Astérisque

FRANÇOIS BERTELOOT

Un principe de localisation pour les domaines faiblement pseudoconvexes de C^2 dont le groupe d'automorphismes holomorphes n'est pas compact

Astérisque, tome 217 (1993), p. 13-27

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__217__13_0>

Un principe de localisation pour les domaines faiblement pseudoconvexes de $\mathbf{C}^2$ dont le groupe d'automorphismes holomorphes n'est pas compact.

François Berteloot

1 Introduction

Considérons un domaine borné de $\mathbf{C}^n$ dont le groupe d'automorphismes analytiques, $\mathrm{Aut}(\Omega)$, n'est pas compact : cela revient à supposer l'existence d'un point ζ situé sur la frontière de Ω et adhérent à une orbite de $\mathrm{Aut}(\Omega)$.

En généralisant un résultat de B. Wong [19], J.P. Rosay a montré que si la frontière de Ω est de classe C^2 et strictement pseudoconvexe en ζ, alors Ω est biholomorphiquement équivalent à la boule unité de $\mathbf{C}^n$ [18]. Une telle caractérisation de Ω par la géométrie de sa frontière au voisinage de ζ, lorsque ζ est un point de faible pseudoconvexité, ne semble possible qu'au prix d'hypothèses supplémentaires. Ainsi, suivant une voie inaugurée par R.E. Greene et S. G. Krantz, plusieurs auteurs supposent que Ω coïncide avec un "domaine modèle" au voisinage de ζ ([7, 12, 14, 15, 16]).

La méthode de dilatation des coordonnées [17], introduite par S. Pincuk, s'est avérée être un outil puissant pour l'étude de ces questions. Elle permit à E. Bedford et S. Pincuk de caractériser les domaines bornés pseudoconvexes de $\mathbf{C}^2$ dont le groupe d'automorphismes analytiques est non compact et la frontière globalement lisse et de type fini [2]. Ces mêmes auteurs ont récemment généralisé leurs résultats à certains domaines de $\mathbf{C}^n$, $n > 2$ ([3, 4]).

Cependant, lorsque la frontière de Ω n'est supposée régulière qu'au voisinage de ζ, la méthode de dilatation pose de délicats problèmes de familles normales. Ces difficultés furent surmontées dans un travail commun à G. Cœuré et l'auteur [8], où l'on caractérisait l'effet attractif exercé sur les disques analytiques par une hypersurface de type fini de $\mathbf{C}^2$. On y montrait alors que, lorsque Ω est un domaine de $\mathbf{C}^2$ dont la frontière est pseudoconvexe et de type fini en ζ, Ω est biholomorphiquement équivalent à un domaine modèle $\Omega_P = \{(w,z) \in \mathbf{C}^2 / \operatorname{Re} w + P(z) < 0\}$ où P est un polynôme réel, sous-harmonique et sans termes harmoniques.

L'objet de cette étude est de déterminer le polynôme P. En l'exprimant à l'aide des dérivées de la forme de Levi du bord de Ω en ζ, nous obtenons un analogue du théorème de Rosay pour un domaine Ω dont la frontière est pseudoconvexe et de type fini en ζ (cf. théorème 2.1). Nous en déduisons un "principe de localisation" pour ces domaines (cf. théorème 2.3). La démonstration requiert de nouvelles dilatations, tant à partir du domaine Ω que du domaine Ω_P ; les questions de convergence sont résolues grâce aux résultats de [8].

2 Notations et présentation des résultats

Pour tout entier m, nous notons $\mathcal{P}_{2m}$ l'ensemble des polynômes réels des variables
z et $\bar{z}$, sous-harmoniques et sans termes harmoniques, dont le degré est au plus égal à $2m$. $\mathcal{H}_{2m}$ désigne le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{P}_{2m}$ qui sont homogènes de degré $2m$. L'espace des polynômes en z et $\bar{z}$ de degré inférieur ou égal à $2m$ est muni d'une norme notée $\| \ \|$.

Pour tout polynôme Q, on note $Q_{j\bar{q}}$ le polynôme dérivé : $\frac{\partial^{(j+q)}Q}{\partial z^j \partial \bar{z}^q}$.

A tout élément Q de $\mathcal{P}_{2m}$, on associe un domaine de $\mathbf{C}^2$, noté Ω_Q, défini par

$$\Omega_Q = \{(w,z) / \operatorname{Re} w + Q(z) < 0\}.$$

Soit Ω un domaine de $\mathbf{C}^2$ dont la frontière (notée $b\Omega$) est régulière, pseudoconvexe et de type fini $(2m)$ en un point ζ. Il est bien connu (voir, par exemple, la proposition 1.1 de [10]) qu'il existe un système de coordonnées locales holomorphes ramenant ζ en $(0,0)$ et dans lequel la frontière de Ω est définie par une équation du type :

$$\operatorname{Re} w + H(z) + 0(|z|^{2m} + |w|) = 0,$$

où $H \in \mathcal{H}_{2m}$.

Nous noterons $\mathcal{H}(\zeta)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_{2m}$ pour lesquels un tel système de coordonnées locales existe. On vérifie facilement que :

$$\mathcal{H}(\zeta) = \{\lambda H(e^{i\theta} z) \ ; \ \lambda \in \mathbf{R}^{+*}, \ \theta \in \mathbf{R}\}$$

où H est un élément quelconque de $\mathcal{H}(\zeta)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre principal résultat :

Théorème 2.1 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbf{C}^2$ dont la frontière est pseudoconvexe et de type fini au voisinage de ζ, $\zeta \in b\Omega$. S'il existe une suite $(\varphi_k)_k$ d'automorphismes analytiques de Ω et un point (a,b) de Ω tels que $\lim \varphi_k(a,b) = \zeta$, alors Ω est biholomorphiquement équivalent à Ω_H où $H \in \mathcal{H}(\zeta)$.*

Remarque 2.2 *Si H_1 et H_2 appartiennent à $\mathcal{H}(\zeta)$, alors Ω_{H_1} et Ω_{H_2} sont évidemment bihomorphiquement équivalents.*

On déduit immédiatement du théorème 2.1 et du lemme 2.6 énoncé ci-après le principe de localisation suivant :

Théorème 2.3 *Soient Ω_j $(j = 1,2)$ deux domaines bornés de $\mathbf{C}^2$ dont les frontières sont pseudoconvexes et de types finis aux voisinages des points $\zeta_j \in b\Omega_j$. Supposons qu'il existe des suites $(\varphi_{k,j})_k$ d'automorphismes analytiques de Ω_j et des points (a_j,b_j) de Ω_j tels que $\lim \varphi_{k,j}(a_j,b_j) = \zeta_j$. Alors Ω_1 et Ω_2 sont biholomorphiquement équivalents si et seulement si $\mathcal{H}(\zeta_1) = \mathcal{H}(\zeta_2)$.*

Remarque 2.4 *Les théorèmes 2.1 et 2.3 restent probablement vrais lorsque le domaine Ω n'est pas borné mais tel que son adhérence soit contenue dans un ouvert taut. Le lemme 2.5 montre en particulier que les domaines Ω_P $(P \in \mathcal{P}_{2m})$ satisfont cette condition. Une telle version de nos résultats caractériserait donc les domaines modèles Ω_H $(H \in \mathcal{H}_{2m}, m \in \mathbf{N}^*)$ parmi certains domaines non bornés de $\mathbf{C}^2$ dont le groupe d'automorphismes est non compact.*

Il serait également intéressant de caractériser les polynômes P de $\mathcal{P}_{2m}$ dont le domaine Ω_P associé est biholomorphe à un ouvert borné de $\mathbf{C}^2$.

La démonstration du théorème 2.1 requiert l'utilisation des lemmes suivants; ils seront établis dans le § 4.

Lemme 2.5 *Soit σ_∞ une fonction de classe C^2 sous-harmonique sur $\mathbf{C}$ telle que $\sigma(0) = 0$ et $\int_{\mathbf{C}} \bar\partial\partial\sigma_\infty = +\infty$. Soit $(\sigma_k)_k$ une suite de fonctions sous-harmoniques convergeant uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}$ vers σ_∞. Soient ω un domaine quelconque de $\mathbf{C}^p$ $(p \geq 1)$ et z_0 un point fixé dans ω. Alors toute suite d'applications holomorphes $h_k : \omega \to \mathbf{C}^2$, telle que $h_k(\omega) \subset \{(w,z) \in \mathbf{C}^2\ ;\ \operatorname{Re} w + \sigma_k(z) < 0\}$ et $\{h_k(z_0), k \in \mathbf{N}\}$ soit relativement compact dans $\{(w,z) \in \mathbf{C}^2\ ;\ \operatorname{Re} w + \sigma_\infty(z) < 0\}$, est une famille normale.*

Lemme 2.6 *Soient $Q \in \mathcal{P}_{2m}$ et $H \in \mathcal{H}_{2m}$. Si Ω_Q et Ω_H sont biholomorphes, alors la partie homogène de plus haut degré de Q est égale à $\lambda H(e^{i\nu} z)$, où $\lambda > 0$ et $\nu \in [0, 2\pi]$.*

Lemme 2.7 *Soit $Q \in \mathcal{P}_{2m}$ tel que $\deg(Q) > 2$. On suppose qu'il existe une suite de nombres complexes $(z_k)_k$ telle que $\lim |z_k| = +\infty$ et $\lim Q_{j\bar q}(z_k) = 0$ pour $j,q > 0$ et $(j+q) < \deg Q$. Alors, il existe $\nu \in [0, 2\pi]$ tel que :*

i) $\lim \mathrm{Re}(e^{i\nu} z_k) = 0$;

ii) $Q = \lambda[(2\,\mathrm{Re}\, e^{i\nu} z)^s - 2(e^{i\nu} z)^s]$ *où* $\lambda > 0$ *et* $s = \deg Q$.

Lemme 2.8 *Soit* Ω *un domaine borné de* $\mathbf{C}^2$ *dont la frontière est pseudoconvexe et de type fini au voisinage de* ζ. *On suppose qu'il existe un biholomorphisme* f *de* Ω *sur* Ω_Q $(Q \in \mathcal{P}_{2m})$ *ainsi qu'une suite* (w_k, z_k) *dans* Ω_Q *tels que :*

i) $\lim(|w_k|^2 + |z_k|^2) = +\infty$;

ii) $|\mathrm{Re}\, w_k + Q(z_k)| \geq c > 0$; $\forall k \in \mathbf{N}$;

iii) $\lim f(w_k, z_k) = \zeta$.

Alors : $\lim_{t \to +\infty} f(-1 + it, 0) = \lim_{t \to +\infty} f(-1 - it, 0) = \zeta$.

3 Preuve du théorème 2.1

La démonstration s'effectue en trois étapes.

Soit $2m$ le type de la frontière de Ω en ζ et H un élément de $\mathcal{H}(\zeta)$. Il a été établi dans [8] que pour tout point (a, b) de Ω, il existe un polynôme Q appartenant à $\mathcal{P}_{2m}$ et un biholomorphisme Ψ de Ω sur Ω_Q tels que $\Psi(a, b) = (-1, 0)$. Notre première étape précise ce résultat :

• *Il existe* $(a, b) \in \Omega$ *tel que, pour tout* $Q \in \mathcal{P}_{2m}$, *l'existence d'un biholomorphisme* $\Psi : \Omega \to \Omega_Q$ *vérifiant* $\Psi(a, b) = (-1, 0)$ *force l'égalité* $\deg Q = 2m$.

Quitte à effectuer un changement de variable holomorphe local, on supposera que $\zeta = (0, 0)$ et que pour un voisinage V de $(0, 0)$ assez petit :

$$(w, z) \in V \cap \Omega \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, w + H(z) + 0(|w| + |z|^{2m}) < 0.$$

Considérons une suite de points $(a_k, b_k) = \left(\frac{-1}{k}, 0\right)$ qui, pour k assez grand, sont dans $\Omega \cap V$ et une suite de biholomorphismes $\Psi_k : \Omega \to \Omega_{Q_k}$ $(Q_k \in \mathcal{P}_{2m})$ tels que $\Psi_k(a_k, b_k) = (-1, 0)$. Il nous suffit d'établir que $\deg Q_k = 2m$ pour k assez grand. En composant Ψ_k avec une transformation du type $(w, z) \mapsto (w, \lambda_k z)$ $(\lambda_k > 0)$, on peut supposer que $\|Q_k\| = 1$ et donc que, après une éventuelle extraction, $(Q_k)_k$ converge vers un élément Q_∞ de $\mathcal{P}_{2m}$.

Soit $(\Delta_k)_k$ la suite de dilatations définies par $\Delta_k(w, z) = (kw, k^{1/2m} z)$. Soient également $(\tilde{\Omega}_k)_k$ et $(\tilde{D}_k)$ les suites de domaines définis par $\tilde{\Omega}_k =$

$\Delta_k(\Omega \cap V)$ et $\tilde{D}_k = \Psi_k(\Omega \cap V)$. Posons $\tilde{\Psi}_k = \Psi_k |_{\Omega\cap V} \circ\Delta_k^{-1}$ et étudions la suite de biholomorphismes $(\tilde{\Psi}_k)_k$ de $\tilde{\Omega}_k$ sur $\tilde{D}_k$. On vérifie sans peine que :

(3.1) $$\tilde{\Psi}_k(-1,0) = (-1,0) \quad \textit{pour tout} \quad k.$$

(3.2) $$\tilde{\Omega}_k \quad \textit{converge vers} \quad \Omega_H.$$

Montrons que, de plus :

(3.3) $$\tilde{D}_k \quad \textit{converge vers} \quad \Omega_{Q_\infty}.$$

Ω_{Q_k} converge vers Ω_{Q_∞} car Q_k converge vers Q_∞. Le théorème de Montel montre qu'après une éventuelle extraction la suite $\Psi_k^{-1} : \Omega_{Q_k} \to \Omega$ converge uniformément sur tout compact de Ω_{Q_∞}. Or, il n'existe aucune courbe holomorphe non triviale passant par ζ et contenue dans $b\Omega$, ainsi ζ est la seule valeur d'adhérence de $(\Psi_k^{-1})_k$ et donc Ψ_k^{-1} converge vers ζ. Il s'en suit que pour tout compact K contenu dans Ω_{Q_∞}, on a $\Psi_k^{-1}(K) \subset \Omega \cap V$ (c'est-à-dire $K \subset \tilde{D}_k$) pour k assez grand. Par ailleurs, si K est un compact contenu dans $\Omega^c_{Q_\infty}$ alors $K \subset \Omega^c_{Q_k} \subset \tilde{D}^c_k$ pour k assez grand. Ceci établit (3).
Enfin, montrons qu'à une éventuelle extraction près :

(3.4) *La suite* $(\tilde{\Psi}_k)_k$ *converge uniformément sur tout compact de* Ω_H *vers une application holomorphe* $\tilde{\Psi} : \Omega_H \to \Omega_{Q_\infty}$ *telle que* $\tilde{\Psi}(-1,0) = (-1,0)$ *; la suite* $(\tilde{\Psi}_k^{-1})_k$ *converge uniformément sur tout compact de* Ω_{Q_∞}.

La convergence de $(\tilde{\Psi}_k)_k$ vers une application $\tilde{\Psi}$ à valeurs dans $\overline{\Omega}_{Q_\infty}$ résulte du lemme 2.5. Puisque $\tilde{\Psi}(-1,0) = \lim \tilde{\Psi}_k(-1,0) = (-1,0)$, le principe du maximum appliqué à $\operatorname{Re} \tilde{\Psi}_1 + Q_\infty \circ \tilde{\Psi}_2$ (où $\tilde{\Psi} = (\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2)$) montre qu'en fait $\tilde{\Psi}(\Omega_H) \subset \Omega_{Q_\infty}$. La convergence de $(\tilde{\Psi}_k^{-1})_k$ est établie grâce à la proposition du § 3 de [8].

Un théorème de Greene et Krantz (cf. [13], pp. 161-162) montre que, sous les conditions 4.1 à 3.4, $\tilde{\Psi}$ réalise un biholomorphisme de Ω_H sur Ω_{Q_∞}. Ainsi, d'après le lemme 2.6, $\deg Q_\infty = \deg H = 2m$.
La conclusion s'en suit puisque les polynômes Q_k sont de degré au plus $2m$.

La seconde étape de notre démonstration consiste à exhiber un "bon" domaine modèle, $\Omega_{\hat{Q}}$, biholomorphe à Ω.

• *Il existe un polynôme $\hat{Q}$ ($\hat{Q} \in \mathcal{P}_{2m}$) dont la partie homogène de plus haut degré est égale à H, ainsi qu'un biholomorphisme $\hat{\Psi}$ de Ω sur $\Omega_{\hat{Q}}$ tel que $\hat{\Psi}(a,b) = (-1,0)$.*

Soit $\hat{\Psi}$ le biholomorphisme de Ω sur $\Omega_{\hat{Q}}$ construit dans [8]. Alors $\hat{\Psi}(a,b) = (-1,0)$ et $\hat{Q}$ est la limite d'une suite de polynômes $(\hat{Q}_k)_k$ définis par :

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{\varepsilon_k}\sum_{l=2}^{2m}(\tau_k)^l P_k^l$$

où $(\varepsilon_k)_k, (\tau_k)_k$ sont des suites réelles strictement positives de limites nulles et $(P_k^l)_k$ $(l = 2, \ldots, 2m)$ des suites de polynômes homogènes de degré l telles que : $\lim \|P_k^l\| = 0$ si $l < 2m$ et $\lim = P_k^{2m} = H$. D'après la première étape, $\hat{Q}$ est de degré $2m$ et donc $\tau_k \approx \varepsilon_k^{1/2m}$. Ainsi la partie homogène de plus haut degré de $\hat{Q}$ est proportionnelle à H. Il reste à composer $\hat{\Psi}$ avec une transformation $(w,z) \rightarrow (w, \lambda z), \lambda > 0$ pour assurer l'égalité.

Remarque 3.1 *On montre dans [8] qu'il existe une suite de biholomorphismes $(T_k)_k$, définis sur $\Omega \cap V$, telle que $(T_k(\Omega \cap V))_k$ converge vers $\Omega_{\hat{Q}}$. Le biholomorphisme $\hat{\Psi}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(T_k \circ \varphi_k)_k$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Ω.*

La fin de la démonstration repose sur l'étude du "comportement asymptotique" de la suite $\hat{\Psi}\circ\varphi_k(a,b)$. A cet effet, nous noterons (w_k, z_k) pour $\hat{\Psi}\circ\varphi_k(a,b)$ et ε_k désignera la quantité $|r_{\hat{Q}}(\hat{\Psi} \circ \varphi_k(a,b))|$ où $r_{\hat{Q}}(w,z) = \operatorname{Re} w + \hat{Q}(z)$. Nous établirons que :

• *i) Si $\lim \varepsilon_k = 0$ et $\limsup |z_k| = +\infty$ alors $H = \lambda[(2\operatorname{Re} z)^{2m} - 2\operatorname{Re} z^{2m}], (\lambda > 0)$ et Ω est biholomorphe à Ω_H.*

ii) Si $\lim \varepsilon_k = 0$ et $\limsup |z_k| < +\infty$ alors $\hat{Q}(z + z_0) = H(z)$, $(z_0 \in \mathbf{C})$ et Ω est biholomorphe à Ω_H.

iii) Si $\limsup \varepsilon_k > 0$ alors $H = \lambda|z|^{2m}$ $(\lambda > 0)$ et Ω est biholomorphe à Ω_H.

Lorsque $\hat{Q}$ est de degré 2, la preuve du théorème 2.1 est achevée dès la seconde étape. Nous supposerons donc dorénavant que $\deg \hat{Q} > 2$. Commençons par considérer le cas où $\lim \varepsilon_k = 0$. Soit $(Q_k)_k$ la suite de polynômes définis par :

$$Q_k(z) = \frac{1}{\varepsilon_k}\sum_{j,q>0}\frac{\hat{Q}_{j\bar{q}}(z_k)}{(j+q)!}\nu_k^{j+q} z^j \bar{z}^q$$

où $\nu_k > 0$ est choisi de façon telle que $\|Q_k\| = 1$.
On remarquera que :

$$\varepsilon_k Q_k(z) = \hat{Q}(\nu_k z + z_k) - \sum_{j=1}^{2m} \frac{\nu_k^j}{j!}(\hat{Q}_j(z_k)z^j + \bar{\hat{Q}}_j(z_k)\bar{z}^j) - \hat{Q}(z_k).$$

Ainsi $Q_k \in \mathcal{P}_{2m}$ et l'on pourra supposer que Q_k converge vers un élément Q_∞ de $\mathcal{P}_{2m}$ tel que $\|Q_\infty\| = 1$.
Posons $\Phi_k(w, z) = (w', z')$ où

$$\begin{cases} w' & = \frac{1}{\varepsilon_k}[w - w_k - \varepsilon_k + 2\sum_{j=1}^{2m} \frac{\hat{Q}_j(z_k)}{j!}(z - z_k)^j] \\ z' & = \frac{1}{\nu_k}[z - z_k] \end{cases}$$

On vérifie, grâce aux identités précédentes, que Φ_k réalise un biholomorphisme de $\Omega_{\hat{Q}}$ sur Ω_{Q_k} tel que $\Phi_k(w_k, z_k) = (-1, 0)$.
Soit $(T_k)_k$ la suite de "transformations" évoquée dans la remarque 3.1. Posons $\tilde{\Omega}_k = T_k(\Omega \cap V)$ et $\tilde{D}_k = \Phi_k \circ \hat{\Psi}(\Omega \cap V)$. On dispose alors d'une suite de biholomorphismes $\tilde{\Psi}_k$ de $\tilde{\Omega}_k$ sur $\tilde{D}_k$ définis par $\tilde{\Psi}_k = (\Phi_k \circ \hat{\Psi})\mid_{\Omega\cap V} \circ T_k^{-1}$. En procédant comme dans la première étape, on montre que $(\tilde{\Psi}_k)_k$ converge vers un biholomorphisme $\tilde{\Psi}$ de $\Omega_{\hat{Q}}$ sur Ω_{Q_∞} tel que $\tilde{\Psi}(-1, 0) = (-1, 0)$. Ainsi $\tilde{\Psi} \circ \hat{\Psi}$ est un biholomorphisme de Ω sur Ω_{Q_∞} tel que $\tilde{\Psi} \circ \hat{\Psi}(a, b) = (-1, 0)$. Donc, d'après la première étape, Q_∞ est de degré $2m$. Or, par définition même de la suite $(Q_k)_k$, ceci n'est possible que si $\tau_k \approx \varepsilon_k^{1/2m}$ et $\lim \hat{Q}_{j\bar{q}}(z_k) = 0$ pour $j, q > 0$ et $(j + q) < 2m$. Alors, lorsque $\limsup |z_k| = +\infty$, le lemme 2.7 montre qu'à un changement de variable inessentiel près, $\hat{Q} = \lambda[(2\operatorname{Re} z)^{2m} - 2\operatorname{Re} z^{2m}]$, $\lambda > 0$. L'assertion (i) résulte donc de la seconde étape. Lorsque $\limsup |z_k| < +\infty$, on peut, sans perte de généralité, supposer que $\lim z_k = z_0$. Alors $\hat{Q}_{j\bar{q}}(z_0) = 0$ pour $j, q > 0$ et $(j + q) < 2m$, si bien que la transformation Φ, définie par :

$$\Phi(w, z) = \left(w + 2\sum_{j=1}^{2m} \frac{\hat{Q}_j(z_0)}{j!}(z - z_0)^j, z - z_0\right)$$

réalise un biholomorphisme de $\Omega_{\hat{Q}}$ sur Ω_H. Ceci justifie l'assertion (ii).

Considérons pour finir le cas où $\limsup \varepsilon_k > 0$. Soit $(g_t)_{t\in\mathbf{R}}$ le groupe à un paramètre d'automorphismes analytiques de Ω défini par :

$$g_t(w, z) = \hat{\Psi}^{-1}[\hat{\Psi}(w, z) + (0, it)].$$

D'après le lemme 2.8, on a $\lim_{t\to\pm\infty} g_t(w, z) = \zeta$ pour tout $(w, z) \in \Omega$. L'assertion (iii) résultera alors de l'étude menée dans les paragraphes 3 et 4 de [2] et du lemme 6 de [3], pourvu que l'action définie par $(g_t)_t$ puisse être prolongée différentiablement à $\bar{\Omega}$ sur un voisinage de ζ. Justifions tout d'abord l'existence d'un prolongement continu. D'après [11], il existe un voisinage W de ζ et une fonction continue :

$$\begin{aligned} \sigma : (b\Omega \cap \bar{W}) \times (\bar{\Omega} \cap W) &\to \,]-\infty, 0] \\ (\eta, (w,z)) &\mapsto \sigma_\eta(w,z) \end{aligned}$$

telle que :

i) σ_η est p.s.h. sur $\Omega \cap W$;

ii) $\sigma_\eta < 0$ sur $(\bar{\Omega} \cap W) - \{\eta\}$ et $\sigma_\eta(\eta) = 0$;

iii) $|\sigma_\eta(w,z) - \sigma_\eta(w',z')| \leq C|(w,z) - (w',z')|$ pour tous $\eta \in b\Omega \cap \bar{W}$, $(w,z) \in \bar{\Omega} \cap W$.

Puisque σ est continue, il existe $a > 0$ tel que $\sigma_\eta(w,z) < -a$ pour tout $\eta \in b\Omega \cap \bar{W}$ et tout $(w,z) \in \bar{\Omega} \cap bW$. On voit facilement que si U est au voisinage de ζ assez petit : $\sigma_\eta(w,z) > \frac{-a}{2}$ pour tout $\eta \in b\Omega \cap \bar{U}$ et tout $(w,z) \in \bar{\Omega} \cap U$. Définissons alors $\tilde{\sigma}_\eta$ par $\tilde{\sigma}_\eta = \sup(\sigma_\eta, -a)$ sur $\bar{\Omega} \cap W$ et $\tilde{\sigma}_\eta = -a$ sur $\Omega \cap W^c$. On vérifie aisément que $\tilde{\sigma}_\eta$ satisfait les propriétés suivantes :

i) $\tilde{\sigma}_\eta$ est p.s.h. négative sur Ω ;

ii) $\tilde{\sigma}_\eta(\eta) = 0$;

iii) $|\tilde{\sigma}_\eta(w,z) - \tilde{\sigma}_\eta(w',z')| \leq C|(w,z) - (w',z')|$ pour $(w,z), (w',z') \in \bar{\Omega} \cap U$.

Soit V_1 un voisinage de ζ assez petit pour que $b\Omega \cap V_1$ soit régulière. En appliquant le lemme de Hopf à la fonction $\tilde{\sigma}_\eta \circ g_{-t}$, tout en s'assurant d'une certaine uniformité en η et t, on obtient : $\tilde{\sigma}_\eta o g_{-t}(w',z') \leq -Md((w',z')b\Omega)$, $\forall \eta \in b\Omega \cap \bar{U}$, $\forall (w',z') \in \Omega \cap V_1$, $\forall t \in [-1,1]$ où $M > 0$.

Si V_0 est un voisinage de ζ assez petit, alors pour tout $(w,z) \in \Omega \cap V_0$, il existe $\eta \in b\Omega \cap U$ tel que $|\eta - (w,z)| = d((w,z), b\Omega)$. Compte tenu des propriétés ii) et iii) de $\tilde{\sigma}_\eta$, il vient donc : $\forall (w,z) \in \Omega \cap V_0, \exists \eta \in b\Omega \cap U$ tel que $\tilde{\sigma}_\eta(w,z) \geq -Cd((w,z), b\Omega)$.

De ces deux majorations, on déduit :

$$\forall (w,z) \in \Omega \cap V_0, \forall t \in [-1,1] : g_t(w,z) \in \Omega \cap V_1 \Rightarrow$$

$$d[g_t(w,z), b\Omega] \leq \frac{C}{M} d[(w,z), b\Omega]$$

En utilisant cette estimation et en adaptant la démonstration de [9], on obtient l'existence d'un voisinage W_2 de ζ tel que :

$$\forall t \in [-1,1], \forall (w,z) \in W_2 \cap \Omega, \forall (w',z') \in W_2 \cap \Omega :$$
$$|g_t(w,z) - g_t(w',z')| \lesssim |(w,z)-(w',z')|^{1/2m}$$

Les travaux de Catlin montrent que $b\Omega$ satisfait la condition R locale en ζ (cf. [6] preuve du théorème 3). L'utilisation des coordonnées canoniques de Bergman permet alors d'établir que ce prolongement est en fait différentiable.

4 Preuves des lemmes

Preuve du lemme 2.5

Il suffit de considérer le cas où ω est le disque unité de $\mathbf{C}$. En effet, un résultat de H. Alexander (cf. [1] théorème 6.2) stipule qu'alors la conclusion reste vraie lorsque ω est une boule euclidienne de $\mathbf{C}^p$ et le cas général s'en déduit facilement.

Soit D le disque unité de $\mathbf{C}$ et $h_k : D \to \mathbf{C}^2$ une suite d'applications analytiques satisfaisant les hypothèses du lemme 2.5. On supposera pour fixer les idées que $h_k(0) = (-1,0)$ et que h_k est continue sur $\bar{D}$ pour tout k. Notons $h_k = (h_{k_1}, h_{k_2})$. La formule de Gauss donne :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t}\int_{|u|\leq t} \Delta(\sigma_k \circ h_{k_2}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma_k \circ h_{k_2}(e^{i\theta}d\theta) \ - \sigma_k(0).$$

On en déduit que pour tout $r > 1$:

$$\left(\int_r^1 \frac{dt}{t}\right)\left(\int_{h_{k_1}(|u|\leq r)} \Delta\sigma_k\right) \leq -\operatorname{Re} h_{k_1}(0) - \sigma_k(0) \lesssim 1.$$

Il en résulte que, si K_1 et K_2 sont des compacts disjoints de $\mathbf{C}$ tels que $\int_{K_1} \Delta\sigma_\infty$ et $\int_{K_2} \Delta\sigma_\infty$ soient assez grands, alors h_{k_1} $(|u| \leq r)$ ne contient ni K_1 ni K_2 pour k assez grand. La normalité de $(h_{k_2})_k$ en découle, celle de $(h_{k_1})_k$ suit puisque $\operatorname{Re} h_{k_1} \leq -\sigma_k \circ h_{k_2}$.

Preuve du lemme 2.6

• Notons Ψ un biholomorphisme de Ω_H sur Ω_Q. D'après [2] (voir aussi [5]), il existe une fonction $g \in \mathcal{O}(\Omega_Q) \cap C(\bar{\Omega}_Q)$ et des entiers k et N tels que, pour $(|w| + |z|)$ assez grand :

i) $|g(w,z)| \approx [|w|^{2k} + |z|^2]^{1/N}$,
ii) $\arg g(w,z) \in [\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.
La fonction $\Phi(w,z) = \frac{\alpha g(w,z)-1}{\alpha g(w,z)+1}$, où α est une constante positive assez petite, est holomorphe bornée sur Ω_Q et vérifie :
i) $|\Phi(w,z)| < 1$ pour $(|w| + |z|)$ assez grand.
ii) $\lim_{(|w|+|z|)\to+\infty} \Phi(w,z) = 1$.

• Vérifions l'existence de $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\lim_{x\to 0^-} \inf |\Psi(x + it_0, 0)| < +\infty$: si un tel réel n'existait pas, on aurait $\lim_{x\to 0^-} \Phi \circ \Psi(x + it, 0) = 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et la fonction $\Phi \circ \Psi$ serait identique à 1 sur le demi-plan $\operatorname{Re} w < 0$, ce qui est absurde.

• On peut donc supposer que $\lim_n \Psi(x_n, 0) = (w_0, z_0) \in b\Omega_Q$, avec $x_n < 0$ et $\lim_n x_n = 0$. Alors, d'après [9], Ψ se prolonge homéomorphiquement au bord de Ω_H sur un voisinage de $(0,0)$. Les résultats de Bell, (cf. [6]) montrent que ce prolongement est difféomorphe. On en déduit que la partie homogène de plus haut degré de Q est de la forme annoncée.

Preuve du lemme 2.7

Notons $z_k = \lambda_k e^{i\theta_k}$ et θ une valeur d'adhérence de $(\theta_k)_k$. On supposera que $\theta = \lim \theta_k$ et, quitte à changer z en $ize^{-i\theta}$, que $\theta = \frac{\pi}{2}$. Soit $P = Q_{1\bar{1}}$; $P = H^{(0)} + \ldots + H^{(v)}$ où $H^{(j)}$ désigne un polynôme homogène de degré j. On a donc par hypothèse :

$$(*) \qquad\qquad |P_{j\bar{q}}(z_k)| \lesssim 1 \qquad \text{pour } j, q \geq 0.$$

Comme $P_{j\bar{q}}(z_k) = \lambda_k^{r-(j+q)}[H_{j\bar{q}}^{(r)}(e^{i\theta_k}) + 0(\frac{1}{\lambda_k})]$ pour $j + q \leq r$, on en déduit que $H_{j\bar{q}}^{(r)}(i) = 0$ pour $j + q < r$. De sorte que $H^{(r)}(z + i) = H^{(r)}(z)$ et $H^{(r)} = \alpha_r (\operatorname{Re} z)^r$, $\alpha_r \in \mathbf{R}$. Il s'en suit que $P_{r-1,0}(z_k) = \alpha_r r! (\operatorname{Re} z_k) + 0(1)$ et donc que $|\operatorname{Re} z_k| \lesssim 1$.

Ainsi $P - H^{(r)}$ satisfait également la condition $(*)$ et, en itérant ce procédé, on obtient :

$$P = \sum_{p=0}^{r} \alpha_p (\operatorname{Re} z)^p.$$

Soit x une valeur d'adhérence de $(\operatorname{Re} z_k)_k$ puisque pour $(j + q) < r$: $P_{j\bar{q}}(x) = \lim P_{j\bar{q}}(\operatorname{Re} z_k) = \lim P_{j\bar{q}}(z_k) = 0$, il est clair que $x = 0$ (donc

$\lim \operatorname{Re} z_k = 0$) et que $P = \alpha_r(\operatorname{Re} z)^r$. Q ne possédant pas de termes harmoniques, on a alors :

$$Q = \lambda[(2\operatorname{Re} z)^{r+2} - 2\operatorname{Re} z^{r+2}]$$

où $\lambda > 0$.

Enfin, P n'étant pas constant, on remarquera que $(\theta_k)_k$ ne peut avoir qu'une seule valeur d'adhérence.

Preuve du lemme 2.8

• Soit Φ la fonction holomorphe sur Ω_Q introduite au début de la preuve du lemme 2.6. Choisissons une constante $A > 0$ assez grande et $a > 0$ une constante assez petite de façon à ce que la fonction $\tilde{\Phi}$ définie par $\tilde{\Phi} = \max(|\Phi|^2 - 1, -a)$ sur $\Omega_Q - \{|w|^2 + |t|^2 \leq A\}$ et $\tilde{\Phi} = -a$ sur $\Omega_Q \cap \{|w|^2 + |t|^2 \leq A\}$ soit plurisousharmonique négative sur Ω_Q. Par construction, $\tilde{\Phi}$ satisfait l'estimation :

$$(4.1) \qquad |\tilde{\Phi}(w,z)| \lesssim [|w|^2 + |z|^{2m}]^{-1/N} \quad \text{pour } |w|^2 + |z|^2 \geq M > 0$$

où M est une constante assez grande.
En appliquant le lemme de Hopf à $\tilde{\Phi} \circ f^{-1}$, il est classique de déduire de 4.1 l'existence d'un voisinage V de ζ tel que

$$(4.2) \qquad d(f(w,z), b\Omega) \lesssim (|w|^2 + |z|^{2m})^{-1/N}$$

pour $f(w,z) \in V$ et $|w|^2 + |z|^2 \geq M$.
($d(\cdot, b\Omega)$ désignant la distance euclidienne au bord de Ω).

• Soit $(w, z_k) \in \Omega_Q$ tel que $f(w, z_k) \in V$. La proposition du § 3 de [8], appliquée au disque analytique $h : \Delta \to \Omega$ défini par $h(u) = f(w + |c_k|u, z_k)$ où $c_k = \operatorname{Re} w + Q(z_k)$ permet d'obtenir aisément :

$$(4.3) \qquad |u| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |h(u) - h(0)| \lesssim d(h(0), b\Omega)^{1/2m}.$$

Les estimations suivantes, fondamentales pour la suite, découlent alors immédiatement de 4.2, 4.3 et des inégalités de Cauchy.

$$(4.4) \qquad |\frac{\partial f_1}{\partial w}(w, z_k)|, |\frac{\partial f_2}{\partial w}(w, z_k)| \lesssim \frac{1}{|\operatorname{Re} w + Q(z_k)|\, [|w|^2 + |z_k|^{2m}]^\alpha}$$
$$\text{pour } f(w, z_k) \in V \cap \Omega \quad , \quad |w|^2 + |z_k|^2 \geq M$$

où $\alpha = (2mN)^{-1}$.

• Soit $(F_k)_k$ la suite d'applications de $[0, +\infty[$ dans Ω par $F_k(x) = f(w_k - x, z_k)$. Nous montrons, dans un premier temps, que $(F_k)_k$ converge uniformément vers ζ. Supposons que cela ne soit pas. Puisque $\lim F_k(0) = \zeta$ (cf. iii), on trouverait une boule B centrée en ζ et contenue dans V ainsi qu'une suite $(X_k)_k, X_k \in]0,+\infty[$, telles que $F_k(X_k) \in bB$ et $F_k([0,X_k]) \subset \bar{B} \subset V$. Compte tenu de (4.4) et (ii), on aurait alors :

$$(4.5) \qquad |F_k(X_k) - F_k(0)| \lesssim \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+c)[(x-\operatorname{Re} w_k)^2 + B_k]^\alpha}$$

où $B_k = (\operatorname{Im} w_k)^2 + |z_k|^{2m}$.
Ceci s'avèrera absurde lorsque nous aurons montré que l'intégrale du second membre, que nous noterons $I_k = \int_0^{+\infty} h_k(x)dx$, tend vers 0. Si, après une éventuelle extraction, $\lim \operatorname{Re} w_k = -\infty$ alors $h_k(x) \le (x+c)^{-(2\alpha+1)}$ pour k assez grand et le théorème de Lebesgue montre que $\lim I_k = 0$. Dans le cas contraire, il existe $K \geq 0$ tel que $\operatorname{Re} w_k \geq -K$ pour tout k. Puisque $\operatorname{Re} w_k = -Q(z_k)$, la condition (i) se traduit par $\lim B_k = +\infty$. En posant $y = x - \operatorname{Re} w_k$, il vient :

$$(4.6) \qquad I_k = \int_K^\infty \frac{dy}{(y+c+\operatorname{Re} w_k)[y^2+B_k]^\alpha} + \int_{-\operatorname{Re} w_k}^K \frac{dy}{(y+c+\operatorname{Re} w_k)[y^2+B_k]^\alpha}.$$

On montre facilement à l'aide du théorème de Lebesgue que la première de ces deux intégrales tend vers 0. Pour la seconde, on utilise la majoration suivante :

$$(4.7) \quad \int_{-\operatorname{Re} w_k}^K \frac{dy}{(y+c+\operatorname{Re} w_k)[y^2+B_k]^\alpha} \le B_k^{-\alpha} \int_{-\operatorname{Re} w_k}^B \frac{dy}{(y+c+\operatorname{Re} w_k)}$$

et, le second membre étant égal à $B_k^{-\alpha} \ln\left(\frac{K+c+\operatorname{Re} w_k}{c}\right)$, l'on observe que $\operatorname{Re} w_k \lesssim -Q(z_k) \lesssim B_k$ si $\lim \operatorname{Re} w_k = +\infty$.

• Nous montrons maintenant qu'il existe une suite ζ_k, $\zeta_k \in b\Omega$ telle que $\lim \zeta_k = \zeta$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(w_k - x, z_k) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(w_k \pm it, z_k) = \zeta_k$ pour tout k. On peut, d'après ce qui précède, supposer que $F_k([0,+\infty[) \subset V$. On déduit alors de (4.4) et (ii) que :

$$(4.8) \qquad \forall X, X' \in [0,+\infty[: |F_k(X) - F_k(X')| \lesssim \int_X^{X'} \frac{dx}{(x+c)[(x-\operatorname{Re} w_k)^2+B_k]^\alpha}.$$

L'existence de ζ_k s'en trouve justifiée ; la convergence de $(\zeta_k)_k$ résulte de celle de $(F_k)_k$. Il reste à montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(w_k \pm it, z_k) = \zeta_k$. Si cela n'était pas, on trouverait une boule B centrée en ζ_k et contenue dans V ainsi qu'une suite $(X_l)_l$ telles que $f(w + iX_l, z_k) \notin B$ et $\lim |X_l| = +\infty$. Soit alors $\gamma_l : [0,1] \to \Omega_Q$ le segment joignant $(w_k - |X_l|, z_k)$ à $(w_k + iX_l, z_k)$. Puisque $\lim f \circ \gamma_l(0) = \zeta_k$, il existerait $x_l \in [0,1]$ tel que $f \circ \gamma_l(x_l) \in bB$ et $f \circ \gamma_l([0, x_l]) \subset B \subset V$. D'après (4.4) et (ii), on aurait alors pour l assez grand :

$$(4.9) \qquad |f \circ \gamma_l(0) - f \circ \gamma_l(x_l)| \lesssim |X_l| \int_0^{x_l} \frac{du}{(c + (1-u)|X_l|)|X_l|^{2\alpha}} \leq \frac{1}{|X_l|^{2\alpha}} \ln\left(\frac{c + |X_l|}{c}\right).$$

Ce qui est absurde.

• Nous terminons en remarquant que la suite $(\zeta_k)_k$ est en fait constante. Comme $\lim \zeta_k = \zeta$, $b\Omega$ peut être supposé pseudoconvexe et de type fini en ζ_k. Cela permet de montrer que ζ_k est la seule valeur d'adhérence de $f(w \pm it, z)$ lorsque $t \to +\infty$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Ω_Q. Ainsi $\lim_{t \to +\infty} f(w \pm it, z) = \zeta_k$ pour tout $(w,z) \in \Omega_Q$ et donc $\zeta_k = \zeta$ pour tout k. Ceci achève la preuve du lemme 2.8.

Je remercie G. Cœuré pour les conseils prodigués lors de la rédaction de ce travail.

Bibliographie

[1] Alexander, H., *Volume images of varieties in projective space and in Grassmannians,* Trans. Am. Math. Soc. 189 (1974), 237-249.

[2] Bedford, E., Pincuk, S., *Domains in* $\mathbf{C}^2$ *with non compact holomophic automorphism group,* Math. USSR Sbornik, Vol. 63, 141-151, (1989).

[3] Bedford, E., Pincuk, S., *Domains in* $\mathbf{C}^{n+1}$ *with non compact automorphism group,* Jour. of Geometric Analysis, Vol. 1, N^0 3, 165-191, (1991).

[4] Bedford, E., Pincuk, S., *Domains in* $\mathbf{C}^{n+1}$ *with non compact automorphism group (II),* Preprint.

[5] Bedford, E., Fornaess J.E., *Biholomorphic maps of weakly pseudoconvex domains,* Duke Math. J. 45, 711-719, (1978).

[6] Bell S., *Local regularity of C.R. homeomorphisms,* Duke Math. J. 57, 295-300, (1988).

[7] Berteloot, F., *Sur certains domaines faiblement pseudoconvexes dont le groupe d'automorphismes analytiques est non compact,* Bull. Sc. Math., 2e série, 114, 411-420, (1990).

[8] Berteloot, F. et Cœuré G., *Domaines de* $\mathbf{C}^2$*, pseudoconvexes et de type fini ayant un groupe non compact d'automorphismes,* Ann. Inst. Fourier Grenoble 41 (1), 77-86, (1991).

[9] Berteloot, F., *A remark on local continuous extension of proper holomorphic mappings,* Proceedings of the Madison Symposium in Complex Analysis, to appear.

[10] Catlin, D., *Estimates of Invariant metrics on pseudoconvex domains of dimension two,* Math. Z. 200, 429-466, (1989).

[11] J.E. Fornaess et N. Sibony, *Construction of p.s.h. functions on weakly pseudoconvex domains,* Duke Math. J., 58, 633-655 (1989).

[12] Greene, R.E., Krantz, S.G., *Characterizations of certain weakly pseudoconvex domains with non-compact automorphism groups,* Lecture Notes in Mathematics 1268, 122-157 (1987).

[13] Greene, R.E., Krantz, S.G., *Biholomorphic self maps of domains,* Lecture Notes in Mathematics 1276, 136-207 (1987).

[14] Kodama, A., *Characterizations of certain weakly pseudoconvex domains* $E(k,\alpha)$ *in* $\mathbf{C}^n$, Tôhoku Math. J., vol. 40, 343-365 (1988).

[15] Kodama, A., *A characterization of certain domains with good boundary points in the sense of Greene-Krantz,*
(I) Kodai Math. J. Vol. 12, 2, 257-269 (1989).
(II) Tôhoku Math. J., Vol. 43, n° 1, 9-25 (1991).

[16] Kodama, A., Krantz, S.G., Ma, D., *A characterization of generalized complex ellipsoïds in* $\mathbf{C}^n$ *and related results,* Ind. Univ. Math. J., Vol. 41, $N^0$1, 173-195 (1992).

[17] Pincuk S., *The scaling method and holomorphic mappings,* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 52, Part. I, 151-161 (1991).

[18] Rosay, J.P., *Sur une caractérisation de la boule parmi les domaines de* $\mathbf{C}^n$ *par son groupe d'automorphismes,* Ann. Inst. Fourier Grenoble, 29 (4), (1979), 91-97.

[19] Wong, B., *Characterization of the unit ball in* $\mathbf{C}^n$ *by its automorphisms group,* Inventiones Math. 41, 253-257 (1977).

François Berteloot
Université des Sciences et Technologies de Lille
U.R.A. D 0751
UFR de Mathématiques Pures et Appliquées
F-59655 - Villeneuve d'Ascq Cedex (France)