MICHEL RAYNAUD

Exposé VII : 1-motifs et monodromie géométrique

Astérisque, tome 223 (1994), Séminaire Bourbaki, exp. nº 7, p. 295-319
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__223__295_0>

Exposé VII

1–MOTIFS ET MONODROMIE GÉOMÉTRIQUE

par **Michel Raynaud**

§ 1. — Introduction.

Soit K le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet R. Dans cet exposé on considère un K–1–motif $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$, au sens de Deligne [5] et on étudie sa monodromie sur R, c'est–à–dire son défaut de bonne réduction. La situation est analogue à celle des variétés abéliennes. On trouve d'une part une **monodromie finie** qui conduit à une réduction semi–bonne de M_K. Lorsque cette réduction semi–bonne n'est pas bonne, il apparaît d'autre part une **monodromie infinie**. En utilisant une uniformisation rigide partielle *"à la Tate"* de G_K on peut modifier la réalisation de M_K dans une catégorie convenable, de façon que G_K ait maintenant potentiellement bonne réduction. La monodromie de M_K se lit alors sur le défaut de spécialisation de la flèche u_K et conduit à la **monodromie géométrique**.

On montre ensuite comment la connaissance de la monodromie géométrique permet de retrouver la monodromie dans sa réalisation en cohomologie étale ℓ–adique (ℓ nombre premier distinct de la caractéristique résiduelle).

§ 2. — S–1–Motifs.

Soit S un schéma. Suivant la notion introduite par Deligne dans [5] 10.1, nous appellons S–1–motif la donnée suivante :

a) Un S–schéma en groupes Y qui, localement pour la topologie étale sur S, est isomorphe à un groupe constant $\mathbb{Z}^r$.

b) Un S–schéma en groupes (commutatif) G, extension d'un S–schéma abélien A par un tore T.

c) Un S–homomorphisme $u : Y \to G$.

Notons M le 1-motif $[u : Y \to G]$, que l'on considère comme un complexe de S–schémas en groupes avec Y en degré -1 et G en degré 0. Alors M définit canoniquement un objet $\underline{M}$ de la catégorie dérivée $D^b(\text{fppf})$ des complexes bornés de faisceaux pour la topologie fidèlement plate localement de présentation finie, sur le petit site de base S. Ainsi M s'insère dans un triangle distingué :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl] & \\ Y[1] \arrow[rr, "u", "+1"'] & & G \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Supposons S connexe et soit s un point géométrique de S. Si S est géométriquement unibranche, la donnée de Y équivaut à la donnée d'une représentation finie du groupe fondamental $\Pi_1(S,s)$ dans $\mathbb{Z}^r$. Dans le cas général, Y correspond à la donnée d'une représentation du groupe fondamental élargi de S dans $\mathbb{Z}^r$.

2.1. — Exemple (cf. Deligne [5] 10.3).

Prenons pour S le spectre d'un corps K. Soit C une K–courbe séparée de type fini, géométriquement réduite. Notons $\overline{C}$ la compactification de C qui est normale aux points de $\overline{C} - C$. Pour tout point fermé x de $\overline{C}$, soit $\overline{C}_x^{hs}$ le spectre d'une hensélisé strict de $\overline{C}$ en x.

On fait les hypothèses suivantes :

i) Pour tout point fermé x de C, les composantes irréductibles $C_{x,i}^{hs}$ de C_x^{hs} sont essentiellement lisses sur K et C_x^{hs} se déduit des $C_{x,i}^{hs}$ par identification des corps résiduels (autrement dit les singularités de C sont, localement pour la topologie étale, des réunions d'axes de coordonnées).

ii) Les corps résiduels aux points de $\overline{C} - C$ sont étales sur K (en particulier $\overline{C}$ est lisse sur K à l'infini).

Alors la jacobienne G de $\overline{C}$ est une extension d'une variété abélienne par un tore [4] Chap. 9 § 2. Soit Y le faisceau étale engendré par les diviseurs D à support dans $\overline{C} - C$, dont le degré sur chacune des composantes irréductibles géométriques de $\overline{C}$ est nul. L'application $D \longmapsto Cl(O_{\overline{C}}(D))$ fournit un morphisme $u : Y \to G$. D'où un 1–motif M qui est naturellement associé à la courbe (ouverte) C.

2.2. — La filtration par le poids.

De par sa définition, un 1–motif M admet une filtration croissante naturelle en 3 crans :

$$\begin{aligned} &W_i(M) = 0 \textit{ pour } i \leq -3 \ , \\ &W_{-2}(M) = T \ , \\ &W_{-1}(M) = G \ , \\ &W_i(M) = M \textit{ pour } i \geq 0 \ . \end{aligned}$$

On a donc

$$Gr_{-2}(M) = T, \text{ le cran } \textbf{torique}$$
$$Gr_{-1}(M) = A, \text{ le cran } \textbf{abélien}$$
$$Gr_0(M) = Y[1], \text{ le cran } \textbf{étale.}$$
$$Gr_i(M) = 0 \text{ sinon.}$$

Cette filtration sera appelée la filtration en 3 crans du motif M.

2.3. — Morphismes de 1–motifs.

PROPOSITION 2.3.1. — *Soient* $M = [u : Y \to G]$ *et* $M' = [u' : Y' \to G']$ *des* S*-1-motifs. Alors tout morphisme* $a : \underline{M}' \to \underline{M}$ *dans* $D^b(\text{fppf})$ *provient d'un unique morphisme de complexes :*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{u'} & G' \\ {\scriptstyle a_{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_o} \\ Y & \xrightarrow{u} & G \end{array} .$$

Démonstration (d'après L. Illusie). La filtration naïve des complexes M et M' donne naissance à une suite spectrale :

$$E_1^{pq} = \oplus_{p_2 - p_1 = p} \operatorname{Ext}^q(\underline{M}'^{p_1}, \underline{M}^{p_2}) \Longrightarrow \operatorname{Ext}^*(\underline{M}', \underline{M}) .$$

Elle est concentrée dans la région $-1 \le p \le 1$, $q \ge 0$ et l'on s'intéresse au degré total 0. Pour les lignes $q = 1$ et $q = 0$, on a les diagrammes

$$\operatorname{Ext}^1(G', Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(G', G') \oplus \operatorname{Ext}^1(Y', Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(Y', G) ,$$

$$\operatorname{Hom}(G', Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(G', G) \oplus \operatorname{Hom}(Y', Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(Y', G) ,$$

avec les flèches évidentes (au signe près!).

LEMME 2.3.2. — *On a* $\operatorname{Hom}(G', Y) = \operatorname{Ext}^1(G', Y) = 0$.

La nullité de Hom résulte du fait que G' est à fibres connexes tandis que Y est étale. Prouvons que $\operatorname{Ext}^1(G', Y) = 0$. Soit E une extension de G' par Y. Par descente fppf des schémas étales séparés, on voit que E est représentable par un S-schéma en groupes, nécessairement lisse sur S. Alors la composante neutre E^o de E fournit un scindage canonique de l'extension E.

Du lemme, on déduit que $\operatorname{Ext}^o(\underline{M}', \underline{M}) = E_2^{oo} = \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}(G', G) \oplus \operatorname{Hom}(Y', Y) \to \operatorname{Hom}(Y', G)) = \operatorname{Hom}_{complexes}(M', M)$.

COROLLAIRE 2.3.3. — *Deux S-1-motifs isomorphes dans D^b(fppf) sont isomorphes.*

2.4.1. — Motif dual, description symétrique.

Soit Y^* le groupe des caractères du tore T, de sorte que Y^* est un schéma en groupes étale de même nature que Y. L'extension G de A par T est canoniquement associée à un morphisme $h^* : Y^* \to A^*$, où A^* est le schéma abélien dual de A. Notons $h : Y \to A$ le composé de $u : Y \to G$ et de la projection $G \to A$. Soit $\mathcal{P}$ le faisceau inversible rigidifié de Poincaré sur $A \times A^*$. Il lui correspond une biextension canonique, notée encore $\mathcal{P}$ de $A \times A^*$ par G_m.

Partant de l'extension G de A par T, associée au morphisme de groupes :

$$h^* : Y^* \to A^* ,$$

on en déduit une application biadditive :

$$h \times h^* : Y \times Y^* \to A \times A^* .$$

La donnée du relèvement u de Y à travers G équivaut alors à la donnée d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Y \times Y^* \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "h \times h^*"'] & \mathcal{P} \arrow[d, "can."] \\ & A \times A^* \end{tikzcd}$$

tel que s soit une application **biadditive** ce qui a un sens grâce aux lois de composition partielles sur la biextension $\mathcal{P}$). Il revient au même de dire que s est une trivialisation de l'image réciproque de la biextension $\mathcal{P}$ par $h \times h^*$. Cette image réciproque s'identifie canoniquement à un élément de $\mathrm{Ext}^1(Y \otimes_{\mathbb{Z}} Y^*, G_m)$ ([8] SGA 7.1, exposé VII 3.6.5) et la donnée de s équivaut à une trivialisation de cette extension.

L'isomorphisme de bidualité $\tau : A \approx (A^*)^*$ s'étend en un isomorphisme des biextensions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^*$ relatives à A et A^*. Si alors on échange A et A^*, Y et Y^*, h et h^*, on obtient le **1-motif dual** $M^* = [u^* : Y^* \to G^*]$, où G^* est l'extension de A^* par $T^* = \mathrm{Hom}(Y^*, G_m)$ définie par h et u^* est le relèvement de h^* défini par s.

3.1. — Réalisation ℓ-adique.

Soient S un schéma et $M = [u : Y \to G]$ un $S-1-$motif, avec G extension d'un S-schéma abélien A par un tore T.

Soit n un entier. Pour tout faisceau F en groupes commutatifs, on note ${}_nF$ (resp. F_n) le noyau, (resp. conoyau) de la multiplication par n dans F.

Notons $C(M,n)$ le cône de la multiplication par n dans le motif M, c'est-à-dire le complexe :

$$\begin{array}{ccl} M^{-1} & \to & M^{-1} \oplus M^o \to M^o \\ x & \mapsto & (-nx, -u(x)) \\ & & (x,y) \mapsto u(x) - ny \ , \end{array}$$

en degrés respectifs -2, -1, 0.

Comme la multiplication par n est injective dans $M^{-1} = Y$ et est un épimorphisme fppf dans $M^o = G$, $C(M,n)$ a une cohomologie concentrée en degré -1. Posons $T_n(M) = H^{-1}(C(M,n))$. Alors $C(M,n)$ est quasi-isomorphe à $T_n(M)[1]$. Et l'on a une suite exacte :

$$0 \to {}_nG \to T_n(M) \to Y_n \to 0 \ .$$

Ainsi $T_n(M)$ est représentable par un S-schéma en groupes fini et plat sur S, qui est étale, si de plus n est inversible sur S.

Soit ℓ un nombre premier. Lorsque n parcourt les puissances de ℓ, le système inductif des $T_{\ell^n}(M)$ conduit à un S-groupe ℓ-divisible noté $T_{\ell^\infty}(M)$, qui est la réalisation ℓ-adique du 1-motif M. La filtration en trois crans de M conduit à une filtration en trois crans de $T_{\ell^\infty}(M)$:

$$0 \hookrightarrow T_{\ell^\infty}(T) \hookrightarrow T_{\ell^\infty}(G) \hookrightarrow T_{\ell^\infty}(M) \ ,$$

dont les quotients successifs sont $T_{\ell^\infty}(T)$, $T_{\ell^\infty}(A)$, $T_{\ell^\infty}(Y) = Y \otimes (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$.

§ 4. — 1-Motifs et Monodromie.

Dans la suite, S désigne le spectre d'un anneau de valuation discrète complet R. On note k le corps résiduel, $p \geq 0$ sa caractéristique, K le corps des fractions, π une uniformisante. On désigne par $\overline{K}$ une clôture algébrique de K.

Bonne et semi-bonne réduction d'un 1-motif.

Soit $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ un $K-1-$motif. On dit que M_K a **bonne réduction sur R**, si M_K se prolonge en un $R-1$ motif $M = [u : Y \to G]$. Pour que M_K ait bonne réduction, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées :

i) Le groupe localement constant Y_K est non ramifié sur R, c'est-à-dire est donné par une représentation finie non ramifiée de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ dans $\mathbb{Z}^r$ où r est le rang de Y_K. Alors Y_K se prolonge en un S-schéma en groupes localement constant Y.

ii) Le tore T_K de G_K a bonne réduction T sur R. Il revient au même de dire que T_K a un groupe de caractères $Y_K^* = \underline{\mathrm{Hom}}(T_K, \mathbb{G}_m)$ non ramifié au sens précédent.

iii) Le quotient abélien A_K de G_K a bonne réduction sur R, c'est-à-dire se prolonge en un R-schéma abélien A.

Notons que dès que les conditions ii) et iii) sont satisfaites, G_K se prolonge canoniquement en une extension G de A par T. En effet, une telle extension est décrite par un morphisme du groupe des caractères de T_K dans la variété duale A_K^* de A et cette application se prolonge canoniquement sur R, par propreté de A^*.

iv) Le morphisme $u_K : Y_K \to G_K$ se prolonge en un morphisme $u : Y \to G$.

Notons que si M_K a bonne réduction M, celle-ci est unique à isomorphisme unique près.

On dit que le 1-motif M_K a **potentiellement bonne réduction**, s'il acquiert bonne réduction après extension finie de K, c'est-à-dire après remplacement de R par son normalisé dans une extension finie de K. Les conditions i) et ii) ci-dessus sont toujours satisfaites après extension finie étale de K ; pour que M_K ait potentiellement bonne réduction, il faut et il suffit donc que les conditions iii) et iv) soient réalisées après extension finie de K.

Rappelons qu'une K-variété abélienne A_K a une réduction semi-abélienne sur R, si A_K se prolonge en un R-schéma en groupes lisse A, dont la fibre spéciale est extension d'une variété abélienne par un tore.

On dit que le 1-motif M_K a **semi-bonne réduction** si Y_K a bonne réduction Y (condition i) ci-dessus) et si G_K se prolonge en un S-schéma en groupes G lisse, dont la fibre spéciale est extension d'un schéma abélien par un tore. Cette condition équivaut aux conditions suivantes :

ii) Le tore T_K a bonne réduction T.

iii) Le schéma abélien A_K a réduction semi-abélienne A sur R.

Pour établir cette équivalence établissons le lemme suivant :

LEMME 4.1.1. — *Soit G_K une extension d'une variété abélienne A_K par un tore T_K. Pour que G_K s'étende en un S-schéma en groupes lisse G, dont la fibre spéciale est extension d'une variété abélienne par un tore, il faut et il suffit que T_K ait bonne réduction T et que A_K ait réduction semi-abélienne A. De plus G est extension de A par T, G est unique et commute aux extensions* *finies de K.*

Démonstration : Supposons que G_K se prolonge en G, R-schéma en groupes lisse dont la fibre spéciale est extension d'une variété abélienne par un tore. Le quotient de G par l'adhérence schématique $\overline{T}_K$ de T_K dans G est un schéma en groupes A, lisse sur R à fibre spéciale extension d'une variété abélienne par un tore, donc A_K a réduction semi-abélienne.

Examinons d'abord le cas où T_K est un tore déployé, donc se prolonge en un S-tore T. Montrons que l'extension G_K de A_K par T_K se prolonge en une extension de A par T. On est ramené au cas où $T_K = G_m$. Alors G_K est un torseur de base A_K, de groupe $(G_m)_K$; il se prolonge en un torseur de base A, de groupe $\mathbb{G}_m$, comme il résulte du prolongement de A_K à A des faisceaux inversibles. Comme A est à fibre spéciale connexe, ce prolongement est essentiellement unique. Le même raisonnement appliqué à $A \times A$, montre que la structure de groupe s'étend au torseur prolongé; d'où l'existence d'un schéma en groupes G, extension de A par T, qui prolonge G_K.

Notons G' un schéma en groupes extension de A par T qui prolonge G_K et montrons que l'identité $G_K \approx G'_K$ se prolonge en un isomorphisme $G \approx G'$. Pour cela, considérons dans $G \times G'$ l'adhérence schématique Γ du graphe de l'identité sur la fibre générique. Notons que A est la composante neutre du modèle de Néron $\mathfrak{A}$ de A_K. Soit n un entier premier à p et à l'ordre du groupe des composantes connexes de $\mathfrak{A}_k/A_k$. Alors ${}_nG'$ est étale sur S et est le prolongement étale séparé maximal de ${}_nG'_K$. Par suite l'identité ${}_nG_K \approx {}_nG'_K$ se prolonge en un morphisme ${}_nG \to {}_nG'$ et donc la première projection $\Gamma \to G$ induit un isomorphisme : ${}_n\Gamma \approx {}_nG$. Lorsque n parcourt les entiers permis, la famille des groupes ${}_nG_k$ est schématiquement dense dans G_k, car G_k est extension d'une variété abélienne par un tore. On conclut alors que la première projection $\Gamma \to G$ est quasi-finie, puis, par le "main theorem de Zariski" ([7] 4.4.9), que la première projection $\Gamma \to G$ est un isomorphisme. D'où une flèche $G \to G'$ qui est nécessairement plate, comme on le voit en utilisant encore les points de torsion. Par suite $G \to G'$ est un isomorphisme.

Dans le cas géral où T_K n'est plus nécessairement déployé, il est immédiat par descente, de voir que si G existe, alors T_K a bonne réduction T et G est extension de A par T.

Revenons à la situation générale d'un $K-1$-motif M_K. Alors Y_K et T_K acquièrent bonne réduction après extension finie étale de K. De même, d'après un résultat fondamental de Grothendieck, ([8] SGA 7.1 th. 3.6) la variété abélienne A_K admet réduction semi-abélienne après extension finie de K et on peut choisir cette extension de K étale (confer [6] th. 5.15). Il en résulte que tout $K-1$-motif M_K acquiert une réduction semi-bonne après extension finie étale de K. En particulier, M_K a **potentiellement semi-bonne réduction**.

Nous reviendrons plus loin (4.7) sur la **monodromie finie** qui conduit à la réduction semi-bonne.

4.2. — Considérations de géométrie rigide.

Nous allons maintenant expliquer comment on peut remplacer un $K-1$-motif M_K, par un $K-1$-motif $M'_K=[u'_K : Y'_K \to G'_K]$, sans changer son image dans une catégorie dérivée convenable, de façon que G'_K ait **potentiellement bonne réduction**.

Plaçons-nous en géométrie analytique rigide sur le corps local K.

On dispose d'une foncteur du type "GAGA", qui associe à tout K-schéma localement de type fini X, un K-espace rigide analytique X_{rig}. Ce foncteur est plat, transforme suite exacte de K-schémas en groupes (pour la topologie fppf, resp. étale) en une suite exacte de K-groupes rigides (pour la topologie fppf resp. étale).

En particulier, partant d'un $K-1$-motif $M_K=[u_K : Y_K \to G_K]$, le foncteur "GAGA" lui associe un $K-1-$"motif rigide" :

$$M_{\text{rig}}=[u_{\text{rig}} : Y_{\text{rig}} \to G_{\text{rig}}] \ .$$

Ce foncteur est compatible avec la filtration en 3 crans du 1-motif.

Pour tout entier n, le cône de la multiplication par n dans $M : T_n(M_K)$ est un K-schéma en groupes fini, donc est inchangé par passage à la géométrie rigide. Il en résulte que le foncteur $M \mapsto M_{\text{rig}}$ induit un isomorphisme canonique sur les réalisation ℓ-adiques :

$$(*) \qquad T_{\ell^\infty}(M_K)=T_{\ell^\infty}(M_{\text{rig}}) \ .$$

Rappelons que l'on dispose également d'un foncteur "fibre générique" qui à un R-schéma formel $\widehat{X}$, topologiquement de type fini, complet pour la topologie π-adique (où π est une uniformisante de R), associe un K-espace rigide $\widehat{X}_{\text{rig}}$. Si $\widehat{X}$ est affine d'algèbre A topologiquement de type fini, il lui correspond l'affinoïde $\widehat{X}_{\text{rig}}$ d'algèbre de Tate $A\otimes_R K$ [13].

Ceci étant, partons d'un $K-1$-motif $M_K=[u_K : Y_K \to G_K]$, où G_K est extension d'une variété abélienne A_K par un tore T_K. Supposons d'abord que M_K ait une réduction semi-bonne. En particulier G_K se prolonge en G extension d'un schéma semi-abélien A par un tore T (4.1).

Les assertions suivantes sont énoncées (lorsque $G=A$) dans [12] et démontrées dans [1] et [2], voir aussi [14]. Elles s'étendent sans difficulté au cas où G est extension de A par un tore T :

i) Soit T'_k le tore maximal de la fibre spéciale G_k de G ; il contient T_k et se relève canoniquement en un S-tore T' contenant T.

ii) Le complété formel $\widehat{G}$ de G le long de la fibre spéciale G_k est canoniquement extension d'un schéma abélien formel $\widehat{A}'$ par $\widehat{T}'$.

iii) Le schéma abélien formel $\widehat{A}'$ s'algébrise canoniquement en un S-schéma abélien A'. L'extension de $\widehat{A}'$ par $\widehat{T}'$ de ii) s'algébrise canoniquement en une extension G' de A' par T'. En particulier le complété formel $\widehat{G}'$ de G', le long de sa fibre fermée, est canoniquement isomorphe à $\widehat{G}$. On a donc un isomorphisme canonique de schémas formels en groupes :

$$\widehat{h} : \widehat{G}' \approx \widehat{G}$$

(pour ii) et iii) confer [8] SGA 7.1 Lemme 7.2.1).

En particulier, les fibres génériques $\widehat{G}'_{\mathrm{rig}}$ et $\widehat{G}_{\mathrm{rig}}$ sont des sous-groupes rigides ouverts de G'_{rig} et G_{rig} et la fibre générique de $\widehat{h}$ est un isomorphisme $\widehat{h}_{\mathrm{rig}} : \widehat{G}'_{\mathrm{rig}} \approx \widehat{G}_{\mathrm{rig}}$.

iv) $\widehat{h}_{\mathrm{rig}}$ s'étend en un morphisme rigide $f : G'_{\mathrm{rig}} \to G_{\mathrm{rig}}$ étale surjectif de noyau un réseau Λ, de rang $s = \dim(T') - \dim(T)$.

Dans le cas général, G_K n'a plus nécessairement une réduction semi-bonne sur R, mais acquiert réduction semi-bonne après extension étale galoisienne K' de K. Par descente galoisienne, on peut encore construire canoniquement, un K-schéma en groupes G'_K, extension d'une variété abélienne A'_K ayant **potentiellement bonne réduction** par un tore T'_K, et un morphisme rigide $f : G'_{K,\mathrm{rig}} \to G_{K,\mathrm{rig}}$ étale surjectif, de noyau un K-groupe Λ qui est maintenant une forme tordue par une représentation finie de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ du groupe constant $\mathbb{Z}^s$ (conf. [12]).

Considérons alors la suite exacte :

$$0 \to \Lambda \to G'_{K,\mathrm{rig}} \xrightarrow{f} G_{K,\mathrm{rig}} \to 0 ,$$

et l'image réciproque de cette extension de $G_{K,\mathrm{rig}}$ par le morphisme $u_{K,\mathrm{rig}}$: $Y_{K,\mathrm{rig}} \to G_{K,\mathrm{rig}}$ qui intervient dans la définition du 1-motif M_{rig}. On obtient alors une extension $Y'_{K,\mathrm{rig}}$ de $Y_{K,\mathrm{rig}}$ par Λ et un diagramme commutatif à colonnes exactes :

$$
(**) \qquad
\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Lambda & = & \Lambda \\
\downarrow & & \downarrow \\
Y'_{K,\mathrm{rig}} & \xrightarrow{u'_{K,\mathrm{rig}}} & G'_{K,\mathrm{rig}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
Y_{K,\mathrm{rig}} & \xrightarrow{u_{K,\mathrm{rig}}} & G_{K,\mathrm{rig}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0 \quad .
\end{array}
$$

Le groupe rigide étale $Y'_{K,\mathrm{rig}}$ s'algébrise canoniquement en un groupe Y'_K qui, localement pour la topologie étale, est isomorphe à $\mathbb{Z}^{r+s}$, où r est le rang de Y_K. Comme Y'_K est localement fini sur K, le morphisme rigide $u'_{K,\mathrm{rig}}$ s'algébrise canoniquement en un K-morphisme $u'_K : Y'_K \to G'_K$.

On obtient ainsi un nouveau $K-1-$motif M'_K, canoniquement associé au motif M_K. Par construction G'_K a maintenant **potentiellement bonne réduction** et même bonne réduction si M_K a semi-bonne réduction.

THÉORÈME 4.2.2. — *La construction précédente associe canoniquement et fonctoriellement à un* $K-1-$*motif* $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$, *un* $K-1-$*motif* $M'_K = [u'_K : Y'_K \to G'_K]$ *tel que* G'_K *ait potentiellement bonne réduction. De plus, on a un morphisme canonique de 1-motifs rigides :*

$$(***) \qquad \mathrm{can} : M'_{K,\mathrm{rig}} \to M_{K,\mathrm{rig}} \ ,$$

qui est un isomorphisme dans la catégorie dérivée $D^b_{\mathrm{rig}}(\mathrm{fppf})$. *Il entraîne des isomorphismes canoniques :*

$$T_\ell(M'_K) \approx T_\ell(M_K), \ \text{pour tout nombre premier } \ell \ .$$

(*on a noté* $D_{\mathrm{rig}}(\mathrm{fppf})$, *la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux pour la topologie fidèlement plate localement de présentation finie sur le petit site rigide de base* Spec(K))

La fonctorialité de la construction de M'_K à partir de M_K résulte, d'une part, du fait que tout morphisme de 1-motifs se réalise par un morphisme de complexes (2.3.1), d'autre part, du fait que la construction de l'extension $G'_{K,\mathrm{rig}}$ de $G_{K,\mathrm{rig}}$ est fonctorielle par rapport à G.

Le morphisme can. se lit sur le diagramme $(**)$ et est clairement un isomorphisme dans D^b_{rig}. Les assertions sur les réalisations ℓ-adiques résultent alors de $(*)$.

DÉFINITION 4.2.3. — *Nous dirons que le 1-motif* $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ *est* **strict** *si* G_K *a potentiellement bonne réduction.*

Nous avons ainsi associé canoniquement et fonctoriellement à un $K-1-$motif M_K, un $K-1-$motif strict M'_K et ces deux motifs sont isomorphes dans $D^b_{\mathrm{rig}}(\mathrm{fppf})$.

La proposition suivante est l'analogue en géométrie rigide de 2.3.1. Elle ne sera pas utilisée dans la suite.

PROPOSITION 4.2.4. — *Soient* $M_i = [u_i : Y_i \to G_i]$, $i = 1,2$ *des* $K-1-$*motifs.*

i) *On suppose que* M_1 **est strict**. *Alors tout morphisme* $a : \underline{M}_{1,\mathrm{rig}} \to \underline{M}_{2,\mathrm{rig}}$, *dans* $D^b_{\mathrm{rig}}(\mathrm{fppf})$ *provient d'un morphisme de complexes :*

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{u_1} & G_{1,\mathrm{rig}} \\ {\scriptstyle a_{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a_o} \\ Y_2 & \xrightarrow{u_2} & G_{2,\mathrm{rig}} \end{array}$$

ii) *Si* M_1 *et* M_2 *sont stricts, tout morphisme de complexes* $M_{1,\mathrm{rig}} \to M_{2,\mathrm{rig}}$ *est algébrisable et donc provient d'un morphisme* $M_1 \to M_2$.

L'assertion i) se démontre comme 2.3.1 une fois établi que $\mathrm{Hom}(G_{1,\mathrm{rig}}, Y_2) = \mathrm{Ext}^1(G_{1,\mathrm{rig}}, Y_2) = 0$. La première assertion est claire, puisque $G_{1,\mathrm{rig}}$ est connexe tandis que Y_2 est étale. La nullité du Ext^1 est plus délicate. Donnons tout au plus une esquisse de démonstration.

Nous considérons la catégorie des K-espaces rigides de type fini $\mathcal{X}_K$ comme équivalente à celle des R-schémas formels $\mathcal{X}$ topologiquement de type fini, localisée par les éclatements admissibles, c'est-à-dire, dont le centre est à support dans la fibre spéciale (confer [13] et [10]). Nous dirons que $\mathcal{X}$ est un modèle formel de l'espace rigide $\mathcal{X}_K$ et que $\mathcal{X}_K$ est la fibre générique du schéma formel $\mathcal{X}$. Ainsi la catégorie des K-espaces rigides de type fini apparaît comme une certaine pro-catégorie de schémas formels.

PROPOSITION 4.2.5. — *Soit* $\mathcal{X}$ *un schéma formel de type fini, dont la fibre générique* $\mathcal{X}_K$ *est normale. Soit* α_K *un élément de* $H^1(\mathcal{X}_{K,\mathrm{fppf}}, \mathbb{Z})$. *Alors il existe un éclatement admissible* $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$, *tel que* α_K *se prolonge en un élément* α *de* $H^1(\mathcal{X}'_{\mathrm{et}}, \mathbb{Z})$. *En particulier* α_K *est représentable par un torseur sous* $\mathbb{Z}$, *de base* $\mathcal{X}_K$, *localement trivial pour la topologie étale. (En d'autres termes, après changement éventuel du modèle formel* $\mathcal{X}$, α_K *s'étend en un torseur formel* α *de base* $\mathcal{X}$, *de groupe* $\mathbb{Z}$, *localement trivial pour la topologie étale).*

Démonstration : A défaut de fondements écrits de la théorie, nous considérerons que, par définition, il existe un morphisme d'espaces rigides u_K : $\mathcal{Z}_K \to \mathcal{X}_K$, fidèlement plat, **de type fini**, qui trivialise α_K. Par platification ([3] ou [10]), on peut alors, quitte à faire un éclatement admissible de $\mathcal{X}$, supposer que u_K est la fibre générique d'un morphisme de type fini, fidèlement plat de R-schémas formels $u : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$. En prenant une quasi-section, on se ramène au cas où, de plus, u est quasi-fini. Après localisation étale $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$, on peut alors supposer que u est fini et plat. Par descente finie fidèlement plate on voir alors que l'image réciproque α'_K de α_K sur $\mathcal{X}'$ est maintenant représentable par un $\mathcal{X}'_K$-torseur $\mathcal{Y}'_K$ sous $\mathbb{Z}$.

Comme l'espace rigide $\mathcal{X}_K$ est supposé normal, on peut, quitte à normaliser $\mathcal{X}$ par un éclatement admissible, supposer $\mathcal{X}$ normal. Alors $\mathcal{X}'$ est normal. Le torseur $\mathcal{Y}'_K$ se prolonge canoniquement en un $\mathcal{X}'$-schéma formel $\mathcal{Y}'$ localement fini normal, et l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{Y}'_K$ se prolonge en une action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{Y}'$. A priori, cette action est ramifiée, mais le sous-groupe d'inertie en un point est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ qui est fini, donc nul. Par suite $\mathcal{Y}'$ est un torseur sous $\mathbb{Z}$, de base $\mathcal{X}'$, localement trivial pour la topologie étale. Finalement, par descente étale relativement au morphisme $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$, il existe un torseur $\mathcal{Y}$ sur $\mathcal{X}$, de groupe $\mathbb{Z}$, localement trivial pour la topologie étale, dont la fibre générique $\mathcal{Y}_K$ représente α_K. D'où la proposition.

PROPOSITION 4.2.6. — *Soit $\mathcal{X}$ un R-schéma formel de type fini,* **régulier**. *Alors tout élément α_K de $H^1(\mathcal{X}_{K,\mathrm{fppf}}, \mathbf{Z})$ se prolonge en un torseur formel, de base $\mathcal{X}$ de groupe $\mathbb{Z}$.*

Pour tout entier $n > 0$, soit $\alpha_{n,K}$ l'image de α_K dans $H^1(\mathcal{X}_{K,\mathrm{fppf}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ de sorte que $\alpha_{n,K}$ est représenté par un revêtement étale fini $\mathcal{Y}_{n,K}$ de $\mathcal{X}_K$, galoisien de groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. D'après 4.2.5, il existe un éclatement admissible $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$, que l'on peut supposer normal tel que α_K se prolonge en un torseur formel $\mathcal{Y}' \to \mathcal{X}'$, de groupe $\mathbb{Z}$, localement trivial pour la topologie étale. Pour tout entier n, $\mathcal{Y}_{n,K}$ se prolonge donc en un revêtement fini étale $\mathcal{Y}'_n$ de $\mathcal{X}'$. Comme $\mathcal{X}$ est régulier, donc normal, l'éclatement $\mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense de la fibre fermée $\mathcal{X}'_k$. Par suite le revêtement étale fini $\mathcal{Y}_{n,K}$ de $\mathcal{X}_K$ est non ramifié aux points génériques de $\mathcal{X}_k$. Comme $\mathcal{X}$ est régulier, il résulte alors du théorème de pureté de Zariski ([8] SGA 2 th. 3.4) que $\mathcal{Y}_{n,K}$ s'étend en un revêtement formel fini étale $\mathcal{Y}'_n$. Comme ceci est vrai pour tout n, on en déduit que le revêtement étale $\mathcal{Y}'_k \to \mathcal{X}'_k$ se descend en un revêtement de $\mathcal{X}_k$, puis que $\mathcal{Y}'$ lui-même se descend en un revêtement formel étale $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$.

COROLLAIRE 4.4.7. — *Soit $\mathcal{X}_K$ un espace rigide lisse. Alors $H^1(\mathcal{X}_{K,\mathrm{fppf}}, \mathbb{Z})$ est nul dans chacun des cas suivants :*

i) *$\mathcal{X}_K$ admet un R-modèle formel lisse $\mathcal{X}$ de type fini.*

ii) *$\mathcal{X}_K$ admet un R modèle formel tel que $\mathcal{X}_k$ soit une courbe géométriquement réduite, ayant pour seules singularités des points doubles ordinaires et dont le graphe est un arbre.*

iii) *$\mathcal{X}_K$ est le groupe multiplicatif rigide $\mathbb{G}_{m,\mathrm{rig}}$.*

Le cas i) résulte de 4.4.6 et du fait qu'un k schéma lisse est géométriquement unibranche, donc n'admet pas de revêtement étale de groupe $\mathbb{Z}$ non trival.

Dans le cas ii), quitte à faire un éclatement admissible de $\mathcal{X}$ qui introduit des chaînes de droites projectives, on peut supposer de plus que $\mathcal{X}$ est régulier et que les composantes irréductibles de $\mathcal{X}_k$ sont lisses. Un revêment étale de groupe $\mathbb{Z}$, de $\mathcal{X}_k$ est alors localement trivial pour Zariski et admet une description combinatoire au moyen du graphe de $\mathcal{X}_k$, en particulier, un tel revêtement est trival si le graphe est un arbre.

Dans le cas iii), on recouvre $\mathbb{G}_{m,\mathrm{rig}}$ par les couronnes de coordonnée de Laurent t :

$\mathcal{X}_{n,K}$: $-n \leq$ valuation $(t) \leq n$, qui admet comme modèle formel, le schéma formel affine d'équation $R\{x,y\}/xy - \pi^{2n}$. Par le cas ii), on conclut que $H^1(\mathcal{X}_{n,K,\mathrm{fppf}}, \mathbb{Z}) = 0$, puis, par passage à la limite sur n que $H^1(\mathbb{G}_{m,\mathrm{rig},\mathrm{fppf}}, \mathbb{Z}) = 0$.

Ceci étant, revenons à la démonstration de 4.2.4 et prouvons que $\mathrm{Ext}^1(G_{1,\mathrm{rig}}, T_2) = 0$ lorsque G_1 a potentiellement bonne réduction. Comme $\mathrm{Hom}(G_{1,\mathrm{rig}}, Y_2) = 0$, il suffit de le démontrer après extension finie galoisienne de K. On peut donc supposer que $Y_2 = \mathbb{Z}^r$ et que G_1 est extension d'un schéma abélien A_K ayant bonne réduction A, par un tore déployé T_K. Par dévissage, on est ramené au cas où $Y_2 = \mathbb{Z}$ et au cas où $G_1 = A_K$ où $G_{m,K}$ et il suffit clairement d'établir que $H^1(G_{1,\mathrm{rig}}, \mathbb{Z}) = 0$. La conclusion résulte donc de 4.2.7 i) et iii).

Prouvons maintenant l'assertion ii) de 4.2.4. Il suffit de montrer que tout morphisme de $G_{1,\mathrm{rig}} \to G_{2,\mathrm{rig}}$ est algébrisable. Par descente finie, on peut supposer que $G_{i,K}$ a bonne réduction G_i extension d'un schéma abélien A_i par un tore déployé T_i $(i = 1, 2)$.

Soit $\widehat{G}_i$ le complété formel de G_i le long de la fibre spéciale et soit $\widehat{G}_{i,\mathrm{rig}}$ l'espace rigide fibre générique de $\widehat{G}_i$.

LEMME 4.2.8. — *Tout morphisme rigide $u_{\mathrm{rig}} : G_{1,\mathrm{rig}} \to G_{2,\mathrm{rig}}$ provient d'un morphisme formel $\widehat{u} : \widehat{G}_1 \to \widehat{G}_2$.*

Considérons successivement :

- le graphe de u_{rig},
- son intersection avec l'ouvert $\widehat{G}_{1,\mathrm{rig}} \times_K \widehat{G}_{2,\mathrm{rig}}$,
- l'adhérence schématique Γ de cette intersection dans le schéma formel produit $\widehat{G}_1 \times_R \widehat{G}_2$. Alors Γ est un R-schéma formel en groupes, plat et

la première projection induit une immersion ouverte sur les fibres génériques. L'étude de u_{rig} sur les points de n-torsion $(n,p)=1$, entraîne que la première projection $\Gamma \to \widehat{G}_1$ est un isomorphisme, d'où l'existence de $\widehat{u}$.

Si on réduit $\widehat{u}$ suivant les puissances de l'uniformisante π, on trouve que $\widehat{u}$ induit un morphisme $\widehat{t}$, entre les tores formels $\widehat{T}_i$ et un morphisme $\widehat{a}$ entre les schémas abéliens formels $\widehat{A}_i$. Alors $\widehat{t}$ s'algébrise uniquement en un morphisme $t : T_1 \to T_2$, provenant d'un morphisme sur les groupes de caractères $t^* : Y_2^* \to Y_1^*$, tandis que par ([7] 5.4.1), $\widehat{a}$ s'algébrise en un morphisme $a : A_1 \to A_2$. Finalement u_{rig} s'algébrise en un morphisme $u : G_1 \to G_2$, décrit par un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y_2^* & \xrightarrow{\text{can}} & A_2^* \\ {\scriptstyle t^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a^*} \\ Y_1^* & \xrightarrow{\text{can}} & A_1^* \end{array} .$$

4.3. — Monodromie Géométrique.

Soit $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ un $K-1$–motif strict (4.2.3). G_K est donc extension d'une variété abélienne A_K ayant potentiellement bonne réduction par un tore T_K. On note A_K^* la variété abélienne duale de A_K, Y_K^* le groupe des caractères de T_K.

Si $\mathcal{P}_K$ est la biextension de Poincaré de $A_K \times A_K^*$, on rappelle (2.4.1) que la donnée du 1-motif M_K équivaut à la donnée des morphismes $h_K : Y_K \to A_K$, $h_K^* : Y_K^* \to A_K^*$ et d'une trivialisation $s_K : Y_K \times Y_K^* \to \mathcal{P}_K$ de la biextension image réciproque de $\mathcal{P}_K$ par $h_K \times h_K^* : Y_K \times Y_K^* \to A_K \times A_K^*$.

Supposons d'abord que G_K et Y_K aient bonne réduction ; alors A_K a bonne réduction A, et $\mathcal{P}_K$ s'étend en une biextension $\mathcal{P}$ de $A \times A^*$ par G_m, ce qui définit une structure entière sur $\mathcal{P}_K$. Prenant la valuation de s_K, on obtient une application bilinéaire canonique

$$\mu_o : Y_K \times Y_K^* \to \mathbb{Z} ,$$

compatible avec l'action de Galois (ici non ramifiée) sur Y_K et Y_K^*.

Si l'on pose $Z_K = Y_K \otimes Y_K^*$, μ_o s'interprète aussi comme un morphisme de $Z_K \to \mathbb{Z}$, noté encore μ_o.

Dans le cas général où Y_K et G_K ont seulement potentiellement bonne réduction, on prolonge canoniquement la valuation de K à $\overline{K}$, avec groupe de valeurs $\mathbb{Q}$. En prenant la valuation de s, on obtient une application biadditive canonique :

$$\mu : Y_K \times Y_K^* \to \mathbb{Q} .$$

Cette application μ est compatible avec les actions de Galois, et se factorise à travers $\mathbb{Z}$ en redonnant μ_o lorsque Y_K et G_K ont bonne réduction. On peut aussi associer à μ un morphisme : $Z_K = Y_K \otimes Y_K^* \to \mathbb{Q}$ (noté encore μ). Nous dirons que μ est la **monodromie géométrique** du 1-motif M_K.

PROPOSITION 4.3.1. — *Soit $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ un $K-1-$motif strict* (4.2.3)

i) *Pour que M_K ait potentiellement bonne réduction, il faut et il suffit que la monodromie géométrique μ de M_K soit nulle.*

ii) *Supposons que Y_K et G_K aient bonne réduction. Pour que M_K ait bonne réduction il faut et il suffit que μ_o soit nulle.*

Démonstration : Il suffit d'établir ii). Soient Y et G les bonnes réductions sur R de Y_K et G_K. Alors le $K-1-$motif M_K a bonne réduction si et seulement si u_K se prolonge en u de $Y \to G$, c'est-à-dire si et seulement si la trivialisation $s_K : Y_K \times Y_K^* \to \mathcal{P}_K$, se prolonge en une application $s : Y \times Y^* \to \mathcal{P}$, c'est-à-dire si et seulement si μ_o est nulle.

Enfin notons que si l'on remplace K par une extension finie K', d'indice de ramification e sur K, la monodromie géométrique de $M_K \otimes_K K'$ devient $e\mu$. En particulier, si Y_K et G_K acquièrent bonne réduction après extension finie de K d'indice de ramification e, alors $e\mu$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

4.4. — Filtration par la monodromie.

Soit $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ un $K-1-$motif strict (4.2.3).

Notons qu'il existe un plus grand quotient Y_K'' de Y_K, et un plus grand quotient $Y_K''^*$ de Y_K^*, tels que la monodromie $\mu : Y_K \otimes Y_K^* \to \mathbb{Q}$ se factorise à travers $\mu'' : Y_K'' \otimes Y_K''^* \to \mathbb{Q}$. De plus, Y_K'' et $Y_K''^*$ sont sans torsion et μ'' est non-dégénéré des deux côtés (i.e. Y_K'' et $Y_K''^*$ ont même rang et l'application canonique $Y_K'' \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y_K''^*, \mathbb{Q})$, déduite de μ'', est injective).

Soit $\widetilde{Y}_K = \mathrm{Ker}(Y_K \to Y_K'')$ et soit T_K'' le sous-tore du tore maximal T_K de G_K dont le groupe de caractères est $Y_K''^*$. Notons $\widetilde{u}_K : \widetilde{Y}_K \to G_K$ la restriction de u_K. Clairement $\widetilde{M}_K = [\widetilde{u}_K : \widetilde{Y}_K \to G_K]$ est le "plus grand" sous-1-motif de M_K dont la monodromie est nulle, c'est-à-dire le plus grand sous-motif qui a potentiellement bonne réduction. Le motif quotient $M_K/\widetilde{M}_K$ s'identifie au groupe étale $Y_K''[1]$.

4.5. — Monodromie et choix d'une uniformisante.

Partons d'un $K-1-$motif strict (4.2.3) $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$. Nous allons maintenant étudier des décompositions éventuelles de $u_K : Y_K \to G_K$ en une somme $u_K = u_K^1 + u_K^2$ telle que :

- le motif $M_K^1 = [u_K^1 : Y_K \to G_K]$ ait potentiellement bonne réduction.

- $u^2_K : Y_K \to G_K$ se factorise à travers le tore T_K de G_K.

Supposons que la monodromie $\mu : Y_K \times Y^*_K \to \mathbb{Q}$ se factorise à travers $\mathbb{Z}$ et **choisissons une uniformisante** π **de** R. Si alors on modifie la section $s_K : Y_K \times Y^*_K \to \mathcal{P}_K$, associée au 1-motif M_K, en la section :

$$\begin{aligned} s^1_\pi : Y_K \times Y^*_K &\to \mathcal{P}_K \\ (y, y^*) &\to \pi^{-\mu(y,y^*)} s(y, y^*) \ , \end{aligned}$$

il lui correspond un $K - 1$-motif : $M^1_{K,\pi} = [u^1_{K,\pi} : Y_K \to G_K]$, dont la monodromie est clairement nulle et donc qui a potentiellement bonne réduction.

Si alors on pose $u^2_{K,\pi} = u_K - u^1_{K,\pi}$, on obtient un morphisme de $Y_K \to G_K$ qui se factorise à travers T_K et a pour expression :

$$(*) \qquad \begin{aligned} u^2_{K,\pi} : Y_K \to T_K &= \underline{\mathrm{Hom}}(Y^*_K, G_m) \\ y &\mapsto (y^* \mapsto \pi^{\mu(y,y^*)}) \ . \end{aligned}$$

En fait, avec les notations introduites dans 4.4, $u^2_{K,\pi}$ se factorise même en $Y_K \to Y''_K \to T''_K \to T_K$, où les applications extrêmes sont les surjections et injections canoniques et où l'application centrale est :

$$y'' \mapsto (y''^* \to \pi^{\mu''(y'', u''^*)}) \ .$$

On a ainsi établi le résultat suivant :

PROPOSITION 4.5.1. — *Soit $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ un $K - 1$-motif strict dont la monodromie μ se factorise à travers $\mathbb{Z}$. Alors, à tout choix d'une uniformisante π de R on associe canoniquement une décomposition*

$$u_K = u^1_{K,\pi} + u^2_{K,\pi}$$

où $u^2_{K,\pi}$ se factorise à travers le tore T_K de G_K et est donnée par la formule $(*)$ tandis que le $K - 1$-motif $M^1_{K,\pi} = [u^1_{K,\pi} : Y_K \to G_K]$ a potentiellement bonne réduction.

REMARQUES 4.5.2. —

i) Supposons que Y_K et G_K aient bonne réduction respective Y et G. Alors μ est évidemment à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et le 1-motif $M^1_{K,\pi}$, considéré ci-dessus, a bonne réduction $M^1_\pi = [u^1_\pi : Y \to G]$.

ii) Le 1-motif $M^1_{K,\pi}$ dépend de π. Quand π varie, on peut regrouper les diverses réalisations obtenues dans une construction universelle de la façon suivante :

Soit U le schéma formel en groupes des unités de R, c'est-à-dire le complété $(\widehat{\mathbb{G}}_m)$ de $\mathbb{G}_m$ le long de sa fibre fermée. Les uniformisantes π de R sont les sections sur R, d'un torseur Π sous U. Au-dessus de U, on peut appliquer à "l'uniformisante universelle", les constructions ci-dessus. Ainsi au-dessus de l'espace rigide Π_{rig}, fibre générique de Π, on obtient une décomposition canonique de $u_K \times_K \Pi_{\mathrm{rig}}$ en $u^1 + u^2$, où u^2 se factorise à travers le tore T_K et est donné par la formule $(*)$ où π désigne maintenant l'uniformisante universelle, tandis que u^1 correspond à un 1-motif sur Π_{rig} qui a potentiellement bonne réduction M^1 sur Π.

iii) Cherchons maintenant, indépendamment du choix d'une uniformisante π, à quelle condition on peut écrire $u_K = u_K^1 + u_K^2$ de façon que le $K-1-$motif $M_K^1 = [u_K^1 : Y_K \to G_K]$ ait potentiellement bonne réduction et que u_K^2 se factorise à travers le tore T_K.

Pour cela, il nous faut préciser les structures entières en jeu. Supposons d'abord que la partie abélienne A_K ait bonne réduction A. On dispose alors d'une biextension de Poincaré $\mathcal{P}$ de $A \times A^*$ par $\mathbb{G}_m$. Par complétion le long de la fibre fermée, puis passage à la fibre générique on obtient une biextension $\mathcal{P}_{\mathrm{rig}}$ de $A_{K,\mathrm{rig}} \times A^*_{K,\mathrm{rig}}$ par le groupe des unités U_{rig}. Dans le cas général où A_K a seulement potentiellement bonne réduction, il existe encore une telle extension canonique $\mathcal{P}_{\mathrm{rig}}$, comme on le voit par descente. La biextension de Poincaré $\mathcal{P}_K$ se déduit alors de $\mathcal{P}_{\mathrm{rig}}$ en la poussant de U_{rig} à $(\mathbb{G}_m)_{\mathrm{rig}}$, puis en algébrisant.

Par image réciproque de $\mathcal{P}_{\mathrm{rig}}$ par le morphisme

$$h_K \times h_K^* : Y_K \times Y_K^* \to A_K \times A_K^* \ ,$$

on obtient une biextension de $Y_K \times Y_K^*$ par U_{rig}, soit encore une extension $\mathcal{E}_{\mathrm{rig}}$ de $Z_K = Y_K \otimes_Z Y_K^*$ par U_{rig} (confer 2.4.1). En composant avec l'immersion ouverte canonique $U_{\mathrm{rig}} \to (\mathbb{G}_m)_{\mathrm{rig}}$, on obtient une extension E_{rig} de Z_K par $(\mathbb{G}_m)_{\mathrm{rig}}$.

Ceci étant, la donnée du 1-motif $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ équivaut à une trivialisation $\sigma_K : Z_K \to E_{\mathrm{rig}}$ de l'extension E_{rig} et le 1-motif M_K a potentiellement bonne réduction si et seulement si σ_K se factorise à travers $\mathcal{E}_{\mathrm{rig}}$.

On en déduit immédiatement la proposition suivante :

PROPOSITION 4.5.3. — *Les décompositions $u_K = u_K^1 + u_K^2$ correspondent canoniquement aux trivialisations $\tau : Z_K \to \mathcal{E}_{\mathrm{rig}}$ de l'extension $\mathcal{E}_{\mathrm{rig}}$. Le morphisme $u_K^2 : Y_K \to T_K$ correspond alors au morphisme différence $\sigma_K \tau^{-1} : Z_K \to (\mathbb{G}_m)_{\mathrm{rig}}$, (qui est automatiquement algébrisable).*

Notons que les points à valeur dans K du quotient $(\mathbb{G}_m)_{\mathrm{rig}}/U_{\mathrm{rig}}$ s'identifient canoniquement à $\mathbb{Q}$, via la valuation (avec action triviale de Galois$(\overline{K}/K)$).

On obtient alors la suite exacte :

$$\mathrm{Hom}(Z_K\mathbb{G}_m) \to \mathrm{Hom}(Z_K, \mathbb{Q}) \to \mathrm{Ext}(Z_K, U_{\mathrm{rig}}) \to \mathrm{Ext}(Z_K, \mathbb{G}_m) \ .$$

L'élément $\mathcal{E}_{\mathrm{rig}}$ de $\mathrm{Ext}(Z_K, U_{\mathrm{rig}})$ est l'image de la monodromie μ élément de $\mathrm{Hom}(Z_K, Q)$. Si $\mathcal{E}_{\mathrm{rig}}$ est triviale, μ provient d'un élément de $\mathrm{Hom}(Z_K, G_m) = \mathrm{Hom}(Y_K, T_K)$ qui correspond au facteur u_K^2.

4.6. — Monodromie et réalisation ℓ-adique.

Soit $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ un $K-1$–motif strict (4.2.3) et soit n un entier ≥ 1. On a donc (3.1) une suite exacte de K-schémas en groupes finis :

$$0 \to {}_nG_K \to {}_nM_K \to Y_K/nY_K \to 0 \ .$$

Passant à la limite projective sur les n qui sont des puissances d'un nombre premier ℓ, on obtient une suite exacte de groupes ℓ-divisibles :

$$0 \to T_\ell(G_K) \to T_\ell(M_K) \to Y_K \otimes Z_\ell \to 0 \ .$$

Supposons d'abord que Y_K et G_K aient bonne réduction et soit n un entier ≥ 1 premier à la caractéristique résiduelle p de R. Nous allons décrire l'action sur ${}_nM_K$ du sous-groupe d'inertie I de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Supposons d'abord R strictement hensélien, de sorte que $I = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Il existe alors une unique sous-extension K_n de $\overline{K}$, de degré n : l'extension modérée de degré n. Elle est galoisienne de groupe $\mu_n(K)$, le groupe des racines $n$èmes de 1 dans K. Plus précisément, si v_n est la valuation de K_n, de groupe $\mathbb{Z}$, il existe un morphisme canonique surjectif $t_n : I \to \mu_n = \mu_n(K)$, tel que, pour tout $x \in K_n$ et tout $\sigma \in I$ on ait :

$$(*) \qquad \sigma(x) = xt_n(\sigma)^{v_n(x)} \ .$$

pour tout x de K_n tel que $x^n \in K$.

Lorsque R n'est plus supposé strictement hensélien, et que K_n désigne l'extension modérée de degré n de l'extension maximale non ramifiée K_{nr} de K, la formule ci-dessus reste valable pour x dans K_n et σ dans I. De plus, le morphisme t_n est équivariant sous l'action de $\mathrm{gal}(\overline{k}/k)$ opérant par automorphismes intérieurs sur I, et par son action naturelle sur $\mu_n(K) = \mu_n(k)$.

Un point de ${}_nM_K$ devient rationnel sur K_n et est représentable par un couple (y,g), $y \in Y(K_n)$, $g \in G(K_n)$, tels que $u(y) = ng$. Le point de ${}_nM_K$ est nul si et seulement si (y,g) est de la forme $(nz, u(z))$, $z \in Y(K_n)$. L'application $(y,g) \mapsto y$, induit l'application canonique ${}_nM \to Y/nY$.

Soit σ dans le groupe d'inertie $\mathrm{Gal}(K_n/K_{nr})$. Alors

$$(1) \qquad {}^{\sigma}(y,g) = (y, {}^{\sigma}g) = (y,g) + (0, {}^{\sigma}g - g) \ .$$

Choisissons une uniformisante τ de K_n telle que $\tau^n = \pi$. Pour tout entier m, on a alors d'après (*) :

$$(2) \qquad \sigma(\tau^m) = \tau^m t_n(\sigma)^m \ .$$

Notons R_n l'anneau des entiers de K_n.

Soit H le sous-groupe de $T(K_n)$ formé des points h, tels que $\chi(h)$ soit une puissance de τ, pour tout caractère χ du tore T. Alors $T(K_n) = H \oplus T(R_n)$, et

$$G = H \oplus G(R_n) \ .$$

On peut donc décomposer g en :

$$g = h + a \ , \ \text{avec } h \text{ dans } H \text{et } a \text{ dans } G(R_n) \ .$$

Comme $u(y) = ng$, et ${}^{\sigma}y = y$, ${}^{\sigma}g - g$ est un élément de $G(K_n)$ annulé par n.

Par ailleurs, vu le choix de H et (*), ${}^{\sigma}h - h$ est un élément de $T(K_n)$ qui est annulé par n. Comme ${}^{\sigma}g - g = {}^{\sigma}h - h + {}^{\sigma}a - a$, on voit que ${}^{\sigma}a - a$ est lui aussi annulé par n. Mais l'élévation à la puissance n-ème est un morphisme étale dans G et ${}^{\sigma}a - a$ a une image nulle dans $G(k)$, donc ${}^{\sigma}a - a = 0$. Par suite

$$(3) \qquad {}^{\sigma}g - g = {}^{\sigma}h - h \ .$$

Soit alors χ un caractère de T. Le caractère χ, composé avec la valuation de K_n, donne une application additive de $T(K_n)$ dans $\mathbb{Z}$. Celle-ci s'étend en une application additive $v_{n,\chi} : G(K_n) \to \mathbb{Z}$, qui s'annule sur $G(R_n)$. En particulier :

$$(4) \qquad v_{n,\chi}(g) = v_{n,\chi}(h) \ .$$

D'après (*) et le choix de h, on a alors $\chi(\sigma h) = \chi(h) t_n(\sigma)^{v_{n,\chi}(h)}$, et donc, compte-tenu de (3) et (4) :

$$(5) \qquad \chi({}^{\sigma}g - g) = \chi({}^{\sigma}h - h) = t_n(\sigma)^{v_{n,\chi}(h)} = t_n(\sigma)^{v_{n,\chi}(g)} \ .$$

Il résulte de la définition de la monodromie géométrique μ_0 (4.3), que pour tout y dans $Y(K)$ et tout χ caractère de T, on a :

$$\text{(6)} \qquad v_{n,\chi}(u(y)) = n\mu_0(y \otimes \chi) \ ,$$

l'entier n qui figure à droite provenant de la ramification de K_n par rapport à K.

Avec les notations précédentes, on a $u(y) = ng$ et il vient donc : $v_{n,\chi}(g) = \mu_0(y \otimes \chi)$.

Finalement, on trouve :

$$\text{(7)} \qquad \chi({}^{\sigma}g - g) = t_n(\sigma)^{v_{n,\chi}(g)} = t_n(\sigma)^{\mu_0(y\otimes\chi)} \ .$$

Nous sommes alors en mesure d'expliciter l'action de Galois sur les points d'ordre n du motif M, en fonction de la monodromie géométrique.

La donnée de la monodromie géométrique

$$\mu_o : Y \otimes Y^* \to \mathbb{Z} \ ,$$

équivaut à la donnée d'une application linéaire :

$$\begin{aligned} &Y \to \mathrm{Hom}(Y^*, \mathbb{Z}) \\ &y \mapsto [\chi \mapsto \mu_o(y, \chi)] \ . \end{aligned}$$

Par tensorisation avec les racines n-èmes de l'unité, on obtient une application canonique :

$$\nu_n : Y \otimes \mu_n \to \mathrm{Hom}(Y^*, \mu_n) = {}_nT \ .$$

Pour tout ℓ premier inversible sur R, on obtient de même une application canonique :

$$\nu_{\ell^\infty} : Y(1) = Y \otimes T_{\ell^\infty}(1) \to T_{\ell^\infty}(T) \ .$$

Les formules (1) et (7) obtenues ci-dessus entraînent alors :

Pour tout point x de ${}_nM$, d'image y dans Y/nY, on a

$${}^{\sigma}x = x + \nu_n(y \otimes t_n(\sigma)) \ .$$

Si l'on considère l'application composée

$$\mathcal{N}_n : {}_nM \otimes \mu_n \to Y/nY \otimes \mu_n \to {}_nT \to {}_nM \ ,$$

comme un "endomorphisme" nilpotent de carré nul, on peut écrire ${}^{\sigma}x = \mathrm{Exp}(\mathcal{N}_n(x \otimes t_n(\sigma)))$ qui est la formule usuelle pour la monodromie.

En résumé :

PROPOSITION 4.6.1. — *Soit $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ un $K-1-$motif, tel que Y_K et G_K aient bonnes réductions respectives Y et G. Notons T le sous-tore de G et soit ℓ un nombre premier inversible sur R.*

A l'entier ℓ et à la monodromie géométrique

$$\mu_o : Y \to \mathrm{Hom}(Y^*, \mathbb{Z}) ,$$

on associe canoniquement l'opérateur de carré nul :

$$\mathcal{N}_{\ell^\infty} : T_{\ell^\infty}(M)(1) \to Y \otimes \mathbb{Z}_{\ell^\infty}(1) \to T_{\ell^\infty}(T) \to T_{\ell^\infty}(M)$$

où les flèches extrêmes sont les surjections et injections canoniques et où la flèche médiane est ν_{ℓ^∞}, déduite de la monodromie géométrique.

Alors l'action de l'inertie I sur $T_{\ell^\infty}(M)$ se factorise à travers le caractère modéré t_{ℓ^∞} et est donnée par la formule :

$${}^\sigma x = \mathrm{Exp}(\mathcal{N}_{\ell^\infty}(x \otimes t_{\ell^\infty}(\sigma))) .$$

De plus, cette formule est compatible avec l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ sur les deux membres.

4.7. — Monodromie finie.

Soit de nouveau R un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K, de corps résiduel k de caractéristique $p \geq 0$. Soit $\overline{K}$ (resp. $\overline{k}$) une clôture algébrique séparable de K (resp. k). On note $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ qui est extension de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ par le groupe d'inertie I.

Soit $M_K = [u_K : Y_K \to G_K]$ un $K-1-$motif strict (4.2.3). Reprenons les notations de 4.4 :

- le plus grand sous-motif $\widetilde{M}_K = [\widetilde{u}_K : \widetilde{Y}_K \to G_K]$ de M_K ayant potentiellement bonne réduction.

- $Y''_K = Y_K/\widetilde{Y}_K$, Y''^*_K, T''_K et l'application non dégénérée :

$$\mu'' : Y''_K \otimes Y''^*_K \to \mathbb{Q} .$$

La discussion qui suit est directement inspirée de [16] .

Soit K' une extension finie étale galoisienne de K de groupe de Galois $\mathcal{G}'$ et soit R' la clôture intégrale de R dans K'. Supposons que $Y_{K'}$ et $G_{K'}$ aient respectivement bonne réduction Y' et G' sur R'. Alors $(\widetilde{M}_K) \otimes_K K' = \widetilde{M}_{K'}$ se réalise comme sous-motif $\widetilde{u}_{K'} : \widetilde{Y}_{K'} \to G_{K'}$ de $M_{K'}$ et a bonne réduction $\widetilde{M}' = [\widetilde{u}' : \widetilde{Y}' \to G']$ sur R'.

Pour tout $\sigma \in G'$, soit $\widetilde{M}^{(\sigma)}_{K'}$ (resp. $\widetilde{M}'^{(\sigma)}$) le motif déduit de $\widetilde{M}_{K'}$ (resp. $\widetilde{M}'$) par l'automorphisme de K' (resp. R') induit par σ. Comme $\widetilde{M}_{K'}$ provient de $\widetilde{M}_K$, on a un isomorphisme canonique de descente $\alpha(\sigma) : \widetilde{M}_{K'} \approx \widetilde{M}'^{(\sigma)}_{K'}$ qui satisfait à la condition de cocycle : $\alpha(\sigma\tau) = {}^\sigma\alpha(\tau)\alpha(\sigma)$. Ces isomorphismes se prolongent en des isomorphismes $\alpha(\sigma) : \widetilde{M}' \to \widetilde{M}'^{(\sigma)}$, vérifiant également la condition de cocycle $\alpha(\sigma\tau) = {}^\sigma\alpha(\tau)\alpha(\sigma)$. En particulier, si l'on restreint α à la fibre fermée de $\widetilde{M}'_{k'}$ au-dessus du corps résiduel k' de R' et si l'on restreint σ au sous-groupe d'inertie I' de G', on obtient un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} I' &\to \mathrm{Aut}(\widetilde{M}'_{k'}) \\ \sigma &\to \alpha(\sigma)\ . \end{aligned}$$

PROPOSITION 4.7.1. —

i) *Il existe une extension finie* **étale** K' *de* K, *telle que* $M_{K'}$ *ait semi-bonne réduction.*

ii) *Si* R *est* **strictement hensélien**, *il existe une plus petite extension* K' *de* K *telle que* $M_{K'}$ *ait semi-bonne réduction. Cette extension est étale galoisienne et, avec les notations précédentes, son groupe de Galois est l'image de* I' *dans* $\mathrm{Aut}(\widetilde{M}_{k'})$.

Soit n *un entier* ≥ 3 *et premier à* p *caractéristique de* k.

iii) *Pour que* M_K *ait semi-bonne réduction il faut et il suffit que l'action de Galois sur* $T_n(\widetilde{M}_K)$ *soit non-ramifiée, en particulier il suffit que l'action de Galois sur* $T_n(M_K)$ *soit non ramifiée.*

Démonstration : L'assertion i) a déjà été notée et résulte du fait que si Y_K (resp. G_K) acquiert bonne réduction après extension radicielle de K, il a déjà bonne réduction, comme il résulte du critère de Néron-Ogg-Shafarevic (confer [16] th. 1).

Prouvons ii). Supposons R strictement hensélien. Si M_K a semi-bonne réduction, alors $\widetilde{M}_K$ a bonne réduction et donc l'image de I' dans $\mathrm{Aut}(\widetilde{M}_{k'})$ est nulle. Réciproquement, si l'image de I' dans $\mathrm{Aut}(\widetilde{M}_{k'})$ est nulle, pour ℓ premier distinct de p, l'action de G sur $T_\ell(\widetilde{M}_K)$ est non ramifiée et il résulte encore du critère de Néron-Ogg-Shafarevic que $\widetilde{M}_K$ a bonne réduction. En particulier, le sous-tore T''_K (4.4) a bonne réduction et donc l'action de Galois sur Y''^*_K est non ramifiée. Comme μ'' est non-dégénérée, il en résulte que l'action de Galois sur Y''_K est aussi non ramifiée. Après tensorisation par $\mathbb{Q}$, l'action de Galois sur Y_K devient semi-simple. Comme les actions de Galois sur $\widetilde{Y}_K$ et sur Y''_K sont non ramifiées, il en est de même de l'action de Galois sur Y_K et donc Y_K a bonne réduction. D'où ii).

Quant à l'assertion iii), elle résulte de l'analogue du critère de Serre [15].

On obtient ainsi un morphisme canonique $\rho : I \to \mathrm{Aut}(\widetilde{M}_{k'})$, d'image finie H : **la monodromie finie** du motif M_K.

Soit M_K un $K-1-$motif strict et supposons R strictement hensélien. Alors tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ opère sur Y'_K, sur le groupe des caractères Y^*_K du tore T_K et sur la réduction A'_k du quotient abélien $A_{K'}$. On obtient dans les trois cas, des polynômes caractéristiques à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Soit $P(\sigma)$ le produit de ces trois polynômes.

PROPOSITION 4.7.3. — *Soit ℓ premier, distinct de la caractéristique résiduelle p. Alors pour tout σ dans le groupe d'inertie I, le polynôme caractéristique de σ opérant sur $T_{\ell^\infty}(M_K)$ est $P(\sigma)$ et est à coefficients entiers.*

Par dévissage, on se ramène au cas d'une filtration à un cran. Le cas torique et le cas étale sont immédiats; le cas abélien se déduit de Weil (confer [11] chap. IV th. 4).

PROPOSITION 4.7.4. — *Soit M_K un $K-1-$Motif strict* (4.2.3) *et supposons que le corps résiduel k soit fini à q éléments. Notons σ un élément du groupe de Weil de K qui relève le Frobenius de k et soit ℓ premier, distinct de la caractéristique résiduelle de k. Alors le polynôme caractéristique de σ opérant sur $T_\ell(M_K)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et est indépendant de ℓ. Les valeurs absolues des racines sont respectivement* 1, q, $q^{1/2}$ *sur les crans étales, toriques et abéliens du motif.*

Démonstration : On procède par dévissage pour se ramener à une filtration en un seul cran et on termine comme dans ([16] th. 3).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Bosch, W. Lütkebohmert. — Stable Reduction and uniformization of abelian varieties. I.Math. Ann. 270 (1985), 349-379, II. Invent. Math. 78 (1984), 257-297.

[2] S. Bosch, W. Lütkebohmert. — Degenerating abelian varieties. Topology, Vol. 30, N° 4 (1991), 653-698.

[3] S. Bosch, W. Lütkebohmert. — Formal and rigid Geometry II : Flattening Techniques (à paraître).

[4] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud. — Néron models. Ergebnisse (1990).

[5] P. Deligne. — *Théorie de Hodge III*, Pub. Math. IHES N° 44, 1975.

[6] M. Deschamps. — Réduction semi-stable p. 1-34, Séminaire Szpiro sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux. Astérisque N° 86 S.M.F. (1981).

[7] A. Grothendieck, J. Dieudonné. — *Eléments de géométrie algébrique III*, Pub. Math. IHES N° 11, 1961.

[8] A. Grothendieck. — Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie :

SGA 1 (1960-61) : Revêtements Etales et Groupe Fondamental. Lecture Notes in Mathematics N° 224 (1971).

SGA 2 (1962) : Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux. Advanced studies in Pure Mathematics. Masson North-Holland (1968)

SGA 7.1 (1967-1969) : Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique. Lecture Notes in Mathematics N° 288 (1972).

[9] R. Kiehl. — Der Endlichkeitssatz für eignetliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, *Invent. Math.* **2**, (1967), 191-214.

[10] F. Mehlmann. — Flache Homomorphismen affinoider Algebren. Schriftenreihe des Math. Inst. Univ. Münster, 2 Ser. 19 (1981).

[11] D. Mumford. — *Abelian Varieties*, Oxford University Press, 1970.

[12] M. Raynaud. — Variétés abéliennes et géométrie rigide, *Actes congrès intern. math. Nice* **1**, (1970), 473-477.

[13] M. Raynaud. — Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl,... Table ronde d'analyse non archimédienne, *Mémoire de la Soc. Math. de France* **39-40**, (1974), 319-327.

[14] M. Reversat, M. Van der Put. — Construction analytique rigide de variétés abéliennes, *Bul. Soc. Math. de France* **117**, (1989), 415-444.

[15] J.-P. Serre. — Rigidité du foncteur de Jacobi d'échelon $n \geq 3$. Application à l'exposé 17 du séminaire Cartan 1960-61.

[16] J.-P. Serre, J. Tate. — Good reduction of abelian varieties, *Ann. of Math.* **88**, (1968), 492-517.

Michel Raynaud
URA D0752 du CNRS
Université de Paris-Sud
Mathématiques, bât. 425
91405 ORSAY Cédex (France)