Astérisque

JEAN-MARC FONTAINE

Exposé III : Représentations p-adiques semi-stables

Astérisque, tome 223 (1994), Séminaire Bourbaki, exp. nº 3, p. 113-184
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1994__223__113_0>

Exposé III

REPRÉSENTATIONS p–ADIQUES SEMI–STABLES

par **Jean–Marc Fontaine**

0. — Introduction

0.1. — On garde les notations de l'exposé précédent. En particulier, $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Nous notons k le corps résiduel de K, K_0 le corps des fractions des vecteurs de Witt à coefficients dans k et σ le Frobenius absolu opérant sur k (par $x \longmapsto x^p$) et sur K_0 par fonctorialité.

Nous notons $\underline{\mathrm{Rep}}(G_K)$ la catégorie des **représentations p–adiques (de G_K)**, i.e. la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{Q}_p$–espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action linéaire et continue de G_K et les flèches les applications $\mathbb{Q}_p$–linéaires qui commutent à l'action de G_K.

Le but essentiel de cet exposé est d'introduire certaines sous–catégories pleines de $\underline{\mathrm{Rep}}(G_K)$. Ces catégories sont stables par les opérations "usuelles" de l'algèbre linéaire, i.e. par sous–objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, contragrédiente, et contiennent la représentation unité. Ce sont

– la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{HT}(G_K)$ des représentations de Hodge–Tate,

– la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{dR}(G_K)$ des représentations de de Rham,

– la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{cris}(G_K)$ des représentations cristallines ou à bonne réduction,

– la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{st}(G_K)$ des représentations semi–stables,

– la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{pcris}(G_K)$ des représentations potentiellement cristallines, ou ayant potentiellement bonne réduction,

– la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{pst}(G_K)$ des représentations potentiellement semi–stables.

On a des "inclusions", représentées ici par des flèches

$$\begin{array}{ccccccccc} & \underline{\mathrm{Rep}}_{st}(G_K) & & & & & & & \\ \nearrow & & \searrow & & & & & & \\ \underline{\mathrm{Rep}}_{cris}(G_K) & & & \underline{\mathrm{Rep}}_{pst}(G_K) & \to & \underline{\mathrm{Rep}}_{dR}(G_K) & \to & \underline{\mathrm{Rep}}_{HT}(G_K) & \to \underline{\mathrm{Rep}}(G_K) \\ \searrow & & \nearrow & & & & & & \\ & \underline{\mathrm{Rep}}_{pcris}(G_K) & & & & & & & \end{array}$$

qui sont toutes strictes, sauf peut-être $\underline{\mathrm{Rep}}_{pst}(G_K) \subset \underline{\mathrm{Rep}}_{dR}(G_K)$; en outre les représentations cristallines sont celles qui sont à la fois semi-stables et ont potentiellement bonne réduction.

0.2. — A chacune de ces catégories, on associe un foncteur additif, exact et fidèle, compatible avec le produit tensoriel, de cette catégorie dans une catégorie de structures algébriques convenables, tout à fait élémentaires, mais éventuellement un peu compliquées : soit V une représentation p-adique de dimension d ; alors,

– si V est de Hodge–Tate, il lui correspond un K-espace vectoriel gradué, $\underline{D}_{HT}(V)$, de dimension d ;

– si V est de de Rham, un K-espace vectoriel filtré $\underline{D}_{dR}(V)$, de dimension d ;

– si V est cristalline, $\underline{D}_{dR}(V)$ est muni d'une K_0-structure $\underline{D}_{st}(V)$ (notée aussi $\underline{D}_{cris}(V)$) et d'un Frobenius φ (automorphisme σ-semi-linéaire de $\underline{D}_{st}(V)$), avec des relations de compatibilité, le tout formant ce que nous avons appelé dans [Fo79] un φ-module filtré faiblement admissible ;

– si V est semi-stable, la situation est la même que dans le cas cristallin, à ceci près que l'on a en plus un opérateur de monodromie qui est un endomorphisme nilpotent N de $\underline{D}_{st}(V)$, vérifiant $N\varphi = p\varphi N$ (et qui agit aussi bien sûr sur $\underline{D}_{HT}(V)$) ; on a $N = 0$ si et seulement si V est cristalline ; on obtient ainsi un (φ, N)-module filtré faiblement admissible ;

– enfin si V est potentiellement semi–stable, et si pour simplifier on suppose k algébriquement clos, la situation est assez voisine : on a un K_0–espace vectoriel $\underline{D}_{pst}(V)$, de dimension d, muni, non seulement d'une action de φ et de N, mais aussi d'une action linéaire de G_K, discrète (i.e. à travers le groupe de Galois d'une extension finie galoisienne convenable de K contenue dans $\overline{K}$), commutant à φ et à N et on a $\underline{D}_{dR}(V) = (\overline{K} \otimes_{K_0} \underline{D}_{pst}(V))^{G_K}$.

0.3. — L'un des intérêts de cette construction c'est que le foncteur $\underline{D}_{pst}$ qui va de $\underline{\mathrm{Rep}}_{pst}(G_K)$ dans une catégorie de "(φ, N, G_K)–modules filtrés" est pleinement fidèle. Autrement dit, les propriétés de V se "lisent" sur $\underline{D}_{pst}(V)$; même si les (φ, N, G_K)–modules filtrés sont des objets un peu lourds, ils sont beaucoup plus "concrets" que les représentations p–adiques.

En outre, on a une description conjecturale de l'image essentielle du foncteur $\underline{D}_{pst}$, et on dispose de résultats partiels, qui fournissent des exemples hautement non triviaux de représentations p–adiques potentiellement semi–stables.

0.4. — Bien sûr, on s'attend à ce que la cohomologie étale p–adique fournisse des exemples de représentations p–adiques de tous les types considérés ci–dessus et que les différents foncteurs correspondent à des théorèmes de comparaison avec les autres cohomologies p–adiques que l'on peut considérer. Nous terminerons cet exposé (§ 6), en énonçant des conjectures et en discutant des résultats (dûs aux efforts de Bloch, Faltings, Fontaine, Gabber, Hyodo, Illusie, Kato, Messing, Raynaud, Tate,...) dont nous avons eu connaissance.

Dans l'exposé VIII, on reviendra sur les questions liées à la cohomologie étale p–adique dans la situation "arithmétique", i.e. lorsque l'on s'intéresse aux extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ ou de $\mathbb{Q}$. On discutera aussi des relations entre les cohomologies étales ℓ–adiques lorsque le nombre premier ℓ varie.

0.5. — Donnons maintenant une idée du contenu des cinq premiers paragraphes de cet exposé :

0.5.1. — Le § 1 contient quelques rappels et compléments sur les catégories tannakiennes : Soient G un groupe (abstrait) et E un corps. Les représentations E–linéaires de G de dimension finie forment une catégorie abélienne. On montre comment associer à une E–algèbre B, munie d'une action de G, vérifiant des propriétés convenables, une sous–catégorie pleine de la catégorie des représentations E–linéaires de G de dimension finie, stable par les opérations usuelles, **la catégorie des représentations B–admissibles.**

On discute diverses variations sur ce thème dont nous aurons besoin dans la suite, principalement ce qui se passe lorsque l'on remplace B par un sous–anneau et la possibilité, dans certains cas, de définir aussi la catégorie des **représentations potentiellement B–admissibles**.

On montre aussi que, dans ce formalisme, on a une égalité, plus ou moins tautologique entre **le degré de transcendance** du corps engendré par certaines "périodes" et la dimension de certains groupes algébriques.

0.5.2. — Dans le § 2, on donne quelques exemples de représentations B–admissibles.

0.5.3. — A partir du § 3, les notions introduites au § 1 sont utilisées dans la situation où $G = G_K$ et $E = \mathbb{Q}_p$.

Pour la commodité du lecteur, on rappelle au § 3 la définition des représentations de Hodge–Tate (cf. [Se67] et [Ta67]) et de de Rham (cf. [Fo82a]) qui, avec les notations de [Exp.II], n° 1.5, correspondent à prendre $B = B_{HT}$ et $B = B_{dR}$.

0.5.4. — Au § 4, on étudie les (φ, N, G_K)–modules filtrés et leurs variantes. On regarde d'abord ces modules "sans filtration", ce qui permet de travailler dans des catégories qui ont de bonnes propriétés (elles sont abéliennes et même tannakiennes).

On rajoute alors une filtration et on est amené à introduire la condition d'admissibilité faible qui exprime la dépendance souhaitée entre les actions de φ, N et G_K d'une part et la filtration d'autre part et qui permet de récupérer de nouveau une catégorie abélienne (malheureusement, on ne sait prouver la stabilité par produit tensoriel que dans des cas particuliers).

0.5.5. — Les représentations cristallines (cf. [Fo82a] et [Fo83]) sont celles qui sont B_{cris}–admissibles, tandis que les semi–stables sont celles qui sont B_{st}–admissibles (cf. [Exp.II], n° 2.3 et 3.1 pour la définition de B_{cris} et de B_{st}) ; elles sont introduites au § 5. On discute aussi à la fin de ce paragraphe les représentations potentiellement semi–stables (ce sont celles qui deviennent semi–stables après une extension finie du corps de base).

1. — Représentations B–admissibles

Ce paragraphe contient essentiellement des variations sur le thème des catégories tannakiennes neutres (cf. [Sa72], [DM82] et [De90]), à deux nuances près :

i) il faut penser au point de vue "inverse" du point de vue habituel, i.e. à celui qui consisterait, partant d'un groupe algébrique, à s'intéresser à la catégorie de ses représentations ; ou partant de l'algèbre affine d'un torseur pour un certain quotient de ce groupe algébrique, à s'intéresser au foncteur fibre qu'il définit ;

ii) au lieu de partir d'une situation algébrique, on part d'un groupe abstrait G et d'un anneau B muni d'une action de G.

La première nuance rend la situation plus concrète et la deuxième oblige à certaines précautions. Deux bonnes raisons pour donner des démonstrations complètes[1], ce que nous avons essentiellement fait. Ceci étant les résultats qui vont suivre sont certainement bien connus des experts et leurs démonstrations ne présentent pas de difficulté.

Rappelons ([DM82], Intr.), qu'une sous–catégorie **strictement pleine** d'une catégorie est une sous–catégorie pleine qui, si elle contient un objet, contient aussi tous les objets qui lui sont isomorphes.

1.1. — Rappels sur les groupes algébriques affines

Soient $\mathbb{G}$ un schéma en groupes affine sur un corps F et A son algèbre affine.

1.1.1. — ([DM82], prop. 2.2) Se donner une représentation linéaire de $\mathbb{G}$ dans un espace vectoriel V sur F, i.e. un morphisme, défini sur F, de $\mathbb{G}$ dans

[1] modulo les courts rappels sur les groupes algébriques affines qui sont l'objet du n° 1.1.

$\mathbb{GL}_V$, (ou encore un morphisme des foncteurs en groupes qu'ils représentent), revient à se donner une structure de A–comodule sur V, i.e. une application F–linéaire

$$\lambda : V \longrightarrow V \otimes A$$

telle que (en notant $\varepsilon : A \longrightarrow F$ la co–unité et $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ le coproduit) $(id_V \otimes \varepsilon)\lambda : V \longrightarrow V \otimes A \longrightarrow V \otimes F = V$ soit l'identité sur V et que $(id_V \otimes \Delta)\lambda = (\lambda \otimes id_A)\lambda$.

Si R est une F–algèbre et si $g : A \longrightarrow R$ est un élément de $\mathbb{G}(R)$, l'automorphisme du R–module $V \otimes R$ induit par g est l'application composée

$$V \otimes R \xrightarrow{\lambda \otimes id_R} V \otimes A \otimes R \xrightarrow{id_V \otimes g \otimes id_R} V \otimes R \otimes R \xrightarrow{id_V \otimes \mathrm{prod.}} V \otimes R\ .$$

1.1.2. — ([DM82], prop. 2.20) Le groupe $\mathbb{G}$ admet une représentation linéaire fidèle de dimension finie V si et seulement s'il est algébrique, i.e. si A est une F–algèbre de type fini. S'il en est ainsi, si V est une telle représentation et si L désigne la représentation duale de $\det(V)$, toute représentation linéaire de $\mathbb{G}$ est isomorphe à un sous–quotient d'une somme directe de représentations de la forme $V^{\otimes^r} \otimes L^{\otimes^s}$, avec $r,\ s \in \mathbb{N}$.

Dans toute la suite du paragraphe 1, G est un groupe (abstrait) **et E est un corps**. On choisit une sous–catégorie strictement pleine, que l'on note $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ de la catégorie des représentations E–linéaires de dimension finie de G, stable par sous–objet, quotient, somme directe, produit tensoriel et dual, non triviale (i.e. contenant au moins une représentation de dimension non nulle). Pour fixer les idées, on peut penser soit au cas où $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ est la catégorie de toutes les représentations E–linéaires de G de dimension finie, soit au cas où G et E sont munis d'une topologie et où l'on se restreint aux représentations de dimension finie qui sont continues.

1.2. — La catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ et ses sous–$\otimes$–catégories

1.2.1. — On renvoie à [De90] (§ 2) pour la définition de ce qu'est une **catégorie tannakienne** sur un corps k. Rappelons seulement que c'est une catégorie abélienne k–linéaire, munie d'un produit tensoriel, d'un objet–unité et d'une dualité vérifiant des propriétés convenables. En particulier, si D_1 et D_2 sont deux objets de cette catégorie, on peut définir $\underline{\mathrm{Hom}}(D_1, D_2)$, le "hom interne" de D_1 dans D_2, comme étant $D_1^* \otimes D_2$ (où D_1^* désigne le dual de D_1). Rappelons surtout que la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ est une catégorie tannakienne sur E.

Rappelons aussi qu'un $\otimes$–**foncteur** entre deux catégories tannakiennes est un foncteur muni d'isomorphismes de "commutation au produit tensoriel" compatible aux contraintes d'associativité, de commutativité, et d'unité (*op. cit.* n° 2.7) ; qu'une $\otimes$–**équivalence** entre deux catégories tannakiennes sur k est un $\otimes$–foncteur k–linéaire qui est une équivalence de catégories ; qu'un **foncteur fibre** d'une catégorie tannakienne $\mathcal{C}$ sur k sur une extension k' de k est un $\otimes$–foncteur k–linéaire et exact de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des k'–espaces vectoriels de dimension finie (un tel foncteur est automatiquement fidèle) ; et qu'une catégorie tannakienne sur k est **neutre** si elle admet un foncteur fibre sur k.

Dans cet exposé, si $\mathcal{C}$ est une catégorie tannakienne sur un corps, une **sous–catégorie tannakienne de** $\mathcal{C}$ est une sous–catégorie strictement pleine de $\mathcal{C}$ contenant un objet de dimension non nulle et stable par sous–objet, quotient, somme–directe, produit tensoriel et dual (elle l'est donc aussi par hom interne).

1.2.2. — Pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ de dimension non nulle, notons

$$\rho_V : G \longrightarrow \mathbb{GL}_V(E)$$

l'homomorphisme structural et $\mathbb{G}_V$ l'enveloppe algébrique de l'image de ρ_V, i.e. le plus petit sous–groupe algébrique de $\mathbb{GL}_V$ tel que $\rho_V(G) \subset \mathbb{G}_V(E)$. Son algèbre affine est le quotient de celle de $\mathbb{GL}_V$ par l'idéal des fonctions f telles que $f(\rho_V(g)) = 0$, pour tout $g \in G$. On note $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V)$ la catégorie des représentations E–linéaires de dimension finie de $\mathbb{G}_V$.

On note aussi $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$ la plus petite sous–catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ contenant V.

1.2.3. Proposition. — *Avec les hypothèses et notations qui précèdent, le foncteur*

$$\iota_V : \underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V) \longrightarrow \underline{\mathrm{Rep}}(G) \ ,$$

qui, à la représentation W, associe W muni de l'action de G induite par ρ_V, induit une $\otimes$–équivalence entre $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V)$ et $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$.

(autrement dit, le foncteur ι_V – qui est visiblement un $\otimes$–foncteur E–linéaire – est pleinement fidèle et son image essentielle est $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$).

1.2.4. — Preuve : a) Montrons d'abord la pleine fidélité, i.e. que, si V_1 et V_2 sont deux représentations E–linéaires de dimension finie de $\mathbb{G}_V$, la flèche

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_V}(V_1, V_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$$

est surjective (l'injectivité est évidente).

Si l'on pose $W = V_1^* \otimes V_2$, on voit que l'on est ramené à montrer que, si un élément $w \in W$ est fixe par G, alors il est fixe par $\mathbb{G}_V$. Si A désigne l'algèbre affine de $\mathbb{G}_V$, si

$$\lambda : W \longrightarrow W \otimes_E A$$

est la structure de A–comodule sur W qui définit l'action de $\mathbb{G}_V$ sur W (n° 1.1.1), et si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de W sur E, on peut écrire

$$\lambda(w) = w \otimes 1 + \sum_{i \in I} e_i \otimes a_i, \text{ avec les } a_i \in A \ .$$

Comme l'application naturelle de A dans l'anneau des fonctions sur G à valeurs dans E est injective, s'il existait $i_0 \in I$ tel que $a_{i_0} \neq 0$, il existerait $g \in G$ tel que $a_{i_0}(\rho_V(g)) \neq 0$; on aurait alors $g(w) = (id_W \otimes \rho_V(g))(\lambda(w)) = w + \Sigma a_i(\rho_V(g)) \cdot e_i \neq w$. On doit donc avoir $\lambda(w) = w \otimes 1$ et w est fixe par $\mathbb{G}_V$.

b) Montrons que l'image essentielle est $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$. Il résulte de 1.1.2 que l'image essentielle de $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V)$ est contenue dans $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$ et que la seule chose à vérifier est que, si W est une représentation E–linéaire de $\mathbb{G}_V$, et si W' est un sous–E–espace vectoriel de W, pour que W' soit stable par $\mathbb{G}_V$, il suffit qu'il soit stable par G. Ceci se démontre essentiellement comme le a). Il faut voir que si $\lambda(W') \not\subset W' \otimes A$, alors W' n'est pas stable par G. Mais alors, si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de W contenant une base $(e_i)_{i \in I'}$ de W' (ici, I' est donc un sous–ensemble de I), et si $w \in W'$ est tel que $\lambda(w') \notin W' \otimes A$, on a

$$\lambda(w') = \sum_{i \in I} e_i \otimes a_i \ ,$$

avec $a_{i_0} \neq 0$, pour un i_0 convenable n'appartenant pas à I' ; si l'on choisit $g \in G$ tel que $a_{i_0}(\rho_V(g)) \neq 0$, on voit que $g(w') \notin W'$.

1.2.5. — Soit $\mathbb{G}_{alg}$ l'enveloppe pro–algébrique de l'image de G (relativement à la catégorie de représentations choisies), i.e. la limite projective des $\mathbb{G}_V$, pour V parcourant les objets de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$. La proposition 1.2.3 permet, par passage à la limite, d'identifier $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ à la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_{alg})$ des représentations E–linéaires de dimension finie du groupe pro–algébrique $\mathbb{G}_{alg}$ [Dans le langage tannakien, c'est une catégorie tannakienne neutre (cf. par exemple [DM82], def. 2.19), munie du foncteur libre qui, à une représentation V de G associe l'espace vectoriel sous–jacent et le groupe $\mathbb{G}_{alg}$ s'identifie au groupe des $\otimes$–automorphismes de ce foncteur (*op. cit.*, th. 2.11)]. En outre, on obtient une bijection entre les quotients de $\mathbb{G}_{alg}$ et les sous–catégories tannakiennes de $\underline{\mathrm{Rep}}(G) = \underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_{alg})$ en associant à un tel quotient $\mathbb{H}$ la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{H})$ de ses représentations linéaires de dimension finie.

1.3. — Le foncteur $\underline{D}_B$

1.3.1. — Nous appelons (E, G)–**anneau** la donnée d'un anneau commutatif B muni d'une structure de E–algèbre et d'une action de G (i.e. d'un homomorphisme de G dans le groupe des E–automorphismes de l'anneau B).

1.3.2. — Si B est un (E, G)–anneau, pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, on pose

$$\underline{D}_B(V) = (B \otimes_E V)^G$$

et, si F désigne la E–algèbre B^G, on note

$$\alpha_B(V) : B \otimes_F \underline{D}_B(V) \longrightarrow B \otimes_E V$$

l'application B–linéaire déduite, par extension des scalaires, de l'inclusion de $\underline{D}_B(V)$ dans $B \otimes_E V$.

On peut considérer $\underline{D}_B$ comme un foncteur additif (et même E–linéaire) de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dans la catégorie des F–modules et α_B est une transformation naturelle.

1.3.3. — Remarque : On peut, si l'on préfère, adopter un point de vue contravariant et noter $\underline{D}^*_B(V)$ le F–module des applications E–linéaires de V dans B qui commutent à l'action de G. On voit que, si V^* désigne le dual de V, alors $\underline{D}^*_B(V)$ s'identifie à $\underline{D}_B(V^*)$.

1.3.4. — Si V_1 et V_2 sont deux objets de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, la structure d'anneau de B induit une application naturelle

$$\underline{D}_B(V_1) \otimes_F \underline{D}_B(V_2) \longrightarrow \underline{D}_B(V_1 \otimes V_2) \ ,$$

(et le foncteur $\underline{D}_B$ vérifie les propriétés d'associativité, de commutativité et de compatibilité avec un objet–unité que l'on pense (cf. [DM82], conditions a), b), c) de la défintion 1.8).

Si V est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, en appliquant ce qui précède à V et à sa duale V^*, et en composant avec l'application naturelle de $\underline{D}_B(V \otimes V^*)$ dans $\underline{D}_B(E) = F$, on obtient une application F–bilinéaire

$$\underline{D}_B(V) \times \underline{D}_B(V^*) \longrightarrow F$$

que l'on peut interpréter comme une application F–linéaire de $\underline{D}_B(V^*)$ dans le F–module $(\underline{D}_B(V))^*$ dual de $\underline{D}_B(V)$.

1.4. — Anneaux G–réguliers

1.4.1. — Soit B un (E,G)–anneau. Nous disons que B **est G–régulier** s'il est non nul et vérifie les trois conditions suivantes :

– $(G \cdot R_1)$ l'anneau B est réduit,

– $(G \cdot R_2)$ pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, l'application $\alpha_B(V)$ est injective,

– $(G \cdot R_3)$ tout élément b non nul de B tel que la E–droite engendrée par B est stable par G est inversible.

Remarquons que $(G \cdot R_3)$ implique en particulier que $F = B^G$ est un corps.

1.4.2. PROPOSITION. — *Soit B un (E,G)-anneau G-régulier. Alors*

i) pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, on a

$$\dim_F \underline{D}_B(V) \leq \dim_E V \ .$$

ii) si $\dim_F \underline{D}_B(V) = \dim_E V$, l'application $\alpha_B(V)$ est un isomorphisme.

1.4.3. — Preuve : Soient r la dimension de V et $v_1, v_2, \ldots, v_r$ une base de V sur E, donc aussi de $B \otimes_E V$ sur B (en identifiant $v \in V$ à $1 \otimes v \in B \otimes V$). Remarquons d'abord que l'injectivité de $\alpha_B(V)$ implique que, si $d_1, d_2, \ldots, d_r$ sont des éléments de $\underline{D}_B(V)$, linéairement indépendants sur F, et si

$$d_i = \Sigma a_{ij} v_j, \text{ avec les } a_{ij} \in B \ ,$$

alors le déterminant a de la matrice des a_{ij} n'est pas nul. Si, dans $\Lambda^r_B(B \otimes V)$, on pose $d = d_1 \wedge d_2 \wedge \cdots \wedge d_r$ et $v = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r$, on a $d = av$ et, pour tout $g \in G$, $d = gd = ga \cdot gv = ga \cdot \nu(g) \cdot v$, où ν est un caractère de G à valeurs dans E^* ; d'où $ga = \nu^{-1}(g) \cdot a$, pour tout $g \in G$ et $(G \cdot R_3)$ implique que a est inversible dans B.

L'assertion (ii) est alors claire. L'assertion (i) aussi car elle revient à vérifier que, si $d_1, d_2, \ldots, d_r$ sont des éléments de $\underline{D}_B(V)$, linéairement indépendants sur F, alors ils engendrent $\underline{D}_B(V)$ comme F-espace vectoriel. Mais l'argument qui précède montre qu'ils forment une base du B-module libre $B \otimes V$. Pour tout $d \in \underline{D}_B(V)$, on peut donc écrire, de façon unique

$$d = \sum_{1 \leq i \leq r} b_i d_i, \quad \text{avec les } b_i \in B \ .$$

Pour tout $g \in G$, on a alors,

$$d = g(d) = \Sigma g(b_i) \cdot g(d_i) = \Sigma g(b_i) \cdot d_i \ ,$$

donc $g(b_i) = b_i$; et les b_i sont bien dans F.

1.5. — Représentations B–admissibles

1.5.1. DÉFINITION. — *Soit B un (E,G)-anneau, G-régulier. On dit qu'un objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ est B-admissible si $\alpha_B(V)$ est un isomorphisme* (si $F = B^G$, cela revient donc à dire que $\dim_F \underline{D}_B(V) = \dim_E V$*).*

1.5.2. PROPOSITION. — *La sous-catégorie pleine $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$ de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dont les objets sont ceux qui sont B-admissibles est une sous-catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$; la restriction de $\underline{D}_B$ à cette catégorie est un foncteur fibre.*

Rappelons d'abord que la dernière assertion signifie que la restriction de $\underline{D}_B$ à cette catégorie est un foncteur exact, E–linéaire, tel que, si V_1 et V_2 sont des objets de $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$, l'application naturelle

$$\underline{D}_B(V_1) \otimes_F \underline{D}_B(V_2) \longrightarrow \underline{D}_B(V_1 \otimes_E V_2)$$

est un isomorphisme, compatible aux contraintes d'associativité, commutativité et unité (il en résulte que ce foncteur est fidèle et que, si V est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$, l'application naturelle de $\underline{D}_B(V^*)$ dans $(\underline{D}_B(V))^*$ est un isomorphisme).

1.5.3. — Preuve : La stabilité par somme directe est claire. Si

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, on a une suite exacte de F–espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow \underline{D}_B(V') \longrightarrow \underline{D}_B(V) \longrightarrow \underline{D}_B(V'')$$

et des considérations sur les dimensions montrent que, si V est B–admissible, il en est de même de V' et de V'' et la suite

$$0 \longrightarrow \underline{D}_B(V') \longrightarrow \underline{D}_B(V) \longrightarrow \underline{D}_B(V'') \longrightarrow 0$$

est exacte. D'où la stabilité par sous–objet et quotient et l'exactitude de $\underline{D}_B$.

Soient V_1 et V_2 des représentations B–admissibles et soit A_1 (resp. A_2) la matrice dont les colonnes sont les composantes d'une base $\{d_i\}$ de $D_1 =$

$\underline{D}_B(V_1)$ sur une base $\{v_i\}$ de V_1 (resp. d'une base $\{d'_j\}$ de $D_2 = \underline{D}_B(V_2)$ sur une base $\{v'_j\}$ de V_2). Avec des conventions évidentes, les $v_i \otimes v'_j$ forment une base du B-module libre $B \otimes_E (V_1 \otimes_E V_2) = (B \otimes_E V_1) \otimes_B (B \otimes_E V_2)$. Le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les composantes des $d_i \otimes d'_j$ sur la base des $v_i \otimes v'_j$ est $\det(A_1) \times \det(A_2)$ qui est inversible dans B puisque $\det(A_1)$ et $\det(A_2)$ le sont. On en déduit que l'application

$$\underline{D}_B(V_1) \otimes_F \underline{D}_B(V_2) \longrightarrow \underline{D}_B(V_1 \otimes_E V_2)$$

est injective. Des considérations sur les dimensions impliquent alors que c'est un isomorphisme et que $V_1 \otimes_E V_2$ est B-admissible.

La stabilité par dualité résulte de la stabilité par produit tensoriel et de la stabilité par dualité pour les représentations de dimension 1 (qui, elle, n'est autre que la condition $(G \cdot R_3)$).

Les autres assertions sont immédiates.

1.6. — Exemples d'anneaux G-réguliers

1.6.1. Proposition. — *Tout (E, G)-anneau qui est un corps est G régulier.*

1.6.2. — Preuve : La seule chose qui n'est pas évidente est que, si B est un (E, G)-anneau qui est un corps et si V est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, alors l'application $\alpha_B(V)$ est injective.

Sinon, soit r le plus petit entier ≥ 1 tel qu'il existe r éléments de $\underline{D}_B(V)$ qui sont linéairement indépendants sur $F = B^G$ mais pas sur B; choisissons des éléments $d_1, d_2, \ldots, d_r$ de $\underline{D}_B(V)$ et des éléments non tous nuls $b_1, b_2, \ldots, b_r$ de B tels que les d_i soient linéairement indépendants sur F, mais $\Sigma b_i d_i = 0$. La minimalité de r implique qu'aucun des b_i n'est nul et, quitte à diviser par b_1, on peut supposer $b_1 = 1$. Pour tout $g \in G$, on a donc

$$\sum_{2 \leq i \leq r} (g(b_i) - b_i) \cdot d_i = 0 \ ,$$

et la minimalité de r implique que, pour tout i, $g(b_i) = b_i$. On a donc $b_i \in F$, ce qui contredit l'indépendance linéaire des d_i sur F et $\alpha_B(V)$ est bien injective.

1.6.3. Proposition. — *Si B est un (E,G)-anneau qui est un produit de corps, alors B est G-régulier si et seulement si $F = B^G$ est intègre.*

1.6.4. — Preuve : Il est clair que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. On peut écrire $B = \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$, où les B_λ sont des corps. Le groupe G opère sur l'ensemble Λ et $g(B_\lambda) = B_{g\lambda}$ si $g \in G$ et $\lambda \in \Lambda$.

Choisissons un élément $\lambda_0 \in \Lambda$, notons H le stabilisateur de λ_0, et posons $C = B_{\lambda_0}$. Soit B' l'algèbre des fonctions sur G à valeurs dans C qui sont H-équivariantes (sur laquelle G opère par $(\gamma f)(g) = f(g\gamma)$, si γ et $g \in G$). On dispose d'un homomorphisme

$$\xi : B \longrightarrow B'$$

qui commute à l'action de G : c'est celui qui à $b = (b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ associe la fonction $g \longmapsto g(b_{g^{-1}(\lambda_0)})$.

Le fait que B^G soit intègre implique que G opère transitivement sur Λ (si e_λ est l'idempotent primitif correspondant à λ et si Λ' est une orbite de Λ sous l'action de G, $e' = \sum_{\lambda\in\Lambda'} e_\lambda$ et $e' - 1$ sont des idempotents orthogonaux stables par G). On peut alors définir une application

$$\eta : B' \longrightarrow B$$

par $\eta(f) = (b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, avec $b_\lambda = g(f(g^{-1}))$ si g est un élément quelconque de G tel que $g(\lambda_0) = \lambda$.

On vérifie que ξ et η sont des bijections inverses l'une de l'autre et nous utilisons ξ pour identifier B à B'. Alors $F = B^G$ s'identifie à l'ensemble des fonctions constantes de G dans C qui sont H-équivariantes, **donc** $C^H = F$.

Pour tout C-espace vectoriel M muni d'une action semi-linéaire de H, soit $Ind_H^G M$ le B-module des fonctions définies sur G à valeurs dans M qui sont H-équivariantes (sur lequel G opère par la même formule que pour B'). La proposition résulte alors de ce que, avec des notations évidentes, $\underline{D}_B(V)$ s'identifie à $D = \underline{D}_C(V)$, $B \otimes_E V$ s'identifie à $Ind_H^G(C \otimes_E V)$ et $\alpha_B(V)$ s'identifie à

$$Ind_H^G(\alpha_C(V)) : Ind_H^G(C \otimes_F D) \longrightarrow Ind_H^G(C \otimes_E V)\ .$$

1.6.5. PROPOSITION. — *Soit B un (E, G)-anneau G-régulier et soit B' une sous-E-algèbre de B stable par G. On pose $F = B^G$, $F' = B'^G$ on suppose que B' vérifie $(G \cdot R_3)$ et que l'application naturelle*

$$F \otimes_{F'} B' \longrightarrow B$$

est injective. Alors B' est G-régulière et, si V est une représentation B'-admissible, elle est aussi B-admissible et l'application naturelle

$$F \otimes_{F'} \underline{D}_{B'}(V) \longrightarrow \underline{D}_B(V)$$

est un isomorphisme.

C'est évident.

1.6.6. COROLLAIRE. — *Soient B' un (E, G)-anneau intègre et B son corps des fractions. Si B' vérifie $(G \cdot R_3)$ et si $B'^G = B^G$, alors B' est G-régulier.*

1.7. — Anneaux G-réguliers, périodes et torseurs

Soient B un (E, G)-anneau G-régulier et $F = B^G$.

1.7.1. — Soient V une représentation B-admissible et $D^* = \underline{D}_B(V^*) = \underline{D}^*_B(V) = \mathrm{Hom}^G(V, B)$. Nous disons que $b \in B$ est **une période de** V s'il existe $v \in V$ et $d \in D^*$ tels que $b = d(v)$.

1.7.2. — Soit V une représentation B-admissible. Il est clair que la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$ (qui s'identifie elle-même à $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V)$, cf. prop. 1.2.3) est une sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$, i.e. que tout objet de $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$ est B-admissible et nous notons B_V le sous-ensemble de B formé de toutes les périodes de toutes les représentations de G_V. Il est clair que B_V est stable par G.

Si V_1 et V_2 sont des représentations B-admissibles et si b_1 (resp. b_2) est une période de V_1 (resp. V_2), alors $b_1 + b_2$ est une période de $V_1 \oplus V_2$ et $b_1 b_2$ une période de $V_1 \otimes V_2$; par conséquent, B_V est une sous-F-algèbre de B.

On voit que B_V est une (E, G)-algèbre G-régulière, que les représentations B_V-admissibles sont exactement les objets de $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$ et que $\underline{D}_{B_V}$ s'identifie à la restriction de $\underline{D}_B$ à $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G) = \underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V)$.

Posons $\mathbb{T}_{B,V} = \operatorname{Spec} B_V$. C'est donc un schéma affine de type fini sur F, muni d'une action **à droite** du groupe G.

Nous nous proposons de montrer que cette action est "algébrique", i.e. que cette action est induite par une action du groupe algébrique $\mathbb{G}_V$ sur $\mathbb{T}_{B,V}$. On a en fait un résultat plus précis : Notons

$$\omega : \underline{\mathrm{Rep}}_V(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Vect}}_E$$

le foncteur "oubli de l'action de G" et

$$\eta : \underline{\mathrm{Rep}}_V(G) \longrightarrow \underline{\mathrm{Vect}}_F$$

le foncteur "restriction de $\underline{D}_B$ à $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$". Ce sont des foncteurs fibres (1.5.2). Notons $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega,\eta)$ (resp. $\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega,\eta)$) le foncteur, sur la catégorie des F–algèbres, des $\otimes$-homomorphismes (resp. $\otimes$–isomorphismes) de ω sur η (si R est une F–algèbre, un élément de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega,\eta)(R)$ (resp. $\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega,\eta)(R)$) est donc la donnée, pour chaque objet W de $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$, d'une application R–linéaire (resp. d'un isomorphisme)

$$u_W : W \otimes_E R \longrightarrow \underline{D}_B(W) \otimes_F R \ ,$$

les applications u_W commutant, en un sens évident, aux morphismes des catégories en présence, aux produits tensoriels et vérifiant $u_{\mathbf{1}_E} = id_R$ (où $\mathbf{1}_E$ désigne E muni de l'action triviale de G et où l'on a identifié, de façon évidente $\mathbf{1}_E \otimes_E R$ et $\underline{D}_B(\mathbf{1}_E) \otimes_F R$ à R).

1.7.3. THÉORÈME. — *Conservons les hypothèses et les notations du n° précédent et notons*

$$\rho_V : G \longrightarrow \mathbb{G}_V(E)$$

l'homomorphisme naturel. Alors,

i) il existe une unique action à droite du groupe algébrique $\mathbb{G}_{V,F} = \mathbb{G}_V \otimes_E F$ sur $\mathbb{T}_{B,V}$

$$\mathbb{T}_{B,V} \times \mathbb{G}_{V,F} \longrightarrow \mathbb{T}_{B,V}$$

qui induit l'action donnée de G (i.e., pour tout $g \in G$, g agit sur $\mathbb{T}_{B,V}$ comme $\rho_V(g)$) ;

ii) muni de cette action $\mathbb{T}_{B,V}$ *est un* $\mathbb{G}_V$*–torseur sur* F *qui représente le foncteur* $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega,\eta)$ *; en outre* $\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega,\eta) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega,\eta)$ *est un isomorphisme.*

1.7.4. — Remarques

i) Une fois l'assertion (*i*) vérifiée, tout devient algébrique : on peut voir $\underline{D}_B$ et $\underline{D}^*_B$ comme des foncteurs sur la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V)$ définis par

$$\underline{D}_B(W) = (W \otimes_E B_V)^{\mathbb{G}_V} \quad \text{et} \quad \underline{D}^*_B(W) = \mathrm{Hom}^{\mathbb{G}_V}(W, B_V)\ .$$

Le théorème n'est alors qu'une traduction "concrète", dans la situation envisagée ici de résultats bien connus. En particulier, le fait que $\underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega,\eta)$ est égal à $\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega,\eta)$ et est un torseur est classique ([DM82], thm. 3.2) ; nous allons le retrouver ici, où ce qui nous intéresse vraiment est le fait que $\mathrm{Spec}\, B_V$ représente ce torseur.

ii) Ce théorème implique que le groupe $\mathbb{H}_{B,V}$ des $\otimes$–automorphismes de η s'identifie au groupe algébrique déduit de $\mathbb{G}_{V,F}$ par torsion par $\mathbb{T}_{B,V}$.

iii) Il implique aussi que la dimension de $\mathbb{T}_{B,V}$, ou, ce qui revient au même, celle de B_V est égale à la dimension de $\mathbb{G}_V$. Dans le cas où B est intègre, cela revient à dire que **le degré de transcendance du corps des fractions de la sous–F–algèbre de B engendrée par les périodes de V est égale à la dimension de $\mathbb{G}_V$.**

1.7.5. — Preuve du théorème : il est clair que $\mathbb{G}_{V,F}$ est la clôture Zariskienne de l'image de G dans $\mathbb{GL}_{V\otimes F}$.

Posons $r = \dim_E V$, $D = \underline{D}_B(V)$, notons $\mathcal{B}^+$ la F–algèbre $Sym_F(V \otimes_E D^*)$; soit d un élément non nul de $\Lambda^r_E V \otimes \Lambda^r_F D^*$ identifé, de façon évidente à une droite du F–espace vectoriel $Sym^r_F(V \otimes D^*)$ et soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+[1/d]$. On fait opérer $\mathbb{GL}_{V,F} = \mathbb{GL}_V \otimes_E F$ sur le F–espace vectoriel $V \otimes_E D^*$ via l'action naturelle de $\mathbb{GL}_V$ sur V et l'action triviale sur D^*. Cette action s'étend en une action sur $\mathcal{B}^+$ et sur $\mathcal{B}$. Si l'on pose $\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \mathrm{Spec}\,\mathcal{B}$, on obtient un morphisme

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} \times \mathbb{GL}_{V,F} \longrightarrow \mathbb{T}_{\mathcal{B}}$$

qui fait de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ un $\mathbb{GL}_V$–torseur sur F.

Montrons $i)$: L'unicité de l'action de $\mathbb{G}_{V,F}$ sur $\mathbb{T}_{B,V}$ résulte de la proposition 1.2.3.

L'application des périodes induit une application F–linéaire

$$V \otimes D^* \longrightarrow B_V$$

qui s'étend en un homomorphisme ν de F–algèbres de $\mathcal{B}$ dans B_V.

Comme $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V)$ est la plus petite sous–catégorie strictement pleine d'elle–même, qui est stable par sous–objet, quotient et somme directe, et contient les puissances tensorielles de V et l'inverse de la représentation déterminant de V (n° 1.1.2), B_V est engendré par les coefficients d'une matrice de passage d'une base de V à une base de D et par l'inverse du déterminant de cette matrice, et l'application ν est surjective.

Autrement dit, B_V s'identifie à un quotient de $\mathcal{B}$. Comme l'action de G sur B_V est induite par son action sur $\mathcal{B}$ (via ρ_V et l'action de $\mathbb{G}_V \subset \mathbb{GL}_V$ sur $\mathcal{B}$), la proposition 1.2.3 montre que l'action de G sur B_V est bien algébrique.

Montrons $ii)$: Soit $u \in \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega, \eta)(R)$. Si W est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_V)$ de dimension d, et si (c_{ij}) est la matrice de l'application linéaire

$$u_W : R \otimes W \longrightarrow R \otimes \underline{D}_B(W)$$

relativement à des bases choisies de W et $\underline{D}_B(W)$, on voit que, par rapport aux bases correspondantes de $L = \det(W)$ et de $\underline{D}_B(\det(W)) = \det(\underline{D}_B(W))$, la matrice de u_L est le scalaire $\det((c_{ij}))$; si c' est le scalaire qui est la matrice de L^* relativement aux bases duales, on voit que l'on doit avoir $c' \cdot \det((c_{ij})) = 1$, ce qui montre que $\det((c_{ij}))$ est inversible dans R, donc que u_W est un isomorphisme; par conséquent $\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega, \eta) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega, \eta)$ est un isomorphisme.

Si R est une F–algèbre, $t : B_V \longrightarrow R$ un élément de $\mathbb{T}_{B,V}(R)$, et W un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}_V(G)$, on a une application $\mu(t)_W$:

$$R \otimes_E W \to R \otimes_F B_V \otimes_E W = R \otimes_F B_V \otimes_F \underline{D}_B(W) \to R \otimes_F R \otimes_F \underline{D}_B(W) \to R \otimes_F \underline{D}_B(W),$$

où les flèches sont celles que l'on imagine. On vérifie que $\mu(t) \in \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega, \eta)(R)$ et que l'on définit ainsi un morphisme $\mu : \mathbb{T}_{B,V} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega, \eta)$.

Construisons un morphisme dans l'autre sens. Si $u \in \underline{\mathrm{Hom}}^{\otimes}(\omega, \eta)(R)$, l'application

$$u_V : R \otimes V \longrightarrow R \otimes \underline{D}_B(V) = R \otimes D$$

induit une application F-linéaire de $V \otimes D^*$ dans R qui s'étend en un homomorphisme de la F-algèbre $\mathcal{B}^+$ dans R, et même en un morphisme $\widehat{t} : \mathcal{B} \longrightarrow R$, grâce au fait que u_V est un isomorphisme. Il nous faut voir que $\widehat{t}$ se factorise à travers un homomorphisme t de B_V dans R, i.e. que son noyau contient l'idéal J noyau de la projection de $\mathcal{B}$ sur B_V ; il sera alors clair que μ est un isomorphisme, l'application $u \longmapsto t$ induisant l'isomorphisme réciproque.

Il est clair que l'on peut appliquer "la B-construction" à $\mathbb{GL}_V$ et $\mathcal{B}$, i.e. que, pour toute représentation E-linéaire de dimension finie W de $\mathbb{GL}_V$, on peut poser

$$\underline{D}_{\mathcal{B}}(W) = (\mathcal{B} \otimes_E W)^{\mathbb{GL}_V} \quad \text{et} \quad \underline{D}^*_{\mathcal{B}}(W) = \mathrm{Hom}^{\mathbb{GL}_V}(W, \mathcal{B}) \ ,$$

que l'application naturelle

$$\alpha_{\mathcal{B}}(W) : \mathcal{B} \otimes_F \underline{D}_{\mathcal{B}}(W) \longrightarrow \mathcal{B} \otimes_E W$$

est un isomorphisme, que $\underline{D}_{\mathcal{B}}$ est un foncteur fibre de la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{GL}_V)$ des représentations E-linéaires de dimension finie dans celle des F-espaces vectoriels de dimension finie et que $\underline{D}^*_{\mathcal{B}}(W) = \underline{D}_{\mathcal{B}}(W^*)$ s'identifie à $(\underline{D}_{\mathcal{B}}(W))^*$.

Toute représentation linéaire W de $\mathbb{GL}_V$ est munie d'une action du sous-groupe $\mathbb{G}_V$ de $\mathbb{GL}_V$ et la projection de $\mathcal{B}$ sur B_V induit une application F-linéaire de $\underline{D}_{\mathcal{B}}(W)$ dans $\underline{D}_B(W)$. Mais on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} \otimes \underline{D}_{\mathcal{B}}(W) & \longrightarrow & \mathcal{B} \otimes W \\ \downarrow & & \downarrow \\ B \otimes \underline{D}_B(W) & \longrightarrow & B \otimes W \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des isomorphismes, tandis que la flèche verticale de droite est surjective ; la flèche verticale de gauche l'est donc aussi, ce qui implique, pour des raisons de dimension, que la flèche de $\underline{D}_{\mathcal{B}}(W)$ dans $\underline{D}_B(W)$ est un isomorphisme.

Revenons alors à notre application $\widehat{t}$ et montrons que si $b \in J$ alors $\widehat{t}(b) = 0$. Il est clair que b, tout comme n'importe quel élément de $\mathcal{B}$, est une période pour $\mathbb{GL}_V$, i.e. qu'il existe une représentation linéaire W de $\mathbb{GL}_V$ et des éléments $w \in W$ et $d \in \underline{D}^*_{\mathcal{B}}(W)$ tels que $d(w) = b$. En revanche, si $\overline{d}$ désigne l'image de d dans $\underline{D}^*_B(W)$, on a $\overline{d}(w) = 0$. Donc w appartient au sous-espace vectoriel W' de W noyau de $\overline{d}$ qui est stable par $\mathbb{G}_V$. En particulier, l'application

$$u_W : R \otimes W \longrightarrow R \otimes \underline{D}_B(W)$$

doit envoyer $R \otimes W'$ dans $R \otimes \underline{D}_B(W')$; en particulier, si l'on note encore $\overline{d}$ la forme R-linéaire sur $R \otimes \underline{D}_B(W)$ déduite par extension des scalaires de $\overline{d}$, on doit avoir $\overline{d}(u_W(1 \otimes w)) = 0$.

Mais, l'application u_W est l'application composée

$$\begin{aligned} R \otimes W \longrightarrow R \otimes \mathcal{B} \otimes W = R \otimes \mathcal{B} \otimes \underline{D}_{\mathcal{B}}(W) \longrightarrow R \otimes R \otimes \underline{D}_{\mathcal{B}}(W) \longrightarrow \\ \longrightarrow R \otimes \underline{D}_{\mathcal{B}}(W) \longrightarrow R \otimes \underline{D}_B(W) \end{aligned}$$

où la flèche du milieu est $id \otimes \widehat{t} \otimes id$. On voit que $\overline{d}(u_W(1 \otimes w)) = \widehat{t}(b)$, qui doit donc bien être nul.

Il reste à prouver que $\mathbb{T}_{B,V}$ est un torseur. Il suffit pour cela de vérifier que, pour toute F-algèbre R, si t, $t' \in \mathbb{T}_{B,V}(R)$, il existe un unique $g \in \mathbb{G}_V(R)$ tel que $t' = tg$. Mais, pour toute représentation W de $\mathbb{G}_V$, $\mu(t')_W$ et $\mu(t)_W$ sont des isomorphismes de $R \otimes W$ sur $R \otimes \underline{D}_B(W)$; donc g doit agir sur $R \otimes W$ comme $\mu(t')_W \circ (\mu(t)_W)^{-1}$ et cela définit bien un élément de $\mathbb{G}_V(R)$.

1.7.6. — Rappelons que l'on a défini au n° 1.2.5 le schéma en groupes affine $\mathbb{G}_{alg}$ enveloppe pro-algébrique de G relativement à la catégorie $\underline{\text{Rep}}(G)$. On définit de la même façon l'enveloppe pro-algébrique $\mathbb{G}_B$ de G relativement à la catégorie $\underline{\text{Rep}}_B(G)$, qui s'identifie donc à un quotient de $\mathbb{G}_{alg}$.

Par passage à la limite, la proposition 1.2.3 montre que la catégorie $\underline{\text{Rep}}(\mathbb{G}_B)$ des représentations E-linéaires de dimension finie de $\mathbb{G}_B$ s'identifie à la catégorie $\underline{\text{Rep}}_B(G)$.

On voit que le sous-ensemble B_{alg} de toutes les périodes pour toutes les représentations B-admissibles est une sous-F-algèbre de B, stable par G. Si l'on pose $\mathbb{T}_B = \operatorname{Spec} B_{alg}$, le théorème 1.7.3 implique que l'action de G sur B_{alg} est (pro–)algébrique, i.e. provient d'une action de $\mathbb{G}_B$, que l'action à droite de $\mathbb{G}_B$ sur $\mathbb{T}_B$ ainsi définie fait de ce schéma affine un $\mathbb{G}_B$–torseur sur F, qui représente le foncteur des $\otimes$–isomorphismes du foncteur fibre *"oubli de l'action de G"* (ou de $\mathbb{G}_B$ si l'on préfère) sur le foncteur fibre *"restriction de $\underline{D}_B$"* (qui est aussi le foncteur $V \longmapsto (B_{alg} \otimes_E V)^{\mathbb{G}_B}$).

Pour toute représentation B–admissible V, on a bien sûr $\underline{D}_B(V) = \underline{D}_{B_{alg}}(V)$, et B_{alg} est le plus petit anneau jouissant de cette propriété (de façon précise, pour qu'une sous–F–algèbre B' de B, stable par G, soit telle que $\underline{D}_{B'}(V) = \underline{D}_B(V)$, il faut et il suffit que B' contienne B_{alg}).

Enfin, on remarquera, que si V est une représentation E–linéaire de dimension finie de G, V est B–admissible si et seulement s'il existe une application E–linéaire injective G–équivariante de V dans B_{alg} (alors que les anneaux que nous rencontrerons dans la suite fourniront des exemples de situation où une telle application existe sans que V soit pour autant B–admissible) ; lorsque la représentation V est simple, V est B–admissible si et seulement si $\underline{D}_{B_{alg}}(V) \neq 0$.

1.8. — Représentations potentiellement B–admissibles

1.8.1. — Soit B un (E,G)–anneau. On se donne un ensemble non vide $\mathcal{H}$ de sous–groupes de G vérifiant $H_1 \cap H_2 \in \mathcal{H}$ si H_1, $H_2 \in \mathcal{H}$. On pose

$$F = \lim.\mathrm{ind}_{H \in \mathcal{H}} B^H \ ,$$

et on suppose que, pour tout $H \in \mathcal{H}$, B est H–régulier (ce qui implique que F est un corps).

Pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, on pose

$$\underline{D}_B^{\mathcal{H}}(V) = \lim.\mathrm{ind}_{H \in \mathcal{H}} (B \otimes_E V)^H \ ,$$

et on note

$$\alpha_B^{\mathcal{H}}(V) : B \otimes_F \underline{D}_B^{\mathcal{H}}(V) \longrightarrow B \otimes_E V \ ,$$

l'application B–linéaire déduite par extension des scalaires de l'inclusion de $\underline{D}_B^{\mathcal{H}}(V)$ dans $B \otimes_E V$.

1.8.2. — Par passage à la limite, la proposition 1.4.2 implique :

PROPOSITION. — *Avec les hypothèses et notations qui précèdent,*

i) pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, *on a* $\dim_F \underline{D}_B^{\mathcal{H}}(V) \leq \dim_E V$;

ii) si $\dim_F \underline{D}_B^{\mathcal{H}}(V) = \dim_E V$, *l'application* $\alpha_B^{\mathcal{H}}(V)$ *est un isomorphisme.*

1.8.3. — On dit que V est **$(B,\mathcal{H})$–admissible**, ou **potentiellement B–admissible relativement à $\mathcal{H}$**, si $\alpha_B^{\mathcal{H}}(V)$ est un isomorphisme. Par passage à la limite, la proposition 1.5.2 implique :

PROPOSITION. — *La sous–catégorie pleine* $\underline{\mathrm{Rep}}_B^{\mathcal{H}}(G)$ *de* $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ *dont les objets sont ceux qui sont potentiellement B–admissibles relativement à $\mathcal{H}$ est une sous–catégorie tannakienne de* $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ *; la restriction de* $\underline{D}_B^{\mathcal{H}}$ *à cette catégorie est un foncteur fibre.*

1.8.4. — **Remarque** : Conservons les notations et hypothèses qui précèdent; pour tout $H \in \mathcal{H}$, notons B_H l'anneau des fonctions sur G à valeurs dans B qui sont H–équivariantes et posons

$$B_{\mathcal{H}} = \lim.\mathrm{ind}_{H \in \mathcal{H}} B_H \ .$$

On voit que le (E,G)–anneau $B_{\mathcal{H}}$ est G–régulier, que $(B_{\mathcal{H}})^G = F$ et que, pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, $\underline{D}_B^{\mathcal{H}}(V)$ s'identifie à $\underline{D}_{B_{\mathcal{H}}}(V)$; en particulier, V est potentiellement B–admissible relativement à $\mathcal{H}$ si et seulement si V est $B_{\mathcal{H}}$-admissible.

1.8.5. — Nous nous intéresserons particulièrement à cette situation lorsque $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ est le groupe de Galois d'une clôture séparable $\overline{K}$ d'un corps K et lorsque $\mathcal{H}$ est l'ensemble des sous–groupes fermés de G. Nous disons alors **"potentiellement B–admissible"** au lieu de *"potentiellement B–admissible relativement à $\mathcal{H}$"*, et nous écrivons $\underline{D}_B^{pot}$ au lieu de $\underline{D}_B^{\mathcal{H}}$.

Soient L une extension finie de K contenue dans $\overline{K}$, $H = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$ et $F_L = B^H$. Pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, on pose

$$\underline{D}_{B,L}(V) = (B \otimes_E V)^H \ ,$$

et on dit que V **devient B–admissible sur L** si $\dim_{F_L} \underline{D}_{B,L}(V) = \dim_E V$.

Pour que V devienne B–admissible sur L, il faut et il suffit que V soit potentiellement B–admissible et que l'on puisse trouver une base de $\underline{D}_B^{pot}(V)$ sur F formée d'éléments de $(B \otimes V)^H$. On a alors

$$\underline{D}_B^{pot}(V) = F \otimes_{F_L} \underline{D}_{B,L}(V) \quad \text{et} \quad \underline{D}_{B,L}(V) = (\underline{D}_B^{pot}(V))^H \ .$$

En particulier, pour qu'un objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ soit potentiellement B–admissible, il faut et il suffit qu'il existe une extension finie L de K contenue dans $\overline{K}$ sur laquelle V devienne B–admissible. Si V devient B–admissible sur L, V devient a fortiori B–admissible sur toute extension finie de L contenue dans $\overline{K}$, et alors $\underline{D}_{B,L'}(V) = F_{L'} \otimes_{F_L} \underline{D}_{B,L}(V)$.

1.8.6. — Gardons les hypothèses et notations du n° précédent. Soient $L \subset L'$ des extensions finies de K contenues dans $\overline{K}$, $H = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$, $H' = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L')$, $F_L = B^H$ et $F_{L'} = B^{H'}$. Supposons l'extension L'/L galoisienne et soit $J = \mathrm{Gal}(L'/L) = H/H'$. Le groupe fini J opère sur $F_{L'}$, $(F_{L'})^J = F_L$ et $F_{L'}/F_L$ est une extension finie galoisienne de groupe de Galois un quotient $\overline{J}$ de J. Si $J = \overline{J}$, i.e. si J opère fidèlement sur $F_{L'}$, on voit que toute représentation de G qui devient B–admissible sur L' était déjà B–admissible sur L.

En particulier, **si B est une $\overline{K}$–algèbre, et si $F = \overline{K}$, alors toute représentation potentiellement B–admissible est en fait B–admissible.**

1.9. — Structures supplémentaires

1.9.1. — Soit B un (E, G)–anneau G–régulier. Supposons B muni de *“structures algébriques supplémentaires”* (action de certains endomorphismes, donnée d'une filtration, d'une graduation, ...) compatibles avec l'action de G.

Alors, pour tout objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$, $\underline{D}_B(V)$ *“hérite”* de ces structures supplémentaires. On peut alors considérer $\underline{D}_B$ comme un foncteur de $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$ dans une certaine catégorie de F–espaces vectoriels équippés de structures supplémentaires.

Nous verrons dans la suite de nombreux exemples de cette situation. En particulier, dans certains cas le foncteur obtenu sera pleinement fidèle et l'on pourra *"reconstituer"* la représentation V à partir de la seule connaissance de $\underline{D}_B(V)$ (muni des structures en question).

1.9.2. — Revenons à la situation envisagée dans le n° 1.8.5. On voit que G agit, de manière discrète, sur F et que, pour toute représentation V de G, le F–espace vectoriel $\underline{D}_B^{pot}(V)$ **est muni d'une action semi–linéaire et discrète de** G. Il y a alors lieu d'ajouter aux structures sur $\underline{D}_B^{pot}(V)$ *"héritées"* de B cette action de G.

2. — Exemples

2.1. — Autour du théorème $H^1(G, \mathbb{GL}_n(\overline{K})) = 1$: la clôture séparable d'un corps

2.1.1. — Soient K un corps, $\overline{K}$ une clôture séparable de K et $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Si E est un sous–corps de K, $\overline{K}$ est un (E, G)–anneau G régulier (prop. 1.6.1), le corps $F = \overline{K}^G$ n'est autre que K et les représentations E–linéaires B–admissibles ne sont autre que les représentations de dimension finie discrètes, i.e. les représentations qui sont continues lorsque l'on munit G de la topologie de Krull et E de la topologie discrète. En outre $\overline{K}_{alg} = \overline{K}$.

2.1.2. — Dans la suite du n° 2.1, on suppose que K est de caractéristique $p > 0$ et E est un corps fini ayant $q = p^f$ éléments.

Notons σ le Frobenius agissant sur K (via $x \longmapsto x^q$). Soit $\underline{\Phi M}_{K,\sigma}^{\acute{e}t}$ la catégorie suivante :

– les objets sont les K–espaces vectoriels D de dimension finie munis d'un Frobenius, i.e. d'une application

$$\varphi : D \longrightarrow D$$

σ–semi–linéaire, injective;

– les morphismes sont les applications K–linéaires qui commutent à l'action de φ.

C'est une catégorie abélienne E–linéaire.

2.1.3. — Le Frobenius σ sur K se prolonge de manière unique en un automorphisme φ de $\overline{K}$ et l'action de φ commute à celle de G. Ceci nous permet de considérer $\underline{D}_{\overline{K}}$ comme un foncteur de la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_E(G)$ des représentations E–linéaires discrètes et de dimension finie de G dans $\underline{\Phi M}^{ét}_{K,\sigma}$. Il est classique et facile à voir que $\underline{D}_{\overline{K}}$ induit une équivalence entre ces deux catégories (cf. par exemple, [Fo91], prop. 1.2.6), un foncteur quasi–inverse étant obtenu en associant à tout objet D de $\underline{\Phi M}^{ét}_{K,\sigma}$ la représentation $\underline{V}_{\overline{K}}(D) = (\overline{K} \otimes_K D)_{\varphi=1}$.

2.1.4. — La catégorie $\underline{\Phi M}^{ét}_{K,\sigma}$ est de manière naturelle une catégorie tannakienne (le produit tensoriel $D_1 \otimes D_2$ de deux objets est le produit tensoriel des K–espaces vectoriels sous–jacents, avec $\varphi(d_1 \otimes d_2) = \varphi d_1 \otimes \varphi d_2$) et $\underline{D}_{\overline{K}}$ est une $\otimes$–équivalence.

2.2. — Un exemple stupide : l'anneau des fonctions sur G

2.2.1. — Supposons que G soit un groupe topologique, E un corps topologique et $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ la catégorie des représentations E–linéaires continues de dimension finie de G.

Soit $B = \mathcal{F}_{con}(G, E)$ l'anneau des fonctions continues sur G à valeurs dans E. Le groupe G opère sur B (on a $(gf)(h) = f(g^{-1}h)$ si $f \in B$, g, $h \in G$) et B est un (E, G)–anneau G–régulier (prop. 1.6.3). On a $B^G = E$ et tous les objets de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ sont B–admissibles. L'anneau B_{alg} est le sous–anneau de B formé des fonctions f telles que le sous–E–espace vectoriel de B engendré par les gf, pour $g \in G$, est de dimension finie.

C'est un exemple stupide parce que le foncteur $\underline{D}_B$ est naturellement isomorphe à l'identité : soit $\varepsilon : B \longrightarrow E$ l'application qui envoie f sur $f(1)$. Pour toute représentation V de G, le composé de $\varepsilon \otimes id_V$ avec l'inclusion de $\underline{D}_B(V)$ dans $B \otimes V$ est une application E–linéaire

$$\varepsilon_V : \underline{D}_B(V) \longrightarrow V \ ,$$

qui est un isomorphisme, fonctoriel en V et compatible avec le produit tensoriel.

2.2.2. — C'est encore plus stupide si l'on remarque que l'on dispose d'une autre action de G sur B : à tout $f \in B$ et tout $g \in G$, on peut associer la fonction $g \times_d f$ définie par $(g \times_d f)(h) = f(hg)$. Cette action commute à l'action de G donnée initialement, ce qui fait que pour toute représentation V de G, G opère de façon naturelle sur $\underline{D}_B(V) = (B \otimes V)^G$ (on a $g \times_d (\Sigma b_i \otimes v_i) = \Sigma(g \times_d b_i) \otimes v_i$). On voit qu'alors, pour toute représentation V, ε_V commute à l'action de G.

2.2.3. — Remarque : Soit $\mathbb{G}_{alg}$ l'enveloppe pro–algébrique de l'image de G relativement à $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ (cf. n° 1.2.5). On voit que B_{alg} s'identifie à l'algèbre affine de $\mathbb{G}_{alg}$ (sur laquelle G opère via l'homomorphisme naturel de G dans $\mathbb{G}_{alg}(E)$).

2.3. — Représentations unipotentes d'un groupe cyclique

2.3.1. — Supposons que G soit cyclique d'ordre infini, E de caractéristique 0 et que $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ soit la catégorie de toutes les représentations linéaires de dimension finie de G. Choisissons un générateur h de G. Soit $B = E[X]$ l'anneau des polynômes en l'indéterminée X à coefficients dans E. Munissons la E–algèbre B de l'unique structure de (E, G)–anneau pour laquelle $h(X) = X + 1$. Alors B est G–régulier (cf. cor. 1.6.6) et $B^G = E$. La sous–catégorie tannakienne $\underline{\mathrm{Rep}}_B(G)$ des représentations B–admissibles est la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_u(G)$ des représentations unipotentes de G et on a $B_{alg} = B$. L'enveloppe pro–algébrique de l'image de G dans la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_u(G)$ s'identifie au groupe additif $\mathbb{G}_a$ sur E et B à son algèbre affine.

2.3.2. — Notons $\underline{Nil}(E)$ la catégorie des E–espaces vectoriels de dimension finie munie d'un endomorphisme N **nilpotent**. C'est de manière évident une catégorie tannakienne (le produit tensoriel de deux objets D_1 et D_2 est le produit tensoriel des espaces vectoriels sous–jacents, avec $N(d_1 \otimes d_2) = d_1 \otimes Nd_2 + d_2 \otimes Nd_1$).

Si l'on désigne aussi par N l'unique E–dérivation de B telle que $N(X) = 1$, N commute à l'action de G, ce qui fait que, pour toute représentation V de G, $\underline{D}_B(V)$ devient un objet de $\underline{Nil}(E)$.

On voit que $\underline{D}_B$ induit une $\otimes$–équivalence entre la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_u(G) = \underline{\mathrm{Rep}}(\mathbb{G}_a)$ et la catégorie $\underline{Nil}(E)$. Un quasi–inverse s'obtient en associant à tout objet D de $\underline{Nil}(E)$ la représentation

$$\underline{V}(D) = (B \otimes_E D)_{N=0} \ .$$

2.3.3. — Pour tout sous-groupe H de G, B est H-régulier, ce qui nous permet de parler de la sous-catégorie tannakienne $\underline{\mathrm{Rep}}_B^{pot}(G) = \underline{\mathrm{Rep}}_B^{\mathcal{H}}(G)$ de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ formée des représentations potentiellement B-admissibles (relativement à l'ensemble $\mathcal{H}$ de tous les sous-groupes de G) : c'est la catégorie des représentations potentiellement unipotentes, i.e. des représentations pour lesquelles il existe un entier $m > 0$ tel que l'action de h^m est unipotente.

Pour toute représentation V de G, $\underline{D}_B^{pot}(G) = \underline{D}_B^{\mathcal{H}}(G)$ est, de manière naturelle, un objet de la catégorie tannakienne $\underline{Nil}(E,G)$ des E-espaces vectoriels de dimension finie munis d'un endomorphisme nilpotent et d'une action finie de G commutant avec N. Le foncteur $\underline{D}_B^{pot}$ induit une $\otimes$-équivalence entre la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_B^{pot}(G)$ des représentations de G potentiellement unipotentes et $\underline{Nil}(E,G)$.

3. — Représentations de Hodge–Tate et de de Rham

Dans toute la suite de cet exposé, K est un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, à corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$. On note $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et on pose $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

On note $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathbb{Q}_p}(G)$ ou $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ la catégorie des **représentations p-adiques de G**, i.e. des représentations $\mathbb{Q}_p$-linéaires de G de dimension finie qui sont continues pour la topologie p-adique.

3.1. — Rappelons (n° 2.1) que $\overline{K}$ est un $(\mathbb{Q}_p, G)$-anneau G-régulier et que **les représentations p-adiques $\overline{K}$-admissibles sont les représentations p-adiques discrètes**, i.e. celles sur lesquelles G opère à travers le groupe de Galois d'une extension finie galoisienne de K contenue dans $\overline{K}$ (et, comme on l'a vu au n° 1.8.6, les représentations p-adiques potentiellement $\overline{K}$-admissibles sont déjà $\overline{K}$-admissibles).

3.2. — Soit C le complété de $\overline{K}$ pour la topologie p-adique. C'est encore un $(\mathbb{Q}_p, G)$-anneau qui est G-régulier puisque c'est un corps. Comme

C contient $\overline{K}$, les représentations potentiellement C–admissibles sont déjà C–admissibles.

Le résultat suivant avait été conjecturé par Serre [Se67] et a été démontré par Sen ([Sen73], voir aussi [Sen80]) :

PROPOSITION. — *Pour qu'une représentation p-adique soit C-admissible, il faut et il suffit que l'image de l'inertie soit finie.*

3.3. — **Remarques** : *i*) Soient P le complété de l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans $\overline{K}$ et $\overline{P}$ la fermeture algébrique de P dans C. On voit qu'une représentation p–adique V est C–admissible si et seulement si elle est $\overline{P}$–admissible (et alors $\underline{D}_C(V) = \underline{D}_{\overline{P}}(V)$; avec les notations du nº 1.7.6, $C_{alg} \subset \overline{P}$) ou encore si et seulement si elle est potentiellement P–admissible ; en outre V est P–admissible si et seulement si elle est non ramifiée.

ii) En fait, le résultat de Sen est plus général : on peut, dans l'énoncé de la proposition, remplacer le corps des coefficients $E = \mathbb{Q}_p$ par n'importe quel sous–corps fermé de K.

En particulier, lorsque le corps résiduel de K est algébriquement clos, si l'on applique ce résultat aux K–représentations de dimension 1, on trouve que tout sous–K–espace vectoriel de dimension 1 de C stable par G_K est contenu dans $\overline{K}$.

3.4. — Soient $\underline{Grad}_K$ la catégorie des K–espaces vectoriels munis d'une graduation indexée par $\mathbb{Z}$ et $\underline{Fil}_K$ la catégorie des K–espaces vectoriels munis d'une filtration décroissante, exhaustive et séparée, indexée par $\mathbb{Z}$.

La première est abélienne et la seconde n'est qu'additive, mais certains de ses morphismes sont plus gentils que d'autres, à savoir ceux qui sont strictement compatibles aux filtrations (i.e. les morphismes $f : D_1 \longrightarrow D_2$ tels que $f(Fil^i D_1) = f(D_1) \cap Fil^i D_2$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$). **Une suite de morphismes dans** $\underline{Fil}_K$ est dite **exacte** si la suite d'applications K–linéaires sous–jacentes est exacte et si chaque morphisme est strictement compatible aux filtrations.

Sur ces deux catégories, on a des notions de produit tensoriel et de dual, qui vérifient toutes les bonnes propriétés que l'on peut imaginer. Enfin, on dispose d'un foncteur additif évident

$$\underline{gr}_K : \underline{Fil}_K \longrightarrow \underline{Grad}_K ,$$

qui est K-linéaire, exact et fidèle, et *"commute"* aux produits tensoriels et au dual.

3.5. — On renvoie à [Exp. II], n° 2.5 pour la définition du corps B_{dR} et de l'anneau B_{HT}. Rappelons (*loc. cit.*) que $(B_{dR})^G = (B_{HT})^G = K$ et que, plus généralement, pour tout sous-groupe ouvert H de G, $(B_{dR})^H = (B_{HT})^H = \overline{K}^H$.

3.6. Proposition. — *Les $(\mathbb{Q}_p, G)$-anneaux B_{dR} et B_{HT} sont G-réguliers.*

Preuve : C'est clair pour B_{dR} puisque c'est un corps (prop. 1.6.1).

Soit t un élément non nul de $\mathbb{Q}_p(1)$; alors $B_{HT} = C[t, t^{-1}]$ est un sous-anneau du corps $\widehat{B}_{HT} = C((t))$. Comme $\widehat{B}_{HT}$ est G-régulier et comme $(\widehat{B}_{HT})^G = (B_{HT})^G = K$, il suffit (prop. 1.6.5) de vérifier la condition $(G.R_3)$, i.e. que, si b est un élément non nul de B_{HT} et $\eta : G \longrightarrow \mathbb{Q}_p^*$ est un caractère tel que $gb = \eta(g) \cdot b$, pour tout $g \in G$, alors b est inversible dans B_{HT}. Si

$$b = \Sigma b_i t^i, \quad \text{avec les } b_i \in C ,$$

et si χ désigne le caractère cyclotomique, on doit avoir

$$gb_i = (\eta\chi^{-i})(g) \cdot b_i, \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z} \text{ et tout } g \in G ,$$

ce qui implique, d'après la proposition 3.2, que, pour tout i tel que $b_i \neq 0$, la restriction de $\eta\chi^{-i}$ au groupe d'inertie doit être d'ordre fini ; on en déduit qu'il existe un et un seul i tel que $b_i \neq 0$, et b est bien inversible.

3.7. — Pour toute représentation p-adique V, on pose

$$\underline{D}_{HT}(V) = \underline{D}_{B_{HT}}(V) = (B_{HT} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G \text{ et } \underline{D}_{dR}(V) = \underline{D}_{B_{dR}}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G.$$

On obtient ainsi des foncteurs additifs (et même $\mathbb{Q}_p$-linéaires)

$$\underline{D}_{HT} : \underline{\mathrm{Rep}}(G) \longrightarrow \underline{Grad}_K \quad \text{et} \quad \underline{D}_{dR} : \underline{\mathrm{Rep}}(G) \longrightarrow \underline{Fil}_K ,$$

et l'égalité $\underline{gr}_K(B_{dR}) = B_{HT}$ induit une inclusion naturelle

$$\underline{gr}_K(\underline{D}_{dR}(V)) \hookrightarrow \underline{D}_{HT}(V) .$$

On dit que V **est de de Rham** (resp. **de Hodge–Tate**) si V est B_{dR}-admissible (resp. B_{HT}-adimissible). On note $\underline{\mathrm{Rep}}_{HT}(G)$ (resp. $\underline{\mathrm{Rep}}_{dR}(V)$) la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dont les objets sont les représentations de Hodge–Tate (resp. de de Rham).

3.8. — Compte-tenu du théorème 1.5.2, le résultat suivant est alors immédiat (voir aussi [Fo82a], § 1 et 3) :

THÉORÈME. — *i) Si V est une représentations de de Rham, alors V est de Hodge–Tate ; l'isomorphisme $B_{dR} \otimes_K \underline{D}_{dR}(V) \longrightarrow B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ est strictement compatible aux filtrations (i.e., pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'image de $Fil^i(B_{dR} \otimes_K \underline{D}_{dR}(V))$ est $(Fil^i B_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$) et $\underline{D}_{HT}(V)$ s'identifie à $\underline{gr}_K(\underline{D}_{dR}(V))$.*

ii) La catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{HT}(G)$ (resp. $\underline{\mathrm{Rep}}_{dR}(G)$) est une sous-catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ et la restriction de $\underline{D}_{HT}$ (resp. $\underline{D}_{dR}$) à cette catégorie est une $\otimes$-foncteur exact et fidèle.

La dernière assertion signifie en particulier que :

i) si V_1 et V_2 sont de de Rham, $V_1 \otimes V_2$ l'est aussi et l'isomorphisme de K-espaces vectoriels $\underline{D}_{dR}(V_1) \otimes_K \underline{D}_{dR}(V_2) \longrightarrow \underline{D}_{dR}(V_1 \otimes V_2)$ est strictement compatible aux filtrations;

ii) si V est de de Rham, la représentation duale V^* l'est aussi et $\underline{D}_{dR}(V^*)$ s'identifie, en tant que K-espace vectoriel filtré, au dual de $\underline{D}_{dR}(V)$;

iii) si

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de représentations p-adiques et si V est de de Rham, V' et V'' le sont aussi et, dans la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \underline{D}_{dR}(V') \longrightarrow \underline{D}_{dR}(V) \longrightarrow \underline{D}_{dR}(V'') \longrightarrow 0 ,$$

les morphismes sont strictement compatibles aux filtrations.

3.9. — Remarques

i) Le fait que B_{HT} est G–régulier peut se voir directement : la condition $(G \cdot R_1)$ (B_{HT} est réduit) est claire ; la condition $(G \cdot R_2)$ (injectivité de $\alpha_B(V)$) se démontre (cf. [Se67], § 2) comme dans le cas où l'anneau B est un corps (n° 1.6.2) ; pour $(G \cdot R_3)$, on voit, comme au n° 3.6, que l'on est ramené à vérifier que l'image de l'inertie est finie dans toute représentation C–admissible **de dimension** 1, ce qui est plus facile que le cas général (cf. [Sen73] et [Sen80]).

ii) Comme B_{HT} et B_{dR} sont des $\overline{K}$–algèbres, toute représentation qui est potentiellement de Hodge–Tate (resp. de de Rham) est de Hodge–Tate (resp. de de Rham).

iii) Il existe des représentations qui sont de Hodge–Tate sans être de de Rham. La différence entre ces deux types de représentations est bien comprise dans le cas “ordinaire” : voir [Exp.IV].

iv) Une représentation p–adique V de dimension 1 est de Hodge–Tate si et seulement si elle est de de Rham, ou encore si et seulement s'il existe $i \in \mathbb{Z}$ et un sous–groupe ouvert J du groupe d'inertie tel que tout $g \in J$ opère sur V par multiplication par $\chi^i(g)$.

v) Avec les notations utilisées ci–dessus, on voit qu'une représentation p–adique V est $\widehat{B}_{HT}$–admissible si et seulement si elle est de Hodge–Tate, i.e. que $(\widehat{B}_{HT})_{alg} = (B_{HT})_{alg}$. On voit aussi qu'il existe un sous–anneau C_{HT} de C tel que $(B_{HT})_{alg} = C_{HT}[t, t^{-1}]$; on prendra garde que l'inclusion $C_{HT} \supset C_{alg}$ est stricte (i.e., il existe des représentations de Hodge–Tate qui en sont pas isomorphes à des sommes directes de tordues par des puissances du caractère cyclotomique de représentations C–admissibles).

4. — Les (φ, N, G_K)–modules filtrés

4.1. — Les (E, Γ)–modules

4.1.1. — Soient E un anneau commutatif et Γ un groupe (noté multiplicativement) opérant sur E (de façon compatible avec la structure d'anneau).

On appelle (E,Γ)–**module** la donnée d'un E–module M muni d'une action semi–linéaire de Γ. Autrement dit, notons $E[\Gamma]$ la E–algèbre qui est le E–module libre de base les γ, pour $\gamma \in \Gamma$, la multiplication étant définie par

$$(\Sigma a_\gamma \gamma) \cdot (\Sigma b_\gamma \gamma) = \Sigma(\Sigma_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} a_{\gamma_1}\gamma_1(b_{\gamma_2})) \cdot \gamma \ .$$

Alors un (E,Γ)–module n'est rien d'autre qu'un $E[\Gamma]$–module à gauche et ces modules forment une catégorie abélienne (lorsque Γ opère trivialement sur E, celle–ci n'est autre que celle des représentations E–linéaires de Γ).

4.1.2. — Dans cette catégorie, on a des notions de **produit tensoriel** et de **hom interne** (qui, en général, dépendent vraiment du couple (E,Γ), et pas seulement de l'anneau $E[\Gamma]$) : soient M et N deux (E,Γ)–modules,

i) le E–module sous–jacent au produit tensoriel $M \otimes N$ est le produit tensoriel des E–modules sous–jacents, l'action de Γ étant donnée par

$$\gamma(d \otimes d') = \gamma d \otimes \gamma d', \quad \text{si} \quad \gamma \in \Gamma,\ d \in M,\ d' \in N \ .$$

ii) le E–module sous–jacent à $\underline{\mathrm{Hom}}(M,N)$ est celui des applications E–linéaires de M dans N, l'action de Γ étant donnée par

$$(\gamma\eta)(d) = \gamma(\eta(\gamma^{-1}(d))), \quad \text{si} \quad \gamma \in \Gamma,\ \eta \in \underline{\mathrm{Hom}}(M,N),\ d \in M \ .$$

4.1.3. — Le produit tensoriel et le hom interne satisfont les propriétés "usuelles". En particulier, E, muni de l'action structurale de Γ, est un **objet–unité** (i.e., pour tout (E,Γ)–module M, $M \otimes E \simeq E \otimes M \simeq M$); en outre, si $M^* = \underline{\mathrm{Hom}}(M,E)$ est le **contragrédient** ou **dual** de M, alors $\underline{\mathrm{Hom}}(M,N) = M^* \otimes N$.

4.1.4. — Lorsque E est un corps, on note $\underline{\mathrm{Rep}}_E(\Gamma)$ la catégorie des (E,Γ)–modules dont le E–espace vectoriel sous–jacent est de dimension finie. C'est une catégorie tannakienne E^Γ–linéaire, qui n'est pas neutre en général.

4.2. — Les (φ, N, G_K)–modules

On note K_0 le corps des fractions des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps résiduel k de K. On se donne une extension galoisienne (pas nécessairement finie) L de K contenue dans $\overline{K}$; on note k_L son corps résiduel, L_0 l'extension maximale non ramifiée de K_0 contenue dans L et σ le Frobenius absolu sur L_0 (i.e. l'unique automorphisme continu induisant $x \longmapsto x^p$ sur k_L) ; on pose $G_{L/K} = \mathrm{Gal}(L/K)$ et $G_L = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$.

4.2.1. — On appelle $(\varphi, N, G_{L/K})$**–module** la donnée d'un L_0–espace vectoriel D muni

i) d'une application injective, σ–semi–linéaire

$$\varphi : D \longrightarrow D ,$$

ii) d'un endomorphisme L_0–linéaire

$$N : D \longrightarrow D ,$$

iii) d'une action semi–linéaire de $G_{L/K}$.

On impose entre ces données les relations de compatibilité suivantes :

a) on a $N\varphi = p\varphi N$;

b) pour tout $g \in G_{L/K}$, on a $g\varphi = \varphi g$ et $gN = Ng$.

Les $(\varphi, N, G_{L/K})$–modules forment, de manière évidente, une catégorie $\mathbb{Q}_p$–linéaire.

4.2.2. — On appelle **dimension** d'un $(\varphi, N, G_{L/K})$–module la dimension du L_0–espace vectoriel sous–jacent.

On dit qu'un $(\varphi, N, G_{L/K})$–module est **discret** si l'action de $G_{L/K}$ est discrète (i.e., si, pour tout $d \in D$, $\{g \in G_{L/K} \mid gd = d\}$ est ouvert dans $G_{L/K}$).

On note $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_{L/K})$ la sous–catégorie pleine de la catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$–modules dont les objets sont les modules discrets de dimension finie. On voit que c'est une catégorie abélienne $\mathbb{Q}_p$–linéaire.

Si D est un objet de cette catégorie, la finitude de la dimension de D sur L_0 et la relation $N\varphi = p\varphi N$ impliquent que **l'action de N sur D est nilpotente**.

4.2.3. — **Remarque** : Soient Γ_0 le groupe engendré par deux éléments φ et U avec la relation $U\varphi = \varphi U^p$ et $\Gamma_{L/K}$ le produit direct $\Gamma_0 \times G_{L/K}$; celui–ci opère sur L_0 (si $r, s \in \mathbb{Z}$, $g \in G_{L/K}$ et $\lambda \in L_0$, on a $(U^r\varphi^s, g)(\lambda) = \sigma^s(g\lambda)$).

On voit, avec les notations du n° 4.1.4, qu'en posant $U = \exp(N)$, on peut identifier la catégorie $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_{L/K})$ à la sous–catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}_{L_0}(\Gamma_{L/K})$ dont les objets sont ceux sur lesquels l'action de U est unipotente et celle de $G_{L/K}$ est discrète.

4.2.4. — La catégorie $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_{L/K})$ est une sous–**catégorie tannakienne** de $\underline{\mathrm{Rep}}_{L_0}(\Gamma_{L/K})$. Concrètement, L_0, sur lequel φ opère comme σ, N comme O et $G_{L/K}$ de façon naturelle est un objet–unité; si D_1 et D_2 sont deux $(\varphi, N, G_{L/K})$–modules discrets, le L_0–espace vectoriel sous–jacent à $D_1 \otimes D_2$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}(D_1, D_2)$) est $D_1 \otimes_{L_0} D_2$ (resp. $\mathcal{L}_{L_0}(D_1, D_2)$) et, si $d_1 \in D_1$, $d_2 \in D_2$, $g \in G_{L/K}$, $\eta \in \mathcal{L}_{L_0}(D_1, D_2)$, alors

$$\varphi(d_1 \otimes d_2) = \varphi d_1 \otimes \varphi d_2,\ N(d_1 \otimes d_2) = N d_1 \otimes d_2 + d_1 \otimes N d_2,\ g(d_1 \otimes d_2) = g d_1 \otimes g d_2,$$

tandis que

$$(\varphi\eta)(d_1) = \varphi(\eta(\varphi^{-1}(d_1))), (N\eta)(d_1) = N(\eta(d_1)) - \eta(N d_1), (g\eta)(d_1) = g(\eta(g^{-1}(d_1))).$$

4.2.5. — Soient L' une extension galoisienne de K contenant L, $G_{L'/L} = \mathrm{Gal}(L'/L)$ et $I_{L'/L}$ le groupe d'inertie.

Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$–module discret, $D' = L'_0 \otimes_{L_0} D$ a une structure naturelle de $(\varphi, N, G_{L'/K})$–module discret : avec des notations évidentes, on a

$$\varphi(\lambda \otimes d) = \sigma\lambda \otimes \varphi d,\ N(\lambda \otimes d) = \lambda \otimes N d,\ g(\lambda \otimes d) = g\lambda \otimes g d\ .$$

On voit que $D \longmapsto D'$ définit un $\otimes$–foncteur de $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_{L/K})$ dans $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_{L'/K})$. On vérifie facilement que ce foncteur est pleinement fidèle et induit une $\otimes$–équivalence entre $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_{L/K})$ et son image essentielle; et que cette dernière s'identifie à la sous–catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_{L'/K})$ formée des D' sur lesquels $I_{L'/L}$ opère trivialement (un quasi–inverse est donné par $D' \longmapsto (D')^{G_{L'/L}}$).

En particulier, si L'/L est non ramifiée, le foncteur $D \longmapsto D'$ est une $\otimes$–équivalence.

4.2.6. — Lorsque $L = K$, on a $G_{L/K} = 1$, il n'y a pas d'action de Galois, et on dit "(φ, N)–**module relatif à** K" (ou même "(φ, N)–module") au lieu de "$(\varphi, N, G_{L/K})$-module"; on remarque que cette notion ne dépend que de k (et non de K).

On s'intéresse particulièrement aux (φ, N, G_K)-modules, i.e. au cas où $L = \overline{K}$. Soit I_L le groupe d'inertie de l'extension $\overline{K}/L$. Un (φ, N, G_K)-**module semi-stable sur** L est un (φ, N, G_K)-module discret sur lequel I_L opère trivialement[2]. Le foncteur $D \longmapsto D^{G_L}$ induit une $\otimes$-équivalence entre la catégorie des (φ, N, G_K)-modules semi-stables sur L et celle des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules discrets.

Comme l'action du groupe d'inertie I_K sur un (φ, N, G_K)-module discret D de dimension finie, est discrète et linéaire, elle se factorise à travers un quotient fini; on en déduit qu'il existe une extension finie galoisienne L de K contenue dans $\overline{K}$ sur laquelle D est semi-stable. Autrement dit, en un sens naturel, la catégorie $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_K)$ s'identifie à la limite inductive des $\underline{\mathrm{Mod}}(\varphi, N, G_{L/K})$, pour L parcourant les extensions finies galoisiennes de K contenues dans $\overline{K}$.

4.2.7. — **Un** $(\varphi, G_{L/K})$-**module discret** est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module discret sur lequel $N = 0$; les $(\varphi, G_{L/K})$-modules discrets de dimension finie forment une sous-catégorie tannakienne de celle des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules discrets de dimension finie. Lorsque $L = K$, on parle de φ-**module relatif à** K (ou tout simplement de φ-module). On dit qu'un (φ, G_K)-module discret **a bonne réduction sur** L s'il est semi-stable sur L (et on a donc une $\otimes$-équivalence entre (φ, G_K)-modules discrets de dimension finie ayant bonne réduction sur L et $(\varphi, G_{L/K})$-modules discrets de dimension finie).

4.3. — Modules filtrés

On conserve les notations du n° précédent.

4.3.1. — Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module, l'action de N (resp. $G_{L/K}$) se prolonge par linéarité (resp. semi-linéarité) à $D_L = L \otimes_{L_0} D$. On note D_K le sous-K-espace vectoriel de D_L formé des éléments fixes par $G_{L/K}$ (qui est

[2] cette notion garde un sens lorsque l'on ne suppose plus l'extension L de K contenue dans $\overline{K}$ galoisienne.

donc muni d'une action naturelle de N).

Il résulte du théorème 90 de Hilbert que l'application naturelle de $L \otimes_K D_K$ dans D_L est toujours injective et est bijective si et seulement si l'action de $G_{L/K}$ sur D est discrète (ce qui est bien sûr le cas si L/K est finie).

4.3.2. — Nous appelons $(\varphi, N, G_{L/K})$-**module filtré** la donnée d'un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module D et d'une filtration $(Fil^i D_L)_{i \in \mathbb{Z}}$, indexée par $\mathbb{Z}$, de D_L par des sous-L-espaces vectoriels stables par $G_{L/K}$, décroissante ($Fil^{i+1} D_L \subset Fil^i D_L$), exhaustive ($\cup Fil^i D_L = D_L$) et séparée ($\cap Fil^i D_L = 0$).

Cette filtration en induit une autre, $(Fil^i D_K)_{i \in \mathbb{Z}}$, sur D_K. Lorsque l'action de $G_{L/K}$ est discrète, on a $Fil^i D_L = L \otimes_K Fil^i D_K$; autrement dit, la donnée d'une filtration stable par $G_{L/K}$ sur D_L équivaut à la donnée d'une filtration sur D_K.

4.3.3. — Les $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules filtrés forment une catégorie : un morphisme

$$\eta : D_1 \longrightarrow D_2$$

est un morphisme des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules sous-jacents tel que, si l'on note

$$\eta_L : D_{1,L} \longrightarrow D_{2,L}$$

l'application L-linéaire déduite de η par extension des scalaires de L_0 à L, alors $\eta_L(Fil^i D_{1,L}) \subset Fil^i D_{2,L}$.

On note $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ la catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$-**modules filtrés discrets de dimension finie** (i.e. la sous-catégorie pleine de la précédente dont les objets sont ceux dont le $(\varphi, N, G_{L/K})$-module sous-jacent est discret de dimension finie).

Cette catégorie est additive et même $\mathbb{Q}_p$-linéaire, mais n'est pas abélienne. Elle a des noyaux et des conoyaux : le $(\varphi, N, G_{L/K})$-module sous-jacent au noyau (resp. conoyau) de η est le noyau D' (resp. le conoyau D'') du morphisme des $(\varphi, N, G_{L/K})$-modules sous-jacents ; en particulier D'_L (resp. D''_L) est le noyau (resp. conoyau) de η_L et la filtration sur D'_L (resp. D''_L) est la filtration induite par celle de $D_{1,L}$ (resp. $D_{2,L}$). On voit que $Coim\, \eta \to \operatorname{Im} \eta$ est un isomorphisme si et seulement si η_L est strictement compatible aux filtrations, i.e. si

$$\eta(Fil^i D_{1,L}) = \eta(D_{1,L}) \cap Fil^i D_{2,L}, \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z} \ .$$

En particulier, on a des notions naturelles de **suite exacte courte**, de **sous–objet** et de **quotient**. Si D est un objet de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$, si D' est un sous–objet de D dans la catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$–modules et si $D'' = D/D'$, alors D' et D'' ont une structure naturelle de $(\varphi, N, G_{L/K})$–modules filtrés : le L–espace vectoriel $D'_L = L \otimes_{L_0} D'$ (resp. $D''_L = L \otimes_{L_0} D''$) s'identifie à un sous–$L$–espace vectoriel (resp. un quotient) de D_L et on le munit de la filtration induite par celle de D_L. La suite

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0$$

est exacte (i.e. D' est un noyau de $D \to D''$ et D'' un conoyau de $D' \to D$). Toute suite exacte courte est "isomorphe" à une suite de ce type.

4.3.4. — La catégorie $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ est munie d'un **produit tensoriel** et d'un **hom interne** : si D et D' sont deux objets de cette catégorie, le $(\varphi, N, G_{L/K})$–module sous–jacent à $D \otimes D'$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}(D, D')$) est le produit tensoriel (resp. le hom interne) des $(\varphi, N, G_{L/K})$–modules sous–jacents; on a, bien sûr, $(D \otimes D')_L = D_L \otimes_L D'_L$ (resp. $(\underline{\mathrm{Hom}}(D, D'))_L = \mathcal{L}_L(D_L, D'_L)$) et

$$Fil^i(D \otimes D')_L = \sum_{j+j'=i} Fil^j D_L \otimes Fil^{j'} D'_L,$$

$$Fil^i(\underline{\mathrm{Hom}}(D, D'))_L = \{\eta : D_L \longrightarrow D'_L \mid \eta(Fil^j D_L) \subset Fil^{i+j} D'_L, \ \forall j \in \mathbb{Z}\}.$$

Ces notions vérifient les propriétés *"usuelles"* (se méfier cependant que l'on n'est pas dans une catégorie abélienne). En particulier L_0, vu comme un objet–unité dans la catégorie des $(\varphi, N, G_{L/K})$–modules, porte une structure d'objet–unité dans $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$: il suffit de définir la filtration sur $L \otimes_{L_0} L_0 = L$ par

$$Fil^i L = \begin{cases} L & \text{si} \quad i \leq 0, \\ 0 & \text{si} \quad i > 0. \end{cases}$$

On peut également définir le **contragrédient** ou **dual** d'un $(\varphi, N, G_{L/K})$–module filtré D comme étant $D^* = \underline{\mathrm{Hom}}(D, L_0)$.

4.4. — Modules filtrés faiblement admissibles

4.4.1. — Soit D un objet de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ de dimension 1 :

i) si v est la valuation de L_0 normalisée par $v(p) = 1$, si d est un élément non nul de D et si $\varphi d = \lambda d$, alors $v(\lambda)$ est indépendant du choix de d; on le note $t_N(D)$;

ii) on note $t_H(D)$ le plus grand $i \in \mathbb{Z}$ tel que $Fil^i D_L \neq 0$.

Soit D un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré discret de dimension finie. Si $r = \dim D$, $\Lambda^r D$ est un facteur direct de la puissance tensorielle r-ième de D et a donc une structure naturelle d'objet de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$. On pose

$$t_N(D) = t_N(\Lambda^r D) \quad \text{et} \quad t_H(D) = t_H(\Lambda^r D).$$

Bien sûr, le premier entier ne dépend que de l'action de φ sur D tandis que le second ne dépend que de la filtration sur D_K.

Si, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, on note D_α la partie de D de pente α pour l'action de φ (cf., par exemple, [Be75], p. 316), on a

$$t_N(D) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} (\dim_{L_0} D_\alpha) \cdot \alpha$$

tandis que

$$t_H(D) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (\dim_K gr^i D_K) \cdot i\ .$$

Il en résulte que t_N et t_H sont additives, i.e. si

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$, on a

$$t_N(D) = t_N(D') + t_N(D'') \quad \text{et} \quad t_H(D) = t_H(D') + t_H(D'')\ .$$

4.4.2. Proposition. — *Soit D un objet de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) on a $t_H(D) = t_N(D)$ *et, pour tout sous-objet* D' *de* D*,* $t_H(D') \leq t_N(D')$ *;*

ii) on a $t_H(D) = t_N(D)$ *et, pour tout quotient* D'' *de* D*,* $t_H(D'') \geq t_N(D'')$.

Preuve : Cela résulte immédiatement de ce que t_H et t_N sont additives.

4.4.3. DEFINITION. — *Un* $(\varphi, N, G_{L/K})$*-module filtré faiblement admissible est un* $(\varphi, N, G_{L/K})$*-module filtré discret de dimension finie qui vérifie les conditions équivalentes de la proposition précédente. Nous notons* $\underline{MF}^f_{L/K}(\varphi, N)$ *la sous-catégorie pleine de la catégorie de* $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ *dont les objets sont ceux qui sont faiblement admissibles.*

4.4.4. PROPOSITION. — *La catégorie* $\underline{MF}^f_{L/K}(\varphi, N)$ *est abélienne et le noyau (*resp. *le conoyau) d'un morphisme dans cette catégorie coïncide avec le noyau (*resp. *le conoyau) de ce morphisme dans la catégorie des* $(\varphi, N, G_{L/K})$*-modules filtrés. En outre*

i) le dual D^* *d'un* $(\varphi, N, G_{L/K})$*-module filtré faiblement admissible est faiblement admissible ;*

ii) pour qu'un sous-objet D' *(*resp. *un quotient* D''*), dans la catégorie des* $(\varphi, N, G_{L/K})$*-modules filtrés, d'un objet* D *de* $\underline{MF}^f_{L/K}(\varphi, N)$ *soit faiblement admissible, il faut et il suffit que* $t_H(D') = t_N(D')$ *(*resp. *que* $t_H(D'') = t_N(D'')$*) ;*

iii) si

$$0 \longrightarrow D' \longrightarrow D \longrightarrow D'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de $(\varphi, N, G_{L/K})$*-modules filtrés discrets, et si deux d'entre eux sont faiblement admissibles, il en est de même du troisième.*

Il s'agit d'une généralisation de la proposition 4.2.1 de [Fo79], et la même démonstration, qui est très facile, s'applique.

4.4.5. CONJECTURE. — *Le produit tensoriel de deux* $(\varphi, N, G_{L/K})$*-modules filtrés faiblement admissibles est faiblement admissible.*

S'il en est ainsi, $\underline{MF}^f_{L/K}(\varphi, N)$ est une catégorie tannakienne. Cette conjecture est impliquée par la conjecture 5.6.9 (cf. *infra* qui dit essentiellement que tout objet de cette catégorie *"provient d'une représentation galoisienne"*). Dans le cas particulier où $N = 0$ sur les deux modules considérés, cette conjecture a été démontrée par Laffaille ([La80]) lorsque p est une uniformisante de L et par Faltings sans hypothèse sur L. Il est probable que la démonstration de Faltings s'étend au cas général.

4.4.6. — **Remarque** : Si D est un $(\varphi, N, G_{L/K})$–module filtré discret de dimension finie, on peut définir le **polygone de Newton** $P_N(D)$ de D comme le polygone de Newton du F–iso–cristal sous–jacent et le **polygone de Hodge** $P_H(D)$ de D comme le polygone associé à la filtration de D_L (cf., par exemple, [Fo79], n° 4.3). On peut montrer (même démonstration que la prop. 4.3.3 de *op. cit.*) que D est faiblement admissible si et seulement si d'une part $P_H(D)$ et $P_N(D)$ ont mêmes extrémités et d'autre part, pour sous–objet D' de D (dans la catégorie $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$), le polygone $P_H(D')$ est au–dessous de $P_N(D')$.

4.4.7. — Soit L' une extension galoisienne de K contenant L. Les constructions du n° 4.2.5 s'étendent sans difficulté : l'extension des scalaires définit un $\otimes$–foncteur de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ dans $\underline{MF}_{L'/K}(\varphi, N)$, qui induit une $\otimes$–équivalence entre $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ et la sous–catégorie pleine de $\underline{MF}_{L'/K}(\varphi, N)$ formée des D' sur lesquels le groupe d'inertie $I_{L'/L}$ opère trivialement; l'image par ce foncteur d'un objet D de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ est faiblement admissible si et seulement si D l'est déjà.

4.4.8. — Lorsque $L = K$, on dit (φ, N)–**module filtré (relativement à** K s'il y a risque de confusion) au lieu de $(\varphi, N, 1)$–module filtré et on pose $\underline{MF}_K(\varphi, N) = \underline{MF}_{K/K}(\varphi, N)$ et $\underline{MF}^f_K(\varphi, N) = \underline{MF}^f_{K/K}(\varphi, N)$; on appelle (φ, N)–**modules filtrés faiblement admissibles** (sous–entendu : **relativement à** K) les objets de cette dernière catégorie.

De même, **un** φ–**module filtré (relatif à** K) est un (φ, N)–module filtré pour lequel $N = 0$. On note $\underline{MF}_K(\varphi) = \underline{MF}_{K/K}(\varphi)$ (resp. $\underline{MF}^f_K(\varphi)$) la sous–catégorie pleine de $\underline{MF}_K(\varphi, N)$ (resp. $\underline{MF}^f_K(\varphi, N)$) dont les objets sont ceux sur lequels $N = 0$. Les objets de $\underline{MF}_K^f(\varphi)$ sont les φ–**modules filtrés faiblement admissibles**[3].

On dit qu'un objet D de $\underline{MF}^f_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ est **semi–stable sur** L[4] si le (φ, N)–module sous–jacent l'est. Lorsque $N = 0$, on dit aussi que D **a bonne réduction sur** L.

4.4.9. Proposition. — *Supposons L/K finie. Soient D un objet de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ et Δ l'objet de $\underline{MF}_L(\varphi, N)$ que l'on obtient en oubliant l'action de $G_{L/K}$. Alors D est faiblement admissible si et seulement si Δ l'est.*

Preuve : Notons $\mathcal{M}$ la classe des objets M de $\underline{MF}_L(\varphi, N)$, de dimension finie, tels que pour tout sous–objet M' de M, $t_H(D') \leq t_N(D')$. L'appartenance à $\mathcal{M}$ est stable par sous–objet et somme directe finie.

Il est clair que la condition est suffisante. Montrer qu'elle est nécessaire revient à vérifier que si D est un objet de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ tel que, pour tout sous–L_0–espace vectoriel D' de D stable par φ, N et $G_{L/K}$, on a $t_H(D') \leq t_N(D')$, alors la même propriété est vraie pour tout sous–L_0–espace vectoriel stable par φ et N, mais peut–être pas par $G_{L/K}$.

Sinon, soit D' un contre–exemple minimal (on a donc $t_H(D') > t_N(D')$, mais tout sous–objet propre de D' dans $\underline{MF}_L(\varphi, N)$ appartient à $\mathcal{M}$).

Soit $D'_{sat} = \sum_{g \in G_{L/K}} g(D')$. Il est clair que D'_{sat} est stable par φ, N et $G_{L/K}$, d'où $t_H(D'_{sat}) \leq t_N(D'_{sat})$. Soient $g_1, g_2, \ldots, g_r$ des éléments de $G_{L/K}$ tels que $D'_{sat} = \sum_{1 \leq i \leq r} g_i(D')$ et que l'entier r soit minimal. Soit D_1 (resp. D_2) le noyau (resp. la coimage), dans la catégorie $\underline{MF}_L(\varphi, N)$, du morphisme naturel

$$\oplus_{1 \leq i \leq r} g_i(D') \longrightarrow D'_{sat} \ .$$

On a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow \oplus_{1 \leq i \leq r} g_i(D') \longrightarrow D_2 \longrightarrow 0 \ ,$$

[3] la catégorie $\underline{MF}_K^f(\varphi)$ est notée $\underline{MF}_K^f$ dans [Fo79], n° 4.1.4.

[4] cette notion garde un sens lorsque l'on ne suppose plus l'extension L de K contenue dans $\overline{K}$ galoisienne.

et on a $t_N(D_2) = t_N(D'_{sat})$, tandis que $t_H(D_2) \leq t_H(D'_{sat})$, ce qui fait que $t_H(D_2) \leq t_N(D_2)$. D'autre part, pour $1 \leq i \leq r$, notons D'_1 le plus petit sous–objet de $g_i(D')$ (dans $\underline{MF}_L(\varphi, N)$) contenant l'image de D_1 (via la projection de $\oplus g_j(D')$ sur $g_i(D')$). La minimalité de r implique que $D'_i \neq g_i(D')$ donc, puisque $g_i(D') \simeq D'$ (en tant qu'objet de $\underline{MF}_L(\varphi, N)$), que $D'_i \in \mathcal{M}$; on a donc $\oplus D'_i \in \mathcal{M}$ et $D_1 \in \mathcal{M}$, d'où $t_H(D_1) \leq t_N(D_1)$. Les propriétés d'additivité de t_H et t_N implique d'une part que $t_H(\oplus g_i(D')) = t_H(D_1) + t_H(D_2) \leq t_N(D_1) + t_N(D_2) = t_N(\oplus g_i(D'))$ et d'autre part que $t_H(\oplus g_i(D')) = r \cdot t_H(D') > r \cdot t_N(D') = t_N(\oplus g_i(D'))$, d'où une contradiction.

4.4.10. — Remarque : Soient P le complété de l'extension maximale non ramifiée K_{nr} de K contenue dans $\overline{K}$ et $\overline{P}$ la fermeture algébrique de P dans le complété de $\overline{K}$. Alors le corps des fractions P_0 de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps résiduel $\overline{k}$ de $\overline{K}$ est aussi le complété de l'extension maximale non ramifiée $\overline{K}_0$ de K_0 contenue dans $\overline{K}$.

Si D est un objet de $\underline{MF}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$, $\widehat{D} = P_0 \otimes_{\overline{K}_0} D$ est muni, d'une manière évidente, d'une action de φ, N et G_K et $\widehat{D}_{\overline{P}} = \overline{P} \otimes_{P_0} \widehat{D}$ est muni d'une filtration. Si D est discret, on peut le récupérer à partir de $\widehat{D}$: c'est le sous–$\overline{K}_0$–espace vectoriel de $\widehat{D}$ formé des d qui sont fixés par un sous–groupe ouvert de G_K. La condition d'admissibilité faible peut se lire sur $\widehat{D}$ aussi bien que sur D, et l'on obtient ainsi une $\otimes$–équivalence entre $\underline{MF}^f_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ et une catégorie convenable d'objets tels que $\widehat{D}$. Lorsque l'on se restreint aux objets pour lesquels $N = 0$, cela fourni une $\otimes$–équivalence entre $\underline{MF}^f_{\overline{K}/K}(\varphi)$ et la catégorie notée $\underline{MPF}^f_K$ dans [Fo79], n° 7.3.4.

5. — Représentations semi–stables et potentiellement semi–stables

Dans le cas particulier des représentations cristallines et potentiellement cristallines (qui correspondent du côté (φ, N)–modules filtrés au cas où $N = 0$) la plupart des résultats de ce paragraphe sont contenus dans [Fo79]. Les démonstrations dans le cas général étudié ici sont souvent pratiquement identiques. Nous les reproduisons ici pour la commodité du lecteur.

Dans toute la suite, on pose $G = G_K$.

5.1. — Les foncteurs $\underline{D}_{cris}$ et $\underline{D}_{st}$

5.1.2. — On renvoie à [Exp.II] pour la définition des anneaux B_{cris} (n° 2.3) et B_{st} (n° 3.1). On choisit

i) (cf. *loc. cit.*, n° 3.2.2) une valuation $v : \overline{K} \to \mathbb{Q}$ et on note N l'opérateur de monodromie sur B_{st} associé à v ;

ii) (cf. *loc. cit.*, n° 4.2) un prolongement G–équivariant $\log : \overline{K}^* \to \overline{K}$ du logarithme usuel sur le groupe des unités de l'anneau des entiers de $\overline{K}$ et on note $\iota : B_{st} \to B_{dR}$ le B_{cris}–plongement qui lui est associé. Sauf mention explicite du contraire, on utilise ι pour identifier B_{st} à une sous–B_{cris}–algèbre de B_{dR}.

Rappelons que l'homomorphisme de K–algèbres,

$$\iota_K : K \otimes_{K_0} B_{st} \longrightarrow B_{dR} \ ,$$

déduit de ι par extension des scalaires est injectif ([Exp.II], n° 4.2.4). Plus généralement, pour toute extension finie L de K contenue dans $\overline{K}$, l'homomorphisme de L–algèbres $\iota_L : L \otimes_{L_0} B_{st} \to B_{dR}$ déduit de ι par extension des scalaires est injectif (il suffit d'appliquer ce qui précède en remplaçant K par L).

5.1.2. PROPOSITION. — *i*) *On a* $(B_{cris})^G = (B_{st})^G = K_0$.

ii) *Les* $(\mathbb{Q}_p, G)$*–anneaux* B_{cris} *et* B_{st} *sont* G*–réguliers.*

Preuve : Il est clair que $K_0 \subset (B_{cris})^G \subset (B_{st})^G \subset (B_{dR})^G$ et on sait ([Exp.II], n° 1.5.7) que $(B_{dR})^G = K$. L'égalité $K_0 = (B_{cris})^G = (B_{st})^G$ résulte de l'injectivité de ι_K.

Comme B_{dR} est G–régulier, cette injectivité, compte–tenu de la proposition 1.6.5, ramène la démonstration de (*ii*) à vérifier que, si $b \in B_{cris}$ (resp. B_{st}) est un élément non–nul tel que la $\mathbb{Q}_p$–droite engendrée par b est stable par G, alors b est inversible, ce qui résulte du lemme suivant :

5.1.3. LEMME. — *i*) *Le corps des fractions* P_0 *de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps résiduel* $\overline{k}$ *de* $\overline{K}$ *s'identifie à un sous–corps de* B_{cris}.

ii) Soit $t \in B_{cris}$ un générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$. Pour qu'un sous-P_0-espace vectoriel Δ de dimension 1 de B_{st} soit stable par G, il faut et il suffit qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $\Delta = P_0 t^i$.

Preuve : Avec les notations utilisées dans [Exp.II], on voit que $\overline{k}$ s'identifie au corps résiduel de R; donc $W(R)$ contient $W(\overline{k})$ et le sous-anneau $W(R)[1/p]$ de B_{cris} contient $W(\overline{k})[1/p] = P_0$.

Quitte à remplacer K par son composé avec P_0, on peut pour prouver (ii) supposer le corps résiduel de K algébriquement clos, i.e. que $P_0 = K_0$ (on a aussi $L_0 = K_0$ pour toute extension L de K contenue dans $\overline{K}$).

Soit b un générateur de Δ. Quitte à multiplier b par t^{-i}, pour un entier i convenable, on peut supposer que $b \in B_{dR}^+$ et $b \notin Fil^1 B_{dR}^+$. Soit $\theta(b)$ l'image de b dans C. Le K_0-espace vectoriel $\theta(\Delta)$ engendré par $\theta(b)$ est de dimension 1 et stable par G et il est donc contenu dans $\overline{K}$ (cf., par exemple, 3.3, remarque (ii)). L'action de G sur $\theta(\Delta)$ se factorise donc à travers $\mathrm{Gal}(L/K)$ où L est une extension finie galoisienne convenable de K, donc une extension finie de K_0. Comme la restriction de θ à Δ est injective, il en est de même de l'action de G sur Δ, donc aussi sur la sous-K_0-algèbre $P_0(b)$ de B_{st}. Mais alors $K_0(b)$ doit être isomorphe à une extension de K_0 contenue dans L et le fait que $L \otimes_{K_0} B_{st}$ ($\subset B_{dR}$) soit intègre implique que $b \in K_0$.

5.1.4. — Pour toute représentation p-adique V de G, on pose

$$\underline{D}_{cris}(V) = \underline{D}_{B_{cris}}(V) = (B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G \text{ et } \underline{D}_{st}(V) = \underline{D}_{B_{st}}(B) = (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G .$$

On dit que V **est cristalline** (resp. **semi-stable)** si V est B_{cris}-admissible (resp. B_{st}-admissible). On note $\underline{\mathrm{Rep}}_{cris}(G)$ (resp. $\underline{\mathrm{Rep}}_{st}(G)$) la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dont les objets sont les représentations cristallines (resp. semi-stables). C'est une sous-catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ (prop. 1.5.2).

5.1.5. — Soient k le corps résiduel de K, $\overline{k}$ et P_0 comme au n° 5.1.3, P le complété de l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans $\overline{K}$, $\overline{P}$ la fermeture algébrique de P dans le complété C de $\overline{K}$. Alors P est un corps complet pour une valuation discrète et $\overline{P}$ une clôture algébrique de P. Le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{P}/P)$ n'est autre que le groupe d'inertie I_K de l'extension $\overline{K}/K$.

En outre, les anneaux B_{cris} et B_{st} relatifs à l'extension $\overline{P}/P$ s'identifient aux anneaux du même nom relatifs à $\overline{K}/K$ ([Exp.II], rem. (d) du n° 4.2.5).

Si $G_k = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, pour tout entier $n \geq 1$, $H^0(G_k, \overline{k}) = k$ et $H^1(G_k, GL_n(\overline{k}))$ est trivial; on en déduit facilement (cf., par exemple, [Se89], lemma, p. III–33) que $H^0(G_k, P_0) = K_0$ et $H^1_{cont}(G_k, GL_n(P_0))$ est trivial. Autrement dit, pour tout P_0–espace vectoriel de dimension finie Δ muni d'une action semi–linéaire et continue de G_k, l'application naturelle

$$P_0 \otimes_{K_0} \Delta^{G_k} \longrightarrow \Delta$$

est un isomorphisme.

La proposition suivante en résulte :

PROPOSITION. — *Pour qu'une représentation p–adique V de G_K soit cristalline (*resp. *semi–stable), il faut et il suffit que V le soit en tant que représentation du groupe d'inertie $I_K = \mathrm{Gal}(\overline{P}/P)$.*

5.1.6. — Soit V une représentation p–adique de G. L'action de φ sur B_{cris} munit $\underline{D}_{cris}(V)$ d'une structure de φ–module relatif à K (n° 4.2.7), tandis que celle de φ et de N sur B_{st} munit $\underline{D}_{st}(V)$ d'une structure de (φ, N)–module relatif à K (n° 4.2.6). L'inclusion de B_{cris} dans B_{st} identifie $\underline{D}_{cris}(V)$ au noyau de la multiplication par N dans $\underline{D}_{st}(V)$.

L'injectivité de l'application $\iota_K : K \otimes_{K_0} B_{st} \rightarrow B_{dR}$ permet d'identifier $\underline{D}_{st}(V)_K = K \otimes_{K_0} \underline{D}_{st}(V)$ à un sous–K–espace vectoriel de $\underline{D}_{dR}(V)$. On peut donc munir $\underline{D}_{st}(V)_K$ de la filtration induite par celle de $\underline{D}_{dR}(V)$, ce qui permet de considérer $\underline{D}_{st}$ comme **un foncteur de la catégorie** $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ **dans** $\underline{MF}_K(\varphi, N)$ (n° 4.4.8). De la même façon $\underline{D}_{cris}$ est **un foncteur de la catégorie** $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ **dans** $\underline{MF}_K(\varphi)$ (et, pour toute représentation V, $\underline{D}_{cris}(V)$ s'identifie au sous–objet de $\underline{D}_{st}(V)$ dans $\underline{MF}_K(\varphi, N)$ qui est le noyau de N).

5.1.7. — Si V est une représentation p–adique de G de dimension d, on a $\dim_{K_0} \underline{D}_{st}(V)$ (resp. $\dim_K \underline{D}_{dR}(V)) \leq d$) et V est semi–stable (resp. de de Rham) si et seulement si l'on a l'égalité. Si V est semi–stable, on a donc $\underline{D}_{st}(V)_K = \underline{D}_{dR}(V)$ et V est de de Rham. De la même manière, on voit que si V est cristalline, alors V est semi–stable, on a $\underline{D}_{st}(V) = \underline{D}_{cris}(V)$ (avec $N = 0$) et $\underline{D}_{cris}(V)_K = \underline{D}_{dR}(V)$.

Compte tenu du théorème 3.8, le résultat suivant est alors évident :

THÉORÈME. — *On a les inclusions*

$$\underline{\mathrm{Rep}}_{cris}(G) \subset \underline{\mathrm{Rep}}_{st}(G) \subset \underline{\mathrm{Rep}}_{dR}(G) \subset \underline{\mathrm{Rep}}(G)$$

où chaque catégorie est une sous-catégorie tannakienne de la suivante. En outre,

i) si V_1 et V_2 sont deux représentations semi-stables (resp. *cristalline), l'isomorphisme naturel de K_0-espaces vectoriels $\underline{D}_{st}(V_1) \otimes_{K_0} \underline{D}_{st}(V_2) \to \underline{D}_{st}(V_1 \otimes V_2)$* (resp. $\underline{D}_{cris}(V_1) \otimes_{K_0} \underline{D}_{cris}(V_2) \to \underline{D}_{cris}(V_1 \otimes V_2)$) *induit un isomorphisme des objets de $\underline{MF}_K(\varphi, N)$* (resp. $\underline{MF}_K(\varphi)$) *correspondants ;*

ii) si V est une représentation semi-stable (resp. *cristalline), l'isomorphisme naturel de K_0-espaces vectoriels $\underline{D}_{st}(V^*) \to (\underline{D}_{st}(V))^*$ induit un isomorphisme des objets de $\underline{MF}_K(\varphi, N)$* (resp. $\underline{MF}(\varphi)$) *correspondants ;*

iii) si

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de représentations p-adiques et si V est semi-stable (resp. *cristalline) la suite exacte courte de K_0-espaces vectoriels* $0 \to \underline{D}_{st}(V') \to \underline{D}_{st}(V) \to \underline{D}_{st}(V'') \to 0$ (resp. $0 \to \underline{D}_{cris}(V') \to \underline{D}_{cris}(V) \to \underline{D}_{cris}(V'') \to 0$) *induit une suite exacte courte des objets de $\underline{MF}_K(\varphi, N)$* (resp. $\underline{MF}_K(\varphi)$) *correspondants.*

5.2. — L'influence du choix de la valuation et du logarithme

5.2.1. — La structure de (φ, N)-module filtré sur B_{st} dépend du choix d'une valuation sur $\overline{K}$ et de celui d'un logarithme sur $\overline{K}^*$. Soient v et v_0 deux valuations de $\overline{K}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$, v_0 étant la valuation telle que $v_0(p) = 1$, et log et $\log_0$ deux logarithmes sur $\overline{K}^*$, G-équivariants, $\log_0$ étant tel que $\log_0(p) = 0$.

La K_0-algèbre B_{st} munie de l'action de G et de φ ne dépend pas des choix faits. L'action de N et le plongement de $K \otimes_{K_0} B_{st}$ dans B_{dR} en dépendent :

– Posons $v(p) = a (\in \mathbb{Q})$ et notons N (resp. N_0) l'opérateur de monodromie sur B_{st} associé à v (resp. v_0). On a $N = a \cdot N_0$.

– Posons $\log(p) = c(\in K)$ et notons ι (resp. ι_0) le plongement de $K \otimes_{K_0} B_{st}$ dans B_{dR} induit par log (resp. $\log_0$). Notons encore N_0 l'unique $K \otimes_{K_0} B_{cris}$–dérivation de $K \otimes_{K_0} B_{st}$ qui prolonge N_0. L'application

$$\nu : K \otimes_{K_0} B_{st} \longrightarrow K \otimes_{K_0} B_{st} \ ,$$

qui envoie b sur $\sum_{n\geq 0} (c^n/n!) \cdot N_0^n(b)$, est un automorphisme de la $K \otimes_{K_0} B_{cris}$–algèbre $K \otimes_{K_0} B_{st}$ qui commute à l'action de G. On vérifie facilement que $\iota = \iota_0 \circ \nu$. On en déduit que si, pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on pose

$$Fil_0^r(K \otimes_{K_0} B_{st}) = \iota_0^{-1}(Fil^r B_{dR}) \quad \text{et} \quad Fil^r(K \otimes_{K_0} B_{st}) = \iota^{-1}(Fil^r B_{dR}) \ ,$$

on a $Fil^r(K \otimes_{K_0} B_{st}) = \nu^{-1}(Fil_0^r(K \otimes_{K_0} B_{st}))$.

5.2.2. — Si V est une représentation p–adique de G, la structure de (φ, N)–module filtré sur $\underline{D}_{st}(V)$ dépend aussi du choix de la valuation et du logarithme, i.e. des éléments $a \in \mathbb{Q}^*$ et $c \in K$ définis ci–dessus.

Si D_0 (resp. D) est le (φ, N)–module filtré $\underline{D}_{st}(V)$ correspondant au choix de v_0 et $\log_0$ (resp. v et log), il est facile de décrire D à partir de D_0 : en tant que K–espace vectoriel, D s'identifie à D_0 (et donc $D_K = K \otimes_{K_0} D$ s'identifie aussi à $K \otimes_{K_0} D_0$) et, avec des conventions évidentes,

– on a $\varphi = \varphi_0$ et $N = aN_0$;

– si l'on note encore N_0 l'endomorphisme du K–espace vectoriel D_K déduit de N_0 par extension des scalaires et si l'on appelle ν l'automorphisme $\sum_{n\geq 0} (c^n/n!) \cdot N_0^n$ de D_K, pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on a $Fil^r D_K = \nu^{-1}(Fil_0^r D_K)$.

5.2.3. — Si V est comme ci–dessus, la structure de (φ, N)–module de $D = \underline{D}_{st}(V)$ ne fait par intervenir le choix de log et ne dépend donc que du choix de v. **La classe d'isomorphisme de D comme (φ, N)–module est indépendante de ce choix**. En effet, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit $D_{[n]}$ la partie de D qui est la somme directe des parties de D de pente $\in [n, n+1[$ (pour l'action de φ). On a

$$D = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} D_{[n]} \ ;$$

si, avec des notations évidentes, f est l'endomorphisme du K_0–espace vectoriel D qui est la multiplication par a^{-n} sur $D_{[n]}$, on voit que f commute à $\varphi = \varphi_0$, tandis que, comme $N(D_{[n]}) \subset D_{[n-1]}$, $f \circ N_0 = N \circ f$; l'application f est donc un isomorphisme de D_0 sur D pour la structure de (φ, N)–modules.

En revanche, il est facile de voir que la classe d'isomorphisme de $\underline{D}_{st}(V)$ comme (φ, N)–module **filtré** dépend en général aussi bien du choix de la valuation que de celui du prolongement du logarithme usuel.

5.2.4. — Soient V une représentation p–adique de G qui est de de Rham et D_K le K–espace vectoriel filtré $\underline{D}_{dR}(V)$. Supposons V semi–stable. Le choix de v et de log permet de munir D_K d'un opérateur de monodromie $N : D_K \to D_K$ qui est K–linéaire nilpotent et d'une K_0–structure D stable par N et munie d'un Frobenius φ. Si l'on change v et log, on voit que, avec des conventions évidentes, on a $N = aN_0$ et, si ν est l'automorphisme $\sum_{n\geq 0}(c^n/n!) \cdot N_0^n$ de D_K, on a $D = \nu(D_0)$ et $\varphi = \nu \circ \varphi_0 \circ \nu^{-1}$.

5.3. — Le foncteur $\underline{V}_{st}$

5.3.1. — L'anneau B_{st} a une structure naturelle de (φ, N, G)–module filtré (la filtration sur $(B_{st})_K = K \otimes_{K_0} B_{st}$ est celle qui est induite par l'inclusion ι_K de $(B_{st})_K$ dans B_{dR}).

Si V est une représentation p–adique de G, $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ est de manière naturelle un (φ, N, G)–module filtré : si $b \in B_{st}$ et $v \in V$, on a $N(b \otimes v) = Nb \otimes v$, $\varphi(b \otimes v) = \varphi b \otimes v$, $g(b \otimes v) = gb \otimes gv$ pour tout $g \in G$; on a $(B_{st} \otimes V)_K = (B_{st})_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et $Fil^i(B_{st} \otimes V)_K = (Fil^i(B_{st})_K) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

5.3.2. —Si D est un (φ, N)–module filtré, le produit tensoriel $B_{st} \otimes D$ dans la catégorie des (φ, N)–modules filtrés est de façon naturelle un (φ, N, G)–module filtré (on a $g(b \otimes d) = gb \otimes d$ pour $g \in G$, $b \in B_{st}$, $d \in D$) et on peut définir

$$\underline{V}_{st}(D) = \mathrm{Hom}_{(\varphi,N)-\mathrm{mod\ .fil.}}(K_0, B_{st} \otimes D)$$

(où K_0 est vu comme l'objet–unité de $\underline{MF}_K(\varphi, N)$). On voit que $\underline{V}_{st}(D)$ s'identifie au sous–$\mathbb{Q}_p$–espace vectoriel de $B_{st} \otimes_{K_0} D$ formé des v tels que $Nv = 0$, $\varphi v = v$ et $1 \otimes v \in Fil^0(B_{st} \otimes D)_K$. Il est stable par G.

On peut considérer $\underline{V}_{st}$ comme un foncteur de la catégorie des (φ, N)–modules filtrés dans celle des $\mathbb{Q}_p[G]$–modules.

5.3.3. — Disons qu'un (φ, N)–module filtré D est **admissible** s'il existe une représentation semi–stable V et un isomorphisme de $\underline{D}_{st}(V)$ sur D. Notons $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi, N)$ la sous–catégorie pleine de $\underline{MF}_K(\varphi, N)$ dont les objets sont ceux qui sont admissibles.

5.3.4. — Reprenons les notations du n° 5.1.5. Si D est un (φ, N)–module filtré relatif à K, $\Delta = P_0 \otimes_{K_0} D$ a une structure naturelle de (φ, N)–module filtré relatif à P. Compte–tenu du n° 5.1.5, la proposition suivante est immédiate :

PROPOSITION. — *Soit D un (φ, N)-module filtré relatif à K de dimension finie. Alors D est admissible si et seulement si $P_0 \otimes_{K_0} D$ l'est.*

5.3.5. THÉORÈME. — *i) Soit V une représentation p–adique semi–stable. L'isomorphisme naturel de B_{st}-modules*

$$B_{st} \otimes_{K_0} \underline{D}_{st}(V) \longrightarrow B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

induit un isomorphisme des structures de (φ, N)-modules filtrés sous–jacentes.

ii) Comme sous–catégorie pleine de $\underline{MF}_K(\varphi, N)$, $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi, N)$ est stable par facteur direct, somme directe, produit tensoriel, dual; c'est une catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}_p$.

iii) La restriction du foncteur $\underline{D}_{st}$ à la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{st}(G)$ est pleinement fidèle et induit une $\otimes$–équivalence entre $\underline{\mathrm{Rep}}_{st}(G)$ et $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi, N)$; la restriction de $\underline{V}_{st}$ à $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi, N)$ est un quasi–inverse.

iv) Dans la catégorie $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi, N)$, tout morphisme est strictement compatible aux filtrations.

Preuve : L'assertion (i) résulte facilement de l'assertion (i) du théorème 3.8. Les autres assertions se déduisent facilement du fait que, si V est une représentations p–adique semi–stable et si $D = \underline{D}_{st}(V)$, alors $\underline{V}_{st}(D)$ s'identifie à V. Pour le voir, on utilise (i) pour identifier le (φ, N, G)–module $B_{st} \otimes D$ à $B_{st} \otimes V$. Mais $(B_{st})_{N=0} = B_{cris}$ ([exp.II], n° 3.2.3), donc $(B_{st} \otimes D)_{N=0} = (B_{st} \otimes V)_{N=0} = B_{cris} \otimes V$; on a aussi $(B_{cris})_{\varphi=1} \cap Fil^0 B_{dR} =$

$\mathbb{Q}_p$ ([Exp.II], th. 5.3.8) donc

$$\underline{V}_{st}(D) = ((B_{cris})_{\varphi=1} \otimes V) \cap (Fil^0 B_{dR} \otimes V) = V \ .$$

5.3.6. PROPOSITION. — *Soit D un (φ, N)-module filtré de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *D est admissible ;*

(*ii*) *l'application naturelle*

$$\beta_D : B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \underline{V}_{st}(D) \longrightarrow B_{st} \otimes_{K_0} D$$

est un isomorphisme de (φ, N, G)-modules filtrés.

Preuve : (*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*) car, si l'on identifie D à $\underline{D}_{st}(V)$, pour une représentation semi-stable V convenable, alors $\underline{V}_{st}(D)$ s'identifie à V et β_D est l'inverse de l'isomorphisme naturel de $B_{st} \otimes \underline{D}_{st}(V)$ sur $B_{st} \otimes V$ (cf. th. ci-dessus).

(*ii*) $\Longrightarrow$ (*i*) car si l'on pose $V = \underline{V}_{st}(D)$, β_D induit, en prenant les éléments fixes par G, un isomorphisme de (φ, N, G)-modules de $\underline{D}_{st}(V)$ sur D. Mais alors, la dimension sur K_0 de $\underline{D}_{st}(V)$ est égale au rang du B_{st}-module libre $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, c'est-à-dire à $\dim_{\mathbb{Q}_p} V$, donc V est semi-stable et D est admissible.

5.3.7. — Il est parfois commode d'utiliser une description contravariante de cette équivalence de catégories. Si, pour toute représentation p-adique V de G, on pose $\underline{D}^*_{st}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G]}(V, B_{st})$, on voit que $\underline{D}^*_{st}(V)$ s'identifie à $\underline{D}_{st}(V^*)$; de même, si, pour tout (φ, N)-module filtré D, on pose $\underline{V}^*_{st}(D) = \mathrm{Hom}_{(\varphi,N)-\mathrm{mod\,.fil.}}(D, B_{st})$, $\underline{V}^*_{st}(D)$ s'identifie à $\underline{V}_{st}(D^*)$. En particulier, la restriction du foncteur $\underline{D}^*_{st}$ à $\underline{\mathrm{Rep}}_{st}(G)$ induit une anti-équivalence entre cette catégorie et $\underline{MF}^{ad}_K(\varphi, N)$ et la restriction de $\underline{V}^*_{st}$ à $\underline{MF}^{ad}_K(\varphi, N)$ est un quasi-inverse.

5.4. — Admissibilité et admissibilité faible

5.4.1. — Soit $\chi : G_K \to \mathbb{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique.

PROPOSITION. — *i) Soit V une représentation p-adique de G de dimension 1. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) V est cristalline ;

b) V est semi-stable ;

c) il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que le groupe d'inertie I_K opère sur V via χ^i.

ii) Soit D un (φ, N)-module filtré de dimension 1. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) D est admissible,

b) D est faiblement admissible,

c) on a $t_H(D) = t_N(D)$.

Preuve : Les propositions 5.1.5 et 5.3.4 ramènent la démonstration au cas où le corps résiduel k de K est algébriquement clos, ce que nous supposons dans la suite. L'assertion (i) résulte alors de la partie (ii) du lemme 5.1.3. Quant à l'assertion (ii), il est clair que (b) et (c) sont équivalents. D'après (i), si D est admissible, il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $D \simeq \underline{D}_{st}(\mathbb{Q}_p(i)) = \underline{D}_{cris}(\mathbb{Q}_p(i))$. Si t est un élément non nul de $\mathbb{Q}_p(1)$, $\underline{D}_{st}(\mathbb{Q}_p(i))$ est le K_0-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $d = t^{-i} \otimes t^i$. On a $\varphi d = p^{-i} d$, $Nd = 0$ et $1 \otimes d \in Fil^{-i} - Fil^{-i+1}$, donc $t_N(D) = t_H(D) = -i$, d'où (a) $\Longrightarrow$ (c). Enfin, on vérifie facilement que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, tout (φ, N)-module filtré D de dimension 1 vérifiant $t_N(D) = t_H(D) = -i$ est isomorphe à $\underline{D}_{st}(\mathbb{Q}_p(i))$, d'où ($c$) $\Longrightarrow$ (a).

5.4.2. PROPOSITION. — *i) Tout (φ, N)-module filtré admissible est faiblement admissible.*

ii) Si D est un (φ, N)-module filtré admissible, les sous-objets de D dans $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi, N)$ sont les sous-objet de D dans $\underline{MF}_K^f(\varphi, N)$ (autrement dit, les sous-(φ, N)-modules filtrés admissibles de D sont les sous-K_0-espaces vectoriels D' stables par φ et N, avec D'_K muni de la filtration induite, tels que $t_H(D') = t_N(D')$).

Preuve : Montrons (i) : Soit D un (φ, N)-module filtré admissible. Il résulte facilement du théorème 5.3.5 que, pour tout entier $r \geq 0$, le (φ, N)-module filtré $\Lambda^r D$ est admissible. Si m est la dimension de D, l'admissibilité de $\Lambda^m D$ implique que $t_H(D) = t_N(D)$. Si maintenant D' est un sous–(φ, N)–module de D, de dimension r, alors $\Lambda^r D'$ est une droite de $\Lambda^r D$, stable par φ et N (en fait contenu dans le noyau de N) ; si l'on munit D'_K de la filtration induite par celle de D_K, on a $t_H(\Lambda^r D') = t_H(D')$ et $t_N(\Lambda^r D') = t_N(D')$. Posons $j = t_N(D')$ et supposons que $t_H(D') \geq j$. Soit Δ le (φ, N)–module filtré de dimension 1 dont le (φ, N)–module sous–jacent est $\Lambda^r D'$, avec $Fil^j \Delta_K = \Delta_K$ et $Fil^{j+1}\Delta_K = 0$. L'identité sur $\Lambda^r D'$ induit un morphisme de (φ, N)–modules filtrés admissibles

$$\Delta \longrightarrow \Lambda^r D' .$$

Celui–ci doit être strictement compatible aux filtrations (th. 5.3.5) et on doit donc avoir $t_H(D') = j$.

L'assertion (ii) résulte facilement du lemme élémentaire suivant déjà énoncé dans [Fo79] (lemme 4.5.3) :

5.4.3. LEMME. — *Soient B un anneau commutatif et E un sous–corps de B. Soient V un E–espace vectoriel et $X = B \otimes_E V$. Soit X' un sous–B–module libre de rang fini r de X. Pour que X' soit rationnel sur E (*i.e.* pour que X' provienne par extension des scalaires d'un sous–E–espace vectoriel de V), il faut et il suffit que $\Lambda^r_B X'$, identifié à un sous–B–module libre de rang 1 de $\Lambda^r_B X$ soit rationnel sur E.*

5.4.4. — **Conjecture** : Il me semble raisonnable de conjecturer que tout (φ, N)–module filtré faiblement admissible est admissible, i.e. que $\underline{MF}^{ad}_K(\varphi, N) = \underline{MF}^{f}_K(\varphi, N)$. Lorsque $N = 0$, on retrouve la conjecture que tout φ–module filtré faiblement admissible est admissible ([Fo79], n° 5.2.6, question 1).

On dispose de résultats partiels en faveur de cette conjecture : soit D un (φ, N)–module filtré faiblement admissible. On sait que D est admissible en particulier dans chacun des cas suivants :

i) D est *"ordinaire"* et ou bien le corps résiduel k est fini, ou bien $K = K_0$ (cf. [Exp.IV]),

ii) $K = K_0$, $N = 0$ et il existe i tel que $Fil^i D_K = D_K$, $Fil^{i+p} D_K = 0$ ([FL82]), *iii*) $[K : K_0] \leq p - 1$, $N = 0$ et il existe i tel que $Fil^i D_K = D_K$, $Fil^{i+2} D_K = 0$ ([La80]).

5.5. — Le cas des représentations cristallines

5.5.1. — L'anneau B_{cris} est le noyau de l'opérateur $N : B_{st} \to B_{st}$ et les représentations cristallines sont les représentations semi-stables V telles que $N = 0$ sur $\underline{D}_{st}(V)$. En faisant $N = 0$, les résultats des n° 5.4 et 5.5 se transposent au cas particulier des représentations cristallines.

C'est ainsi que l'anneau B_{cris} est de manière naturelle un (φ, G)-module filtré. De même, pour toute représentation p-adique V et tout φ-module filtré D, $B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et $B_{cris} \otimes_{K_0} D$ ont une structure naturelle de (φ, G)-modules filtrés.

On définit un foncteur $\underline{V}_{cris}$ de la catégorie des φ-modules filtrés dans celle des $\mathbb{Q}_p[G]$-modules en posant, pour tout φ-module filtré D

$$\underline{V}_{cris}(D) = \mathrm{Hom}_{\varphi-\text{mod .fil.}}(K_0, B_{cris} \otimes D) =$$

$$\{v \in B_{st} \otimes D \mid \varphi v = v \text{ et } 1 \otimes v \in Fil^0(B_{cris} \otimes D)_K\} .$$

Si D est un φ-module filtré, on peut le considérer comme un (φ, N)-module filtré avec $N = 0$ et $\underline{V}_{cris}(D) = \underline{V}_{st}(D)$.

5.5.2. — Disons qu'un φ-module filtré D est **admissible** s'il est admissible en tant que (φ, N)-module filtré avec $N = 0$. Cela équivaut à dire qu'il existe une représentation cristalline V et un isomorphisme de $\underline{D}_{st}(V)$ sur D. Notons $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi)$ ou $\underline{MF}_K^{ad}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_K(\varphi)$ dont les objets sont ceux qui sont admissibles.

Il résulte du théorème 5.3.5 que

i) si V est une représentation p-adique cristalline, l'isomorphisme naturel de B_{cris}-modules

$$B_{cris} \otimes_{K_0} \underline{D}_{cris}(V) \longrightarrow B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

induit un isomorphisme des structures de (φ, G)-modules filtrés sous-jacentes;

ii) que, comme sous–catégorie pleine de $\underline{MF}_K(\varphi)$, $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi)$ est stable par facteur direct, somme directe, produit tensoriel, dual ; c'est une catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}_p$;

iii) que la restriction du foncteur $\underline{D}_{cris}$ à la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{cris}(G)$ est pleinement fidèle et induit une $\otimes$–équivalence entre $\underline{\mathrm{Rep}}_{cris}(G)$ et $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi)$, la restriction de $\underline{V}_{cris}$ à $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi)$ étant un quasi–inverse ;

iv) que, dans la catégorie $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi)$, tout morphisme est strictement compatible aux filtrations.

5.5.3. — De même, il résulte de la proposition 5.4.2

i) que tout φ–module filtré admissible est faiblement admissible ;

ii) que, si D est un φ–module filtré admissible, les sous–objets de D dans $\underline{MF}_K^{ad}(\varphi)$ sont les sous–objets de D dans $\underline{MF}_K^{f}(\varphi)$.

5.6. — Représentations potentiellement semi–stables

5.6.1. — Lorsque l'on remplace le corps K par une extension finie L de K contenue dans $\overline{K}$, les notions et l'étude des représentations p–adiques de G_K qui sont de de Rham, cristallines ou semi–stables se transposent aux représentations p–adiques de G_L. Le corps B_{dR} (resp. l'anneau B_{cris}, resp. B_{st}) relatif à l'extension $\overline{K}/L$ n'est autre que le corps B_{dR} (resp. l'anneau B_{cris}, resp. B_{st}) relatif à l'extension $\overline{K}/K$ (cf. [Exp.II], n° 1.5.6 et le (*d*) du n° 4.2.5). En particulier, en appliquant 5.1.2 à l'extension L/K, on voit que $(B_{st})^{G_L} = L_0$ et que le $(\mathbb{Q}_p, G_L)$–anneau B_{cris} est G_L–régulier.

On peut donc appliquer les résultats du n° 1.8 en prenant pour $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous–groupes ouverts de G. On dit qu'une représentation p–adique V de G est **potentiellement semi–stable** si elle est potentiellement B_{st}–admissible relativement à $\mathcal{H}$. On note $\underline{\mathrm{Rep}}_{pst}(G)$ la sous–catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dont les objets sont les représentations potentiellement semi–stables. C'est une sous–catégorie tannakienne de $\underline{\mathrm{Rep}}_{dR}(G)$.

5.6.2. — **Remarque** : Je ne connais pas d'exemple de représentation p–adique V de G qui est de de Rham sans être potentiellement semi–stable (voir n° 6.2.2 ci–dessous).

5.6.3. — Soit L une extension finie de K contenue dans $\overline{K}$. Toute représentation p–adique V de G définit par restriction, une représentation p–adique de G_L et on peut définir

$$\underline{D}_{dR,L}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_L}, \quad \underline{D}_{cris,L}(V) = (B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_L}$$

et

$$\underline{D}_{st,L}(V) = (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_L} .$$

L'inclusion naturelle de $L \otimes_{L_0} \underline{D}_{st,L}(V)$ dans $\underline{D}_{dR}(V)$ permet de considérer $\underline{D}_{st,L}(V)$ comme un (φ, N)–module filtré sur L, et $\underline{D}_{cris,L}(V)$ s'identifie au φ–module filtré sur L qui est le noyau de N agissant sur $\underline{D}_{st,L}(V)$.

Lorsque l'extension L/K est galoisienne, le groupe $G_{L/K}$ opère sur la situation. Le K–espace vectoriel filtré $\underline{D}_{dR}(V)$ s'identifie à $\underline{D}_{dR,L}(V)^{G_{L/K}}$ et $\underline{D}_{st,L}(V)$ devient un $(\varphi, N, G_{L/K})$–module filtré (n° 4.3.2). On peut considérer, de manière naturelle, $\underline{D}_{st,L}$ comme un foncteur additif de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dans $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$.

5.6.4. — Pour toute représentation p–adique V de G, on note $\underline{D}_{pst}(V)$ la limite inductive des $\underline{D}_{st,L}(V)$, pour L parcourant les extensions finies de K contenues dans $\overline{K}$. On peut considérer $\underline{D}_{pst}$ comme un foncteur additif de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ dans la catégorie $\underline{MF}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ des (φ, N, G)–modules discrets de dimension finie.

Si V et L sont comme ci–dessus, on a $\underline{D}_{st,L}(V) = \underline{D}_{pst}(V)^{G_L}$.

5.6.5. — Soit L une extension finie galoisienne de K contenue dans $\overline{K}$. Pour tout objet D de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$, le groupe G opère sur $B_{st} \otimes_{L_0} D$ (on a $g(b \otimes b) = gb \otimes gd$, si $g \in G$, $b \in B_{st}$ et $d \in D$) et

$$\underline{V}_{st,L}(D) = \{v \in B_{st} \otimes_{L_0} D \mid Nv = 0,\ \varphi v = v \text{ et } 1 \otimes v \in Fil^0(B_{st} \otimes D)_L\}$$

est stable par G. On peut donc considérer $\underline{V}_{st,L}$ comme un foncteur additif de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ dans la catégorie des $\mathbb{Q}_p[G]$–modules.

On dispose de même d'un foncteur additif de $\underline{MF}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ dans la catégorie des $\mathbb{Q}_p[G]$–modules : si D est un objet de $\underline{MF}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$, G opère sur $B_{st} \otimes_{\overline{K}_0} D$ et

$$\underline{V}_{pst}(D) = \{v \in B_{st} \otimes_{\overline{K}_0} D \mid Nv = 0,\ \varphi v = v \text{ et } 1 \otimes v \in Fil^0(B_{st} \otimes D)_{\overline{K}}\}$$

est stable par G.

5.6.6. — On dit qu'un objet D de $\underline{MF}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ est **admissible** s'il existe une représentation p-adique V potentiellement semi-stable et un isomorphisme de $\underline{D}_{pst}(V)$ sur D. On note $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ dont les objets sont ceux qui sont admissibles.

5.6.7. — L'énoncé suivant est une conséquence immédiate des résultats des n° 5.1, 5.3 et 5.4 :

THÉORÈME. — *i) Si V est une représentation p-adique de G, on a* $\dim_{\overline{K}_0} \underline{D}_{pst}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ *avec l'égalité si et seulement si V est potentiellement semi-stable ;*

ii) si V est une représentation p-adique potentiellement semi-stable, V est de de Rham et le K-espace vectoriel filtré $\underline{D}_{dR}(V)$ s'identifie à $(\overline{K} \otimes_{\overline{K}_0} \underline{D}_{pst}(V))^G$.

iii) si V est une représentation p-adique potentiellement semi-stable, l'isomorphisme naturel de B_{st}-modules

$$B_{st} \otimes_{\overline{K}_0} \underline{D}_{pst}(V) \longrightarrow B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

induit un isomorphisme des structures de (φ, N, G)-modules filtrés sous-jacentes ;

iv) comme sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$, $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ est stable par facteur direct, somme directe, produit tensoriel, dual; c'est une catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}_p$;

v) la restriction du foncteur $\underline{D}_{pst}$ à la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{pst}(G)$ est pleinement fidèle et induit une $\otimes$-équivalence entre $\underline{\mathrm{Rep}}_{pst}(G)$ et $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$, la restriction de $\underline{V}_{pst}$ à $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ étant un quasi-inverse ;

vi) tout (φ, N, G)-module filtré admissible est faiblement admissible ;

vii) si D est un (φ, N, G)-module filtré admissible, les sous-objets de D dans $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ sont les sous-objets de D dans $\underline{MF}^{f}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$.

5.6.8. — Remarques : *i*) Soit L une extension finie de K contenue dans $\overline{K}$. Disons qu'une représentation p–adique V de G est **semi–stable sur** L si $\dim_{L_0} \underline{D}_{st,L}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ et notons $\underline{\mathrm{Rep}}_{st,L}(G)$ la sous–catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ formée des représentations semi–stables sur L. On voit que, si V est semi–stable sur L, V est semi–stable sur toute extension finie L' de L contenue dans $\overline{K}$ et que $\underline{\mathrm{Rep}}_{pst}(G)$ est la réunion des $\underline{\mathrm{Rep}}_{st,L}(G)$ pour L parcourant les extensions finies de K contenues dans $\overline{K}$.

ii) De même, si L/K est de plus galoisienne, disons qu'un objet D de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ est **admissible** s'il existe un objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}_{st,L}(G)$ et un isomorphisme de $\underline{D}_{st,L}(V)$ sur D. Notons $\underline{MF}^{ad}_{L/K}(\varphi, N)$ la sous–catégorie pleine de $\underline{MF}_{L/K}(\varphi, N)$ dont les objets sont ceux qui sont admissibles. Alors $\underline{MF}^{ad}_{L/K}(\varphi, N)$ est stable par produit tensoriel et se trouve être une sous–catégorie stable par sous–objet et quotient de $\underline{MF}^{f}_{L/K}(\varphi, N)$. La restriction de $\underline{D}_{st,L}$ à $\underline{\mathrm{Rep}}_{st,L}(G)$ induit une $\otimes$–équivalence entre cette catégorie et $\underline{MF}^{ad}_{L/K}(\varphi, N)$ et la restriction de $\underline{V}_{st,L}$ est un quasi–inverse.

Si V est une représentation p–adique potentiellement semi–stable, V est semi–stable sur L si et seulement si $\underline{D}_{pst}(V)$ est semi–stable sur L (cf. n° 4.2.6). Il s'identifie alors à $\overline{K}_0 \otimes_{L_0} \underline{D}_{st,L}(V)$. Le foncteur

$$D \longmapsto \overline{K}_0 \otimes_{L_0} D$$

induit une équivalence entre la catégorie $\underline{MF}^{ad}_{L/K}(\varphi, N)$ et la sous–catégorie pleine de $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ formée des D tels qu'il existe une représentation p–adique V semi–stable sur L et un isomorphisme de $\underline{D}_{pst}(V)$ sur D.

iii) En remplaçant B_{st} par B_{cris}, on obtient la notion de représentation potentiellement cristalline : pour tout représentation p–adique V de G, on pose $\underline{D}_{cris,L}(V) = (B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_L}$ si L est une extension finie de K contenue dans $\overline{K}$ et $\underline{D}_{pcris}(V) = \lim.\mathrm{ind}.\underline{D}_{cris,L}(V)$. On dit qu'une représentation p–adique V de G_K **a bonne réduction sur** L (resp. est **potentiellement cristalline** si $\dim_{L_0} \underline{D}_{cris,L}(V)$ (resp. $\dim_{\overline{K}_0} \underline{D}_{pcris}(V)) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$. Il revient au même de dire que V est une représentation semi–stable sur L (resp.

potentiellement semi–stable) telle que $N = 0$ sur $\underline{D}_{st,L}(V)$ (resp. $\underline{D}_{pst}(V)$). Pour qu'une représentation V soit potentiellement cristalline, il faut et il suffit qu'il existe L tel que V ait bonne réduction sur L. La sous–catégorie pleine $\underline{\mathrm{Rep}}_{pcris}(G)$ de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ formée des représentations potentiellement cristallines est une sous–catégorie tannakienne; le foncteur $\underline{D}_{pcris}$ induit une $\otimes$–équivalence entre $\underline{\mathrm{Rep}}_{pcris}(G)$ et la sous–catégorie pleine $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ de $\underline{MF}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ formée des (φ, G)**–modules filtrés admissibles** (qui sont les (φ, N, G)–modules filtrés admissibles sur lesquels $N = 0$). Tout (φ, G)–module filtré admissible est faiblement admissible. La restriction du foncteur $\underline{V}_{pcris}$ qui, à tout (φ, G)–module filtré D associe le sous–$\mathbb{Q}_p[G]$–module de $B_{cris} \otimes_{\overline{K}_0} D$ formé des d tels que $\varphi d = d$ et dont l'image dans $B_{dR} \otimes_{\overline{K}_0} D = B_{dR} \otimes_K (\overline{K} \otimes_{\overline{K}_0} D)^G$ est dans le Fil^0, est un quasi–inverse.

iv) On prendra garde (cf. n° 5.2.3) que, si V est une représentation p–adique potentiellement semi–stable, la structure de (φ, N, G)–module filtré sur $\underline{D}_{pst}(V)$ dépend, en général, du choix de la valuation v et du prolongement log du logarithme usuel. Il en est de même de sa classe d'isomorphisme, ce qui fait qu'il se pourrait que la catégorie $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$ aussi (voir toutefois, la conjecture ci–dessous).

En revanche, il résulte facilement des considérations développées au n° 5.2.3 que **la classe d'isomorphisme de $\underline{D}_{pst}(V)$, en tant que** (φ, N, G)–**module, est indépendante de ces choix.**

5.6.9. Conjecture. — *On a* $\underline{MF}^{ad}_{\overline{K}/K}(\varphi, N) = \underline{MF}^{f}_{\overline{K}/K}(\varphi, N)$, autrement dit *tout* (φ, N, G)*–module filtré faiblement admissible est admissible.*

La validité de cette conjecture équivaut à celle du n° 5.4.4 non seulement pour K mais pour toute extension finie L de K contenue dans $\overline{K}$.

6. — Applications à la cohomologie

Nous ne donnons ici qu'un très bref aperçu. Outre les articles originaux, le lecteur souhaitant avoir une idée des techniques utilisées consultera avec profit l'exposé [Il90].

6.1. — Théorèmes de comparaison p–adique

6.1.1. — Si X est une variété propre et lisse sur K, les groupes d'hypercohomologie $(H^m_{dR}(X))_{m\in\mathbb{N}}$ du complexe de de Rham $\Omega^{\cdot}_{X/K}$ ont une structure naturelle de K–espaces vectoriels filtrés de dimension finie; tandis que les groupes de cohomologie étale p–adique $(H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))_{m\in\mathbb{N}}$ (où $X_{\overline{K}} = X \otimes \overline{K}$ et $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{lim.proj}_{\cdot n\in\mathbb{N}} H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$) sont munis d'une action naturelle de $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ qui en font des objets de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$.

6.1.2. — Conjecturé dans [Fo82a], le résultat suivant a été prouvé par Faltings ([Fa89])[5] :

THÉORÈME. — *Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et toute variété propre et lisse X sur K, on peut définir un isomorphisme de B_{dR}–espaces vectoriels, compatible avec la filtration et l'action de G,*

$$B_{dR} \otimes_K H^m_{dR}(X) \simeq B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \ .$$

Autrement dit, *la représentation p–adique $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est de de Rham et le K–espace vectoriel filtré $H^m_{dR}(X)$ s'identifie à $\underline{D}_{dR}(H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$.*

En outre l'isomorphisme construit par Faltings est fonctoriel en X et en K ; il commute aux cup–produits, aux applications cycles et à la dualité de Poincaré.

6.1.3. — L'isomorphisme ci–dessus induit un isomorphisme sur les gradués associés. Celui–ci s'énonce :

THÉORÈME. — *Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et toute variété propre et lisse X sur K, on peut définir un isomorphisme de B_{HT}–espaces vectoriels, compatible avec la graduation et l'action de G,*

$$B_{HT} \otimes_K H^m_{\mathrm{Hodge}}(X) \simeq B_{HT} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$$

[5] du moins dans le cas de bonne réduction. Il y a un point obscur dans la preuve de C_{dR} et il n'est pas clair que la démonstration s'applique sans hypothèse restrictive.

(où $H^m_{\mathrm{Hodge}}(X) = \oplus_{0\le i\le m} H^{m-i}(X, \Omega^i_{X/K})$). Autrement dit, *la représentation p-adique $H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est de Hodge–Tate et le K-espace vectoriel gradué $H^m_{\mathrm{Hodge}}(X)$ s'identifie à $\underline{D}_{HT}(H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$.*

Tout comme le précédent, cet isomorphisme est fonctoriel (en X et en K) et commute aux cup–produits, aux applications cycles et à la dualité de Poincaré.

Conjecturé par Tate ([Se68]), ce résultat a été démontré dans de nombreux cas particuliers ([Ta67], Raynaud *in* [Bo80], [Fo82b], [BK86], [FM87], [Hy88]) puis par Faltings ([Fa88])[6].

6.1.4. — Pour toute variété propre et lisse X sur K, appellons **modèle entier de X** ou **modèle de X sur $\mathcal{O}_K$** la donnée d'un schéma propre $\mathcal{X}$ sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K muni d'un isomorphisme de $\mathcal{X} \otimes K$ sur X.

On dit que X a **bonne réduction** s'il existe un modèle entier $\mathcal{X}$ de X qui est lisse sur $\mathcal{O}_K$. Etant donné un tel modèle, on peut, pour tout $m \in \mathbb{N}$, considérer le K_0–espace vectoriel $H^m_{cris}(\mathcal{X}_k)$ qui est le m-ième groupe de cohomologie cristalline de la fibre spéciale $\mathcal{X}_k = \mathcal{X} \otimes k$. Il est muni d'une action semi–linéaire de φ et le théorème de comparaison entre cohomologie cristalline de $\mathcal{X}_k$ et cohomologie de de Rham de X ([Be74], [BO78]) permet d'identifier $K \otimes_{K_0} H^m_{cris}(\mathcal{X}_k)$ à $H^m_{dR}(X)$ et munit donc $H^m_{cris}(\mathcal{X}_k)$ d'une structure de φ–module filtré. Celle–ci est indépendante du choix du modèle lisse $\mathcal{X}$ de X sur $\mathcal{O}_K$ ([GM87]; autrement dit la K_0–structure sur $H^m_{dR}(X)$ qui est $H^m_{cris}(\mathcal{X}_k)$ est indépendante du choix de $\mathcal{X}$, ainsi que l'action de φ sur cette K_0–structure), ce qui nous permet, sans ambiguïté, **de noter** $H^m_{cris}(X)$ l'objet de $\underline{MF}_K(\varphi)$ obtenu.

Conjecturé dans [Fo82a], démontré dans [FM87] lorsque $K = K_0$ et $m \le p-1$, le résultat suivant a été prouvé en toute généralité par Faltings ([Fa89]) :

THÉORÈME. — *Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et toute variété X propre et lisse sur K ayant bonne réduction, on peut définir un isomorphisme de B_{cris}–modules, compatibles avec l'action de φ, celle de G, et, lorsque l'on étend les scalaires*

[6] voir la note précédente.

à B_{dR}, avec la filtration

$$B_{cris} \otimes_{K_0} H^m_{cris}(X) \simeq B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \ .$$

Autrement dit, *la représentation p–adique $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est cristalline et $H^m_{cris}(X)$ s'identifie à $\underline{D}_{cris}(H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$, ou encore le φ–module filtré $H^m_{cris}(X)$ est admissible et $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ s'identifie à $\underline{V}_{cris}(H^m_{cris}(X))$.*

Ici encore, cet isomorphisme est fonctoriel (en X et en K) et commute aux cup–produits, aux applications cycles et à la dualité de Poincaré. Lorsque l'on étend les scalaires à B_{dR} on retrouve l'isomorphisme du n° 6.1.2.

6.1.5. — Disons qu'une variété X propre et lisse sur K a **potentiellement bonne réduction** s'il existe une extension finie L de K telle que $X_L = X \otimes L$ a bonne réduction. S'il en est ainsi, les résultats de Berthelot–Ogus et Gillet–Messing rappelés ci–dessus nous permettent d'**associer à** X un (φ, G)–module filtré $H^m_{pcris}(X)$, discret et de dimension finie (si $\mathcal{X}$ est un modèle lisse de $X \otimes L$ sur l'anneau des entiers d'une extension finie galoisienne L de K contenue dans $\overline{K}$, le $\overline{K}_0$–espace vectoriel sous–jacent à $H^m_{pcris}(X)$ est $\overline{K}_0 \otimes_{L_0} H^m_{cris}(\mathcal{X} \otimes k_L)$, où $\mathcal{X} \otimes k_L$ est la fibre spéciale de $\mathcal{X}$). Les propriétés de fonctorialité de l'isomorphisme du théorème précédent impliquent alors :

THÉORÈME. — *Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et toute variété X propre et lisse sur K ayant potentiellement bonne réduction, on peut définir un isomorphisme de B_{cris}–modules, compatible avec l'action de φ, celle de G, et, lorsque l'on étend les scalaires à B_{dR}, avec la filtration,*

$$B_{cris} \otimes_{\overline{K}_0} H^m_{pcris}(X) \simeq B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \ .$$

Autrement dit, *la représentation p–adique $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est potentiellement cristalline et $H^m_{pcris}(X)$ s'identifie à $\underline{D}_{pcris}(H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$, ou encore le (φ, G)–module filtré $H^m_{pcris}(X)$ est admissible et $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ s'identifie à $\underline{V}_{pcris}(H^m_{cris}(X))$.*

Comme les précédents, cet isomorphisme est fonctoriel et commute aux cup–produits, aux applications cycles et à la dualité de Poincaré.

6.2. — La conjecture de monodromie p–adique

6.2.1. CONJECTURE $\underline{C}_{pst}$. — *Soient $m \in \mathbb{N}$ et X une variété algébrique propre et lisse sur K. Alors la représentation p–adique $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est potentiellement semi–stable.*

C'est l'analogue p–adique du "théorème de monodromie ℓ–adique" de Grothendieck qui dit que, si ℓ est un nombre premier $\neq p$, alors l'action de l'inertie sur $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est quasi–unipotente, i.e., il existe un sous–groupe ouvert du sous–groupe d'inertie I_K de G qui agit de façon unipotente sur $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ (cf. [Exp.I], [Exp.VIII]).

6.2.2. — Supposons le corps résiduel k de K fini. Comme on l'a vu dans l'exposé I, le théorème de monodromie ℓ-adique résulte simplement dans ce cas de ce que l'action de l'inertie est quasi–unipotente sur toute représentation ℓ–adique de G. Grâce à Faltings, on sait que $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est de de Rham et on peut se demander s'il est vrai que toute représentation de de Rham est potentiellement semi–stable. Dans cette direction, Hyodo (non publié) a prouvé que si

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de représentations de de Rham et si V' et V'' sont potentiellement semi–stables, alors V l'est aussi. Autrement dit, si la question posée a une réponse positive, il suffit de le vérifier pour les représentations de de Rham qui sont simples.

Il se peut même que le fait que toute représentation de de Rham soit potentiellement semi–stable soit vrai sans supposer le corps résiduel fini. Je n'ai aucune raison sérieuse d'y croire ni de n'y pas croire !

6.2.3. — Encore grâce à Faltings, on voit que, si la conjecture $\underline{C}_{pst}$ est vraie, il existe sur le $\overline{K}$–espace vectoriel $H^m_{dR}(X_{\overline{K}}) = \overline{K} \otimes_K H^m_{dR}(X)$ une $\overline{K}_0$–structure $H^m_{pst}(X)$ munie d'une structure de (φ, N, G)–module discret de dimension finie. Il est tentant de **conjecturer l'existence d'une théorie de cohomologie $(H^m_{pst}(X))_{m\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans les (φ, N, G)–modules discrets de dimension finie et d'un isomorphisme de comparaison,**

G–**équivariant**

$$\overline{K} \otimes_{\overline{K}_0} H^m_{pst}(X) \simeq H^m_{dR}(X_{\overline{K}}) ,$$

induisant la structure de (φ, N, G)–module filtré sur $H^m_{pst}(X)$, l'isomorphisme de Faltings entre $\underline{D}_{dR}(H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$ et $H^m_{dR}(X)$ induisant un isomorphisme de (φ, N, G)–modules filtrés entre $\underline{D}_{pst}(H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$ et $H^m_{pst}(X)$ (et donc aussi un isomorphisme G–équivariant entre $\underline{V}_{pst}(H^m_{pst}(X))$ et $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$).

L'objet de la fin du n° 6.2 est de donner une forme plus précise à cette conjecture et de discuter des cas connus.

6.2.4. — Rappelons ([Ka88a]) qu'un log–schéma est un triplet formé d'un schéma Y, d'un faisceau en monoïdes commutatifs S sur $Y_{ét}$ et d'un morphisme de S sur le monoïde multiplicatif sous–jacent au faisceau structural, le tout assujetti à vérifier des propriétés convenables.

A tout schéma $\mathcal{X}$ sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, on peut associer un log–schéma $\mathcal{X}_{\log}$: le schéma sous–jacent est $\mathcal{X}$ et le monoïde est le sous–monoïde du monoïde multiplicatif sous–jacent à $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ formé des sections qui deviennent inversible dès que l'on rend p inversible. On a une notion de morphismes log–lisses de log–schémas (*loc. cit.*).

Disons qu'un schéma X propre et lisse sur K **a bonne** log–**réduction** s'il existe un modèle entier $\mathcal{X}$ de X tel que le morphisme structural

$$\mathcal{X}_{\log} \longrightarrow (\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K)_{\log}$$

soit log–lisse.

S'il en est ainsi, soit $\mathcal{X}_{\log,k}$ la fibre spéciale de $\mathcal{X}_{\log}$ au sens des log–schémas (de façon précise, si $\mathcal{X}_{\log} = (\mathcal{X}, S_{\mathcal{X}}, \rho)$, si $\mathcal{X}_k$ est la fibre spéciale de $\mathcal{X}$ et si $i : \mathcal{X}_k \to \mathcal{X}$ est l'immersion fermée correspondante, $\mathcal{X}_{\log,k}$ est le log–schéma associé au pré–log–schéma $(\mathcal{X}_k, i^* S_{\mathcal{X}}, i^*(\rho))$, cf. (*loc. cit.*) pour la notion de pré–log–schéma et de log–schéma associé).

Le morphisme de log–schémas $\mathcal{X}_{\log,k} \to (\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K)_{\log,k}$ est log–lisse (remarquer que le schéma sous–jacent à $(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K)_{\log,k}$ est $\operatorname{Spec} k$) et on peut alors définir la cohomologie cristalline à pôles logarithmiques du $(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K)_{\log,k}$–schéma à coefficients dans K_0 (cf. [Exp. V]). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}_{\log,k})$ est un K_0–espace vectoriel de dimension finie qui a une structure naturelle de

(φ, N)–module. On dispose en outre d'un isomorphisme de comparaison

$$K \otimes_{K_0} H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}_{\log,k}) \simeq H^m_{dR}(X)$$

qui permet de munir $H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}_{\log,k})$ d'une structure de (φ, N)–module filtré sur K. Il nous permet aussi de voir $H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}_{\log,k})$ comme un sous–K_0–espace vectoriel de $H^m_{dR}(X)$.

6.2.5. — Remarque : Disons que X, variété propre et lisse sur K, a **réduction semi–stable** s'il existe un modèle $\mathcal{X}$ de X sur $\mathcal{O}_K$ qui est semi–stable, i.e. qui est, localement pour la topologie étale, isomorphe à

$$\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K[t_1, t_2, \ldots, t_s]/(t_1 t_2 \cdots t_r - \pi)\,,$$

où $r \leq s$ sont des entiers et π est une uniformisante de $\mathcal{O}_K$. Dans ce cas, $\mathcal{X}_{\log} \to (\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K)_{\log}$ est log–lisse et les techniques de Hyodo et Kato s'appliquent.

6.2.6. — Il est raisonnable de conjecturer que l'analogue du résultat de Gillet–Messing rappelé au n° 6.1.4 reste vrai :

CONJECTURE. — *Soit X une variété algébrique propre et lisse sur K ayant bonne* log*–réduction et soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ deux modèles entiers* log*–lisses de X. Vus comme sous–K_0–espaces vectoriels de $H^m_{dR}(X)$, $H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}_{\log,k}) = H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}'_{\log,k})$ et cette identification est compatible avec l'action de φ et de N.*

Lorsque cette conjecture est vérifiée, le (φ, N)–module filtré $H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}_{\log,k})$ est indépendant du choix du modèle entier log–lisse et on le note $H^m_{st}(X)$.

6.2.7. CONJECTURE. — *Soient $m \in \mathbb{N}$, X une variété propre et lisse sur K ayant bonne* log*–réduction et $\mathcal{X}$ un modèle entier* log*–lisse de X. On peut définir un isomorphisme de B_{st}–modules, compatible avec l'action de φ et de N, et, lorsque l'on étend les scalaires à B_{dR}, avec la filtration,*

$$B_{st} \otimes_{K_0} H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}_{\log,k}) \simeq B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)\ .$$

La véracité de cette conjecture pour tout modèle entier log–lisse $\mathcal{X}$ de X implique la conjecture précédente. On souhaite bien sûr, que l'isomorphisme obtenu lorsque l'on étend les scalaires à B_{dR} soit celui construit par Faltings. Cela revient à dire que, lorsque l'on utilise l'isomorphisme de Faltings pour identifier $H^m_{dR}(X)$ à $\underline{D}_{dR}(H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$, $H^m_{st}(X)$ s'identifie, comme (φ, N)–module, à $(B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))^G$. Autrement dit, **la représentation $H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ devrait être semi–stable et le (φ, N)–module filtré $H^m_{st}(X)$ devrait s'identifier à $\underline{D}_{st}(H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$ (et par conséquent $H^m_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ devrait s'identifier à $\underline{V}_{st}(H^m_{st}(X))$).**

6.2.8. — Un tel isomorphisme a été construit par Kato ([Exp.VI]) lorsque la dimension de X est $< (p-1)/2$, du moins lorsque le modèle $\mathcal{X}$ est semi–stable.

6.2.9. CONJECTURE. — *Soit X une variété propre et lisse sur K. Il existe une extension finie L de K telle que $X_L = X \otimes L$ a bonne* log*–réduction.*

Une forme plus forte de cette conjecture consisterait à demander que X soit potentiellement semi–stable, i.e. qu'il existe une extension finie L de K telle que X_L ait réduction semi–stable. C'est vrai si X est une courbe ou une variété abélienne (cf. [SGA7]). Outre le fait que cette forme est peut–être trop optimiste, elle ne paraît pas très maniable car, si $\mathcal{X}$ est un modèle entier semi–stable de X_L sur $\mathcal{O}_L$ et si L' est une extension finie de L, $\mathcal{X} \otimes \mathcal{O}_{L'}$ n'est en général pas semi–stable sur $\mathcal{O}_{L'}$ (mais $(\mathcal{X} \otimes \mathcal{O}_{L'})_{\log} \to (\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{L'})_{\log}$ est log–lisse).

6.2.10. — Si $\mathcal{X}$ est un modèle entier de X_L, log–lisse sur $(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_L)_{\log}$, et si L' est une extension finie de L, alors $(\mathcal{X} \otimes \mathcal{O}_{L'})_{\log}$ est log–lisse sur $(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{L'})_{\log}$ et $H^m_{cris,\log}((\mathcal{X} \otimes \mathcal{O}_L)_{\log,k})$ s'identifie au (φ, N)–module filtré sur L' déduit par extension des scalaires de $H^m_{cris,\log}(\mathcal{X}_{\log,k})$. Ceci joint aux conjectures 6.2.6 (pour toute extension finie de K) et 6.2.9 doit permettre d'associer à toute variété algébrique X propre et lisse sur K et à tout entier m un (φ, N, G)–module filtré $H^m_{pst}(X)$, discret et de dimension finie (si L est une extension finie galoisienne de K telle que X_L a bonne log–réduction, le groupe $G_{L/K}$ opère de façon naturelle sur $H^m_{st}(X_L)$ qui devient un $(\varphi, N, G_{L/K})$–

module filtré et $H^m_{pst}(X)$ est le (φ, N, G)–module filtré déduit par extension des scalaires).

En appliquant les discussions du n° 6.2.7 à une extension finie galoisienne L de K convenable, on voit donc que **l'isomorphisme de Faltings devrait induire un isomorphisme de (φ, N, G)–modules**

$$B_{st} \otimes_{K_0} H^m_{pst}(X) \simeq B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \ ,$$

autrement dit, la représentation $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ devrait être potentiellement semi–stable et $H^m_{pst}(X)$ devrait s'identifier à $\underline{D}_{pst}(H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$ (ou encore le (φ, N, G)–module filtré $H^m_{pst}(X)$ devrait être admissible et $H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ devrait s'identifier à $\underline{V}_{st}(H^m_{pst}(X))$).

6.2.11. — Remarque : Soient $m \in \mathbb{N}$ et X une variété propre et lisse sur K. L'existence conjecturale du (φ, N)–module filtré $H^m_{pst}(X)$, muni de l'identification de $H^m_{dR}(X)$ à $(\overline{K} \otimes_{\overline{K}_0} H^m_{pst}(X))^{G_K}$ implique, puisque l'action de N sur $H^m_{pst}(X)$ est linéaire et commute à l'action de G_K que N opère sur $H^m_{dR}(X)$. On voudrait pouvoir définir *"directement"* cet endomorphisme nilpotent du K–espace vectoriel $H^m_{dR}(X)$; on devrait pouvoir y arriver en utilisant des techniques rigides analytiques. On prendra garde toutefois que cet opérateur N dépend du choix d'une valuation v de K (cf. n° 5.2.4).

6.3. — Le cas des motifs

6.3.1. — Il n'est pas dans notre intention de tenter de donner ici une définition de la catégorie des motifs (mixtes) sur K (cf. [De89], [Ja90] pour des commentaires généraux à ce sujet).

A un tel motif mixte doit être associé (entre autres) sa réalisation p–adique $H_p(M)$ qui est un $\mathbb{Q}_p$–espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G_K et sa réalisation de de Rham qui est un K–espace vectoriel filtré de dimension finie. On s'attend

i) à ce qu'il existe **un isomorphisme de comparaison**

$$B_{dR} \otimes H_{dR}(M) \simeq B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H_p(M) \ ,$$

compatible à l'action de G et à la filtration, autrement dit à ce que $H_p(M)$ **soit de de Rham** et à ce que $H_{dR}(M)$ **s'identifie à** $\underline{D}_{dR}(H_p(M))$;

ii) mieux, à ce qu'il **existe une "réalisation"** $H_{pst}(M)$ **de** M **dans la catégorie des** (φ, N, G_K)**–modules filtrés discrets de dimension finie,** le K–espace vectoriel filtré $H_{dR}(M)$ s'identifiant à $(\overline{K} \otimes_{\overline{K}_0} H_{pst}(M))^{G_K}$, **et un isomorphisme de comparaison**

$$B_{st} \otimes_{\overline{K}_0} H_{pst}(M) \simeq B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H_p(M) \ ,$$

compatible avec toutes les structures, autrement dit à ce que la représentation $H_p(M)$ **soit potentiellement semi–stable** et à ce que $H_{pst}(M)$ **s'identifie à** $\underline{D}_{pst}(H_p(M))$ (donc à ce que $H_{pst}(M)$ soit admissible et à ce que $H_p(M)$ s'identifie à $\underline{V}_{pst}(M)$)).

Ceci conduit en particulier à la notion de motif *"potentiellement semi–stable"* (resp. *"semi–stable"*, *"ayant bonne réduction"*, *"ayant potentiellement bonne réduction"* sur K) : il s'agit d'un motif M tel que la représentation $H_p(M)$ est potentiellement semi–stable (resp. semi–stable, cristalline, potentiellement cristalline) (conjecturalement, tout motif est donc potentiellement semi–stable). On prendra garde que, si X est une variété propre et lisse sur K qui a bonne réduction (resp. potentiellement bonne réduction, réduction semi–stable), alors le motif $M = H^*(X)$ a bonne réduction (resp. potentiellement bonne réduction, réduction semi–stable (au moins conjecturalement dans ce dernier cas)), mais qu'il devrait être facile de construire des exemples montrant que la réciproque est fausse en général.

6.3.2. — L'isomorphisme de comparaison pose déjà un problème pour un *"motif pur"*. Quitte à faire une *"torsion à la Tate"*, les différentes réalisations de ce motif M apparaissent chacune comme un morceau de la réalisation cohomologique correspondante d'une variété propre et lisse convenable X sur K. Par exemple, $H_p(M)$ s'identifie à un facteur direct de la représentation p–adique $H^*_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$ et $H_{dR}(M)$ s'identifie à un facteur direct de $H^*_{dR}(X)$.

Grâce à Faltings, $H_p(M)$ est donc de de Rham et la question est de savoir si, dans l'isomorphisme de comparaison de Faltings, $\underline{D}_{dR}(H_p(M)) \subset$

$\underline{D}_{dR}(H^*_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)) = H^*_{dR}(X)$ est bien $H_{dR}(M)$.

Lorsque le motif est défini *"à la Grothendieck"* cela résulte de la compatibilité de l'isomorphisme de Faltings aux applications cycles. Dans la pratique, ce n'est pas toujours le cas et on est conduit soit à prouver que le motif donné est bien obtenu à partir de correspondances, soit à trouver un argument direct. Ces deux approches ont été menées à bien dans le cas du motif associé à une forme modulaire ([Sc90], Faltings, non publié, voir cependant [Fa87], [Fa92a] et [Fa92b]).

Plus généralement, si l'on sait que $H^*_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est potentiellement semi-stable, si l'on sait définir $H^*_{pst}(X)$ et un isomorphisme $H^*_{pst}(X) \simeq \underline{D}_{pst}(H^*_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p))$, on voudrait savoir dire quel est le morceau du (φ, N, G)-module $H^*_{pst}(X)$ qui est $\underline{D}_{pst}(H_p(M))$. Dans le cas d'un motif associé à une forme modulaire de niveau premier à p les techniques de Scholl et de Faltings dont on vient de parler permettent de le faire. Un travail récent de Faltings ([Fa92b]) doit permettre de s'affranchir de cette restriction sur le niveau.

6.3.3. — Dans le cas général, si l'on veut être précis, on manque d'une bonne définition de la catégorie des motifs mixtes sur K. Toutefois certains résultats de Faltings sur la cohomologie des variétés ouvertes et sur la cohomologie *"à coefficients"* ([Fa90], [Fa92a], [Fa92b]) fournissent des exemples de représentations p-adiques qui sont de de Rham (et probablement aussi potentiellement semi-stables) et qui devraient être associées à des motifs mixtes sur K, mais pas toujours à des motifs purs.

Enfin, les 1-motifs de Deligne ([De74]) sur K forment une catégorie bien définie, qui devrait être une sous-catégorie pleine de la catégorie des motifs mixtes sur K. Pour un tel 1-motif M, on sait définir sa réalisation $\underline{H}_{pst}(M)$ (cf. [Exp.VII], [Fo93]) et on dispose de l'isomorphisme de comparaison souhaité entre $\underline{V}_{pst}(H_{pst}(M))$ et $H_p(M)$ ([Fo93]).

RÉFÉRENCES

[Be74a] P. BERTHELOT. — Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p \neq 0$, Lecture Notes in Maths 407, Springer, Berlin, 1974.

[Be75] P. BERTHELOT. — Slopes of Frobenius in crystalline cohomology, **in** *Algebraic Geometry* (Arcata 1974), *Proc. of Symposia in Pure Maths.*, vol. 29, Amer. Math. Soc., Providence, 1975, 315–328.

[Bo78] P. BERTHELOT and A. OGUS. — Notes on crystalline cohomology, Math. Notes, Princeton University Press, 1978.

[BK86] S. BLOCH and K. KATO. — p–adic étale cohomology, **Pub. Math. IHES**, 63 (1986), 107–152.

[Bo80] F. BOGOMOLOV. — Sur l'algébricité des représentations ℓ–adiques, CRAS, Paris 290 (1980), 701–703.

[De74] P. DELIGNE. — Théorie de Hodge III, **Pub. Math. IHES**, 44 (1974) 5–77.

[De89] P. DELIGNE. — Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, **in** Galois Groups over $\mathbb{Q}$, MSRI Publications 16, Springer 1989, 79–297.

[De90] P. DELIGNE. — Catégories tannakiennes, **in** *The Grothendieck Festschrift, vol. II*, Birkhäuser, Boston, 1990, 111–195.

[DM82] P. DELIGNE and J.S. MILNE. — Tannakian categories, **in** *Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties*, Lect. Notes in Math. 900, Springer, Berlin, 1982, 101–228.

[Fa87] G. FALTINGS. — Hodge–Tate Structures and Modular Forms, **Math. Annal.** 278 (1987), 133–149.

[Fa88] G. FALTINGS. — p–adic Hodge Theory, **Journal of the A.M.S.**, 1 (1988), 255–299.

[Fa89] G. FALTINGS. — Crystalline cohomology and p–adic Galois representations, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins University Press, 1989, 25–80.

[Fa90] G. FALTINGS. — F–isocrystals on open varieties, results and conjectures, **in** The Grothendieck Festschrift, vol. II, Birkhäuser, Boston, 1990, 219–248.

[Fa92a] G. FALTINGS. — Crystalline Cohomology semi–stable curves, and p–adic Galois representations, Journal of Algebraic Geometry 1 (1992), 61–82.

[Fa92b] G. FALTINGS. — Crystalline Cohomology of semi–stable curves – The $\mathbb{Q}_p$–theory, preprint, Princeton University, 1992.

[Fo79] J.–M. FONTAINE. — Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti–Tate, **in** *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes* (III), Astérisque 65, Soc. Math. de France, Paris, 1979, 3–80.

[Fo82a] J.–M. FONTAINE. — Sur certains types de représentations p–adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti–Tate, **Ann. of Maths**, 115 (1982), 529–577.

[Fo82b] J.–M. FONTAINE. — Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux, **Inv. Math.** 65 (1982), 379–409.

[Fo83] J.–M. FONTAINE. — Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p–adiques, **in** *Algebraic Geometry Tokyo–Kyoto*, Lecture Notes in Maths 1016, Springer, Berlin, 1983, 86–108.

[Fo91] J.–M. FONTAINE. — Représentations p–adiques des corps locaux, **in** *The Grothendieck Festschrift, vol. II*, Birkhäuser, Boston, 1991, 249–309.

[Fo93] J.–M. FONTAINE. — Log–motifs et 1–motifs sur les corps p–adiques, en préparation.

[FL82] J.–M.. FONTAINE et G. LAFFAILLE. — Construction de représentations p–adiques, **Ann. Scient. E.N.S.**, 15 (1982), 547–608.

[FM87] J.–M. FONTAINE and W. MESSING. — p–adic Periods and p–adic étale Cohomology, **Contemporary Mathematics**, 67 (1987), 179–207.

[GM87] H. GILLET and W. MESSING. — Cycle classes and Riemann-Roch for Crystalline cohomology, **Duke Math. J.**, 55 (1987), 179–207.

[Hy88] O. HYODO. — A note on p–adic étale cohomology in the semi–stable reduction case, **Inv. Math.** 91 (1988), 543–557.

[Il90] L. ILLUSIE. — Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p–adique, Séminaire Bourbaki, juin 1990.

[Ja90] U. JANNSEN. — Mixed motives and algebraic K–theory, Lectures Notes in Math. 1400, Springer, Berlin 1990.

[Ka88a] K. KATO. — Logarithmic structures of Fontaine–Illusie, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, The Johns Hopkins University Press, 1989, 191–224.

[La80] G. LAFFAILLE. — Groupes p–divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié, **Bull. Soc. Math. France**, 108 (1980), 187–206.

[Sa72] N. SAAVEDRA RIVANO. — *Catégories Tannakiennes*, Lectures Notes in Maths 265, Springer, Berlin 1972.

[Sc90] A. SCHOLL. — Motives for modular forms, Invent. Math. 100 (1990), 419–430.

[Sen73] S. SEN. — Lie algebras of Galois groups arising from Hodge–Tate modules, **Ann. of Math.**, 97 (1973), 160–170.

[Sen80] S. SEN. — Continuous Cohomology and p–adic Galois Representations, **Inv. Math.**, 82 (1980), 89–116.

[Se67] J.-P. SERRE. — Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p–divisibles, *Oeuvres, vol. II*, Springer, Berlin, 1986, 325–338.

[Se68] J.-P. SERRE. — Résumé des cours de 1967–68, *Oeuvres, vol. II*, Springer, Berlin, 1986, 528–531.

[Se89] J.-P. SERRE. — *Abelian ℓ–adic Representations and Elliptic Curves*, 2° éd., Addison–Wesley, Redwood City 1989.

[Ta67] J. TATE. — p–divisible Groups, **in** *Proc. of a conf. on local Fields*, NUFFIC Summer School, Driebergen, Springer, Berlin, 1967, 158–183.

[SGA7] A. GROTHENDIECK *et al.* — *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois–Marie 1967–69, Lecture Notes in Maths 288, Springer, Berlin 1972.

[Exp.I] L. ILLUSIE. — Autour du théorème de monodromie locale, exposé I, *dans ce volume.*

[Exp.II] J.–M. FONTAINE. — Le corps des périodes p–adiques, exposé II, *dans ce volume.*

[Exp.IV] B. PERRIN-RIOU. — Représentations p–adiques ordinaires, exposé IV, *dans ce volume.*

[Exp.V] O. HYODO and K. KATO. — Semi–stable reduction and crystalline cohomology with log poles, exposé V, *dans ce volume.*

[Exp.VI] K. KATO. — Semi–stable reduction and p–adic étale cohomology, exposé VI, *dans ce volume.*

[Exp.VII] M. RAYNAUD. — 1–Motifs et monodromie géométrique, exposé VII, *dans ce volume.*

[Exp.VIII] J.–M. FONTAINE. — Représentations ℓ–adiques potentiellement semi–stables, exposé VIII, *dans ce volume.*

Jean–Marc Fontaine
URA D0752 du C.N.R.S.
Mathématiques, Bât. 425
Université Paris–Sud
91405 ORSAY CEDEX
FRANCE