Astérisque

T. JEULIN

Filtrations, sous-filtrations : propriétés élémentaires

Astérisque, tome 236 (1996), p. 163-170

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__163_0>

© Société mathématique de France, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Filtrations, sous-filtrations : propriétés élémentaires

T. Jeulin

Résumé. — Nous donnons des conditions simples pour qu'il existe des martingales continues (ou plus précisément un mouvement brownien) adaptées à une filtration.

Le but de cette note est essentiellement de montrer les résultats suivants :

Théorème 1 *Soit T une variable aléatoire positive définie sur l'espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$; $\mathcal{T}$ est la plus petite filtration [continue à droite, complète] faisant de T un temps d'arrêt. Il existe un processus non constant $\mathcal{T}$-adapté, qui est une martingale continue [dans sa propre filtration] si et seulement si la loi de T a une partie diffuse.*

Théorème 2 *Soit X un processus, à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, à accroissements indépendants stationnaires, sans partie gaussienne, de mesure de Lévy ν, $\mathcal{X}$ la filtration qu'il engendre. Il existe un mouvement brownien B adapté à la filtration $\mathcal{X}$ si et seulement si $\nu[\mathbf{R}^d]$ est infini.*

Soulignons que si B existe, ce n'est pas un $\mathcal{X}$-mouvement brownien, ou, de façon équivalente une $\mathcal{X}$-martingale, puisque l'on sait que les $\mathcal{X}$-martingales sont purement discontinues.

Théorème 3 *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration vérifiant les conditions habituelles. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un mouvement brownien $\mathcal{F}$-adapté est :*

$$\text{pour tout } t > 0, \text{ il existe une v.a. } U_t \ \mathcal{F}_t\text{-mesurable, de loi diffuse.}$$

Dans la suite, Φ désigne une application mesurable de $[0,1]$ dans $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ transformant la mesure de Lebesgue λ_1 en la mesure de Wiener $\mathbf{P}_0$.

I. Soit T une variable aléatoire positive définie sur l'espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, μ sa loi et F_μ sa fonction de répartition. On désigne par $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ la plus petite filtration [continue à droite, complète] faisant de T un temps d'arrêt ([3], Chapitre 5, exemple p. 122-124).

Supposons dans un premier temps μ purement atomique. Soit $\mathcal{G}$ une sous-filtration de $\mathcal{T}$. $\sigma(T)$ étant [complétée d'une tribu] atomique, on sait ([8], [5]) que toute $\mathcal{G}$-martingale locale est une $\mathcal{H}$-semimartingale si

$$\mathcal{H}_t = \bigcap_{s>t} (\mathcal{G}_s \vee \sigma(T)) = \mathcal{T}_\infty.$$

Puisque $\mathcal{H}_0 = \mathcal{T}_\infty$, les $\mathcal{H}$-martingales [locales] sont des processus constants et toute $\mathcal{G}$-semimartingale est à variation finie. Les seules martingales continues $\mathcal{T}$-adaptées sont donc constantes.

Supposons maintenant que la partie diffuse μ_c de μ n'est pas nulle et notons C_μ l'ensemble des points de continuité de F_μ. Soit $0 < a < b$, avec

$$\mu_c\,[\,]a,b[\,] \neq 0.$$

Conditionnellement à $\{T \in C_\mu\,,\ a < T < b\}$ la loi de T est diffuse*, de fonction de répartition

$$F_{\mu,a,b}(x) = 1_{\{a\leq x\}} \frac{\mu_c\,[\,]a, x\wedge b[\,]}{\mu_c\,[\,]a,b[\,]}$$

et $F_{\mu,a,b}(T)$ est uniforme sur $[0,1]$.

$$Y_t = 1_{\{b\leq t\}} 1_{\{T\in C_\mu\,,\ a<T<b\}} \big(\Phi \circ F_{\mu,a,b}(T)\big)_{t-b} \text{ convient :}$$

▷ $\forall t \geq 0, Y_t$ est $\mathcal{T}_t$-mesurable : c'est évident si $t < b$; sinon :
$\{T \in C_\mu\,,\ a < T < b\} \in \mathcal{T}_b$;
$Y_t = 1_{\{T\in C_\mu\,,\ a<T<b\}} \big(\Phi \circ F_{\mu,a,b}(T \wedge b)\big)_{t-b}$ est $\mathcal{T}_b$-mesurable;
▷ Si $(\mathcal{Y}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration [continue à droite, complète] engendrée par Y,

$$\{T \in C_\mu\,,\ a < T < b\} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} \{\exists t \in\,]b, b+\tfrac{1}{n}[\,,\ Y_t \neq 0\} \in \mathcal{Y}_b$$

et pour $0 = t_0 < t_1 = b \leq \ldots \leq t_n$, φ_0, ..., φ_n boréliennes sur $\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big[\prod_{0\leq k\leq n} \varphi_k(Y_{t_k})\,;\ T \in C_\mu\,,\ a < T < b\Big] \\
&\qquad = \varphi_0(0)\ \mathbf{E}\Big[\prod_{1\leq k\leq n} \varphi_k\Big(\big(\Phi\circ F_{\mu,a,b}(T)\big)_{t_k-b}\Big), T \in C_\mu\,,\ a < T < b\Big] \\
&\qquad = \varphi_0(0)\ \mu[\,]a,b[\,]\ \mathbf{P}_0\Big[\prod_{1\leq k\leq n} \varphi_k(\xi_{t_k-b})\Big].
\end{aligned}$$

* On travaille de fait avec la partie $\mathcal{T}$-totalement inaccessible de T.

On en déduit facilement que Y est une $\mathcal{Y}$-martingale continue, de processus croissant

$$\langle Y, Y\rangle_t = 1_{\{T\in C_\mu\,,\, a<T<b\}}(t-b)_+.$$

D'où le théorème 1.

Sous les mêmes conditions sur T, soit $a = (a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une suite croissante (à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}_+$) avec

$$\inf_n a_n = 0, \ \sup_n a_n = \infty$$

et soit

$$\begin{aligned} T^{(a)} &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_{n+1} 1_{\{T\in C_\mu,\, a_n<T\le a_{n+1}\}} + \infty 1_{\{T\notin C_\mu\}}, \\ Y_t^{(a)} &= \sum_{\{n\in\mathbf{Z} | \mu_c[]a_n, a_{n+1}[]>0\}} 1_{\{T\in C_\mu,\, a_n<T\le a_{n+1}\le t\}} \big(\Phi\circ F_{\mu,a_n,a_{n+1}}(T)\big)_{t-a_{n+1}}. \end{aligned}$$

$Y^{(a)}$ est une $(\mathcal{Y}_t^{(a)})$-martingale continue, de processus croissant

$$\big\langle Y^{(a)}, Y^{(a)}\big\rangle_t = \big(t - T^{(a)}\big)_+.$$

Remarques

1) Toute $\mathcal{T}$-martingale locale est purement discontinue. Cette dernière propriété peut donc être perdue si on diminue la filtration.

2) Ce travail a son origine dans l'étude de la notion suivante, introduite par Yor : *une filtration $\mathcal{U}$ est dite automatique si pour toute sous-filtration $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$, toute $\mathcal{V}$-semi-martingale est une $\mathcal{U}$-semi-martingale.*

Proposition 1 *La filtration $\mathcal{U}$ est automatique si et seulement si*

$$(\natural)\quad \forall t\ge 0,\ \mathcal{U}_t \textit{ est atomique [aux ensembles } \mathbf{P}\textit{-négligeables près].}$$

Démonstration. Vu le théorème de Stricker ([10]), une sous-filtration d'une filtration automatique est automatique; d'après la remarque *1*), dans une filtration automatique $\mathcal{U}$, les temps d'arrêt ont des lois atomiques; si $\mathbf{P}\,|_{\mathcal{U}_t}$ n'était pas atomique, il existerait une variable aléatoire réelle η, $\mathcal{U}_t$-mesurable telle que $\mathbf{P}_\eta$ ait une partie diffuse; $t+|\eta|$ serait un $\mathcal{U}$-temps d'arrêt de loi non atomique. Inversement si $\mathcal{U}$ vérifie ($\natural$), toute sous-filtration $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ vérifie aussi ($\natural$) et toute $\mathcal{V}$-martingale est à variation finie. □

Une filtration automatique $\mathcal{U}$ vérifie la propriété

$$(\flat)\ \text{toute } \mathcal{U}\text{-martingale est à variation finie.}$$

D'après la caractérisation de Jacod et Skorohod ([4]-théorème 1) des filtrations vérifiant ($\flat$), une filtration $\mathcal{U}$ est automatique si, et seulement si, il existe une suite croissante $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{U}$-temps d'arrêt avec :

$$T_0 = 0,\ \sup_n T_n = \infty,\ \mathcal{U}_t = \mathcal{U}_{T_n} \text{ sur } \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$$

et $\forall n \in \mathbf{N}, \mathcal{U}_{T_n}$ est une tribu atomique.

3) Supposons μ non atomique; soit Y une martingale continue $\mathcal{T}$-adaptée, $\mathcal{Y}$ la filtration qu'elle engendre et

$$\tau = \inf\{t \mid Y_t \neq Y_0\} \ \big(= \inf\{t \mid \langle Y,Y\rangle_t > 0\}\big)$$

τ est un $\mathcal{Y}$- (et un $\mathcal{T}$-) temps d'arrêt vérifiant $T \leq \tau$; il existe donc $\phi : \mathbf{R}_+ \to \overline{\mathbf{R}}_+$ borélienne avec $\phi(x) \geq x$ pour μ-presque tout x et $\tau = \phi(T)$; les fonctions ϕ admissibles sont celles pour lesquelles la loi de T (sur $\{T < \infty\}$) conditionnellement à $\phi(T)$ est diffuse, i.e. telles que :

$$(\clubsuit) \text{ pour toute } h \text{ borélienne sur } \overline{\mathbf{R}}_+,\ \mathbf{P}[h \circ \phi(T) = T\,;\ T < \infty] = 0.$$

Conditionnellement à τ, les martingales continues sont constantes après τ sur les atomes de la loi conditionnelle de T sachant τ, d'où la nécessité de ($\clubsuit$). Inversement, soit V un noyau de $(\overline{\mathbf{R}}_+, \overline{\mathcal{R}}_+)$ dans lui même tel que $V(\tau, A)$ soit une version [régulière] de l'espérance conditionnelle $\mathbf{P}[T \in A \mid \phi(T)]$; sous ($\clubsuit$), on peut supposer :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, V(t,.) \text{ est une probabilité diffuse portée par } \mathbf{R}_+\ ;$$

le processus

$$(\omega, t) \to Y_t(\omega) = 1_{\{\tau(\omega)\leq t\}}\ \Phi\big(V(\tau(\omega), [0, T(\omega)])\big)_{t-\tau(\omega)}$$

a les propriétés requises.

II. Supposons données sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ vérifiant les conditions habituelles et une suite $(T_r)_{r\geq 0}$ de $\mathcal{F}$-temps d'arrêt *indépendants*, tels que

$$\text{pour tout } r,\ T_r \text{ a une loi diffuse } \mu_r.$$

Pour chaque r on choisit $0 < a_r < b_r$ avec $\mu_r\,\big[\,]a_r, b_r[\,\big] \neq 0$; on construit comme en I

$$Y_t^{(r)} = 1_{\{b_r \leq t\}} 1_{\{a_r < T_r < b_r\}} \big(\Phi \circ F_{\mu_r, a_r, b_r}(T)\big)_{t-b_r}.$$

Les processus $Y^{(r)}$ sont adaptés à la filtration $\mathcal{F}$, indépendants. Désignons par $\mathcal{U}$ la filtration engendrée par la famille $(Y^{(r)})_{r\geq 0}$; chaque $Y^{(r)}$ est une $\mathcal{U}$-martingale continue, de processus croissant

$$\langle Y^{(r)}, Y^{(r)} \rangle_t = 1_{\{a_r < T_r < b_r\}} (t - b_r)_+$$

et pour $p \neq r$, $\langle Y^{(r)}, Y^{(p)} \rangle = 0$.
Pour toute suite de réels (y_r) avec $\sum_r y_r^2 < \infty$, la série $\sum_r y_r Y_\cdot^{(r)}$ converge presque sûrement uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}_+$ et définit un processus continu Z qui est une $\mathcal{U}$-martingale continue, de processus croissant

$$\langle Z, Z \rangle = \int_{[0,.]} \left(\sum_{r \geq 0} y_r^2 1_{\{a_r < T_r < b_r\}} 1_{\{b_r < s\}} \right) ds.$$

Supposons de plus : $\exists(\beta_r)$ suite décroissant vers 0 avec

$$\sum_r \mu_r [\,]0, \beta_r[\,] = \infty$$

et prenons :

$$\forall r \geq 0\,,\ a_r = 0\,,\ b_r = \beta_r\,,\ y_r \neq 0.$$

Par application du lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbf{P}\left[\limsup_r \{0 < T_r < \beta_r\}\right] = 1$$

et le processus

$$H = \sum_{r \geq 0} y_r^2 1_{\{a_r < T_r < b_r\}} 1_{]b_r, \infty[}$$

est $\mathcal{U}$-prévisible et presque sûrement à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$;

$$\frac{1}{\sqrt{H}} \cdot Z \textit{ est un } \mathcal{U}\textit{-mouvement brownien, adapté à la filtration } \mathcal{F}.$$

Soit en particulier $\mathcal{X}$ la filtration d'un processus à accroissements indépendants X [sans partie gaussienne], dont la mesure de Lévy ν charge tout voisinage de 0. Soit $\widetilde{\nu}$ l'image de ν par $x \to \|x\|$, (α_n) une suite décroissante de réels strictement positifs, avec $\lim_n \alpha_n = 0$ et $\forall n$, $\rho_n \equiv \widetilde{\nu}\big[]\alpha_{n+1}, \alpha_n]\big] > 0$. Les processus

$$N^{(h)} = \sum_{s \leq \cdot} 1_{\{\|\Delta X_s\| \in]\alpha_{h+1}, \alpha_h]\}}$$

sont des processus de Poisson indépendants, de paramètres respectifs ρ_h ; soit T_h le premier temps de saut de $N^{(h)}$;

$$\mathbf{P}[T_h \leq x] = 1 - e^{-x\rho_h}.$$

Si on peut choisir (β_r) décroissant vers 0 avec $\sum_h \rho_h \beta_h = \infty$, on aura à notre disposition un mouvement brownien adapté à la filtration de X.

Si $\nu[\mathbf{R}^d] = \infty$, soit $\phi : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$, croissante, continue à droite, avec

$$\phi(0+) = 0 \text{ et } \int \phi(\|x\|)\, d\nu(x) = \infty\ ;$$

si $\beta_h = \phi(\alpha_h)$,

$$\sum_h \rho_h \beta_h = \int \Big(\sum_h \beta_h 1_{]\alpha_{h+1},\alpha_h]}\Big)(\|x\|)\, d\nu(x) \geq \int_{]0,\alpha_0]} \phi(\|x\|)\, d\nu(x) = \infty.$$

A contrario, si $\gamma = \nu[\mathbf{R}^d]$ est fini, $\tau = \inf\{t > 0 \mid X_t \neq X_{t-}\}$ suit une loi exponentielle de paramètre γ et

$$X_{t\wedge\tau} = ct \wedge \tau + U 1_{\{\tau \leq t\}}$$

($c \in \mathbf{R}^d$, U variable indépendante de τ de loi $\frac{1}{\gamma}\nu$) et tout processus adapté à la filtration de X est déterministe sur $[0, \tau[$.

D'où le théorème 2.

III. La condition énoncée au théorème 3 est évidemment nécessaire. Pour la réciproque on utilisera le

Théorème 4 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé.*
i) Soit $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_n\}$ *une partition* $\mathcal{A}$*-mesurable de* Ω *et* C *une sous-tribu de* $\mathcal{A}$*, telle que :*

il existe une variable C*-mesurable de loi diffuse.*

Il existe alors une partition $\mathcal{D} = \{D_1, ..., D_n\}$ *indépendante de* $\mathcal{B}$ *et telle que*

$$\forall i = 1, ..., n,\ \ \mathbf{P}[B_i] = \mathbf{P}[D_i].$$

ii) Soit $(\mathcal{G}_n)_{n\in -\mathbf{N}}$ *une suite croissante de sous-tribus de* $\mathcal{A}$ *telle que :*

$$\forall n \in -\mathbf{N}\ ,\ \exists H_n\ \mathcal{G}_n\text{-mesurable de loi diffuse;}$$

il existe une suite $(Y_n)_{n\in-\mathbf{N}}$ *de variables indépendantes, de même loi de Bernoulli (paramètre* $\frac{1}{2}$*), adaptée à la filtration* $(\mathcal{G}_n)_{n\in-\mathbf{N}}$*. En conséquence il existe une suite* $(Z_n)_{n\in-\mathbf{N}}$ *de variables indépendantes, de même loi uniforme sur* $[0,1]$*, adaptée à la filtration* $(\mathcal{G}_n)_{n\in-\mathbf{N}}$*.*

J.-P. Thouvenot m'a signalé deux versions du théorème 4-*i*) (on passe facilement, par récurrence, de *i*) au premier point de *ii*)); reste à définir Z_{-m} ($m \in \mathbf{N}$) par

$$Z_{-m} = \sum_{k\geq 1} Y_{p_m^k}$$

où p_m est le $(m+1)^{ème}$ nombre premier). La première est la proposition *1* de [1] qui construisent la partition $\mathcal{D}$ "à la main" ; la deuxième est le lemme *8* de [2] qui en font une conséquence [immédiate?] du théorème suivant dû à Liapounoff ([6]) (pour une démonstration voir aussi [7] ou [9], théorème *5.5*) :

Théorème 5 *Soit $\mu_1, ..., \mu_r$ des mesures bornées, sans atomes, définies sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$;*

$$\{(\mu_1[H], ..., \mu_r[H]) \mid H \in \mathcal{E}\}$$

est un sous-ensemble convexe compact de $\mathbf{R}^r$.

Indiquons (en suivant J.P.Thouvenot) comment en déduire le théorème 4. On supposera (ce n'est pas une restriction) :

$$\forall i = 1, ..., n, \ \mathbf{P}[B_i] > 0.$$

D'après le théorème 5 appliqué à $(\Omega, \mathcal{C})$, aux mesures [sans atomes] $\mu_0 = \mathbf{P}$ et pour $i = 1, ..., n, \mu_i = \mathbf{P}[\,.\mid B_i]$, il existe $D_1 \in \mathcal{C}$ avec :

$$\mathbf{P}[D_1] = \mathbf{P}[B_1] \text{ et } \forall i = 1, ..., n, \ \mathbf{P}[D_1 \cap B_i] = \mathbf{P}[B_1]\mathbf{P}[B_i] = \mathbf{P}[D_1]\mathbf{P}[B_i].$$

Supposons $r < n-1$ et supposons trouvés $D_1, ..., D_r$ disjoints, dans $\mathcal{C}$, vérifiant

$$\forall i = 1, ..., n\,,\ \forall j = 1, ..., r\,,\ \mathbf{P}[D_j] = \mathbf{P}[B_j] \text{ et } \mathbf{P}[D_j \cap B_i] = \mathbf{P}[D_j]\mathbf{P}[B_i].$$

Comme

$$\frac{\mathbf{P}[B_{r+1}]}{\mathbf{P}\left[\left(\bigcup_{1\le k\le r} D_k\right)^c\right]} = \frac{\mathbf{P}[B_{r+1}]}{\sum_{r+1\le h\le n}\mathbf{P}[B_h]} \le 1,$$

avec $\mu_0 = \mathbf{P}\left[\ .\ \middle|\left(\bigcup\limits_{1\le k\le r} D_k\right)^c\right]$ et pour $i = 1, ..., n$, $\mu_i = \mathbf{P}\left[\ .\ \middle|\left(\bigcup\limits_{1\le k\le r} D_k\right)^c \cap B_i\right]$,

$$\exists D \in \mathcal{C},\ \forall j = 0, ..., n\,,\ \mu_j[D] = \frac{\mathbf{P}[B_{r+1}]}{\mathbf{P}\left[\left(\bigcup_{1\le k\le r} D_k\right)^c\right]}$$

i.e. avec $D_{r+1} = D \cap \left(\bigcup_{1\le k\le r} D_k\right)^c$,

$$\mathbf{P}[D_{r+1}] = \mathbf{P}[B_{r+1}]$$

et pour $i = 1, ..., n$,

$$\mathbf{P}[D_{r+1} \cap B_i] = \frac{\mathbf{P}[B_{r+1}]}{\mathbf{P}\left[\left(\bigcup_{1\le k\le r} D_k\right)^c\right]}\,\mathbf{P}\left[B_i \cap \left(\bigcup_{1\le k\le r} D_k\right)^c\right] = \mathbf{P}[D_{r+1}]\ \mathbf{P}[B_i]$$

D'où le résultat par récurrence, en définissant $D_n = \left(\bigcup_{1\le k\le n-1} D_k\right)^c$.

Démonstration du théorème 3.
Elle est triviale, compte tenu de ce qui précède : soit $(\alpha_n)_{n \in -\mathbf{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs, avec $\inf_n \alpha_n = 0$, $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{\alpha_n}$ et $(Z_n)_{n \in -\mathbf{N}}$ une suite de variables indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$ avec Z_n $\mathcal{F}_{\alpha_n}$-mesurable.

$$W_t = \sum_{\alpha_n \leq t} \Phi(Z_n)_{t-\alpha_n}$$

répond à la question.

Exemple Soit B un mouvement brownien réel (issu de 0) et pour tout $t \geq 0$,

$$g_t = \sup\{s < t \mid B_s = 0\}$$

pour tout $t > 0$, $\frac{1}{\sqrt{t}} g_t$ suit la loi (diffuse) de l'arcsinus; on peut donc construire un mouvement brownien adapté à la filtration des zéros de B.

Bibliographie

[1] De La Rue T., Ladouceur S., Peškir G., Weber M. : On the central limit theorem for aperiodic dynamical systems and applications. Prépublication, University of Aarhus, 1993.

[2] Del Junco A., Rudolph D.A. : Residual behavior of induced maps. Preprint, University of Toronto, 1993.

[3] Dellacherie C. : Capacités et processus stochastiques. Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, Vol. 67, Springer 1972.

[4] Jacod J., Skorohod A.V. : Jumping filtrations and martingales with finite variation. Séminaire de Probabilités 28, Lect. Notes in Math. 1583, 21-35, Springer 1994.

[5] Jeulin T. : Semi-martingales et grossissement d'une filtration. Lect. Notes in Math. 833, Springer 1980.

[6] Liapounoff A.A. : Sur les fonctions-vecteurs complètement additives (*en russe*). Izv. Akad. Nauk SSSR 4, 465-478, 1940.

[7] Lindenstrauss J. : A short proof of Liapounoff's convexity theorem. J. Math. Mec. 15, 971-972, 1966.

[8] Meyer P.-A. : Sur un théorème de Jacod. Séminaire de Probabilités 12, Lect. Notes in Math. 649, 57-60, Springer 1978.

[9] Rudin W. : Functional Analysis. Mac-Graw Hill, 1973.

[10] Stricker C. : Quasi-martingales, martingales locales et filtration naturelle. Z.f.W. 39, 55-63, 1977.

T. Jeulin
CNRS URA 1321
Université Denis Diderot-Paris VII
4, place Jussieu
Tour 45, 5ème étage, Couloir 45-55
75251 PARIS Cedex 05