PIERRE DOLBEAULT

Sur la théorie des résidus en plusieurs variables

Astérisque, tome 217 (1993), p. 85-101

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__217__85_0>

SUR LA THÉORIE DES RÉSIDUS EN PLUSIEURS VARIABLES

Pierre DOLBEAULT

0 HISTORIQUE ET INTRODUCTION.

0.1

Après plusieurs essais incorrects, la théorie des résidus en plusieurs variables a été fondée par H. Poincaré en 1887 pour les intégrales doubles rationnelles [19] ; E. Picard a établi un théorème fondamental sur les résidus des intégrales simples de troisième espèce sur les surfaces algébriques [18] repris et généralisé par A. Weil [24] sur une variété kählérienne compacte.

Les courants de de Rham ont été introduits dans la théorie des résidus dans les années 30, puis plus systématiquement dans les années 50 avec l'étude de la valeur principale de Cauchy dans des cas particuliers faute de disposer de la réduction des singularités [12], [22], [6].

La théorie de Leray [14] précisée par Norguet [15] est essentiellement cohomologique (1959).

Au début des années 70 le théorème de résolution des singularités d'Hironaka (1964) a permis de définir et d'étudier les valeurs principales et les courants résidus [7], [11] ; les propriétés relatives aux opérateurs différentiels semi-holomorphes, introduites par L. Schwartz [22], ont été systématiquement utilisées, [7].

Des formules de résidus relatives à des généralisations des fonctions méromorphes ont été obtenues peu après [20], [13].

Puis des généralisations des courants résidus au cas d'une famille finie d'hypersurfaces ont été introduites sous le nom de courants résiduels par Coleff-Herrera. Des applications à la cohomologie des courants ont alors été possibles [3], [5].

En 1986, Passare [16] et Yger ont donné de nouvelles définitions des courants résiduels et la structure des courants résiduels a commencé à être étudiée à l'aide de la définition naïve des opérateurs différentiels holomorphes [8],[9]. De nombreux travaux portant sur des hypersurfaces algébriques ou utilisant le complexe de faisceaux des opérateurs différentiels holomorphes sont très récents ou en cours (Yger, Berenstein, Gay, Dickenstein-Sessa, Passare-Tsikh, Bjork...).

0.2 Le but de cet article d'exposition est, après un rappel de la situation à une variable et des définitions les plus faciles à décrire, d'indiquer une interprétation de morphismes en homologie et en cohomologie à l'aide des courants résiduels dans l'esprit de la théorie de Leray selon ([1], chapitre I) et une relation entre les courants résiduels et les résidus composés introduits initialement par Leray.

Des résultats récents sur la structure des courants résiduels sont indiqués ([1], chapitre II). Enfin quelques problèmes sont posés et d'autres approches sont décrites succinctement.

Plan :

1. Dimension 1.
2. Formes différentielles semi-méromorphes ; opérateurs différentiels semi-holomorphes.
3. Courants résiduels.
4. Homomorphismes résidus.
5. Structure des courants résiduels dans le cas des croisements normaux.
6. Structure locale des courants résiduels.
7. Problèmes et autres approches.

1 DIMENSION 1.

1.1

Soit U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}$ et $\omega = g(z)$ une fonction méromorphe sur U ayant le seul pôle 0, alors

$$g(z) = \sum_{\ell=1}^{k} a_{-\ell}\, z^{-\ell} + \text{ fonction holomorphe } = h(z)z^{-k}, h \in \mathcal{O}(U), h(0) \neq 0.$$

Pour une forme test $\psi \in \mathcal{D}^2(U), g\psi$ n'est pas intégrable en général, soit

$$I_\varepsilon(\psi) = \int_{|z| \geq \varepsilon} g\psi.$$

On montre facilement, en utilisant les coordonnées polaires au voisinage de 0, que $\lim_{\varepsilon-0} I_\varepsilon(\psi) = Vp[\omega](\psi)$ existe : $Vp[\omega]$ est un courant (de de Rham) sur U, d'ordre $(k-1)$, indépendant du choix de la coordonnée z et est appelé *valeur principale de Cauchy de* ω.

1.2

Au lieu de g, on considère aussi $\omega = g\alpha$, où α est une forme différentielle C^∞ de degré 0,1,2 sur U ; ω est appelée une forme différentielle *semi-méromorphe* (s.m.) sur U. Alors

$$Vp[\omega](\psi) = Vp[g\alpha](\psi) = \lim_{\varepsilon-0} \int_{|z| \geq \varepsilon} g\alpha \wedge \psi, \tag{1.1}$$

par définition, i.e. (1.2)

$$Vp[g\alpha] = Vp[g]\alpha.$$

1.3

Le *courant résidu* de $\omega = g\alpha$, où $\deg \omega = \deg \alpha = r$ est, par définition

$$\operatorname{Res}[\omega] = dVp[\omega] - Vp[d\omega]$$

$\operatorname{Res}[\omega]$ est de degré $r+1$, donc nul si $r \geq 2$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}^{1-r}(U)$, la formule de Stokes entraîne

$$\operatorname{Res}[\omega]\varphi = \lim_{\varepsilon-0} \int_{|z|=\varepsilon} \omega \wedge \varphi.$$

Exemple. Soit $\omega = gdz$, alors $d\omega = 0$ sur $U \backslash \{0\}$ et on a

$$\operatorname{Res}[\omega] = 2\pi i \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{1}{j!} a_{-j-1} (\partial^j / \partial z^j) \delta_0 \tag{1.3}$$

$$\operatorname{Res}[\omega] = 2\pi i \operatorname{res}_0(\omega)\delta_0 + dB \tag{1.4}$$

où δ_0 est la mesure de Dirac en 0, où $a_{-1} = \mathrm{res}_0(\omega)$ est le résidu de Cauchy de ω en 0 et $B = 2\pi i \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j (1/j!) a_{-j-1} (\partial^{j-1}/\partial z^{j-1}) \varepsilon_0 d\bar{z}$ avec $\delta_0 = \varepsilon_0 d\bar{z} \wedge dz$, ε_0 étant un courant de degré 0.

On remarque que spt $\mathrm{Res}[\omega] = \{0\}$, que le courant résidu contient toute l'information sur la partie principale de g en 0, que $\mathrm{Res}[\omega]$ est cohomologue au courant d'intégration $2\pi i\ \mathrm{res}_0(\omega)$ et que

$$\mathrm{Res}[\omega] = D\delta_0$$

où D est l'opérateur différentiel holomorphe $\sum_{j=0}^{k-1} b_j(\partial^j/\partial z^j)$ où $b_j = (-1)^j 2\pi i (1/j!) a_{-j-1}$.

1.4 On se propose de généraliser ce qui précède à plusieurs variables complexes et d'exploiter les généralisations des relations (1.2) et (1.3).

2 FORMES DIFFÉRENTIELLES SEMI-MÉROMORPHES ; - OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS SEMI-HOLOMORPHES.

Soit X une variété analytique complexe, de dimension complexe n, de faisceau structural $\mathcal{O}$.

2.1

Une forme différentielle ω, C^∞ sur un ouvert dense de X est dite semi-méromorphe sur X si tout point $x \in X$ a un voisinage ouvert U_x sur lequel $\omega = \frac{\alpha}{f}$ où $\alpha \in \mathcal{E}^\bullet(U_x)$ (forme différentielle C^∞ sur U_x) ; $f \in \mathcal{O}(U_x)$; $\{z \in U_x$; $f(z) = 0\}$ est appelé un *ensemble polaire* de ω sur U_x.

L'ensemble des germes de formes différentielles semi-méromorphes (s.m.) est un faisceau $\mathcal{S}^\bullet$ de $\mathcal{O}$-modules. L'ensemble $\mathcal{S}^\bullet_Z = \mathcal{E}^\bullet_X(*Z)$ des formes semi-méromorphes sur X ayant leur ensemble polaire contenu dans l'hypersurface complexe Z de X est un sous-faisceau de $\mathcal{O}$-modules de $\mathcal{S}^\bullet$.

2.2

Un opérateur différentiel D sur l'espace $'\mathcal{D}_\bullet(X)$ des *courants* sur X est appelé *semi-holomorphe* (o.d.s.h.) si, pour tout $T \in' \mathcal{D}_\bullet(X)$, tout coefficient de DT dans un domaine de coordonnées, est une combinaison linéaire à coefficients C^∞ de dérivées $(\partial^\alpha/\partial z^\alpha)$ des coefficients de T ; cette notion est intrinsèque. Ex. : $d' = \sum_{j=1}^{n}(\partial/\partial z_j)dz_j$.

L'ensemble des o.d.s.h. est un anneau non commutatif Δ ; il opère aussi sur les formes différentielles semi-méromorphes sur X ; $'\mathcal{D}_\bullet(X)$, $\mathcal{S}^\bullet(X), \mathcal{S}^\bullet_Z(X)$ sont des Δ-modules.

2.3

Une hypersurface complexe Z de X est à *croisements normaux* si, pour tout $x \in Z$, il existe une carte locale (z, U_x) centrée en x telle que, pour $z = (z_1, \ldots, z_n)$, on ait

$$U_x \cap Z = \{z \in U_x \; ; \; z_1(z) \times \ldots \times z_q(z) = 0 \; ; \; q \leq n\}. \tag{2.1}$$

2.4

Une forme semi-méromorphe ω, sur un ouvert U de X est dite *élémentaire* s'il existe une carte (z, U_x) avec $U_x = U$ et si un ensemble polaire de ω est contenu dans $U_x \cap Z$ comme ci-dessus en (2.1), i.e.

$$\omega = \alpha/z^s \; ; \; s = (s_1, \ldots, s_q, \; 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^n.$$

3 COURANTS RÉSIDUELS (Coleff-Herrera, Passare, Yger)([2], [16], [25]).

3.1 Notations.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq p \leq n-1$; sur X, soit $\mathcal{F} = \{Y_1, \ldots, Y_p, Y_{p+1}\}$ une famille ordonnée de $(p+1)$ hypersurfaces analytiques complexes de X, on pose :

$$\mathcal{F}(j) = \{Y_1, \ldots, \widehat{Y}_j, \ldots, Y_{p+1}\} \; ; \; j \in [1, \ldots, p+1]$$

$$\widetilde{Y} = U\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^{p+1} Y_j \; ; \quad \widetilde{Y}(j) = \cup\mathcal{F}(j)$$

$$Y = \cap\mathcal{F} = \bigcap_{j=1}^{p+1} Y_j \; ; \qquad Y(j) = \cap\mathcal{F}(j).$$

3.2 Définition de Passare [16]

Soit χ une fonction C^∞ : $I\!R^+ \to [0,1]$ prenant la valeur 0 sur l'intervalle [0,1] et la valeur 1 sur l'intervalle $[c_2, +\infty[$ où $1 < c_2$.

Soient $f_1, \ldots, f_{p+1}$, $g_1, \ldots, g_{p+1} \in \mathcal{O}(X)$ telles que $g_j = u_j f_j$; $u_j \in \mathcal{O}(X)$; $j = 1, \ldots, p+1$; le plus souvent, on supposera u_j sans zéro.

On pose $Y_j = f_j^{-1}(0)$ et on utilise les notations 3.1.

Soit $\Sigma = \{s = (s_1, \ldots, s_{p+1}) \in I\!R^{p+1} \; ; \; s_j > 0, \Sigma s_j = 1\}$ le p-simplexe canonique de $I\!R^{p+1}$.

Pour $\varepsilon > 0$, on considère $\chi_j = \chi\left(|g_j|/\varepsilon^{s_j}\right)$; $j = 1, \ldots, p+1$.

On pose :

$R^p P\left[\dfrac{1}{f}\right](\varepsilon^s) = (1/f_1 \ldots f_{p+1}) d''\chi_1 \wedge \ldots \wedge d''\chi_p \; \chi_{p+1}$;$R^p\left[\dfrac{1}{f}\right](\varepsilon^s) = (1/f_1 \ldots f_p) d''\chi_1 \wedge \ldots \wedge d''\chi_p$.

A l'aide du théorème de résolution des singularités d'Hironaka, on montre que, pour presque tout $s \in \Sigma$,

$$R^p P[1/f][s] = \lim_{\varepsilon \to 0} R^p P[1/f](\varepsilon^s) \text{ et } R^p[1/f][s] = \lim_{\varepsilon \to 0} R^p[1/f](\varepsilon^s)$$

existent.

Par définition

$$R^p P_{\mathcal{F}}[1/f] = \int_\Sigma R^p P[1/f][s] dS \; ; \; R^p_{\mathcal{F}(p+1)}[1/f] = \int_\Sigma R^p[1/f][s] dS$$

où dS est la mesure de Lebesgue, de masse totale 1, sur Σ.

Si $\omega = \alpha/f$; $\alpha \in \mathcal{E}^\bullet(X)$, par définition

$$\begin{aligned} R^p P_{\mathcal{F}}[\omega] &= R^p P_{\mathcal{F}}[1/f] \wedge \alpha \text{ noté aussi} \\ & d''[1/f_1] \wedge \ldots \wedge d''[1/f_p][1/f_{p+1}] \wedge \alpha \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} R^p_{\mathcal{F}(p+1)}[\omega] &= R^p_{\mathcal{F}(p+1)}[1/f] \wedge \alpha \text{ noté aussi} \\ & d''[1/f_1] \wedge \ldots \wedge d''[1/f_p] \wedge \alpha \end{aligned} \tag{3.2}$$

$R^pP_{\mathcal{F}}[\omega]$ (resp. $R^p_{\mathcal{F}(p+1)}[\omega]$) est appelé le p-ième *résidu-valeur principale* (resp. *résidu*) de la forme semi-méromorphe ω, relatif à la famille $\mathcal{F} = (Y_1, \dots, Y_{p+1})$ (resp. $(Y_1, \dots, Y_p)$).

3.3 Propriétés.

1) spt $R^pP_{\mathcal{F}}[\omega]$ et spt $R^p_{\mathcal{F}(p+1)}[\omega]$ sont contenus dans $\cap\mathcal{F}(p+1)$; en fait (Passare, [17]) ils sont contenus dans un ensemble analytique complexe de codimension p.

2) Dans les expressions (3.1) et (3.2) $d''[1/f_j]$ est appelé un facteur résidu ; alors $R^pP_{\mathcal{F}}[\omega]$ et $R^p_{\mathcal{F}(p+1)}[\omega]$ sont alternés par rapport aux facteurs résidus.

3) Dans le cas où $\mathcal{F}(p+1)$ et $\mathcal{F}$ sont en position d'intersection complète (i.e. $\dim_{\mathbb{C}} \cap\mathcal{F}(p+1) = n - p$; $\dim_{\mathbb{C}} \cap\mathcal{F} = n - p - 1$), on a les propriétés suivantes :

(i) $R^pP_{\mathcal{F}}[\omega]$ et $R^p_{\mathcal{F}(p+1)}[\omega]$ sont aussi les courants résiduels de Coleff-Herrera ;

(ii) $R^{p+1}_{\mathcal{F}}[\omega] = dR^pP_{\mathcal{F}}[\omega] - (-1)^pR^pP_{\mathcal{F}}[d\omega]$;

(iii) Si $\omega \in \Gamma(X, \mathcal{E}^q_X(*\tilde{Y}(j)))$, $j \in [1, \dots, p]$ on a la propriété de *régularité* :

$$R^pP_{\mathcal{F}}[\omega] = R^{p+1}_{\mathcal{F}}[\omega] = 0.$$

Si $\omega \in \Gamma(X, \mathcal{E}^q_X(*\tilde{Y}(p+1)))$, alors

$$R^pP_{\mathcal{F}}[\omega] = R^p_{\mathcal{F}(p+1)}[\omega] \text{ et } R^{p+1}_{\mathcal{F}}[\omega] = 0.$$

4) La Δ-*linéarité* est vérifiée par les opérateurs R^0P, R^1P et, pour une famille $\mathcal{F}$ fixée, par $R^pP_{\mathcal{F}}$ et $R^p_{\mathcal{F}(p+1)}$.

5) $d''R^pP = R^{p+1}$.

6) La définition de $R^pP_{\mathcal{F}}$ et de $R^p_{\mathcal{F}(p+1)}$ est locale, donc passe aux faisceaux. $'\mathcal{D}_{\bullet}{}_{,Y(p+1)^{\infty}}$ désignant le faisceau des courants sur X, à support dans $Y(p+1)$, $R^pP_{\mathcal{F}}$ et $R^p_{\mathcal{F}(p+1)}$ sont des homomorphismes de faisceaux
$\mathcal{E}^{\bullet}_X(*\tilde{Y}) \to' \mathcal{D}_{\bullet}{}_{,Y(p+1)^{\infty}}$
$\mathcal{E}^{\bullet}_X(*\tilde{Y}(p+1)) \to' \mathcal{D}_{\bullet}{}_{,Y(p+1)^{\infty}}$ resp.

3.4 Justification de la définition des courants résiduels.

Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_x$ de x dans X et un morphisme d'Hironaka $\pi : \tilde{\mathcal{U}}_x \to \mathcal{U}_x$ application analytique complexe propre telle que si $V_g = \{z \in \mathcal{U}_x, \prod_{j=1}^{p+1} g_j = 0\}$, alors $\pi|\tilde{\mathcal{U}}_x \backslash \pi^{-1}(V_g)$ est un isomorphisme et $\pi^{-1}(V_g)$ est à croisements normaux dans $\tilde{\mathcal{U}}_x$; on a $V_f \subset V_g$, alors $\pi^{-1}(V_f) \subset \pi^{-1}(V_g)$.

Alors tout point $\xi \in \tilde{\mathcal{U}}_x$ a un voisinage $\mathcal{V}_\xi$ avec des coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$ centrées en ξ telles que

$$\pi^* g_j(z) = w_j(z)\, z^{b_j}, b_j \in \mathbb{N}^n, w_j \in \mathcal{O}^*(\mathcal{V}_\xi) ;$$

$$\pi^* f_j(z) = u_j(z)\, z^{a_j} ; a_j \leq b_j ; u_j \in \mathcal{O}^*(\mathcal{V}_\xi).$$

En utilisant une partition C^∞ de l'unité sur X, on peut supposer que les formes test ψ sur X sur lesquelles opèrent les courants considérés ont leur support compact dans $\mathcal{U}_x$.

π étant propre π^{-1} (spt ψ) est recouvert par un nombre fini de $\mathcal{V}_\xi$. En utilisant une partition C^∞ de l'unité dans $\tilde{\mathcal{U}}_x$, $R^pP[1/f][s](\psi)$ est une somme finie de termes de la forme

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathcal{V}_\xi} (1/u_1 \ldots u_{p+1}) z^{-\alpha} d''\tilde{\chi}_1 \wedge \ldots \wedge d''\tilde{\chi}_p\ \tilde{\chi}_{p+1} \wedge \eta_\xi\ \pi^*\psi$$

avec $\alpha = \Sigma a_j \quad \eta_\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{V}_\xi), \tilde{\chi}_j = \chi(|w_j|\ |z_j|^{b_j}/\varepsilon^{s_j})$.

L'existence est donc à prouver pour une forme semi-méromorphe élémentaire, par un calcul direct dont l'essentiel est déjà dans Coleff-Herrera [2].

4 HOMOMORPHISMES RÉSIDUS (Boudiaf [1], chapitre I).

4.1 Hypothèses et notations.

On fait les hypothèses globales de 3.1 et on suppose, en outre, que, pour tout $2 \leq j \leq p+1$, chaque sous-famille $\mathcal{F}_j = \{Y_1, \ldots, Y_j\}$ est en position d'intersection complète. On a alors les suites exactes de complexes de faisceaux

$$0 \to \mathcal{E}_X^\bullet(*\tilde{Y}(p+1)) \xrightarrow{j} \mathcal{E}_X^\bullet(*\tilde{Y}) \xrightarrow{s} Q_{X,p+1} \to 0$$

$$0 \to \mathcal{D}_{\bullet, Y^\infty} \xrightarrow{j} \mathcal{D}_{\bullet, Y(p+1)^\infty} \xrightarrow{\pi} \mathcal{D}_{\bullet, Y(p+1)/Y^\infty} \to 0$$

qui définissent des faisceaux quotients ; $'\mathcal{D}_{\bullet\, Y(p+1)/Y^\infty}$ est le sous-complexe des faisceaux de courants de X à support dans $Y(p+1)\backslash Y$ qui se prolongent en courants à support dans $Y(p+1)$.

4.2 THÉORÈME.

Dans les hypothèses et notations de 4.1. on a des homomorphismes canoniques

$$
\begin{array}{rlcll}
RP_{\mathcal{F}} = & R_{\mathcal{F}(p+1)} & : & \mathcal{E}_X^\bullet(*\tilde{Y}(p+1)) & \longrightarrow\ '\mathcal{D}_{2n-\bullet-p,Y(p+1)^\infty} \\
 & RP'_{\mathcal{F}} & : & \mathcal{E}_X^\bullet(*\tilde{Y}) & \longrightarrow\ '\mathcal{D}_{2n-\bullet-p,Y(p+1)/Y^\infty} \\
 & R'_{\mathcal{F}} & : & Q'_{X,p+1} & \longrightarrow\ '\mathcal{D}_{2n-\bullet-p-1,Y^\infty}
\end{array}
$$

qui induisent le diagramme de cohomologie suivant à carrés commutatifs ou anticommutatifs

$$
\begin{array}{lcccccccc}
(A)\ldots & \xrightarrow{\delta} & H^q\Gamma(X,\mathcal{E}_X^\bullet(*\tilde{Y}(p+1))) & \xrightarrow{i} & H^q\Gamma(X,\mathcal{E}_X^\bullet(*\tilde{Y})) & \longrightarrow & H^q\Gamma(X,Q^\bullet_{X,p+1}) & \xrightarrow{\delta} & \ldots \\
 & & \downarrow \overline{R}_{\mathcal{F}(p+1)} & & \downarrow \overline{RP'_{\mathcal{F}}} & & \downarrow \overline{R'}_{\mathcal{F}} & & \\
(B)\ldots & \xrightarrow{\delta} & H_{2n-q-p}\Gamma(X,\ '\mathcal{D}_{\bullet,Y(p+1)^\infty}) & \longrightarrow & H_{2n-q-p}\Gamma(X\,;\ '\mathcal{D}_{\bullet,Y(p+1)/Y^\infty}) & \longrightarrow & H_{2n-q-p-1}\Gamma(X,\ '\mathcal{D}_{\bullet,Y^\infty}) & \xrightarrow{\delta} & \ldots
\end{array}
$$

Ce diagramme est compatible avec le diagramme

$$
\begin{array}{lcccccccc}
(C)\ldots & \longrightarrow & H^{q+p}_{Y(p+1)}(X\,;\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^{q+p}_{Y(p+1)\backslash Y}(X\,;\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^{q+p+1}_{Y}(X\,;\mathbb{C}) & \longrightarrow & \ldots \\
\downarrow \cap\ [X] & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(D)\ldots & \longrightarrow & H_{2n-q-p}(Y(p+1)\,;\mathbb{C}) & \longrightarrow & H_{2n-q-p}(Y(p+1)\backslash Y\,;\mathbb{C}) & \longrightarrow & H_{2n-q-p-1}(X\,;\mathbb{C}) & \longrightarrow & \ldots
\end{array}
$$

où (C) est la suite exacte de cohomologie à supports et où (D) est la suite exacte d'homologie de Borel-Moore du couple de fermés $Y, Y(p+1)$ de X et où $\cap\,[X]$ désigne le cap-produit par la classe fondamentale de X, inverse de l'isomorphisme de Poincaré.

La compatibilité citée ci-dessus signifie l'existence d'un diagramme commutatif ou anticommutatif de morphismes de suites exactes :

$$(*)\qquad \begin{array}{ccc} (A) & & \\ & \searrow & \\ \downarrow & & (C) \\ (B) & & \downarrow \\ & \searrow & \\ & & (D) \end{array}$$

4.3 Schéma de démonstration.

La démonstration $(A) \to (B)$ repose sur les propriétés ii) et iii) de 3.3.3).
$(C) \to (D)$ est classique,
$(B) \to (D)$ provient d'isomorphismes de théorèmes de de Rham en homologie. Pour définir les flèches $(A) \to (C)$ comme composées de deux homomorphismes connus, par exemple, on définit $I(*p)$ par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & H^q\Gamma(X\,;\mathcal{E}^\bullet_X(*\tilde{Y}(p+1)) \\ I(*\tilde{Y}(p+1)) & & \\ \swarrow & & \\ H^q(X\backslash\tilde{Y}(p+1)\,;\mathbb{C}) & & \downarrow I(*p) \\ \mathrm{res}^p_{\mathcal{F}(p+1)} \quad \searrow & & \\ & & H^{q+p}_{Y(p+1)}(X\,;\mathbb{C}) \end{array}$$

où $I(*\tilde{Y}(p+1))$ est un isomorphisme d'intégration et $\mathrm{res}^p_{\mathcal{F}(p+1)}$ est un résidu composé introduit par J. Leray [14] dans le cas où les hypersurfaces Y_j sont lisses et en position générale, qui a été généralisé par G. Sorani [23] et finalement par J.B. Poly [21]. (voir aussi une annonce dans [10], 5.1).

La commutativité (resp. anticommutativité) du diagramme $(*)$ est établie en adaptant à ce cas plus compliqué, la technique de Herrera-Lieberman pour le cas $p = 1$ [11].

4.4 COROLLAIRE.

Les homomorphismes résidus composés $res^p_{\mathcal{F}(p+1)}, \ldots$ *sont égaux à isomorphisme près aux homomorphismes résiduels* $\overline{R}_{\mathcal{F}(p+1)}, \ldots$

4.5 Application dans le cas $p = 1$.

THÉORÈME. - *Soit D un diviseur à coefficients complexes de X. Alors il existe une hypersurface Y de X et une forme $\lambda \in \Gamma(X, \mathcal{E}^1_X(*Y))$ telles que*

(*i*) $\mathrm{spt} D \subset Y$;

(*ii*) $D = R^1[\lambda]$ *et* $d\lambda \in \Gamma(X, \mathcal{E}^2_X)$;

(*iii*) *Si D est homologue à 0, alors on peut supposer* $d\lambda = 0$.

C'est une extension du théorème de Picard [18].

5 STRUCTURE DES COURANTS RÉSIDUELS DANS LE CAS DES CROISEMENTS NORMAUX.

Dans les sections 5 et 6, on suppose $\mathcal{F} = \{Y_1, \ldots, Y_p\}$. Dans les notations de 3.1, on suppose que $\mathcal{F}$ est en position d'intersection complète et que $\cup\mathcal{F}$ est à croisements normaux. On considère une forme différentielle semi-méromorphe ω, dont un ensemble polaire est $\tilde{Y} = \cup\mathcal{F}$. Alors, localement, X est un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{C}^n$ où les coordonnées sont $(z_1, \ldots, z_n)$, tel que, sur $U, f_j(z) = z_{K_j}^{a_{K_j}+1}$ où les K_j sont des parties disjointes de $\{1, \ldots, n\}$ et où $a_{K_j} + 1 = (a_{k_j} + 1, k_j \in K_j) \in \mathbb{N}^{\mathrm{card} K_j}$ [1].

5.1 Cas des courants résiduels définis par une forme s.m. élémentaire [1].

PROPOSITION. *Soit ω une forme différentielle semi-méromorphe élémentaire* $\prod_{j=1}^{p} f_j^{-1}\alpha$ *sur un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{C}^n$, où α est C^∞ et où f_j est définie ci-dessus. Alors le courant résiduel $R^p_{\mathcal{F}}[\omega]$ est obtenu par action d'opérateurs différentiels holomorphes sur des courants d'ordre* 0.

Schéma de la démonstration. Il suffit de considérer le cas $\alpha = 1$. D'après la formule de dérivation d'un produit et la propriété 3.3. 4), on a :

$$R^p_{\mathcal{F}}[\omega] = \frac{1}{a_{K_1}! \dots a_{K_p}!} \left(\partial^{|a_{K_1}|+\dots+|a_{K_p}|} \Big/ \partial z_{K_1}^{a_{K_1}} \dots \partial z_{K_p}^{a_{K_p}} \right) R^p_{\mathcal{F}} \left[\frac{1}{z_{K_1} \dots z_{K_p}} \right].$$

D'après un résultat de Passare [16] en notant $z_{K_\ell}(k_\ell) = z_{K_\ell}/z_{k_\ell}$, on a

$$R^p_{\mathcal{F}} \left[\frac{1}{z_{K_1} \dots z_{K_p}} \right] = \sum \frac{1}{z_{K_1}(k_1) \dots z_{K_p}(k_p)} R^p \left[\frac{.\,1}{z_{k_1} \dots z_{k_p}} \right]$$

où k_j parcourt $K_j, j = 1, \dots, p$; d'où l'expression de $R^p_{\mathcal{F}} \left[\frac{1}{z_{K_1} \dots z_{K_p}} \right]$ comme produit du courant d'intégration sur $Y = \cap \mathcal{F}$ et de fonctions localement intégrables sur Y. □

5.2 Cas des croisements normaux pour $p = n$ [1] et $p = 1$ [8].

Si $p = n$, le support de $R^p_{\mathcal{F}}[\omega]$ est un ensemble de points isolés dont la réunion est $Y = \cap \mathcal{F}$. Soit (U_ℓ) un recouvrement de X par des ouverts de cartes possédant la propriété suivante : ou bien $U_\ell \cap Y = \phi$ et on note p_ℓ un point quelconque de U_ℓ, ou bien $U_\ell \cap Y$ est un point unique noté p_ℓ. Soit $z^{(\ell)}$ une carte sur U_ℓ centrée en p_ℓ et (ψ_ℓ) une partition C^∞ de l'unité subordonnée au recouvrement (U_ℓ).

Dans les notations de 5.1, $R^p_{\mathcal{F}} \left[\frac{1}{z_1 \dots z_n} \right] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \delta_0$. Alors il existe un o.d.s.h. $D = \sum_\ell \psi_\ell \frac{\partial^{J_\ell}}{\partial z^{(\ell) J_\ell}}$, où J_ℓ est un multiindice et une combinaison linéaire $T = \sum_\ell a_\ell \delta_{p_\ell}$, $a_\ell \in \mathbb{C}$ tels que $R^p_{\mathcal{F}}[\omega] = DT$.

Si $p = 1$, à l'aide d'une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement par des ouverts de cartes, on montre l'existence d'un champ de vecteurs semi-holomorphe τ, de formes élémentaires ω^s_ℓ à support dans U_ℓ, à pôles simples dans $Y \cap U_\ell$ et d'o.d.s.h. D^s_ℓ à support dans U_ℓ tels que

$$R^1 [\omega] = \sum_{s,\ell} D^s_\ell \int_Y \tau \,\mathrm{L}(\omega^s_\ell \wedge .)$$

où L désigne le produit intérieur [8].

6 STRUCTURE LOCALE DES COURANTS RÉSIDUELS DANS LE CAS GÉNÉRAL.

On utilise les notations de 3.1.

6.1 Cas $p = 1$ (Letellier et Dolbeault [9]).

Soit $\omega = \frac{\alpha}{f}$ une forme différentielle s.m. dans un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}^n$; $\alpha \in \mathcal{E}^{\cdot}(U)$; $f \in \mathcal{O}(U)$. Pour simplifier l'énoncé, nous supposons $\alpha = 1$. Alors, pour U assez petit, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^{n,n-1}(U)$, $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j$ où φ_j ne contient pas le facteur $d\bar{z}_j$, on a :

$$R^1\,[\omega](\varphi) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k} D_k\, Vp_k^j \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\, \mathrm{L}\varphi_j \right) \tag{6.1}$$

où les D_k sont des opérateurs différentiels holomorphes dans U, et les Vp_k^j les images directes, par l'injection canonique, de valeurs principales sur les composantes irréductibles de $Y = f^{-1}(0)$.

D_k et Vp_k^j sont connus explicitement à partir de f.

6.2

Un résultat de même nature, mais moins précis, sur $R^p_{\mathcal{F}}[\omega]$, est valide pour tout entier $p \leq n$ dans le cas intersection complète ([9] [4]).

6.3 Un exemple [1]

. Dans les conditions de 6.1, soit $f = z_1^2 - z_2^5$ dans $\mathbb{C}^2$ (coordonnées z_1, z_2), alors $R^1 \left[\frac{1}{f}\right]$ ne peut pas être obtenu par l'application d'opérateurs différentiels holomorphes sur U à un courant d'ordre 0 : on montre, en effet, que dans l'expression (6.1) pour $\omega = \dfrac{1}{f}$ il existe des valeurs principales non triviales.

Cependant ([9], 6.4.5), la courbe analytique complexe $Y = f^{-1}(0)$ ayant une représentation paramétrique par une variable complexe t, la valeur principale figurant dans (6.1) peut être obtenue par application d'un opérateur différentiel en t à une fonction L^1_{loc} sur Y.

7 PROBLÈMES ET AUTRES APPROCHES.

1. **Les homomorphismes résidus** sont bien étudiés dans le cas où les sous-familles $\mathcal{F}_j$ sont en position d'intersection complète (section 4.1). Que dire dans le cas général et même dans le cas où on suppose seulement la famille $\mathcal{F}$ en position d'intersection complète ? Utilisant la définition de Coleff-Hèrrera, Boudiaf n'a pas obtenu de relation satisfaisante avec les résidus composés.

Problème. Reprendre la question avec la définition de Passare et utiliser la propriété 3.3.1) du support d'un courant résiduel.

2. **Description du courant résiduel.**

2.1. Dans le cas d'une famille $\mathcal{F}$ en position d'intersection complète, trouver une description aussi précise que dans le cas d'une seule hypersurface.

2.2. Trouver une description du courant résiduel dans le cas non intersection complète.

2.3. Trouver un théorème de structure pour les courants résiduels analogue au théorème de structure de Harvey-Shiffman pour les chaînes holomorphes.

3. Berndtsson et Passare ont obtenu une expression du principe fondamental d'Ehrenpreis-Palamodov utilisant des courants résiduels (dans le cas intersection complète) ; expliciter la relation avec l'expression classique du principe fondamental pour tout p ; cela n'a été fait que pour $p = n$ dans ([1], chapitre II).

4. **Autres approches récentes.**

Dickenstein et Sessa (C.R.A.S.**315**, 729-744, 1992) ont obtenu une extension des résultats de [5] sur la cohomologie modérée. Une définition des courants résiduels équivalente à celle (ci-dessus) de Passare utilise une généralisation du prolongement méromorphe en λ de $|f|^\lambda$ où f est holomorphe et λ complexe (Passare, Yger, cf. aussi les travaux de C. Sabbah). Des problèmes algébriques et arithmétiques sont abordés (Berenstein, Yger, Gay) à l'aide des courants résiduels (cf. par exemple, B. Teissier, Sém. Bourbaki, novembre 1989). Bjork (exposé au Sém. d'Analyse, Paris, 19 mai 1992) utilise la théorie des $\mathcal{D}$-modules. A.K. Tsikh (et l' école de Krasnoyarsk) donne des applications des courants résiduels à la théorie des fonctions, à la géométrie algébrique, au calcul des séries et intégrales doubles (cf. Tsikh, "Multidimensional residues and their applications", Translations of Math. Monographs **103**, A.M.S., July 1992 ; édition en Russe 1988). Enfin Passare et Tsikh ont obtenu une expression de la transformée de Mellin d'une intégrale résiduelle (prépublication, 1992).

Références

[1] D. BOUDIAF, Sur les courants résiduels, thèse, Paris VI, juin 1992.

[2] N. COLEFF, M. HERRERA, Les courants résiduels associés à une forme méromorphe. Springer Lecture Notes **633**, (1978).

[3] N. COLEFF, M. HERRERA, D. LIEBERMAN, Algebraic cycles as residues of meromorphic forms. Math. Ann. **254**, p. 73-87 (1980).

[4] A. DICKENSTEIN, Residues and ideals (preprint 1989).

[5] A. DICKENSTEIN and C. SESSA, Canonical representatives in moderate cohomology. Inv. Math. **80**, p. 417-434 (1985).

[6] P. DOLBEAULT, Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe II. Ann. Math. **65**, p. 282-330 (1957).

[7] P. DOLBEAULT, Résidus et courants, Questions on algebraic varieties. C.I.M.E., p. 1-28 (1970).

[8] P. DOLBEAULT, Sur la structure des courants résiduels. Revue Roum. Math. **33**, p. 31-37 (1988).

[9] P. DOLBEAULT, On the structure of residual currents, in Math. Notes **38**, Princeton Univ. Press, p. 258-273 (1993).

[10] P. DOLBEAULT, Theory of residues in several variables, Global analysis..., 1972. Inter. atomic energy agency, Vienna, II, p. 74-96, (1974).

[11] M. HERRERA, D. LIEBERMAN, Residues and principal values on complex spaces. Math. Ann. **194**, p. 259-294 (1971).

[12] K. KODAIRA, The theorem of Riemann-Roch on compact analytic surfaces. Am. J. Math. **73**, p. 813-875 (1951).

[13] C. LAURENT-THIEBAUT, Produits de courants et formule des résidus, Bull. Sci. Math. **105**, p. 113-158 (1981).

[14] J. LERAY, Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy III). Bull. Soc. Math. Fr. **87**, p. 81-180 (1959).

[15] F. NORGUET, Sur la théorie des résidus, C.R. Acad. Sci., Paris **248**, p. 2057-2059 (1959).

[16] M. PASSARE, A calculus for meromorphic currents. J. Reine Angew. Math., **392**, p. 37-56, (1988).

[17] M. PASSARE, in Math. Notes **38**, Princeton Univ. Press.

[18] E. PICARD, Sur les intégrales des différentielles totales de troisième espèce dans la théorie des surfaces algébriques. Ann. Sc. E. N. S., (1901).

[19] H. POINCARÉ, Sur les résidus des intégrales doubles. Acta Math. **9**, p. 321-380 (1887).

[20] J. POLY, Formule des résidus et intersection des chaînes sous-analytiques, Thèse, Poitiers (1974).

[21] J. POLY, Morphismes de Mayer-Vietoris et résidus composés, (non publié).

[22] L. SCHWARTZ, Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe. Coll. inter. C.N.R.S., **52**, Géométrie différentielle, p. 185-195 (1953).

[23] G. SORANI, Sui residui delle forme differenziali di una varietà analitica complessa. Rend. Math. Appl. **22**, p. 1-23, (1962).

[24] A. WEIL, Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe. Comment. Math. Helv. **20**, p. 110-116 (1947).

[25] A. YGER, Formules de division et prolongement méromorphe, Sém. d'Analyse. Springer Lect. Notes 1295, p. 226-283 (1987).

Une liste plus complète de références jusqu'à 1987 se trouve dans "Encyclopaedia of Math. Sciences", vol. 7, pp.238-241, Springer-Verlag, (1990).

Pierre Dolbeault
Université de Paris VI
U.A. du C.N.R.S. n° 213
4, place Jussieu
75252 PARIS