JEAN-PIERRE WINTENBERGER

Exposé IX : Théorème de comparaison p-adique pour les schémas abéliens — I : Construction de l'accouplement de périodes

Astérisque, tome 223 (1994), Séminaire Bourbaki, exp. nº 9, p. 349-397

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__223__349_0>

Exposé IX

THÉORÈME DE COMPARAISON p-ADIQUE POUR LES SCHÉMAS ABÉLIENS

I : CONSTRUCTION DE L'ACCOUPLEMENT DE PÉRIODES

par Jean-Pierre Wintenberger

Soit p un nombre premier. Soit A un schéma abélien sur $\mathrm{Spec}(R[1/p])$, où R est un anneau intègre et normal de corps des fractions de caractéristique 0, et soit A un schéma abélien sur $\mathrm{Spec}(R[1/p])$. Notons $H^1_{dR}(A/R[1/p])$ la cohomologie de de Rham relative de A sur $R[1/p]$. Soit F le corps des fractions de R, $\overline{F}$ une clôture algébrique de F, $\eta = \mathrm{Spec}(F)$, $\overline{\eta} = \mathrm{Spec}(\overline{F})$ et $T_p(A_{\overline{\eta}})$ le module de Tate de $A_{\overline{\eta}}$. Cette première partie a pour but de construire l'accouplement de périodes :

$$H^1_{dR}(A/R[1/p]) \times T_p(A_{\overline{\eta}}) \to B^+_{dR}(\widetilde{R}/R).$$

L'anneau $B^+_{dR}(\widetilde{R}/R)$ est une version relative de l'anneau B^+_{dR} introduit par J.-M. Fontaine comme coefficients pour les théorèmes de comparaison p-adiques (voir [Fo-Ill] et [Ill] pour des rapports sur le sujet) ($\widetilde{R}$ est une sous-R-algèbre de la fermeture intégrale $\overline{R}$ de R dans $\overline{F}$, $\widetilde{R}$ devant vérifier certaines propriétés ; voir 4). Dans la partie II, nous donnerons les propriétés que l'on est en droit d'attendre d'un tel accouplement (compatibilité à la dualité, à la connexion de Gauss-Manin) et nous en déduirons la compatibilité des cycles de Hodge absolus au théorème de comparaison p-adique pour les variétés abéliennes (compatibilité obtenue indépendamment par D. Blasius, par une autre méthode esquissée dans [Og]).

L'accouplement de périodes est un analogue p-adique de la version relative de l'accouplement : $H^1_{dR}(A/\mathbb{C}) \times H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$, définie par l'intégration des formes différentielles, pour A variété abélienne sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

La construction proposée suppose l'une des hypothèses suivantes :

1) R est un trait (donc de corps des fractions de caractéristique 0; la théorie n'a d'intérêt que si la caractéristique résiduelle est p) ;

2) $A \rightarrow \mathrm{Spec}(R[1/p])$ se prolonge en un schéma abélien $G \rightarrow \mathrm{Spec}(R)$;

3) $A \rightarrow \mathrm{Spec}(R[1/p])$ est muni d'une polarisation de degré premier à p et se prolonge en un schéma semi-abélien $G \rightarrow \mathrm{Spec}(R)$ (grâce à un argument de M. Raynaud, qui permet de se ramener au cas d'une polarisation principale, cf remarques 3) du 2.2.3. , et le lemme de Gabber, cf [De], après un changement de base propre et surjectif , on peut aussi faire la construction dans le cas où A est seulement supposé polarisé).

Sous la première hypothèse, la construction est entièrement due à J.-M. Fontaine et W. Messing. Elle utilise l'extension vectorielle universelle de A, reprenant en cela une idée de R.F. Coleman (note added in proof de [Col]).

La construction utilise des structures entières (i.e. sur $\mathrm{Spec}(R)$) de A. Si A se prolonge en un schéma abélien G sur $\mathrm{Spec}(R)$, on utilise G comme structure entière. Si R est un trait, J.-M. Fontaine et W. Messing utilisent un modèle propre et plat A_o de A sur $\mathrm{Spec}(R)$, et le critère valuatif de propreté pour prolonger les sections de torsion de A à $\mathrm{Spec}(\overline{R})$. Pour effectuer la construction sous l'hypothèse 3, nous dégageons la notion de section contrôlée par une famille finie de modèles entiers d'ouverts de A. Nous voyons cette notion comme une notion relative d'ensemble borné (remarque 2 du 2.1.3). Nous prouvons que toutes les sections de torsion de A sont contrôlées par la même famille finie de modèles entiers d'ouverts de A (th. 2.2.2. et remarque

3) du 2.2.3.). Pour ce faire, nous utilisons que, grâce à G. Faltings, les restrictions de G à certains sous-schémas formels de Spec(R) admettent une uniformisation à la Mumford ([Mum 72]) : nous contrôlons les dénominateurs des valeurs aux sections de torsion de fonctions rationnelles quotients de deux fonctions thêta. Pour une autre construction de l'accouplement de périodes, utilisant les fonctions thêta, dans le cas où la base est un trait, voir P. Colmez ([Colm]).

Une version relative du théorème de comparaison p-adique est donnée dans [Fa 90]. Pour le cas des modules des variétés abéliennes, voir [Fa Ch] p. 241 et [Fa 92] n° 5.1 : la relation entre ces derniers résultats et les nôtres n'est pas claire pour nous.

Voici le plan de notre travail. Dans le 1, nous rappelons brièvement la construction des épaississements p-adiques universels et de $B^+_{dR}(\widetilde{R}/R)$ (voir aussi [Fo]). Notre construction diffère de celle utilisée dans [Fa 90] en ceci que, d'une part elle suppose que l'élévation à la puissance p est surjective dans $\widetilde{R}/p\widetilde{R}$ et que d'autre part, $B^+_{dR}(\widetilde{R}/R)$ est naturellement une $R[1/p]$-algèbre (remarques 2 et 3 du 4.2). Dans le 2, nous développons notre théorie des sections contrôlées dans un cadre plus général que celui dont nous avons besoin : $G \rightarrow \mathrm{Spec}(R)$ est un schéma semi-abélien principalement polarisé qui est un schéma abélien au-dessus de Spec($R[1/q]$) (seul le cas où $q = p$ est utilisé). L'objet du 3 est de nous fournir les outils pour remonter les sections de torsion de A en un sous-groupe borné de sections de l'extension vectorielle universelle de A : cela nous permet, dans le 4, de mettre en œuvre la construction de J.-M. Fontaine et W. Messing.

Je remercie J.-M. Fontaine et W. Messing de m'avoir expliqué leur construction de l'accouplement de périodes dans le cas d'un trait. Je remercie aussi M. Raynaud pour les nombreuses conversations que nous avons eues. Il s'agit d'une version remaniée selon les conseils du referee que je remercie pour ceux-ci. Mes remerciements vont aussi à Mme Bonnardel qui s'est chargée de la frappe du manuscrit.

Dans tout ce qui suit, si G est un (schéma en) groupe(s) et n un entier, on note G_n le noyau de la multiplication par n dans G ; on désigne par G_{tor} le système inductif des G_n.

Signalons que dans 2 et 3, nous notons q en indice du symbole d'un anneau ou d'un schéma, l'anneau localisé pour la partie multiplicative engendrée par q et le sous-schéma ouvert complémentaire du fermé $q = 0$. Dans 1 et 4, pour $q = p$, nous prenons la notation $[1/p]$. Cette incohérence provient de ce qu'il nous est difficile de noter $\mathbb{Z}_p$ l'anneau $\mathbb{Z}[1/p]$ et de ne pas alléger nos notations dans les 2 et 3.

1. Epaississements p-adiques universels (voir aussi [Fo]); $B^{+}_{dR}(\widetilde{R}/R)$.

1.1.

1.1.1. Soit $\widetilde{R}$ un anneau (commutatif unitaire). On note $\mathcal{R}(\widetilde{R})$ l'anneau limite projective des $(\widetilde{R}/p\widetilde{R})_n$, $n \in \mathbb{N}$, où $(\widetilde{R}/p\widetilde{R})_n = \widetilde{R}/p\widetilde{R}$ et où $(\widetilde{R}/p\widetilde{R})_{n+1} \to (\widetilde{R}/p\widetilde{R})_n$ est l'élévation à la puissance p. L'anneau $\mathcal{R}(\widetilde{R})$ est parfait de caractéristique p.

Soit $\widehat{\widetilde{R}}$ le séparé complété de $\widetilde{R}$ pour la topologie p-adique. Si $x = (\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}(\widetilde{R})$, et si, pour tout n, x_n est un relèvement de $\overline{x_n}$ dans $\widetilde{R}$, pour tout n, la suite $(x_m^{p^{m-n}})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\widehat{x}_n$ de $\widehat{\widetilde{R}}$, qui ne dépend pas du choix des relèvements. Si à x on associe la suite $(\widehat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient un isomorphisme du monoïde multiplicatif $(\mathcal{R}(\widetilde{R}), \times)$ sur celui des suites $(\widehat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\widehat{\widetilde{R}}$ vérifiant $\widehat{x}_{n+1}^p = \widehat{x}_n$. Comme $\widehat{\widetilde{R}}\,/p\,\widehat{\widetilde{R}} \simeq \widetilde{R}/p\widetilde{R}$, on a $\mathcal{R}(\widetilde{R}) \simeq \mathcal{R}(\widehat{\widetilde{R}})$.

Plus généralement, *soit $E \to \widehat{\widetilde{R}}$ un épaississement p-adique de $\widehat{\widetilde{R}}$ (d'ordre e)*, i.e. E est un anneau séparé et complet pour la topologie p-adique et $E \to \widehat{\widetilde{R}}$ un homomorphisme surjectif dont le noyau I vérifie $I^{e+1} = (0)$. On vérifie sans peine que, si $(\overline{x}_n) \in \mathcal{R}(\widetilde{R})$ et si x_n est pour tout n, un relèvement de $\overline{x}_n$ dans E, alors pour tout n, la suite $(x_m^{p^{m-n}})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de E qui ne dépend pas du choix des relèvements. On en déduit que l'homomorphisme naturel $\mathcal{R}(E) \to \mathcal{R}(\widehat{\widetilde{R}}) \simeq \mathcal{R}(\widetilde{R})$ est un isomorphisme.

1.1.2. Soit $W(\mathcal{R}(\widetilde{R}))$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathcal{R}(\widetilde{R})$. Comme $\mathcal{R}(\widetilde{R})$ est parfait, si à $x \in \mathcal{R}(\widetilde{R})$, on associe la suite des représentants de Teichmüller $r(x^{1/p^n}) \in W(\mathcal{R}(\widetilde{R}))$, on obtient un isomorphisme naturel de $\mathcal{R}(\widetilde{R})$ sur $\mathcal{R}(W(\mathcal{R}(\widetilde{R})))$.

Si $\underline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W(\mathcal{R}(\widetilde{R}))$, on pose $\Theta(\underline{x}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p^n (\widehat{x_n})_n \in \widehat{\widetilde{R}}$.

L'application $\Theta : W(\mathcal{R}(\widetilde{R})) \rightarrow \widehat{\widetilde{R}}$ est un homomorphisme d'anneaux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Theta \mod .p^{n+1}$ est le composé des deux homomorphismes d'anneaux :

- $W(\mathcal{R}(\widetilde{R})) \rightarrow W_n(\widetilde{R}/p\widetilde{R})$, qui à $\underline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe $((\overline{x_0})_n, \ldots, (\overline{x_n})_n)$,

- $W_n(\widetilde{R}/p\widetilde{R}) \rightarrow \widetilde{R}/p^{n+1}\widetilde{R}$, qui à $(\overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ associe $x_0^{p^n} + px_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^n x_n$, où $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont des relèvements quelconques dans $\widetilde{R}/p^{n+1}\widetilde{R}$ de $\overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$.

L'homomorphisme Θ est caractérisé par le fait qu'il induit l'isomorphisme naturel de $\mathcal{R}(W(\mathcal{R}(\widetilde{R})))$ sur $\mathcal{R}(\widetilde{R})$. Il en résulte que, si E est un épaississement p-adique de $\widehat{\widetilde{R}}$, l'homomorphisme $W(\mathcal{R}(\widetilde{R})) \xrightarrow{\sim} W(\mathcal{R}(E))) \rightarrow E$ est l'unique homomorphisme rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
W(\mathcal{R}(\widetilde{R})) \arrow[d] \arrow[dr, "\Theta"] & & \\
E \arrow[r] & \widehat{\widetilde{R}} \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Si l'élévation à la puissance p est surjective dans $\widetilde{R}/p\widetilde{R}$, Θ est surjectif. On voit alors que le quotient de $W(\mathcal{R}(\widetilde{R}))$ par l'adhérence de $(\mathrm{Ker}\ \Theta)^{e+1}$ dans $W(\mathcal{R}(\widetilde{R}))$ (pour la topologie p-adique) est un épaississement p-adique universel d'ordre e de $\widehat{\widetilde{R}}$.

Dans toute la suite du 1, on suppose que l'élévation à la puissance p est surjective dans $\widetilde{R}/p\widetilde{R}$.

1.1.3. Soit R un anneau et supposons $\widetilde{R}$ muni d'une structure de R-algèbre. On appelle *R-épaississement p-adique de* $\widehat{\widetilde{R}}$ un épaississement

p-adique $E \to \widehat{\widetilde{R}}$ de $\widehat{\widetilde{R}}$, tel que E soit muni d'une structure de R-algèbre et que $E \to \widehat{\widetilde{R}}$ soit un R-homomorphisme. Le séparé complété de $(W(\mathcal{R}(\widetilde{R})) \otimes R)/(\mathrm{Ker}\,\Theta \otimes id)^{e+1}$ pour la topologie p-adique, muni du R-homomorphisme sur $\widehat{\widetilde{R}}$ défini par Θ, est un R-épaississement p-adique universel de $\widehat{\widetilde{R}}$ d'ordre e.

1.1.4. Supposons $\widetilde{R}$ sans p-torsion. Notons $\mathcal{W}_e$ le quotient de $(W(\mathcal{R}(\widetilde{R})) \otimes R)/(\mathrm{Ker}\ \Theta \otimes id)^{e+1}$ par sa p-torsion et $\mathcal{I}_e = \mathrm{Ker}(\mathcal{W}_e \to \widehat{\widetilde{R}})$. Comme $\widehat{\widetilde{R}}$ est sans p-torsion, on a :

$$\mathcal{I}_e = \mathrm{Ker}(\mathcal{W}_e \to \widehat{\widetilde{R}})[1/p] \cap \mathcal{W}_e \ ;$$

De plus : $(\mathcal{I}_e)^{e+1} = (0)$.

Notons $\widehat{\mathcal{W}_e}$ et $\widehat{\mathcal{I}}_e$ les séparés complétés de $\mathcal{W}_e$ et $\mathcal{I}_e$ respectivement pour la topologie p-adique. Comme $\widehat{\widetilde{R}}$ est sans p-torsion, on a la suite exacte :

$$0 \to \widehat{\mathcal{I}}_e \to \widehat{\mathcal{W}_e} \to \widehat{\widetilde{R}} \to 0 \ ,$$

et $(\widehat{\mathcal{I}}_e)^{e+1} = (0)$. On voit alors que $\widehat{\mathcal{W}_e} \to \widehat{\widetilde{R}}$ est un objet universel dans la catégorie des R-épaississement p-adiques de $\widehat{\widetilde{R}}$ d'ordre e qui sont sans p-torsion. On pose :

$$B^+_{dR}(\widetilde{R}/R) = \varprojlim_{e \in \mathbb{N}} (\widehat{\mathcal{W}_e}[1/p]) \ .$$

1.1.5. Remarques.

1) Soit k un anneau parfait de caractéristique p. Notons W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et supposons donnée sur R une structure de W- algèbre. Alors, comme $\mathcal{R}(W) = k$, il résulte du 1.1.2 que W est formellement étale (pour la topologie p-adique) sur l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers

p-adiques. Si E est un épaississement p-adique de $\widehat{\widetilde{R}}$, on voit alors que E est naturellement muni d'une structure de W-algèbre et dans le 1.1.3 et le 1.1.4, on peut remplacer $W(\mathcal{R}(\widetilde{R})) \otimes R$ par $W(\mathcal{R}(\widetilde{R})) \otimes_W R$.

2) Soit R' une R-algèbre formellement étale pour la topologie p-adique et supposons donnée sur $\widetilde{R}$ une structure de R'-algèbre prolongeant sa structure de R-algèbre. Alors les catégories des R et des R'-épaississements p-adiques de $\widehat{\widetilde{R}}$ s'identifient. En particulier, $B^+_{dR}(\widetilde{R}/R) = B^+_{dR}(\widetilde{R}/R')$, (si $\widetilde{R}$ est sans p-torsion).

3) Supposons $\widetilde{R}$ sans p-torsion. Soit R' une R-algèbre finie telle que $R'[1/p]$ soit étale sur $R[1/p]$, et supposons donnée sur $\widetilde{R}$ une structure de R'-algèbre prolongeant sa structure de R-algèbre. Alors l'homomorphisme naturel $B^+_{dR}(\widetilde{R}/R) \to B^+_{dR}(\widetilde{R}/R')$ est un isomorphisme. Soit, en effet, e un entier et notons $\widehat{\mathcal{W}}_{eR}$ (resp. $\widehat{\mathcal{W}}_{eR'}$) le R-épaississement (resp. le R'-épaississement) p-adique universel d'ordre e parmi ceux qui sont sans p-torsion (1.1.4)). Construisons un homomorphisme $\widehat{\mathcal{W}}_{eR'}[1/p] \to \widehat{\mathcal{W}}_{eR}[1/p]$ inverse de l'homomorphisme naturel. Comme $R'[1/p]$ est étale sur $R[1/p]$, la structure de $R'[1/p]$-algèbre sur $\widehat{\widetilde{R}}\,[1/p]$ se remonte de manière unique à $\widehat{\mathcal{W}}_{eR}[1/p]$. Pour tout entier a, notons $\widehat{\mathcal{W}}^{(a)}_{eR}$ le R-épaississement p-adique de $\widehat{\widetilde{R}}$:

$$\widehat{\mathcal{W}}^{(a)}_{eR} = \widehat{\mathcal{W}}_{eR} + p^{-a} F^1 \widehat{\mathcal{W}}_{eR} + \cdots + p^{-ae} F^e \widehat{\mathcal{W}}_{eR} \ ,$$

où, pour tout i, $F^i \widehat{\mathcal{W}}_{eR}$ est l'adhérence pour la topologie p-adique dans $\widehat{\mathcal{W}}_{eR}$ de la puissance i-ème du noyau de $\widehat{\mathcal{W}}_{eR} \to \widehat{\widetilde{R}}$. Alors comme R' est finie sur R, pour a suffisamment grand, l'image de R' dans $\widehat{\mathcal{W}}_{eR}$ est contenue dans $\widehat{\mathcal{W}}^{(a)}_{eR}$. Cela munit $\widehat{\mathcal{W}}^{(a)}_{eR}$ d'une structure de R'-algèbre remontant celle de $\widehat{\widetilde{R}}$ et fournit un homomorphisme $\widehat{W}_{eR'} \to \widehat{W}^{(a)}_{eR}$, d'où un homomorphisme de $B^+_{dR}(\widetilde{R}/R')$ dans $B^+_{dR}(\widetilde{R}/R)$. On en déduit aisément que $B^+_{dR}(\widetilde{R}/R) \simeq B^+_{dR}(\widetilde{R}/R')$.

2. Contrôle des sections de torsion d'un schéma abélien.

Dans tout le 2, S est un schéma et q un élément de $\Gamma(S, O_S)$ qui n'est pas diviseur de 0 dans O_S. Pour tout S-schéma S', on note S'_q le sous-schéma ouvert de S' complémentaire du fermé $q = 0$.

2.1. Définitions.

2.1.1. Si X est un S_q-schéma séparé et de type fini, un *S-modèle entier de X* est la donnée d'un S-schéma séparé et de type fini X_o tel que O_{X_o} soit sans q-torsion avec un isomorphisme $(X_o)_q \simeq X$.

2.1.2. Soit X un S_q-schéma séparé et de type fini. Soit $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille *finie* d'ouverts de X et pour chaque $\lambda \in \Lambda$, $U_{\lambda,0}$ un S-modèle entier de U_λ (on ne demande pas que les $U_{\lambda,0}$ se recollent en un S-modèle entier de X). Si S' est un S-schéma avec q non diviseur de 0 dans $O_{S'}$, et si $z : S'_q \to X$ est une section de X, on dit que $(U_{\lambda,0})_{\lambda \in \Lambda}$ *contrôle* z s'il existe un recouvrement ouvert $(S'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de S' et, pour chaque λ, une section $S'_\lambda \to U_{\lambda,0}$ de $U_{\lambda,0}$ qui prolonge la restriction de z à $(S'_\lambda)_q$.

2.1.3. REMARQUES.

1) a) Supposons que, pour chaque λ, $U_{\lambda,0} = X_o$ pour un S-modèle entier X_o de X. Alors, comme q est non diviseur de 0 dans $O_{S'}$, on voit facilement que la section $z : S'_q \to X_q$ est contrôlée par $(U_{\lambda,0})$ si et seulement si elle provient d'une morphisme de S' dans X_o.

b) Comme q est non diviseur de 0 dans $O_{S'}$ et que les $U_{\lambda,0}$ sont séparés sur S, on voit facilement que la section $S'_\lambda \to U_{\lambda,0}$ est uniquement déterminée par sa restriction à $(S'_\lambda)_q$.

c) Comme les $U_{\lambda,0}$ sont de type fini sur S, on voit facilement que $z : S'_q \to X_q$ est contrôlée par $(U_{\lambda,0})_{\lambda \in \Lambda}$, si et seulement si, pour tout $s' \in S'$, il existe $\lambda \in \Lambda$ et un morphisme $z_{s'} : \mathrm{Spec}(O_{S',s'}) \to U_{\lambda,0}$ tel que la restriction de z à $\mathrm{Spec}(0_{S',s'})_q$ provienne de $z_{s'}$ (on a noté $O_{S',s'}$ l'anneau local de S'

en s').

2) Soit V un anneau de valuation discrète. Notons K son corps des fractions, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et $\overline{V}$ la fermeture intégrale de V dans $\overline{K}$. Prenons $S = \mathrm{Spec}(V)$, $S' = \mathrm{Spec}(\overline{V})$ et pour q une uniformisante de V.

Soit Δ un sous-ensemble de $X(\overline{K})$. Alors, pour qu'il existe $(U_{\lambda,0})_{\lambda\in\Lambda}$ contrôlant tous les éléments de Δ, il faut et il suffit que Δ soit borné dans $X(\overline{K})$, au sens de [BLR] n° 1.1.

Si X est la fibre générique d'un V-schéma propre et plat X_o, il résulte du critère valuatif de propreté que X_o contrôle tout élément de $X(\overline{K})$. Si X est projectif, on peut prendre pour X_o l'adhérence schématique de X dans $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K \hookrightarrow \mathbb{P}^n_V$.

3) Avec V et q comme dans 2), prenons $S = \mathrm{Spec}(V[T])$ et $X = S_q \times \mathbb{P}^1$. Notons $R = V[T]$, $X = \mathrm{Spec}(R_q[Z]) \cup \mathrm{Spec}(R_q[Z^{-1}])$, $X = U_1 \cup U_2$, et pour chaque entier a,

$$U_{1,0}^{(a)} = \mathrm{Spec}(R[q^a Z]),\ U_{2,0}^{(a)} = \mathrm{Spec}(R[q^a Z^{-1}])\ .$$

Comme R est factoriel, on voit facilement que les sections z de X qui sont contrôlées par $(U_{\lambda,0}^{(a)})_{\lambda\in 1,2}$ sont 0, ∞, et les $z \in \mathrm{Frac}(R)$ tels que $z = q^{a'} z_1/z_2$ avec $-a \leq a' \leq a$, z_1 et z_2 éléments de R non divisibles par q, et z_1 et z_2 fortement étrangers i.e. $z_1 R + z_2 R = R$. En particulier $T/(T-q)$ définit une section de X qui n'est pas contrôlée par $(U_{\lambda,0}^{(a)})_{\lambda\in 1,2}$ pour aucun a.

4) Supposons S et X affines et soit Δ un ensemble de sections de $X \to S_q$. Alors, pour qu'il existe $(U_{\lambda,0})_{\lambda\in\Lambda}$ contrôlant tous les éléments de Δ, il faut et il suffit que l'on ait :

(I) $$\forall f \in \Gamma(X, O_X)\ \exists a \in \mathbb{Z},\ \forall z \in \Delta,\ q^a f(z) \in \Gamma(S, O_S).$$

De plus, si c'est le cas, il existe $(U_{\lambda,0})_{\lambda\in\Lambda}$ réduit à un S-modèle entier de X qui contrôle tous les éléments de Δ.

En effet, supposons d'abord qu'il existe $(U_{\lambda,0})_{\lambda\in\Lambda}$ contrôlant tous les éléments de Δ. On peut supposer que les $U_{\lambda,0}$ sont affines, $U_{\lambda,0} = \mathrm{Spec}(\Gamma_\lambda)$.

Soit $f \in \Gamma(X, O_X)$. Il existe un entier a tel que, si $f_{|U\lambda}$ est la restriction de f à U_λ, on ait, pour tout λ, $q^a\ f_{|U_\lambda} \in \Gamma_\lambda$. Soit $z \in \Delta$. Comme O_S est sans q-torsion et que $q^a f(z) \in \Gamma(S_\lambda, O_S)$ pour tout λ, on a bien $q^a f(z) \in \Gamma(S, O_S)$.

Réciproquement, supposons que l'on ait (I). Soit f_i un ensemble fini de générateurs de la $\Gamma(S, O_S)_q$-algèbre $\Gamma(X, O_X)$. Si, pour chaque i, a_i est un entier tel que $q^{a_i} f_i(z) \in \Gamma(S, O_S)$ pour tout $z \in \Delta$, on voit que la sous-algèbre de la $\Gamma(S, O_S)$-algèbre $\Gamma(X, O_X)$ engendrée par les $q^{a_i} f_i$ définit bien un modèle entier X_0 de X qui contrôle tous les éléments de Δ.

2.2. Énoncé du théorème.

On suppose S normal et intègre. Soit $A \to S_q$ un schéma abélien de dimension d. Soit $\eta = \mathrm{Spec}(F)$ le point générique de S, $\overline{F}_{alg}$ une clôture algébrique de F et $\overline{S}_{alg}$ le normalisé de S dans $\mathrm{Spec}(\overline{F}_{alg})$. Comme, pour tout entier n, le noyau A_n de la multiplication par n dans A est fini sur S_q, toute section de torsion de A sur $\mathrm{Spec}(\overline{F}_{alg})$ se prolonge à $(\overline{S}_{alg})_q$. Soient $\overline{F}$ la clôture séparable de F dans $\overline{F}_{alg}$ et $\overline{S}$ le normalisé de S dans $\mathrm{Spec}(\overline{F})$. Comme, pour tout entier n premier à la caractéristique de F, A_n est génériquement séparable, toute section de torsion d'ordre premier à la caractéristique de F provient d'une section $\overline{S}_q \to A$.

2.2.1. REMARQUE. Si A se prolonge en un schéma abélien G sur S, (resp. si S est le spectre d'un trait et q en est une uniformisante), toute section de torsion se prolonge en une section $\overline{S}_{alg} \to G$ (resp. une section de $\overline{S}_{alg}$ dans un modèle propre et plat A_0 de A sur S, cf. remarque 2 du 2.1.3) ; toute section de torsion d'ordre premier à la caractéristique de F se prolonge en une section $\overline{S} \to G$ (resp. $\overline{S} \to A_0$).

2.2.2. THÉORÈME. — *On suppose que :*

- S est noethérien, (rappelons que S est supposé normal et intègre) ;

- 2 est inversible dans $\Gamma(S_q, O_S)$,

- A est principalement polarisé et se prolonge en un schéma semi-abélien G sur S (à fibres connexes).

On suppose donné un nombre premier ℓ inversible dans $\Gamma(S, O_S)$.

Soit b un entier. Soit F_1 une extension finie et séparable de F contenue dans $\overline{F}$ telle que les éléments de $A_{8\ell^b}(\overline{F})$ soient rationnels sur F_1. Notons S_1 le normalisé de S dans $\mathrm{Spec}(F_1)$.

Alors, pour b suffisamment grand, il existe une famille finie de S_1-modèles entiers d'ouverts de $A \times_{S_q} (S_1)_q$ qui contrôle toute section de torsion de A sur $\overline{S}_q$ qui est tuée par un entier n premier à la caractéristique de F.

2.2.3. REMARQUES.

1) Sans l'hypothèse relative au nombre premier ℓ, le théorème entraîne que, localement sur S, pour la topologie définie par les morphismes étales et finis, il existe des modèles entiers contrôlant les sections de torsion d'ordre premier à la caractéristique de F.

2) L'hypothèse que l'ordre des sections est premier à la caractéristique de F n'intervient qu'au 2.4.8, lorsqu'on utilise la finitude d'une clôture intégrale dans une extension séparable. Il est possible qu'un examen plus soigneux de la démonstration permette de se débarrasser de cette hypothèse.

3) (argument dû à M. Raynaud). Soit A et S comme dans l'énoncé du théorème, sauf qu'au lieu de supposer A principalement polarisé, on

suppose seulement A muni d'une polarisation de noyau d'ordre m premier à la caractéristique de F. Soit F_2 une extension finie et séparable de F contenue dans $\overline{F}$ telle que les éléments de $A_m(\overline{F})$ soient rationnels sur F_2. Notons S_2 la fermeture intégrale de S dans F_2. Alors, si m est inversible dans O_S, la conclusion du théorème reste vraie, après changement de base à S_2. Si m est seulement supposé premier à la caractéristique de F, il existe S_2' normal avec $S_2' \to S_2$, propre, birationnel, $S_2' \to S_2$ isomorphisme au dessus de l'ouvert où m est inversible, tel que la conclusion du théorème reste vraie après changement de base à $\overline{S_2'}$,$\overline{S_2'}$ désignant le normalisé de S_2' dans Spec($\overline{F}$).

En effet, notons $\lambda : A \to A^*$ la polarisation. Soit L_η un faisceau inversible sur la fibre générique de A définissant λ. Soit N un sous-groupe de Ker(λ)(F_2), qui est isotrope maximal pour l'accouplement défini par L_η ([Mum 66]). Soit A'_η le quotient de A_η par N. Alors L_η provient d'un faisceau inversible L'_η sur A'_η et L'_η induit une polarisation principale sur A'_η. Soit $\overline{N}$ l'adhérence schématique de N dans $G \times_S S_2$. Le schéma $\overline{N}$ est quasi-fini sur S_2, puisque c'est un sous-schéma fermé du noyau $(G \times_S S_2)_m$ de la multiplication par m dans $G \times_S S_2$. Si m est inversible dans O_S, il est étale sur S_2, car $(G \times_S S_2)_m$ est, en tant que schéma sur S_2, isomorphe à une somme d'ouverts de S_2. Sans hypothèse sur m, grâce à la platification par éclatement de [Ra-Gr], il existe un éclatement $S_2'' \to S_2$ de S_2, qui est un isomorphisme sur l'ouvert où m est inversible, tel que le transformé strict $\overline{N''}$ de $\overline{N}$ par $S_2'' \to S_2$ soit plat sur S_2''. Soit S_2' le normalisé de S_2'' dans F_2, et $\overline{N'} = \overline{N''} \times_{S_2''} S_2'$. Alors, $\overline{N}$ (respectivement $\overline{N'}$), est un schéma en groupes quasi-fini et plat sur S_2 (respectivement S_2'). La relation de passage au quotient fppf qu'il définit sur le morphisme d'élévation à la puissance m $G \times_S S_2 \to G \times_S S_2$ (respectivement $G \times_S S_2' \to G \times_S S_2'$) est effective d'après le 5) du théorème 1 de [Ra]. Notons G' le quotient; c'est un schéma semi-abélien sur S_2 (respectivement S_2') qui prolonge A'_η et $A' = G'_q$ est un schéma abélien sur $(S_2)_q$ (respectivement $(S_2')_q$) qui est principalement polarisé car A'_η l'est. On peut donc lui appliquer le théorème. Pour b entier suffisamment grand, soit F_3 extension finie et séparable de F_2 contenue dans $\overline{F}$ telle que les éléments de $A'_{8\ell^b}(\overline{F})$ soient rationnels sur F_1 et désignons par S_3

(respectivement S'_3) le normalisé de S_2 (respectivement S'_2) dans $\mathrm{Spec}(F_3)$. Il existe une famille finie $(\mathcal{U}'_i)$ de S_3-modèles (respectivement S'_3-modèles) entiers d'ouverts de A', qui contrôlent les sections de $A'_{\overline{F}}$ qui sont de torsion d'ordre premier à la caractéristique de F. Il est facile de voir que les $(\mathcal{U}_i)$, normalisés des $(\mathcal{U}'_i)$ dans A'_{F_3}, contrôlent bien les sections de torsion de $A_{\overline{F}}$ qui sont de torsion d'ordre premier à la caractéristique de F.

Démonstration du théorème :

Par un argument de passage à la limite, on se ramène au cas où R est de type fini sur $\mathbf{Z}$, et donc excellent, ce que nous supposerons désormais.

2.3. Contruction des modèles entiers .

2.3.1. On peut clairement supposer S affine, $S = \mathrm{Spec}(R)$, $\overline{S} = \mathrm{Spec}(\overline{R})$. Soit F_1 une extension finie de F contenue dans $\overline{F}$ comme dans l'énoncé du théorème. Après extension des scalaires à F_1, A possède une structure symplectique de niveau $8\ell^b$, i.e., [Fa Ch] chap. 1. 1.8., un isomorphisme symplectique $A_{8\ell^b} \simeq (\mu_{8\ell^b})^d \times (\mathbb{Z}/8\ell^b)^d$, les racines de l'unité d'ordre $8\ell^b$ étant aussi rationnelles sur F_1. Choisissons une telle structure de niveau. Soit R_1 la fermeture intégrale de R dans F_1 ; l'isomorphisme symplectique $A_{8\ell^b} \simeq (\mu_{8\ell^b})^d \times (\mathbb{Z}/8\ell^b)^d$ se prolonge à $\mathrm{Spec}(R_1)_q$. Choisissons de même un isomorphisme $\mu_{8\ell^b} \simeq \mathbb{Z}/8\ell^b$ sur $\mathrm{Spec}(R_1)_q$.

Pour tout faisceau inversible relativement ample L'_q sur A, on note $H(L'_q)$ le sous-groupe de A noyau de la polarisation $A \to A'$ associée à L'_q et $\mathcal{G}(L'_q)$ le groupe des automorphismes de L'_q au-dessus des translations par les sections de $H(L'_q)$ ([Mum 66] ou [MB 81]). On a donc la suite exacte :

$$1 \to \mathbb{G}_m \to \mathcal{G}(L'_q) \to H(L'_q) \to 1 \ .$$

Notons $\lambda : A \to A'$ la polarisation principale de A. Soit L'_q le faisceau inversible rigidifié sur A image inverse par (id, λ) du fibré de Poincaré sur $A \times A'$. Le faisceau inversible L'_q est donc totalement symétrique et $H(L'_q) \simeq A_2$. L'isomorphisme symplectique, après extension des scalaires à

$\mathrm{Spec}(R_1)_q$, de A_8 avec $(\mu_8)^d \times (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^d$ induit sur $L_q'^2$ une θ-structure symétrique ([Mum 66]), i.e. un isomorphisme de $\mathcal{G}(L_q'^2)$, muni de l'automorphisme δ_{-1} induit par la symétrie, sur le groupe théta standard muni de son involution. Cette θ-structure permet de définir une section $A_2 \to \mathcal{G}(L_q'^2)$, dont l'image est formée de sections fixes par δ_{-1}. Cette section permet de descendre $L_q'^2$ en L_q symétrique avec $L_q'^2 \simeq [2]^* L_q \simeq L_q^4$ ([MB 81]). D'après un théorème de Moret-Bailly, le faisceau inversible rigidifié symétrique L_q se prolonge de manière unique en un faisceau inversible rigidifié L sur G ([MB] th. 3.3 du chap. II).

2.3.2. Soit $k = \ell$ si $\ell \neq 2$ et $k = 4$ si $\ell = 2$; supposons b choisi tel que $\ell^b \geq k$.

LEMME. — *Après extension des scalaires à* $\mathrm{Spec}(R_1)_q$, *le* $\mathbb{G}_m$*-torseur* $\mathcal{G}(L_q^k) \to H(L_q^k) = A_k$ *est trivial.*

Démonstration. : Après extension des scalaires à $\mathrm{Spec}(R_1)_q$, on a un isomorphisme symplectique $A_{4k} \simeq (\mu_{4k})^d \times (\mathbb{Z}/4k\mathbb{Z})^d$. Cet isomorphisme définit une théta-structure symétrique sur le faisceau inversible rigidifié totalement symétrique L_q^{2k} ([Mum 66]), donc une trivialisation du $\mathbb{G}_m$-torseur $\mathcal{G}(L_q^{2k})$ sur A_{2k}. Comme on dispose d'un homomorphisme $\eta_2 : \mathcal{G}(L_q^{2k}) \to \mathcal{G}(L_q^k)$ coiffant la multiplication par 2 ([Mum 66]), on voit que l'on peut trivialiser le $\mathbb{G}_m$-torseur $\mathcal{G}(L_q^k) \to A_k$.

2.3.3. Après extension des scalaires à $\mathrm{Spec}(R_1)_q$, on a $A_k \simeq (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^d \times (\mu_k)^d \simeq (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^{2d}$. Pour chaque $\xi \in A((R_1)_q)_k$, on note g_ξ une section de $\mathcal{G}(L_q^k)$ au-dessus de ξ. Si θ est un élément non nul de $\Gamma(A, L_q)$, on pose :

$$X_\xi = g_\xi(\theta^k)/\theta^k \ .$$

On définit ainsi une fonction rationnelle sur $G \times_S \mathrm{Spec}(R_1)$, qui ne dépend pas du choix de θ, et le choix de g_ξ la définit à une unité de $(R_1)_q$ près.

2.3.4. Soit a un entier que nous choisirons suffisamment grand. Pour ξ' une section de $A((R_1)_q)_{\ell^b}$, notons $t^*_{\xi'}(X_\xi)$ la fonction rationnelle sur $G \times_S \mathrm{Spec}(R_1)$ déduite de X_ξ par translation par ξ'. Notons $\Gamma^{(a)}_{\xi'}$ la sous-R_1-algèbre du corps des fractions rationnelles de $G \times_S \mathrm{Spec}(R_1)$ engendrée par les $q^a t^*_{\xi'}(X_\xi)$, ξ décrivant $A((R_1)_q)_k$. Comme L^k_q est relativement très ample et que les $g_\xi(\theta^k)$ engendrent $\Gamma(A, L^k_q)$ ([M 66] th. 2), $\mathrm{Spec}(\Gamma^{(a)}_{\xi'})_q$ s'identifie à l'ouvert $A - t^*_{-\xi'}(\Theta_A)$, où Θ_A est le diviseur théta associé à L_q. La famille des $\mathrm{Spec}(\Gamma^{(a)}_{\xi'})$ forme une famille finie de modèles entiers d'ouverts de $A \times_{S_q} \mathrm{Spec}(R_1)_q$, indexée par les $\xi' \in A((R_1)_q)_{\ell^b}$.

Nous nous proposons de prouver que, pour a et b assez grand, cette famille de modèles entiers contrôlent les sections de torsion d'ordre premier à la caractéristique de F. Pour ceci, nous montrons au prochain numéro comment évaluer aux sections de torsion les fonctions θ, à l'aide de leur développements de Fourier partiels, puis dans le numéro suivant, nous contrôlons les dénominateurs de certaines sections de torsion.

Exemple : Soit E la courbe elliptique de Tate $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}\backslash q^{\mathbf{Z}}$ sur $R = \mathbf{Z}[[q]]$. Soient $\theta\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right](z,\tau)$, $a, b \in \{0, \frac{1}{2}\}$, les séries théta usuelles :

$$\theta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{\pi i(n+a)^2\tau + 2\pi i(n+a)(z+b)}.$$

On voit facilement que le modèle entier engendré par les fonctions $\frac{\theta\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]}{\theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]}$, $a, b \in \{0, \frac{1}{2}\}$, $(a,b) \neq (0,0)$, contrôle toute section de torsion provenant d'une puissance fractionnaire q^α de q, avec $]\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}[$. Les translatés par les points de ℓ^b-torsion, $b \geq 1$ si $\ell \neq 2$, $b \geq 2$ si $\ell = 2$, contrôlent toutes les sections de torsion.

2.4. Rappels sur l'uniformisation des schémas abéliens ([FaCh]) ; évaluation des fonctions thêta aux sections de torsion.

2.4.1. Dans tout le 2.4. , on reprend les notations du 2.3. et on se donne de plus un idéal I de R, $I = \sqrt{I}$, et tel que $\mathrm{Spec}(R/I)$ est connexe, tel que la dimension des sous-tores maximaux des fibres de G aux points de $\mathrm{Spec}(R/I)$ est constante (on note cette constante t). Comme $G_q \to \mathrm{Spec}(R_q)$ est un schéma abélien, si $t \neq 0$, on a $\mathrm{Spec}(R_q) \cap \mathrm{Spec}(R/I) = \emptyset$ et $q \in I$. On note $\widehat{R}$ le complété I-adique de R, de sorte que $\widehat{R}$ est encore intègre et normal, puisqu'on a supposé R excellent (cf début de la démonstration du théorème). On note $\widehat{I} = I\widehat{R}$, $\widehat{\eta}$ le point générique de $\mathrm{Spec}(\widehat{R})$, et $\widehat{F}$ le corps des fractions de $\widehat{R}$.

On s'intéresse à des propriétés qui sont vraies après restriction à un voisinage étale de $\mathrm{Spec}(R/I)$. Plus précisément, quand on localise, on remplace (R, I) par (R', I'), R' étale de type fini sur R, R' intègre, I' idéal de R', $I' = \sqrt{I'}$ tel que $\mathrm{Spec}(R'/I')$ est connexe d'image dans $\mathrm{Spec}(R)$ contenue dans $\mathrm{Spec}(R/I)$, et on peut trouver des $(R'_j, I'_j)_{j\in J}$, les (R'_j, I'_j) comme ci-dessus, J ensemble fini d'indices, tel que $\mathrm{Spec}(R/I)$ soit recouvert par les images des $\mathrm{Spec}(R'_j/I'_j)$.

2.4.2. Après localisation (au sens du numéro précédent) , on peut supposer que la partie torique de la fibre de G sur $\mathrm{Spec}(R/I)$ est déployée. Soit G_{for} le complété formel de G pour la topologie I-adique. Le schéma en groupes formel G_{for} s'algébrise en l'extension de Raynaud $\widetilde{G} \to \widehat{R}$ ([FaCh] chap. 2 §1) :

$$1 \to T \to \widetilde{G} \to \widetilde{A} \to 1 \ .$$

De même, pour le schéma semi-abélien G', qui prolonge le schéma abélien dual de A_η ([FaCh] chap.2 §2, [MB85] chap.4 th. 7.1.) :

$$1 \to T' \to \widetilde{G}' \to \widetilde{A}' \to 1 \ ,$$

et $\widetilde{A}'$ s'identifie au schéma abélien dual de $\widetilde{A}$. Notons X et Y les groupes de caractères de T et T' respectivement. La polarisation principale λ_L associée à L détermine une polarisation principale $\lambda_{\widetilde{A}} : \widetilde{A} \to \widetilde{A}'$ et un isomorphisme $\phi : Y \to X$. On note $c' : Y \to \widetilde{A}(\widehat{R})$ et $c : X \to \widetilde{A}'(\widehat{R})$ les homomorphismes opposés de ceux déterminés par les extensions de Raynaud $\widetilde{G}'$ et $\widetilde{G}$ respectivement (nous prenons le même signe que dans [FaCh] chap. 2 §5).

2.4.3. D'après [MB85] chap. 1 n. 7., après localisation, la restriction du torseur cubiste L_{for} à T_{for} est triviale. Choisissons en une trivialisation. Une telle trivialisation détermine un faisceau inversible $\mathcal{M}$ sur $\widetilde{A}$ tel que L_{for} s'identifie au complété formel de $\gamma^*(\mathcal{M})$, où on a désigné par γ la projection : $\widetilde{G} \to \widetilde{A}$ ([Br] ou [MB 85] chap. I n° 7). On pose $\widetilde{L} = \gamma^*(\mathcal{M})$. On a donc une action que l'on note $t \mapsto T_t^*$ du tore T sur $\widetilde{L}$, relevant l'action de T sur $\widetilde{G}$ par translations.

Soit m un entier ≥ 1. Pour chaque $\chi \in X$, on note :

$$\Gamma(\widetilde{G}, \widetilde{L}^m)_\chi = \{\theta \in \Gamma(\widetilde{G}, \widetilde{L}^m) | \forall t \in T,\ T_t^*(\theta) = \chi(t)\theta\} .$$

Alors, pour tout χ, $\Gamma(\widetilde{G}, \widetilde{L}^m)_\chi$ s'identifie au R-module localement libre de type fini $\Gamma(\tilde{A}, \mathcal{M}^m \otimes O_\chi)$, où O_χ est le faisceau inversible sur $\widetilde{A}$ des fonctions f sur $\widetilde{G}$ telles que $T_t^*(f) = \chi(t)f$ pour tout $t \in T$. Le $\widehat{R}$-module $\Gamma(\widehat{\widetilde{G}}, \widehat{\widetilde{L}}^m) = \Gamma(\widehat{G}, \widehat{L}^m)$ s'identifie au complété I-adique de $\oplus_{\chi \in X} \Gamma(\widetilde{G}, \widetilde{L}^m)_\chi$. Pour $\theta \in \Gamma(\widehat{G}, \widehat{L}^m)$, on note $\theta = \sum\limits_{\chi \in X} \theta_\chi$ la décomposition correspondante de θ.

Après localisation , on peut trivialiser $c'^*\mathcal{M}$. Choisissons une telle trivialisation. Notons $P_{\tilde{A}}$ le fibré de Poincaré sur $\widetilde{A} \times_S \widetilde{A}'$. Comme la biextension $(\mathrm{id}, \lambda_{\tilde{A}})^*(P_{\tilde{A}})$ s'identifie à celle définie sur $m^*(\mathcal{M}) \otimes p_1^*(\mathcal{M}^{-1}) \otimes p_2^*(\mathcal{M}^{-1})$ ([FaCh] chap. 2 §2), une telle trivialisation définit une trivialisation symétrique de $(c' \times c)^* P_{\tilde{A}}$. Cette dernière trivialisation définit un relèvement de $c' : Y \to \widetilde{A}(\widehat{R})$ en $\widetilde{c}' : Y \to \widetilde{G}(\widehat{R})$. La trivialisation de $c'^*\mathcal{M}$ définit alors une action $\widetilde{c}'^*$ de Y sur $\widetilde{L}$ au-dessus de $\widetilde{c}'$ qui vérifie : $\phi(y)(t)\widetilde{c}_y'^* T_t^* = T_t^* \widetilde{c}_y'^*$ pour $y \in Y$ et $t \in T$.

Rappelons que l'on a désigné par $\widehat{F}$ le corps des fractions de $\widehat{R}$. Avec les simplifications d'écriture dues à ce que, comme la polarisation est principale, on a pu trivialiser $c'^*\mathcal{M}$ et $(c' \times c)^* P_{\tilde{A}}$ de façon compatible à ϕ, le théorème 5.1. du chap. 2 de [Fa Ch] dit qu'il existe une fonction $a : Y \to \widehat{F}^*$ et une forme bilinéaire $b : Y \times X \to \widehat{F}^*$ telles que, pour tout $\theta \in \Gamma(G, L^m)$, on ait :

$$\theta_{\chi + m\phi(y)} = a(y)^m b(y, \chi) \widetilde{c}_y'^*(\theta_\chi) .$$

De plus :

1) $a(0) = 1$,

2) pour y et $y' \in Y$, on a :

$$a(y + y') = b(y, \phi(y'))a(y)a(y'),$$

3) $b(y, \phi(y')) = b(y', \phi(y))$,

4) pour $y \neq 0$, $b(y, \phi(y)) \in \widehat{I}$,

5) pour $n \in \mathbb{N}$, $a(y) \in \widehat{I}^n$ pour presque tout y.

La fonction a mod.$\widehat{R}^*$ ne dépend pas du choix de la trivialisation de $c'^*\mathcal{M}$. Elle dépend du choix de $\mathcal{M}$: $a.\mathrm{mod}.\widehat{R}^*$ devient $y \mapsto a(y)b(y, \chi)$ mod $\widehat{R}^*$ si on remplace $\mathcal{M}$ par $\mathcal{M} \otimes O_\chi$.

2.4.4. Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des valuations de $\widehat{F}$ associées aux idéaux premiers de hauteur 1 de $\widehat{R}$. Si $v \in \mathcal{V}$, on note $a_v : Y \to \mathbb{Z}$ et $b_v : Y \times X \to \mathbb{Z}$ les fonctions $y \mapsto v(a(y))$ et $b_v(y, x) = v(b(y, x))$ respectivement. Les propriétés des fonctions a et b rappelées ci-dessus entraînent que :

1) $(y, y') \mapsto b_v(y, \phi(y'))$ est une forme bilinéaire symétrique positive ; notons q_v la forme quadratique associée ;

2) il existe une forme linéaire $\ell_v : Y \to \mathbb{Q}$ telle que :

$$a_v(y) = 1/2 \ q_v(y) + \ell_v(y)$$

3) on a $q_v(y) = 0 \Longrightarrow \ell_v(y) = 0$ (cela résulte de ce que, grâce à 5) du numéro précédent, $a_v(ky)$ est ≥ 0 pour $|k|$ grand).

2.4.5. Montrons que a et b sont à valeurs dans $\widehat{R}_q{}^*$. Si $t = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $t \neq 0$ et donc $q \in I$ (2.4.1.). Notons $\mathcal{V}(q)$ l'ensemble fini des $v \in \mathcal{V}$ telles que $v(q) > 0$. Il s'agit de prouver que a_v et b_v sont identiquement nulles si $v \notin \mathcal{V}(q)$. Soit $v \in \mathcal{V} - \mathcal{V}(q)$ et soit $s(v)$

l'idéal premier de hauteur 1 de $\widehat{R}$ définissant v. On a $s(v) \in \mathrm{Spec}(\widehat{R}_q)$, donc $G_{s(v)}$ est un schéma abélien. On sait ([Fa Ch] cor. 5.11. du chap. III) que si $s \in \mathrm{Spec}(\widehat{R})$, on a :

$$1 \to (\widetilde{G}_s)_{\mathrm{tor}} \to (G_s)_{\mathrm{tor}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes Y_s \to 0$$

où $Y_s = \{y \in Y, b(y, \phi(y)) \in \widehat{R}_s{}^*\}$.

Pour tout entier n, on a :

$$rg((G_{s(v)})_n) = n^{2d}$$
$$rg((\widetilde{G}_{s(v)})_n) = n^{2d-t} \ ,$$

donc $Y_{s(v)} = Y$. On voit que b_v est bien identiquement nulle, et la propriété 3) du numéro précédent entraîne que a_v l'est aussi.

2.4.6. Notons ι_t le morphisme $Y \to T(\widehat{R}_q)$ défini par $b : Y \times X \to \widehat{R}_q{}^*$ et soit $\iota = \iota_t \times \tilde{c}' : Y \to \widetilde{G}(\widehat{R}_q)$. Soit n un entier. Alors $(G_n)_q$ s'identifie au noyau de la multiplication par n dans $\widetilde{G}_q/\iota(Y)$.

Plus précisément, pour m grand , on peut associer à (G, L^m) un modèle relativement complet $\widetilde{P} \to \mathrm{Spec}(\widehat{R})$, vérifiant entre autres propriétés (cf [Fa Ch] chap. III § 3) :

- $\widetilde{P}$ est localement de type fini (mais n'est pas de type fini) ; on a une immersion ouverte $\widetilde{G} \hookrightarrow \widetilde{P}$, l'action de Y sur $\widetilde{G}_q$ définie par ι se prolonge en une action de Y sur $\widetilde{P}$ que l'on note $y \mapsto S_y$, $\widetilde{L}^m$ se prolonge à $\widetilde{P}$ et S_y se relève en une action S_y^* sur $\widetilde{L}^m$, les actions T_t et T_t^* de T sur $\widetilde{G}$ et $\widetilde{L}^m$ se prolongent à $\widetilde{P}$; on a $\widetilde{G}_q = \widetilde{P}_q$ (reprendre la démonstration du corollaire 4.2 du chap. III de [Fa Ch] en remplaçant $\mathrm{Spec}(\widehat{R})_{\hat{\eta}}$ par $\mathrm{Spec}(\widehat{R})_q$)

- une immersion ouverte $G \hookrightarrow P$, P propre sur $\widehat{R}$, un morphisme $\pi : \widetilde{P}_{\mathrm{for}} \to P_{\mathrm{for}}$ qui identifie P_{for} avec $\widetilde{P}_{\mathrm{for}}/Y$ et un isomorphisme $\pi^*(L_{\mathrm{for}}) = \widetilde{L}_{\mathrm{for}}$; on a $G_q = P_q$ (cf. prop. 4.12 du chap. III de [Fa Ch]).

Notons G^* le schéma en groupes $\bigcup_{y \in Y} S_y(\widetilde{G}) \subset \widetilde{P}$ et soit $Z_y^{(n)}$ le produit fibré défini par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} Z_y^{(n)} & \longrightarrow & G^* \\ \downarrow & & \downarrow n \\ y : \mathrm{Spec}(\widehat{R}) & \longrightarrow & G^* \end{array} .$$

Alors, on a un isomorphisme de G_n avec le quotient de $\amalg_{y\in Y} Z_y^{(n)}$ par l'action naturelle de Y ([Fa Ch] th. 5.9 chap. III). Comme $(G^*)_q = \widetilde{G}_q$, cela justifie l'identification $(G_n)_q \approx (\widetilde{G}_q/\iota(Y))_n$.

2.4.7. Soit $\overline{\widehat{F}}$ une clôture séparable de $\widehat{F}$ et $\overline{\widehat{R}}$ la fermeture intégrale de $\widehat{R}$ dans $\overline{\widehat{F}}$. Notons $G(\overline{\widehat{R}}_q)_{\mathrm{tor}'}$ le groupe des sections de G sur $\overline{\widehat{R}}_q$ qui sont tuées par un entier premier à la caractéristique de $\widehat{F}$, $\widetilde{G}(\overline{\widehat{R}}_q)_{Y-\mathrm{div}}$ le sous-groupe de $\widetilde{G}(\overline{\widehat{R}}_q)$ formé des $\tilde{z}$ tels qu'il existe $y \in Y$ et $n \in \mathbb{N}$, n premier à la caractéristique de $\widehat{F}$, avec $n\tilde{z} = \iota(y)$. Si $\tilde{z} \in \widetilde{G}(\overline{\widehat{R}}_q)_{Y-\mathrm{div}}$, on pose $\tilde{y}(\tilde{z}) = n^{-1}y \in Y \otimes \mathbb{Q}$. Il résulte de ce qui précède que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \widetilde{G}(\overline{\widehat{R}}_q)_{Y-\mathrm{div}} & \longrightarrow & G(\overline{\widehat{R}}_q)_{\mathrm{tor}'} & \longrightarrow & 0 \\ & & \Vert\, id & & \downarrow \tilde{y} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & (Y \otimes \mathbb{Q})/Y & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

On note $z \mapsto y(z)$ la flèche $G(\overline{\widehat{R}}_q)_{\mathrm{tor}} \to (Y \otimes \mathbb{Q})/Y$.

2.4.8. Soient $z \in G(\overline{\widehat{R}}_q)_{\mathrm{tor}'}$ et n un entier premier à la caractéristique de $\overline{F}$ tel que $nz = 0$. Soit $\widetilde{z} \in \widetilde{G}(\overline{\widehat{R}}_q)_{Y-\mathrm{div}}$ relevant z. Soit $\widetilde{z}_t \in T(\overline{\widehat{R}}_q)$ tel que $n\widetilde{z}_t = \iota_t(\widetilde{y}(\widetilde{z}))$ et posons $\widetilde{z}_f = \widetilde{z}\widetilde{z}_t^{-1}$. On a $n\widetilde{z}_f = \widetilde{c}'(n\widetilde{y}(\widetilde{z}))$. Il en résulte que

$\widetilde{z}_f \in \widetilde{G}(\overline{\hat{R}})$. Les images $\gamma(\widetilde{z})$ et $\gamma(\widetilde{z}_f)$ de $\widetilde{z}$ et $\widetilde{z}_f$ dans $\widetilde{A}(\overline{\hat{R}}_q)$ coïncident ; on a donc $\gamma(\widetilde{z}) \in \widetilde{A}(\overline{\hat{R}})$.

Soit $\widehat{F}'$ une extension finie de $\widehat{F}$ contenue dans $\overline{\hat{F}}$ telle que z, $\widetilde{z}$, $\widetilde{z}_f$ et $\widetilde{z}_t$ soient définis sur $\widehat{F}'$. Notons $\widehat{R}'$ la fermeture intégrale de $\widehat{R}$ dans $\widehat{F}'$. Comme $\widehat{F}'/\widehat{F}$ est finie et séparable, $\widehat{R}'$ est fini sur $\widehat{R}$ ([MAT] prop. 31.B) et est en particulier séparé et complet pour la topologie $\widehat{I}$-adique.

Proposition. — *On a un isomorphisme naturel de $\widehat{R}'_q$-modules : $z^*(L_q) \simeq \widetilde{z}_f^*(\widetilde{L})_q$. Soit $\theta \in \Gamma(G_q, L_q^m)$. Notons $\theta(z) \in z^*(L_q^m)$ (resp. $\theta_\chi(\widetilde{z}_f) \in \widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}^m)$) l'évaluation de θ en z (resp. de θ_χ en $\widetilde{z}_f$, pour $\chi \in X$). Alors il existe un entier a tel que $\theta(z)$ et les $\theta_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t) \in q^{-a}\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}^m)$, et on a :*

$$\theta(z) = \sum_{\chi \in X} \theta_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t) ,$$

la série convergeant pour la topologie $\widehat{I}$-adique dans le $\widehat{R}'$-module inversible $q^{-a}\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}^m)$.

Remarque. L'image de $\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L})$ dans $z^*(L_q)$ ne dépend pas du choix de la décomposition $\widetilde{z}_f\widetilde{z}_t$ de $\widetilde{z}$ (mais dépend du choix de $\widetilde{z}$). De même, les $\Theta_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t)$ ne dépendent pas du choix de la décomposition $\widetilde{z} = \widetilde{z}_f\widetilde{z}_t$.

2.4.9. Démonstration de la proposition. Tout d'abord, il suffit de prouver la proposition pour m grand, et tout z : en effet, L étant symétrique, on a un isomorphisme de $(L^m)^{m'^2}$ sur $[m']^*(L^m)$ et la proposition pour mm'^2 et $\widetilde{z}'$ avec $m'\widetilde{z}' = \widetilde{z}$ entraîne la proposition pour m et $\widetilde{z}$.

On peut donc supposer que l'on a un modèle relativement complet $\widetilde{P} \to \mathrm{Spec}(\widehat{R})$ (cf. 2.4.6). On a alors ([CF] chap. III th. 5.9, [Mum 72] th. 4.10) :

- un sous-schéma fermé $\widetilde{Z}_n$ de $\widetilde{P}$, propre sur $\widehat{R}$, avec $(\widetilde{Z}_n)_q \simeq (\widetilde{G}_q/\iota(Y))_n$ (2.3.7) ;

- un sous-schéma fermé Z_n de P, avec $(Z_n)_q = (G_n)_q$;

- le morphisme $\pi : \widetilde{P}_{\text{for}} \to P_{\text{for}}$ induit par restriction un morphisme $(\widetilde{Z}_n)_{\text{for}} \to (Z_n)_{\text{for}}$, qui s'algébrise en $\pi_n : \widetilde{Z}_n \to Z_n$, et π_n induit l'isomorphisme $(G_q/\iota(Y))_n \simeq (G_n)_q$.

La restriction à $(Z_n)_{\text{for}}$ de l'isomorphisme $\pi^*(L_{\text{for}}) \simeq \widetilde{L}_{\text{for}}$ s'algébrise, d'où un isomorphisme de $\pi_n^*(L)$ sur la restriction à $\widetilde{Z}_n$ de $\widetilde{L}$. Grâce au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{z} : \mathrm{Spec}(\widehat{R}'_q) & \longrightarrow & \widetilde{Z}_n \\ \| & & \downarrow \pi_n \\ z : \mathrm{Spec}(\widehat{R}'_q) & \longrightarrow & Z_n \end{array} ,$$

on en déduit un isomorphisme $z^*(L_q) \simeq \widetilde{z}^*(\widetilde{L}_q)$. D'autre part, $T^*_{\widetilde{z}_t}$ induit un isomorphisme $\widetilde{z}^*(\widetilde{L}_q) \simeq (\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}))_q$, d'où l'isomorphisme $\widetilde{z}^*(\widetilde{L}_q) \simeq (\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}))_q$ promis.

Reste à prouver la formule donnant $\theta(z)$. Comme $G_q = P_q$, on peut supposer, quitte à multiplier θ par une puissance de q, que $\theta \in \Gamma(P, L)$. Grâce à l'action de T sur le prolongement de $\widetilde{L}$ à $\widetilde{P}$, on a une décomposition $\pi^*(\theta) = \sum_{\chi \in X} \theta_\chi$, la série convergeant pour la topologie $\widehat{I}$-adique. Si on note $\theta_{\chi|\widetilde{Z}_n}$ la restriction de θ_χ à $\widetilde{Z}_n$, on obtient dans le $\widehat{R}$-module fini $\Gamma(\widetilde{Z}_n, \widetilde{L})$ l'égalité $\pi_n^*(\theta) = \sum_{\chi \in X} \theta_{\chi|\widetilde{Z}_n}$. Soit a un entier tel que l'image de $\Gamma(\widetilde{Z}_n, \widetilde{L})$ dans $\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L})_q$ soit contenue dans $q^{-a}\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L})$. On a donc $\theta(z), \theta_\chi(\widetilde{z}) = \theta_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t) \in q^{-a}\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L})$ et $\theta(z) = \sum\limits_{\chi \in X} \theta_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t)$.

2.5. Contrôle des dénominateurs des valeurs de quotients de fonctions Θ en certaines sections de torsion.

2.5.1. On reprend les hypothèses et les notations du 2.4. On note Θ_A le diviseur de G_q associé à L_q et $\Theta_{\widetilde{A}}$ le diviseur de $\widetilde{A}$ associé à $\mathcal{M}$. Soit

χ_0 le caractère trivial du tore de l'extension de Raynaud. Il résulte du 2.3.3 que $\theta \mapsto \theta_{\chi_0}$ induit un isomorphisme des $\widehat{R}_q$-modules inversibles $\Gamma(G_q, L_q)$ et $\Gamma(A_q, \mathcal{M}_q)$. On suppose qu'on s'est suffisamment localisé (au sens du 2.4.1) pour que $\Gamma(\widetilde{A}, \mathcal{M})$ soit libre sur $\widehat{R}$ et on note θ un élément de $\Gamma(G_q, L_q)$ tel que θ_{χ_0} soit un générateur de $\Gamma(\widetilde{A}, \mathcal{M})$.

2.5.2. Proposition. — *Il existe $\delta \in G(\overline{\widehat{R}}_q)_2$, $\widetilde{\delta} \in \widetilde{G}(\overline{\widehat{R}}_q)_{Y-\mathrm{div}}$ relevant δ et D un voisinage ouvert de $\widetilde{y}(\widetilde{\delta})$ dans $Y \otimes \mathbb{Q}$ vérifiant :*

1) Pour tout $z \in G(\overline{\widehat{R}}_q)_{tor}$ d'ordre premier à la caractéristique de F et tout $\overline{s} \in \mathrm{Spec}(\overline{\widehat{R}} / I \overline{\widehat{R}})$ tels que :

a) il existe un relèvement $\widetilde{z} \in \widetilde{G}(\overline{\widehat{R}}_q)_{Y-\mathrm{div}}$ de z avec $\widetilde{y}(\widetilde{z}) \in D$,

b) l'image de $\gamma(\widetilde{z})$ dans la fibre $\widetilde{A}(k(\overline{s}))$ n'appartient pas à $\Theta_{\widetilde{A}} \times k(\overline{s})$ ($\gamma(\widetilde{z})$ appartient à $\widetilde{A}(\overline{\widehat{R}})$, cf. 2.4.8., ce qui donne bien un sens à son image dans $A(k(\overline{s}))$) ,

Alors, l'image par z de $\mathrm{Spec}((\overline{\widehat{R}}_{\overline{s}})_q)$ ne rencontre pas Θ_A.

2) Soit m un entier et $\theta' \in \Gamma(G_q, L_q^m)$. Alors, il existe un entier a tel que, pour tout z et $\overline{s}$ vérifiant a) et b) ci-dessus, on ait :

$$q^a(\theta'/\theta^m)(z) \in \overline{\widehat{R}}_{\overline{s}} \ .$$

Démonstration.

2.5.3. Si z, $\widetilde{z}$ avec $\widetilde{y}(\widetilde{z}) \in D$ sont comme dans le 1) de la proposition et si $\widetilde{z} = \widetilde{z}_f \widetilde{z}_t$ est une décomposition de $\widetilde{z}$ comme au 2.4.8, rappelons que l'on a un isomorphisme $z^*(L_q) \simeq \widetilde{z}_f^*(\widetilde{L})_q$ et que, avec cet isomorphisme, $\theta(z) = \sum_{\chi \in X} \theta_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t)$ et de même pour L_q^m et θ' (2.4.8).

2.5.4. LEMME. — *Il existe δ, $\widetilde{\delta}$, D et a comme dans l'énoncé de la proposition, tels que :*

1) *pour tout* $\chi \in X$, $q^a \theta'_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t) \in \widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}^m)$,

2) *pour tout* $\chi \in X$ *différent du caractère trivial* χ_0, *on a* $\theta_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t) \in \sqrt{I\, \overline{\hat{R}}}\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L})$.

2.5.5. La proposition résulte facilement du lemme. En effet, grâce au 2) du lemme, $\theta(\widetilde{z}) \in \widetilde{z}_f^*(\widetilde{L})$ et a même image que $\theta_{\chi_0}(\widetilde{z}_f) = \theta_{\chi_0}(\gamma(z))$ dans $\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}) \otimes_{\widehat{R}'} k(\overline{s})$. Par suite, comme par hypothèse, θ_{χ_0} est un générateur de $\Gamma(\widetilde{A}, \mathcal{M})$ et que $\gamma(\widetilde{z})$ n'appartient pas à $\Theta_{\widetilde{A}} \times k(\overline{s})$, $\theta(z)$ est un générateur du $\overline{\hat{R}}_{\overline{s}}$-module inversible $\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}) \otimes_{\widehat{R}'} \overline{\hat{R}}_s$, et à fortiori de $z^*(L_q) \otimes_{\widehat{R}'} \overline{\hat{R}}_{\overline{s}}$, ce qui prouve le 1) de la proposition. De plus, d'après le 1) du lemme, $q^a\theta'(z) \in \widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}^m)$, donc à $\widetilde{z}_f^*(\widetilde{L}^m) \otimes_{\widehat{R}'} \overline{\hat{R}}_{\overline{s}}$ et on a bien $q^a(\theta'/\theta^m)(z) \in \overline{\hat{R}}_{\overline{s}}$.

Prouvons le lemme 2.5.4.

2.5.6. On a, si $y = \phi^{-1}(\chi)$ (cf. 2.4.3) :

$$\theta_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t) = a(y)\chi(\widetilde{z}_t)\widetilde{c}_y'^*(\theta_{\chi_0}(\widetilde{z}_f)) \ .$$

De même, si (χ_i) est un système de représentants des classes de X/mX, on a, si $\chi = \chi_i + m\phi(y)$:

$$\theta'_\chi(\widetilde{z}_f)\chi(\widetilde{z}_t) = a^m(y)b(y, \chi_i)\chi(\widetilde{z}_t)\widetilde{c}_y^*(\theta'_{\chi_i})(\widetilde{z}_f) \ .$$

Comme $\iota_t : Y \to T(\widehat{F})$ est défini par b (cf. 2.4.6) et que, si n est un entier premier à la caractéristique de $\widehat{F}$ tel que $nz = 0$, on a $n\widetilde{z}_t = \iota_t(n\widetilde{y}(\widetilde{z}))$ on voit que :

$$\chi(\widetilde{z}_t) = b(\widetilde{y}(\widetilde{z}), \chi) \bmod . \overline{\hat{R}}^* \ ,$$

où $b(\widetilde{y}(\widetilde{z}), \chi)$ désigne l'unique élément de $\overline{\hat{F}}^* / \overline{\hat{R}}^*$ tel que $b(\widetilde{y}(\widetilde{z}), \chi)^n = b(n\widetilde{y}(\widetilde{z}), \chi)$.

Notons $\mathbb{Q}'$ le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ formé des rationnels dont le dénominateur est premier à la caractéristique de $\widehat{F}$. On voit qu'il suffit de prouver :

1) il existe un entier a_0 tel que $\forall \chi_i$, $\forall y \in Y$, $\forall \widetilde{y} \in D \cap (Y \otimes \mathbb{Q}')$:

$$q^{a_0} a^m(y) b(y, \chi_i) b(\widetilde{y}, \chi_i + m\phi(y)) \in \overline{\widehat{R}} \bmod \overline{\widehat{R}}^* ,$$

(si a_1 est un entier tel que $q^{a_1}\theta'_{\chi_i} \in \Gamma(\widetilde{A}, \mathcal{M}_{\chi_i})$, $a = a_0 + a_1$ convient),

2) $\forall y \in Y$, $y \neq 0$:

$$a(y) b(\widetilde{y}, \phi(y)) \in \sqrt{I\, \overline{\widehat{R}}} \bmod \overline{\widehat{R}}^* .$$

Clairement 1) est entraîné par 1') :

1') Soit $D' \subset Y \otimes \mathbb{Q}$ borné; alors il existe a' tel que $\forall y \in Y$, $\forall \widetilde{y} \in D' \cap (Y \otimes \mathbb{Q}')$:

$$q^{a'} a^m(y) b(\widetilde{y}, \phi(y)) b(\widetilde{y}, \chi_i) \in \overline{\widehat{R}} \bmod . \overline{\widehat{R}}^* .$$

Montrons 1') et 2).

2.5.7. Pour cela, pour toute valuation v de $\widehat{F}$ associée à un idéal premier de hauteur 1 de $\widehat{R}$, soit a_v, b_v, q_v et ℓ_v comme au 2.4.4 et soit, comme au 2.4.5, $\mathcal{V}(q)$ l'ensemble fini des v telles que $v(q) > 0$. Il est clair que si v désigne encore un prolongement quelconque de v à $\overline{\widehat{R}}$, et si on prolonge b_v à $(Y \otimes \mathbb{Q}') \times X$ par bilinéarité, on a, pour $\widetilde{y} \in Y \otimes \mathbb{Q}'$ et $x \in X$:

$$v(b(\widetilde{y}, x)) = b_v(\widetilde{y}, x) .$$

Comme D' est borné, pour tout v, $b_v(D', \chi_i)$ est borné. Comme b_v est identiquement nul si $v \notin \mathcal{V}(q)$ (2.4.5), on voit qu'il existe a_1 tel que :

$$\forall \widetilde{y} \in D' \cap (Y \otimes \mathbb{Q}'),\ q^{a_1} b(\widetilde{y}, \chi_i) \in \overline{\widehat{R}}\ \ mod.\ \overline{\widehat{R}}^* .$$

Reste à montrer, pour prouver 1'), qu'il existe a_2 avec :

$$\forall y \in Y, \forall \widetilde{y} \in D' \cap (Y \otimes \mathbb{Q}'),\ q^{a_2} a^m(y) b(\widetilde{y}, \phi(y)) \in \overset{\overline{\wedge}}{R} \ mod\ \overset{\overline{\wedge}}{R}^* .$$

Pour cela, il suffit de prouver que, pour chaque $v \in \mathcal{V}(q)$, $ma_v(y) + b_v(\widetilde{y}, \phi(y))$, $y \in Y$ et $\widetilde{y} \in D'$, est minoré.

Comme $q_v(y) = 0$ entraîne $\ell_v(y) = 0$ (2.4.4.), il existe $\widetilde{y}_0 \in Y \otimes \mathbb{Q}$ tel que $m\ell_v(y) = b_v(\widetilde{y}_0, \phi(y))$. L'expression à minorer devient :

(I) : $$m/2\ q_v(y) + b_v(\widetilde{y}_0 + \widetilde{y}, \phi(y)) .$$

Soit $b_v = \max_{\tilde{y} \in D'}(q_v(\widetilde{y}_0 + \widetilde{y}))$. (I) est minoré par :

$$m/2\ q_v(y) - \sqrt{q_v(y)}\sqrt{q_v(\widetilde{y}_0 + \widetilde{y})}$$

et donc par $\min_{u \in \mathbb{R}_+}(m/2\ u - \sqrt{b_v}\sqrt{u})$, ce qui prouve 1') donc 1).

2.5.8. Prouvons 2). Tout d'abord, comme la fonction $y \mapsto a(y)$ est bien déterminée à multiplication par $b(y, \chi)$, $\chi \in X$, près, la symétrie de L entraîne qu'il existe $\chi_1 \in X$ tel que :

$$a(-y) = a(y) b(y, \chi_1) .$$

Soit $\widetilde{y}_1 \in 2^{-1}Y$ tel que $2\phi(\widetilde{y}_1) = \chi_1$ et soit $\widetilde{\delta} \in \widetilde{G}(\overset{\overline{\wedge}}{R}_q)_{Y-\mathrm{div}}$ tel que $\widetilde{y}(\widetilde{\delta}) = \widetilde{y}_1$ et tel que l'image δ de $\widetilde{\delta}$ dans $G(\overset{\overline{\wedge}}{R}_q)_{tor'}$ appartienne à $G(\overset{\overline{\wedge}}{R}_q)_2$ (un tel $\widetilde{\delta}$ existe puisque l'on a supposé que la caractéristique de F est différente de 2). Posons :

$$a_1(y) = a(y) b(\widetilde{y}_1, \phi(y)) \bmod . \overset{\overline{\wedge}}{R}^* .$$

On a donc $a_1(y) = a_1(-y) \bmod . \overset{\overline{\wedge}}{R}^*$, d'où :

$$a_1(y) = b(y, \phi(y))^{1/2} \bmod . \overset{\overline{\wedge}}{R}^* .$$

Prenant $D = \widetilde{y}_1 + D_1$, on voit qu'il suffit de prouver qu'il existe un voisinage D_1 de 0 dans $Y \otimes \mathbf{Q}$ tel que :

$$\forall y \in Y, y \neq 0, \forall \widetilde{y} \in D_1 \cap (Y \otimes \mathbf{Q}'), b(y, \phi(y))^{1/2} b(\widetilde{y}, \phi(y)) \in \sqrt{I\, \overline{\hat{R}}} \bmod . \overline{\hat{R}}^{\,*}.$$

Comme, pour $y \neq 0$, $b(y, \phi(y))^{1/4} \in \sqrt{I\, \overline{\hat{R}}}$, on voit qu'il suffit de trouver D_1 tel que :

$$\forall y \in Y, \forall \widetilde{y} \in D_1 \cap (Y \otimes \mathbf{Q}'), b(y, \phi(y))^{1/4} b(\widetilde{y}, \phi(y)) \in \overline{\hat{R}} \bmod . \overline{\hat{R}}^{\,*} ,$$

autrement dit, pour $v \in \mathcal{V}(q)$ et $q_v(y) = b_v(y, \phi(y))$:

(II) : $$1/4 q_v(y) + b_v(\widetilde{y}, \phi(y)) \geq 0 .$$

On prend D_1 tel que : $\forall \widetilde{y} \in D_1$, $\forall v \in \mathcal{V}(q)$, on ait : $4\sqrt{q_v(\widetilde{y})} \leq 1$. On a :

$$1/4 q_v(y) + b_v(\widetilde{y}, \phi(y)) \geq 1/4 \sqrt{q_v(y)} (\sqrt{q_v(y)} - 4\sqrt{q_v(\widetilde{y})}) .$$

On voit que si $q_v(y) = 0$, (II) est claire. Si $q_v(y) \neq 0$, on a $q_v(y) \geq 1$ et (II) est encore vraie car $4\sqrt{q_v(\widetilde{y})} \leq 1 \leq \sqrt{q_v(y)}$. Cela achève de prouver le lemme, et donc la proposition.

2.6. Fin de la démonstration du théorème.

2.6.1. Choix de a et de b.

Soit, pour tout entier t, S_t le fermé de S défini par $s \in S_t \iff t(s) \geq t$, où $t(s)$ est la dimension du sous-tore maximal de la fibre G_s de G en s. On a donc $S = S_0 \supset S_1 \supset \cdots \supset S_d \supset S_{d+1} = \phi$ ($d = \dim(G/S)$). Pour chaque entier t, $0 \leq t \leq d$, notons $S_{=t} = S_t - S_{t+1}$.

Soit, pour chaque t, $0 \leq t \leq d$, J_t un ensemble fini d'indices et pour chaque $j \in J_t$, un morphisme étale de type fini $\mathrm{Spec}(R_j) \to S$ et I_j un idéal de R_j tel que l'image de $\mathrm{Spec}(R_j/I_j)$ dans S soit contenue dans $S_{=t}$; on impose que :

- les R_j sont intègres et les I_j sont premiers (pour $t = 0$, on prend $I_j = (0)$);

- les images des $\mathrm{Spec}(R_j/I_j)$, pour $j \in J_t$ recouvrent $S_{=t}$;

- on a les trivialisations du 2.4. pour (R_j, I_j) et (G, L). Donc, on a un faisceau inversible $\mathcal{M}_j$ sur la partie abélienne $\widetilde{A}_j$ de l'extension de Raynaud associée à G. On suppose de plus que le R_j/I_j-module inversible $\Gamma(\widetilde{A}_j, \mathcal{M}_j) \otimes_{\widehat{R}_j} R_j/I_j$ est libre, ce qui entraîne que $\Gamma(\widetilde{A}_j, \mathcal{M}_j)$ est libre sur $\widehat{R}_j$.

Pour chaque j, on choisit $\theta_j \in \Gamma(A, L_q) \otimes_R \widehat{R}_j$ qui s'envoie sur un générateur de $\Gamma(\widetilde{A}_j, \mathcal{M}_j)$. On choisit a_j vérifiant le 2) de la proposition 2.5.2 pour les $g_\xi(\theta_j)$, $\xi \in A((R_1)_q)_k$ ($k = l$ si $l \neq 2$ et $k = 4$ si $l = 2$, cf 2.3.2.). Pour $t \neq 0$, on choisit b_j tel que, si D_j est comme dans la proposition 2.5.2 pour $m = k$, on ait $Y \otimes \mathbb{Q} = \ell^{-b_j} Y + D_j$. On choisit $a = \sup(a_j)$, $b \geq \sup(b_j)$ et $\ell^b \geq k$.

2.6.2. Soit $z \in A(\overline{R}_q)$ une section de torsion d'ordre premier à la caractéristique de F. Soit F' une extension finie de F contenue dans $\overline{F}$ contenant F_1 telle que $z \in A(F')$. Notons R' la fermeture intégrale de R dans F' ; on a donc $z \in A(R'_q)$. Il suffit de prouver que, pour tout $s' \in \mathrm{Spec}(R')$, il existe $\xi' \in A(R'_q)_{\ell^b}$ tel que la restriction de z à $\mathrm{Spec}(R')_q$ provienne d'une section $\mathrm{Spec}(R'_s) \to \mathrm{Spec}(\Gamma^{(a)}_{\xi'})$ (on a noté $R'_{s'}$ le localisé de R' en s') (1 c) du 2.1.3.).

Soit s l'image de s' dans $\mathrm{Spec}(R)$. Soit j comme au numéro précédent et tel que s appartienne à l'image de $\mathrm{Spec}(R_j/I_j)$. Soit $s_j \in \mathrm{Spec}(R_j/I_j)$ d'image s dans $\mathrm{Spec}(R)$. Soit $s'_j \in \mathrm{Spec}(R_j \otimes_R R')$ au-dessus de (s_j, s') (il existe un tel s'_j d'après EGA1 prop. 3.4.7.) et soit $\mathrm{Spec}(R'_j)$ la composante du schéma normal $\mathrm{Spec}(R_j \otimes_R R')$ telle que $s'_j \in \mathrm{Spec}(R'_j)$. Alors $\mathrm{Spec}(R'_j) \to \mathrm{Spec}(R_j)$ est finie : en effet, comme F'/F est finie séparable, R'/R est finie d'après [Mat] prop. 31 B, et donc aussi donc R'_j/R_j. De plus, $\mathrm{Spec}(R'_j) \to \mathrm{Spec}(R_j)$ est surjectif car $\mathrm{Spec}(R_j \otimes_R R') \to \mathrm{Spec}(R_j)$ est plat au-dessus du point générique de $\mathrm{Spec}(R)$ et donc le point générique de toute composante irréductible de $\mathrm{Spec}(R_j \otimes_R R')$ s'envoie sur le point générique de $\mathrm{Spec}(R_j)$. Enfin, F'/F est finie séparable, il en est de même de l'extension des corps de fractions de R'_j et R_j.

Notons $\widehat{R}_j$ le complété de R_j pour la topologie I_j-adique et soit $\widehat{s}_j$ l'image de s_j dans l'isomorphisme $\mathrm{Spec}(R_j/I_j) \simeq \mathrm{Spec}(\widehat{R}_j/\widehat{I}_j)$. Notons $\widehat{R}'_j$ la composante du complété I_j-adique de R'_j qui contient le point $\widehat{s}'_j$ défini par s'_j :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spec}(R') & \leftarrow & \mathrm{Spec}(R'_j) & \leftarrow & \mathrm{Spec}(\widehat{R}'_j) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(R) & \leftarrow & \mathrm{Spec}(R_j) & \leftarrow & \mathrm{Spec}(\widehat{R}_j) \end{array} .$$

On voit facilement comme ci-dessus que $\mathrm{Spec}(\widehat{R}'_j) \to \mathrm{Spec}(\widehat{R}_j)$ est fini surjectif et que l'extension de leurs corps des fractions est séparable. On peut donc supposer $\widehat{R}'_j$ plongé dans $\overline{\widehat{R}}_j$. Soit $\overline{s} \in \mathrm{Spec}(\overline{\widehat{R}}_j)$ au-dessus de $\widehat{s}'_j$.

2.6.3. Soit $D \subset Y \otimes \mathbb{Q}$ comme dans la proposition 2.5.2 (nous reprenons les notations du 2.3 et du 2.4. et nous omettons dans ce numéro l'indice j). D'après le choix de b, il existe $\widetilde{y} \in \ell^{-b}Y$ et $\widetilde{z} \in \widetilde{G}(\overline{\widehat{R}}_q)_{Y-\mathrm{div}}$ relevant z avec $\widetilde{y}(\widetilde{z}) - \widetilde{y} \in D$. Soit $\widetilde{\xi}'_0 \in G(\overline{\widehat{R}}_q)_{Y-\mathrm{div}}$ tel que $\widetilde{y}(\widetilde{\xi}'_0) = \widetilde{y}$ et que l'image ξ'_0 de $\widetilde{\xi}'_0$ dans $G(\overline{\widehat{R}}_q)$ appartienne à $G(\overline{\widehat{R}}_q)_{\ell^b}$. Comme ℓ^b est ≥ 3 et premier à la caractéristique du corps résiduel $k(\overline{s})$, les complémentaires des translatés $t_\delta(\Theta_{\widetilde{A}})$ du diviseur $\Theta_{\widetilde{A}}$ de $\widetilde{A}$ par les $\delta \in A(k(\overline{s}))_{\ell^b}$ recouvrent $A \times \mathrm{Spec}(k(\overline{s}))$: cela résulte de ce que $\mathcal{M}^{\ell^b}$ est relativement très ample et de ce que le groupe théta $\mathcal{G}(\mathcal{M}^{\ell^b})$ agit de façon irréductible sur $\Gamma(\widetilde{A}, \mathcal{M}^{\ell^b})$ ([Mum 66] th. 2). Il existe donc $\delta \in \widetilde{A}(\overline{\widehat{R}})_{\ell^b}$ tel que l'image de $\gamma(\widetilde{z} - \widetilde{\xi}'_0) - \delta$ dans $\widetilde{A}(k(\overline{s}))$ n'appartienne pas à $\Theta_{\widetilde{A}}(k(\overline{s}))$. Soit $\widetilde{\xi}'_1$ relevant δ dans $\widetilde{G}(\overline{\widehat{R}})_{\ell^b}$ et d'image ξ'_1 dans $G(\overline{\widehat{R}})_{\ell^b}$ et posons $\widetilde{\xi}' = \widetilde{\xi}'_0 + \widetilde{\xi}'_1$, $\xi' = \xi'_0 + \xi'_1$. On a $\widetilde{y}(\widetilde{z} - \widetilde{\xi}') \in D$ et l'image de $\gamma(\widetilde{z}-\widetilde{\xi}')$ dans $\widetilde{A}(k(\overline{s}))$ n'appartient pas à $\Theta_{\widetilde{A}}(k(\overline{s}))$. La proposition 2.5.2 dit alors que la restriction de z à $\mathrm{Spec}((\widehat{R}')_{\hat{s}'})_q$ provient d'une section $\mathrm{Spec}((\widehat{R}')_{\hat{s}'}) \to \mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})$.

2.6.4. Soit $\widehat{R'_{j,s'_j}}$ le localisé complété de R'_j en s'_j. L'homomorphisme $R'_j \to \widehat{R'_{j,s'_j}}$ induit un homomorphisme $\widehat{R'_j} \to \widehat{R'_{j,s'_j}}$ qui envoie s'_j sur $\widehat{s'_j}$. Il en résulte un morphisme $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{j,s'_j}}) \to \mathrm{Spec}((\widehat{R'_j})_{\hat{s}'_j})$ et la restriction de z à $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{j,s'_j}})_q$ provient d'une section $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{j,s'_j}}) \to \mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})$.

Notons $\widehat{R'_{s'}}$ le localisé complété de R' en s'. Montrons que la restriction de z à $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{s'}})_q$ provient d'une section $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{s'}}) \to \mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})$. En effet, comme $R' \to R'_j$ est étale, $\widehat{R'_{s'}} \to \widehat{R'_{j,s'_j}}$ est étale et fini (SGA1 exp. 1 prop. 2.1. et 4.2.). Il est fidèlement plat et $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{j,s'_j}}) \to \mathrm{Spec}(\widehat{R'_{s'}})$ est surjectif. On voit tout d'abord que la restriction de z à $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{s'}})_q$ se factorise à travers $\mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})_q$. L'image de $\Gamma_{\xi'}^{(a)}$ dans $(\widehat{R'_{s'}})_q$ est contenue dans $\widehat{R'_{j,s'_j}}$; comme $\widehat{R'_{s'}}$ est normal et que $\widehat{R'_{j,s'_j}}$ est fini sur $\widehat{R'_{s'}}$, on voit que l'image de $\Gamma_{\xi'}^{(a)}$ dans $(\widehat{R'_{s'}})_q$ est contenue dans $\widehat{R'_{s'}}$ et la restriction de z à $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{s'}})_q$ provient d'un morphisme $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{s'}}) \to \mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})$.

On en déduit enfin que la restriction de z à $\mathrm{Spec}(R'_{s'})_q$ provient d'une section $\mathrm{Spec}(R'_s) \to \mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})$. En effet, tout d'abord, comme $\mathrm{Spec}(\widehat{R'_{s'}})_q \to \mathrm{Spec}(R'_{s'})_q$ est surjectif, on voit tout d'abord que la restriction de z à $\mathrm{Spec}(R'_{s'})_q$ se factorise à travers $\mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})_q$. Ensuite, comme $R'_{s'}$ est normal excellent, $\widehat{R'_{s'}}$ est intègre et dans son corps des fractions, on a $R'_{s'} = (R'_{s'})_q \cap \widehat{R'_{s'}}$ (Bourbaki, Algèbre commutative chap. III §3 n° 5 cor. 4). On voit alors que $\mathrm{Spec}(R'_{s'})_q \to \mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})_q$ se prolonge bien en $\mathrm{Spec}(R'_{s'}) \to \mathrm{Spec}(\Gamma_{\xi'}^{(a)})$, ce qui achève de prouver le théorème.

3. Relèvements de sections contrôlées.

Soient S, S', q, $X \to S_q$, (U_λ) et $(U_{\lambda,0})$ comme au 2.1. Notons f le morphisme $X \to S_q$. On suppose de plus que S, S' et les $U_{\lambda,0}$ sont affines : $S = \mathrm{Spec}(R)$, $S' = \mathrm{Spec}(R')$, $U_{\lambda,0} = \mathrm{Spec}(\Gamma_\lambda)$. On suppose donné un ensemble Δ de sections $z : S'_q \to X$ qui sont contrôlées par les $U_{\lambda,0}$.

3.1. Cas des torseurs sous un schéma vectoriel.

3.1.1. Soient E un R_q-module localement libre de type fini et $V \to S_q$ le fibré vectoriel dont le S_q-module des sections s'identifie au faisceau associé au dual E^* de E. On se donne de plus un espace principal homogène $P \to X$ sous f^*V. Comme S'_q est affine, toute section $z \in \Delta$ se relève en une section $\widehat{z} : S'_q \to P$.

Soit, pour chaque λ, P_λ la restriction de P à U_λ. Comme U_λ est affine, P_λ est trivial. Soit $s_\lambda : U_\lambda \to P_\lambda$ une trivialisation de P_λ. Soit $z \in \Delta$ et soit $\widehat{z} : S'_q \to P$ un relèvement de z. Comme $(U_{\lambda,0})$ contrôle z, il existe un recouvrement ouvert (S'_λ) de S' et des sections $z_\lambda : S'_\lambda \to U_{\lambda,0}$ telles que la restriction de z à $(S'_\lambda)_q$ provienne de z_λ (cf. 2.1); quitte à raffiner le recouvrement (S'_λ), on peut supposer les S'_λ affines.

Alors $\widehat{z}$ et $s_\lambda \circ z_\lambda$ restreintes à $(S'_\lambda)_q$ définissent toutes deux une section de $z_\lambda^*(P_\lambda)$ donc un élément de $\Gamma(S'_\lambda, O_{S'}) \otimes_R E^*$ que l'on note $\widehat{z} - s_\lambda \circ z_\lambda$. Soit E_0^* un sous-R-module de type fini de E^* tel que $E^* = E_0^* \; R_q$.

Soit $\widehat{\Delta}$ un ensemble de sections $S'_q \to P$ relevant des éléments de Δ. On dit que $\widehat{\Delta}$ **est borné** s'il existe un entier a tel que, pour tout $\widehat{z} \in \widehat{\Delta}$ d'image z dans Δ, $q^a(\widehat{z} - s_\lambda \circ z_\lambda) \in \Gamma(S'_\lambda, O_{S'})E_0^* \subset \Gamma(S'_\lambda, O_{S'}) \otimes_R E^*$. Cette définition ne dépend clairement pas du choix de E_0^* ; elle dépend à priori du choix des $U_{\lambda,0}$, s_λ et des S'_λ.

3.1.2. Proposition. — *La définition ci-dessus ne dépend pas de ces choix. Il existe un ensemble borné $\widehat{\Delta}$ de relèvements des éléments de Δ.*

3.1.3. REMARQUES.

1) Supposons R noethérien et soit E_0 un sous-R-module de type fini de E qui engendre E en tant que R_q-module. Identifions P_λ à $U_\lambda \times_{S_q} V$ à l'aide de s_λ et soit, pour tout entier a, $P_{\lambda,0}^{(a)}$ le S-modèle entier de P_λ défini par $\mathrm{Sym}_R(q^a E_0) \otimes_R \Gamma_\lambda$ modulo q-torsion. Alors, comme R est supposé noethérien, E_0 est de présentation finie et le dual E_0^* est de type fini et est compatible au changement de base. Il est alors facile de voir que $\widehat{\Delta}$ est borné si et seulement si il existe un entier a tel que les éléments de $\widehat{\Delta}$ sont contrôlés par $(P_{\lambda,0}^{(a)})$.

2) Soit X' un S_q-schéma séparé et de type fini et f un S_q-morphisme de X' dans X. Soit $(U'_{\lambda',0})$ une famille finie de modèles entiers d'ouverts de X' et supposons que, pour tout λ', il existe λ tel que la restriction de f à $U'_{\lambda'}$ provienne d'un S-morphisme de $U'_{\lambda',0}$ dans $U_{\lambda,0}$. Soit Δ' un ensemble de sections de X' qui est contrôlé par les $U'_{\lambda',0}$ et $\widehat{\Delta'}$ un ensemble de relèvements des éléments de Δ' à $f^*(P)$. Alors, on voit facilement que $f(\Delta')$ est contrôlé par les $U_{\lambda,0}$ et $f(\widehat{\Delta'})$ est borné.

Démonstration de la proposition.

3.1.4. Soit $(U'_{\lambda',0})_{\lambda' \in \Lambda'}$ une autre famille finie de S-modèles entiers d'ouverts de X et soit $s'_{\lambda'}$ une famille de sections de P au-dessus des ouverts $U'_{\lambda'}$. Pour prouver que la définition est indépendante des choix faits, il suffit de prouver le lemme suivant :

LEMME. — *Il existe un entier a_0 tel que, si S' est un S-schéma avec $O_{S'}$ sans q-torsion, $z : S'_q \to X$ est une section contrôlée à la fois par $(U_{\lambda,0})$ et par $(U'_{\lambda',0})$, $z_\lambda : S'_\lambda \to U_{\lambda,0}$ et $z'_{\lambda'} : S'_{\lambda'} \to U'_{\lambda',0}$ sont comme au 2.1, $\widehat{z} : S'_q \to P$ un relèvement de z, et a un entier tel que pour tout λ , on ait $q^a(\widehat{z} - s_\lambda \circ z_\lambda) \in \Gamma(S'_\lambda, O_{S'})E_0^*$, alors, pour tout λ', on a $\widehat{z} - s'_{\lambda'} \circ z \in q^{-(a+a_0)}\Gamma(S'_{\lambda'}, O_{S'})E_0^*$.*

Pour cela :

3.1.5. LEMME. — *Il existe un entier a_1, un R-module libre de type fini L et deux morphismes de R-modules $\pi : L \to E_0^*$, $s : E_0^* \to L$, tels que $\pi \circ s = q^{a_1} id_{E_0^*}$.*

Démonstration. : Soit L un R-module libre de type fini avec $\pi : L \to E_0^*$ surjectif. Comme E^* est projectif, $\pi \otimes_R R_q$ a une section s'. Comme E_0^* et L sont de type fini, il existe a_1 tel que $q^{a_1} s'(E_0^*)$ soit inclus dans L. On prend pour s la restriction de $q^{a_1} s'$ à E_0^*.

3.1.6. LEMME. — *Soit M un R-module sans q-torsion. Alors, la q-torsion de $M \otimes_R E_0^*$ est tuée par q^{a_1}.*

Démonstration. : La q-torsion de $M \otimes_R E_0^*$ est tuée $M \otimes_R s$, donc par $(\pi \circ s) \otimes_R M$, i.e. par q^{a_1}.

Montrons le lemme 3.1.4. Notons $U_{\lambda,\lambda',0}$ l'adhérence schématique de $U_\lambda \cap U'_{\lambda'}$ dans $U_{\lambda,0} \times_S U_{\lambda',0}$ et $\Gamma_{\lambda,\lambda'}$ son algèbre affine, de sorte que $\Gamma_{\lambda,\lambda'}$ est l'image de $\Gamma_\lambda \otimes_R \Gamma_{\lambda'}$ dans $\Gamma(U_\lambda \cap U'_{\lambda'}, O_X)$. Soit a_2 un entier tel que :

$$q^{a_2}(s_\lambda - s_{\lambda'}) \in \Gamma_{\lambda,\lambda'} E_0^* \subset \Gamma(U_\lambda \cap U'_{\lambda'}, O_X) \otimes_R E^* \ .$$

Alors :

$$\widehat{z} - s_{\lambda'} \circ z_{\lambda'} = \widehat{z} - s_\lambda \circ z_\lambda + (s_{\lambda'} - s_\lambda) \circ z \in q^{-(a+a_2)} \Gamma(S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}, O_{S'}) E_0^* \ .$$

Fixons λ' et notons t_λ l'image de $q^{(a+a_2)}(\widehat{z} - s_{\lambda'} \circ z_{\lambda'})$ dans $\Gamma(S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}, O_{S'}) E_0^*$. Alors, pour chaque (λ_1, λ_2) les images de t_{λ_1} et t_{λ_2} dans $\Gamma(S'_\lambda \cap S'_{\lambda_1} \cap S'_{\lambda_2}, O_{S'}) E_0^*$ coïncident. Il résulte du lemme précédent que, si $\widehat{t}_\lambda$ sont des relèvements de t_λ dans $\Gamma(S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}, O_{S'}) \otimes_R E_0^*$, alors les $q^{a_1} \widehat{t}_\lambda$ définissent un 0-cocycle de $Z^0((S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}), \widetilde{E}_0^*)$, où $\widetilde{E}_0^*$ est le faisceau de $O_{S'}$-modules associé à $E_0^* \otimes_R R'$. Les $q^{a_1} \widehat{t}_\lambda$ définissent donc un élément $\widehat{t}$ de $\Gamma(S'_{\lambda'}, O_{S'}) \otimes_R E_0^*$. Si $a_0 = a_1 + a_2$ et si t est l'image de $\widehat{t}$ dans $\Gamma(S'_{\lambda'}, O_{S'}) E_0^*$, on a

$$\widehat{z} - s_{\lambda'} \circ z_{\lambda'} = q^{-(a+a_0)} t \in q^{-(a+a_0)} \Gamma(S'_{\lambda'}, O_{S'}) E_0^* \ ,$$

ce qui prouve le lemme et donc la première partie de la proposition.

Montrons l'existence de $\widehat{\Delta}$. Pour $(U_{\lambda,0}) = (U'_{\lambda',0})$ soient $U_{\lambda,\lambda'}$, $U_{\lambda,\lambda',0}$ et $\Gamma_{\lambda,\lambda'}$ comme ci-dessus et soit a_2 tel que $q^{a_2}(s_\lambda - s_{\lambda'}) \in \Gamma_{\lambda,\lambda'}E_0^*$. Si $z \in \Delta$, les $q^{a_2}(s_\lambda - s_{\lambda'}) \circ z$ définissent des éléments $t_{\lambda,\lambda'}$ de $\Gamma(S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}, O_{S'})E_0^*$ qui définissent un 1-cocycle de $Z^1((S'_\lambda)_q, \widetilde{E_0^*})$. Il résulte du lemme 3.1.6 que, si $\widehat{t}_{\lambda,\lambda'}$ est un relèvement de $t_{\lambda,\lambda'}$ dans $\Gamma(S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}, O_{S'}) \otimes_R E_0^*$, alors les $q^{a_1}\widehat{t}_{\lambda,\lambda'}$ définissent un 1-cocycle de $Z^1((S'_\lambda), \widetilde{E_0^*})$. Comme S' est affine, $H^1(S', \widetilde{E_0^*}) = 0$ et il existe des $\widehat{t}_\lambda \in \Gamma(S_\lambda, O_S) \otimes_R E_0^*$ vérifiant $\widehat{t}_{\lambda'} - \widehat{t}_\lambda = q^{a_1}\widehat{t}_{\lambda,\lambda'}$. Si $a = a_2 + a_1$, et si on désigne par t_λ l'image de $\widehat{t}_\lambda$ dans $\Gamma(S'_\lambda, O_{S'})E_0^*$, on voit que $s_\lambda \circ z_\lambda + q^{-a}t_\lambda$ définit une section $\widehat{z} : S'_q \to P$ relevant z et qui vérifie $q^a(\widehat{z} - s_\lambda \circ z_\lambda) = t_\lambda \in \Gamma(S'_\lambda, O_{S'})E_0^*$. Cela prouve l'existence de $\widehat{\Delta}$.

3.1.7. Remarque. Supposons que Δ soit réduit à un élément z, soit $\widehat{z}_0$ un relèvement de z, et soit $\widehat{\Delta}$ un ensemble de relèvements de z. Alors, il est facile de voir que $\widehat{\Delta}$ est borné si et seulement si il existe un entier a tel que, pour tout $\widehat{z} \in \widehat{\Delta}$, on a $\widehat{z} - \widehat{z}_0 \in q^{-a}R'E_0^*$. En effet, si $\widehat{\Delta}$ est borné, et si (S'_λ) est un recouvrement de S' tel que les restrictions de z aux $(S'_\lambda)_q$ se prolongent comme ci-dessus en des sections de $U'_{\lambda,0}$, il existe un entier a tel que pour tout λ on ait : $\hat{z} - \hat{z}_0 \in q^{-a}\Gamma(S'_\lambda, O_{S'})E_0^*$, et on montre comme ci-dessus que l'on a bien : $\hat{z} - \hat{z}_0 \in q^{-(a+a_1)}\Gamma(S', O_{S'})E_0^*$.

3.2. Cas d'une extension d'un schéma en groupes par un schéma vectoriel.

On reprend les hypothèses et les notations du 3.1. Supposons de plus que X et P soient des schémas en groupes commutatifs, P extension de X par V. On a alors une suite exacte :

$$1 \to E^* \otimes_{R_q} R'_q \to P(R'_q) \to X(R'_q) \to 0 \ .$$

3.2.1. Proposition. — *Supposons que Δ soit un sous-groupe de $X(R'_q)$. Alors :*

1) *il existe un sous-groupe* $\widehat{\Delta}$ *de* $P(R'_q)$, *qui est borné, et dont l'image dans* $\widehat{\Delta}$ *est* Δ. *Plus précisément, si* $\widehat{\Delta}'$ *est un sous-ensemble borné de* $P(R'_q)$ *d'image* Δ *dans* $X(R'_q)$, *il existe un entier* a *tel que* $\widehat{\Delta} + q^{-a}R'E_0^*$ *soit un sous-groupe borné de* $P(R'_q)$;

2) *si* $\widehat{\Delta}'$ *est un ensemble de relèvements d'éléments de* Δ *qui est borné, il existe un entier* a' *tel que*

$$\widehat{\Delta}' \subset \widehat{\Delta} + q^{-a'}R'E_0^*$$
$$\widehat{\Delta}' \cap (E^* \otimes_{R_q} R'_q) \subset q^{-a'}R'E_0^* .$$

Démonstration. :

3.2.2. LEMME. — *Soit* $\widehat{\Delta_1}$ *et* $\widehat{\Delta_2}$ *deux sous-ensembles bornés de relèvements d'éléments de* Δ. *Alors* $\widehat{\Delta_1} + \widehat{\Delta_2}$ *et* $-\widehat{\Delta_1}$ *sont bornés.*

Démonstration. : Soient a_X un automorphisme du S_q-schéma X et a_P un automorphisme de P au-dessus de a_X, compatible avec un automorphisme du fibré vectoriel V. Pour chaque λ, notons $a_X(U_{\lambda,0})$ le S-modèle entier de $a_X(U_\lambda)$ défini par :

$$a_X(U_\lambda) \overset{a^{-1}}{\simeq} U_\lambda \hookrightarrow U_{\lambda,0} .$$

Alors $a_X(\Delta_1)$ est contrôlé par les $a_X(U_{\lambda,0})$ et $a_P(\widehat{\Delta}_1)$ est borné. Appliquant ceci avec $a_X = -id_X$ et $a_P = -id_P$, on voit que $-\widehat{\Delta}_1$ est borné. Appliquant ceci à $X \times_{S_q} X$, $P \times_{S_q} P$ et les automorphismes définis par $(z_1, z_2) \mapsto (z_1 + z_2, z_2)$, on a que $a_P(\widehat{\Delta}_1 \times \widehat{\Delta}_2)$ est un ensemble borné de relèvements de $a_P(\Delta_1 \times \Delta_2) = \Delta_1 \times \Delta_2$. Si pr_1 est la première projection $P \times_{S_q} P \to P$, il résulte facilement de la remarque 2) du 3.1.3. que $pr_1(a(\widehat{\Delta}_1 \times \widehat{\Delta}_2)) = \widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2$ est borné, ce qui achève de prouver le lemme.

Montrons la proposition. Soit a un entier suffisamment grand. Soit $\widehat{\Delta}$ et $\widehat{\Delta}'$ deux sous-ensembles bornés de relèvements des éléments de Δ avec $\widehat{\Delta}$

s'envoyant surjectivement sur Δ. Comme $\widehat{\Delta}' \cap (E^* \otimes_{R_q} R'_q)$ est borné, on a bien $\widehat{\Delta}' \cap (E^* \otimes_{R_q} R'_q) \subset q^{-a} R' E_0^*$ d'après la remarque 3.1.7.. De plus, comme $\widehat{\Delta}' - \widehat{\Delta}$ est borné d'après le lemme, on a $(\widehat{\Delta}' - \widehat{\Delta}) \cap (E^* \otimes_{R_q} R'_q) \subset q^{-a} R' E_0^*$, donc $\widehat{\Delta}' \subset \widehat{\Delta} + q^{-a} R' E_0^*$.

Cela prouve 2). Prouvons 1). Alors, comme d'après le lemme $\widehat{\Delta} + \widehat{\Delta}$ et $-\widehat{\Delta}$ sont bornés, on a :

$$\widehat{\Delta} + \widehat{\Delta} \subset \widehat{\Delta} + q^{-a} R' E_0^* \ ,$$
$$- \widehat{\Delta} \subset \widehat{\Delta} + q^{-a} R' E_0^* \ .$$

Il en résulte que $\widehat{\Delta} + q^{-a} R' E_0^*$ est bien un sous-groupe de $P(R'_q)$, et comme d'après le lemme, il est borné, la proposition est démontrée.

3.3. Epaississement de la base.

On suppose que $S = \operatorname{Spec}(R)$ est noethérien et que X est lisse sur S_q. On se donne un R-épaississement infinitésimal E de R', i.e. E est une R-algèbre avec un R-homomorphisme $E \to R'$ qui est surjectif et dont le noyau I est nilpotent. On suppose que q est non diviseur de 0 dans E. Pour tout entier a, on note $E^{(a)}$ le R-épaississement de R' défini par :

$$E^{(a)} = E + q^{-a} I + q^{-2a} I^2 + \cdots \subset E_q \ .$$

Comme $X \to S_q$ est lisse et que S'_q est affine, tout élément z de Δ se relève en une section $\widehat{z} : \operatorname{Spec}(E)_q \to X$. On voit facilement que, pour chaque relèvement $\widehat{z}$ d'un z contrôlé par $(U_{\lambda,0})$, il existe un entier a tel que $\widehat{z}$ soit contrôlé par les $(U_{\lambda,0})$, lorsqu'on prend $E^{(a)}$ comme structure entière de E_q. On dit qu'un ensemble $\widehat{\Delta}$ de relèvements de sections de Δ est **borné**, s'il existe un entier a comme ci-dessus qui convient pour tous les $\widehat{z} \in \widehat{\Delta}$. Cette définition dépend a priori du choix des $U_{\lambda,0}$.

3.3.1. PROPOSITION. — *Cette définition ne dépend pas de ce choix. Il existe $\widehat{\Delta}$ borné, avec $\widehat{\Delta} \to \Delta$ surjectif.*

Démonstration. : On se ramène immédiatement au cas où $I^2 = (0)$.

Montrons l'existence de $\widehat{\Delta}$.

3.3.2. Supposons d'abord X affine et que la famille $(U_{\lambda,0})$ est réduite à un modèle entier $\mathrm{Spec}(\Gamma)$ de X. Comme Γ est de type fini, il existe une R-algèbre de polynômes P à coefficients dans R et à un nombre fini de variables telles que $\Gamma = P/J$. Comme Γ_q est lisse sur R_q, l'homomorphisme $J_q/J_q^2 \to (\Omega^1_{P/R} \otimes_P \Gamma)_q$ admet une rétraction. Comme Γ est noethérien et que J/J^2 est un Γ-module de type fini, sa q-torsion est tuée par une puissance de q. On voit alors facilement qu'il existe un entier a et un Γ-homomorphisme $r : \Omega_{P/R} \otimes_P \Gamma \to J/J^2$ tels que, si i désigne l'homomorphisme $J/J^2 \to \Omega_{P/R} \otimes_P \Gamma$, on ait $r \circ i = q^a id_{J/J^2}$.

Si $z \in \Delta$, on commence par relever z en un point z' de $\mathrm{Spec}(P)$ à valeurs dans E et ses différents relèvements forment un espace principal homogène sous $\mathrm{Hom}_\Gamma(\Omega_{P/R} \otimes_P \Gamma, I)$. Le point z' définit un homomorphisme de $\mathrm{Hom}_\Gamma(J/J^2, I)$ qui doit être nul pour que z' définisse un relèvement dans $\mathrm{Spec}(\Gamma)$. Comme l'image de $\mathrm{Hom}_\Gamma(\Omega_{P/R}\otimes_P\Gamma, q^{-a}I)$ par l'homomorphisme induit par i : $\mathrm{Hom}_\Gamma(\Omega_{P/R}\otimes_P\Gamma, I)_q \to \mathrm{Hom}_\Gamma(J/J^2, I)_q$ contient $\mathrm{Hom}_\Gamma(J/J^2, I)$, on voit que l'on peut bien relever z en $\widehat{z} \in \mathrm{Hom}_{\Gamma-\mathrm{alg}}(\Gamma, E^{(a)})$.

3.3.3. Passons au cas général. Soit, comme au 3.1, $\mathrm{Spec}(\Gamma_{\lambda,\lambda'})$ l'adhérence schématique de $U_\lambda \cap U_{\lambda'}$ dans $U_{\lambda,0} \times_S U_{\lambda',0}$.

Quitte à raffiner le recouvrement S'_λ de S', on peut supposer qu'il existe une famille finie (u_λ) d'éléments de R' avec $S'_\lambda = \mathrm{Spec}(R'[1/u_\lambda])$. Soient $(\widehat{u}_\lambda)$ des relèvements des u_λ dans E. D'après le cas précédemment traité, il existe un entier a_0 tel que tout $z \in \Delta$ possède un relèvement $\widehat{z}_\lambda : \mathrm{Spec}(E^{(a_0)}[1/\widehat{u}_\lambda]) \to U_{\lambda,0}$ (remarquer que, dans le numéro précédent, l'entier a ne dépend pas de E, mais seulement de Γ). Notons $I_{\lambda,\lambda'}$ l'idéal noyau de $\Gamma_\lambda \otimes_R \Gamma_{\lambda'} \to \Gamma_{\lambda,\lambda'}$ définissant l'adhérence schématique dans $\mathrm{Spec}(\Gamma_\lambda \otimes_R \Gamma_{\lambda'})$ de l'intersection de la diagonale de X avec $\mathrm{Spec}(\Gamma_\lambda \otimes_R \Gamma_{\lambda'})_q$. La restriction de $(z_\lambda, z_{\lambda'})$ à $S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}$ se factorise à travers

Spec$((\Gamma_\lambda \otimes_R \Gamma_{\lambda'})/I_{\lambda,\lambda'})$. Il en résulte que $(\widehat{z}_\lambda, \widehat{z}_{\lambda'})$ définit un élément $f_{\lambda,\lambda'} \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_{\lambda,\lambda'}}(I_{\lambda,\lambda'}/I^2_{\lambda,\lambda'}, q^{-a_0}I[1/\widehat{u}_\lambda \widehat{u}_{\lambda'}])$. Les $f_{\lambda,\lambda'}$ définissent un cocycle de $Z^1((S'_\lambda)_q, \ \mathrm{Hom}_{O_{S'_q}}(z^*(\Omega_{X/S_q}), \widetilde{I}_q))$, où $\widetilde{I}_q$ est le faisceau de $O_{S'_q}$-modules associé à $I_q \otimes_{R_q} R'_q$. Il suffit, pour prouver l'existence de $\widehat{\Delta}$, de montrer qu'il existe un entier a_1, indépendant de z, et une famille de $f_\lambda \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_\lambda}(\Omega_{\Gamma_\lambda/R}, q^{-a_1}I[1/\widehat{u}_\lambda])$, de cobord $f_{\lambda,\lambda'}$. Désignons par $(\ )_0$ le quotient d'un R-module par sa q-torsion. Comme $(\Omega_{\Gamma_\lambda/R} \otimes_{\Gamma_\lambda} \Gamma_{\lambda,\lambda'})_0$ et $(I_{\lambda,\lambda'}/I^2_{\lambda,\lambda'})_0$ sont tous deux des sous-$\Gamma_{\lambda,\lambda'}$-modules de type fini de $(\Omega_{\Gamma_{\lambda,\lambda'}/R})_q$ qui engendrent $(\Omega_{\Gamma_{\lambda,\lambda'}/R})_q$ en tant que $(\Gamma_{\lambda,\lambda'})_q$-module, il existe a_1 tel que, pour tout λ, λ', on ait :

$$q^{a_1}(\Omega_{\Gamma_\lambda/R} \otimes_{\Gamma_\lambda} \Gamma_{\lambda,\lambda'})_0 \subset (I_{\lambda,\lambda'}/I_{\lambda,\lambda'})^2_0 \ .$$

Par suite, si $a = a_0 + a_1$ il existe un entier b tel que :

$$\widehat{u}^b_{\lambda'} f_{\lambda,\lambda'}(\Omega_{\Gamma_\lambda/R}) \subset q^{a_1}I[1/\widehat{u}_\lambda]$$

(on remarquera que b dépend de $\widehat{z}$).

Si $\widehat{v}_\lambda$ sont des éléments de E tels que $\sum \widehat{v}_\lambda \widehat{u}^b_\lambda = 1$, on peut prendre $f_\lambda = \sum_{\lambda'} \widehat{v}_{\lambda'} \widehat{u}^b_{\lambda'} f_{\lambda,\lambda'}$. Cela achève de prouver l'existence de $\widehat{\Delta}$.

3.3.4. Soit, comme au 3.1, $(U'_{\lambda',0})$ une autre famille de modèles entiers contrôlant les éléments de Δ, soit $\widehat{\Delta}'$ un ensemble de relèvements des éléments de Δ qui est borné relativement à $(U_{\lambda,0})$ et montrons que $\widehat{\Delta}'$ est borné relativement à $(U_{\lambda,0})$. Soient $\widehat{z} \in \widehat{\Delta}$ et $\widehat{z}' \in \widehat{\Delta}'$ relevant $z \in \Delta$. Supposons que les (S'_λ) et les $(S'_{\lambda'})$ sont affines et que a convient pour $\widehat{\Delta}$ et $\widehat{\Delta}'$. Fixons λ. Les relèvements $\widehat{z}$ et $\widehat{z}'$ définissent des :

$$f_{\lambda,\lambda'} \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_{\lambda,\lambda'}}(I_{\lambda,\lambda'}/I^2_{\lambda,\lambda'}, q^{-a}\Gamma(S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}, \widetilde{I})_0) \ .$$

où $I_{\lambda,\lambda'}$ est le noyau de $\Gamma_\lambda \otimes_R \Gamma_{\lambda'} \to \Gamma_{\lambda,\lambda'}$, cf. numéro précédent.

Si a_0 est un entier tel que :

$$q^{a_0}(\Omega_{\Gamma_\lambda/R} \otimes_{\Gamma_\lambda} \Gamma_{\lambda,\lambda'})_0 \subset (I_{\lambda,\lambda'}/I^2_{\lambda,\lambda'})_0 \ ,$$

on a :

$$f_{\lambda,\lambda'}(\Omega_{\Gamma_\lambda/R}) \subset q^{-(a+a_0)}\Gamma(S'_\lambda \cap S'_{\lambda'}, \widetilde{I}) \ .$$

On en déduit que $\widehat{z}$ et $\widehat{z}'$ définissent un élément f_λ tel qu'il existe un entier a' tel que pour tout λ :

$$f_\lambda(\Omega_{\Gamma_\lambda/R}) \subset q^{-a'}\Gamma(S'_\lambda, \widetilde{I})_0 \ .$$

Donc max(a, a′) convient, relativement à $(U_{\lambda,0})$, pour $\widehat{\Delta}'$.

3.4. Epaississement de la base : cas des groupes.

On reprend les hypothèses et les notations du 3.3. On suppose de plus que R_q est une $\mathbb{Q}$-algèbre et que X est un schéma en groupes abéliens sur S_q. L'application exponentielle identifie le schéma formel vectoriel associé à Lie(X) au complété formel de X le long de la section nulle. Il en résulte la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Lie}(X) \otimes_{R_q} I_q \xrightarrow{\exp} X(E_q) \to X(R'_q) \to 0 \ .$$

PROPOSITION. — *Supposons que Δ soit un sous-groupe de $X(R'_q)$. Soit L_0 un sous-R-module de type fini de* Lie(X) *qui engendre* Lie(X) *en tant que R_q-module. Alors :*

1) il existe un sous-groupe $\widehat{\Delta}$ de $X(E'_q)$ qui est borné, et dont l'image dans $X(R'_q)$ est Δ. Plus précisément, si $\widehat{\Delta}'$ est un sous-ensemble borné de $X(E_q)$ d'image Δ dans $X(R'_q)$, il existe un entier a tel que $\widehat{\Delta}' + q^{-a}IL_0$ soit un sous-groupe borné de $X(E_q)$. De plus, si $\widehat{\Delta}'$ est un ensemble de relèvements d'éléments de Δ qui est borné, il existe un entier a' tel que :

$$\widehat{\Delta}' \subset \widehat{\Delta} + q^{-a'}IL_0$$
$$\widehat{\Delta}' \cap (\mathrm{Lie}(X) \otimes_{R_q} I_q) \subset q^{-a'}IL_0 \ .$$

Démonstration. : Elle est semblable à celle de la proposition 3.2.1. Il faut vérifier qu'un sous-ensemble $\widehat{\Delta}'$ de $\mathrm{Lie}(X) \otimes_{R_q} I_q$ est borné si et seulement si il existe un entier a tel que $\widehat{\Delta}' \subset q^{-a} I L_0$; cela résulte par exemple de la remarque 4 du 2.1.3.

3.5. Cas mixte.

Soit de plus P une extension de X comme au 3.2, de sorte que l'on a une suite exacte :

$$0 \to E^* \to \mathrm{Lie}(P) \to \mathrm{Lie}(X) \to 0 \ .$$

Le diagramme suivant est commutatif et ses lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E^* \otimes_{R_q} I_q & \longrightarrow & \mathrm{Lie}(P) \otimes_{R_q} I_q & \longrightarrow & \mathrm{Lie}(X) \otimes_{R_q} I_q & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E^* \otimes_{R_q} E_q & \longrightarrow & P(E_q) & \longrightarrow & X(E_q) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E^* \otimes_{R_q} R'_q & \longrightarrow & P(R'_q) & \longrightarrow & X(R'_q) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & .
\end{array}$$

Notons $(\mathrm{Lie}(P) \otimes_{R_q} E_q)_{\mathrm{fil}}$ le sous-E_q-module de $\mathrm{Lie}(P) \otimes_{R_q} E_q$ somme de $\mathrm{Lie}(P) \otimes_{R_q} I_q$ et de $E^* \otimes_{R_q} E_q$. On déduit du diagramme ci-dessous la suite exacte :

$$0 \to (\mathrm{Lie}(P) \otimes_{R_q} E_q)_{\mathrm{fil}} \to P(E_q) \to X(R'_q) \to 0 \ .$$

Soit Δ un sous-ensemble de $X(R'_q)$ qui est contrôlé par une famille $(U_{\lambda,0})$ et soit, pour chaque entier a, $P^{(a)}_{\lambda,0}$ des modèles entiers de l'image inverse de U_λ dans P comme dans la remarque 1) du 3.1.3. Soit $\widehat{\Delta} \subset P(E_q)$ s'envoyant dans

Δ. On dit que $\widehat{\Delta}$ est borné s'il existe deux entiers a et a' tels que les éléments de $\widehat{\Delta}$ soient contrôlés par les $P_{\lambda,0}^{(a)}$ lorsqu'on prend $E^{(a')}$ comme structure entière pour E_q. Les propositions du 3.2 et 3.4 entraînent la proposition :

Proposition. — *Supposons que Δ soit un sous-groupe de $X(R'_q)$. Soit L_0 un sous-R-module de type fini de* $\mathrm{Lie}(P)$ *qui engendre* $\mathrm{Lie}(P)$ *en tant que R_q-module et notons $(L_0 \otimes_R E^{(a)})_{\mathrm{fil}}$ le sous-$E^{(a)}$-module de* $(\mathrm{Lie}(P)\otimes_{R_q} E_q)_{\mathrm{fil}}$ *intersection de* $(\mathrm{Lie}(P)\otimes_{R_q} E_q)_{\mathrm{fil}}$ *et de l'image de* $L_0 \otimes_R E^{(a)}$ *dans* $\mathrm{Lie}(P) \otimes_{R_q} E_q$*. Alors il existe un sous-groupe $\widehat{\Delta}$ de $P(E_q)$ qui est borné et dont l'image dans $X(R'_q)$ est Δ. Il existe un entier a tel que*

$$\widehat{\Delta} \cap (\mathrm{Lie}(P) \otimes_{R_q} E_q)_{\mathrm{fil}} \subset q^{-a}(L_0 \otimes_R E^{(a)})_{\mathrm{fil}} \ .$$

Si $\widehat{\Delta}'$ est borné et s'envoie dans Δ il existe un entier a' tel que :

$$\widehat{\Delta}' \subset \widehat{\Delta} + q^{-a'}(L_0 \otimes_R E^{(a')})_{\mathrm{fil}} \ .$$

Construction de l'accouplement de périodes.

4.1.

4.1.1. Soit p un nombre premier. Soit $S = \mathrm{Spec}(R)$ un schéma affine, avec R intègre et normal, de corps des fractions de caractéristique 0. On suppose p non inversible dans R (sinon, la théorie p-adique qui suit est triviale) et que les nombres premiers $\ell \neq p$ sont inversibles dans R. Soit $A \to S[1/p]$ un schéma abélien. On suppose que l'on est dans l'un des deux cas suivants :

- S est le spectre un trait (de caractéristique (O,p)) ;

- $A \to S[1/p]$ se prolonge en un schéma abélien $G \to S$;

- $A \to S[1/p]$ est muni d'une polarisation de degré premier à p et se prolonge en un schéma semi-abélien $G \to S$.

Soit $F = \mathrm{Frac}(R)$, $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et $F_{p-\text{étale}}$ l'extension maximale de F contenue dans $\overline{F}$ telle que la clôture intégrale de $R[1/p]$ dans $F_{p-\text{étale}}$ soit ind-étale. Soit $\widetilde{F}$ une extension de $F_{p-\text{étale}}$ contenue dans $\overline{F}$ et telle que, si $\widetilde{R}$ est la fermeture intégrale de R dans $\widetilde{F}$;

- $\widetilde{F}$ contient $F_{p-\text{étale}}$.

- l'élévation à la puissance p est surjective dans $\widetilde{R}/p\widetilde{R}$.

Soit, comme au 1, $\widehat{\mathcal{W}}_e$ le R-épaississement p-adique d'ordre e de $\widehat{\widetilde{R}}$, universel parmi ceux qui sont sans p-torsion.

Soit $E(A)$ l'extension vectoriel universelle de A ([Ma-Me], [Me]). On a donc une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{O_{S[1/p]}}(R^1 f_* O_A, O_{S[1/p]}) \to E(A) \to A \to 0 ,$$

et l'homomorphisme $H^1_{dR}(A/R[1/p]) \to H^1_{dR}(E(A)/R[1/p])$ induit un isomorphisme de $H^1_{dR}(A/R[1/p])$ sur $\mathrm{Lie}(E(A))$.

Comme au 3.5, on a une suite exacte

$$\text{(I)} \qquad 0 \to \mathrm{Hom}_{R[1/p]-\mathrm{fil}}(H^1_{dR}(A/R[1/p]), \widehat{\mathcal{W}}_e[1/p]) \to E(A)(\widehat{\mathcal{W}}_e[1/p])$$
$$\to A(\widehat{\widetilde{R}}\,[1/p]) \to 0\ .$$

où fil signifie que l'homomorphisme envoie $H^0(A, \Omega^1_{A/R[1/p]})$ dans le noyau $\widehat{\mathcal{I}}_e[1/p]$ de l'homomorphisme $\widehat{\mathcal{W}}_e[1/p] \to \widehat{\widetilde{R}}\ [1/p]$. Notons A_{p^∞} la torsion d'ordre une puissance de A. Comme $\widetilde{F} \supset F_{p-\text{étale}}$, on a $A(\overline{F})_{p^\infty} = A(\widetilde{R}[1/p])_{p^\infty}$.

D'après le théorème 2.2.2 et la remarque 3) du 2.2.3. , il existe une extension finie F_1 de F contenue dans $F_{p-\text{étale}}$, et une famille finie de Spec(R_1)-modèles entiers d'ouverts de A (R_1 désigne la clôture intégrale de R dans F_1), tels que les éléments de $A(\widetilde{R}[1/p])_{p^\infty}$ sont contrôlés par les $(U_{\lambda,0})$. Soit H^1_0 un sous-R-module de type fini de $H^1_{dR}(A/R[1/p])$ qui engendre $H^1_{dR}(A/R[1/p])$ en tant que $R[1/p]$-module et, pour tout entier a, $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{fil}}(H^1_0, \widehat{\mathcal{W}}^{(a)}_e)$ le sous-R-module de $\mathrm{Hom}_R(H^1_0, \widehat{\mathcal{W}}^{(a)}_e)$ des $f \in \mathrm{Hom}_R(H^1_0, \widehat{\mathcal{W}}^{(a)}_e)$ qui envoient $H^0(A, \Omega^1_{A/R[1/p]}) \cap H^1_0$ dans $\widehat{\mathcal{I}}^{(a)}_e$ (où $\widehat{\mathcal{W}}^{(a)}_e$ est comme au 3) du 1.1.5). Comme, d'après la remarque 3 du 1.1.5, l'extension des scalaires de R à R_1 ne change pas $\widehat{\mathcal{W}}_e[1/p]$, il résulte du 3.5 qu'il existe un sous-groupe $\widehat{\Delta}$ de $E(A)(\widehat{\mathcal{W}}_e[1/p])$ qui est borné, et qui est tel qu'il existe un entier a avec une suite exacte induite par (I) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{fil}}(H^1_0, \widehat{\mathcal{W}}^{(a)}_e) & \to & \widehat{\Delta} & \to & A(\widetilde{R}[1/p])_{p^\infty} & \to 0 \\ & & & & \wr\!\! \mid & \\ & & & & A(\overline{F})_{p^\infty}\ . & \end{array}$$

Soit $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément du module de Tate de A. Si $\widehat{z}_n \in \widehat{\Delta}$ est un relèvement de z_n dans $\widehat{\Delta}$, et $f_n = p^n \widehat{z}_n$, on a $f_{n+1} \equiv f_n \bmod p^n$. Il en résulte que les f_n convergent pour la topologie p-adique dans $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{fil}}(H^1_0, \widehat{\mathcal{W}}^{(a)}_e)$ vers un élément f, qui ne dépend pas du choix des f_n. Comme si $\widehat{\Delta}'$ est un autre choix pour $\widehat{\Delta}$, il existe a tel que :

$$\widehat{\Delta}' \subset \widehat{\Delta} + p^{-a}\,\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{fil}}(H^1_0, \widehat{\mathcal{W}}^{(a)}_e)\ ,$$

on voit que f ne dépend pas du choix de $\widehat{\Delta}$. On a donc défini un homomorphisme :

$$T_p(A_{\bar{\eta}}) \to \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{fil}}(H_0^1, \widehat{\mathcal{W}}_e^{(a)})$$

d'où :

$$T_p(A_{\bar{\eta}}) \to \mathrm{Hom}_{R[1/p]-\mathrm{fil}}(H_{dR}^1(A/R[1/p]), \widehat{\mathcal{W}}_e[1/p]) \ ,$$

et passant à la limite projective sur e :

$$T_p(A_{\bar{\eta}}) \times H_{dR}^1(A/R[1/p]) \to B_{dR}^+(\widetilde{R}/R) \ .$$

On voit que cet accouplement envoie $H^0(A, \Omega^1_{A/R[1/p]})$ dans le noyau de l'homomorphisme de $B_{dR}^+(\widetilde{R}/R)$ dans $\widehat{\widetilde{R}}\,[1/p]$.

4.2. REMARQUES. 1) On peut prendre $\widetilde{F} = \overline{F}$. Si R est lisse sur un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel parfait V et petit au sens de [Fa 90], on peut prendre $\widetilde{F} = F_{p-\text{étale}}$ [Fa 90]. Il me semble vraisemblable qu'on puisse déduire de [Fa 87] qu'on peut aussi prendre $\widetilde{F} = F_{p-\text{étale}}$ si R est étale de type fini sur $V[T_1, T_2]/(T_1T_2 - \pi)$ (pour V comme ci-dessus et π uniformisante de V).

2) Lorsqu'on suppose seulement $R[1/p]$ lisse sur $V[1/p]$, je ne sais pas si l'élévation à la puissance p est surjective dans $\overline{R}_{p-\text{étale}}$; G. Faltings construit cependant un anneau B_{dR}^+ pour traiter le cas de mauvaise réduction, sans permettre de ramification sur $\mathrm{Spec}(R[1/p])$ ([Fa 90]).

3) La présentation de G. Faltings est légèrement différente : il utilise ce que nous notons $B_{dR}^+(\widetilde{R}/\mathbb{Z})$ et un relèvement de la structure de $R[1/p]$-algèbre de $\widetilde{R}[1/p]$ à $B_{dR}^+(\widetilde{R}/\mathbb{Z})$.

4) Si l'on suppose seulement A muni d'une polarisation, on peut faire la construction après un changement de base propre et surjectif, d'après le lemme de Gabber ([De]) et la remarque 3) du 2.2.3..

BIBLIOGRAPHIE

[BLR] . — S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud. — *Néron Models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3 Folge, Band 21, Springer Verlag, (1990).

[Br] . — L. Breen. — *Fonctions thêta et théorème du cube*, Lecture Notes in Math. 980 Springer Verlag, (1983).

[Col] R.F. Coleman. — Hodge-Tate periods and p-adic abelian integrals Invent. Math., 78, (1984), 351-379.

[Colm] P. Colmez. — Périodes p-adiques des variétés abéliennes, Math. Ann. 292, 629-644 (1992).

[De] P. Deligne. — Le lemme de Gabber. Dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell. L. Szpiro. Astérisque 127. 1985.

[Fa 87] G. Faltings. — Hodge-Tate structures and modular forms, Math. Ann., 278, (1987), 133-149.

[Fa 90] G. Faltings. — Crystalline cohomology and p-adic galois-representations. Proceedings of the JAMI Inaugural Conference. Algebraic analysis, Geometry and Number Theory, J.-I. Igusa ed., Johns-Hopkins Univ. Press, (1990), 25-79.

[Fa 92] G. Faltings. — Crystalline Cohomology of Semistable Curves, and P-adic Galois Representations, Journal of Algebraic Geometry Vol.1 (et 3), (1992), 61-81.

[Fa Ch] G. Faltings, C.-L.Chai. — *Degeneration of Abelian Varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3 Folge Band 22 Springer Verlag (1990).

[Fo] J.-M. FONTAINE, avec un appendice de P. COLMEZ. — Le corps des périodes p-adiques. Ce volume.

[Fo Ill] J.-M. FONTAINE, L. ILLUSIE. — p-adic periods : a survey in Proceedings of the Indo-French Conf. on Geometry, NBHM, Hindustan Book Agency, Dehli (1993), 57-93.

[GIT] D. MUMFORD, J. FOGARTY. — *Geometric Invariant Theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 34, Springer Verlag, (1982).

[Ill] L. ILLUSIE. — Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique [d'après G. Faltings, J.-M. Fontaine et al.] Séminaire Bourbaki n^0 726, juin 1990.

[Mat] H. MATSUMURA. — *Commutative Algebra*, Second Edition, Mathematics Lecture Note Series, Benjamin, (1980).

[Ma-Me] B. MAZUR, W. MESSING. — Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology, Lecture Notes in Math. 370, Springer Verlag, (1974).

[Me] W. MESSING. — The universal extension of an abelian variety by a vector group, Symp. Math. XI, Istituto Nazionale Di Alta Matematica, (1973).

[MB 81] L. MORET-BAILLY. — Familles de courbes et de variétés abéliennes sur $\mathbb{P}^1$ I. Descente des polarisations. Dans : Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux, L. Szpiro, Astérisque 86, (1981).

[MB 85] L. MORET-BAILLY. — *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque 129, (1985).

[Mum 66] D. MUMFORD. — On the Equation Defining Abelian Varieties I, Invent. Math. 1, 287-354, (1966).

[Mum 72] D. MUMFORD. — An Analytic Construction of Degenerating Abelian Varieties over Complete Rings, Compositio Math. 3, (1972), 239-272. Reproduit dans [Fa Ch].

[Og] A. OGUS. — A p-adic analogue of the Chowla-Selberg formula. Dans : p-adic Analysis Proceedings, Trento 1989. F. Baldassari, S. Bosch, B. Dwork (Eds) Lecture Notes in Mathematics 1454, (1989).

[Ra] M. RAYNAUD. — Passage au quotient par une relation d'équivalence plate. Proceedings of a Conference on Local Fields. Driebergen. 1967. Ed. T.A. Springer.

[Ra-Gr] M. RAYNAUD, L. GRUSON. — Critères de platitude et de projectivité, Invent. Math. 13, p. 1-89, (1971).

J.-P. WINTENBERGER
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex (France)
e-mail : wintenb.@math.u-strasbg.fr