

# *Astérisque*

LUC ILLUSIE

## **Exposé I : Autour du théorème de monodromie locale**

*Astérisque*, tome 223 (1994), Séminaire Bourbaki, exp. n° 1, p. 9-57

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1994\\_\\_223\\_\\_9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__223__9_0)

© Société mathématique de France, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Exposé I

# AUTOUR DU THÉORÈME DE MONODROMIE LOCALE

par Luc Illusie

### 0. Introduction.

Cet exposé ne contient aucun résultat original. On se borne à décrire quelques aspects du théorème de monodromie locale, qui, à des titres divers, ont inspiré les constructions de Hyodo-Kato (exp. V) et Fontaine (exp. VIII). On rappelle d'abord très brièvement, au n° 1, l'énoncé et les principaux corollaires du théorème de monodromie locale  $\ell$ -adique de Grothendieck, en suivant de près la présentation de Deligne dans (SGA 7 I) et [11, 1.7]. Au n° 2, on travaille sur  $\mathbb{C}$ . On explique la démonstration géométrique de la variante du théorème de monodromie locale pour les espaces analytiques complexes, puis l'on étudie en détail le cas de la réduction semi-stable. Pour  $S$  un disque ouvert de centre 0 dans  $\mathbb{C}$  et  $f : X \rightarrow S$  un morphisme projectif d'espaces analytiques complexes, lisse en dehors de 0, et ayant réduction semi-stable en 0 (2.1.1), l'unipotence de la monodromie  $T$  de  $H^*(X_t, \mathbb{C})$  ( $t \in S^* = S - \{0\}$ ) a une interprétation classique en termes de la connexion de Gauss-Manin sur la cohomologie de de Rham relative  $R^*f_*\Omega_{X^*/S^*}$  (où  $X^* = f^{-1}(S^*)$ ). On rappelle plus précisément comment, d'après Steenbrink, peuvent se calculer, à l'aide de complexes de de Rham à pôles logarithmiques relatifs, le complexe des cycles évanescents  $R\Psi(\mathbb{C})$  et le logarithme  $N$  de  $T$ . La théorie de Steenbrink fournit de plus une structure de Hodge mixte  $H_0^*$ , limite, en un certain sens, pour  $t \rightarrow 0$ , des structures de Hodge pures des  $H^*(X_t)$ , et dont  $N$  est un endomorphisme nilpotent de type  $(-1, -1)$ . On explique en 2.3 le principe de la construction. Sur  $H_0^*$  on dispose alors, *a priori*, de deux filtrations : la filtration par le poids (de la structure de Hodge mixte) et la filtration de monodromie (dédiuite de  $N$ ). Leur coïncidence est le résultat le plus profond de

la théorie. On en donne quelques corollaires, dus à M. Saito [23], généralisant notamment le théorème local du cycle invariant ([2], [5]). Au n° 3, on explique certains analogues de la théorie précédente sur un trait  $S$  de caractéristique résiduelle  $p > 0$ . Pour  $f : X \rightarrow S$  propre et à réduction semi-stable (3.1.1), et  $\ell$  premier  $\neq p$ , on commence par résumer le calcul, dû à Grothendieck (SGA 7 I), complété par Rapoport-Zink [19], des cycles évanescents  $R^i\Psi(\mathbb{Z}_\ell)$ , munis de l'action de la monodromie : un point important, prouvé dans [19], est que l'inertie agit trivialement. On décrit ensuite l'analogie, construit par Rapoport-Zink (loc. cit.), du complexe utilisé par Steenbrink dans [27], auquel on a fait allusion plus haut. Cette construction donne naissance à une "suite spectrale des poids" ((3.6.9), (3.8.2)), aboutissant à la cohomologie de la fibre générique géométrique. La coïncidence entre la filtration aboutissement et la filtration de monodromie est ici conjecturale. On fait le point sur ce qui est connu. On reformule également, sous une forme un peu plus précise, certaines questions d'indépendance de  $\ell$ , déjà soulevées par Serre-Tate [26]. La perversité du complexe  $R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)$ , convenablement décalé, est en filigrane dans toute cette étude. Elle découle du théorème d'Artin sur la dimension cohomologique des schémas affines (SGA 4 XIV 3.1) et du fait (bien connu, semble-t-il) que le foncteur  $R\Psi_\eta$  commute à la dualité. Nous en donnons une démonstration au n° 4, calquée sur celle des théorèmes de finitude de Deligne dans (SGA 4 1/2 Th. finitude).

Je suis heureux de remercier P. Deligne, J.-M. Fontaine, K. Kato, N. Katz et M. Raynaud pour d'utiles discussions dans la préparation de cet exposé, ainsi que M. Rapoport pour ses remarques sur une première version de ce texte et sa suggestion d'inclure le complément (4.7). Je suis particulièrement reconnaissant à O. Gabber de m'avoir communiqué la preuve de (4.2) et signalé une erreur dans la démonstration initiale de (4.6). Mes remerciements les plus chaleureux vont, enfin, à G. Laumon pour sa lecture minutieuse du manuscrit final, ses nombreux commentaires, et son aide dans la mise au point de la démonstration de (4.6).

## Sommaire

1. Le théorème de monodromie locale  $\ell$ -adique.
2. Réduction semi-stable et structure de Hodge limite .
  - 2.1. La démonstration géométrique du théorème de monodromie locale.
  - 2.2. Monodromie locale et connexion de Gauss-Manin .
  - 2.3. Complexe de Steenbrink et structure de Hodge limite.
  - 2.4. Poids et monodromie .
3. Réduction semi-stable : cas de la caractéristique positive ou mixte.
4. Appendice : cycles évanescents et dualité en cohomologie étale.

### 1. Le théorème de monodromie locale $\ell$ -adique.

1.1. On fixe, dans ce numéro, un anneau de valuation discrète hensélien  $R$ , de corps des fractions  $K$  et de corps résiduel  $k$ . On note  $p$  l'exposant caractéristique de  $k$ . On choisit une clôture algébrique  $\overline{K}$  de  $K$ , on note  $\overline{R}$  le normalisé de  $R$  dans  $\overline{K}$ , et  $\overline{k}$  le corps résiduel de  $\overline{R}$  (qui est une clôture algébrique de  $k$ ). On note  $I$  le **groupe d'inertie**, donné par la suite exacte

$$1 \rightarrow I \rightarrow \text{Gal}(\overline{K}/K) \rightarrow \text{Gal}(\overline{k}/k) \rightarrow 1 .$$

Il s'insère dans une suite exacte canonique ([25] et [8, § 2])

$$1 \rightarrow P \rightarrow I \xrightarrow{t} \mathbf{Z}_{(p')}(1) \rightarrow 1 ,$$

où  $P$  est un pro- $p$ -groupe et  $\mathbf{Z}_{(p')}(1) = \prod_{\ell \neq p} \mathbf{Z}_{\ell}(1)$  est le **groupe d'inertie modéré** ( $\mathbf{Z}_{\ell}(1) = \varprojlim \mu_{\ell^n}(\overline{k})$ ). Soit  $\ell$  un nombre premier  $\neq p$ . On note

$$t_{\ell} : I \rightarrow \mathbf{Z}_{\ell}(1)$$

le  $\ell$ -composant de  $t$ ; le noyau de  $t_{\ell}$  est un groupe profini d'ordre premier à  $\ell$ .

Une **représentation  $\ell$ -adique** de  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$  (ou plus généralement, d'un groupe profini  $G$ ) est un homomorphisme  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ , où  $V$  est un  $\overline{\mathbf{Q}}_{\ell}$ -espace vectoriel de dimension finie ( $\overline{\mathbf{Q}}_{\ell}$  étant une clôture algébrique de  $\mathbf{Q}_{\ell}$ ), tel

qu'il existe une extension finie  $E$  de  $\mathbb{Q}_\ell$  contenue dans  $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$  et une  $E$ -structure  $V_E$  sur  $V$  telles que  $\rho$  se factorise en un homomorphisme continu  $G \rightarrow GL(V_E)$  ( $GL(V_E)$  étant muni de sa topologie naturelle de groupe de Lie  $\ell$ -adique).

Soit  $G = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ . On dit qu'une représentation  $\ell$ -adique  $\rho$  de  $G$  est **quasi-unipotente** s'il existe un sous-groupe ouvert  $I_1$  de  $I$  tel que la restriction de  $\rho$  à  $I_1$  soit unipotente (i.e. telle que  $\rho(g)$  soit unipotent pour tout  $g \in I_1$ ). Un résultat fondamental de Grothendieck affirme que cette propriété est automatique dès que  $k$  n'est pas trop gros :

**THÉORÈME 1.2** (Grothendieck) [26, Appendice]. — *On suppose qu'aucune extension finie de  $k$  ne contient toutes les racines de l'unité d'ordre une puissance de  $\ell$ . Alors toute représentation  $\ell$ -adique de  $G$  est quasi-unipotente.*

1.3. Soit  $X$  un schéma séparé de type fini sur  $K$ . D'après (SGA 4 XIV) (resp. (SGA 4 1/2 Th. finitude)), les groupes de cohomologie  $H_c^n(X_{\overline{K}}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$  (resp.  $H^n(X_{\overline{K}}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ ) sont de dimension finie sur  $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ . Le groupe de Galois  $G$  y opère par transport de structure, d'où une représentation  $\ell$ -adique

$$(1.3.1) \quad \rho : G \rightarrow GL(H) ,$$

où  $H$  est l'un des groupes précédents.

**THÉORÈME 1.4.** — *La représentation  $\rho$  (1.3.1) est quasi-unipotente.*

Comme il est expliqué dans (SGA 7 I 1), Grothendieck a déduit ce résultat d'une variante de 1.2 par un passage à la limite utilisant la méthode de lissification de Néron (voir [3, 3.1 theorem 3 + 3.6 lemma 5]).

Il est plausible que la conclusion de 1.4 est encore vraie si l'on remplace le faisceau constant  $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$  sur  $X$  par un  $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -faisceau "d'origine géométrique" (cf. [2, 6.2]).

1.5. Soit  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  une représentation quasi-unipotente. Il existe alors un unique morphisme nilpotent

$$(1.5.1) \quad N : V(1) \rightarrow V ,$$

caractérisé par le fait que, si  $I_1$  est un sous-groupe ouvert de  $I$  tel que la restriction de  $\rho$  à  $I_1$  soit unipotente, alors

$$(1.5.2) \quad \rho(g) = \exp(Nt_\ell(g)) \text{ pour tout } g \in I_1 .$$

L'unicité est en effet claire. Pour l'existence, il suffit d'observer que, le noyau  $P_\ell$  de  $t_\ell$  étant un groupe profini d'ordre premier à  $\ell$ , l'image par  $\rho$  de  $P_\ell$  est finie (on peut supposer que  $\rho$  se factorise à travers  $GL(V_E)$  comme

ci-dessus; si  $L$  est un réseau de  $V_E$  stable par  $G$ , le noyau  $K$  de la flèche de réduction  $GL(L) \rightarrow GL(L/\mathfrak{m}_E L)$  est un pro- $\ell$ -groupe, donc  $K \cap \rho(P_\ell) = \{1\}$ . Comme les éléments de  $\rho(P_\ell \cap I_1)$  sont unipotents, on a donc  $\rho(P_\ell \cap I_1) = \{1\}$ . La restriction de  $\rho$  à  $I_1$  se factorise donc à travers  $t_\ell(I_1)$ , et, quitte à rapetisser  $I_1$ ,  $\log \rho(t_\ell(g))$  est défini pour  $g \in I_1$ .

L'endomorphisme  $N$  s'appelle le **logarithme de la partie unipotente de la monodromie locale**. Il résulte de la caractérisation (1.5.2) que  $N : \mathbb{Q}_\ell(1) \rightarrow \text{End}(V)$  est invariant par Galois : pour  $z \in \mathbb{Q}_\ell(1)$ ,  $x \in V$ ,  $g \in G$ , on a

$$(1.5.3) \quad \rho(g)N(zx) = N(\chi(g)z \cdot \rho(g)x) ,$$

où  $\chi : G \rightarrow \mathbb{Z}_\ell^*$  est le caractère cyclotomique. En particulier, si  $k$  est le corps fini  $\mathbb{F}_q$  et  $F \in G$  relève le Frobenius géométrique ( $a \mapsto a^{\frac{1}{q}}$ ) de  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ , on a

$$N(zFx) = qFN(zx) ,$$

relation qu'on écrit parfois, par abus,

$$(1.5.4) \quad NF = qFN .$$

Le couple  $(\rho, N)$  détermine alors une représentation du **groupe de Weil-Deligne**  $\mathcal{W}(\bar{K}/K)$  [8, § 8].

L'endomorphisme  $N$  permet de définir la **filtration de monodromie locale** de  $V$  : c'est l'unique filtration finie croissante (séparée et exhaustive)  $\cdots \subset M_i V \subset M_{i+1} V \subset \cdots$  telle que  $NM_i V(1) \subset M_{i-2} V$  et que  $N^k$  induise un isomorphisme  $\text{gr}_k^M V(k) \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{-k}^M V$ . Si l'on désigne par  $K \cdot V$  (resp.  $I \cdot V$ ) la **filtration noyau** (resp. **image**) définie par

$$K_k V = \text{Ker } N^{k+1} \quad (\text{resp. } I^k V = \text{Im } N^k) ,$$

la filtration de monodromie est "produit de convolution" des filtrations  $K$  et  $I$  :

$$(1.5.5) \quad M_j = \sum_{k-i=j} I^i \cap K_k ,$$

cf. [28, 2.3]. Nous examinerons, au n° 3, quelques problèmes concernant ces filtrations.

## 2. Réduction semi-stable et structure de Hodge limite.

Dans tout ce numéro, nous travaillons exclusivement sur  $\mathbb{C}$ .

### 2.1. La démonstration géométrique du théorème de monodromie locale.

2.1.1. Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme propre d'espaces analytiques complexes. On suppose que  $S$  est un disque ouvert, et que  $f$  est lisse hors de  $0 \in S$ . Comme la restriction de  $f$  à  $S^* = S - \{0\}$  est un fibré localement trivial au sens  $C^\infty$ , le générateur positif de  $\pi_1(S^*)$  induit, pour  $t \in S^*$ , un automorphisme de  $H^*(X_t, \mathbb{Z})$ , noté  $T_t$  (ou  $T$  s'il n'y a pas de confusion à craindre), et appelé automorphisme de **monodromie locale** (voir (SGA 7 XIV 1.1) pour les conventions de signes). Le théorème de monodromie locale affirme que cet automorphisme est quasi-unipotent. Plus précisément :

THÉORÈME 2.1.2. — *Sous les hypothèses de 2.1.1, il existe un entier  $a \geq 1$  tel que*

$$(T^a - 1)^{i+1} | H^i(X_t, \mathbb{Z}) = 0 \text{ pour tout } i .$$

2.1.3. Plusieurs démonstrations ont été données de ce théorème. Rappelons brièvement celle de Grothendieck (historiquement la première, à ma connaissance) (cf. (SGA 7 I 3.3)). Utilisant la résolution des singularités de Hironaka, on peut supposer que  $X$  est lisse et que la fibre spéciale  $X_0$  est un diviseur à croisements normaux (i.e. que  $f$  est donné, au voisinage d'un point de  $X_0$ , par  $(z_1, \dots, z_n) \mapsto z_1^{e_1} \cdots z_r^{e_r}$ , où  $(z_1, \dots, z_n)$  sont des coordonnées locales sur  $X$ ). Comme  $f$  est propre, on dispose de la **suite spectrale des cycles évanescents**

$$(2.1.3.1) \quad E_2^{pq} = H^p(X_0, R^q\Psi(\mathbb{Z})) \Rightarrow H^*(X_t, \mathbb{Z}) ,$$

qui est  $T$ -équivariante (cf. SGA 7 XIV (1.3.3.2)) (rappelons que les faisceaux de cycles évanescents  $R^q\Psi(\mathbb{Z})$  sur  $X_0$  sont définis par

$$R^q\Psi(\mathbb{Z}) = i^*R^q\bar{j}_*\mathbb{Z} ,$$

où  $i : X_0 \rightarrow X$  est l'inclusion,  $\bar{X}^*$  l'espace déduit de  $X^* = X|S^*$  par le changement de base par un revêtement universel  $\bar{S}^* \rightarrow S^*$ , et  $\bar{j} : \bar{X}^* \rightarrow X$  la flèche canonique). Il suffit donc de prouver qu'il existe un entier  $a \geq 1$  tel que  $T^a|R^q\Psi(\mathbb{Z}) = Id$  pour tout  $q$ . Il suffit de prouver qu'il existe un tel entier localement sur  $X_0$ . On peut donc ôter l'hypothèse de propreté sur  $f$ , et supposer que  $X$  est un voisinage ouvert de 0 dans  $\mathbb{C}^n$ , et que  $f$  est donné par  $(z_1, \dots, z_n) \mapsto z_1^{e_1} \cdots z_r^{e_r}$ . Alors  $X_0 = \sum_{i=1}^r e_i D_i$ , où  $D_i$  est le

diviseur ( $z_i = 0$ ). Montrons que  $a = \text{ppcm}(e_i)$  convient. Soit  $x \in X_0$ , et soit  $I = \{i \in [1, r] \mid x \in D_i\}$ . Il suffit de montrer que, si  $e = \text{pgcd}(e_i, i \in I)$ , alors

$$T^e | R^q \Psi(\mathbb{Z})_x = Id$$

pour tout  $q$ . Quitte à remplacer  $z_i$ , pour  $i \in I$ , par  $u_i z_i$ , où  $u_i$  est une unité convenable, on peut supposer que  $f$ , au voisinage de  $x$ , est donné par  $z \mapsto \prod_{i \in I} z_i^{e_i}$ . Changeant les notations, on peut supposer que  $x = 0$  et  $I = [1, r]$ .

Appliquant la définition des cycles évanescents, on trouve que

$$R^q \Psi(\mathbb{Z})_0 = H^q(F, \mathbb{Z}),$$

où  $F$  est le sous-espace analytique de  $\mathbb{C}^{*r} \times (\text{Im } u > 0)$  d'équation

$$z_1^{e_1} \cdots z_r^{e_r} = \exp(2\pi i u)$$

la monodromie  $T$  agissant par  $u \mapsto u + 1$ . Cet espace est réunion disjointe des  $F_k$  ( $0 \leq k < e - 1$ ) d'équations

$$z_1^{e'_1} \cdots z_r^{e'_r} = \zeta^k \exp(2\pi i u/e)$$

où  $\zeta = \exp(2\pi i/e)$ ,  $e'_i = e_i/e$ . Il s'identifie (analytiquement) à  $(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) \times F_0$ , et (homotopiquement) à  $(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) \times V$ , où  $V$  est le tore défini par la suite exacte

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow V \rightarrow (S^1)^r \rightarrow S^1 \rightarrow 1 \\ (z_i) \mapsto \prod z_i^{e'_i}, \end{aligned}$$

la monodromie agissant par  $n \mapsto n + 1$  sur le facteur  $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ . En particulier,  $T^e = Id$  sur  $H^*(F, \mathbb{Z})$ . On trouve plus précisément :

$$\begin{aligned} (2.1.3.2) \quad R^q \Psi(\mathbb{Z})_0 &= \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}] \otimes H^q(V, \mathbb{Z}), \\ H^q(V, \mathbb{Z}) &= \Lambda^q H^1(V, \mathbb{Z}) \\ H^1(V, \mathbb{Z}) &= \text{Coker}(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^r, 1 \mapsto (e'_i)) \end{aligned}$$

( $T$  agissant par  $n \mapsto n + 1$  sur  $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ ).

Par les théorèmes de comparaison entre cohomologie étale et cohomologie classique, ainsi qu'entre groupe fondamental algébrique et groupe fondamental classique, on déduit de 2.1.2 :



COROLLAIRE 2.1.4. — Soit  $K$  le corps des fractions du hensélisé, en un point fermé, d'une courbe lisse sur  $\mathbb{C}$  (voire un corps de caractéristique nulle), et soit  $X$  un schéma propre et lisse sur  $K$ . Avec les notations de 1.1, il existe alors un sous-groupe ouvert  $I_1$  du groupe d'inertie  $I (\simeq \mathbb{Z}^\wedge(1))$  tel que l'on ait, pour tout  $g \in I_1$  et tout  $i$ ,

$$(\rho(g) - 1)^{i+1} | H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell) = 0$$

(où  $\rho$  est la représentation de monodromie locale, cf. 1.3).

Ce résultat est à la fois moins général et plus précis que 1.4. Nous verrons plus loin que l'exposant  $i + 1$  peut être amélioré. Nous examinerons d'autre part, au n° 3, les variantes de ceci en caractéristique mixte ou positive.

2.1.5. Soit  $S$  comme en 2.1.1, et soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme d'espaces analytiques, lisse hors de 0, et ayant **réduction semi-stable** en 0 (i.e. donné, au voisinage de tout point de  $X_0$ , par  $(z_1, \dots, z_n) \mapsto z_1 \cdots z_m$ , où  $(z_1, \dots, z_n)$  sont des coordonnées locales sur  $X$ ,  $X$  étant lisse). La fibre spéciale  $Y = X_0$  est alors un diviseur à croisements normaux réduit. Supposons de plus que ce diviseur soit globalement somme de diviseurs lisses  $Y_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) (se coupant transversalement). On peut alors expliciter les faisceaux de cycles évanescents  $R^q\Psi(\mathbb{Z})$  globalement sur  $Y$  (et non plus seulement ponctuellement, comme en (2.1.3.2)) : on a des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} (i) \quad & R^0\Psi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \\ (2.1.5.1) \quad (ii) \quad & R^q\Psi(\mathbb{Z}) = \Lambda^q R^1\Psi(\mathbb{Z}) \quad (q > 0) \\ (iii) \quad & R^1\Psi(\mathbb{Z}) = \text{Coker}(\mathbb{Z}_Y \rightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathbb{Z}_{Y_i}, \quad n \mapsto (n|Y_i))(-1), \end{aligned}$$

où  $(-)(k)$  désigne le "twist à la Tate" habituel en théorie de Hodge,  $(-) \otimes (2\pi i)^k \mathbb{Z}$ .

Il résulte immédiatement de (2.1.3.2) que les flèches naturelles  $\mathbb{Z} \rightarrow R^0\Psi(\mathbb{Z}), \Lambda^q R^1\Psi(\mathbb{Z}) \rightarrow R^q\Psi(\mathbb{Z})$  sont des isomorphismes. Donnons la définition de l'isomorphisme (iii). Notons  $j_m : X - Y_m \rightarrow X$  l'inclusion. On sait que la classe  $cl(Y_m) \in H_{Y_m}^2(X, \mathbb{Z})(1)$  du diviseur  $Y_m$  fournit (par pureté) un isomorphisme

$$(a) \quad \mathbb{Z}_{Y_m} \xrightarrow{\sim} R^1 j_{m*} \mathbb{Z}(1).$$

Si  $j : X - Y = X^* \rightarrow X$  est l'inclusion et  $\bar{j} : \overline{X}^* \rightarrow X$  est la flèche définie en (2.1.3.1), on a des flèches naturelles

$$(b) \quad R^1 j_{m*} \mathbb{Z}(1) \rightarrow R^1 j_* \mathbb{Z}(1) \rightarrow R^1 \bar{j}_* \mathbb{Z}(1).$$

De (a) et (b) on déduit une flèche de faisceaux sur  $Y$

$$(c) \quad \bigoplus_{1 \leq m \leq r} \mathbf{Z}_{Y_m} \rightarrow R^1 \Psi(\mathbf{Z})(1).$$

Il découle de (2.1.3.2) que (c) identifie  $(\bigoplus \mathbf{Z}_{Y_m})/\mathbf{Z}$  à  $R^1 \Psi(\mathbf{Z})(1)$  : c'est l'isomorphisme (iii).

Pour  $q \geq 1$ , on a  $\Lambda^q(\bigoplus \mathbf{Z}_{Y_i}) = \bigoplus_{i_1 < \dots < i_q} \mathbf{Z}_{Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_q}}$ . Le produit extérieur gauche par  $v = (1, \dots, 1)$  fournit une suite exacte

$$(2.1.5.2) \quad \begin{array}{c} 0 \rightarrow \mathbf{Z}_Y \xrightarrow{v} \bigoplus \mathbf{Z}_{Y_i} \xrightarrow{v \wedge} \bigoplus_{ij} \mathbf{Z}_{Y_i \cap Y_j} \xrightarrow{v \wedge} \dots \rightarrow \\ \bigoplus_{i_1 < \dots < i_q} \mathbf{Z}_{Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_q}} \xrightarrow{v \wedge} \dots, \end{array}$$

qui n'est autre que le complexe de Čech augmenté du recouvrement de  $Y$  par les  $Y_i$ . Si l'on note  $C^\cdot$  ce complexe ( $C^0 = \bigoplus \mathbf{Z}_{Y_i}$ ), on a donc, d'après (2.1.5.1) (ii) :

$$(2.1.5.3) \quad R^q \Psi(\mathbf{Z})(q) = \text{Coker}(C^{q-2} \rightarrow C^{q-1}) = \text{Ker}(C^q \rightarrow C^{q+1}) \quad (q \geq 1).$$

On peut encore interpréter ces formules de la façon suivante. Les flèches (a) ci-dessus donnent un isomorphisme

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathbf{Z}_{Y_i} \xrightarrow{\sim} R^1 j_* \mathbf{Z}(1)$$

(dont (c) se déduit par composition avec  $R^1 j_* \mathbf{Z}(1) \rightarrow R^1 \Psi(\mathbf{Z})(1)$ ). On en déduit, pour  $q \geq 1$ , un isomorphisme

$$(2.1.5.4) \quad C^{q-1} \xrightarrow{\sim} R^q j_* \mathbf{Z}(q)$$

(avec la notation de (2.1.5.3)). Pour éviter des confusions, notons  $G$  plutôt que  $\mathbf{Z}$ , le groupe fondamental de  $S^*$ . Le complexe  $R\Psi(\mathbf{Z})$  est sous-jacent à un objet (noté encore  $R\Psi(\mathbf{Z})$ ) de  $D^+(Y, \mathbf{Z}[G])$ , et l'on a

$$(2.1.5.5) \quad R\Gamma(G, R\Psi(\mathbf{Z})) = Rj_* \mathbf{Z}|_Y.$$

En particulier, on a une suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(G, R^q \Psi(\mathbf{Z})) \Rightarrow R^* j_*(\mathbf{Z})|_Y,$$

qui fournit des suites exactes courtes

$$(2.1.5.6) \quad 0 \rightarrow H^1(G, R^{q-1}\Psi(\mathbf{Z})(q)) \rightarrow R^q j_* \mathbf{Z}(q)|_Y \rightarrow H^0(G, R^q \Psi(\mathbf{Z})) \rightarrow 0$$

( $G$  étant de dimension cohomologique 1). Or les hypothèses sur  $f$  entraînent, d'après (2.1.3.2), que  $G$  opère trivialement sur les faisceaux  $R^i \Psi(\mathbf{Z})$ . On a donc

$$H^0(G, R^q \Psi(\mathbf{Z})) = R^q \Psi(\mathbf{Z}),$$

et un isomorphisme canonique

$$H^1(G, R^{q-1}\Psi(\mathbf{Z}))(q) = R^{q-1}\Psi(\mathbf{Z})(q-1)$$

(dédit de  $H^1(G, \mathbf{Z}) = H^1(S^*, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}(-1)$ ). La suite (2.1.5.6) se récrit donc

$$(2.1.5.7) \quad 0 \rightarrow R^{q-1}\Psi(\mathbf{Z})(q-1) \rightarrow R^q j_* \mathbf{Z}(q)|_Y \rightarrow R^q \Psi(\mathbf{Z})(q) \rightarrow 0$$

compte tenu de (2.1.5.4), c'est (à un signe près peut-être) la suite déduite de (2.1.5.3). Cette interprétation est due à Rapoport-Zink [19], nous y reviendrons au n° 3.6.

## 2.2. Monodromie locale et connexion de Gauss-Manin.

2.2.1. Soit  $f : X \rightarrow S$  comme en 2.1.1. On suppose que  $X$  est lisse sur  $\mathbf{C}$ , et que la fibre spéciale  $Y = X_0$  est un diviseur à croisements normaux (non nécessairement réduit). Pour tout  $q$ , le système local  $R^q f_*(\mathbf{C}) = R^q f_*(\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{C}$ , de fibre  $H^q(X_t, \mathbf{C})$  en  $t \in S^*$ , est le sous-faisceau des sections horizontales de la connexion de Gauss-Manin  $\nabla$  sur  $R^q f_* \Omega_{X^*/S^*}$  (où  $X^* = X - Y$ ). Comme le montre Steenbrink dans [27], la géométrie de la situation permet d'exhiber un "prolongement canonique" (au sens de Deligne-Manin, cf. [6]) de cette connexion, et par suite de donner une autre description de la monodromie  $T$  de  $H^q(X_t, \mathbf{C})$ .

Notons  $\omega_X = \Omega_X(\log Y)$  le complexe de de Rham de  $X$  (sur  $\mathbf{C}$ ) à pôles logarithmiques le long de  $Y$ , et de même  $\omega_S = \Omega_S(\log 0)$  celui de  $S$  à pôles logarithmiques le long de  $0$  ([6], [7]). Le  $\mathcal{O}_X$ -module

$$(2.2.1.1) \quad \omega_{X/S}^1 := \omega_X^1 / (\text{Im } f^* : \omega_S^1 \rightarrow \omega_X^1)$$

(noté  $\Omega_{X/S}^1(\log Y)$  dans [27]) est localement libre de type fini (admettant localement pour base  $dz_1/z_1, \dots, dz_r/z_r, dz_{r+1}, \dots, dz_n$  avec la relation  $\sum e_i dz_i/z_i = 0$ , au voisinage d'un point de  $Y$  où  $Y$  a pour équation  $z_1^{e_1} \cdots z_r^{e_r} = 0$  dans un système de coordonnées locales  $(z_1, \dots, z_n)$ ). La

différentielle de  $\omega_{\dot{X}}$  donne, par passage au quotient, une différentielle sur  $\omega_{\dot{X}/S} := \Lambda \cdot \omega_{\dot{X}/S}^1$ , et l'on a une suite exacte de complexes

$$(2.2.1.2) \quad 0 \rightarrow \omega_S^1 \otimes \omega_{\dot{X}/S}^{-1} \rightarrow \omega_{\dot{X}} \rightarrow \omega_{\dot{X}/S} \rightarrow 0 ,$$

(où la flèche de gauche est  $a \otimes b \mapsto f^*a \wedge b$ ). L'opérateur bord qui s'en déduit,

$$(2.2.1.3) \quad \nabla : R^q f_* \omega_{\dot{X}/S} \rightarrow \omega_S^1 \otimes R^q f_* \omega_{\dot{X}/S} ,$$

prolonge la connexion de Gauss-Manin (cf. [N.M. Katz, The regularity theorem in algebraic geometry, Actes Congrès Int. Math. 1970, tome 1, 437-443, Gauthier-Villars, 1971]). Steenbrink prouve le résultat suivant :

THÉORÈME 2.2.2 [27, 2.18, 2.20]. — (a) *Les faisceaux  $R^q f_* \omega_{\dot{X}/S}$  sont localement libres de type fini, de formation compatible à tout changement de base ; en particulier,*

$$R^q f_* \omega_{\dot{X}/S} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbf{C}_{\{0\}} \xrightarrow{\sim} H^q(Y, \omega_Y) ,$$

où l'on a posé

$$(2.2.2.1) \quad \omega_Y := \omega_{\dot{X}/S} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbf{C}_{\{0\}} .$$

(b) *Soit  $N$  le résidu en 0 de la connexion (2.2.1.3). Alors, si  $\alpha$  est une valeur propre de  $N$ , on a  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et  $0 \leq \alpha < 1$ .*

Le fibré vectoriel  $R^q f_* \omega_{\dot{X}/S}$ , muni de  $\nabla$  (2.2.1.3), est donc le prolongement canonique de  $R^q f_* \Omega_{\dot{X}^*/S^*}$ , muni de la connexion de Gauss-Manin, au sens de Deligne [6, II 5.4] (relativement au choix (II 5.3.1) de  $\tau$ ). D'après [6, II 1.17] et [6, II 5.6], il en résulte :

COROLLAIRE 2.2.3. — (a) *Les automorphismes de monodromie  $T_t$  de  $H^q(X_t, \mathbf{C})$  ( $t \in S^*$ ) sont les fibres d'un automorphisme  $T$  du fibré  $R^q f_* \omega_{\dot{X}/S}$ , dont la fibre en 0 est donnée par*

$$T_0 = \exp(-2\pi i N)$$

(avec  $N$  comme en 2.2.2(b)).

(b) *Si l'on identifie  $H^q(X_t, \mathbf{C})$  et  $R^q f_* \omega_{\dot{X}/S} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbf{C}_{\{0\}}$  ( $= H^q(Y, \omega_Y)$ ) d'après 2.2.2(a)) à un même espace vectoriel  $V$ ,  $T_t$  et  $T_0$  sont conjugués dans  $GL(V)$ .*

Compte tenu de 2.2.2 (b), cet énoncé établit à nouveau la quasi-unipotence de  $T_t$ .

2.2.4. D'après Deligne ([6] ou [7]), le complexe  $\omega_{\dot{X}}$  "calcule"  $Rj_*\mathbf{C}$ , i.e. on a un isomorphisme

$$(2.2.4.0) \quad \omega_{\dot{X}} \xrightarrow{\sim} Rj_*\mathbf{C} \quad (\text{dans } D(X, \mathbf{C})).$$

Steenbrink déduit 2.2.2 d'un résultat plus fin, selon lequel le complexe  $\omega_{\dot{Y}}$  (2.2.2.1) calcule  $R\Psi(\mathbf{C})$  (dans  $D(Y, \mathbf{C})$ ). Plus précisément, choisissons une uniformisante  $t : S \rightarrow \mathbf{C}$ , un revêtement universel  $p : \bar{S}^* \rightarrow S^*$ , et un logarithme, i.e. une fonction  $\log t$  sur  $\bar{S}^*$  telle que  $\exp(\log t) = p^*t$ . Steenbrink construit un isomorphisme dans  $D(Y, \mathbf{C})$  (dépendant de ces choix)

$$(2.2.4.1) \quad \alpha_t : \omega_{\dot{Y}} \xrightarrow{\sim} R\Psi(\mathbf{C}).$$

L'homomorphisme de degré 1 déduit de la suite exacte (2.2.1.2)

$$\omega_{\dot{X}/S} \rightarrow \omega_S^1 \otimes \omega_{\dot{X}/S}$$

donne, par composition avec le résidu en 0,  $\text{Res}_0 : \omega_S^1 \rightarrow \mathbf{C}_{\{0\}}$ , un homomorphisme

$$(2.2.4.2) \quad N : \omega_{\dot{Y}} \rightarrow \omega_{\dot{Y}}$$

de  $D(Y, \mathbf{C})$ . Steenbrink montre de plus (cf. 2.3.3) que l'automorphisme de monodromie  $T$  de  $R\Psi(\mathbf{C})$  correspond, par (2.2.4.1), à  $\exp(-2\pi iN)$ . L'assertion (a) de 2.2.2 découle de (2.2.4.1) et de l'isomorphisme  $H^*(Y, R\Psi(\mathbf{C})) = H^*(X_t, \mathbf{C})$ , et, par un calcul explicite de  $N$  sur  $\mathcal{H}^*\omega_{\dot{Y}}$ , la formule  $T = \exp(-2\pi iN)$  entraîne (b).

Pour la dépendance de (2.2.4.1) par rapport aux choix, voir [27, 4.24] (du moins dans le cas où  $Y$  est réduit).

Expliquons la définition de (2.2.4.1), en nous plaçant, pour simplifier, dans le cas où  $Y$  est réduit. Notons  $i^{-1}$  le foncteur image inverse par  $i : Y \rightarrow X$  pour les faisceaux abéliens. Il résulte de la définition de  $R\Psi(\mathbf{C})$  que l'on a

$$(a) \quad R\Psi(\mathbf{C}) = i^{-1}\bar{j}_*\Omega_{\bar{X}}^{\cdot} \quad (\text{dans } D(Y, \mathbf{C}))$$

(avec les notations de (2.1.3 .1)). Le complexe  $i^{-1}\omega_{\dot{X}}$  ( $= i^{-1}\Omega_{\dot{X}}(\log Y)$ ) s'identifie de façon naturelle à un sous-complexe de  $i^{-1}\bar{j}_*\Omega_{\bar{X}}^{\cdot}$ . Plus généralement,  $i^{-1}\bar{j}_*\Omega_{\bar{X}}^{\cdot}$  contient le sous-complexe  $i^{-1}\omega_{\dot{X}}[\log t]$  formé des sections s'écrivant localement  $\sum_{0 \leq k \leq s} (\log t)^k \omega_k$ , où  $\omega_k$  est une section de  $\omega_{\dot{X}}$ . Steenbrink montre que l'inclusion

$$(b) \quad i^{-1}\omega_{\dot{X}}[\log t] \rightarrow i^{-1}\bar{j}_*\Omega_{\bar{X}}^{\cdot}$$

et l'homomorphisme

$$(c) \quad i^{-1}\omega_X[\log t] \rightarrow \omega_Y$$

associant à  $\sum_{0 \leq k \leq s} (\log t)^k \omega_k$  la classe de  $\omega_0$  dans  $\omega_Y$  sont des quasi-isomorphismes (pour (c), voir la remarque suivant 2.3.2.5 ci-dessous).

L'isomorphisme (2.2.4.1) est défini par (b) et (c), compte tenu de (a).

Signalons l'interprétation suivante de ces isomorphismes, due à Navarro-Aznar (communication personnelle). Le complexe  $i^{-1}\omega_X[\log t]$  est un module différentiel gradué sur l'algèbre différentielle graduée  $\omega_S$ . On peut l'écrire comme un produit tensoriel

$$i^{-1}\omega_X[\log t] = i^{-1}(\omega_S[\log t] \otimes_{\omega_S} \omega_X).$$

Notons  $i_0 : \{0\} \rightarrow S$  et  $j_0 : S^* \rightarrow S$  les inclusions. Le  $\omega_S$ -module différentiel gradué  $i_0^{-1}\omega_S[\log t]$  est une résolution de  $\mathbf{C}_{\{0\}}$  (cas particulier de (c)), dont on vérifie facilement qu'elle est acyclique pour le foncteur  $\otimes_{\omega_S}$ . On a donc

$$i^{-1}\omega_X[\log t] = \mathbf{C}_{\{0\}} \overset{L}{\otimes}_{\omega_S} \omega_X.$$

Compte tenu de (a) et (b), et comme  $\omega_X$  (resp.  $\omega_S$ ) calcule  $Rj_*\mathbf{C}$  (resp.  $Rj_{0*}\mathbf{C}$ ), on peut récrire cette formule (toujours dans le cas où  $Y$  est réduit) sous la forme plus frappante

$$(2.2.4.3) \quad R\Psi(\mathbf{C}) = \mathbf{C}_{\{0\}} \overset{L}{\otimes}_{Rj_{0*}\mathbf{C}} Rj_*\mathbf{C},$$

qu'on peut considérer comme une sorte d'inversion de (2.1.5.5).

### 2.3. Complexe de Steenbrink et structure de Hodge limite.

2.3.1. Soit  $S$  comme en 2.1.1. On suppose, dans ce numéro, que  $f : X \rightarrow S$  est projectif, avec  $X$  lisse sur  $\mathbf{C}$ , et que  $f$  est lisse hors de 0, de dimension relative  $d$ , et a réduction semi-stable en 0, la fibre spéciale  $Y = X_0$  étant somme de diviseurs lisses  $Y_i$ . L'un des résultats principaux de Steenbrink ([27], complété par [28]) est que  $R\Psi(\mathbf{Z})$  est sous-jacent à un complexe de Hodge mixte cohomologique sur  $Y$ ,  $(R\Psi(\mathbf{Z}), (R\Psi(\mathbf{Q}), W), (R\Psi(\mathbf{C}), W, F))$  au sens de Deligne [10]. En particulier, les groupes de cohomologie  $H^n(Y, R\Psi(\mathbf{Z}))$  sont munis de structures de Hodge mixtes naturelles. De plus, l'opérateur de monodromie  $T$  est unipotent, et  $N := (-1/2\pi i) \log T$  est un morphisme de structures de Hodge mixtes  $H^n(Y, R\Psi(\mathbf{Q})) \rightarrow H^n(Y, R\Psi(\mathbf{Q}))(-1)$ . Ces résultats avaient été annoncés par Deligne dans (P. Deligne, Théorie de Hodge, I, Actes, Cong. int. math., I, Gauthier-Villars (1971), 425-430). La théorie de

Morihiro Saito [20], [21] en offre une meilleure formulation :  $R\Psi(\mathbf{Z})[d]$  est sous-jacent à un module de Hodge mixte sur  $Y$  (en particulier,  $R\Psi(\mathbf{Q})[d]$  est un faisceau pervers), dont  $N$  est (au twist près) un endomorphisme nilpotent.

2.3.2. Nous nous bornerons à esquisser la construction de Steenbrink [27] d'un représentant de  $(R\Psi(\mathbf{C}), W, F)$ . Pour celle de  $(R\Psi(\mathbf{Q}), W)$ , qui n'est pas traitée correctement dans [27], nous renvoyons à [28] (où la construction est inspirée de Rapoport-Zink [19]). On suppose choisis comme en 2.2.4, une uniformisante  $t$  et un logarithme  $\log t$ . L'observation de base est la suivante (cf. [27, 4.6] - qui, à la lettre, n'a pas de sens  $\dots$ ) :

LEMME 2.3.2.1. — *Soient  $i : Y \rightarrow X$  l'inclusion, et  $\theta = f^* dt/t$ . La suite de complexes*

$$i^{-1}\omega_X[-1] \xrightarrow{\theta_\wedge} i^{-1}\omega_X \xrightarrow{\theta_\wedge} i^{-1}\omega_X[1]$$

*est exacte, ainsi que la suite de faisceaux qui s'en déduit par application de  $\mathcal{H}^q$ .*

La vérification de la première assertion est immédiate (complexe de Koszul). La seconde résulte du calcul standard des  $\mathcal{H}^q\omega_X = R^q j_* \mathbf{C}$  (où  $j : X - Y \rightarrow X$  est l'inclusion), cf. (2.1.5.5) et [7, 3.1.8].

La suite exacte de 2.3.2.1 définit un bicomplexe

$$M = (\dots \rightarrow i^{-1}\omega_X[-1] \xrightarrow{d''} i^{-1}\omega_X \xrightarrow{d''} i^{-1}\omega_X[1] \rightarrow \dots),$$

de différentielle *verticale*  $d''$  déduite de  $\theta$ , dont les colonnes sont acycliques. Ce complexe est concentré dans la bande oblique  $0 \leq i + j \leq d + 1 = \dim X$  (et mal placé, car sur une diagonale  $i + j = n$ , pour  $0 \leq n \leq d + 1$ , toutes les composantes sont non nulles). Certains complexes déduits de  $M$  par troncation sont particulièrement intéressants. Nous noterons  $\sigma_{\leq a}$ ,  $\sigma_{\geq a}$  les troncations naïves,  $\tau_{\leq a}$ ,  $\tau_{\geq a}$  les troncations canoniques (si  $L$  est un complexe,  $\sigma_{\leq a}L = (\dots \rightarrow L^a \rightarrow 0)$ ,  $\sigma_{\geq a}L = (0 \rightarrow L^a \rightarrow \dots)$ ,  $\tau_{\leq a}L = (\dots \rightarrow L^{a-1} \rightarrow Z^a \rightarrow 0)$ ,  $\tau_{\geq a}L = (0 \rightarrow L^a/B^a \rightarrow L^{a+1} \rightarrow \dots)$ ). Dans le cas d'un bicomplexe, si  $t$  est une troncation, nous noterons  $t^{\text{hor}}$  (resp.  $t^{\text{v}}$ ) la troncation relative à la différentielle horizontale (resp. verticale). Posons

$$(2.3.2.2) \quad M' = \tau_{\leq d}^{\text{hor}} \sigma_{\leq 0}^{\text{v}} M, \quad M'' = \sigma_{\geq 1}^{\text{v}} \tau_{\geq 0}^{\text{hor}} M [0, 1]$$

(où  $[p, q]$  désigne le décalage pour les bicomplexes). Par exemple, si  $d = 1$ ,  $M$

est le bicomplexe

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} & & \dots & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{O} & \rightarrow & \omega_X^1 & \rightarrow & \omega_X^2 \rightarrow 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & \rightarrow & \mathcal{O} & \rightarrow & \omega_X^1 \rightarrow \omega_X^2 \rightarrow 0 \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & 0 & \rightarrow & \mathcal{O} \rightarrow \omega_X^1 \rightarrow \omega_X^2 \rightarrow 0 \\ & & & & & & \dots \end{array} \right] \leftarrow \text{ligne de degré 0, } \mathcal{O} \text{ en degré 0}$$

$M'$  le bicomplexe

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{O} & \rightarrow & Z\omega_X^1 & \rightarrow & 0 \\ & & & & \uparrow & & \\ & & 0 & \rightarrow & Z^0 & \rightarrow & 0 \\ & & & & (= \mathbb{C}_{\{0\}}) & & \end{array} \right] \leftarrow \text{ligne de degré 0, } \mathcal{O} \text{ en degré 0,}$$

et  $M''$  le bicomplexe

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & \rightarrow & \omega_X^2/B^2 & \rightarrow & 0 & & \\ & & \uparrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & \omega_X^1/B^1 & \rightarrow & \omega_X^2 & \rightarrow & 0 \end{array} \right] \leftarrow \text{ligne de degré 0, } \omega_X^1/B^1 \text{ en degré 0}$$

(on a omis le  $i^{-1}$  pour abrégé). On a des homomorphismes naturels de bicomplexes

$$(2.3.2.3) \quad M' \rightarrow M'',$$

induit par  $d'' : M^{\cdot 0} \rightarrow M^{\cdot 1}$ , et

$$(2.3.2.4) \quad M' \rightarrow \omega_Y,$$

induit par  $\tau_{\leq d}\omega_X \rightarrow \omega_Y$ .



LEMME 2.3.2.5. — *Les morphismes (2.3.2.3) et (2.3.2.4) induisent des quasi-isomorphismes sur les complexes simples associés.*

En effet, les colonnes  $\mathcal{H}_{\text{hor}}^q$  sont acycliques d'après (2.3.2.1) et le calcul direct des  $\mathcal{H}^q \omega_{\dot{Y}}$  (cf. [27, 1.14]).

On peut observer aussi que, pour les mêmes raisons, l'inclusion  $M' \rightarrow \sigma_{\leq 0}^1 M$  induit un quasi-isomorphisme sur les complexes simples associés, et que le complexe simple associé à  $\sigma_{\leq 0}^1 M$  n'est autre que le complexe  $i^{-1} \omega_{\dot{X}}[\log t]$  considéré en 2.2.4 (b) et (c) : le fait que (c) soit un quasi-isomorphisme découle donc de 2.3.2.5.

Le complexe  $\omega_{\dot{X}}$  est muni de la filtration par le poids  $0 \subset W_0 \omega_{\dot{X}} \subset W_1 \omega_{\dot{X}} \subset \dots$  [7, 3.1.5], et l'on a une inclusion  $\tau_{\leq n} \omega_{\dot{X}} \subset W_n \omega_{\dot{X}}$ . On sait [7, 3.1.8] que l'identité de  $\omega_{\dot{X}}$  donne un quasi-isomorphisme de complexes filtrés

$$(2.3.2.6) \quad (\omega_{\dot{X}}, \tau_{\leq \cdot}) \rightarrow (\omega_{\dot{X}}, W_{\cdot}) .$$

On a donc, pour tout  $n$ , des quasi-isomorphismes

$$(2.3.2.6)' \quad \tau_{\geq n} \omega_{\dot{X}} \leftarrow \omega_{\dot{X}} / \tau_{\leq n-1} \omega_{\dot{X}} \rightarrow \omega_{\dot{X}} / W_{n-1} \omega_{\dot{X}} .$$

Steenbrink considère le bicomplexe  $A = (A^{pq}, d', d'')$  défini par

$$(2.3.2.7) \quad A^{pq} = \omega_{\dot{X}}^{p+q+1} / W_q \omega_{\dot{X}}^{p+q+1} ,$$

$$A : \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \dots \\ \uparrow \\ (\omega_{\dot{X}} / W_1 \omega_{\dot{X}})[2] \\ \uparrow \\ (\omega_{\dot{X}} / W_0 \omega_{\dot{X}})[1] \end{array} \right] \leftarrow \text{ligne de degré } 0, \omega_{\dot{X}}^1 / W_0 \omega_{\dot{X}}^1 \text{ en degré } 0 , \end{array}$$

de différentielle  $d'$  (resp.  $d''$ ) induite par la différentielle extérieure (resp.  $\theta_{\wedge}$ ) : pour  $x \in A^{pq}$ ,  $d'x = (-1)^{q+1} dx$  ( $d =$  différentielle extérieure),  $d''x = (-1)^p \theta_{\wedge} x$ . Ses lignes sont reliées à celles de  $M''$  par les quasi-isomorphismes (2.3.2.6)' : la  $q$ -ième ligne de  $A$  correspond à  $\omega_{\dot{X}}[q] / \tau_{\leq 0}(\omega_{\dot{X}}[q]) \simeq \omega_{\dot{X}}[q] / (\tau_{\leq q} \omega_{\dot{X}})[q] \simeq (\tau_{\geq q+1} \omega_{\dot{X}})[q]$ . Par construction,  $A$  est à support dans  $Y$ , et le complexe simple  $\mathfrak{s}A$  associé à  $A$  est une autre "incarnation" de  $\omega_{\dot{Y}}$  (donc de  $R\Psi(\mathbb{C})$ ) dans  $D(Y, \mathbb{C})$  : on a des isomorphismes canoniques de  $D(Y, \mathbb{C})$

$$(2.3.2.8) \quad R\Psi(\mathbb{C}) \simeq \omega_{\dot{Y}} \simeq \mathfrak{s}A .$$

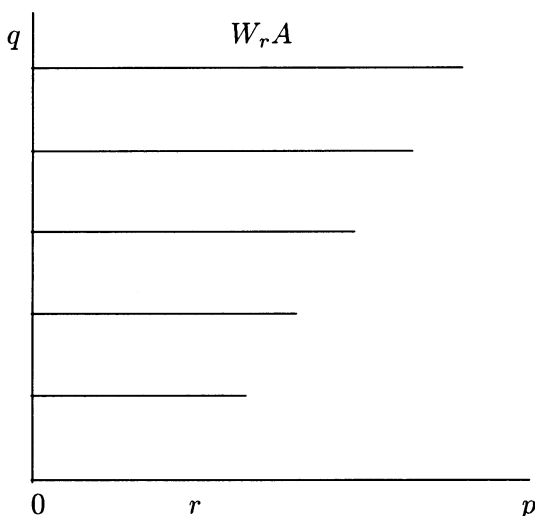
Noter que le bicomplexe  $A$  est concentré dans le triangle ( $p \geq 0, q \geq 0, p + q \leq d = \dim Y$ ); par exemple, pour  $d = 1$ ,  $A$  est le bicomplexe

$$\left[ \begin{array}{c} \omega_X^2/W_1\omega_X^2 \\ \uparrow \\ \omega_X^1/W_0\omega_X^1 \rightarrow \omega_X^2/W_0\omega_X^2 \end{array} \right] \leftarrow \text{ligne de degré } 0 .$$

Steenbrink définit comme suit les filtrations  $(W, F)$  sur le bicomplexe  $A$ . La filtration (décroissante)  $F$  est la filtration par le premier degré :  $F^p A = \sigma_{\geq p}^{\text{hor}} A (= A^{\geq p})$ . La filtration (croissante)  $W$  est donnée par

$$W_r A^{pq} = W_{2q+r+1} \omega_X^{p+q+1} / W_q \omega_X^{p+q+1} .$$

La filtration  $W$  est une “filtration de monodromie” (voir 2.3.3). Observer que, par (2.3.2.6), la  $q$ -ième ligne de  $W_r A$  correspond à  $\tau_{\leq q+r}(\omega_X[q]) / \tau_{\leq 0}(\omega_X[q]) = (\tau_{\leq 2q+r} \omega_X)[q] / (\tau_{\leq q} \omega_X)[q] \simeq \tau_{\leq q+r}((\tau_{\geq q+1} \omega_X)[q])$  :



Les gradués associés se calculent aisément. Pour  $W$ , notant que  $\text{gr}_r^W A$  est à différentielle  $d''$  nulle, et tenant compte de (2.2.4.0) et de la remarque précédente, on trouve que  $\text{gr}_r^W A$  est cohomologiquement concentré sur la

droite  $j - i = r$ , somme des  $R^{r+1+2q}j_*\mathbb{C}$  placés en bidegré  $(r + q, q)$ , et donc que

$$(2.3.2.9) \quad \mathrm{gr}_r^W \mathfrak{s}A = \bigoplus_{\substack{q \geq 0 \\ q+r \geq 0}} R^{r+1+2q}j_*\mathbb{C}[-r - 2q] .$$

Rappelons que, d'après (2.1.5.4), on a aussi, si  $Y = \cup_{1 \leq i \leq h} Y_i$ ,

$$R^m j_*\mathbb{C} = \bigoplus \mathbb{C}_{Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_m}} ,$$

somme étendue aux  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq h$ . En ce qui concerne  $F$ , Steenbrink montre que l'on a

$$(2.3.2.10) \quad \mathrm{gr}_F^p \mathfrak{s}A = \omega_Y^p[-p] .$$

Il prouve plus précisément que  $\theta_\wedge$  induit un morphisme de complexes  $\omega_Y \rightarrow A^0$ , et que la suite de complexes

$$(2.3.2.11) \quad 0 \rightarrow \omega_Y \xrightarrow{\theta_\wedge} A^0 \xrightarrow{d''} A^1 \xrightarrow{d''} \dots A^q \xrightarrow{d''} \dots$$

est exacte.

2.3.3. L'endomorphisme  $\nu$  de  $A$ , de bidegré  $(-1, 1)$ , égal à  $(-1)^{p+q+1}$  (projection canonique) sur  $A^{p,q}$ , commute à  $d'$  et  $d''$ , donc induit un endomorphisme

$$(2.3.3.1) \quad \nu : \mathfrak{s}A \rightarrow \mathfrak{s}A .$$

Notant  $W$  (resp.  $F$ ) la filtration de  $\mathfrak{s}A$  déduite de la filtration  $W$  (resp.  $F$ ) de  $A$ , on a

$$\nu(W_r \mathfrak{s}A) \subset W_{r-2} \mathfrak{s}A , \quad \nu(F^n \mathfrak{s}A) \subset F^{n-1} \mathfrak{s}A .$$

On vérifie de plus que, pour  $r \geq 0$ ,  $\nu^r$  induit un isomorphisme (de complexes)

$$(2.3.3.2) \quad \nu^r : \mathrm{gr}_r^W \mathfrak{s}A \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{-r}^W \mathfrak{s}A$$

de sorte que  $W$  est la filtration de monodromie de  $\nu$ . Steenbrink prouve enfin que, par l'isomorphisme (2.3.2.8),  $\nu$  correspond à l'endomorphisme  $N = \mathrm{Res}_0 \nabla$  (2.2.4.2). En fait, on a les résultats plus précis suivants, qui expriment l'essentiel de la théorie :

THÉORÈME 2.3.4. — *Sous les hypothèses de 2.3.1, avec  $t$  et  $\log t$  choisis comme en 2.3.2 :*

(a) *Le complexe  $R\Psi(\mathbf{Z}) \in D(Y, \mathbf{Z})$  est sous-jacent à un complexe de Hodge mixte cohomologique  $(R\Psi(\mathbf{Z}), (R\Psi(\mathbf{Q}), W), (R\Psi(\mathbf{C}), W, F))$  [10, 8.1.6], dont la composante  $(R\Psi(\mathbf{C}), W, F)$  est isomorphe à  $(sA, W, F)$  dans la catégorie dérivée bifiltrée  $D^+F_2(Y, \mathbf{C})$ .*

(b) *L'endomorphisme  $T$  de  $R\Psi(\mathbf{C})$  est unipotent, et  $-(1/2\pi i) \log T$  est sous-jacent à un morphisme de complexes de Hodge mixtes*

$$N : R\Psi(\mathbf{Q}) \rightarrow R\Psi(\mathbf{Q})(-1) ,$$

*dont la composante sur  $(R\Psi(\mathbf{C}), W, F)$  est donnée par  $\nu$  (2.3.3.1). Pour tout  $r \geq 0$ ,  $N^r$  induit un isomorphisme*

$$N^r : \mathrm{gr}_r^W R\Psi(\mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{-r}^W R\Psi(\mathbf{Q})(-r) .$$

(c) *On a un isomorphisme canonique dans  $D(Y, \mathbf{C})$*

$$\mathrm{gr}_F^p R\Psi(\mathbf{C}) \simeq \omega_Y^p[-p] .$$

Rappelons que, comme  $f$  est propre et  $f|S^*$  lisse, on a (SGA 7 XIV (1.3.3.2)).

$$H^*(Y, R\Psi\Lambda) = H^*(\overline{X}^*, \Lambda) = H^*(X_t, \Lambda)$$

pour tout point  $t \in S^*$  (ces identifications étant compatibles à l'action de la monodromie  $T$ ). De 2.3.4, on déduit donc :

COROLLAIRE 2.3.5. — *Sous les hypothèses de 2.3.4, pour tout  $n$ ,  $H^n(\overline{X}^*, \mathbf{Z})$  est muni d'une structure de Hodge mixte, et l'endomorphisme (nilpotent)  $N = (-1/2\pi i) \log T$  de  $H^n(\overline{X}^*, \mathbf{C})$  est un morphisme de structures de Hodge mixtes  $H^n(\overline{X}^*, \mathbf{Q}) \rightarrow H^n(\overline{X}^*, \mathbf{Q})(-1)$ .*

On peut considérer cette structure de Hodge mixte comme “limite” des structures de Hodge pures des  $H^n(X_s, \mathbf{Z})$ ,  $s \in S^*$ , “quand  $s$  tend vers 0”. Elle dépend des choix de  $(t, \log t)$  (le réseau  $H^n(\overline{X}^*, \mathbf{Z})$  et la filtration par le poids  $W$  sont fixes, mais la filtration  $F$  varie, cf. [27, 4.24] et [24]).

Par la théorie de Hodge mixte, la **suite spectrale des poids**

$$(2.3.6) \quad {}_W E_1^{p,q} = H^{p+q}(Y, \mathrm{gr}_{-p}^W R\Psi(\mathbf{Q})) \implies H^{p+q}(\overline{X}^*, \mathbf{Q})$$

dégénère en  $E_2$ , et la **suite spectrale de Hodge**

$$(2.3.7) \quad {}_F E_1^{p,q} = H^{p+q}(Y, \mathrm{gr}_F^p R\Psi(\mathbf{C})) \implies H^{p+q}(\overline{X}^*, \mathbf{C})$$

dégénère en  $E_1$ . Les filtrations aboutissements de (2.3.6) et (2.3.7) sont respectivement la filtration par le poids  $W$  et la filtration de Hodge  $F$  de  $H^*(\overline{X}^*)$ .

On peut expliciter les termes initiaux de ces suites spectrales. Tout d'abord, la formule (2.3.2.9) se raffine en un isomorphisme de complexes de Hodge

$$(2.3.8) \quad \mathrm{gr}_r^W R\Psi(\mathbb{Q}) = \bigoplus_{\substack{q \geq 0 \\ r+q \geq 0}} (a_{r+1+2q})_* \mathbb{Q}_{Y^{(r+1+2q)}}(-r-q)[-r-2q]$$

où

$$Y^{(m)} := \coprod_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq h} Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_m},$$

et

$$a_m : Y^{(m)} \rightarrow Y$$

est la projection. En d'autres termes,  $\mathrm{gr}^W R\Psi(\mathbb{Q})$  est le complexe simple associé au complexe double, de différentielles  $d'$  et  $d''$  nulles

(2.3.8.1)

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{d+1*} \mathbb{Q} & & & & & & \\
 & \swarrow N & & & & & \\
 a_{d*} \mathbb{Q} & & a_{d+1*} \mathbb{Q}(-1) & & & & \\
 \dots & & & & & & \\
 a_{2*} \mathbb{Q} & & a_{3*} \mathbb{Q}(-1) & \dots & a_{d+1*} \mathbb{Q}(-d+1) & & \\
 & \swarrow N & & & & \swarrow N & \\
 a_{1*} \mathbb{Q} & & a_{2*} \mathbb{Q}(-1) & \dots & a_{d*} \mathbb{Q}(-d+1) & & a_{d+1*} \mathbb{Q}(-d);
 \end{array}$$

le  $\mathrm{gr}_r$  est la somme des termes sur la diagonale  $j-i=r$ ;  $N : \mathrm{gr}_r \rightarrow \mathrm{gr}_{r-2}(-1)$  est donné par les flèches obliques identiques. Par suite, le terme initial de (2.3.6) se récrit

$$(2.3.9) \quad {}_W E_1^{-r, n+r} = \bigoplus_{\substack{q \geq 0 \\ r+q \geq 0}} H^{n-r-2q}(Y^{(r+1+2q)}, \mathbb{Q})(-r-q).$$

Il est pur de poids  $n+r$ . Les poids de  $H^n(\overline{X}^*)$  sont donc dans l'intervalle  $[n-d, n+d]$ . On peut aussi décrire la différentielle  $d_1$  de (2.3.6) : on a  $d_1 = d'_1 + d''_1$ , où  $d'_1$  (resp.  $d''_1$ ) est une somme alternée d'homomorphismes

de Gysin (resp. restriction) (cf. [19, 2.10] et [15]). Quant au terme initial de (2.3.7), compte tenu de (2.3.2.10), il est donné par

$$(2.3.10) \quad {}_F E_1^{pq} = H^q(Y, \omega_Y^p) .$$

Par un argument de comptage, la dégénérescence en  $E_1$  de (2.3.7) entraîne donc :

COROLLAIRE 2.3.11. — *Pour tout  $(p, q)$ , le faisceau  $R^q f_* \omega_{X/S}^p$  est localement libre de type fini, et commute à tout changement de base. Si  $h^{pq}$  désigne son rang, on a*

$$h^{pq} = \dim \operatorname{gr}_F^p H^{p+q}(\overline{X}^*, \mathbb{C}) = \dim H^q(X_t, \Omega_{X_t}^p) = \dim H^q(Y, \omega_Y^p) \quad (t \in S^*) .$$

Le fait que  $N$  soit un morphisme de structures de Hodge mixtes fournit d'autre part une borne pour son exposant de nilpotence, meilleure que 2.1.4.

COROLLAIRE 2.3.12. — *Posons*

$$h_n = \sup\{b - a \mid \forall i \in [a, b], h^{i, n-i} \neq 0\} ,$$

où les  $h^{pq}$  sont les nombres de Hodge considérés en 2.3.11. Alors

$$N^{h_n+1} | H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) = 0 .$$

Cela résulte en effet de ce qu'il existe une bigraduation  $H^n(\overline{X}^*, \mathbb{C}) = \bigoplus H^{pq}$  telle que  $N(H^{pq}) \subset H^{p-1, q-1}$  et  $\sum_q \dim H^{pq} = h^{p, n-p}$ , cf. [27, 3.2].

## 2.4. Poids et monodromie.

2.4.1. On reprend les hypothèses de 2.3.4. Le fait qu'on ait supposé  $f$  non seulement propre, mais projectif, ne sert pas réellement dans la construction de la structure de Hodge limite : il suffirait de supposer  $Y$  algébrisable. Par contre, la projectivité de  $f$  intervient de manière essentielle<sup>1</sup> (par le biais de polarisations) dans la démonstration du résultat suivant :

THÉORÈME 2.4.2. — *Pour tout  $r \geq 0$  et tout  $n$ ,  $N^r : H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) \rightarrow H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q})(-r)$  induit un isomorphisme de structures de Hodge (pures)*

$$N^r : \operatorname{gr}_{n+r}^W H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}_{n-r}^W H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q})(-r) .$$

<sup>1</sup> Voir cependant 2.4.7 (b)

En d'autres termes, la filtration par le poids sur  $H^n$  coïncide avec la **filtration de monodromie** (centrée en  $n$ ), caractérisée par  $N(W_r) \subset W_{r-2}$  et  $N^r : \text{gr}_{n+r}^W \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{n-r}^W$ .

Une preuve erronée de 2.4.2 est donnée par Steenbrink dans [27, 5.9]. Une correction, également erronée, est apportée par El Zein dans [14]. A notre connaissance, la seule démonstration publiée correcte est celle de Morihiko Saito [20, 4.2.2]; à quelques détails de rédaction près, celle-ci est reprise par Guillen et Navarro Aznar [15]. Morihiko Saito signale (loc. cit.) que Deligne lui a indiqué une autre démonstration de 2.4.2.

2.4.3. Indiquons seulement où est la difficulté. D'après 2.3.4 (b),  $N$  induit un endomorphisme de la suite spectrale des poids (2.3.6), et, pour  $r \geq 0$ ,  $N^r$  est un isomorphisme de  ${}_W E_1^{-r, n+r}$  sur  ${}_W E_1^{r, n-r}$ . Comme  ${}_W E_2 = {}_W E_\infty$ , il suffit donc de prouver que  $N^r$  induit encore un isomorphisme de  ${}_W E_2^{-r, n+r}$  sur  ${}_W E_2^{r, n-r}$ . Mais  $N^r$  n'est pas un automorphisme du terme  $E_1$  : dans le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccc} E_1^{-r-1, n+r} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{-r, n+r} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{-r+1, n+r} \\ N^r \downarrow & & \downarrow N^r & & \downarrow N^r \\ E_1^{r-1, n+r} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{r, n+r} & \xrightarrow{d_1} & E_1^{r+1, n+r} \end{array} ,$$

seule la flèche verticale médiane est un isomorphisme, celle de droite (resp. gauche) n'est que surjective (resp. injective). Pour analyser  $E_2$ , il est commode (cf. (2.3.8.1)) de considérer  $E_1$  comme le complexe simple  $\oplus C_r (= \oplus C^{-r})$  associé au bicomplexe  $\oplus C_i^j (= \oplus C^{-i, j})$ ,

$$(2.4.3.1) \quad \begin{aligned} C_r &= \oplus C_{r+q}^q \quad (q \geq 0, r+q \geq 0) \\ C_{r+q}^q &= H^*(Y^{(r+1+2q)}, \mathbb{Q})(-r-q) , \end{aligned}$$

avec les notations de (2.3.9), la différentielle  $d_1' : C_i^j \rightarrow C_{i-1}^j$  (resp.  $d_1'' : C_i^j \rightarrow C_i^{j+1}$ ) étant "de type Gysin" (resp. "Čech"). Comme  $N : C_i^j \xrightarrow{\sim} C_{i-1}^{j+1}$  ( $i-1 \geq 0, j \geq 0$ ), la décomposition (2.4.3.1) s'interprète d'ailleurs comme une décomposition primitive de l'espace vectoriel gradué  $C$  sous l'opérateur (nilpotent)  $N$  :

$$C_{r+q}^q = N^r P C_{r+2q} , \quad P C_{r+2q} = C_{r+2q}^0 ,$$

où  $P C_j$  est la partie primitive  $\text{Ker } N^{j+1} \subset C_j$ . L'hypothèse de projectivité sur  $f$  permet de construire un opérateur de Lefschetz  $L : C_i^j \rightarrow C_{i+1}^{j-1}$ , commutant

à  $N$  et  $d$ , et un accouplement  $\langle, \rangle : C \times C \rightarrow \mathbb{Q}(-d)$  ( $d = \dim Y$ ), ayant certaines propriétés de positivité, et pour lequel  $d, L, N$  sont (au signe près) des dérivations. M. Saito en déduit formellement que la cohomologie  $\oplus H^r(C)$  du complexe  $(C, d = d' + d'')$  admet une décomposition primitive analogue à (2.4.3.1), donc en particulier que  $N^r : H^{-r}(C) \xrightarrow{\sim} H^r(C)$ .

Il prouve également, à partir de là, le théorème de dégénérescence suivant [23] :

THÉORÈME 2.4.4. — *Sous les hypothèses de 2.3.4, la suite spectrale des cycles évanescents*

$$(2.4.4.1) \quad E_2^{pq} = H^p(Y, R^q\Psi(\mathbb{Q})) \implies H^{p+q}(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) \quad (= H^{p+q}(X_t, \mathbb{Q}), t \in S^*)$$

dégénère en  $E_3$ , et la filtration aboutissement est définie par les noyaux des itérés de  $N : F^{n-p}H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) = \text{Ker } N^{p+1}$ .

A un renumérotage près, cette suite spectrale coïncide avec celle définie par la filtration canonique  $\tau_{\leq i}$  de  $R\Psi(\mathbb{Q})$  :

$$(2.4.4.2) \quad E_1^{-k, n+k} = H^n(Y, \text{gr}_k^{\tau} R\Psi(\mathbb{Q})) = H^n(Y, R^k\Psi(\mathbb{Q})) \implies H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) .$$

Il résulte aisément de 2.3.2.1 et (2.3.2.6) que le quasi-isomorphisme  $\omega_Y \rightarrow \mathfrak{s}A$  déduit de (2.3.2.11) définit des quasi-isomorphismes filtrés

$$(\omega_Y, \tau_{\leq}) \rightarrow (\mathfrak{s}A, \tau_{\leq}^{\text{hor}}) \rightarrow (\mathfrak{s}A, K) ,$$

où  $\tau_{\leq r}^{\text{hor}}$  (resp.  $K_r$ ) est la filtration obtenue en appliquant  $\tau_{\leq r}$  (resp.  $W_{r+q+1}$ ) à la  $q$ -ième ligne de  $A$ . Or on a

$$(2.4.4.3) \quad K_r A = \text{Ker } N^{r+1} : A \rightarrow A ,$$

ce qui explique (mais ne démontre pas) la deuxième assertion de 2.4.4. Celle-ci avait été vérifiée, antérieurement à [23], par Zucker [29].

Un cas particulier de 2.4.4 est le **théorème du cycle invariant** (cf. [5] et [2, 6.2.9]) :

COROLLAIRE 2.4.5. — *Sous les hypothèses de 2.4.4, la suite*

$$H^n(Y, \mathbb{Q}) \xrightarrow{sp} H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) \xrightarrow{T^{-1}} H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) ,$$

où  $sp$  est le morphisme de spécialisation, est exacte pour tout  $n$ .

(La flèche de spécialisation est l'homomorphisme latéral  $E_2^{n,0} \longrightarrow E_{\infty}^{n,0} \subset H^n$  de la suite spectrale (2.4.4.1).)



*Exemple 2.4.6* : Si  $d = 1$  (i.e.  $Y$  est une courbe), la suite spectrale (2.4.4.1) se réduit à la suite exacte de spécialisation définie par le triangle  $\mathbb{Q} \rightarrow R\Psi(\mathbb{Q}) \rightarrow R\Phi(\mathbb{Q})$  (SGA 7 XIV 1.3),

$$(*) \quad 0 \rightarrow H^1(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_{x \in Y^{(2)}} R^1\Psi(\mathbb{Q})_x \rightarrow H^2(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

( $Y^{(2)}$  est l'ensemble des points doubles de  $Y$ , et  $R^1\Psi(\mathbb{Q})_x \simeq \mathbb{Q}$ ). Dans des bases duales  $(\delta'_x), (\delta_x)$  ( $x \in Y^{(2)}$ ) de  $H^0(Y^{(2)}, \mathbb{Q}) \simeq \bigoplus R^1\Psi(\mathbb{Q})_x$  et  $H^0(Y^{(2)}, \mathbb{Q})(-1) \simeq \bigoplus H_x^1(Y, R\Psi(\mathbb{Q}))(-1)$ ,  $N = -(1/2\pi i)(T - 1)$  est alors donné par  $\delta'_x \mapsto \delta_x$  (formule de Picard-Lefschetz (SGA 7 XIV 3.2.11)). Donc, si  $V = \bigoplus R^1\Psi(\mathbb{Q})_x$ ,  $V^\vee = \bigoplus H_x^1(Y, R\Psi(\mathbb{Q}))(-1)$ ,  $N : V \rightarrow V^\vee$  correspond à une forme quadratique définie positive sur  $V$ . Par la suite spectrale des poids, on a

$$\mathrm{gr}_2^W H^1(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) = \mathrm{Ker}(V \rightarrow H^2(Y, \mathbb{Q}))$$

$$\mathrm{gr}_0^W H^1(\overline{X}^*, \mathbb{Q})(-1) = \mathrm{Coker}(H^0(Y^{(1)}, \mathbb{Q})(-1) \rightarrow V^\vee),$$

et le fait que  $N$  induise un isomorphisme de  $\mathrm{gr}_2^W$  sur  $\mathrm{gr}_0^W(-1)$  (2.4.2) vient de ce que la restriction d'une forme définie positive à un sous-espace est encore définie positive. Quant au théorème du cycle invariant 2.4.5, il résulte de la suite exacte (\*) et de la factorisation de  $N$  en

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\overline{X}^*, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & \bigoplus R^1\Psi(\mathbb{Q})_x & \delta'_x & \\ N \downarrow & & \downarrow \oplus N_x & \downarrow & \\ H^1(\overline{X}^*, \mathbb{Q})(-1) & \longleftarrow & \bigoplus H_x^1(Y, \mathbb{Q})(-1) & \delta_x & . \end{array}$$

Pour des variations sur ceci, voir l'exposé de Grothendieck (SGA 7 IX §12), et [16].

REMARQUES 2.4.7. (a) Par la théorie de M. Saito ([20], [21]),  $R\Psi(\mathbb{Q})[d] = F$  est un faisceau pervers, autodual, et  $N : F \rightarrow F(-1)$  est un homomorphisme nilpotent. La perversité de  $F$  résulte d'ailleurs de celle des  $\mathrm{gr}_r^W R\Psi(\mathbb{Q})[d]$ , conséquence de (2.3.8). De plus, la filtration  $W$  de  $\mathfrak{sA}$  est (à  $[d]$  près) une filtration de  $F$  dans la catégorie des faisceaux pervers, et la propriété 2.3.4 (b) montre que c'est la filtration de monodromie associée à  $N$ . D'autre part, la filtration  $K$  de  $\mathfrak{sA}$  définie par (2.4.4.3) est aussi (à  $[d]$  près) une filtration dans la catégorie des faisceaux pervers, de même que la filtration  $I$  de  $\mathfrak{sA}$  définie par le deuxième degré, ou, ce qui revient au même, par les images des itérés de  $N$  :

$$(2.4.7.1) \quad I^k \mathfrak{sA} = \bigoplus_{q \geq k} A^{pq} = \mathrm{Im} N^k : \mathfrak{sA} \rightarrow \mathfrak{sA}$$

(cela résulte de la perversité de  $\mathrm{gr}_W \mathrm{gr}_K$  et  $\mathrm{gr}_W \mathrm{gr}^I$ , via (2.3.8)). On a donc

$$K; \mathrm{s}A[d] = \mathrm{Ker} N^{i+1} : F \rightarrow F, \quad I^k \mathrm{s}A[d] = \mathrm{Im} N^k : F \rightarrow F$$

(noyaux et images dans la catégorie des faisceaux pervers), et

$$W = K * I,$$

avec la notation de [28, 2.3], cf. (1.5.5). Parallèlement à la suite spectrale (2.4.4.2), qui est associée à la filtration  $K$ , on peut considérer la suite spectrale

$$(2.4.7.2) \quad E_1^{k, n-k} = H^n(Y, \mathrm{gr}_I^k R\Psi(\mathbb{Q})) \implies H^n(\overline{X}^*, \mathbb{Q})$$

associée à la filtration  $I$ , où

$$\mathrm{gr}_I^k R\Psi(\mathbb{Q}) = (\tau_{\geq k+1} Rj_* \mathbb{Q}(k+1))[1].$$

Parallèlement à 2.4.4, M. Saito [23] montre que (2.4.7.2) dégénère en  $E_2$  et que la filtration aboutissement est la filtration  $I^k = \mathrm{Im} N^k$ . Il observe de plus que, par l'autodualité de  $F$ ,  $I$  et  $K$  se correspondent, ce qui permet de mettre en dualité les suites spectrales (2.4.4.2) et (2.4.7.2).

(b) Les résultats énoncés dans ce numéro sous les hypothèses de 2.3.4 valent en fait sous des hypothèses beaucoup plus générales (il suffit de supposer  $f$  propre et  $X$  biméromorphiquement équivalent à une variété kählérienne) [23].

### 3. Réduction semi-stable : cas de la caractéristique positive ou mixte.

3.1. On reprend les notations de 1.1. On pose  $S = \mathrm{Spec} R$ ,  $s = \mathrm{Spec} k$ ,  $\bar{s} = \mathrm{Spec} \bar{k}$ ,  $\eta = \mathrm{Spec} K$ ,  $\bar{\eta} = \mathrm{Spec} \bar{K}$ ,  $G = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ . On suppose  $p > 1$ . On désigne par  $\Lambda$  un anneau de torsion où  $p$  est inversible, ou une extension finie de  $\mathbb{Z}_\ell$  ou  $\mathbb{Q}_\ell$ , voire  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ . Soit  $f : X \rightarrow S$  propre. La suite spectrale des cycles évanescents (SGA 7 I 2.2.3 et XIII §3)

$$(3.1.1) \quad E_2^{ij} = H^i(X_{\bar{s}}, R^j \Psi(\Lambda)) \implies H^{i+j}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)$$

est  $G$ -équivariante. Lorsqu'on sait calculer les faisceaux de cycles évanescents  $R^j \Psi(\Lambda)$ , avec l'action de  $G$  dont ils sont munis, elle fournit des renseignements sur la représentation de monodromie locale (cf. (1.3.1))

$$\rho : G \rightarrow GL H^*(X_{\bar{\eta}}, \Lambda).$$

Nous supposons dans ce qui suit  $f$  **semi-stable** par quoi l'on entend que, localement pour la topologie étale,  $X$  est  $S$ -isomorphe à  $S[t_1, \dots, t_n]/(t_1 \cdots t_r - \pi)$ , où  $\pi$  est une uniformisante de  $R$ . La fibre générique  $X_\eta$  est alors lisse,  $X$  est régulier, et la fibre spéciale  $Y = X_s$  est un diviseur à croisements normaux dans  $X$ . Nous supposons de plus que  $Y$  est (globalement) somme de diviseurs lisses  $Y_i$  ( $1 \leq i \leq h$ ). On peut alors, comme en 2.1.5, calculer explicitement les faisceaux  $R^q\Psi(\Lambda)$ . Avant d'énoncer les résultats, fixons quelques notations. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bar{Y} & \xrightarrow{\bar{i}} & \bar{X} & \xleftarrow{\bar{j}} & X_{\bar{\eta}} & & \bar{s} \longrightarrow \bar{S} \longleftarrow \bar{\eta} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{X} & \xleftarrow{\tilde{j}} & X_{\tilde{\eta}} & \text{au-dessus de} & \tilde{s} \longrightarrow \tilde{S} \longleftarrow \tilde{\eta} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{j} & X_\eta & & s \longrightarrow S \longleftarrow \eta
 \end{array} ,$$

où  $\tilde{\eta}$  est le spectre de l'extension maximale non ramifiée de  $K$ ,  $\tilde{S}$  (resp.  $\bar{S}$ ) le normalisé de  $S$  dans  $\tilde{\eta}$  (resp.  $\bar{\eta}$ ),  $i, j$  sont les inclusions, et  $\tilde{i}$  (resp.  $\bar{i}$ ),  $\tilde{j}$  (resp.  $\bar{j}$ ) s'en déduisent par extension des scalaires à  $\tilde{S}$  (resp.  $\bar{S}$ ). Le complexe  $R\Psi(\Lambda)$  est défini par

$$(3.1.2) \quad R\Psi(\Lambda) = \bar{i}^* R\bar{j}_* \Lambda .$$

C'est un objet de  $D(Y \times_s \eta, \Lambda)$ , avec la notation de (SGA 7 XIII) ("catégorie dérivée des  $\Lambda$ -modules sur  $\bar{Y}$  munis d'une action de  $G$  compatible avec celle sur  $\bar{Y}^n$ "; cf. [11], [13] pour le cas où  $\Lambda$  n'est pas de torsion). Par définition, on a donc

$$(3.1.3) \quad i^* Rj_* \Lambda = R\Gamma(G, R\Psi(\Lambda)) , \quad \tilde{i}^* R\tilde{j}_* \Lambda = R\Gamma(I, R\Psi(\Lambda)) .$$

D'autre part, pour  $E \subset [1, h]$ , nous poserons  $Y_E = \bigcap_{i \in E} Y_i$ , et noterons, comme en (2.3.8)

$$Y^{(m)} = \coprod_{\text{card}(E)=m} Y_E ,$$

et  $a_m : Y^{(m)} \rightarrow Y$  la projection.

THÉORÈME 3.2. — (a) *La conjecture de pureté de Grothendieck (SGA 5 I) est vérifiée pour les inclusions des  $Y_i$  dans  $X$  : on a*

$$R^i a_1^! \Lambda = 0 \text{ pour } i \neq 2 ,$$

*et un isomorphisme canonique, donné par les classes des  $Y_i$  (SGA 4 1/2 Cycle)*

$$R^2 a_1^! \Lambda = a_1^* \Lambda(-1) .$$

(b) *Pour tout  $q \geq 1$ , on a des isomorphismes canoniques*

$$i^* \Lambda^q R^1 j_* \Lambda = i^* R^q j_* \Lambda = a_{q*} R^{q+1} a_q^! \Lambda = a_{q*} \Lambda(-q) .$$

(c) (i) *On a  $R^0 \Psi(\Lambda) = \Lambda$ .*

(ii) *La flèche  $\tilde{i}^* R^1 \tilde{j}_* \Lambda \rightarrow R^1 \Psi(\Lambda)$  (déduite de (3.1.3)) induit un isomorphisme*

$$(\oplus \Lambda_{\bar{Y}_i} / \Lambda \text{ diagonal})(-1) \xrightarrow{\sim} R^1 \Psi(\Lambda) .$$

(iii) *On a*

$$\Lambda^q R^1 \Psi(\Lambda) \xrightarrow{\sim} R^q \Psi(\Lambda)$$

*pour tout  $q \geq 1$ . Si  $C^\cdot$  désigne le complexe de Čech augmenté (acyclique) défini par  $\bar{a}_1 : \bar{Y}^{(1)} \rightarrow \bar{Y}$ ,*

$$C^\cdot = (0 \rightarrow \Lambda_{\bar{Y}} \rightarrow \bar{a}_{1*} \Lambda \rightarrow \bar{a}_{2*} \Lambda \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{a}_{q*} \Lambda \rightarrow \cdots)$$

*(où  $\Lambda_{\bar{Y}}$  est en degré  $-1$ ), on a (pour  $q \geq 1$ )*

$$R^q \Psi(\Lambda)(q) = \text{Coker}(C^{q-2} \rightarrow C^{q-1}) = \text{Ker}(C^q \rightarrow C^{q+1})$$

*(comparer avec (2.1.5.3)). Les isomorphismes de (i), (ii), (iii) sont des isomorphismes de  $G - \Lambda$ -faisceaux sur  $\bar{Y}$ . En particulier, l'inertie  $I$  opère trivialement sur  $R^q \Psi(\Lambda)$  pour tout  $q$ .*

La dernière assertion de (c) entraîne, via (3.1.1) :

COROLLAIRE 3.3. — *Pour tout  $g \in I$ ,  $(\rho(g) - 1)^{i+1} = 0$  sur  $H^i(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)$ .*

COROLLAIRE 3.4. — *Soit  $X_\eta$  un schéma propre et lisse sur  $\eta$  ayant potentiellement réduction semi-stable (i.e. tel qu'il existe une extension finie  $\eta'$  de  $\eta$  telle que  $X_{\eta'}$  admette un modèle propre et semi-stable sur le normalisé  $S'$  de  $S$  dans  $\eta'$ ). Alors, il existe un sous-groupe ouvert  $I'$  de  $I$  tel que  $(\rho(g) - 1)^{i+1} = 0$  sur  $H^i(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)$ , pour tout  $g \in I'$ .*

D'après le théorème de réduction semi-stable ([1], [12], [18]), l'hypothèse de 3.4 est vérifiée si  $\dim X = 1$ , et, si l'on est optimiste, on peut conjecturer qu'elle l'est toujours.

3.5. Puisque  $I$  opère trivialement sur les  $R^q\Psi(\Lambda)$ , a fortiori le sous-groupe d'inertie sauvage  $P$  aussi (cf. 1.1), donc

$$(3.5.1) \quad R^q\Psi_t(\Lambda) = R^q\Psi(\Lambda) ,$$

où  $R^q\Psi_t(\Lambda)$  est le faisceau de cycles évanescents modérés défini dans (SGA 7 I 2.7), i.e.  $R^q\Psi_t(\Lambda) = R^q\Psi(\Lambda)^P$ . Moyennant 3.2 (a) et (3.5.1), le calcul des fibres géométriques des  $R^q\Psi(\Lambda)$  est effectué dans (SGA 7 I 3.3), et il est aisé d'en déduire, comme en 2.1.5, les assertions (b) et (c). La difficulté est de prouver (a) et (3.5.1). C'est ce qui est fait par Rapoport-Zink [19], par une méthode inspirée de celle utilisée par Deligne dans (SGA 4 1/2 Th. Finitude). L'assertion 3.2 (a) découle également, du moins pour  $\Lambda = \mathbb{Q}_\ell$  et moyennant quelques hypothèses supplémentaires sur  $S$ , du résultat de Thomason 4.18 dans [R.W. Thomason, Algebraic  $K$ -theory and étale cohomology, Ann. Sci. ENS, 4ème série, t. 13 (1985), 437-552, et Erratum, Ann. Sci. ENS, 4ème série, t. 22 (1989), 675-677]; voir aussi [R.W. Thomason, Absolute cohomological purity, Bull. SMF 112 (1984), 397-406].

3.6. Rapoport et Zink (loc. cit.) construisent aussi, dans cette situation, un analogue du complexe de Steenbrink (2.3.2.7) et de la suite spectrale des poids (2.3.6).

Expliquons brièvement leur construction. On supposera, pour simplifier,  $k$  algébriquement clos (donc  $s = \tilde{s} = \bar{s}$  dans le diagramme de 3.1,  $S = \tilde{S}$ ,  $X = \tilde{X}$ ). Soit  $P_\ell$  défini par la suite exacte (cf. 1.1)

$$1 \rightarrow P_\ell \rightarrow I \xrightarrow{t_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1) \rightarrow 1 .$$

Comme  $P_\ell$  est d'ordre premier à  $\ell$  et que  $I$ , donc  $P_\ell$ , opère trivialement sur les  $R^q\Psi(\Lambda)$ , on a

$$(3.6.1) \quad R\Psi(\Lambda) = R\Gamma(P_\ell, R\Psi(\Lambda)) .$$

Cela permet de considérer  $R\Psi(\Lambda)$  comme objet de  $D^b(Y, \Lambda[\mathbb{Z}_\ell(1)])$  (avec opération triviale de  $\mathbb{Z}_\ell(1)$  sur ses faisceaux de cohomologie). Notons  $K$  un complexe de  $\Lambda[\mathbb{Z}_\ell(1)]$ -modules sur  $Y$ , borné et à degrés  $\geq 0$ , représentant  $R\Psi(\Lambda)$ . D'après (3.1.3) et (3.6.1), on a

$$(3.6.2) \quad i^*Rj_*\Lambda = R\Gamma(\mathbb{Z}_\ell(1), R\Psi(\Lambda)) ,$$

donc, si  $T$  désigne un générateur topologique de  $\mathbb{Z}_\ell(1)$ ,  $i^*Rj_*\Lambda$  est représenté par

$$L = s(K \xrightarrow{T-1} K) ,$$

le bicomplexe  $K \xrightarrow{T-1} K$  étant concentré sur les lignes de degré 0 et 1 (cf. [8, 10.7]). Notons

$$\theta : \Lambda_\eta \rightarrow \Lambda_\eta(1)[1]$$

l'opposée de la classe fondamentale du point fermé  $s$  dans  $S$  (SGA 4 1/2 Cycle 2.1), considérée comme élément de

$$\mathrm{Hom}_{D(\eta, \Lambda)}(\Lambda_\eta, \Lambda_\eta(1)[1]) = H^1(\eta, \Lambda(1)) = i^*R^1j_*\Lambda(1) .$$

(la dernière égalité provenant de ce que  $k$  a été supposé algébriquement clos). C'est la classe des toiseurs des racines  $\ell^n$ -ièmes d'une uniformisante de  $R$ . En tant qu'élément de  $H^1(I, \Lambda(1))$  (où  $I$  opère trivialement sur  $\Lambda(1)$ ), c'est donc le composé de la projection  $I \rightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$ , et de la flèche naturelle  $\mathbb{Z}_\ell(1) = \mathbb{Z}_\ell(1)(k) = \mathbb{Z}_\ell(1)(\overline{K}) \rightarrow \Lambda(1) = \Lambda \otimes \mathbb{Z}_\ell(1)(\overline{K})$ . C'est aussi la classe de l'extension de faisceaux sur  $\eta$  correspondant à la suite exacte triviale de groupes abéliens

$$0 \rightarrow \Lambda(1) \rightarrow \Lambda(1) \oplus \Lambda \rightarrow \Lambda \rightarrow 0$$

munis de l'opération triviale de  $\mathbb{Z}_\ell(1)$  sur les extrêmes, et de l'opération de  $\mathbb{Z}_\ell(1)$  sur le terme central donnée par  $g.(x, y) = (x + gy, y)$ . Par functorialité,  $\theta$  fournit une flèche de  $D(Y, \Lambda)$

$$(3.6.3) \quad \theta : i^*Rj_*\Lambda \rightarrow i^*Rj_*\Lambda(1)[1]$$

(analogue de celle définie par  $\theta \wedge$  dans 2.3.2.1). On vérifie [19], à l'aide de la description ci-dessus de  $\theta$ , que (3.6.3) est représentée, au niveau des complexes, par le morphisme de complexes simples associé au morphisme de complexes doubles

$$\begin{array}{ccc} K(1) & \xrightarrow{T-1} & K(1) \\ & & \uparrow 1 \otimes T \\ & & K \xrightarrow{T-1} K \end{array}$$

(dans la flèche verticale  $1 \otimes T$ ,  $T$  est considéré comme le morphisme  $\mathbb{Z}_\ell \rightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$ ,  $a \mapsto T^a$ ). Notons encore

$$\theta : L \rightarrow L(1)[1]$$

le morphisme (de complexes de  $\Lambda$ -modules sur  $Y$ ) ainsi défini. On obtient alors une suite exacte de complexes

$$(3.6.4) \quad \cdots \rightarrow L(-1)[-1] \xrightarrow{\theta} L \xrightarrow{\theta} L(1)[1] \rightarrow \cdots .$$

Comme  $T$  opère trivialement sur les  $\mathcal{H}^i K$ , on voit de plus que, pour tout  $i \in \mathbf{Z}$ , la suite déduite de (3.6.4) par application de  $\mathcal{H}^i$ ,

$$(3.6.5) \quad \cdots \rightarrow \mathcal{H}^{i-1} L(-1) \xrightarrow{\theta} \mathcal{H}^i L \xrightarrow{\theta} \mathcal{H}^{i+1} L(1) \rightarrow \cdots ,$$

est exacte. C'est l'analogie de 2.3.2.1. On peut observer encore que (3.6.5) s'obtient par recollement des suites exactes courtes

$$(3.6.6) \quad 0 \rightarrow H^1(\mathbf{Z}_\ell(1), \mathcal{H}^{i-1} K) \rightarrow \mathcal{H}^i L \rightarrow H^0(\mathbf{Z}_\ell(1), \mathcal{H}^i K) \rightarrow 0 ,$$

analogues à (2.1.5.6), qui se récrivent

$$0 \rightarrow R^{i-1} \Psi(\Lambda)(-1) \rightarrow i^* R^i j_* \Lambda \rightarrow R^i \Psi(\Lambda) \rightarrow 0$$

(cf. (2.1.5.7)); ces suites sont fournies par la suite spectrale

$$E_2^{rs} = H^r(\mathbf{Z}_\ell(1), \mathcal{H}^s K) \implies \mathcal{H}^{r+s} L .$$

Notant  $M$  le bicomplexe défini par (3.6.4), on définit le bicomplexe

$$(3.6.7) \quad A = (\sigma_{\geq 1}^{\perp} \tau_{\geq 0}^{\text{hor}} M)[0, 1] ,$$

avec les notations de (2.3.2.2) (c'est l'analogie du  $M''$ ). En d'autres termes,  $A$  est le bicomplexe

$$\begin{array}{ccccccc} (\tau_{\geq 1} L(1))[1] & \xrightarrow{\theta} & (\tau_{\geq 2} L(2))[2] & \xrightarrow{\theta} \cdots \xrightarrow{\theta} & (\tau_{\geq j} L(j))[j] & \xrightarrow{\theta} & \cdots \\ 0 & & 1 & & j-1 & & \end{array}$$

(où  $0, 1, \dots, j-1, \dots$  indiquent le numéro de la ligne). On construit, comme en (2.3.2.5), un isomorphisme (dans  $D(Y, \Lambda[\mathbf{Z}_\ell(1)])$ )

$$(3.6.8) \quad \mathfrak{s}A \xrightarrow{\sim} L (= R\Psi(\Lambda)) .$$

A partir de là, il est aisé de paraphraser, dans ce cadre, les définitions données en 2.3.2 d'une filtration par le poids et d'un relèvement de la monodromie au niveau de  $A$ . Soit

$$(3.6.9) \quad 0 \subset \cdots \subset W_r A \subset W_{r+1} A \subset \cdots \subset A$$

la filtration (finie, croissante) de  $A$  telle que  $W_r A$  soit obtenu en appliquant  $\tau_{\leq r+q}$  à la  $q$ -ième ligne de  $A$ , et notons  $W.sA$  la filtration induite sur le complexe simple associé. Il résulte de 3.2 (a) qu'on a, dans  $D(Y, \Lambda[\mathbf{Z}_\ell(1)])$

$$(3.6.10) \quad \mathrm{gr}^W sA = \mathrm{gr}^W sB ,$$

où  $B$  est le complexe double, à différentielles nulles,

$$\begin{array}{ccccccc} a_{d+1*}\Lambda & & & & & & \\ a_{d-1*}\Lambda & a_{d*}\Lambda(-1) & & & & & \\ \dots & & & & & & \\ a_{1*}\Lambda & a_{2*}\Lambda(-1) & \dots & a_{d+1*}\Lambda(-d) & & & \end{array}$$

( $d$  désignant la dimension de  $Y$ ), muni de la filtration  $W$  définie par la même formule que pour  $A$  (comparer avec (2.3.8.1)). Appelons **suite spectrale des poids** la suite spectrale

$$(3.6.11) \quad {}_W E_1^{ij} = H^{i+j}(Y, \mathrm{gr}_{-i}^W R\Psi(\Lambda)) \implies H^*(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)$$

définie, grâce à (3.6.8), par la filtration  $W$  de  $sA$ . D'après (3.6.10), son terme initial se récrit

$$(3.6.12) \quad {}_W E_1^{-r, n+r} = \bigoplus_{\substack{q \geq 0 \\ r+q \geq 0}} H^{n-r-2q}(Y^{(r+1+2q)}, \Lambda)(-r-q) ,$$

et il est encore possible de décrire, comme en (2.3.9), la différentielle  $d_1$  comme  $d'_1 + d''_1$ , où  $d'_1$  (resp.  $d''_1$ ) est une somme alternée d'homomorphismes de Gysin (resp. de restriction).

Rapoport et Zink montrent d'autre part que, si  $\tilde{T}$  désigne le générateur de  $\mathbf{Z}_\ell(-1)$  dual de  $T$  (i.e. tel que  $T \otimes \tilde{T} = 1$ ), alors l'homomorphisme de  $D(Y, \Lambda[\mathbf{Z}_\ell(1)])$

$$(T-1) \otimes \tilde{T} : R\Psi(\Lambda) \rightarrow R\Psi(\Lambda)(-1)$$

est réalisé, après passage aux complexes simples associés, par l'homomorphisme de bicomplexes

$$\nu : A \rightarrow A(-1)[-1, 1]$$

donné par  $(-1)^{i+j+1}$  fois la projection canonique de  $A^{ij}$  sur  $A^{i-1, j+1}$ . En particulier,  $(T-1) \otimes \tilde{T}$  est sous-jacent à un homomorphisme de la catégorie dérivée filtrée envoyant  $W_r$  dans  $W_{r-2}(-1)$ , et, pour  $r \geq 0$ ,  $((T-1) \otimes \tilde{T})^r$  induit un isomorphisme

$$(3.6.13) \quad ((T-1) \otimes \tilde{T})^r : \mathrm{gr}_r^W R\Psi(\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{-r}^W R\Psi(\Lambda)(-r)$$



(correspondant, via (3.6.10), à l'application  $T^r$  de  $\text{gr}_r^W B$  dans  $\text{gr}_{-r}^W B$ ). De plus, comme on peut choisir  $K$  à degrés  $\in [0, d]$ , donc  $L$  à degrés  $\in [0, d + 1]$ , on a

$$(3.6.14) \quad ((T - 1) \otimes \check{T})^{d+1} = 0 : R\Psi(\Lambda) \rightarrow R\Psi(\Lambda)(-d - 1) .$$

3.7. Par les mêmes considérations qu'en 2.4.7, la structure de complexe filtré <sup>(1)</sup> sur  $R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)$  définie en 3.6 à partir de  $(sA, W)$  peut se reconstituer intrinsèquement de la façon suivante. La formule (3.6.10) montre que  $\text{gr}^W sA[d]$  (pour  $\Lambda = \mathbb{Q}_\ell$ ) est pervers. Le complexe  $R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)[d]$  est donc pervers <sup>(2)</sup>, et la filtration  $W$  de  $R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)[d]$  est une filtration par des sous-faisceaux pervers. L'homomorphisme  $(T - 1) \otimes \check{T} : R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)[d] \rightarrow R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)(-1)[d]$  envoie  $W_r$  dans  $W_{r-2}(-1)$ , et est nilpotent. L'homomorphisme

$$(3.7.1) \quad N = \log T \otimes \check{T} : R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)[d] \rightarrow R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)(-1)[d]$$

est donc défini, et ne dépend pas du choix de  $T$ . On a

$$N(W_r) \subset W_{r-2}(-1) , \quad N^{d+1} = 0 ,$$

et, pour  $r \geq 0$ ,

$$(3.7.2) \quad N^r : \text{gr}_r^W R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)[d] \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{-r}^W R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)(-r)[d] .$$

La filtration  $W$  est donc la filtration de monodromie du faisceau pervers  $R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)[d]$  associée à l'opérateur  $N$ . La connaissance de cette filtration (dans la catégorie des faisceaux pervers) suffit à définir la suite spectrale des poids (3.6.11).

3.8. Reprenons les hypothèses de 3.1 :  $S$  hensélien,  $f$  propre et semi-stable de dimension relative  $d$ , de fibre spéciale somme de diviseurs lisses (on ne suppose plus  $k$  algébriquement clos). Le complexe  $R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)[d]$  (sur  $\bar{Y}$ ) est un faisceau pervers, et l'homomorphisme  $N = \log T \otimes \check{T}$ ,

$$(3.8.1) \quad N : R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)[d] \rightarrow R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)(-1)[d] ,$$

est défini, et commute à l'action de  $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ . Il est nilpotent ( $N^{d+1} = 0$ ), donc définit une filtration de monodromie  $W$ , caractérisée par  $N(W_r) \subset$

---

<sup>(1)</sup> ou, plus exactement, quasi-filtré, au sens de [20, 5.2.17]

<sup>(2)</sup> (cas particulier de 4.5)

$W_{r-2}(-1)$  et  $N^r : \text{gr}_r^W \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{-r}^W(-r)$  pour  $r \geq 0$ . On en déduit une “**suite spectrale des poids**” (analogue à (3.6.11)),

$$(3.8.2) \quad {}_w E_1^{ij} = H^{i+j}(\overline{Y}, \text{gr}_{-i}^W R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)) \implies H^*(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell),$$

équivariante sous  $G$ . De plus, l’isomorphisme  $\text{gr}^W R\Psi(\mathbb{Q}_\ell) = \text{gr}^W B$  de (3.6.10) est fonctoriel (par rapport aux isomorphismes de traits strictement locaux), donc le terme  $E_1$  de (3.8.2) se réécrit

$$(3.8.3) \quad {}_w E_1^{-r, n+r} = \bigoplus_{\substack{q \geq 0 \\ r+q \geq 0}} H^{n-r-2q}(\overline{Y}^{(r+1+2q)}, \mathbb{Q}_\ell)(-r-q),$$

l’isomorphisme étant équivariant sous  $G$ . Enfin,  $N$  opère sur la suite spectrale (3.8.2) (de façon compatible à  $G$ ), et, au niveau  $E_1$ , induit, pour  $r \geq 0$ , un isomorphisme

$$(3.8.4) \quad N^r : {}_w E_1^{-r, n+r} \xrightarrow{\sim} {}_w E_1^{r, n-r}(-r).$$

Les résultats du cas complexe suggèrent la conjecture suivante :

CONJECTURE 3.9. — *Sous les hypothèses de 3.8 :*

(a) *La suite spectrale (3.8.2) dégénère en  $E_2$ .*

(b) *Pour tout  $r \geq 0$  et tout  $n$ ,  $N^r$  induit un isomorphisme ( $G$ -équivariant)*

$$N^r : \text{gr}_r^W H^n(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{-r}^W H^n(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)(-r),$$

où la filtration  $W$  sur  $H^*(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$  est la filtration aboutissement de (3.8.2).

Cette conjecture est appelée parfois **conjecture de monodromie-poids**. Supposons  $k$  fini. Alors (a) est conséquence des conjectures de Weil [9] : pour  $s \geq 2$ , la source et le but de  $d_s^{ij}$  sont de poids différents, donc  $d_s^{ij} = 0$ . Pour tout  $s \geq 1$ ,  ${}_w E_s^{-r, n+r}$  est pur de poids  $n+r$ , donc aussi  $\text{gr}_r^W H^n(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) = {}_w E_\infty^{-r, n+r} = {}_w E_2^{-r, n+r}$ . La filtration  $W_{-n}$  de  $H^n(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$  est donc **la filtration par le poids**, au sens de [11, 1.7.5]. Soit  $M$  la **filtration de monodromie** (centrée en 0) de  $H^n(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ , caractérisée par  $NM_i(1) \subset M_{i-2}$  et  $N^i : \text{gr}_i^M \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{-i}^M(-i)$ . La partie (b) équivaut donc à :

(b’)  $M = W_{-n}$ , i.e. (par l’unicité de la filtration par le poids (loc. cit.)),  $\text{gr}_i^M$  est pur de poids  $i$ .

Compte tenu de (a), (b) équivaut aussi à :

(b'') **Pour tout  $r \geq 0$  et tout  $n$ ,  $N^r$  induit un isomorphisme  ${}_W E_2^{-r, n+r} \xrightarrow{\sim} {}_W E_2^{r, n-r}(-r)$ .**

Si  $S$  est le hensélisé en un point fermé d'une courbe lisse sur un corps fini, (b) est vérifiée d'après Deligne [11, 1.8.4] :  $H^n(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$  est en effet la fibre en  $\bar{\eta}$  d'un faisceau pur de poids  $n$  d'après les conjectures de Weil. En inégale caractéristique ( $k$  toujours supposé fini), Rapoport et Zink ont vérifié (b) pour  $\dim Y \leq 2$  [19, 2.12, 2.13]; le cas de dimension relative 1 est déjà traité par Grothendieck dans (SGA 7 IX 12.5), comme conséquence de la formule de Picard-Lefschetz (modulo la vérification de quelques compatibilités, cf. [16]) (on peut aussi procéder comme Deligne dans (SGA 7 I 6)). On peut d'ailleurs considérer (b'') comme une sorte de généralisation de la formule de Picard-Lefschetz au cas semi-stable de dimension supérieure.

La démonstration de 2.4.4 donnée par M. Saito [23] est formelle à partir du fait que  $N^r$  induit un isomorphisme de  ${}_W E_2^{-r, n+r}$  sur  ${}_W E_2^{r, n-r}$  (et de l'interprétation de la suite spectrale des cycles évanescents comme provenant (à une renumérotation près) de la filtration de  $R\Psi$  par les noyaux des itérés de  $N$ ). Dans la situation de 3.8, on dispose de la même interprétation : cela résulte de la réalisation de  $(T-1) \otimes \check{T}$  au niveau du complexe de Rapoport-Zink-Steenbrink expliquée en 3.6. Par suite, les arguments de Saito fournissent le résultat suivant :

PROPOSITION 3.10. — *Si  $X/S$  vérifie 3.9 (a) et (b), la suite spectrale des cycles évanescents (3.1.1) (pour  $\Lambda = \mathbb{Q}_\ell$ ),*

$$E_2^{ij} = H^i(X_{\bar{s}}, R^j\Psi(\mathbb{Q}_\ell)) \implies H^{i+j}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) ,$$

*dégénère en  $E_3$ , et la filtration aboutissement est définie par les noyaux des itérés de  $N$  :  $F^{n-r}H^n(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) = \text{Ker } N^{r+1}$ .*

En particulier (“**théorème local du cycle invariant**”) :

COROLLAIRE 3.11. — *Si  $X/S$  vérifie 3.9 (a) et (b), la suite*

$$H^n(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{sp} H^n(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{N} H^n(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

*est exacte pour tout  $n$ .*

(Comme en 2.4.5,  $sp$  désigne le morphisme de spécialisation, défini comme homomorphisme latéral de (3.1.1), ou encore, plus simplement, comme l'homomorphisme induit par  $\mathbb{Q}_\ell = R^0\Psi(\mathbb{Q}_\ell) \rightarrow R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)$ ).

En égale caractéristique  $p$ , plus précisément si  $S$  est le hensélisé d'une courbe lisse sur un corps de caractéristique  $p$ , de sorte qu'on dispose de 3.9 (a) et (b), une démonstration directe de 3.11 est donnée par Deligne dans [11,

3.6] (sous des hypothèses d'ailleurs plus générales :  $X$  essentiellement lisse sur  $k$  et  $X_{\bar{\eta}}$  lisse).

REMARQUES 3.12. (a) Comme en 2.4.7 (a), la filtration  $I$  du faisceau pervers  $R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)[d]$  définie par  $I^r = \text{Im}N^r$  donne naissance à une suite spectrale

$$(3.12.1) \quad {}_I E_1^{r, n-r} = H^n(X_{\bar{s}}, \text{gr}_I^r R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)) \implies H^n(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell),$$

où

$$\text{gr}_I^r R\Psi(\mathbb{Q}_\ell) = (\tau_{\geq r+1} Rj_* \mathbb{Q}_\ell(r+1))[1].$$

On prouve de même que (3.12.1) dégénère en  $E_2$  et définit sur l'aboutissement la filtration  $I^r = \text{Im}N^r$ .

(b) La perversité de  $R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)[d]$  vaut plus généralement dès que  $X$  est plat, de dimension relative  $d$ , et génériquement lisse (cf. 4.5). On peut sans doute prouver, sous ces seules hypothèses, que la monodromie de  $R\Psi(\mathbb{Q}_\ell)$  est quasi-unipotente, et définir un logarithme  $N$  de sa partie unipotente. D'où une suite spectrale de type (3.8.2) et une conjecture généralisant 3.9.

Quand le corps résiduel de  $S$  est fini, la quasi-unipotence en question se ramène au théorème de Grothendieck 1.2. On a en effet, plus généralement, le résultat suivant :

LEMME 3.12.2. — Soient  $S$  comme en 3.1, avec  $k$  fini,  $Y/s$  de type fini, et  $L \in D_c^b(Y \times_s \eta, \Lambda)$ , avec les notations de 3.1 et (SGA 7 XIII) (on peut donc interpréter  $L$  comme un complexe de  $\Lambda$ -faisceaux sur  $\bar{Y}$ , à cohomologie constructible, muni d'une action de  $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$  compatible avec celle de  $G$  sur  $\bar{Y}$ , à travers  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ ). Il existe alors un sous-groupe ouvert  $I_1$  du groupe d'inertie  $I$  et un entier  $N$  tel que, pour tout  $g \in I_1$ ,  $(g-1)^N$  soit nul sur  $L$ .

Les détails de la vérification sont laissés au lecteur : on peut se ramener successivement à supposer  $L$  concentré en un seul degré (troncation), puis lisse (récurrence sur la dimension de  $Y$ ), puis  $Y$  spectre d'une extension finie de  $k$  (prendre la "fibre" de  $L|\bar{Y}$  en une orbite de Frobenius), puis  $Y = s$  (image directe), auquel cas le théorème de Grothendieck s'applique.

Quand  $S$  est le hensélisé en un point fermé d'une courbe lisse sur un corps fini, on peut dire plus. Pour  $X$  séparé de type fini sur  $S$ , et  $K$  pervers pur sur  $X$ ,  $R\Psi(K)$  est pervers (cf. 4.5), et mixte d'après les résultats fondamentaux de [2]. D'après 3.12.2, on peut définir la filtration de monodromie  $M$ . de  $R\Psi(K)$  (dans la catégorie des faisceaux pervers) : celle-ci coïncide, d'après un théorème de Gabber, avec la filtration par le poids (cf. [J.-L. Brylinski, Cohomologie d'intersection et faisceaux pervers, Séminaire Bourbaki, 34e année, 1981/82, n° 585, Astérisque 92-93, 1982, 129-157, th. 3.2.9]). L'un des ingrédients est la formule de Künneth pour  $R\Psi$  (4.7). (NB. Dans (loc. cit.),

p. 144, l. 9, 10, 13 et p. 148, l. -4, il convient de remplacer le groupe d'inertie  $I$  par le sous-groupe  $P_\ell$  noyau de  $t_\ell : I \rightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$ .)

3.13. Soient  $X_\eta$  un schéma séparé et de type fini sur  $\eta$ , et  $H$  l'un des groupes de cohomologie  $H^n(X_\eta, \mathbb{Q}_\ell)$ ,  $H_c^n(X_\eta, \mathbb{Q}_\ell)$ . On sait (1.4) que la représentation de monodromie  $\rho : G \rightarrow GL(H)$  est quasi-unipotente. Supposons que  $k$  est le corps fini  $\mathbb{F}_q$ , et soit  $F_q \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$  le "Frobenius géométrique",  $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ . Rappelons la question de Serre-Tate [26, Appendix, Problem 2] :

**Question 3.13.1.** *Soit  $g$  un élément du groupe de Weil  $W(\bar{K}/K)$  (i.e. un élément de  $G$  d'image  $F_q^m$  dans  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ , avec  $m \in \mathbb{Z}$ ). Est-il vrai que le polynôme caractéristique  $\det(1 - gt, H) \in \mathbb{Q}_\ell[t]$  est à coefficients  $\in \mathbb{Q}$ , indépendant de  $\ell$  ? S'il en est ainsi, et si de plus  $X_\eta$  est propre et lisse, et  $H = H^n$ , est-il vrai que les inverses des racines de  $\det(1 - gt, H)$  sont de poids  $mw$ , avec  $0 \leq w \leq 2n$  ?*

Supposons que  $X_\eta$  soit la fibre générique de  $X$  sur  $S$  satisfaisant aux hypothèses de 3.8, et soit  $M$  la filtration de monodromie de  $H^n(X_\eta, \mathbb{Q}_\ell)$ , centrée en  $n$  (i.e. telle que  $N^r : \text{gr}_{n+r}^M \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{n-r}^M$ ). On peut raffiner la question 3.13.1 en la suivante :

**Question 3.13.2.** *Soit  $g \in W(\bar{K}/K)$  d'image  $F_q$  dans  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ . Est-il vrai que  $\det(1 - gt, \text{gr}_{n+r}^M H^n(X_\eta, \mathbb{Q}_\ell)) \in \mathbb{Q}_\ell[t]$  est à coefficients  $\in \mathbb{Z}$ , indépendant de  $\ell$ , et que tout inverse  $\alpha$  d'une racine est de poids  $n+r$  ?*

Ces deux questions ont des réponses positives si  $X$  est propre et lisse sur  $S$  (grâce à Deligne [9]), ou si  $\dim X \leq 1$ , d'après le théorème de réduction semi-stable (SGA 7 IX 4.3), ou si  $X$  provient, par localisation, d'un schéma propre sur une courbe lisse sur un corps fini, d'après Deligne [8, 9.8], [9] et [11, 1.8.4]. En dehors de ces cas, elles restent ouvertes. Supposons que 3.9 (b) soit vérifiée. Alors, pour tout plongement  $\iota$  de  $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$  dans  $\mathbb{C}$ , tout  $g$  comme en 3.13.2 est de  $\iota$ -poids  $n+r$ , mais on ignore si  $\det(1 - gt, \text{gr}_{n+r}^M)$  est à coefficients rationnels, cf. la discussion du problème 3.2.2 p. 55 dans Katz [17].

#### 4. Appendice : cycles évanescents et dualité en cohomologie étale.

Le résultat principal de cette section (4.2) est bien connu, mais ne figure pas, semble-t-il, dans la littérature. La démonstration, décalquée de (SGA 4 1/2 Th. finitude §3), a été communiquée au rédacteur par O. Gabber. Une variante en théorie de Hodge a été développée par M. Saito [22]. Elle raffine des résultats de Brylinski [4]. Nous donnons également un complément de même nature (4.7), qui nous a été suggéré par M. Rapoport.

4.1. Soient  $(S, s, \eta, \bar{S}, \bar{s}, \bar{\eta}, G)$  comme en 3.1. On désigne par  $\Lambda$  un anneau commutatif noethérien, annulé par un entier inversible sur  $S$ . Pour  $X/S$ , on

dispose du foncteur

$$\begin{aligned} R\Psi_\eta : D^+(X_\eta, \Lambda) &\rightarrow D^+(X_s \times_s \eta, \Lambda) \\ M &\mapsto \bar{i}^* R\bar{j}_* M_{\bar{\eta}} \end{aligned}$$

(où  $D(X_s \times_s \eta, \Lambda)$  désigne, comme dans (SGA 7 XIII) la catégorie dérivée des faisceaux de  $\Lambda$ -modules sur  $X_{\bar{s}}$  munis d'une action (continue) de  $G$  compatible avec celle de  $G$  sur  $X_{\bar{s}}$ ). Quand  $X$  est de type fini sur  $S$ ,  $R\Psi_\eta$  envoie, d'après (SGA 4 1/2 Th. finitude § 3),  $D_{ctf}$  dans  $D_{ctf}$ , où  $D_{ctf}$  désigne la sous-catégorie pleine formée des complexes à cohomologie bornée, constructible et qui sont de tor-dimension finie (cf. SGA 5 III).

THÉORÈME 4.2. — Soit  $X$  séparé et de type fini sur  $S$  et soit  $M \in D_{ctf}(X_\eta, \Lambda)$ . La flèche de  $D_{ctf}(X_s \times_s \eta, \Lambda)$  définie en (4.3.6),

$$(*) \quad R\Psi_\eta(DM) \rightarrow D(R\Psi_\eta(M)) ,$$

est un isomorphisme (dans le membre de gauche (resp. droite),  $D(-)$  désigne le foncteur  $R\mathcal{H}om(-, a^! \Lambda)$  à étant la projection sur  $\eta$  (resp.  $s \times_s \eta = \eta$ )).

(La méthode de (SGA 4 XVIII 3.1) permet de définir  $a^! : D^+(\eta, \Lambda) \rightarrow D^+(X_s \times_s \eta, \Lambda)$ , et plus généralement  $f^! : D^+(Y_s \times_s \eta, \Lambda) \rightarrow D^+(X_s \times_s \eta, \Lambda)$  pour  $f : X \rightarrow Y$  avec  $X$  et  $Y$  séparés de type fini sur  $S$ . D'après (SGA 4 1/2, loc. cit.),  $D$  envoie  $D_{ctf}$  dans  $D_{ctf}$ .)

4.3. Définissons la flèche (\*).

(a) Pour  $L, M, N$  dans  $D_{ctf}(X_\eta, \Lambda)$  et  $u : L \overset{L}{\otimes} M \rightarrow N$ , on a une flèche associée

$$(4.3.1) \quad R\Psi(L) \overset{L}{\otimes} R\Psi(M) \rightarrow R\Psi(N) ,$$

déduite de la flèche canonique

$$R\bar{j}_* L_{\bar{\eta}} \overset{L}{\otimes} R\bar{j}_* M_{\bar{\eta}} \rightarrow R\bar{j}_* (L_{\bar{\eta}} \overset{L}{\otimes} M_{\bar{\eta}}) .$$

(Ici, et dans la suite, on abrège  $R\Psi_\eta$  en  $R\Psi$ .)

En particulier, si  $u : M \overset{L}{\otimes} DM \rightarrow a^! \Lambda$  est l'accouplement canonique, (4.3.1) donne un accouplement

$$(4.3.2) \quad R\Psi(M) \overset{L}{\otimes} R\Psi(DM) \rightarrow R\Psi(a^! \Lambda) ,$$

d'où une flèche

$$(4.3.3) \quad R\Psi(DM) \rightarrow R\mathcal{H}om(R\Psi M, R\Psi(a^!\Lambda)) .$$

(b) Soient  $X$  et  $Y$  séparés de type fini sur  $S$  et  $f : X \rightarrow Y$  un  $S$ -morphisme. Pour  $K \in D^+(Y_\eta, \Lambda)$  on a une flèche (cf. (SGA 7 XIII 1.3.9))

$$(4.3.4) \quad R\Psi(f^!K) \rightarrow f^!R\Psi(K)$$

définie de l'une des manières équivalentes suivantes :

(i) On a un morphisme canonique (où les  $R$  sont omis, pour abrégé)

$$\bar{f}_! \bar{j}_*(f_\eta^! K_\eta) \rightarrow \bar{j}_* f_\eta^! (f_\eta^! K_\eta)$$

(provenant, par adjonction, de  $\bar{j}^* \bar{f}_! = f_\eta^! \bar{j}^*$  et de  $\bar{j}^* \bar{j}_* \rightarrow Id$ ) Comme (par changement de base pour  $\bar{f}_!$ ),  $\bar{i}^* \bar{f}_! = f_{\bar{s}}^! \bar{i}^*$ , on en déduit une flèche

$$f_! R\Psi(f^!K) \rightarrow R\Psi(f_! f^!K) ,$$

d'où, en composant avec  $f_! f^! \rightarrow Id$ ,

$$f_! R\Psi(f^!K) \rightarrow R\Psi(K) ,$$

d'où finalement (4.3.4) se déduit par adjonction.

(ii) D'après (SGA 4 XVIII (3.1.12.3)), on a

$$\bar{j}_* f_\eta^! K_\eta = \bar{f}^! \bar{j}_* K_\eta ;$$

composant avec la "flèche de changement de base" (SGA 4 XVIII (3.1.14.2))

$$\bar{i}^* \bar{f}^! \rightarrow f_{\bar{s}}^! \bar{i}^* ,$$

on obtient (4.3.4). La vérification de l'équivalence de (i) et (ii) est laissée en exercice : utiliser le langage des catégories fibrées (ou cofibrées) de (SGA 4 XVII 2) (cf. aussi (SGA 5 III).)

(c) On a (trivialement)

$$(4.3.5) \quad R\Psi(\Lambda_\eta) = \Lambda_{\bar{s}} .$$

Appliquant (4.3.4) et (4.3.5) pour  $a : X \rightarrow S$ , on trouve une flèche

$$R\Psi(a^!\Lambda_\eta) \rightarrow a^!\Lambda_s ,$$

d'où, par composition avec (4.3.3), une flèche (de  $D_{ctf}(X_s \times_s \eta, \Lambda)$ )

$$(4.3.6) \quad R\Psi(DM) \rightarrow D(R\Psi(M))$$

pour  $M \in D_{ctf}(X_\eta, \Lambda)$ , qui est la flèche (\*) annoncée.

Par construction, (4.3.6) est compatible aux images directes propres : pour  $f : X \rightarrow Y$  propre, on a  $f_*\Psi \xrightarrow{\sim} \Psi f_*$  (SGA 7 XIII 2.1.7) et  $f_*D \xrightarrow{\sim} Df_*$  (dualité globale) SGA XVIII), et le carré qui s'en déduit

$$(4.3.7) \quad \begin{array}{ccc} f_*\Psi(DM) & \xrightarrow{(4.3.6)} & f_*D\Psi M \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ \Psi Df_*M & \xrightarrow{(4.3.6)} & D\Psi f_*M \end{array}$$

est commutatif (on a omis les  $R$ ). La vérification est laissée au lecteur : comme pour l'équivalence de (i) et (ii) ci-dessus, il est commode d'utiliser le langage de (SGA 4 XVII 2).

Prouvons que (4.3.6) est un isomorphisme. La démonstration est entièrement parallèle à celle de l'invariance des cycles évanescents par changement de traits dans (SGA 4 1/2 Th. finitude 3.7). On peut supposer  $S$  strictement local. On procède par récurrence sur  $\dim X_\eta$ . On suppose que (4.3.6) est un isomorphisme pour  $\dim X_\eta < n$ . Pour  $\dim X_\eta = n$ , on se ramène à supposer  $X$  projectif, et l'on note  $C$  le cône de (4.3.6). On vérifie les conditions (A) et (B) de (loc. cit.), à savoir :

- (A) le support des sections locales des faisceaux de cohomologie de  $C$  est fini
- (B)  $R\Gamma(X_s, C) = 0$ .

Pour (A), on procède comme en (loc. cit.) : (4.3.6) commute au passage aux invariants par un pro- $p$ -groupe. Pour (B), on applique (4.3.7).

VARIANTE 4.4. — Si  $\Lambda$  est une extension finie de  $\mathbb{Z}_\ell$  ou  $\mathbb{Q}_\ell$ , la flèche analogue à (4.3.6) (pour  $M \in D_c^b(X_\eta, \Lambda)$ ), définie par passage à la limite à partir des flèches (4.3.6) (cf. [13]), est un isomorphisme. En particulier :

COROLLAIRE 4.5. — *Soit  $\Lambda$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_\ell$ . Si  $M \in D_c^b(X_\eta, \Lambda)$  est pervers, il en est de même de  $R\Psi(M)$  (en tant qu'objet de  $D_c^b(X_{\bar{s}}, \Lambda)$ ), les perversités considérées étant les perversités auto-duales [2, 2.1.16 et § 4].*

D'après [2, 4.4.2], le foncteur  $R\Psi_\eta$  est en effet  $t$ -exact à droite. L'isomorphisme (4.3.6) entraîne donc qu'il est  $t$ -exact.

COROLLAIRE 4.6. — *Soit  $\Lambda$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_\ell$ . Si  $K \in D_c^b(X, \Lambda)$  est pervers, il en est de même de  $R\Phi(K)[-1] \in D_c^b(X_{\bar{s}}, \Lambda_\ell)$ , où  $R\Phi(K)$  est défini*



par le triangle distingué canonique (SGA 7 XIII 2.1.2)

$$(4.6.1) \quad (i^*K)_{\bar{s}} \rightarrow R\Psi(j^*K) \rightarrow R\Phi(K) \rightarrow .$$

Par définition, pour  $X \in D_c^b(X, \Lambda)$ , “pervers” signifie relativement à la  $t$ -structure obtenue par recollement (au sens de [2, 1.4.10]) de la  $t$ -structure  $t$  associée à la perversité autoduale  $p_{1/2}$  sur  $X_s$  [2, 4.0] et de la  $t$ -structure  $t'$  sur  $X_\eta$  définie par  $({}^pD^{\leq -1}, {}^pD^{\geq -1})$ , où  $p = p_{1/2}$ . Cette  $t$ -structure sur  $X$  est donc définie par

$$K \in {}^pD^{\leq 0}(X) \iff (j^*K \in {}^pD^{\leq -1}(X_\eta) \text{ et } i^*K \in {}^pD^{\leq 0}(X_s))$$

$$K \in {}^pD^{\geq 0}(X) \iff (j^*K \in {}^pD^{\geq -1}(X_\eta) \text{ et } i^!K \in {}^pD^{\geq 0}(X_s)) .$$

Par suite, si  $\delta$  est la fonction de dimension rectifiée introduite par Artin dans (SGA 4 XIV 2.2) relativement à  $X \rightarrow S$ , i.e.

$$\delta(x) = \dim \overline{\{y\}} + \deg .\text{tr}.k(x)/k(y)$$

pour  $x$  dans  $X$  d'image  $y$  dans  $S$ , ou encore (loc. cit.)

$$\delta(x) = \begin{cases} \dim \overline{\{x\}} & \text{si } \overline{\{x\}} \cap X_s \neq \emptyset \\ \dim \overline{\{x\}} + 1 & \text{si } \overline{\{x\}} \cap X_s = \emptyset , \end{cases}$$

$K \in D_c^b(X, \Lambda)$  est pervers si et seulement si, pour tout  $x \in X$ , on a

$$H^q i_x^* K = 0 \text{ pour } q > -\delta(x) \text{ et } H^q i_x^! K = 0 \text{ pour } q < -\delta(x) .$$

Si  $X/S$  se déduit d'un schéma séparé de type fini  $Z$  sur une courbe lisse  $C$  sur un corps par localisation en un point fermé de  $C$ , la perversité  $p_{1/2}$  sur  $Z$  induit celle considérée ici sur  $X$ .

Le corollaire 4.6 est dû à Gabber. Ce n'est pas une conséquence immédiate de 4.5. Noter que, si  $K$  est pervers,  $i^*K[-1]$  ne l'est pas en général, comme le montre déjà le cas où  $X = S$  et  $K = \Lambda_s$ . Voici l'argument de Gabber (présenté par Laumon).

(a) Il est clair que le foncteur  $i_*$  est  $t$ -exact. Il en est de même des foncteurs  $j_*$  et  $j^!$  de  $D_c^b(X_\eta, \Lambda)$ , munie de  $t'$ , dans  $D_c^b(X, \Lambda)$ . Pour  $j_*$ , comme dans [2, 4.1.1], cela résulte aisément du théorème d'Artin (SGA 4 XIV 3.1) via le calcul des fibres  $(R^q j_* F)_{\bar{x}}$  en  $x \in X_s$  comme limite inductive de  $H^q(V_\eta, F)$ ,  $V$  parcourant les voisinages étales de  $x$ , et de la suite spectrale de Leray pour  $V_{\bar{\eta}} \rightarrow V_\eta$ . Le cas de  $j^!$  s'en déduit par dualité.

(b) Grâce à (a), le triangle distingué

$$j_!j^*K \rightarrow K \rightarrow i_*i^*K \rightarrow$$

montre que

$$i^*K[-1] \in {}^pD_c^{[0,1]}(X_s, \Lambda)$$

(i.e.  ${}^p\mathcal{H}^n(i^*K[-1]) = 0$  pour  $n \neq 0, 1$ ) et qu'on a une suite exacte de faisceaux pervers sur  $X$

$$0 \rightarrow i_*{}^p\mathcal{H}^0(i_*K[-1]) \rightarrow j_!j^*K \rightarrow K \rightarrow i_*{}^p\mathcal{H}^1(i_*K[-1]) \rightarrow 0 .$$

Comme  $R\Psi(j^*K[-1])$  est pervers (4.5), on en déduit, par le triangle distingué (4.6.1),

$$(i^*K[-1])_{\bar{s}} \rightarrow R\Psi(j^*K[-1]) \rightarrow R\Phi(K)[-1] \rightarrow ,$$

que

$$(*) \quad R\Phi(K)[-1] \in {}^pD_c^{[-1,0]}(X_{\bar{s}}, \Lambda)$$

et qu'on a une suite exacte de faisceaux pervers sur  $X_{\bar{s}}$

$$(**) \quad 0 \rightarrow {}^p\mathcal{H}^{-1}(R\Phi(K)[-1]) \rightarrow {}^p\mathcal{H}^0(i^*K[-1])_{\bar{s}} \rightarrow R\Psi(j^*K[-1]) \\ \rightarrow {}^p\mathcal{H}^0(R\Phi(K)[-1]) \rightarrow {}^p\mathcal{H}^1(i^*K[-1])_{\bar{s}} \rightarrow 0 .$$

Il s'agit de prouver que

$$(***) \quad {}^p\mathcal{H}^{-1}(R\Phi(K)[-1]) = 0 .$$

On va établir (\*\*\*) par dévissage.

(c) Pour  $K$  pervers sur  $X$ , il existe une filtration (dans la catégorie des faisceaux pervers sur  $X$ )

$$0 \subset K' \subset K'' \subset K$$

telle que  $K'$  et  $K/K''$  soient à support dans  $X_s$  (i.e. annulés par  $j^*$ , ou encore de la forme  $i_*M$  pour  $M \in D_c^b(X_s, \Lambda)$ ), et  $K''/K' \simeq j_!j^*K$ . Considérons en effet le carré commutatif dans la catégorie abélienne des faisceaux pervers sur  $X$  :

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & j_*j^*K \\ \uparrow & & \uparrow \\ j_!j^*K & \longrightarrow & j_!j^*K \end{array}$$

où, par définition,  $j_!j^*K$  est l'image de  $j_!j^*K$  dans  $j_*j^*K$ . Il suffit de prendre pour  $K''$  l'image de  $j_!j^*K$  dans  $K$ , et pour  $K'$  le noyau de  $K'' \rightarrow j_!j^*K$ . On est donc ramené à prouver (\*\*\*) dans les deux cas suivants :

(i)  $K$  est à support dans  $X_s$ ,

(ii)  $K = j_{!*}j^*K$ .

**Cas (i).** Alors  $i^*K = i^!K$  est pervers, en particulier  ${}^p\mathcal{H}^0(i^*K[-1])_{\bar{s}} = 0$ , donc  ${}^p\mathcal{H}^{-1}(R\Phi(K)[-1]) = 0$  grâce à (\*\*).

**Cas (ii).** Soit  $K = j_{!*}L$  avec  $L$  pervers sur  $X_\eta$  (pour  $t'$ ). On a une suite exacte de faisceaux pervers sur  $X$

$$0 \rightarrow j_{!*}L \rightarrow j_*L \rightarrow j_*L/j_{!*}L \rightarrow 0 ,$$

donc, d'après (\*), on a une injection

$${}^p\mathcal{H}^{-1}(R\Phi(j_{!*}L)[-1]) \rightarrow {}^p\mathcal{H}^{-1}(R\Phi(j_*L)[-1]) .$$

Il suffit donc de prouver que

$${}^p\mathcal{H}^{-1}(R\Phi(j_*L)[-1]) = 0 .$$

Par définition, il revient au même de prouver que la flèche

$${}^p\mathcal{H}^0(i^*j_*L[-1])_{\bar{s}} \rightarrow {}^p\mathcal{H}^0(R\Psi(L[-1])) = {}_{4.5} R\Psi(L[-1])$$

est un monomorphisme de faisceaux pervers. On peut supposer  $S$  strictement local. Soit  $I$  le groupe d'inertie. La flèche de  $D_c^b(X_s \times_s \eta, \Lambda)$  ( $= D_c^b(X_s, \Lambda[I])$ , "c" voulant dire à cohomologie constructible en tant que complexe de  $\Lambda$ -modules),

$$i^*j_*(L[-1]) \rightarrow R\Psi(L[-1])$$

se récrit comme la flèche canonique associée à  $I \rightarrow \{1\}$

$$R\Gamma(I, R\Psi(L[-1])) \rightarrow R\Psi(L[-1]) .$$

Il suffit donc de montrer que, pour  $M \in D_c^b(X_s, \Lambda[I])$ , pervers en tant qu'objet de  $D_c^b(X_s, \Lambda)$ ,

$$(1) \quad R\Gamma(I, M) \rightarrow M$$

induit une injection sur  ${}^p\mathcal{H}^0$ . Soit  $P_\ell$  comme en 3.6. Le foncteur  $\Gamma(P_\ell, -)$  (invariants sous  $P_\ell$ ) étant exact sur la catégorie des  $\Lambda[I]$ -faisceaux constructibles, pour  $E$  dans  $D_c^b(X_s, \Lambda[I])$  et  $x \in X_s$ , on a  $\mathcal{H}^q i_x^* R\Gamma(P_\ell, E) = R\Gamma(P_\ell, \mathcal{H}^q i_x^* E) = \Gamma(P_\ell, \mathcal{H}^q i_x^* E)$ , et similairement avec  $i_x^!$ ; de plus, si  $C$  est le cône de  $R\Gamma(P_\ell, E) \rightarrow E$ , les suites  $0 \rightarrow \mathcal{H}^q i_x^* R\Gamma(P_\ell, E) \rightarrow \mathcal{H}^q i_x^* E \rightarrow \mathcal{H}^q i_x^* C \rightarrow 0$  (et similairement avec  $i_x^!$ ) sont exactes et scindées. Par suite, pour  $M$  pervers

comme ci-dessus,  $R\Gamma(P_\ell, M)$  et le cône  $C$  de  $R\Gamma(P_\ell, M) \rightarrow M$  sont pervers, et l'on a une suite exacte de faisceaux pervers

$$0 \rightarrow R\Gamma(P_\ell, M) \rightarrow M \rightarrow C \rightarrow 0 .$$

Comme

$$R\Gamma(I, M) = R\Gamma(\mathbb{Z}_\ell(1), R\Gamma(P_\ell, M)) ,$$

on est donc ramené à montrer que pour  $N$  dans  $D_c^b(X_s, \Lambda[\mathbb{Z}_\ell(1)])$ , pervers (en tant que complexe de  $\Lambda$ -modules),

$$R\Gamma(\mathbb{Z}_\ell(1), N) \rightarrow N$$

induit une injection sur  ${}^p\mathcal{H}^0$ . Si  $T$ , comme en 3.6, est un générateur topologique de  $\mathbb{Z}_\ell(1)$ ,  $R\Gamma(\mathbb{Z}_\ell(1), N)$  est le complexe simple associé au complexe double

$$N \xrightarrow{T-1} N ,$$

sur les lignes de degré 0 et 1, et (2) est la projection figurant dans la suite exacte

$$0 \rightarrow N[-1] \rightarrow \mathfrak{s}(N \xrightarrow{T-1} N) \rightarrow N \rightarrow 0 .$$

La suite exacte de cohomologie perverse correspondante fournit l'injection désirée. Ceci achève la démonstration de 4.6.

Dans la même veine que 4.2, on a le résultat suivant, qui m'a été signalé par M. Rapoport :

**THÉORÈME 4.7.** — *Soient  $X$  et  $Y$  de type fini sur  $S$ . Pour  $L \in D_{ctf}(X_\eta, \Lambda)$ ,  $M \in D_{ctf}(Y_\eta, \Lambda)$ , la flèche de  $D_{ctf}((X \times_S Y)_s \times_s \eta, \Lambda)$  définie ci-après,*

$$(4.7.1) \quad R\Psi_\eta(L) \otimes_s^L R\Psi_\eta(M) \rightarrow R\Psi_\eta(L \otimes_\eta^L M) ,$$

*est un isomorphisme ( $\otimes_s^L$  et  $\otimes_\eta^L$  désignent des produits tensoriels externes  $pr_1^* \otimes pr_2^*$ ).*

Ce résultat, attribué à Gabber, figure dans un preprint de A. Beilinson et J. Bernstein, A proof of Jantzen conjectures. Voir aussi [M. Schröter, Diplomarbeit, Bonn, 1990].

On définit la flèche (4.7.1) comme déduite, par application de  $\bar{i}^*$ , de la flèche de Künneth

$$R\bar{j}_* L \otimes_{\bar{S}}^L R\bar{j}_* M \rightarrow R\bar{j}_*(L \otimes_\eta^L M)$$

définie par les inclusions  $\bar{j}$  de  $X_{\bar{\eta}}, Y_{\bar{\eta}}, (X \times Y)_{\bar{\eta}}$  dans  $X_{\bar{S}}, Y_{\bar{S}}, (X \times Y)_{\bar{S}}$  respectivement.

Tout comme (4.3.6), (4.7.1) est compatible aux images directes propres : pour  $f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y'$  propres, et  $h = f \times_S g$ , on a un carré commutatif

$$(4.7.2) \quad \begin{array}{ccc} f_* \Psi(L) \otimes_{\bar{S}}^L g_* \Psi(M) & \xrightarrow{(1)} & h_* \Psi(L \otimes_{\eta}^L M) \\ (3) \downarrow & & \downarrow (4) \\ \Psi(f_* L) \otimes_{\bar{S}}^L \Psi(g_* M) & \xrightarrow{(2)} & \Psi h_* (L \otimes_{\eta}^L M) \end{array}$$

où (1) est composé de l'isomorphisme de Künneth  $f_* \Psi(L) \otimes_{\bar{S}}^L g_* \Psi(M) \xrightarrow{\sim} h_* (\Psi(L) \otimes_{\bar{S}}^L \Psi(M))$  (SGA 4 XVII 5.4.3) et de (4.7.1), (2) est composé de (4.7.1) (pour  $f_* L$  et  $g_* M$ ) et de l'isomorphisme de Künneth, et (3) et (4) sont définis par les isomorphismes canoniques (SGA 7 XIII 2.1.2) (comme dans (4.3.7) on a abrégé  $R\Psi_{\eta}$  en  $R\Psi$  et omis les  $R$ ). La vérification est laissée en exercice.

Prouvons que (4.7.1) est un isomorphisme. La démonstration est analogue à celle de 4.2. On peut supposer  $S$  strictement local. On raisonne par récurrence sur  $\dim Z_{\eta}$ , où  $Z = X \times_S Y$ . On suppose que (4.7.1) est un isomorphisme pour  $\dim Z_{\eta} < n$ . Pour  $\dim Z_{\eta} = n$ , on se ramène à supposer  $X$  et  $Y$  projectifs, et l'on note  $C$  le cône de (4.7.1). Il suffit de vérifier les conditions (A) et (B) :

- (A) le support des sections locales des faisceaux de cohomologie de  $C$  est fini ;
- (B)  $R\Gamma(Z_{\bar{S}}, C) = 0$ .

La validité de (B) résulte de (4.7.2). Pour (A), on procède encore comme dans (SGA 4 1/2 Th. finitude 3.7). On peut supposer  $X_{\eta}$  (resp.  $Y_{\eta}$ ) dense dans  $X$  (resp.  $Y$ ). Si  $n = 0$ , (A) est alors automatiquement satisfaite, on peut donc supposer  $n > 0$ . Quitte à se localiser, on peut supposer qu'on dispose de morphismes quasi-finis  $X \xrightarrow{b} \mathbf{A}_S^q, Y \xrightarrow{c} \mathbf{A}_S^r$ , avec  $q+r = n$ . Supposons  $q > 0$ , et notons  $f_i : X \rightarrow \mathbf{A}_S^1$  le composé de  $b$  et de  $pr_i : \mathbf{A}_S^q \rightarrow \mathbf{A}_S^1$ . Comme dans (loc. cit.), introduisons le localisé strict  $S'$  de  $\mathbf{A}_S^1$  en un point générique géométrique  $s'$  de  $\mathbf{A}_S^1$ , notons  $\eta'$  le point générique de  $S'$ ,  $\eta'_1 = \text{Spec}(k(\bar{\eta}) \otimes_{k(\eta)} k(\eta'))$  le point générique du localisé strict de  $A_{\bar{S}}^1$  en  $s'$ , et  $\bar{\eta}'$  un point géométrique au-dessus de  $\eta'_1$ . On a alors un diagramme commutatif à carrés cartésiens, où

$X' \rightarrow S'$  est déduit de  $f_i : X \rightarrow \mathbf{A}_S^1$  par le changement de base  $S' \rightarrow \mathbf{A}_S^1$  :

$$\begin{array}{cccccc}
 X'_{s'} & \rightarrow & X' & \leftarrow & X'_{\eta'} & \leftarrow & X'_{\eta'_1} & \leftarrow & X'_{\bar{\eta}'} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (*) & & s' & \rightarrow & S' & \leftarrow & \eta' & \leftarrow & \eta'_1 & \xleftarrow{P} & \bar{\eta}' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 s & \rightarrow & S & \leftarrow & \eta & \xleftarrow{I} & \bar{\eta} & & & & .
 \end{array}$$

Notons  $I = \text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$  et  $I' = \text{Gal}(\bar{\eta}'/\eta')$  les groupes d'inertie de  $S$  et  $S'$ . On a  $\text{Gal}(\eta'_1/\eta') = I$ , et, comme Deligne l'observe dans (loc. cit.), dans la suite exacte

$$1 \rightarrow P \rightarrow I' \rightarrow I \rightarrow 1 ,$$

$P$  est un pro- $p$ -groupe, car  $I' \rightarrow I$  induit un isomorphisme sur les quotients modérés, une uniformisante de  $S$  étant une uniformisante de  $S'$ . Notons  $L'$  l'image inverse de  $L$  sur  $X'_{\eta'}$ . Le diagramme (\*) montre (cf. (loc. cit. 3.4)) que

$$(1) \quad R\Psi_{\eta}(L)_{s'} = R\Psi_{\eta'}(L')^P ,$$

où  $(-)^P = R\Gamma(P, -)$  désigne le foncteur "invariants sous  $P$ ". Posons d'autre part

$$Y' = Y \times_S S' , \quad Z' = X' \times_{S'} Y' ,$$

et notons  $M'$  l'image inverse de  $M$  sur  $Y'_{\eta'}$ . Par la compatibilité des cycles évanescents aux changements de traits (loc. cit. 3.7), on a

$$(2) \quad R\Psi_{\eta}(M)_{s'} = R\Psi_{\eta'}(M') .$$

Enfin, du diagramme analogue à (\*) relatif à  $Z'$ , on déduit que

$$(3) \quad R\Psi_{\eta}(L \overset{L}{\otimes}_{\eta} M)_{s'} = R\Psi_{\eta'}(L' \overset{L}{\otimes}_{\eta'} M')^P .$$

Comme  $\dim X'_{\eta'} < q$  et  $\dim Y'_{\eta'} \leq r$ , l'hypothèse de récurrence s'applique à  $(X'/S', Y'/S', L', M')$  : la flèche (4.7.1)

$$(4) \quad R\Psi_{\eta'}(L') \overset{L}{\otimes}_{s'} R\Psi_{\eta'}(M') \rightarrow R\Psi_{\eta'}(L' \overset{L}{\otimes}_{\eta'} M')$$

est un isomorphisme. D'après (2),  $P$  opère trivialement sur  $R\Psi_{\eta'}(M')$ , donc

$$R\Psi_{\eta'}(M') = R\Psi_{\eta'}(M')^P .$$

Donc, appliquant à (4) le foncteur  $(-)^P$ , on obtient un isomorphisme

$$R\Psi_{\eta'}(L')^P \otimes_{s'}^L R\Psi_{\eta'}(M') \xrightarrow{\sim} R\Psi_{\eta'}(L' \otimes^L M')^P .$$

Via (1), (2) et (3), celui-ci s'identifie à la fibre en  $s'$  de (4.7.1). Par suite, le cône  $C$  est cohomologiquement concentré sur l'image inverse, par le composé  $(X \times Y)_s \xrightarrow{b \times c} \mathbf{A}_s^q \times \mathbf{A}_s^r \rightarrow \mathbf{A}_s^q$ , de la réunion d'un nombre fini d'hyperplans fermés de  $\mathbf{A}_s^q$  parallèles à  $pr_i^{-1}(0)$ . Comme ceci vaut pour toute projection  $pr_i : \mathbf{A}^q \rightarrow \mathbf{A}^1$  et que  $(X, L)$  et  $(Y, M)$  jouent des rôles symétriques, on conclut que  $C$  est concentré sur l'image inverse par  $b \times c$  de la réunion d'un nombre fini de points fermés de  $\mathbf{A}_s^q \times \mathbf{A}_s^r$ , i.e. que le support de  $\mathcal{H}^*(C)$  est fini, ce qui prouve (A) et achève la démonstration de 4.7.

COROLLAIRE 4.8. — *Sous les hypothèses de 4.7, supposons que  $R\Psi_{\eta}(L) = R\Psi_{\eta,t}(L)$  ou  $R\Psi_{\eta}(M) = R\Psi_{\eta,t}(M)$ , où  $R\Psi_{\eta,t}(-)$  désigne le foncteur "cycles évanescents modérés" ( $= R\Psi_{\eta}(-)^P$ , où  $P$  est l'inertie sauvage). Alors la flèche analogue à (4.7.1)*

$$(4.8.1) \quad R\Psi_{\eta,t}(L) \otimes_s^L R\Psi_{\eta,t}(M) \rightarrow R\Psi_{\eta,t}(L \otimes_{\eta}^L M)$$

*est un isomorphisme. Si de plus,  $R\Psi_{\eta} = R\Psi_{\eta,t}$  pour  $L$  et  $M$  c'est aussi le cas pour  $L \otimes_{\eta}^L M$ .*

Il suffit en effet d'appliquer le foncteur  $(-)^P$  à (4.7.1).

En particulier, compte tenu de (3.5.1) :

COROLLAIRE 4.9. — *Si  $X$  ou  $Y$  a réduction semi-stable sur  $S$ , alors la flèche naturelle*

$$(4.9.1) \quad R\Psi_{\eta,t}(\Lambda_{X_{\eta}}) \otimes_s^L R\Psi_{\eta,t}(\Lambda_{Y_{\eta}})_t \rightarrow R\Psi_{\eta,t}(\Lambda_{(X \times_S Y)_{\eta}})$$

*est un isomorphisme.*

REMARQUE 4.10. Si  $X$  et  $Y$  ont réduction semi-stable, les  $R^i\Psi_{\eta}(\Lambda_{(X \times_S Y)_{\eta}})$  sont donc modérés. En général,  $X \times_S Y$  n'a plus réduction semi-stable. Néanmoins,  $X \times_S Y$  est log-lisse sur  $S$  au sens de Kato ( $S$  muni de sa log-structure canonique), cf. [K. Kato, Logarithmic structures of Fontaine-Illusie, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins University Press (1989), 191-224], et les exposés de Kato et Hyodo-Kato dans ce séminaire. On peut espérer que le résultat de Rapoport-Zink (3.5.1) s'étend au cas log-lisse.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN, G. WINTERS. — Degenerate fibers and reduction of curves, *Topology* **10**, (1971), 373-383.
- [2] A. BEILINSON, J. BERNSTEIN, P. DELIGNE. — *Faisceaux pervers*, Astérisque 100, 1982.
- [3] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT, M. RAYNAUD. — *Néron models*, *Ergebnisse der Math.* 21, Springer-Verlag, 1990.
- [4] J.-L. BRYLINSKI. — *Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformations de Fourier et sommes trigonométriques*, Astérisque 140-141, 1986.
- [5] C.H. CLEMENS. — Degeneration of Kähler manifolds, *Duke Math. J.* **44**, (1977), 215-290.
- [6] P. DELIGNE. — *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, *Lecture Notes in Math.* 163, Springer-Verlag, 1970.
- [7] P. DELIGNE. — Théorie de Hodge, II, *Publ. Math. IHES* **40**, (1971), 5-58.
- [8] P. DELIGNE. — Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions  $L$ , dans *Modular functions of one variable II*, *Lecture Notes in Math.* 349, Springer-Verlag (1973), 501-597.
- [9] P. DELIGNE. — La conjecture de Weil, I, *Publ. Math. IHES* **43**, (1974), 273-308.
- [10] P. DELIGNE. — Théorie de Hodge, III, *Publ. Math. IHES* **44**, (1974), 5-77.
- [11] P. DELIGNE. — La conjecture de Weil, II, *Publ. Math. IHES* **52**, (1980), 137-252.
- [12] P. DELIGNE, D. MUMFORD. — The irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. Math. IHES* **36**, (1969), 75-109.
- [13] T. EKEDAHL. — On the adic formalism, dans *The Grothendieck Festschrift Volume II*, *Progress in Math.*, Birkhäuser **87**, (1990), 197-218.
- [14] F. El ZEIN. — Théorie de Hodge des cycles évanescents, *Ann. Sci. ENS* **19**, (1986), 107-184.



- [15] F. GUILLEN, V. NAVARRO AZNAR. — Sur le théorème local des cycles invariants, preprint, 1990.
- [16] L. ILLUSIE. — Réalisation  $\ell$ -adique de l'accouplement de monodromie, d'après A. Grothendieck, dans *Courbes modulaires et courbes de Shimura*, Astérisque 196-197, (1993), 27-44.
- [17] N. KATZ. — *Sommes exponentielles*, rédigé par G. Laumon, Astérisque 79, 1980.
- [18] D. MUMFORD. — Semi-stable reduction, dans *Toroidal embeddings I* (G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, Lecture Notes in Math. **339**, Springer-Verlag, (1973), 53-108.
- [19] M. RAPOPORT, T. ZINK. — Ueber die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten, Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik, *Inv. Math.* **68**, (1982), 21-201.
- [20] M. SAITO. — Modules de Hodge polarisables, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **24**, (1988), 849-995.
- [21] M. SAITO. — Mixed Hodge modules, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **26**, (1990), 221-333.
- [22] M. SAITO. — Duality for the vanishing cycles functors, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **25**, (1989), 889-921.
- [23] M. SAITO, S. ZUCKER. — The kernel spectral sequence of vanishing cycles, *Duke Math. J.* **61**, (1990), 329-339.
- [24] W. SCHMID. — Variation of Hodge structure : the singularity of the period mapping, *Inv. Math.* **22**, (1973), 211-319.
- [25] J.-P. SERRE. — *Corps locaux*, Hermann, 1962.
- [26] J.-P. SERRE, J. TATE. — Good reduction of abelian varieties, *Ann. of Math.* **88**, (1968), 492-517.
- [27] J. STEENBRINK. — Limits of Hodge structures, *Inv. Math.* **31**, (1976), 229-257.

- [28] J. STEENBRINK, S. ZUCKER. — Variation of mixed Hodge structure I, *Inv. Math.* **80**, (1985), 489-542.
- [29] S. ZUCKER. — Variation of mixed Hodge structure II, *Inv. Math.* **80**, (1985), 543-565.
- [SGA 4] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, *Lecture Notes in Math.* 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972-73
- [SGA 5] Cohomologie  $\ell$ -adique et fonctions  $L$ , dirigé par A. Grothendieck, *Lecture Notes in Math.* 589, Springer-Verlag, 1977
- [SGA 7] Groupes de monodromie en géométrie algébrique, I, dirigé par A. Grothendieck, *Lecture Notes in Math.* 288, Springer-Verlag, 1972; II, par P. Deligne et N. Katz, *Lecture Notes in Math.* 340, Springer-Verlag, 1973
- [SGA 4 1/2] Cohomologie étale, par P. Deligne, *Lecture Notes in Math.* 569, Springer-Verlag, 1977

L. ILLUSIE  
URA D0752 du CNRS  
Université de Paris-Sud  
Mathématique, Bât. 425  
91405 Orsay Cédex (France)