AST

Représentations unipotentes génériques et blocs des groupes réductifs finis - Avec un appendice de George Lusztig - Table des matières et Introduction

Astérisque, tome 212 (1993), p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1993__212__1_0>

212 ASTÉRISQUE

1993

REPRÉSENTATIONS UNIPOTENTES GÉNÉRIQUES ET BLOCS DES GROUPES RÉDUCTIFS FINIS

Michel BROUÉ, Gunter MALLE et Jean MICHEL

avec un appendice de George LUSZTIG

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects Classification :
20, 20 G

TABLE DES MATIÈRES

Présentation 3

M. BROUÉ, G. MALLE AND J. MICHEL :

Generic blocks of finite reductive groups 7

References 89

Index 91

M. BROUÉ ET J. MICHEL :

Blocs à groupes de défaut abéliens des groupes réductifs finis . . . 93

Bibliographie 117

M. BROUÉ UND G. MALLE :

Zyklotomische Heckealgebren 119

Bibliographie 189

Appendix by G. LUSZTIG :

Coxeter groups and unipotent representations 191

References 203

PRÉSENTATION

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_p$ du corps premier à p éléments. Soit $F\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ un endomorphisme de Frobenius munissant $\mathbf{G}$ d'une structure rationnelle sur le sous-corps $\mathbb{F}_q$ à q éléments de $\overline{\mathbb{F}}_p$. Le groupe $\mathbf{G}^F$ des points rationnels est un "groupe réductif fini".

L'ensemble des articles présentés ici a eu pour point de départ l'étude des représentations de $\mathbf{G}^F$ sur un anneau ℓ–adique $\mathcal{O}$ (extension finie "assez grosse" de l'anneau des entiers ℓ–adiques $\mathbb{Z}_\ell$), où ℓ est un nombre premier différent de p. Plus précisément, on s'intéresse à la décomposition de l'algèbre de groupe $\mathcal{O}\mathbf{G}^F$ en somme directe d'algèbres indécomposables (les "ℓ–blocs" de $\mathbf{G}^F$) :

$$(*) \qquad \mathcal{O}\mathbf{G}^F = \bigoplus B\,,$$

et, pour chacun de ces blocs B, on cherche des informations sur la catégorie de modules associée.

D'après la théorie des blocs des groupes finis, on sait qu'à chaque bloc B est associée une paire (D, B_D), unique à $\mathbf{G}^F$–conjugaison près, où

- D est un ℓ–sous-groupe de $\mathbf{G}^F$ (un "groupe de défaut" de B),
- B_D est un ℓ–bloc du normalisateur $N_{\mathbf{G}^F}(D)$ de D dans $\mathbf{G}^F$, qui est Morita équivalent à une algèbre de groupe "tordue" sur $\mathcal{O}$ d'une extension de D par le groupe $N_{\mathbf{G}^F}(D)/C_{\mathbf{G}^F}(D)$ des $\mathbf{G}^F$–automorphismes de D.

Nous nous restreignons ici au cas des blocs B dont les groupes de défaut D sont *abéliens*. Tel est le cas, en particulier, si ℓ est "grand" par rapport à $\mathbf{G}$ (*i.e.,* essentiellement, si ℓ ne divise pas l'ordre du groupe de Weyl de $\mathbf{G}$: voir [Déf. ab.] pour des conditions plus précises), ce qui assure que les ℓ–sous-groupes de Sylow de $\mathbf{G}^F$ sont eux-mêmes abéliens.

Dans ce cas, on constate (*cf.* [Gen. Blocks]) que la décomposition en blocs de $\mathbf{G}^F$ "dépend polynomialement de q" au sens suivant (ce qui suit est mathématiquement approximatif et ne vise qu'à donner au lecteur une idée générale des phénomènes étudiés).

- Il est bien connu que l'ordre de $\mathbf{G}^F$ est un polynôme en q de la forme $q^N \prod_d \Phi_d(q)^{a(d)}$ où Φ_d désigne le d–ième polynôme cyclotomique. La décomposition en blocs ne dépend pas du nombre premier ℓ, mais plutôt du diviseur cyclotomique $\Phi_d(q)$ de l'ordre de $\mathbf{G}^F$ divisé par ℓ.
- Le groupe $W_{\mathbf{G}^F}(D, B_D) := N_{\mathbf{G}^F}(D, B_D)/C_{\mathbf{G}^F}(D)$ ne dépend alors que du *type* de $(\mathbf{G}, F)$ et de l'entier d, et pas de q. C'est un groupe (fini) engendré par des pseudo-réflexions, "section" du groupe de Weyl de $\mathbf{G}$, et appelé "groupe de Weyl cyclotomique".
- Le bloc B (conformément à une conjecture générale sur les blocs à groupes de défaut abéliens des groupes finis "abstraits") a le même "type" que l'algèbre $\mathcal{O}[D \rtimes W_{\mathbf{G}^F}(D, B_D)]$, *i.e.,* essentiellement, toutes les données numériques des algèbres B_D et $\mathcal{O}[D \rtimes W_{\mathbf{G}^F}(D, B_D)]$ sont "comme si" les catégories dérivées des catégories de modules de ces algèbres étaient équivalentes.
- Il est conjecturé que ces catégories dérivées sont effectivement équivalentes, et que les équivalences correspondantes sont fournies par la cohomologie des variétés de Deligne–Lusztig. Il semble que l'algèbre d'endomorphismes de la cohomologie de certaines de ces variétés soit une "d–quantisation" de l'algèbre du groupe de Weyl cyclotomique $W_{\mathbf{G}^F}(D, B_D)$, *i.e.,* une algèbre dépendant polynomialement de q, de sorte que, en substituant à q une racine du polynôme Φ_d, on obtienne l'algèbre de $W_{\mathbf{G}^F}(D, B_D)$.

En d'autres termes, tout se passe comme si la décomposition (*) et la structure de la catégorie des $\mathcal{O}\mathbf{G}^F$–modules qui en résulte étaient une "spécialisation" du phénomène suivant. Étant donné le type $\mathbb{G}$ de $(\mathbf{G}, F)$ (*i.e.,* la donnée radicielle de $\mathbf{G}$ munie de l'opération induite par F), et un entier d, il existe une famille finie $\mathcal{B}_d$ consistant en des triples $(\mathbb{S}, W, \mathcal{H}(t))$, où

- $\mathbb{S}$ est un type de tore $(\mathbf{S}, F)$ dont l'ordre polynomial est une puissance de Φ_d (et ainsi se spécialisant en q en un groupe fini $\mathbb{S}(q) = \mathbf{S}^F$ d'ordre une puissance de $\Phi_d(q)$),
- W est un groupe fini engendré par des pseudo-réflexions et opérant fidèlement sur $\mathbb{S}$,
- $\mathcal{H}(t)$ est une $\overline{\mathbb{Z}}[t, t^{-1}]$–algèbre symétrique telle que

$$\mathcal{H}(t) \equiv \overline{\mathbb{Z}}W \mod \Phi_d(t)\,,$$

avec les propriétés suivantes :

Supposons ℓ grand et divisant $\Phi_d(q)$. Soit $B_\ell(\mathbf{G}^F)$ la somme de tous les blocs unipotents de $\mathcal{O}\mathbf{G}^F$. On aurait

$$\mathcal{D}^b(B_\ell(\mathbf{G}^F)) \simeq \bigoplus_{\mathcal{B}_d} \mathcal{D}^b\left(\mathcal{O}\mathbb{S}(q)_\ell \rtimes \mathcal{O}\mathcal{H}(q)\right) ,$$

où $\mathbb{S}(q)_\ell$ désigne le ℓ–sous-groupe de Sylow du groupe $\mathbb{S}(q)$. L'utilisation d'un isomorphisme entre $\mathcal{O}\mathcal{H}(q)$ et $\mathcal{O}W$ fournirait alors, pour chaque bloc unipotent, une équivalence $\mathcal{D}^b(B) \simeq \mathcal{D}^b(B_D)$.

Tout ceci semble être la manifestation de l'existence d'objets mathématiques situés "au-dessus" de la théorie des groupes réductifs finis — probablement construits à partir des groupes de Coxeter finis et non uniquement à partir des groupes de Weyl, comme le montrent les résultats de Lusztig sur les groupes H_3, H_4 et diédraux dans [Zykl. Heckealg.], Appendice — et que nous avons essayé de détecter chaque fois que cela semble possible : c'est la raison de l'utilisation systématique des notions que nous appelons "génériques". Un groupe réductif fini (et ses représentations unipotentes, ses blocs, etc.) serait alors la spécialisation, en une puissance d'un nombre premier, de l'objet générique. Sa spécialisation en une racine primitive d–ième de l'unité serait probablement le groupe de Weyl cyclotomique correspondant à un Φ_d–sous-groupe de Sylow.

Nous présentons sommairement ci-dessous les articles de ce recueil. Le lecteur pourra se reporter à l'introduction de chacun des trois articles pour une présentation plus précise de leur contenu.

Dans [Gen. Blocks], on démontre que la théorie de Harish–Chandra, et une partie de la theorie de Lusztig des caractères unipotents, peuvent être vues comme cas particuliers (le cas $d = 1$) d'une théorie plus générale de "d–Harish–Chandra" et de "d–Lusztig", où les caractères cuspidaux sont remplacés par les caractères d–cuspidaux, et l'induction de Harish–Chandra est remplacée par l'induction généralisée de Deligne–Lusztig. Ceci permet d'établir un dictionnaire entre l'induction de Deligne–Lusztig et l'induction ordinaire dans certains groupes engendrés par des pseudo-reflexions ("groupes de Weyl cyclotomiques"), indépendants de q, dont nous fournissons la liste complète. Comme application, on établit la validité de la conjecture d'isotypie sur les blocs à groupes de défaut abéliens pour le cas des grands nombres premiers ℓ.

Dans [Déf. ab.], on utilise les méthodes génériques et les résultats de [Gen. Blocks] pour traiter, en y ajoutant des résultats *ad hoc*, le cas particulier des petits nombres premiers, et vérifier également dans ce cas la conjecture d'isotypie.

Dans [Zykl. Heck.], après un énoncé précis des conjectures reliant des équivalences dérivées à la géométrie des groupes réductifs, on fournit des présentations des groupes de Weyl cyclotomiques par des diagrammes "de Dynkin cyclotomiques" (généralisant les diagrammes classiques) qui nous permettent de définir des "algèbres de Hecke cyclotomiques" (généralisant les algèbres de Hecke classiques associées aux groupes de Weyl). En particulier, si $\mathcal{D}$ est un tel diagramme et $W(\mathcal{D})$ le groupe de Weyl cyclotomique associé, l'algèbre de Hecke cyclotomique associée est une algèbre $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ libre et de rang $|W(\mathcal{D})|$ sur un anneau de polynômes convenable sur $\mathbb{Z}$, qui devient isomorphe à l'algèbre du groupe $W(\mathcal{D})$ sur une extension convenable de l'anneau de base. On présente une série de faits et de coïncidences numériques à l'appui des conjectures géométriques déjà mentionnées.

[Gen. Blocks] M. Broué, G. Malle et J. Michel, *Generic blocks of finite reductive groups*, 7–92.

[Déf. ab.] M. Broué et J. Michel, *Blocs à groupes de défaut abéliens des groupes réductifs finis*, 93–118.

[Zykl. Heck.] M. Broué et G. Malle, *Zyklotomische Heckealgebren*, 119–190; avec un Appendice par G. Lusztig, *Coxeter groups and unipotent representations*, 191–204.