé $(\gamma_t\,,\ t \geq 0)$ est le processus continu qui figure dans la formule de Tanaka-Rosen :

$$(*) \qquad \int_0^t ds \log|B_t - B_s| = \int_0^t \left(dB_u\ ;\ \int_0^u ds\, \frac{B_u - B_s}{|B_u - B_s|^2}\right) + \pi\gamma_t\,.$$

(Voir, par exemple, [31] pour l'existence et la définition de $(\gamma_t\,,\ t \geq 0)$, et la démonstration de la formule $(*)$).

On se propose ici de montrer la

PROPOSITION : *Soit $t > 0$ fixé. Il existe $\lambda > 0$, suffisamment petit, tel que :*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda|\gamma_t|\right)\right] < \infty\,.$$

On peut se ramener, par scaling, à $t = 1$.

Étape 1 : Pour démontrer la Proposition, il suffit, d'après la formule $(*)$, de montrer que chacune des variables :

$$X \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 ds \log|B_1 - B_s| \overset{\text{(loi)}}{=} \int_0^1 ds \log|B_s| \overset{\text{def}}{=} X'$$

et

$$Y \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 \left(dB_u\ ;\ \int_0^u ds\, \frac{B_u - B_s}{|B_u - B_s|^2}\right)$$

admet des moments exponentiels.

Étape 2 : En ce qui concerne X', l'inégalité : $\log u \leq u$, pour $u \geq 1$, entraîne : $X' \leq \int_0^1 ds\{\frac{1}{|B_s|} + |B_s|\}$.

Il découle alors de l'identité en loi du tableau I, pour $\delta = 2$, et du fait que, si β est un mouvement brownien réel, alors :

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\varepsilon\big(\sup_{s\leq 1}|\beta_s|\big)^2\Big)\Big] < \infty\,,$$

pour ε suffisamment petit, qu'il existe $\varepsilon' > 0$ tel que : $\mathbb{E}\big[\exp\big(\varepsilon'(X)^2\big)\big] < \infty$.

Remarque (suggérée par le rapporteur) : Plus simplement, on peut utiliser la décomposition : $|B_t| = \beta_t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{|B_s|}$, où $(\beta_t\,,\ t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel, pour majorer X' par : $\sup_{s\leq 1}|B_s| + 2\sup_{s\leq 1}|\beta_s|$ puis appliquer l'estimation ci-dessus.

Étape 3 : Pour démontrer que Y admet des moments exponentiels, il nous suffit de montrer que le processus croissant, pris au temps 1, de la martingale :

$$Y_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \left(dB_u\ ;\ \int_0^u \frac{ds}{\overline{B_u - B_s}}\right)$$

(on note : $\bar{z}$ le conjugué de z $(\in \mathbb{C})$) admet des moments exponentiels. Or, on a : $<Y>_1 = \int_0^1 du \left|\int_0^u \frac{ds}{B_u - B_s}\right|^2$.

Estimons maintenant :

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda <Y>_1)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\mathbb{E}[<Y>_1^n]\,.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[<Y>_1^n] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^1 du \left|\int_0^u \frac{ds}{B_u - B_s}\right|^2\right)^n\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_0^1 du \left(\left|\int_0^u \frac{ds}{B_u - B_s}\right|^2\right)^n\right] \qquad \text{(d'après l'inégalité de Hölder)} \\
&\leq \frac{1}{n+1}\,\mathbb{E}\left[\left|\int_0^1 \frac{ds}{B_s}\right|^{2n}\right] \qquad \text{(par retournement en } u\text{, et scaling).}
\end{aligned}$$

En reportant cette inégalité dans le développement en série de $\mathbb{E}[\exp(\lambda <Y>_1)]$, il vient :

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda <Y>_1)] \leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda\left|\int_0^1 \frac{ds}{B_s}\right|^2\right)\right] < \infty\,,$$

pour λ suffisamment petit, d'après l'étape 2. ∎

Remarque (suggérée par le rapporteur) : Pour obtenir la dernière estimation, on peut également utiliser l'inégalité de Jensen au lieu du développement en série de l'exponentielle; en effet :

$$\exp\left(\lambda\langle Y\rangle_1\right) = \exp\left(\lambda \int_0^1 du \left|\int_0^u \frac{ds}{B_u-B_s}\right|^2\right) \leq \int_0^1 du \exp\left(\lambda \left|\int_0^u \frac{ds}{B_u-B_s}\right|^2\right)$$

d'où l'on déduit, par retournement en u, et scaling :

$$\mathbb{E}[\exp\left(\lambda\langle Y\rangle_1\right)] \leq \mathbb{E}\left[\exp \lambda \left|\int_0^1 \frac{ds}{B_s}\right|^2\right].$$

Appendice 2 : Processus self-similaires et espérances conditionnelles.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; on dit que $(X_t,\ 0 < t \leq 1)$ processus mesurable à valeurs réelles est self-similaire d'ordre α (on écrira : α-SS) si : pour tout $0 < c \leq 1$, $(X_{ct},\ t \leq 1) \overset{\text{(loi)}}{=} (c^\alpha X_t,\ t \leq 1)$. Une autre démonstration de l'énoncé ci-dessous et de nombreuses conséquences sont développées en [22].

PROPOSITION : *On suppose que X est α-SS et que :* $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$. *Alors, pour tout $\beta > -1$, on a :*

$$\mathbb{E}[X_1 \,|\, \widehat{X}^{(\beta)}] = \widehat{X}^{(\beta)},$$

où : $\widehat{X}^{(\beta)} = (\beta+1)\int_0^1 dt\, t^{\beta-\alpha} X_t$.

Démonstration (suggérée par le rapporteur) :

(i) On commence par remarquer que, pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\mathbb{E}(|X_t|) = t^\alpha\, \mathbb{E}(|X_1|).$$

En conséquence, pour $\beta > -1$, on a :

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^1 s^{\beta-\alpha}\,|X_s|\,ds\Big] = \mathbb{E}(|X_1|)\left(\int_0^1 ds\, s^\beta\right) = \frac{1}{\beta+1}\,\mathbb{E}(|X_1|),$$

et le processus $\left(\xi_t \overset{\text{def}}{=} \int_0^t ds\, s^{\beta-\alpha} X_s,\ t \leq 1\right)$ est absolument continu, et à variation intégrable.

De plus, pour $t \in [0,1]$, on a : $\xi_t = t^{\beta-\alpha+1}\int_0^1 ds\, s^{\beta-\alpha} X_{ts}$, et :

(*) le couple (X_t, ξ_t) a même loi que le couple $(t^\alpha X_1, t^{\beta+1}\xi_1)$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(ix\xi_1) = 1 + ix\int_0^1 ds\, s^{\beta-\alpha}\, e^{ix\xi_s}\, X_s.$$

On déduit ensuite de $(*)$ l'égalité :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\exp(ix\xi_1)\big] &= 1 + ix \int_0^1 ds\, s^\beta\, \mathbb{E}\big[\exp(ixs^{\beta+1}\xi_1)X_1\big] \\ &= 1 + \frac{i}{\beta+1} \int_0^x dy\, \mathbb{E}\big[\exp(iy\xi_1)X_1\big]\ ,\end{aligned}$$

à l'aide du changement de variables : $y = xs^{\beta+1}$.

En dérivant par rapport à x, on obtient :

$$\mathbb{E}\big[\exp(ix\xi_1)\xi_1\big] = \frac{1}{\beta+1}\, \mathbb{E}\big[\exp(ix\xi_1)X_1\big]$$

ce qui équivaut à : $\mathbb{E}[X_1 \,|\, \xi_1] = (\beta+1)\, \xi_1$. ∎

COROLLAIRE : *Soit* $(Y_t\,,\ t \geq 0)$ *processus stationnaire au sens strict tel que* $\mathbb{E}(|Y_0|) < \infty$. *Alors, pour tout* $\lambda > 0$, *on a :*

$$\mathbb{E}[Y_0 \,|\, \tilde{Y}_\lambda] = \tilde{Y}_\lambda$$

où : $\tilde{Y}_\lambda = \lambda \int_0^\infty dt\, e^{-\lambda t}\, Y_t$.

Références

[1] S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois : Estimations asymptotiques de la solution fondamentale de l'équation $u_t - \frac{1}{2}\Delta u = -|\nabla u|$ dans $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$. *Prépublication (Septembre 1994).*

[2] J. Bertoin : Décomposition du mouvement brownien avec dérive en un minimum local par juxtaposition de ses excursions positives et négatives. *Séminaire de Probabilités XXV, Lect. Notes in Math. 1485, p. 330–344, Springer (1991).*

[3] Ph. Biane : Comparaison entre temps d'atteinte et temps de séjour de certaines diffusions réelles. *Séminaire de Probabilités XIX, Lect. Notes in Math. 1123, p. 291–296, Springer (1985).*

[4] Ph. Biane : Sur un calcul de F. Knight. *Séminaire de Probabilités XXII, Lect. Notes in Math. 1321, p. 190–197, Springer (1988).*

[5] Ph. Biane, M. Yor : Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. *Bul. Sc. Math., 2e série, vol. 111, p. 23–101 (1987).*

[6] Z. Ciesielski, S.J. Taylor : First passage times and sojourn density for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path. *Trans. Amer. Math. Soc.* 103, *p. 434–450 (1962).*

[7] P. Embrechts, L.C.G. Rogers, M. Yor : A proof of Dassios' representation of the α-quantile of Brownian motion with drift. *Ann. Appl. Prob.* 5, *p. 757–767 (1995).*

[8] W. Feller : The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. *Ann. Math. Stat.* 22, *p. 427–432 (1951).*

[9] R.K. Getoor, M. Sharpe : Excursions of Brownian motion and Bessel processes. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* 47, *p. 83–106 (1979).*

[10] J.P. Imhof : On the range of Brownian motion and its inverse process. *Ann. Prob.* 13 *(3), p. 1011–1017 (1985).*

[11] J. Kent : Some probabilistic properties of Bessel functions. *Ann. Prob.* 6, *p. 760–770 (1978).*

[12] F.B. Knight : Inverse local times, positive sojourns, and maxima for Brownian motion. *Colloque Paul Lévy, Astérisque* 157-158, *p. 233–247 (1988).*

[13] B. Leblanc : Une approche unifiée pour une forme exacte du prix d'une option dans les différents modèles à volatilité stochastique. *Stoch. and Stoch. Reports, à paraître (1995).*

[14] J.F. Le Gall : Exponential moments for the renormalized self-intersection local time of planar Brownian motion. *Séminaire de Probabilités XXVIII, Lect. Notes in Math. 1583, p. 172–180, Springer (1994).*

[15] J.F. Le Gall : L'équation stochastique $Y_t = B_t + \alpha M_t^Y + \beta I_t^Y$ comme limite des équations de Norris-Rogers-Williams. *Notes non publiées, 1986.*

[16] J.F. Le Gall, M. Yor : Excursions browniennes et carrés de processus de Bessel. *C. R. Acad Sc. Paris, Série I, t. 303, p. 73–76 (1986).*

[17] J.F. Le Gall, M. Yor : Enlacements du mouvement brownien autour des courbes de l'espace. *Trans. Amer. Math. Soc.* 317 *(2), p. 687–722 (1990).*

[18] P. Malliavin : Analyticité réelle des lois conditionnelles de fonctionnelles additives. *C. R. Acad Sc. Paris, Série I, t. 302, p. 73–78 (1986).*

[19] J.W. Pitman : One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process. *Adv. Appl. Prob.* 7, *p. 511–526 (1975).*

[20] J.W. Pitman, M. Yor : Bessel processes and infinitely divisible laws. *In : "Stochastic Integrals", ed. D. Williams, Lect. Notes in Math. 851, Springer (1981).*

[21] J.W. Pitman, M. Yor : A decomposition of Bessel Bridges. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* 59, *p. 425–457 (1982).*

[22] J. Pitman, M. Yor : Random discrete distributions derived from self-similar random sets. *Electronic J. of Prob.* 1, *paper n°4 (1996).*

[23] D. Revuz, M. Yor : Continuous Martingales and Brownian Motion. *Springer (1991).*

[24] P. Vallois : Diffusion arrêtée au premier instant où l'amplitude atteint un niveau donné. *Stoch. and Stoch. Reports* 43, *p. 93–116 (1993).*

[25] P. Vallois : Amplitude du mouvement brownien, et juxtaposition des excursions positives et négatives. *Séminaire de Probabilités XXVI, Lect. Notes in Math. 1526, p. 361–373, Springer (1992).*

[26] P. Vallois : Sur la loi conjointe du maximum et de l'inverse du temps local du mouvement brownien; application à un théorème de F. Knight. *Stoch. and Stoch. Reports* 35, *p. 175–186 (1991).*

[27] D. Williams : Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions I. *Proc. London Math. Soc. (3)* 28, *p. 738–768 (1974).*

[28] M. Yor : Une explication du théorème de Ciesielski-Taylor. *Ann. Inst. Henri Poincaré* 27, *p. 201–213 (1991).*

[29] M. Yor : Some Aspects of Brownian Motion. Part I : Some special functionals. *Lectures in Math. ETH Zürich, Birkhäuser (1992).*

[30] M. Yor : Random Brownian scaling and some absolute continuity relationships. *In : Progress in Probability, vol. 36; eds : E. Bolthausen, M. Dozzi, F. Russo, p. 243–252. Birkhäuser (1995).*

[31] M. Yor : Compléments aux formules de Tanaka-Rosen. *Séminaire de Probabilités XIX, Lect. Notes in Math. 1123, p. 332–349, Springer (1985).*

[32] M. Yor : Some remarks on Akahori's generalized arc sine formula for Brownian motion with drift. *Prépublication – Laboratoire de Probabilités (Décembre 1993).*

J. Pitman
Statistics Department
University of California
BERKELEY CA 94720
U.S.A.

M. Yor
Laboratoire de Probabilités
Université Paris VI
4 place Jussieu
75 252 PARIS Cedex 05