Astérisque

JEAN-PIERRE VIGUÉ

Le lemme de Schwarz et la caractérisation des automorphismes analytiques

Astérisque, tome 217 (1993), p. 241-249

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__217__241_0>

LE LEMME DE SCHWARZ ET LA CARACTÉRISATION DES AUTOMORPHISMES ANALYTIQUES

Jean-Pierre VIGUÉ

1. Introduction

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque-unité ouvert dans $\mathbb{C}$. Le lemme de Schwarz donne la caractérisation suivante des automorphismes analytiques de Δ laissant l'origine fixe.

Théorème 1.1. - *Soit $f : \Delta \longrightarrow \Delta$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$, et que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

(i) *il existe z_0 non nul dans Δ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$,*

(ii) $|f'(0)| = 1$.

Alors il existe un nombre complexe λ de module 1 tel que $f(z) = \lambda z$, et f est un automorphisme analytique de Δ.

Le but de notre étude est la généralisation de cette caractérisation à des domaines bornés de $\mathbb{C}^n$. La première généralisation est dûe à H. Cartan [2].

Théorème 1.2. - *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, soit $a \in D$, et soit $f : D \longrightarrow D$ une application holomorphe telle que $f(a) = a$. Supposons que le déterminant jacobien de $f'(a)$ soit de module 1, ou, ce qui revient au même, que toutes les valeurs propres de $f'(a)$ soient de module 1. Alors f est un automorphisme analytique de D.*

Ce théorème est dans une certaine mesure, une bonne généralisation de la condition (ii) du théorème 1.1. Que peut-on dire sur la condition (i) ? Pour simplifier, supposons, du moins pour l'instant, que D est la boule-unité de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\|.\|$, et soit $f : D \longrightarrow D$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$. Le lemme de Schwarz et le théorème de Hahn-Banach montrent que, pour tout $z \in D, \|f(z)\| \leq \|z\|$. Si on suppose qu'il existe un voisinage U de l'origine tel que, pour tout $z \in U, \|f(z)\| = \|z\|$, on montre assez facilement que f est un automorphisme linéaire de D.

Cependant, cette hypothèse est, dans un certain sens, trop forte : ainsi, si D est la boule-unité de $\mathbb{C}^n$ pour la norme hermitienne [7] ou un domaine borné symétrique irréductible classique [9 et 11], on a le résultat suivant : si $f : D \longrightarrow D$ est une application holomorphe, telle que $f(0) = 0$, et s'il existe un ouvert U non vide tel que, pour tout $z \in U$, on ait $\|f(z)\| = \|z\|$, alors f est un automorphisme linéaire de D.

Dans ce travail, nous allons d'abord montrer une généralisation de ce résultat à la boule-unité ouverte D de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\|.\|$ telle que la frontière ∂D de D soit une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^n$. D'autre part, dans le cas du disque-unité Δ, le lemme de Schwarz-Pick (voir par exemple S. Dineen [3]) donne une caractérisation des automorphismes analytiques f de Δ qui n'ont pas forcément de points fixes. Nous donnerons ici une caractérisation des automorphismes analytiques d'un domaine borné convexe (ou même des isomorphismes analytiques d'un domaine borné convexe sur un domaine borné). Pour cela, nous remplacerons l'hypothèse que la frontière ∂D de D est analytique réelle par une hypothèse semblable pour les boules pour la distance de Carathéodory, ou pour les indicatrices pour la métrique infinitésimale associée.

2. Distance de Carathéodory et géodésiques complexes

La distance de Carathéodory c_D sur un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$ est défini par la formule :

$c_D(x, y) = \sup_{f \in H(D,\Delta)} \rho(f(x), f(y))$,

où ρ est la distance de Poincaré sur le disque-unité Δ. De même, la métrique infinitésimale associée E_D est définie (voir [3, 4 et 6]) par

$E_D(x, v) = \sup_{f \in H(D,\Delta)} |f'(x).v|, \ (x \in D, v \in \mathbb{C}^n)$.

D'après E. Vesentini [12 et 13], on dit qu'une application holomorphe φ du disque-unité Δ dans D est une géodésique complexe de D si φ est une isométrie pour les distances de Carathéodory c_Δ et c_D. D'après E. Vesentini [13], nous avons la caractérisation suivante des géodésiques complexes de D.

Théorème 2.1. - *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. Soit $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ une application holomorphe, et supposons que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :*

$(i) E_D(\varphi(0), \varphi'(0)) = 1$;

(ii) *il existe deux points distincts α et β de Δ tels que*

$$c_D(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = c_\Delta(\alpha, \beta).$$

Alors φ est une géodésique complexe de D.

Démonstration. Supposons par exemple que (ii) est vrai. A l'aide du théorème de Montel, on montre qu'il existe une application holomorphe f de D dans Δ telle que

$$\rho(f(\varphi(\alpha)), f(\varphi(\beta))) = \rho(\alpha, \beta).$$

Quitte à composer f avec un automorphisme analytique de Δ, on peut supposer que

$$f\circ\varphi(\alpha) = \alpha, f\circ\varphi(\beta) = \beta.$$

D'après le lemme de Schwarz, $f\circ\varphi = \mathrm{id}_\Delta$, et comme les applications holomorphes sont contractantes pour la distance de Carathéodory, ceci suffit à démontrer le résultat. Le cas (i) se traite de manière analogue.

Soit maintenant D la boule-unité ouverte de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\|\cdot\|$. Pour tout $x \neq 0$ de $\mathbb{C}^n$, le théorème 2.1 et le théorème de Hahn-Banach montrent que l'application de Δ dans D

$$\zeta \longrightarrow \varphi(\zeta) = \zeta \frac{x}{\|x\|}$$

est une géodésique complexe de D.

Rappelons qu'un point x appartenant à la frontière de D est un point complexe-extremal de $\overline{D}$ si la relation $x + \zeta y \in \overline{D}$ pour tout $\zeta \in \Delta$ entraîne $y = 0$. On déduit de E. Vesentini [12 et 13] le résultat suivant.

Théorème 2.2. – *Supposons que $\frac{x}{\|x\|}$ soit un point complexe-extremal de $\overline{D}$. Alors l'application φ définie par $\varphi(\zeta) = \zeta \frac{x}{\|x\|}$ est l'unique géodésique complexe de D telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = \frac{x}{\|x\|}$.*

Nous pouvons alors montrer le lemme suivant.

Lemme 2.3. – *Soient D_1 et D_2 deux domaines bornés de $\mathbb{C}^n$, et soit $f : D_1 \longrightarrow D_2$ une application holomorphe. Soit a un point de D, et soit v un vecteur non nul de $\mathbb{C}^n$ tel que*

$E_{D_2}(f(a), f'(a).v) = E_{D_1}(a, v)$.

Si $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ est une géodésique complexe de D_1 telle que $\varphi(0) = a$ et que $\varphi'(0)$ soit colinéaire à v, alors $f\circ\varphi$ est une géodésique complexe de D_2.

Démonstration. Soit φ une géodésique complexe de D_1 telle que $\varphi(0) = a$ et que $\varphi'(0)$ soit colinéaire à v. D'après le lemme 2.1,

$$E_{D_1}(\varphi(0), \varphi'(0)) = 1.$$

D'après l'hypothèse du lemme, ceci entraîne que

$$E_{D_2}(f\circ\varphi(0), (f\circ\varphi)'(0)) = 1,$$

et $f \circ \varphi$ est une géodésique complexe de D_2.

On déduit en particulier de ce résultat que, pour tout point x appartenant à l'image de φ, on a

$$c_{D_2}(f(a), f(x)) = c_{D_1}(a, x).$$

Signalons enfin que, d'après un résultat de L. Lempert [8] et de H. Royden et P. Wong [10], étant donné un domaine borné convexe D de $\mathbb{C}^n$, il existe toujours des géodésiques complexes dans D. Plus précisément, étant donnés deux points a et b de D, il existe une géodésique complexe φ telle que a et b appartiennent à $\varphi(\Delta)$; de même, étant donnés un point a de D et un vecteur v de $\mathbb{C}^n$, il existe une géodésique complexe $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ telle que $\varphi(0) = a$ et que $\varphi'(0)$ soit colinéaire à v.

3. Le cas où la frontière de D est analytique-réelle

Nous allons montrer le théorème suivant [14].

Théorème 3.1. - *Soit D la boule-unité ouverte de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\|\cdot\|$, et supposons que la frontière ∂D de D soit une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^n$. Soit $f : D \longrightarrow D$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$ et qu'une des hypothèses suivantes soit satisfaite :*

(H_1) *il existe un ouvert non vide U de D tel que, pour tout $x \in U$,*

$$\|f(x)\| = \|x\| \,;$$

(H_2) *il existe un ouvert non vide V de D tel que, pour tout $x \in V$,*

$$c_D(f(0), f(x)) = c_D(0, x) \,;$$

(H_3) *il existe un ouvert non vide V dans l'espace tangent $T_0(D)$ de D à l'origine 0 tel que, pour tout $v \in V$,*

$$E_D(f(0), f'(0).v) = E_D(0, v).$$

Alors, f est un automorphisme linéaire de D.

Démonstration. Dans la boule-unité D de $\mathbb{C}^n$ pour la norme $\|\cdot\|$, il est facile de voir que

$$c_D(0, x) = c_\Delta(0, \|x\|),$$

et ceci montre que les hypothèses (H_1) et (H_2) sont équivalentes. Plaçons-nous d'abord dans l'une des hypothèses (H_1) ou (H_2). Soit $x \neq 0$ un vecteur de U. L'application holomorphe φ de Δ dans D définie par

$$\zeta \longrightarrow \varphi(\zeta) = \zeta \frac{x}{\|x\|}$$

est une géodésique complexe de D. Comme $\|f(x)\| = \|x\|$, ou ce qui revient au même, $c_D(f(0), f(x)) = c_D(0, x)$, on déduit du théorème 2.1 que $f \circ \varphi$ est une géodésique complexe de D. Comme les points de ∂D sont des points complexe-extremaux de $\overline{D}$, le théorème 2.2 et E. Vesentini [13] montrent que

$$f(\varphi(\zeta)) = \zeta \frac{f(x)}{\|f(x)\|}.$$

Considérons maintenant le développement de f en série de polynômes homogènes au voisinage de l'origine. On a :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z),$$

où P_n est un polynôme homogène de degré n. Par composition des développements, on trouve que

$$f(\varphi(\zeta)) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\zeta \frac{x}{\|x\|}) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n P_n(\frac{x}{\|x\|}).$$

Or, on vient de montrer que

$$f(\varphi(\zeta)) = \zeta \frac{f(x)}{\|f(x)\|}.$$

On en déduit que, pour tout $n \geq 2$, pour tout $x \in U, P_n(\frac{x}{\|x\|})$ et par suite $P(x)$ sont nuls. Le théorème de prolongement analytique montre que, pour tout $n \geq 2$, P_n est identiquement nul. Ainsi, f est linéaire.

Si on se place maintenant dans l'hypothèse (H_3), pour tout vecteur v appartenant à l'ouvert V de $T_0(D), v \neq 0$, l'application φ de Δ dans D

$$\varphi(\zeta) = \zeta \frac{v}{\|v\|}$$

est une géodésique complexe tangente en 0 à $\frac{v}{\|v\|}$. On déduit du théorème 2.1 que $f \circ \varphi$ est une géodésique complexe, et, d'après le théorème 2.2, elle est donc de la forme

$$f(\varphi(\zeta)) = \zeta(f'(0) \cdot \frac{v}{\|v\|})$$

et le reste de la démonstration est inchangé.

Ainsi donc, sous l'une des hypothèses du théorème, on peut supposer qu'il existe un ouvert U non vide de $\mathbb{C}^n$, tel que, pour tout $x \in U, \|f'(0).x\| = \|x\|$.

Considérons maintenant l'application φ

$$\partial D \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

$$x \longrightarrow f'(0).x$$

Nous savons qu'il existe un ouvert non vide V de ∂D tel que $\varphi(V) \subset \partial D$. Comme ∂D est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^n$, on déduit du théorème de prolongement analytique que $\varphi(\partial D) \subset \partial D$. Ainsi donc, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\|f'(0).x\| = \|x\|$. On considère alors $g = f'(0)^{-1} \circ f$. C'est une application holomorphe de D dans D telle que $g(0) = 0, g'(0) = \mathrm{id}$. On déduit du théorème d'unicité de H. Cartan que $g = \mathrm{id}$; par suite, f est un automorphisme linéaire de D.

Signalons pour conclure, que l'on peut, par des méthodes semblables [14], montrer un lemme de Schwarz dans les domaines bornés symétriques irréductibles et certains domaines bornés strictement convexes.

4. Généralisations au cas sans point fixe

Si on ne suppose pas que f admet un point fixe, la caractérisation des automorphismes analytiques de D est plus délicate. Dans l'esprit des résultats du paragraphe 3, nous allons montrer une caractérisation des isomorphismes analytiques d'un domaine borné convexe sur un autre à l'aide de la métrique infinitésimale de Carathéodory. Pour cela, nous aurons besoin d'une hypothèse supplémentaire sur la frontière des boules pour la distance de Carathéodory, ou sur l'indicatrice pour la métrique infinitésimale associée.

Théorème 4.1. – *Soient D_1 et D_2 deux domaines bornés de $\mathbb{C}^n$, et supposons que D_1 soit convexe. Soit a un point de D_1, et soit $f : D_1 \longrightarrow D_2$ une application holomorphe. Supposons que l'une des deux hypothèses suivantes soit vérifiée :*

(H_1) *Supposons que*

$$S_1 = \{v \in \mathbb{C}^n | E_{D_1}(a, v) = 1\}$$

$$\text{et } S_2 = \{v \in \mathbb{C}^n | E_{D_2}(f(a), v) = 1\}$$

soient des sous-variétés analytiques réelles de $\mathbb{C}^n$. Supposons qu'il existe un ouvert U non vide de $\mathbb{C}^n$ tel que, pour tout $v \in U$, on ait

$$E_{D_2}(f(a), f'(a).v) = E_{D_1}(a, v).$$

(H_2) *Supposons qu'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que les sphères pour la distance de Carathéodory*

$$C_1 = \{x \in D_1 | c_{D_1}(a, x) = r\}$$

$$\text{et } C_2 = \{x \in D_2 | c_{D_2}(a, x) = r\}$$

soient des sous-variétés analytiques réelles de $\mathbb{C}^n$. *Supposons qu'il existe un ouvert non vide* U *de* C_1 *tel que, pour tout* $x \in U$, *on ait*

$$c_{D_2}(f(a), f(x)) = c_{D_1}(a, x).$$

Alors, f *est un isomorphisme analytique de* D_1 *sur* D_2.

Démonstration. Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse (H_1). On peut bien sûr supposer que U est un cône de $\mathbb{C}^n$. Pour tout v appartenant à $U \cap S_1, f'(a).v$ appartient à S_2. Le théorème de prolongement analytique montre que $f'(a)$ envoie S_1 dans S_2. Ceci signifie que $f'(a)$ est une isométrie pour les métriques infinitésimales $E_{D_1}(a,.)$ et $E_{D_2}(f(a),.)$.

Dans l'hypothèse (H_2), on montre de même que $f(C_1)$ est contenu dans C_2. Si on considère alors une géodésique complexe $\varphi : \Delta \longrightarrow D_1$ telle que $\varphi(0) = a$, le théorème 2.1 montre que $f \circ \varphi$ est une géodésique complexe de D_2. On en déduit que $f'(a)$ est une isométrie pour les métriques infinitésimales $E_{D_1}(a,.)$ et $E_{D_2}(f(a),.)$.

Sous cette hypothèse, montrons maintenant que, pour tout $x \in D_1$,

$$c_{D_2}(f(a), f(x)) = c_{D_1}(a, x).$$

En effet, nous avons déjà dit qu'étant donnes deux points x et y de D_1, il existe une géodésique complexe $\varphi : \Delta \longrightarrow D_1$ telle que x et y appartiennent à $\varphi(\Delta)$. Soit donc φ une géodésique complexe telle que $\varphi(0) = a$ et que $\varphi(\zeta) = x$, pour un certain $\zeta \in \Delta$. Comme $f'(a)$ est une isométrie pour la métrique infitésimale de Carathéodory, on a, pour tout $v \in \mathbb{C}$:

$$E_{D_2}((f \circ \varphi)(0), (f \circ \varphi)'(0).v) = E_{D_1}(\varphi(0), \varphi'(0).v) = E_{\Delta}(0, v).$$

D'après le théorème 2.1, $f \circ \varphi$ est une géodésique complexe. On a donc :

$$c_{D_2}((f \circ \varphi)(0), (f \circ \varphi)(\zeta)) = c_{\Delta}(0, \zeta),$$

ce qui prouve l'égalité annoncée.

Comme D_1 est convexe, d'après L. Harris [6], les boules pour la distance de Carathéodory sont relativement compactes dans D_1. On en déduit que f est une application propre de D_1 dans D_2. D'après le théorème de Remmert-Stein, $f(D_1)$ est un sous-ensemble analytique de D_2, et, d'après le théorème d'inversion locale, $f(D_1)$ contient un voisinage de $f(a)$. Ainsi, $f(D_1) = D_2$.

Nous pouvons alors achever la démonstration du théorème 4.1. L'application f, qui est propre, est un revêtement ramifié de D_1 sur D_2 ; il existe donc un sous-ensemble analytique A de D_2 tel que f soit un revêtement de $D_1 \backslash f^{-1}(A)$ sur $D_2 \backslash A$. Le nombre de feuillets de ce revêtement est fini et constant sur $D_2 \backslash A$. Comme f conserve la distance de Carathéodory au point a et que f est un isomorphisme analytique d'un voisinage de a sur son image, ce nombre est égal à 1, et f est un isomorphisme analytique de D_1 sur D_2.

Remarquons pour conclure que, dans le cas du bidisque $\Delta \times \Delta$, il est facile de construire une application holomorphe $f : \Delta \times \Delta \longrightarrow \Delta \times \Delta$ telle que $f'(a)$ soit une isométrie pour $E_{D_1}(a, .)$ et $E_{D_2}(f(a), .)$ pour tous les vecteurs v d'un ouvert non vide U de $\mathbb{C}^n$ sans que f soit un automorphisme analytique de $\Delta \times \Delta$.

Signalons aussi que d'autres résultats de caractérisation des isomorphismes analytiques ont été obtenus par I. Graham [5] et L. Belkhchicha [1] en supposant le domaine D_2 convexe, et en utilisant la métrique infinitésimale de Kobayashi.

Bibliographie

1. L. BELKHCHICHA. Caractérisation des isomorphismes analytiques de certains domaines bornés. *C. R. Acad. Sc. Paris Série I Math.*, **313** (1991), p. 281-284.

2. H. CARTAN. Sur les fonctions de plusieurs variables complexes : l'itération des transformations intérieures d'un domaine borné. *Math. Z.*, **35** (1932), p. 760-773.

3. S. DINEEN. *The Schwarz Lemma.* Oxford Math. Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1989.

4. T. FRANZONI and E. VESENTINI. *Holomorphic maps and invariant distances.* Math. Studies **40**, North-Holland, Amsterdam, 1980.

5. I. GRAHAM. Holomorphic mappings into strictly convex domains which are Kobayashi isometries at a point. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **105** (1989), p. 917-921.

6. L. HARRIS. Schwarz-Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces. In *Advances in Holomorphy*, Mathematical Studies **34**, North-Holland, Amsterdam, 1979, p. 345-406.

7. A. KORANYI. A Schwarz lemma for bounded symmetric domains. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), p. 210-213.

8. L. LEMPERT. Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains. *Anal. Math.*, **8** (1982), p. 257-261.

9. K. MORITA. On the kernel functions for symmetric domains. *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku*, **A5** (1956), p. 190-212.

10. H. ROYDEN and P. WONG. Carathéodory and Kobayashi metrics on convex domains. Preprint (1983).

11. M. SUGARAWA. On the general Schwarzian lemma. *Proc. Japan Acad.*, **17** (1941), p. 483-488.

12. E. VESENTINI. Complex geodesics. *Compositio Math.*, **44** (1981), p. 375-394.

13. E. VESENTINI. Complex geodesics and holomorphic mappings. *Symposia Math.*, **26** (1982), p. 211-230.

14. J.-P. VIGUÉ. Un lemme de Schwarz pour les domaines bornés symétriques irréductibles et certains domaines bornés strictement convexes. *Indiana Univ. J.*, **40** (1991), p. 293-304.

Jean-Pierre Vigué
Mathématiques
URA CNRS D1322
Groupes de Lie et Géométrie
Université de Poitiers
40, avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS CEDEX