

Astérisque

PATRICE LE CALVEZ

**Propriétés dynamiques des difféomorphismes
de l'anneau et du tore**

Astérisque, tome 204 (1991)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__204__1_0>

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

204

ASTÉRISQUE

1991

**PROPRIÉTÉS DYNAMIQUES
DES DIFFÉOMORPHISMES
DE L'ANNEAU ET DU TORE**

Patrice LE CALVEZ

Table des matières

Introduction	3
Chapitre 1. Présentation et comparaison des différentes approches de la théorie des difféomorphismes de l'anneau déviant la verticale	5
1. Exemples	
2. Définitions et notations : applications déviant la verticale, nombres de rotation	
3. Etude variationnelle des difféomorphismes déviant la verticale et préservant l'aire : la théorie d'Aubry-Mather	
4. Etude topologique des difféomorphismes déviant la verticale et préservant l'aire : la théorie de Birkhoff	
5. Le cas général des applications déviant la verticale	
6. Etude du cas dissipatif : les attracteurs de Birkhoff	
Chapitre 2. Phases génératrices des difféomorphismes du tore ou de l'anneau	55
1. Présentation des résultats.	
2. Composition de difféomorphismes du plan déviant la verticale	
3. Etude des difféomorphismes conservatifs de l'anneau	
4. Un énoncé équivariant du théorème de translation de Brouwe.	
5. Etude des ensembles de rotation des difféomorphismes du tore	
6. Orbites périodiques des difféomorphismes du tore	
Bibliographie	121
Index	129
Summary	131

Introduction

Les difféomorphismes de l'anneau qui dévient la verticale se retrouvent dans un certain nombre de systèmes dynamiques, conservatifs ou dissipatifs. Un problème important est la recherche d'orbites périodiques ou d'orbites ayant d'autres propriétés dynamiques bien déterminées. Différentes méthodes ont été mises en oeuvre ; certaines sont variationnelles (la théorie d'Aubry-Mather) et conviennent au cas conservatif, d'autres sont topologiques et conviennent également au cas dissipatif. Dans le premier chapitre nous donnerons un panorama de ces méthodes. Dans le second chapitre, nous montrerons que certaines idées de la théorie d'Aubry-Mather se généralisent naturellement aux composées d'applications déviant la verticale, même dans le cas dissipatif, et permettent de retrouver voir d'améliorer certains résultats sur les difféomorphismes de l'anneau qui n'ont pas cette propriété de dévier la verticale, ou alors sur les difféomorphismes du tore de dimension deux .

Voici quelques années que Michel Herman m'a proposé d'étudier les attracteurs de Birkhoff, il m'a ensuite posé beaucoup de questions et j'ai tenté de répondre à certaines d'entre-elles ; je tiens à le remercier ici pour tout ce qu'il m'a appris.

Je remercie également Alain Chenciner et John Mather pour l'intérêt constant qu'ils ont porté à mes travaux, pour leurs explications, et pour leurs encouragements.

Je remercie aussi tous ceux, en particulier Raphaël Douady, Albert Fathi, Jean-Marc Gambaudo, Lucien Guillou, Jean-Claude Sikorav et Jean-Christophe Yoccoz, et tous les membres du laboratoire de Topologie et Dynamique d'Orsay, avec qui j'ai eu des discussions profitables et chaleureuses.

Enfin je remercie le "referee" pour sa lecture attentive du manuscrit original, pour ses nombreuses remarques et pour ses propositions de modifications du texte.

Merci enfin à Bernadette Barbichon pour m'avoir gentiment et patiemment expliqué le système Sweet \TeX de Larry Siebenmann avec lequel a été composé ce texte.

Chapitre 1

Présentation et comparaison des différentes approches de la théorie des difféomorphismes de l'anneau déviant la verticale

L'étude qualitative d'un certain nombre d'équations différentielles se déduit, utilisant une section de Poincaré, de celle d'un difféomorphisme de l'anneau ou d'une partie de l'anneau, pouvant avoir des propriétés supplémentaires, comme celles de préserver ou de diminuer les aires, par exemple. Nous nous intéresserons principalement à une autre propriété, définie dans le premier paragraphe, la propriété de déviation de la verticale. Cette propriété, que Poincaré avait déjà rencontré, est remarquable à deux points de vue. D'une part un certain nombre de systèmes dynamiques sont définis par des applications vérifiant cette propriété, comme par exemple, l'étude d'un point fixe elliptique générique d'un difféomorphisme du plan préservant l'aire (nous donnerons d'autres exemples dans le premier paragraphe). D'autre part l'écriture d'un difféomorphisme quelconque de l'anneau comme composée de ces applications permet d'étudier celui-ci. Nous verrons dans ce chapitre que la dynamique des difféomorphismes qui dévient la verticale peut être comprise de façon assez précise et a plus d'un point commun avec celle des endomorphismes du cercle de degré un, qui sont d'ailleurs des cas dégénérés de ces applications.

Le paragraphe 2 sera consacré à des définitions et à quelques rappels. Dans les paragraphes 3 et 4, nous nous intéresserons aux difféomorphismes qui dévient la verticale et préservent l'aire et appliquerons les résultats obtenus à l'étude des points fixes elliptiques génériques des difféomorphismes conservatifs du plan. Nous connaissons déjà la théorie de Kolmogorov, Arnold, Moser, qui est elle-même une conséquence de la déviation de la verticale, et qui donne l'existence de courbes invariantes au voisinage du point fixe. Dans le paragraphe 3, nous exposerons une partie de la théorie d'Aubry-Mather, qui est variationnelle et qui donne l'existence d'orbites périodiques ou ayant un nombre de rotation donné ; celle-ci nous permet,

en particulier, de dire ce qu'il est advenu des courbes invariantes manquantes. Dans le paragraphe 4, nous exposerons la théorie de Birkhoff, qui est topologique et qui permet, dans notre exemple, de préciser la dynamique entre les courbes invariantes.

Dans le paragraphe 5, nous ne supposons plus aucune condition d'aire, et nous donnerons des résultats liés uniquement à la propriété de déviation. Nous commencerons à voir les analogies avec les endomorphismes du cercle. Nous énoncerons également certains résultats, que nous généraliserons dans le second chapitre avec des méthodes complètement différentes.

Dans le paragraphe 6, nous étudierons le cas des difféomorphismes déviant la verticale et diminuant l'aire. Nous verrons comment préciser les résultats du paragraphe précédent, pour définir, puis étudier ce qu'on appelle les attracteurs de Birkhoff.

1. Exemples.

Les équations, dites de Van der Pol, apparaissent parmi les premières équations différentielles de type dissipatif où se rencontrent des phénomènes dynamiques compliqués : on trouve en particulier un attracteur qui possède un fer à cheval. Considérons l'équation

$$\varepsilon \ddot{x} + \varphi(x)\dot{x} + \varepsilon x = bp(t) ,$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre, φ une fonction négative pour $|x| < 1$, positive pour $|x| > 1$, p une fonction périodique de période T et b un paramètre variant dans un intervalle borné $[b_0, b_1]$. Ces équations ont commencé à être étudiées au début des années 1940 pour décrire entre autres les oscillations du courant dans certains circuits électriques. Dans le cas où $b = 0$ le système est autonome et son comportement connu depuis longtemps. Par contre, dès que b est non nul, celui-ci est beaucoup plus compliqué. Le changement de variable

$$\begin{cases} y = \dot{x} + \Phi(x) , \\ \psi = t , \end{cases}$$

où

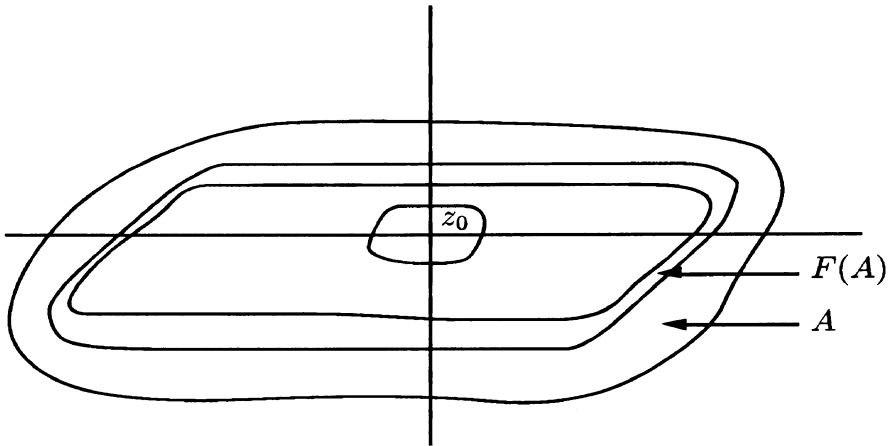
$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(u) du ,$$

transforme l'équation initiale en un système qui définit un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\varepsilon}(y - \Phi(x)) , \\ \dot{y} = -\varepsilon x + bp(\psi) , \\ \dot{\psi} = 1 . \end{cases}$$

Énonçons les résultats que des expériences, puis peu de temps après, les recherches de M. L. Cartwright et J. E. Littlewood d'abord, et de N. Levinson ensuite, mirent en évidence (voir [CL], [Li1], [Li2], [Ln], [Lv]).

Soit F l'application de premier retour de la section de Poincaré d'équation $\psi = 0$ identifiée au plan \mathbb{R}^2 , qui, à z associe sa position z^T au temps T .



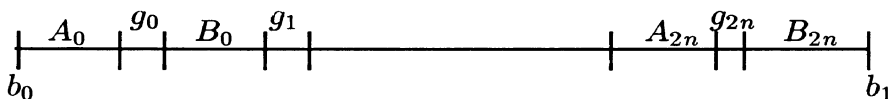
On peut trouver un anneau fermé A d'épaisseur $\sim C\varepsilon$ qui attire tous les points du plan, à l'exception d'un point fixe z_0 de F , correspondant à une orbite périodique répulsive du système, et qui est envoyé dans son intérieur par F .

L'ensemble $\Lambda = \bigcap_{k \geq 0} F^k(A)$ est alors compact, connexe et de mesure nulle, il sépare le plan en deux régions, est frontière de chacune d'elles et attire tous les points du plan à l'exception de z_0 , c'est-à-dire $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(F^k(z), \Lambda) = 0$, si $z \neq z_0$.

Le graphe de Φ est l'ensemble des points où la première coordonnée du champ s'annule, celle-ci est d'autant plus grande que l'on s'éloigne de ce graphe. En particulier tous les points d'une orbite de F contenue dans A restent très longtemps dans les côtés de droite et de gauche de l'anneau, ce qui, vu les propriétés de φ donne le caractère dissipatif du problème; de plus la largeur de ces côtés est très petite ($< e^{-C/\varepsilon}$).

L'intervalle $[b_0, b_1]$ se décompose ainsi :

pour chaque valeur de ε on peut écrire $[b_0, b_1]$ comme une réunion finie d'intervalles de trois types A_i , B_i et g_j , alternés comme sur le dessin qui suit; un intervalle A_i est suivi d'un intervalle g_j , puis de l'intervalle B_i , de g_{j+1} , enfin de A_{i+1} (la décomposition peut commencer également par un B_i ou par un g_j).



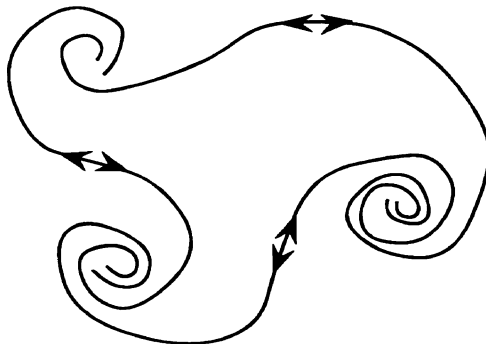
Cette décomposition vérifie les propriétés suivantes :

- i) la somme totale des longueurs des intervalles g_j est une fonction de ε qui tend vers 0 quand ε tend vers 0 ;
- ii) si b appartient à un intervalle A_i , le système a deux solutions périodiques de période $(2n_i + 1)T$, l'une attractive, l'autre de type selle ;
- iii) si b appartient à un intervalle B_i , le système a en plus des deux solutions périodiques de période $(2n_i + 1)T$, deux autres solutions périodiques de période $(2n_i - 1)T$, là encore un puits et une selle ;
- iv) on a $n_{i+1} = n_i - 1$, et les nombres n_i sont tous équivalents à $1/\varepsilon$.

Cartwright et Littlewood remarquèrent que l'existence d'orbites périodiques de périodes distinctes obligeait Λ à être différent d'une courbe et donc topologiquement plus compliqué, ils exhibèrent également dans ce cas, une famille de solutions ayant un comportement stochastique. Résultat que précisera un peu plus tard Levinson qui, analysant la situation où l'équation est linéaire par morceaux, associera à toute suite formée de 0 et de 1, une solution avec un comportement dynamique déterminé par la suite, associant en particulier une orbite périodique à une suite périodique, et obtenant ainsi une infinité de telles orbites. C'est d'ailleurs cette analyse de Levinson qui amènera S. Smale à introduire le fer à cheval (voir [Sm2], page 775).

Enfin, en 1978, M. Levi obtint une analyse qualitative complète de l'équation de Van der Pol, en réécrivant les résultats précédents sous une terminologie moderne et en en donnant une description plus précise. Il faut imposer certaines conditions sur φ et p , mais qui sont vérifiées si, par exemple, φ et p sont proches respectivement des fonctions $x \mapsto \text{sgn}(x^2 - 1)$ et $t \mapsto \text{sgn}(\sin 2\pi t/T)$. Énonçons les résultats de Levi ([Lv]).

- Si b appartient à un intervalle A_i , le difféomorphisme F est de type Morse-Smale et structurellement stable. L'attracteur Λ est alors formé de l'orbite attractive et de la variété instable de l'orbite de type selle (voir la figure qui suit).

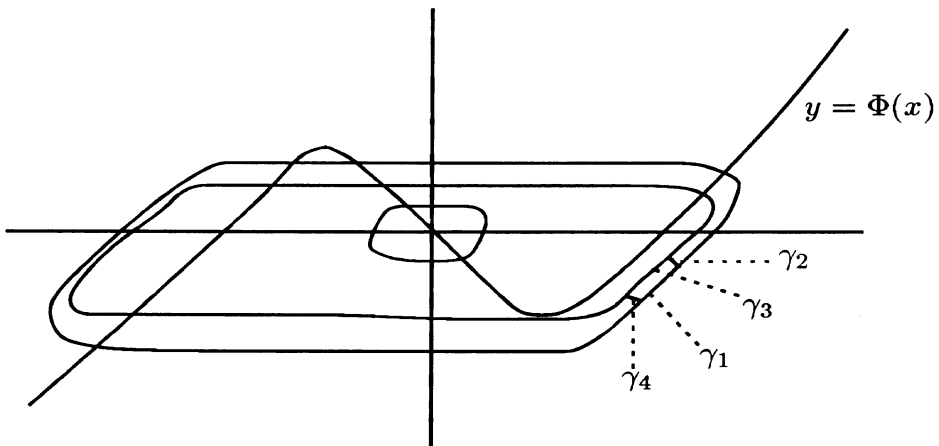


- Si b appartient à un intervalle B_i , le difféomorphisme est de type Axiome A et structurellement stable. L'attracteur est formé des deux orbites périodiques attractives, d'un ensemble fermé hyperbolique X contenant les orbites de type selle, et de la variété instable de cet ensemble. Presque tous les points de \mathbb{R}^2 sont attirés par l'une des deux orbites attractives. Enfin, dans ce cas, l'ensemble de rotation de F est l'intervalle $[1/(2n_i + 1), 1/(2n_i - 1)]$ au sens suivant :

si z_0 est le point fixe répulsif de F , si $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{z_0\}$, $(\theta, r) \mapsto z_0 + (e^r \cos \theta, e^r \sin \theta)$ est le revêtement universel de $\mathbb{R}^2 \setminus \{z_0\}$ et f le relèvement de F à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ défini naturellement par le flot, alors le réel ρ appartient à $[1/(2n_i + 1), 1/(2n_i - 1)]$ si et seulement s'il existe z tel que $\lim_{k \rightarrow +\infty} p_1(f^k(z))/k = \rho$ où $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(\theta, r) \mapsto \theta$ est la première projection.

- Dans chaque intervalle de bifurcation g_j il existe au moins une valeur du paramètre b où l'on trouve une tangence homocline non dégénérée, et on retrouve alors au voisinage de cette valeur différents types de comportement liés aux bifurcations tangentielles (existence de valeurs du paramètre où il y a une infinité de puits, cascades de doublements de périodes, existence de valeurs du paramètre où F admet des attracteurs étranges de type Hénon (voir [N1], [N2], [NPT], [PT], [AY], [MV])).

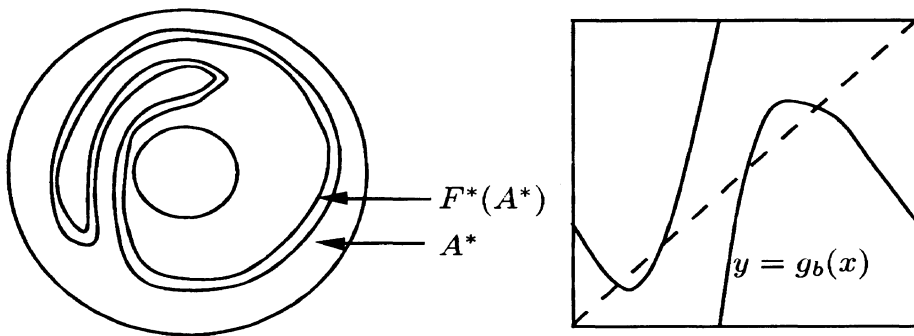
La démonstration de ces résultats est basée sur l'idée suivante. On peut construire un rectangle, dessiné ci-dessous, délimité par quatre petits arcs γ_1 , γ_2 , γ_3 et $\gamma_4 = F(\gamma_2)$, rencontrant l'orbite positive de tout point distinct de z_0 . La dynamique de F se déduit alors de la dynamique de premier retour définie sur ce rectangle, c'est-à-dire de la dynamique d'un difféomorphisme F^* défini sur l'anneau A^* obtenu en recollant les cotés γ_2 et γ_4 du rectangle, à valeurs dans cet anneau.



Ainsi, par exemple, quand b est dans un intervalle B_i , le difféomorphisme F^* a deux points fixes attractifs et un ensemble de Cantor hyperbolique obtenu par une figure du même type que celle du fer à cheval et topologiquement conjugué à

un sous-décalage de type fini de $\{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{Z}}$; ce sous-décalage contient toutes les suites formées de 0 ou de 3, les orbites correspondantes sont exactement les orbites de Levinson.

En fait, l'anneau est extrêmement fin et le difféomorphisme F^* , représenté schématiquement ci-dessous, est très proche d'un endomorphisme g_b de \mathbb{T}^1 (n'oublions pas que ε est petit), dépendant régulièrement de b . Le fait d'augmenter b correspond pour F^* à composer la figure de gauche par une rotation d'angle décroissant et donc à translater le graphe de droite vers le bas. Les phénomènes observés (décomposition de $[b_0, b_1]$, différents types de dynamiques) se déduisent alors de résultats de même sorte pour la famille d'endomorphismes translétés.



On remarque donc une certaine ressemblance avec les endomorphismes du cercle. En particulier la complexité de la dynamique provient de l'existence d'un intervalle de rotation et de la présence d'une infinité d'orbites périodiques obtenues en conséquence.

En fait, dès 1932, G.D. Birkhoff avait construit un attracteur du type précédent ayant deux nombres de rotation et une topologie compliquée dans une classe d'applications qu'il étudiait particulièrement et que Poincaré avait déjà rencontré dans l'étude du problème restreint à trois corps : les difféomorphismes qui dévient la verticale (voir [Bi5]). Ce sont les difféomorphismes de l'anneau dont les relèvements au revêtement universel ont la propriété d'envoyer chaque verticale sur une courbe qui rencontre toute verticale au plus en un point (nous donnerons une définition plus rigoureuse au paragraphe suivant); ce sont ces difféomorphismes que nous étudierons dans ce chapitre. Nous pouvons noter que le difféomorphisme F défini plus haut ne vérifie pas cette propriété mais que ses propriétés dynamiques sont très proches de celles de ces difféomorphismes.

Par contre, dans les exemples qui vont suivre, les difféomorphismes construits auront cette propriété de dévier la verticale.

- i) Etude de la dynamique d'un difféomorphisme générique du plan préservant l'aire au voisinage d'un point fixe elliptique.

Soit f un difféomorphisme de classe C^∞ défini au voisinage de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, préservant la forme $dx \wedge dy$, et tel que les valeurs propres λ et λ' de $Df(0,0)$ soient sur le cercle unité et vérifient $\lambda^n \neq 1$ pour $n \in \{1, \dots, q\}$. On peut alors écrire f sous une forme normale, la forme normale de Birkhoff (voir [Bi2] ou [SM]).

Théorème. *Il existe un difféomorphisme h de classe C^∞ , défini au voisinage de $(0,0)$, laissant fixe ce point, préservant la forme $dx \wedge dy$ et tel que $h \circ f \circ h^{-1}$ ait la forme suivante, en utilisant la coordonnée complexe z :*

$$h \circ f \circ h^{-1}(z) = \lambda z e^{2i\pi P(|z|^2)} + o(|z|^{q-1}),$$

où $P(X) = a_1 X + \dots + a_m X^m$ est un polynôme réel de degré $m < (q-1)/2$.

Les réels a_1, \dots, a_m ne dépendent que de la fonction f et sont génériquement non nuls. Si c'est le cas, la fonction $z \rightarrow \lambda z e^{2i\pi P(|z|^2)}$ laisse invariant chaque cercle $|z| = r$ et induit sur celui-ci une rotation dépendant de façon monotone de r au voisinage de 0. En coordonnées polaires $z = r e^{2i\pi\theta}$, la fonction $g = h \circ f \circ h^{-1}$ est définie dans un voisinage de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, +\infty[$ et s'écrit

$$g(\theta, r) = (\theta + \alpha + a_1 r^2 + \dots + a_m r^{2m} + \mu_1(\theta, r), r + \mu_2(\theta, r)),$$

où μ_1 et μ_2 sont des $o(|r|^{2n})$, et où $\lambda = e^{2i\pi\alpha}$; elle dévie la verticale. Remarquons que c'est cette propriété de déviation de la verticale qui permet d'obtenir le théorème de Kolmogorov, Arnold, Moser, c'est-à-dire l'existence de courbes invariantes au voisinage de $(0,0)$ (voir J. Moser [Mo1], voir également M. Herman [Hm2] et R. Douady [Do]).

ii) Exemple du billard convexe.

L'étude du billard convexe est due initialement à G. D. Birkhoff [Bi4], pour plus de détails on peut lire [Do].

Considérons une courbe simple orientée convexe Γ de classe C^k , $k \geq 2$, et de longueur 1, définie par une paramétrisation par longueur d'arc

$$\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2, s \mapsto \gamma(s);$$

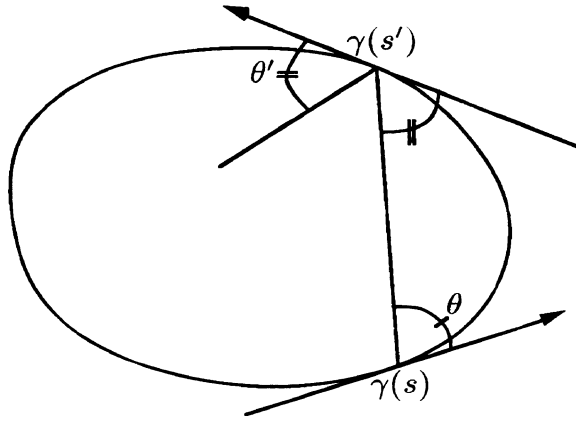
et définissons une application

$$F : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, \pi]$$

de la façon suivante :

si $s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\theta \in [0, \pi]$, on considère la demi-droite passant par $\gamma(s)$ et qui fait avec la tangente orientée en $\gamma(s)$ un angle θ , elle rencontre Γ en un second

point $\gamma(s')$ (égal à $\gamma(s)$ si $\theta = 0$ ou π); on note alors θ' l'angle que fait la tangente en $\gamma(s')$ à cette demi-droite.



L'application ainsi définie est un homéomorphisme de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, \pi]$, dont la restriction à $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times]0, \pi[$ est un difféomorphisme qui dévie la verticale à droite et préserve la forme $w = \sin\theta ds \wedge d\theta$. Cet homéomorphisme se prolonge en un difféomorphisme de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, \pi]$ dans le cas où la courbure ne s'annule pas.

iii) Le pendule amorti entretenu.

L'étude d'un grand nombre d'équations différentielles se déduit de celle de la composée d'applications déviant toutes la verticale à droite. Il en est ainsi, par exemple, du pendule amorti entretenu dont l'équation est la suivante (voir M. Casdagli [Ci2]) :

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \sin 2\pi\theta = p(t) ,$$

où p est une application de classe C^k , $k \geq 3$, et de période $T > 0$, et où α est un réel strictement positif.

Cette équation se ramène par le changement de variable $r = \dot{\theta}$, $\psi = t$, au champ de vecteurs sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ suivant :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = r , \\ \dot{r} = -\alpha r - \sin 2\pi\theta - p(\psi) , \\ \dot{\psi} = 1 . \end{cases}$$

Ce champ est transverse à chacune des sections $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \{\psi\}$; il est rentrant sur le cylindre $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-r_0, r_0] \times \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ dès que r_0 est assez grand ; enfin il est de divergence négative.

L'application de premier retour F définie sur la section $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ peut s'écrire $F = F_{n-1} \circ \dots \circ F_0$, où F_i est l'application de passage de la section $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \{iT/n\}$ à la section $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \{(i+1)T/n\}$. On peut montrer facilement que les applications F_i dévient la verticale à droite sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-r_0, r_0]$ dès que n est assez grand, et qu'ainsi F est la composée d'applications diminuant l'aire, envoyant l'anneau $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-r_0, r_0]$ dans lui-même et déviant la verticale à droite sur cet anneau.

L'équation d'où provient la propriété de déviation de la verticale est l'égalité triviale $\dot{\theta} = r$, on retrouvera donc ce type de propriétés pour d'autres équations différentielles du second ordre à coefficients périodiques en t .

iv) Les endomorphismes du cercle.

Les endomorphismes du cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} de degré 1 apparaissent comme des cas limites de difféomorphismes dissipatifs de l'anneau déviant la verticale.

En effet, soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et de période 1 et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à x associe $x + \varphi(x)$. Pour tout $\lambda > 0$, l'application

$$f_\lambda : (x, y) \rightarrow (x + y, \lambda x + \varphi(x + y))$$

relève un difféomorphisme de la variété $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, dévie la verticale à droite, préserve l'aire si $\lambda = 1$ et la diminue si $\lambda < 1$.

Quand λ tend vers 0, l'application f_λ tend en topologie C^1 vers l'application

$$f_0 : (x, y) \rightarrow (x + y, \varphi(x + y)) .$$

Celle-ci n'est plus inversible, son image est le graphe de φ et sa restriction à ce graphe induit une application conjuguée par p_1 à g . Nous verrons au paragraphe 6 comment retrouver certaines propriétés des endomorphismes du cercle de degré 1 à partir des propriétés des difféomorphismes dissipatifs de l'anneau qui dévient la verticale.

2. Définitions et notations : applications déviant la verticale, nombres de rotation.

Nous noterons $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le tore de dimension 1, et plus généralement $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ le tore de dimension n .

Sur le tore \mathbb{T}^2 , l'anneau $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ ou le plan \mathbb{R}^2 nous donnerons le même nom aux projections $p_1 : (x, y) \mapsto x$ et $p_2 : (x, y) \mapsto y$, à valeurs dans \mathbb{T}^1 ou dans \mathbb{R} suivant le cas.

Nous définirons également

$$\begin{aligned}\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x + \mathbb{Z}, y) ; \\ \pi_2 : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{T}^2, (x, y) \mapsto (x, y + \mathbb{Z}) ; \\ \pi = \pi_2 \circ \pi_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{T}^2 .\end{aligned}$$

Enfin, nous écrirons T_1 et T_2 pour les translations de vecteurs respectifs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ définies sur \mathbb{R}^2 .

Si M est une variété, nous noterons $C^k(M, \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, l'ensemble des fonctions de classe C^k à valeurs dans \mathbb{R}^m , nous noterons $\text{Diff}^k(M)$, $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble des difféomorphismes de M de classe C^k , et $\text{Diff}_0^k(M)$ l'ensemble des difféomorphismes isotopes à l'identité. Ces ensembles seront munis de la C^k -topologie, définie de la façon suivante :

« la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de $C^k(M, \mathbb{R}^m)$ (resp. $\text{Diff}^k(M)$, resp. $\text{Diff}_0^k(M)$) converge vers l'élément f de $C^k(M, \mathbb{R}^m)$ (resp. $\text{Diff}^k(M)$, resp. $\text{Diff}_0^k(M)$) si et seulement si les différentielles jusqu'à l'ordre k de f_n convergent uniformément vers celle de f sur tout compact; dans les deux derniers cas la suite $(f_n^{-1})_{n \geq 0}$ converge également vers f^{-1} uniformément sur tout compact, ainsi que ses différentielles jusqu'à l'ordre k ».

Nous noterons $D^k(\mathbb{T}^2)$ la partie de $\text{Diff}_0^k(\mathbb{R}^2)$ formée des relèvements à \mathbb{R}^2 d'éléments de $\text{Diff}_0^k(\mathbb{T}^2)$; de même, si I est un intervalle de \mathbb{R} , nous noterons $D^k(\mathbb{T}^1 \times I)$ la partie de $\text{Diff}_0^k(\mathbb{R} \times I)$ formée des relèvements à $\mathbb{R} \times I$ d'éléments de $\text{Diff}_0^k(\mathbb{T}^1 \times I)$. Chacun des ensembles $D^k(\mathbb{T}^2)$ et $D^k(\mathbb{T}^1 \times I)$ est contractile (voir [Sm3], voir également [EE]). Notons également que l'ensemble des éléments de $D^k(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ ou de $D^k(\mathbb{T}^2)$ qui préservent l'aire est connexe par arcs (voir [CZ]).

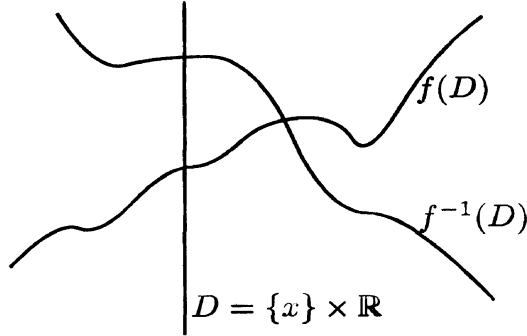
Si ξ est un champ de vecteurs lipschitzien sur une variété M et si $x \in M$, on notera $(x^t)_{t \in J}$ la courbe intégrale de ξ telle que $x^0 = x$.

Enfin, on désignera respectivement par \bar{X} , $\text{Int } X$ et $\text{Fr } X$ l'adhérence, l'intérieur et la frontière d'une partie X d'un espace topologique.

Nous dirons que $f \in \text{Diff}^1(\mathbb{R}^2)$ dévie la verticale si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les applications $y \mapsto p_1 \circ f(x, y)$ et $y \mapsto p_1 \circ f^{-1}(x, y)$ sont des difféomorphismes de \mathbb{R} .

Ainsi, par exemple, les applications

$$f^* : (x, y) \mapsto (x + y, y) \text{ et } f^{**} : (x, y) \mapsto (y, -x)$$



dévie la verticale.

Si f dévie la verticale, il existe une application $G = (g, g') \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ telle que

$$f(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (y, y') = G(x, x') = (g(x, x'), g'(x, x')) \quad ; \quad (*)$$

et les quantités $\partial g / \partial x'(x, x')$ et $-\partial g' / \partial x(x, x')$ ne s'annulent pas.

Plus précisément, il existe un homéomorphisme entre l'ensemble des difféomorphismes déviant la verticale et l'ensemble des fonctions $G = (g, g') \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ vérifiant :

- i) pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$, $\partial g / \partial x'(x, x') \partial g' / \partial x(x, x') \neq 0$,
- ii) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{|x'| \rightarrow +\infty} |g(x, x')| = +\infty$,
- iii) pour tout $x' \in \mathbb{R}$, $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |g'(x, x')| = +\infty$,

cet homéomorphisme est donné par la relation (*).

Le second ensemble est formé de quatre parties convexes qui sont déterminées par les signes de $\partial g / \partial x'(x, x')$ et $\partial g' / \partial x(x, x')$; ainsi l'ensemble des difféomorphismes déviant la verticale a quatre composantes connexes par arcs. Nous nous intéresserons par la suite exclusivement aux difféomorphismes qui préservent l'orientation et noterons $DV(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des difféomorphismes déviant la verticale et ayant cette propriété. Celui-ci a deux composantes connexes, les difféomorphismes qui dévient la verticale à droite, pour lesquels les applications $y \mapsto p_1 \circ f(x, y)$ et $y \mapsto p_1 \circ f^{-1}(x, y)$ sont respectivement croissante et décroissante, et ceux qui dévient la verticale à gauche pour lesquels ces applications sont respectivement décroissante et croissante. Dans le premier cas $\partial g / \partial x'(x, x') > 0$ et $\partial g' / \partial x(x, x') < 0$, dans le second $\partial g / \partial x'(x, x') < 0$ et $\partial g' / \partial x(x, x') > 0$.

On peut joindre tout élément de $DV(\mathbb{R}^2)$ à l'identité par une isotopie dans $DV(\mathbb{R}^2) \cup \{\text{Id}\}$, il suffit en effet de le montrer pour les applications $f^* : (x, y) \mapsto (x + y, y)$ et f^{*-1} , et c'est alors évident si on considère la famille de difféomorphismes $f_t : (x, y) \mapsto (x + ty, y)$, $t \in \mathbb{R}$.

Nous définirons également les ensembles $DV(\mathbb{T}^2) = D^1(\mathbb{T}^2) \cap DV(\mathbb{R}^2)$ et $DV(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}) = D^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}) \cap DV(\mathbb{R}^2)$.

Plus généralement, si I est un intervalle de \mathbb{R} , nous dirons que $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times I)$ dévie la verticale à droite si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les applications $y \mapsto p_1 \circ f(x, y)$ et $y \mapsto p_1 \circ f^{-1}(x, y)$ sont des difféomorphismes de I sur son image, respectivement croissants et décroissants, et si elles admettent une limite finie (resp. infinie) quand y tend vers une borne finie (resp. infinie) de I . Nous définirons de même des éléments de $D^1(\mathbb{T}^1 \times I)$ qui dévient la verticale à gauche. Enfin, nous dirons que $F \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{T}^1 \times I)$ dévie la verticale à droite (ou à gauche), si c'est le cas d'un relèvement de F .

Si $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times I)$ dévie la verticale à droite, il existe deux fonctions g et g' , de classe C^1 , définies sur une partie de \mathbb{R}^2 , telles que :

$$\begin{cases} f(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow y = g(x, x') \text{ et } y' = g'(x, x') , \\ g(x + 1, x' + 1) = g(x, x'), \quad g'(x + 1, x' + 1) = g'(x, x') , \\ \partial g / \partial x'(x, x') > 0, \quad \partial g' / \partial x(x, x') < 0 . \end{cases} \quad (\text{P})$$

Or, si I est fermé et distinct de \mathbb{R} , on peut toujours prolonger g et g' à \mathbb{R}^2 , vérifiant les deux dernières conditions de (P), avec des conditions à l'infini, de telle façon que la première relation de (P) définisse un difféomorphisme de $D^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ prolongeant f et déviant la verticale à droite. Montrons-le par exemple dans le cas où I est l'intervalle $[0, 1]$. On peut trouver deux réels $\alpha < -1$ et $\beta > 2$ tels que le domaine de définition de g et de g' soit une bande délimitée par les graphes de deux applications ψ^- et ψ^+ , relevant chacune un difféomorphisme de \mathbb{T}^1 préservant l'orientation, et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la relation :

$$x + \alpha < \psi^-(x) < \psi^+(x) < x + \beta .$$

On peut alors prolonger sans problèmes les applications g et g' à \mathbb{R}^2 avec les propriétés de périodicité demandées, de telle façon que les applications $x \mapsto g(x, x')$ et $x' \mapsto g'(x, x')$ soient strictement monotone, la première croissante et la seconde décroissante, et que l'on ait :

$$g(x, x') = g'(x, x') = x' - x \text{ si } x' - x \leq \alpha \text{ ou } x' - x \geq \beta .$$

Les relations (P) définissent un prolongement de f qui coïncide avec l'application $(x, y) \mapsto (x + y, y)$ dès que $y \leq \alpha$ ou $y \geq \beta$.

Remarquons pour finir que si $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ dévie la verticale à droite, il existe un chemin $(f_t)_{t \in [0, 1]}$ dans $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$, joignant l'identité à f , et formé, sauf pour $t = 0$, d'applications déviant la verticale à droite. En effet, comme $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ est localement connexe par arcs, comme $D^\infty(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ est dense dans $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$, et comme toute application de $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ proche

de f dévie également la verticale, on peut supposer que $f \in D^\infty(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$. L'équation $f(x, 0) = (\mu(x), 0)$ définit un difféomorphisme μ de \mathbb{R} ; l'image par f de la verticale $\{x\} \times [0, 1]$ est alors la courbe intégrale issue de $(\mu(x), 0)$ du champ de vecteurs $\lambda(z) = Df(f^{-1}(z)) \cdot (1, 0)$. Notons $\alpha(z)$ l'angle compris entre 0 et π que font $\lambda(z)$ et le vecteur $(0, 1)$ et définissons le vecteur $\lambda_t(z)$ de norme $1 - t + t \|\lambda_t(z)\|$ qui fait un angle $t\alpha(z)$ avec $(0, 1)$, on obtient ainsi une famille de champs de vecteurs $(\lambda^t)_{t \in [0, 1]}$ de classe C^∞ . Si $t \in]0, 1[$, la courbe intégrale de λ^t issue de $(x, 0)$ est comprise entre les courbes intégrales de λ^0 et λ^1 issue du même point. Elle doit donc atteindre $\mathbb{R} \times \{1\}$. Il est alors très facile, en normalisant convenablement les champs λ^t , de construire une isotopie $(f_t)_{t \in [0, 1]}$ dans $D^\infty(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ joignant l'identité à f , de telle façon que l'image de $\{x\} \times [0, 1]$ par f_t soit la courbe intégrale de λ^t issue de $((1 - t)x + th(x), 0)$, et donc que f_t dévie la verticale à droite si $t \neq 0$.

Fonctions génératrices.

Il existe un homéomorphisme entre l'ensemble des éléments de $DV(\mathbb{R}^2)$ qui préservent l'aire et l'ensemble des fonctions $h \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant

- i) pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$, $\partial^2 h / \partial x \partial x'(x, x') \neq 0$,
- ii) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{|x'| \rightarrow +\infty} |p_1 \circ \partial h / \partial x(x, x')| = +\infty$,
- iii) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |p_1 \circ \partial h / \partial x'(x, x')| = +\infty$,
- iv) $h(0, 0) = 0$,

cet homéomorphisme est donné par la relation :

$$f(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow y = -\frac{\partial h}{\partial x} \text{ et } y' = \frac{\partial h}{\partial x'} . \quad (**)$$

La fonction h est la fonction génératrice de f .

De même, si $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times I)$ préserve l'aire, il existe une fonction h de classe C^2 , définie sur une partie de \mathbb{R}^2 , telle que :

$$\begin{cases} g(x, x') = -\partial h / \partial x(x, x') \text{ et } g'(x, x') = \partial h / \partial x'(x, x') , \\ \partial^2 h / \partial x \partial x'(x, x') < 0 . \end{cases} \quad (Q)$$

Si le difféomorphisme de l'anneau F relevé par f a un flux de Calabi égal à zéro, c'est-à-dire si la forme $F^*(ydx) - ydx$ est exacte, la fonction h vérifie la relation de périodicité $h(x + 1, x' + 1) = h(x, x')$. Là encore, on peut prolonger h à \mathbb{R}^2 , de telle façon que $\partial^2 h / \partial x \partial x'(x, x')$ ne s'annule pas, et que les relations (Q) et (P) définissent un prolongement de f appartenant à $D^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ ayant même propriétés (voir [Hm2], [Ma4]).

Rappels sur les homéomorphismes du cercle, définition des nombres de rotation.

Nous nous intéresserons par la suite aux orbites périodiques et aux nombres de rotation. Il est utile de rappeler la définition du nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle (voir [Hm1]).

Soit G un homéomorphisme de \mathbb{T}^1 préservant l'orientation et g un relèvement de G à \mathbb{R} . Il existe alors un réel ρ tel que

$$-1 < g^k(x) - x - k\rho < 1,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$. Le réel ρ s'appelle le nombre de rotation de g , la classe $\rho + \mathbb{Z}$ est un élément de \mathbb{T}^1 indépendant du relèvement g , c'est le nombre de rotation de G .

Si ρ est rationnel et s'écrit $\rho = p/q$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $g^q(x) = x + p$. L'orbite de ce point défini par projection est une orbite de G de période q . Si x est un point quelconque de \mathbb{T}^1 , l'ensemble ω -limite (i.e. l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(G^n(x))_{n \geq 0}$) est une orbite périodique du type précédent, qui peut dépendre de x . Il en est de même de l'ensemble α -limite de x , c'est-à-dire de l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(G^{-n}(x))_{n \geq 0}$.

Si ρ est irrationnel, il existe une partie fermée X qui est soit \mathbb{T}^1 , soit un ensemble de Cantor, telle que la restriction de G à X soit minimale, c'est l'ensemble α -limite et l'ensemble ω -limite de n'importe quel point. Dans ce cas, il n'existe qu'une mesure borélienne de probabilité μ invariante par G (on dit que G est uniquement ergodique); son support est X et $\rho = \int_{\mathbb{T}^1} (g - \text{Id}) d\mu$.

Si $D^0(\mathbb{T}^1)$ représente l'ensemble des relèvements d'homéomorphismes de \mathbb{T}^1 préservant l'orientation, c'est-à-dire l'ensemble des applications strictement croissantes et commutant avec les translations entières, l'application qui, à $g \in D^0(\mathbb{T}^1)$ associe son nombre de rotation $\rho(g)$, est continue pour la C^0 -topologie. De plus, si g et g' vérifient $g(x) \leq g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $\rho(g) \leq \rho(g')$. Si la première inégalité est stricte pour tout x et si l'un des nombres ρ ou ρ' est irrationnel, alors $\rho(g) < \rho(g')$.

Enfin on peut définir également un nombre de rotation, c'est-à-dire un réel ρ vérifiant la double-inégalité écrite plus haut, pour une application commutant avec les translations entières mais seulement croissante.

Définition des nombres de rotation des mesures invariantes.

On peut, d'après une idée de Schwartzman [Sc], définir également le nombre de rotation d'une mesure invariante d'un élément de $D^0(\mathbb{T}^1 \times I)$ ou de $D^0(\mathbb{T}^2)$.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f = \text{Id} + \varphi$ un élément de $D^0(\mathbb{T}^1 \times I)$. Si μ est une mesure de probabilité borélienne invariante par l'homéomorphisme F relevé, et si $p_1 \circ \varphi$ est μ -intégrable (ce qui est le cas si le support de μ est borné), on peut définir le réel

$$\rho(\mu) = \int_{\mathbb{T}^1 \times I} p_1 \circ \varphi d\mu ,$$

que l'on appellera nombre de rotation de la mesure μ .

Si μ est ergodique, alors pour presque tout point z , on aura :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_1 \circ f^n(z)}{n} = \rho .$$

Si O est une orbite périodique de F de période q , il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $f^q(z) = T^p(z)$, pour tout $z \in \pi_1^{-1}(O)$. Le nombre de rotation de la mesure de Dirac associée naturellement à l'orbite O est alors égal à p/q ; on dira que z est un point de type (p, q) et que O est une orbite de type (p, q) .

Si I est compact, l'ensemble $M(F)$ des mesures boréliennes de probabilité invariantes par F est une partie convexe non vide de l'ensemble des mesures boréliennes complexes, compacte pour la topologie vague. L'ensemble

$$\mathcal{R}(f) = \{\rho(\mu) \mid \mu \in M(F)\}$$

est alors un segment non vide de \mathbb{R} que l'on appellera l'ensemble de rotation de f . Il en est de même, si X est une partie compacte non vide invariante par F , de l'ensemble $\mathcal{R}_X(f)$ des nombres de rotation des mesures invariantes à support dans X .

Notons pour finir, que si p et q sont deux entiers, alors

$$\mathcal{R}(f^q \circ T_1^p) = q\mathcal{R}(f) + p .$$

De même si $f = \text{Id} + \varphi$ est un élément de $D^0(\mathbb{T}^2)$ et F l'homéomorphisme de \mathbb{T}^2 relevé, l'ensemble $M(F)$ des mesures de probabilité sur \mathbb{T}^2 invariantes par F , est une partie convexe non vide, compacte pour la topologie vague. On définit le nombre de rotation

$$\rho(\mu) = \int_{\mathbb{T}^2} \varphi d\mu$$

d'une mesure $\mu \in M(F)$, qui appartient à \mathbb{R}^2 , puis l'ensemble de rotation

$$\mathcal{R}(f) = \{\rho(\mu) \mid \mu \in M(F)\}$$

qui est une partie compacte et convexe du plan. On définit également le nombre de rotation $(p_1/q, p_2/q) \in \mathbb{Q}^2$ et le type (p_1, p_2, q) d'une orbite périodique de F . On définit aussi, si X est une partie compacte non vide invariante par F , l'ensemble

$\mathcal{R}_X(f)$ des nombres de rotation des mesures à support dans X . Enfin, on a la relation suivante, si p_1 , p_2 et q sont trois entiers :

$$\mathcal{R}(f^q \circ T_1^{p_1} \circ T_2^{p_2}) = q\mathcal{R}(f) + (p_1, p_2) .$$

On peut définir également, si f appartient à $D^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ ou à $D^0(\mathbb{T}^2)$, l'ensemble $\mathcal{R}_e(f)$ des nombres de rotation des mesures ergodiques. Utilisant la caractérisation des mesures ergodiques comme points extrémaux de $M(F)$, on montre sans difficultés que cet ensemble contient les points extrémaux de $\mathcal{R}(f)$.

3. Etude variationnelle des difféomorphismes déviant la verticale et préservant l'aire : la théorie d'Aubry-Mather.

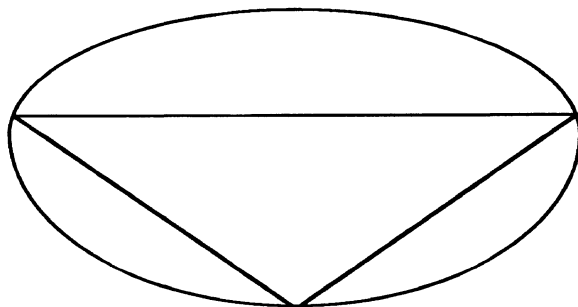
Nous allons voir comment des méthodes variationnelles introduites indépendamment par S. Aubry [AL] et J. Mather [Ma2] permettent d'obtenir des orbites périodiques pour un difféomorphisme de l'anneau $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ qui dévie la verticale et préserve l'aire. Commençons par illustrer ce type de résultat dans le cas du billard convexe, la démonstration dans ce cas remontant déjà à Birkhoff [Bi4].

Soit Γ un billard convexe, image de $\gamma : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, et $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ deux entiers premiers entre eux, tels que $0 < p/q < 1$. Soit \tilde{S} la partie de Γ^q formée des q -uplets z_0, \dots, z_{q-1} tels que les q arcs $z_0z_1, z_1z_2, \dots, z_{q-2}z_{q-1}, z_{q-1}z_0$ orientés positivement, recouvrent la courbe exactement p fois.

A chaque élément (z_0, \dots, z_{q-1}) de \tilde{S} on peut associer un polygône, réunion des segments D_i joignant z_i à z_{i+1} , si $i \in \{0, \dots, q-1\}$, et de D_{q-1} joignant z_{q-1} à z_0 . Parmi tous les polygônes ainsi obtenus, il en existe au moins un de longueur maximale. En utilisant le fait que dans un quadrilatère convexe, la somme des longueurs des diagonales est strictement plus grande que la somme des longueurs de deux cotés opposés, on peut montrer que pour un polygône (z_0, \dots, z_{q-1}) de longueur maximale, tous les z_i sont distincts et qu'ils s'ordonnent sur Γ comme les éléments de la suite $ip/q + \mathbb{Z}$ sur \mathbb{T}^1 . De plus, les segments D_i et D_{i+1} font un même angle $\theta_i \in]0, \pi[$ avec la tangente à Γ en z_{i+1} , et D_{q-1} et D_0 un même angle θ_0 avec la tangente à Γ en z_0 . Ainsi, si $z_i = \gamma(s_i)$, la réunion des $(s_i, \theta_i), i \in \{0, \dots, q-1\}$, est une orbite périodique de période q de l'homéomorphisme F de $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ défini au paragraphe 2.

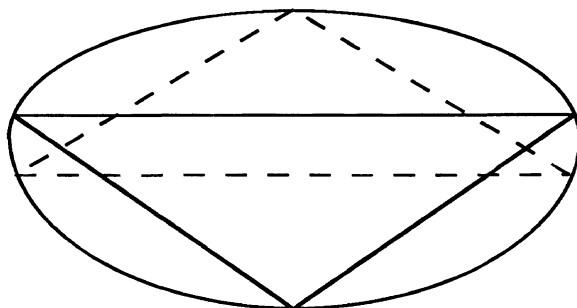
[Voir figure au sommet de la prochaine page.]

On obtient une deuxième orbite périodique de F par un procédé de type minimax en partant de notre polygône $P = (z_0, \dots, z_{q-1})$ de longueur maximale et en essayant de maximiser parmi tous les chemins dans \tilde{S} joignant (z_0, \dots, z_{q-1}) à



$$p/q = 1/3$$

(z'_0, \dots, z'_{q-1}) , où z'_i est le premier sommet de P à gauche de z_i , le minimum de la longueur le long du chemin. On obtient la figure suivante :



$$p/q = 1/3$$

Les résultats décrits ci-dessus se généralisent ainsi.

Théorème. Soit F un difféomorphisme de $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ déviant la verticale à droite et préservant l'aire, et f un relèvement de F à $\mathbb{R} \times [0, 1]$ dont les nombres de rotation induits sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\mathbb{R} \times \{1\}$ sont notés respectivement ρ^- et ρ^+ . Si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont deux entiers premiers entre eux tels que $p/q \in [\rho^-, \rho^+]$, il existe un ensemble Ξ formé de deux orbites périodiques de F de type (p, q) tels que :

- i) la restriction de p_1 à Ξ est injective,
- ii) pour tous $z, z' \in \pi_1^{-1}(\Xi)$, $p_1(z) < p_1(z') \Rightarrow p_1(f(z)) < p_1(f(z'))$.

Démonstration. Donnons les grandes lignes de la démonstration que l'on trouve dans [Ma5].

Puisque f dévie la verticale à droite, il existe deux fonctions g et g' de classe C^1 , définies sur une bande

$$\Delta = \{(x, x') \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq g(x, x') \leq 1\} = \{(x, x') \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq g'(x, x') \leq 1\} ,$$

homéomorphe à $[0, 1] \times \mathbb{R}$ qui prennent simultanément les valeurs 0 ou 1 sur la frontière, et qui vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow y = g(x, x') \text{ et } y' = g'(x, x') , \\ g(x + 1, x' + 1) = g(x, x'), \quad g'(x + 1, x' + 1) = g'(x, x') , \\ \frac{\partial g}{\partial x'}(x, x') > 0, \quad \frac{\partial g'}{\partial x}(x, x') < 0 . \end{array} \right. \quad (\text{P})$$

Puisque F préserve l'aire, la forme différentielle $F^*(ydx) - ydx$ est fermée et puisque F laisse invariant les deux bords, elle est exacte. Dans le système de coordonnées (x, x') cela signifie qu'il existe une application h de classe C^2 , définie sur Δ , telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x, x') = -\frac{\partial h}{\partial x}(x, x') \text{ et } g'(x, x') = \frac{\partial h}{\partial x'}(x, x') , \\ h(x + 1, x' + 1) = h(x, x') , \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x'}(x, x') < 0 . \end{array} \right. \quad (\text{Q})$$

On considère sur l'ensemble

$$S = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_{i+q} = x_i + p \text{ et } (x_i, x_{i+1}) \in \Delta\} ,$$

l'application

$$H : S \rightarrow \mathbb{R}, (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{i=0}^{q-1} h(x_i, x_{i+1}) ,$$

qui est invariante par

$$\tau : S \rightarrow S, (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_i + 1)_{i \in \mathbb{Z}} ,$$

et définit de façon naturelle une application $\tilde{H} : \tilde{S} = S/\tau \rightarrow \mathbb{R}$ sur l'espace quotient. Celle-ci est, au signe près, l'analogue de la longueur du polygône dans le cas du billard. Cette fonction est continue et elle atteint son minimum car \tilde{S} est compact. Là encore, en utilisant la relation

$$\begin{aligned} h(x_1, x'_1) + h(x_0, x'_0) - h(x_1, x'_0) - h(x_0, x'_1) \\ = \int_{x_0}^{x_1} \int_{x'_0}^{x'_1} \partial^2 h / \partial x \partial x'(x, x') \, dx dx' < 0 \end{aligned}$$

si

$$x_0 < x_1, x'_0 < x'_1 \text{ et } [x_0, x_1] \times [x'_0, x'_1] \subset \Delta ,$$

on montre d'une part que les points où \tilde{H} atteint son minimum sont situés dans l'ensemble $\tilde{W}^* = W^*/\tau$, où

$$W^* = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid ip/q + j < i'p/q + j' \Rightarrow x_i + j < x_{i'} + j'\},$$

et d'autre part, qu'ils ne sont pas sur le bord de \tilde{S} ; ce sont donc des points critiques de \tilde{H} .

Or, si $x \in S$ est un point critique de H , alors

$$\partial H / \partial x_i(x) = g'(x_{i-1}, x_i) - g(x_i, x_{i+1}) = 0 ,$$

ainsi

$$f(x_i, g(x_i, x_{i+1})) = (x_{i+1}, g'(x_i, x_{i+1})) = (x_{i+1}, g(x_{i+1}, x_{i+2})),$$

et donc

$$f^q(x_0, g(x_0, x_{0+1})) = (x_0 + p, g(x_0, x_{0+1})) .$$

Pour finir la démonstration du théorème, on considère un point critique $x^* = (x_i^*)_{i \in \mathbb{Z}}$ de W^* où H atteint son minimum, on considère deux entiers r et s vérifiant $pr + qs = 1$ et on définit le point $x^{**} = (x_i^{**})_{i \in \mathbb{Z}} = (x_{i+r}^* + s)_{i \in \mathbb{Z}}$ qui est également un point où H atteint son minimum correspondant à la même orbite de F , puis on construit par un procédé de type minimax un autre point critique $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ dans l'ensemble

$$V = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_i^* < x_i < x_i^{**} \text{ et } (x_i, x_{i+1}) \in \Delta\}.$$

Les points $z_0^* = (x_0^*, g(x_0^*, x_1^*))$ et $\hat{z}_0 = (\hat{x}_0, g(\hat{x}_0, \hat{x}_1))$ se projettent dans $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ en deux points périodiques de F et la réunion des orbites de ces deux points vérifie les conditions du théorème.

Remarques. Nous pouvons faire plusieurs remarques. La première est que le résultat se généralise au cas des homéomorphismes qui préservent l'aire et dévient la verticale (on impose dans ce cas que les applications $x \mapsto p_1 \circ f(x, y)$ et $x \mapsto p_1 \circ f^{-1}(x, y)$ sont strictement monotones). Il existe alors des fonctions continues g et g' vérifiant la propriété (P), où l'on remplace la troisième condition par une condition de monotonie, et une application h de classe C^1 vérifiant les deux premières conditions de la relation (Q) et l'inégalité $h(x_1, x'_1) + h(x_0, x'_0) - h(x_1, x'_0) - h(x_0, x'_1) < 0$. Nous nous limiterons cependant par la suite au cas des difféomorphismes.

La seconde remarque concerne une autre interprétation possible de la démonstration du théorème, plus topologique, et qui sera le point de vue que nous regarderons au chapitre 2.

Les ensembles \tilde{S} et $(\overline{W^* \cap S})/\tau$ sont homéomorphes à $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]^{n-1}$ et le champ de gradient de H est sortant sur la frontière de chacun de ces ensembles, ainsi H a au moins deux valeurs critiques ou un ensemble infini de points critiques. Ce qui permet d'obtenir deux orbites distinctes de F . De plus, le champ est sortant

sur l'adhérence de V , excepté en x^* et en x^{**} , ce qui permet d'obtenir le point \hat{x} .

L'ensemble Ξ trouvé dans le théorème est ce qu'on appelle un ensemble bien ordonné, c'est-à-dire qu'il vérifie les conditions suivantes :

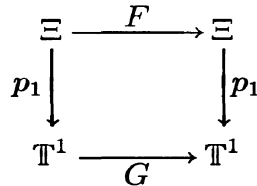
- i) Ξ est invariant par F ;
- ii) la restriction de p_1 à Ξ est injective ;
- iii) pour tout couple (z, z') d'éléments de $\pi_1^{-1}(\Xi)$,

$$p_1(z) < p_1(z') \Rightarrow p_1(f(z)) < p_1(f(z')) .$$

Les propriétés suivantes (voir A. Katok [Ka2], [D], [Hm2]), qui sont des conséquences de la propriété de déviation de la verticale et des résultats sur les homéomorphismes du cercle, ainsi que le théorème précédent, permettent d'obtenir également des points ayant un nombre de rotation irrationnel. On suppose que Ξ est un ensemble bien ordonné, autrement dit, qu'il vérifie les trois conditions précédentes.

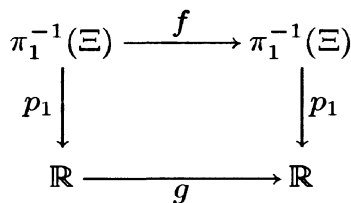
Propriétés.

- i) L'ensemble Ξ est borné, et l'inverse de la restriction de p_1 à Ξ , définie sur $p_1(\Xi)$, est lipschitzienne.
- ii) L'adhérence de Ξ est bien ordonnée.
- iii) Il existe un homéomorphisme G de \mathbb{T}^1 tel que le diagramme suivant soit commutatif.



L'application G n'est généralement pas unique, mais son nombre de rotation, élément de \mathbb{T}^1 , ne dépend que de Ξ .

- iv) Il existe un relèvement $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de G tel que le diagramme suivant soit commutatif.



Le nombre de rotation de g , élément de \mathbb{R} , ne dépend que de Ξ et du relèvement choisi f , on le note ρ_{Ξ} , il vérifie la propriété suivante :

pour tout $z \in \pi_1^{-1}(\Xi)$, et pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$-1 < p_1 \circ f^k(z) - p_1(z) - k\rho_{\Xi} < 1 .$$

- v) L'ensemble, noté $\mathcal{X}(F)$ ou $\mathcal{X}(f)$, des parties fermées bien ordonnées de F est fermé dans l'ensemble des parties compactes de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ muni de la topologie de Hausdorff.
- vi) Un relèvement f étant fixé, l'application qui à $\Xi \in \mathcal{X}(F)$ associe ρ_{Ξ} , est continue et propre ; par conséquent, l'ensemble image est fermé dans \mathbb{R} . Nous noterons $\mathcal{R}_0(f)$ cet ensemble.
- vii) Un nombre rationnel $\rho = p/q$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux, appartient à $\mathcal{R}_0(f)$ si et seulement s'il existe une orbite périodique de type (p, q) bien ordonnée.
- viii) Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $D^1(\mathbb{T}^1 \times I)$ qui dévient la verticale à droite et qui converge, pour la C^0 -topologie, vers un élément f de $D^1(\mathbb{T}^1 \times I)$ qui dévie la verticale. Si $(\Xi_n)_{n \geq 0}$ est une suite formée, pour tout n , d'un élément de $\mathcal{X}(f_n)$ de nombre de rotation ρ_n et si $(\rho_n)_{n \geq 0}$ est bornée, il en est de même de $(\Xi_n)_{n \geq 0}$. De plus, si $(\Xi_n)_{n \geq 0}$ converge vers Ξ , alors Ξ appartient à $\mathcal{X}(f)$ et la suite $(\rho_n)_{n \geq 0}$ converge vers le nombre de rotation de Ξ .
- ix) Tout graphe d'une fonction continue de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{R} , invariant par F est un ensemble bien ordonné, la fonction est alors lipschitzienne de rapport

$$\max_{z \in \Xi} (\max |b^{-1}(z)a(z)|, |d(z)b^{-1}(z)|) ,$$

où

$$DF(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix} .$$

L'ensemble de ces graphes est une partie fermée de $\mathcal{X}(F)$; l'ensemble des nombres de rotation de ces graphes une partie fermée $\mathcal{R}'_0(f)$ de $\mathcal{R}_0(f)$.

- x) Si Ξ est un graphe invariant de nombre de rotation ρ , les ensembles bien ordonnés de nombre de rotation $\rho' > \rho$ (resp. $\rho' < \rho$) sont situés strictement au-dessus de Ξ (resp. strictement au-dessous de ρ).
- xi) Si ρ est irrationnel et si f préserve l'aire, il existe au plus un graphe invariant de nombre de rotation ρ .
- xii) Si Ξ et Ξ' sont deux graphes invariants disjoints et si f préserve l'aire, les nombres de rotations des deux graphes sont distincts.

Reprenons les hypothèses du théorème. Chacun des ensembles trouvés est un ensemble bien ordonné de nombre de rotation p/q ; en prenant des limites de ces ensembles on en déduit que pour tout nombre irrationnel ρ entre ρ^- et ρ^+ , il existe un ensemble bien ordonné dont c'est le nombre de rotation. Soit c'est un graphe invariant, soit il contient un ensemble de Cantor minimal où la dynamique est celle d'un contre-exemple de Denjoy, ce qu'on appelle un ensemble d'Aubry-Mather.

Dans le cas d'un anneau infini, le théorème s'énonce ainsi.

Théorème. *Si $F \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ dévie la verticale à droite et si $F^*(ydx) - ydx$ est une forme exacte, alors $\mathcal{R}_0(f) = \mathbb{R}$ pour tout relèvement f de F .*

Remarques sur la théorie d'Aubry-Mather. Nous n'avons exposé qu'une partie de la théorie d'Aubry-Mather. De façon plus générale, on peut définir sur l'ensemble

$$\Sigma = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid (x_i, x_{i+1}) \in \Delta\} ,$$

la notion de configuration minimisante. Une configuration $x^* = (x_i^*)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma$ sera dite minimisante si, pour tout couple pour tout couple d'entiers $i_0 < i_1$, la fonction H_{i_0, i_1} , définie sur

$$\Sigma_{i_0, i_1} = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma \mid x_{i_0} = x_{i_0}^*, x_{i_1} = x_{i_1}^*\}$$

par

$$H_{i_0, i_1}(x) = \sum_{i=i_0}^{i_1-1} h(x_i, x_{i+1}) ,$$

atteint son minimum en x^* . Ces configurations ont alors les propriétés suivantes (voir par exemple A. Chenciner [Che2] pour les détails).

i) Si $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une configuration minimisante, alors pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$f(x_i, g(x_i, x_{i+1})) = (x_{i+1}, g(x_{i+1}, x_{i+2})) .$$

ii) Si $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et $(y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sont deux configurations minimisantes, il existe $i_0 \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tel que les suites $(x_i - y_i)_{i < i_0}$ et $(x_i - y_i)_{i > i_0}$ ont chacune un signe constant strict, opposé l'un l'autre.

iii) Si $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une configuration minimisante, il existe un réel ρ_x , le nombre de rotation de x tel que, pour tout couple d'entiers (i, j) on a :

$$-1 < x_i - x_j - (i - j)\rho_x < 1.$$

iv) L'ensemble des configurations minimisantes est fermé pour la topologie produit définie sur Σ , et l'application $x \mapsto \rho_x$ continue sur cet ensemble.

- v) Les configurations minimisantes de nombre de rotation p/q , où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux, sont formées des configurations minimales construites dans le théorème, et également de configurations correspondant à certaines orbites homoclines aux orbites périodiques ainsi construites.
- vi) Si x est une configuration minimisante de nombre de rotation ρ irrationnel, l'adhérence de l'orbite de F correspondant est un ensemble d'Aubry-Mather ou un graphe invariant et ne dépend pas de la configuration choisie.

On peut également construire des orbites minimisantes du type extrema lié, sur des parties de l'espace de configurations définies par certaines relations, ce qui permet d'obtenir des orbites ayant des propriétés dynamiques bien déterminées (voir [Ma9]).

Cette théorie a plusieurs origines. En effet, J. Mather s'intéressait aux applications de l'anneau et commença par montrer l'existence des orbites de nombre de rotation irrationnel, alors que S. Aubry et A. Le Daeron travaillaient en physique des solides sur le modèle discret de Frenkel-Kontorova et s'intéressèrent d'abord aux orbites périodiques. Les problèmes variationnels auxquels ils furent confrontés se retrouvent curieusement dans un vieux travail de géométrie riemannienne de 1936 de G. A. Hedlund [H1]. On peut d'ailleurs donner une démonstration commune de chacun de ces résultats (voir V. Bangert [Ba1]).

Hedlund étudiait les géodésiques de classe A d'un tore \mathbb{T}^2 muni d'une structure riemannienne, c'est-à-dire des courbes qui, dans le revêtement universel minimisent la longueur entre deux de ces points. Pour toute droite passant par $(0, 0)$, il existe au moins une géodésique minimisante restant à distance bornée de la droite (dans le cas d'une métrique plate ce sont les parallèles). Quand cette droite est rationnelle, l'ensemble des géodésiques minimisante obtenues se projette dans \mathbb{T}^2 en un ensemble fermé de géodésiques, contenant des géodésiques fermées et des géodésiques homoclines à celles-ci. Quand la droite a une pente irrationnelle, l'ensemble se projette sur \mathbb{T}^2 en un feuilletage (qui correspond à une courbe invariante pour la théorie d'Aubry-Mather) ou en une lamination géodésique minimale (qui correspond à un ensemble de Cantor).

Une autre façon de voir le lien entre ces théorie est de considérer la remarque suivante due à J. Moser (voir [Mo2], [Mo3]).

Un difféomorphisme F de l'anneau qui préserve l'aire et dévie la verticale à droite est l'application de premier retour d'une section de Poincaré d'un champ hamiltonien $H(q, p, t)$ défini sur $T^*(\mathbb{T}^1) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ satisfaisant à la relation $\partial^2 H / \partial p^2 > 0$. La convexité de l'hamiltonien permet alors de ramener ce flot, par une transformation de Legendre, à un flot d'Euler-Lagrange associé à une fonction lagrangienne $L(x, \dot{x}, t)$ définie sur $T(\mathbb{T}^1) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ vérifiant la condition de Legendre $\partial^2 L / \partial \dot{x}^2 > 0$. Les orbites minimisantes de F correspondent à des orbites $\gamma(t)$

qui minimisent l'action $\int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \gamma'(t), t) dt$ entre deux points quelconques de l'orbite.

Cette interprétation de la théorie d'Aubry-Mather a permis à J. Mather d'en donner une généralisation en dimension supérieure, les orbites minimisantes étant remplacées par des mesures minimisantes. Considérons une variété compacte M et une fonction lagrangienne $L : T(M) \times \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $L_{\dot{x}\dot{x}} > 0$ et à croissance super-linéaire, c'est-à-dire vérifiant

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} L(\xi, t) / \|\xi\| = +\infty \text{ si } \xi \in T(M) \text{ et } t \in \mathbb{T}^1,$$

où $\|\xi\|$ est la norme associée à une métrique riemannienne quelconque sur M .

Pour toute mesure borélienne de probabilité invariante par le flot on peut définir une action $A(\mu) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, puis un nombre de rotation $\rho(\mu) \in H_1(M, \mathbb{R})$ si $A(\mu) < +\infty$. Il existe alors deux fonctions convexes conjuguées à croissance super-linéaire

$$\alpha : H^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \beta : H_1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

définies ainsi :

$$\begin{aligned} \beta(u) &= \min \{A(\mu) \mid \mu \in X, \rho(\mu) = u\}, \\ -\alpha(v) &= \min \{A(\mu) - \langle v, \rho(\mu) \rangle \mid \mu \in X\}, \end{aligned}$$

où X est l'ensemble des mesures boréliennes de probabilité invariantes, où $H^1(M, \mathbb{R})$ est le premier groupe de cohomologie de De Rham de M et $H_1(M, \mathbb{R})$ le premier groupe d'homologie. En particulier si $M = \mathbb{T}^n$, les fonctions α et β sont définies sur \mathbb{R}^n .

On obtient alors les résultats suivants.

Si $(u, \beta(u))$ est un point extrémal de l'ensemble des points au-dessus du graphe de β (il y a un nombre infini de tels points puisque β est à croissance super-linéaire), alors il existe une mesure ergodique de rotation u .

Si X_v est l'ensemble des mesures où $\mu \mapsto A(\mu) - \langle v, \rho(\mu) \rangle$ atteint son minimum, alors le support de X_v est compact, la projection de ce support sur $M \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est injective et la réciproque est lipschitzienne. Dans le cas où $M = \mathbb{T}^1$ les fonctions α et β sont strictement convexes, il existe une mesure ergodique pour tout nombre de rotation $u \in \mathbb{R}$. L'ensemble X_v est formé des orbites minimisantes de rotation u , où v est une sous-différentielle de β en u . Si β est rationnel, X_v contient des mesures portées par des orbites périodiques correspondant aux orbites maximales étudiées plus haut; si β est irrationnel, X_v se réduit à un point. Le support se projette soit sur \mathbb{T}^2 soit sur une lamination.

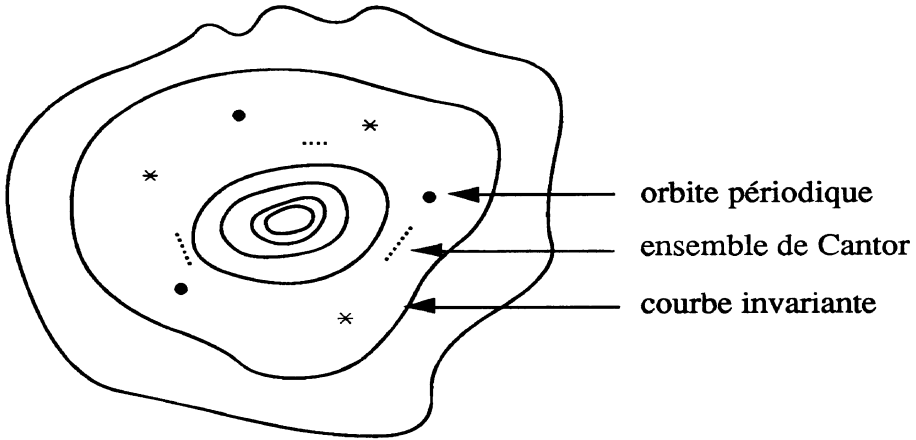
On a des résultats du même type pour le problème de recherche des géodésiques de classe A sur le tore \mathbb{T}^n muni d'une structure riemannienne. Il existe une norme sur $H_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{R}^n$, appelée la norme stable définie par un ensemble convexe, qui correspond aux fonctions α et β . Pour tout point extrémal de la boule, il existe une géodésique minimisante dont c'est la direction. Quand $n = 2$, la boule est strictement convexe, quand $n \geq 3$ ce n'est plus nécessairement le cas, il y a des directions qui ne correspondent à aucune géodésique minimisante (voir [Ba2]).

4. Etude topologique des difféomorphismes déviant la verticale et préservant l'aire : la théorie de Birkhoff.

On peut commencer à expliquer la dynamique d'un difféomorphisme de classe C^∞ générique F , préservant l'aire, au voisinage d'un point fixe elliptique. La forme normale, qui dévie la verticale, admet une courbe invariante $r = \psi(\theta)$ pour chaque nombre de rotation dans un intervalle $]\alpha, \alpha']$ si elle la dévie à droite, dans un intervalle $[\alpha', \alpha[$ si elle la dévie à gauche (voir les notations plus haut). Le difféomorphisme aura au voisinage du point fixe un ensemble fermé formé de graphes invariants indexés et ordonnés par leur nombre de rotation. Cet ensemble est non vide car il contient toutes les courbes données par le théorème de Kolmogorov, Arnold, Moser, c'est-à-dire un ensemble de mesure non nulle, ayant le point fixe comme point de densité, et formé de graphes invariants, où F est conjugué à une rotation de nombre de rotation diophantien, mais il contient beaucoup d'autres courbes obtenues comme limites de celles-ci. Par ailleurs J. C. Yoccoz (commun. personnelle, voir aussi [Hm4]) montre qu'un graphe invariant générique n'est pas un graphe donné par le théorème de Kolmogorov, Arnold, Moser, et plus précisément a un nombre de rotation qui est un nombre de Liouville. On peut montrer également que l'ensemble des nombres de rotation des graphes invariants est génériquement formé uniquement de nombres irrationnels et qu'il est donc totalement discontinu (voir [Hm2]). Ainsi, il existe des régions annulaires délimitées par deux graphes invariants et ne contenant aucun autre graphe invariant, que l'on appelle des régions annulaires d'instabilité (voir [Bi6]). A un nombre de rotation compris entre les deux nombres de rotations des bords correspond un ensemble bien ordonné, réunion de deux orbites périodiques dans le cas rationnel, ensemble de Cantor dans le cas irrationnel.

[Voir figure au sommet de la prochaine page.]

Le but de ce paragraphe est l'étude des régions d'instabilité et l'outil principal sera ce qu'on appelle la théorie de Birkhoff (voir [Bi5] ou pour une terminologie plus moderne [Hm2] et l'appendice d'A. Fathi), qui, dans la situation ci-dessus s'énonce ainsi :



« si U est une partie ouverte, connexe, simplement connexe, invariante par F , contenant le point fixe, et contenue dans un certain voisinage de celui-ci, alors la frontière de U est un graphe invariant » ;

et qui s'énonce dans le cas général sous la forme suivante.

Théorème. *Si $F \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{T}^1 \times [0, +\infty[)$ dévie la verticale à droite et préserve l'aire, et si U est ouvert, borné, homéomorphe à $\mathbb{T}^1 \times [0, +\infty[$, invariant par F et contient $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$, alors la frontière de U est le graphe d'une fonction lipschitzienne $\psi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$.*

Idée de la démonstration. On note U^0 l'ensemble des points de U radialement accessibles, c'est-à-dire :

$$U^0 = \{z = (x, y) \in U \mid \{x\} \times [0, y]\} \subset U\}.$$

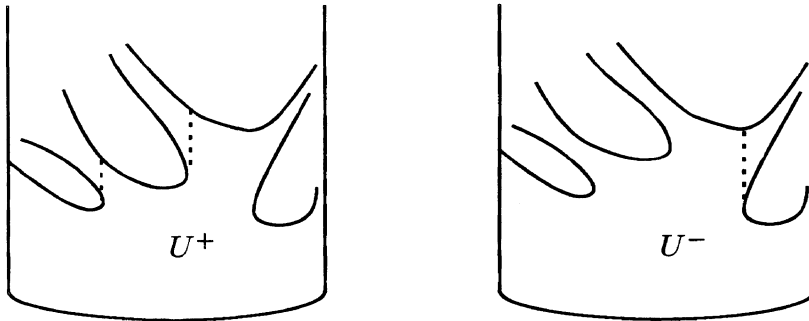
On peut alors construire des parties ouvertes U^- et U^+ de U vérifiant :

$$U^- \cap U^+ = U^0, \quad F(U^+) \subset U^+, \quad F^{-1}(U^-) \subset U^-.$$

La construction de tels ensembles n'est pas unique, on peut prendre par exemple $U^+ = \cup_{n \geq 0} F^n(U^0)$, $U^- = \cup_{n \leq 0} F^n(U^0)$ (mais il faut alors montrer la première relation), on peut également construire des ensembles U^- et U^+ de façon topologique ne faisant pas intervenir F (voir [Hm2] ou [L6]).

[Voir figure au sommet de la prochaine page.]

Comme F préserve l'aire, on en déduit que $U^- \setminus \bar{U}^0$ et $U^+ \setminus \bar{U}^0$ sont vides, on en déduit ensuite, parce que F dévie la verticale, que $U = U^0$, puis que la frontière de U est un graphe.



Supposons que F appartienne à $\text{Diff}_0^1(\mathbb{T}^1 \times I)$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , dévie la verticale à droite, préserve l'aire et ait une région délimitée par deux graphes invariants C^- et C^+ et ne contenant aucun autre graphe invariant. Le théorème admet alors le corollaire évident suivant.

Proposition. *Si X est une partie fermée connexe de C , qui sépare l'anneau et qui est invariante par F , alors X est égal à C^- , est égal à C^+ , ou contient les deux bords.*

Nous allons voir comment cette proposition appliquée un certain nombre de fois permet de préciser la dynamique de F , restreinte à C . Commençons par la propriété suivante, qui est due à Birkhoff [Bi5], et qui justifie le nom de région d'instabilité donnée à C .

Proposition. *Si V^- et V^+ sont deux voisinages respectifs de C^- et C^+ , il existe $x \in V^-$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $F^n(x) \in V^+$.*

Démonstration. On peut toujours supposer dans les hypothèses, que V^- et V^+ sont ouverts et connexes. Le fait que F préserve l'aire permet de dire que les ensembles ouverts $\cup_{n \in \mathbb{N}} f^n(V^-)$ et $\cup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(V^-)$ ont même aire et donc même adhérence. La proposition précédente nous dit que celle-ci contient C^+ .

Une application répétée de la proposition précédente permet de préciser ce résultat et d'obtenir une démonstration rapide (voir [L2]) d'un théorème de Mather dont la démonstration originale (voir [Ma8]) utilise les méthodes variationnelles expliquées plus haut.

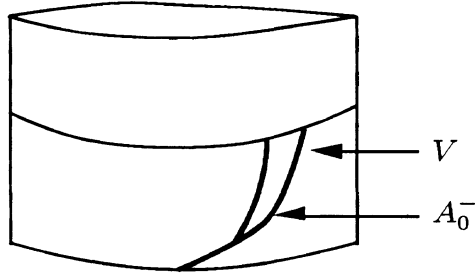
Théorème. *i) Il existe $x \in C$ tel que*

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} d(F^n(x), C^-) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(F^n(x), C^+) = 0 .$$

ii) Pour tout voisinage V de C^+ , il existe $x \in V$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} d(F^n(x), C^-) = 0 .$$

Idée de la démonstration. La proposition précédente exprime en particulier que les deux bords ne sont pas stables au sens de Liapounoff, ni pour F , ni pour F^{-1} . Un argument topologique simple et astucieux de Birkhoff (voir [Bi2], [Bi7]), permet alors de construire, si on se fixe un voisinage annulaire compact V^- de C^- , disjoint de C^+ , un ensemble fermé et connexe A_0^- , contenu dans V^- , contenant C^- , rencontrant la frontière de V^- , et tel que $f^{-1}(A_0^-)$ soit inclus dans A_0^- .

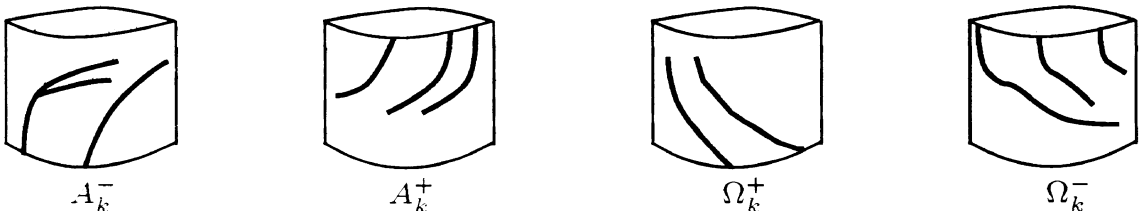


La suite $(A_k^-)_{k \in \mathbb{Z}}$, où $A_k^- = f^k(A_0^-)$, est alors croissante et la première proposition nous dit que

$$\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} A_k^- = C^-, \quad C^+ \subset \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k^-} . \quad (*)$$

On construit de même une suite décroissante de fermés connexes $(\Omega_k^-)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifiant également (*), puis, en se fixant un voisinage annulaire compact V^+ de C^+ , deux suites $(A_k^+)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(\Omega_k^+)_{k \in \mathbb{Z}}$, la première croissante, la seconde décroissante, vérifiant la condition (*) en intervertissant C^- et C^+ .

Le fait que F dévie la verticale permet de montrer (voir [L2] ou [L6]) que les ensembles A_k^- , A_k^+ , Ω_k^- et Ω_k^+ "s'enroulent" quand k est assez grand de la façon suivante.



Ainsi, si k est assez grand, A_k^- et Ω_k^+ se rencontrent; de même A_k^- et Ω_k^- se rencontrent dans un voisinage fixé V de C^+ .

Nous allons préciser la dynamique dans la région d'instabilité, mais en supposant maintenant et jusqu'à la fin du paragraphe que F vérifie des conditions génériques, et nous considérerons un relèvement f de F .

Nous dirons que $F \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{T}^1 \times I)$ vérifie la propriété (G) si :

- i) pour tout point périodique z de plus petite période $q \geq 1$, le réel 1 n'est pas valeur propre de DF_z^q ;
- ii) pour tout couple de points périodiques z et z' de type hyperbolique, les variétés stables et instables $W^s(z)$ et $W^u(z')$ s'intersectent transversalement.

La propriété (G) est générique dans $\text{Diff}^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$, elle est également générique parmi les éléments de $\text{Diff}^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ qui préservent l'aire (voir [Ku], [Sm1], [Ro]).

Si $F \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{T}^1 \times I)$ dévie la verticale à droite, préserve l'aire et vérifie la propriété (G), elle n'a pas de graphe invariant de nombre de rotation rationnel, en effet une telle courbe impliquerait l'existence d'une connexion homocline ou hétérocline ([Hm2]). Supposons maintenant que I soit égal à \mathbb{R} et que $F^*(ydx) - ydx$ soit exacte, il existe alors, pour tout nombre de rotation rationnel $\rho = p/q$, un ensemble bien ordonné Ξ de nombre de rotation ρ , formé d'une orbite périodique correspondant au minimum de la fonction H définie au paragraphe 3, et d'une orbite correspondant à un point critique de type minimax. Un calcul (voir R. Mac Kay et J. Starck [MS]) montre que la trace de l'application DF_z^q sur l'orbite périodique et la matrice hessienne $D^2H(x)$ de H au point critique $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ correspondant sont liées par la relation :

$$\text{trace } DF_z^q - 2 = \frac{(-1)^q \det D^2H(x)}{\prod_{i=0}^{q-1} \partial^2 h / \partial x \partial x'(x_i, x_{i+1})}.$$

Ainsi, si F vérifie la condition (G), la signature de la matrice hessienne de H est $(q, 0)$ au maximum et $(q - 1, 1)$ au second point critique. En particulier, la première orbite est d'indice -1 , elle est du type hyperbolique sans réflexion. En d'autres termes, la différentielle Df_z^q a deux valeurs propres réelles λ et μ vérifiant $0 < \lambda < 1 < \mu$. La seconde orbite est d'indice $+1$, elle est soit elliptique, avec des valeurs propres de module 1, soit hyperbolique avec réflexion, avec des valeurs propres réelles λ et μ vérifiant $\mu < -1 < \lambda < 0$.

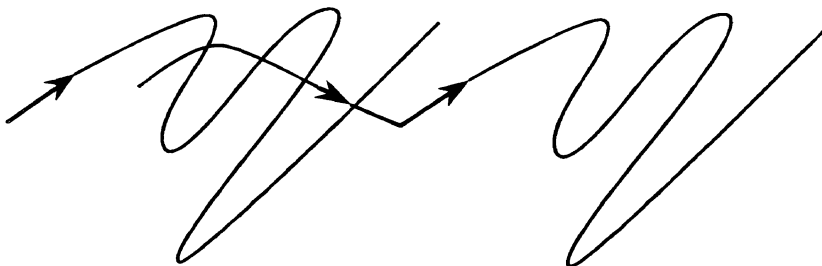
Le résultat qui suit (voir [L4]), qui ne suppose pas que F préserve l'aire, montrera deux choses : d'une part que c'est la seconde alternative pour l'orbite minimax que l'on rencontre le plus souvent, d'autre part qu'un ensemble d'Aubry-Mather est génériquement hyperbolique, c'est-à-dire admet deux champs continus de droites invariants, l'un dilatant et l'autre contractant. La construction d'un difféomorphisme dont les ensembles bien ordonnés sont hyperboliques avait déjà été faite par D. Goroff [Go] et M. Herman (commun. pers.).

Théorème. Si $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times I)$ dévie la verticale à droite et vérifie la condition (G), il existe une partie ouverte et dense U de \mathbb{R} telle que tout ensemble bien ordonné, dont le nombre de rotation est dans U est hyperbolique. De plus, l'ensemble des rationnels, qui sont nombre de rotation d'un ensemble bien ordonné non hyperbolique, n'a que des points isolés.

Idée de la démonstration. Il suffit de montrer que pour tout nombre rationnel ρ , il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout ensemble bien ordonné, dont le nombre de rotation est dans $]\rho - \varepsilon, \rho + \varepsilon[\setminus \{\rho\}$, est hyperbolique. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une suite $(\Xi_n)_{n \geq 0}$ d'ensembles bien ordonnés non hyperboliques, dont les nombres de rotation soient tous distincts de ρ et tels que la suite $(\rho_{\Xi_n})_{n \geq 0}$ converge vers ρ . En utilisant les résultats du paragraphe 3, on peut toujours supposer que la suite $(\Xi_n)_{n \geq 0}$ converge vers un ensemble bien ordonné Ξ de f de nombre de rotation ρ et que la suite $(\rho_{\Xi_n})_{n \geq 0}$ est toujours du même côté de ρ , par exemple à droite de ρ .

Le fait que F vérifie la condition i) implique alors que Ξ a un nombre fini de points périodiques, tandis que le fait que la suite $(\rho_{\Xi_n})_{n \geq 0}$ est formée de réels strictement plus grands que ρ implique qu'il existe au moins un point entre deux points périodiques consécutifs, dont l'orbite $(F^k(z))_{k \in \mathbb{Z}}$ se rapproche de celle du point situé à gauche quand k tend vers $-\infty$ et de celle du point situé à droite quand k tend vers $+\infty$. La condition (G) implique alors que les points périodiques sont hyperboliques sans réflexion et en nombre fini, puis qu'il n'y a également qu'un nombre fini d'orbites hétéroclines dans Ξ . Cet ensemble est donc hyperbolique et il doit donc en être de même pour Ξ_n dès que n est grand ; on a ainsi une contradiction.

Remarques. La démonstration nous dit également que si $F \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ dévie la verticale à droite, préserve l'aire, vérifie (G), et si $F^*(ydx) - ydx$ est exacte, il existe pour tout rationnel p/q une orbite bien ordonnée avec des intersections homoclines comme celles figurées ci-dessous, résultat que l'on peut montrer également par les méthodes variationnelles.



La réunion des ensembles bien ordonnés hyperboliques est cependant de mesure de Lebesgue nulle (voir [Ka2]) et également de dimension de Hausdorff zéro (voir

[Fa3]). Comme conséquence, l'application qui, à un point de cette réunion, associe son nombre de rotation, n'est pas holdérienne (voir [Fa3]).

Supposons maintenant que $F \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{T}^1 \times I)$ dévie la verticale à droite, préserve l'aire, vérifie (G) et admet une région d'instabilité C délimitée par deux graphes invariants C^- et C^+ . On peut préciser la dynamique de F sur cette région, en utilisant encore un certain nombre de fois la première proposition de ce paragraphe (voir [L2]).

Théorème. *Il existe une partie X de C fermée, connexe et invariante par F telle que :*

i) *l'adhérence des ensembles*

$$A^\pm = \{x \mid \lim_{n \rightarrow -\infty} d(F^n(x), C^\pm) = 0\}$$

et

$$\Omega^\pm = \{x \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(F^n(x), C^\pm) = 0\}$$

est égale à X ;

ii) *pour tout nombre rationnel ρ compris entre les nombres de rotation des deux bords, il existe une orbite périodique bien ordonnée hyperbolique $O(z)$, dont c 'est le nombre de rotation, ayant une intersection homocline, et telle que $X = \overline{(W^u(O(z)))} = \overline{(W^s(O(z)))}$;*

iii) *tous les ensembles bien ordonnés de nombre de rotation irrationnel sont contenus dans X ;*

iv) *si U est une composante connexe de $C \setminus X$, alors U est simplement connexe et son adhérence ne sépare pas l'anneau ; de plus, il existe $M \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que, pour tout $z \in \pi_1^{-1}(U)$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a*

$$-M < p_1(f^k(z)) - p_1(z) - k r/s < M .$$

Idée de la démonstration. Fixons un nombre rationnel ρ entre les nombres de rotation des deux bords. On peut trouver une orbite périodique hyperbolique $O(z)$ bien ordonnée de nombre de rotation ρ , avec une intersection homocline du type décrit plus haut, et construire une courbe fermée simple Γ séparant l'anneau et formée de morceaux de variété stables et instables de cette orbite. Toute partie fermée, connexe, invariante par F , séparant l'anneau, et distincte de chaque bord doit rencontrer cette courbe. On peut montrer, grâce au fait que F préserve l'aire, qu'il contient en fait les variétés stables et instables toutes entières de l'orbite. Les adhérences de chacune de ces variétés étant connexes, séparant l'anneau et n'étant pas réduite à un bord, elles sont égales et l'ensemble X ainsi construit ne dépend pas de ρ . Si U est une composante connexe de $C \setminus X$, elle est simplement connexe ;

de plus elle est périodique puisque F préserve l'aire. On note s la période. Comme U est disjoint de X , il est au-dessus ou en-dessous de Γ , ainsi son adhérence ne rencontre pas l'un des deux bords et il en est de même de l'adhérence X de $U \cup \dots \cup F^{s-1}(U)$. Ce dernier ensemble, qui est fermé invariant et d'intérieur non vide, est disjoint de l'un des deux bords, par exemple de $\mathbb{R} \times \{1\}$. S'il séparait l'anneau, la frontière de la composante connexe de son complémentaire qui contient $\mathbb{T}^1 \times \{1\}$ serait invariante et connexe, séparerait l'anneau et ne se réduirait pas à $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$; on aurait donc une contradiction. Ainsi, on peut construire un arc joignant les deux bords sans rencontrer X et donc sans rencontrer U . Le même raisonnement appliqué à la réunion de X et de $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ nous dit que ces deux ensembles sont disjoints. Toute composante connexe U' de $\pi_1^{-1}(U)$ est donc bornée et à une distance non nulle des bords, de plus il existe un entier r tel que $f^s(U') = T^r(U')$; on en déduit facilement iv), puis i) et iii).

L'ensemble X apparaît comme le squelette de la région d'instabilité, il contient la dynamique la plus intéressante, qui se retrouve d'ailleurs dans les îlots elliptiques contenus dans le complémentaire de X .

Remarques sur la théorie de Birkhoff. La théorie de Birkhoff nous donne en particulier les résultats suivants, pour un difféomorphisme préservant l'aire et déviant la verticale.

- Si $\psi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue dont le graphe Γ_ψ est invariant par F , alors ψ est lipshitzienne de rapport

$$\max_{z \in \Gamma_\psi} (\max(|b^{-1}(z)a(z)|, |d(z)b^{-1}(z)|)),$$

où

$$DF_z = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix} .$$

- Si Γ est une courbe de Jordan invariante séparant l'anneau, c'est le graphe d'une fonction continue $\psi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$.

La théorie de Birkhoff écrite sous cette forme admet une généralisation que nous allons expliquer en partie (voir [Hm3]).

Considérons sur la variété $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ la forme de Liouville $v = \sum_{i=1}^n y_i dx_i$ et la forme symplectique $w = -dv$. On dit qu'un difféomorphisme F de classe C^1 de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ est exact symplectique si la forme $F^*v - v$ est exacte. Si on écrit

$$DF_z = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix} ,$$

les matrices $b^{-1}(z)a(z)$ et $d(z)b^{-1}(z)$ sont alors symétriques. On dit que F est monotone si le déterminant de $b(z)$ est non nul, pour tout z . On dit que F est monotone positif si l'une des relations suivantes est vraie :

pour tout $z \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, $b^{-1}(z)a(z)$ est définie positive,

pour tout $z \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, $d(z)b^{-1}(z)$ est définie positive.

Le graphe Γ_ψ d'une fonction $\psi : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 est lagrangien (i.e. la restriction de ω à la sous-variété Γ_ψ est nulle) si et seulement si la forme $\sum_{i=1}^n \psi_i dx_i$ est fermée, on peut dire par extension que le graphe d'une fonction continue $\psi : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est lagrangien si la forme $\sum_{i=1}^n \psi_i dx_i$ est fermée au sens des distributions. On a alors le résultat suivant qui généralise la première partie du théorème de Birkhoff.

Théorème. *Si F est un difféomorphisme de classe C^1 exact symplectique et monotone positif, et si $\psi : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue dont le graphe Γ_ψ est lagrangien, alors ψ est lipschitzienne de rapport*

$$\max_{z \in \Gamma_\psi} (\max(\|b^{-1}(z)a(z)\|, \|d(z)b^{-1}(z)\|)) ,$$

où $\| \cdot \|$ est la norme définie sur $M_n(\mathbb{R})$ associée à la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .

Quand n est égal à 1 tout graphe est lagrangien. Ce n'est plus le cas quand n est plus grand, et la théorie est fautive pour les graphes invariants non lagrangiens : il n'y a pas d'inégalité a priori pour ceux-ci, même dans le cas intégrable. De même il n'y a pas, en général, d'inégalité a priori pour les graphes invariants lagrangiens dans le cas où les matrices symétriques $b^{-1}(z)a(z)$ et $d(z)b^{-1}(z)$ ne sont ni définies positives, ni définies négatives, par exemple quand elles sont inversibles et indéfinies.

Si F est monotone de classe C^∞ et proche d'une application intégrable, (même dans le cas indéfini) on a beaucoup de tores donnés par le théorème de Kolmogorov, Arnold, Moser. Ceux-ci sont de classe C^∞ et lagrangiens, et F est conjugué sur chaque tore à une translation ergodique diophantienne. Si F est défini positif, on en déduit à cause des inégalités a priori, qu'il y a comme en dimension un beaucoup plus de tores, obtenus comme limites de ceux-ci ; on a alors des résultats génériques très surprenants sur ces tores (voir [Hm4]).

On peut également obtenir pour les tores lagrangiens dans le cas défini positif, une version perturbative de la seconde assertion de la théorie de Birkhoff ([Hm3]).

5. Le cas général des difféomorphismes déviant la verticale

Dans ce paragraphe nous nous intéresserons aux difféomorphismes de l'anneau qui dévient la verticale mais qui n'ont pas de propriétés relatives à l'aire. Nous verrons quelles informations sur la dynamique de F nous donne la connaissance de l'ensemble $\mathcal{R}_0(f)$ défini au paragraphe 3.

Commençons par énoncer un résultat de G. R. Hall ([Ha1]), sur lequel nous reviendrons au chapitre 2.

Théorème. *Si I est un intervalle de \mathbb{R} et si $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times I)$ dévie la verticale à droite et a une orbite de type (p, q) , où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux, alors f a une orbite de type (p, q) bien ordonnée ; en d'autres termes $p/q \in \mathcal{R}_0(f)$.*

Ainsi pour montrer l'existence d'une orbite périodique bien ordonnée, il suffit de montrer l'existence d'une orbite périodique de même type. Or il existe des critères simples d'existence d'une orbite de type (p, q) pour une application déviant la verticale (voir D. Bernstein [Be], Casdagli [Ca1], [L1]). La proposition suivante est le critère de Casdagli.

Supposons que $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times I)$ dévie la verticale à droite, fixons $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ deux entiers premiers entre eux, et définissons les ensembles

$$\tilde{C}_{p,q} = \{z \in \mathbb{R} \times I \mid p_1(f^q(z)) = p_1(z) + p\} \text{ et } C_{p,q} = \pi_1(C_{p,q}) .$$

Proposition. *L'ensemble des points de type (p, q) de f est l'intersection de $\tilde{C}_{p,q}$ et de $f(\tilde{C}_{p,q})$.*

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{R} \times I$, notons V_z la verticale passant par z . Puisque f dévie la verticale, les ensembles $f(V_{f^{-1}(z)})$ et V_z s'intersectent uniquement au point z . Ainsi, si $z \in \tilde{C}_{p,q} \cap f(\tilde{C}_{p,q})$, alors :

$$\begin{aligned} \{f^q(z)\} &= f(V_{f^{q-1}(z)}) \cap V_{f^q(z)} \\ &= f(V_{T^p \circ f^{-1}(z)}) \cap V_{T^p(z)} \\ &= f(V_{f^{-1} \circ T^p(z)}) \cap V_{T^p(z)} = \{T^p(z)\} . \end{aligned}$$

Réciproquement, il est évident que si z est de type (p, q) il appartient à la fois à $\tilde{C}_{p,q}$ et à $f(\tilde{C}_{p,q})$.

Remarques.

- i) Si $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ préserve l'aire et dévie la verticale, et si p/q est compris entre les nombres de rotation induits sur les bords, l'ensemble $C_{p,q}$ est fermé et sépare l'anneau (voir [L1]), il rencontre donc son image par l'application F relevée par f et on a ainsi un point de type (p, q) . Cette remarque et le théorème de Hall permet donc de retrouver une démonstration topologique du théorème d'Aubry-Mather (on obtient cependant qu'une seule orbite périodique par cette démonstration).
- ii) Si $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ n'a pas de point de type (p, q) , l'ensemble $C_{p,q}$ sépare l'anneau et ne rencontre pas son image par F . On peut trouver dans tout voisinage de $C_{p,q}$ une courbe fermée simple non homotope à zéro; si le voisinage est assez petit, cette courbe ne rencontrera pas son image par F . Nous allons chercher à améliorer ce résultat pour préciser la dynamique de F . Nous chercherons d'abord à étudier la forme des ensembles $C_{p,q}$, puis nous verrons comment construire des filtrations de F , à partir de l'ensemble de rotation (voir [Bo2], [L1], [L5]).

Fixons $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ déviant la verticale à droite, relevant un difféomorphisme F de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ et fixons également deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ premiers entre eux. L'ensemble $C_{p,q}$ est alors compact et sépare l'anneau. On peut montrer plus précisément que si $(x, \mu^-(x))$ et $(x, \mu^+(x))$ sont les points de $(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap C_{p,q}$ d'ordonnées respectivement minimales et maximales, les applications μ^- et μ^+ alors définies admettent une limite à droite et une limite à gauche en chaque point, et sont respectivement continue à gauche et continue à droite (voir [L1]). De même si $(x, \nu^-(x))$ et $(x, \nu^+(x))$ sont les points de $(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap f^q(C_{p,q})$ d'ordonnées respectivement minimale et maximale, l'application ν^- est continue à droite et a une limite à gauche en chaque point, alors que ν^+ est continue à gauche et a une limite à droite en chaque point. Enfin, on a les égalités :

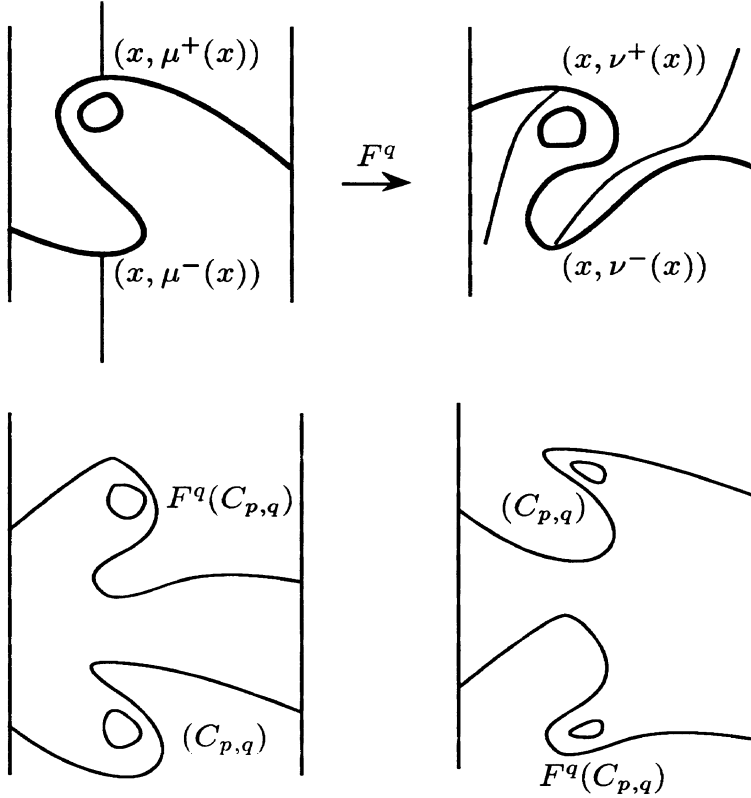
$$F^q(x, \mu^-(x)) = (x, \nu^+(x)) , \quad F^q(x, \mu^+(x)) = (x, \nu^-(x)) .$$

[Voir figure au sommet de la prochaine page.]

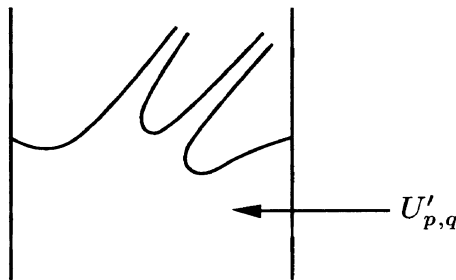
En particulier, si f n'a pas de point de type (p, q) , il existe une fonction continue de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{R} dont le graphe sépare les ensembles $C_{p,q}$ et $F^q(C_{p,q})$, on a deux cas possibles dessinés ci-dessous.

[Voir figure au sommet de la prochaine page.]

Notons maintenant $U_{p,q}$ et $V_{p,q}$ les composantes respectivement inférieure et supérieure du complémentaire de $C_{p,q}$, et plaçons nous dans le premier cas, le cas où $C_{p,q}$ monte sous l'action de F^q .



Les ensembles $\bigcup_{n \geq 0} F^n(U_{p,q})$ et $\bigcup_{n \geq 0} F^{qn}(U_{p,q})$ sont égaux. Si on note $U'_{p,q}$ l'ensemble ainsi obtenu, on obtient une partie ouverte, invariante par F et homéomorphe à $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$. Si ce n'est pas $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, on peut considérer, pour tout $x \in \mathbb{T}^1$, le point $(x, \nu'(x))$ le plus bas de la verticale $\{x\} \times \mathbb{R}$ qui ne soit pas dans $U'_{p,q}$. On obtient ainsi une application ν' à valeur réelle, définie sur \mathbb{T}^1 , continue à droite et ayant une limite à gauche en chaque point, ceci parce que F dévie la verticale à droite.



Si z est un point du graphe de ν' noté Γ et même de son adhérence, l'image par F^{-1} de z appartient à Γ . De plus, l'application F^{-1} définie sur ce graphe, préserve

l'ordre donné par la première projection. En particulier, il existe un ensemble fermé bien ordonné sur Γ , il suffit de prendre $\bigcap_{n \geq 0} F^{-n}(\bar{\Gamma})$. Notons alors ρ' le nombre de rotation de cet ensemble. On a le résultat suivant :

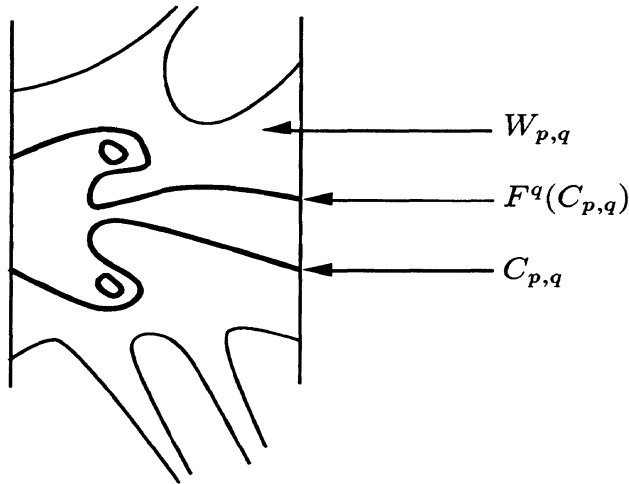
si $]p/q, +\infty[\cap \mathcal{R}_0(f) = \phi$, alors $U'_{p,q} = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$,

si $]p/q, +\infty[\cap \mathcal{R}_0(f) \neq \phi$, alors $U'_{p,q} \neq \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ et $\rho' = \inf (]p/q, +\infty[\cap \mathcal{R}_0(f))$.

On peut faire la même chose pour $V_{p,q}$. L'ensemble

$$V'_{p,q} = \bigcup_{n \geq 0} F^{-nq}(V_{p,q}) = \bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(V_{p,q})$$

est invariant par F , homéomorphe à $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$; il est distinct de cet ensemble si et seulement si $] - \infty, p/q[\cap \mathcal{R}_0(f) \neq \phi$. Dans ce cas, si on note $(x, \mu'(x))$ le point le plus haut de la verticale $\{x\} \times \mathbb{R}$ qui ne soit pas dans $V'_{p,q}$, on obtient une application μ' continue à droite et ayant une limite à gauche en chaque point, dont le graphe est positivement invariant par F , et contient un ensemble bien ordonné de nombre de rotation $\rho' = \sup (] - \infty, p/q[\cap \mathcal{R}_0(f))$. L'ensemble $W_{p,q} = V'_{p,q} \cap U'_{p,q}$, homéomorphe à $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, est formé de points errants qui montent le long de l'anneau.



Fixons maintenant $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ premiers entre eux tels que p'/q' soit dans la même composante connexe J du complémentaire de $\mathcal{R}_0(f)$. L'ensemble $C_{p',q'}$ est alors contenu dans $W_{p,q}$. On en déduit d'abord que $C_{p',q'}$ monte également sous l'action de $F^{q'}$ puis que $W'_{p',q'}$ est contenu dans $W_{p,q}$. Par symétrie, on en déduit que ces deux ensembles sont égaux et on note W_J l'ensemble

obtenu. Si on écrit $J =]\rho^-, \rho^+[$, où $-\infty \leq \rho^- < \rho^+ \leq +\infty$, on obtient facilement les inégalité suivantes :

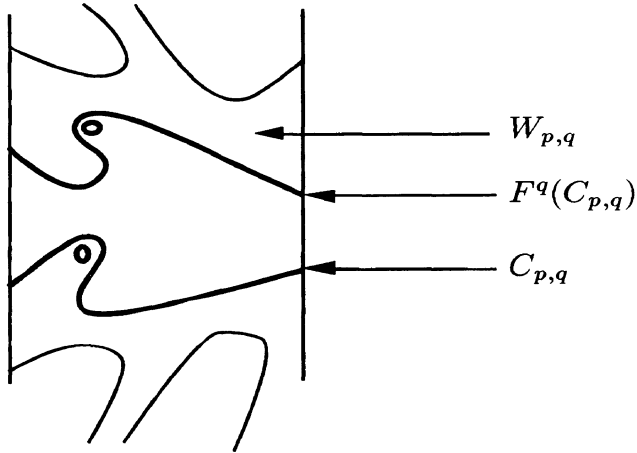
$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_1 \circ f^n(z)}{n} \geq \rho^+, \quad \limsup_{n \rightarrow -\infty} \frac{p_1 \circ f^n(z)}{n} \leq \rho^- ,$$

pour tout $z \in W_J$.

Si on est dans le second cas, c'est-à-dire dans le cas où $C_{p,q}$ descend sous l'action de F^q , on définit les ensembles

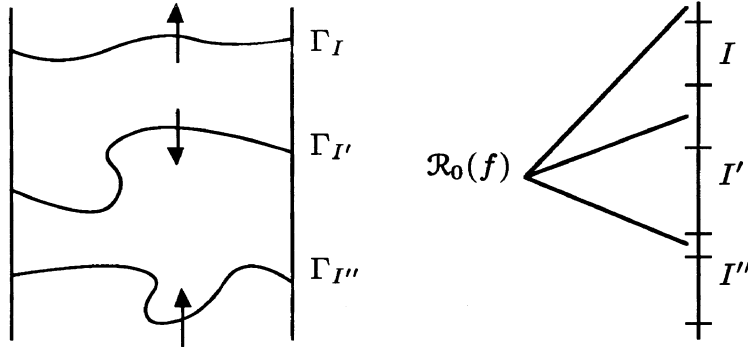
$$U'_{p,q} = \bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(U_{p,q}), \quad V'_{p,q} = \bigcup_{n \leq 0} F^n(V_{p,q}) \text{ et } W_{p,q} = U'_{p,q} \cap V'_{p,q} ,$$

ce dernier ensemble est formé de points errants qui descendent sous l'action de F .



Ainsi, à toute composante connexe J de $\mathbb{R} \setminus \mathcal{R}_0(f)$, on peut associer une partie W_J de l'anneau formée de points errants. On peut construire l'ensemble W_J de la façon suivante. On fixe $p/q \in J$, puis on considère une courbe fermée simple Γ_J non homotope à zéro, suffisamment proche de $C_{p,q}$ pour être disjointe de son image : l'ensemble W_J est le plus petit ensemble invariant contenant l'anneau bordé par Γ_J et son image. Si J et J' sont deux composantes connexes de $\mathbb{R} \setminus \mathcal{R}_0(f)$, la première de type montant, la seconde du type descendant, les courbes Γ_J et $\Gamma_{J'}$ sont disjointes. Ainsi, à toute famille ordonnée $(J_k)_{0 \leq k \leq K}$ de composantes connexes de $\mathbb{R} \setminus \mathcal{R}_0(f)$, alternativement montantes et descendantes, est associée une filtration de F définie par le famille $(\Gamma_{J_k})_{0 \leq k \leq K}$.

Des remarques précédentes, on peut facilement déduire les résultats suivants.



i) Si F n'a pas d'ensemble bien ordonné, deux cas sont possibles :

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} p_2 \circ F^n(z) = +\infty, \lim_{n \rightarrow -\infty} p_2 \circ F^n(z) = -\infty,$$

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} p_2 \circ F^n(z) = -\infty, \lim_{n \rightarrow -\infty} p_2 \circ F^n(z) = +\infty.$$

ii) Si $z \in \mathbb{R}^2$, l'intervalle

$$\mathcal{R}(z) = \left[\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_1 \circ f^n(z)}{n}, \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_1 \circ f^n(z)}{n} \right] \cap \mathbb{R}$$

est contenu dans $\mathcal{R}_0(f)$.

iii) L'ensemble $\mathcal{R}_0(f)$ est l'ensemble des nombres de rotation des mesures boréliennes de probabilité invariantes ergodiques à support compact.

iv) Si Ξ est un ensemble transitif par chaîne (i.e. si pour tout z et z' dans Ξ , il existe une suite $(z_n)_{0 \leq n \leq N}$ vérifiant : $z_0 = z$, $z_N = z'$ et $d(F(z_n), z_{n+1}) < \varepsilon$ pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$), l'ensemble $\mathcal{R}_\Xi(f)$ des nombres de rotation des mesures de probabilité invariantes, à support compact contenu dans Ξ , est contenu dans $\mathcal{R}_0(f)$. En particulier si Ξ contient une orbite de type (p, q) et une orbite de type (p', q') , l'ensemble $\mathcal{R}_0(f)$ contient l'intervalle borné par ces nombres.

La décomposition que l'on vient de faire permet également de montrer les divers résultats qui suivent.

Le premier précise en quelque sorte le théorème de Hall énoncé au début (voir [Bo2], voir également [BH]).

Théorème. Si $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ dévie la verticale et a une orbite de type (p, q) mal ordonnée, alors $\mathcal{R}_0(f)$ contient l'intervalle de Farey $[p^-/q^-, p^+/q^+]$ de p/q défini ainsi :

$$p^-/q^- = \sup \{ r/s \mid r \in \mathbb{Z}, s \in \{1, \dots, q-1\}, r/s < p/q \} ,$$

$$p^+/q^+ = \inf \{ r/s \mid r \in \mathbb{Z}, s \in \{1, \dots, q-1\}, r/s > p/q \} .$$

Démonstration. Considérons l'orbite mal ordonnée Ξ dans $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ et posons $\tilde{\Xi} = \pi_1^{-1}(\Xi)$. On peut définir deux applications croissantes sur \mathbb{R} , commutant avec les translations entières par les relations :

$$f^-(x) = \inf \{ p_1 \circ f(z) \mid z \in \tilde{\Xi}, p_1(z) \geq x \} ,$$

$$f^+(x) = \sup \{ p_1 \circ f(z) \mid z \in \tilde{\Xi}, p_1(z) \leq x \} .$$

Ces applications ont donc un nombre de rotation, et on peut montrer les inégalités

$$\rho(f^-) \leq p^-/q^- < p^+/q^+ \leq \rho(f^+) .$$

On peut montrer d'autre part que

$$\rho(f^-) \geq \rho' = \sup (] - \infty, p/q[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathcal{R}_0(f))) ,$$

en raisonnant par l'absurde et en comparant alors f^- avec la fonction $p_1 \circ f$ ou la fonction $p_1 \circ f^{-1}$ sur le graphe des fonctions μ' ou de ν' , définies plus haut, tout dépendant si on monte ou on descend.

Le second qui utilise également une version de la théorie de Birkhoff dans l'anneau infini $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, est un résultat de perturbation (voir [L5]).

Théorème. Soit $F \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ déviant la verticale à droite, préservant l'aire et telle que $F^*(ydx) - ydx$ soit exacte, et f un relèvement de F . Alors pour toute partie compacte $Z \subset \mathbb{R} \setminus \mathcal{R}'_0(f)$, il existe un voisinage W de f dans $D^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ tel que si $f' \in W$ alors $Z \subset \mathcal{R}_0(f') \setminus \mathcal{R}'_0(f')$.

Ainsi, dans le cas conservatif, les ensembles bien ordonnés qui ne sont pas des graphes "persistents" en un certain sens quand on perturbe l'application, sans garder nécessairement la conservation de l'aire. En particulier, si l'application a une région d'instabilité, l'application perturbée continue à avoir un grand intervalle de rotation. C'est bien sûr faux pour les graphes. Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ relève un homéomorphisme du cercle isotope à l'identité et a un nombre de rotation ρ irrationnel, le nombre de rotation de $g + \eta$ est différent de ρ , si η est un réel non nul (voir [Hm1]). Par une démonstration analogue à celle de ce résultat, on montre sans difficultés que si $\rho \in \mathcal{R}'_0(f)$ est irrationnel, alors $f \circ h_\eta$ n'a pas d'ensemble bien ordonné de nombre de rotation ρ . La même conclusion subsiste si ρ appartient à la frontière de $\mathcal{R}_0(f)$, pour toute valeur de η dans l'intervalle $] - \infty, 0[$ ou alors pour toute valeur de η dans $]0, +\infty[$.

Le troisième résultat est un "closing-lemma" pour les difféomorphismes qui dévient la verticale (voir [L8]).

Théorème. Soit $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ déviant la verticale et ρ un nombre irrationnel appartenant à $\mathcal{R}_0(f)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tel que le difféomorphisme $f \circ h_\eta$, où $h_\eta : (x, y) \mapsto (x, y + \eta)$, a un ensemble bien ordonné de nombre de rotation rationnel $\rho' \in]\rho - \varepsilon, \rho + \varepsilon[$.

Pour conclure ce paragraphe, énonçons un résultat de Boyland [Bo1] qui a une interprétation très simple dans la théorie de classification des difféomorphismes des surfaces de Thurston que nous verrons dans le second chapitre, mais qui admet aussi une démonstration par une méthode plus proche de celle vue au paragraphe 3, due à S. Angenent [An], où il construit directement un sous-décalage de type fini du difféomorphisme. Ces méthodes lui permettent également de retrouver le théorème de Hall énoncé plus haut.

Théorème. Si $F \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ dévie la verticale à droite et a une orbite de type (p, q) mal ordonnée, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux, alors l'entropie topologique de F est strictement positive.

6. Etude du cas dissipatif : les attracteurs de Birkhoff.

Nous allons préciser les résultats du paragraphe précédent dans le cas particulier des difféomorphismes dissipatifs (voir [Bi5], [L1], [L3]). Nous supposons donc dans ce paragraphe que $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ dévie la verticale à droite et vérifie la propriété (D) suivante :

- i) si U est un ensemble ouvert borné non vide de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, et si F est le difféomorphisme relevé par f , alors l'aire de $F(U)$ est strictement inférieure à celle de U ,
- ii) il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $F(\mathbb{T}^1 \times [-M, M]) \subset \mathbb{T}^1 \times [-M, M]$.

C'est le cas, par exemple, des applications

$$f_\lambda : (x, y) \mapsto (x + y, \lambda y + \varphi(x + y)),$$

définies au paragraphe 1, si $\lambda < 1$ et si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et de période 1.

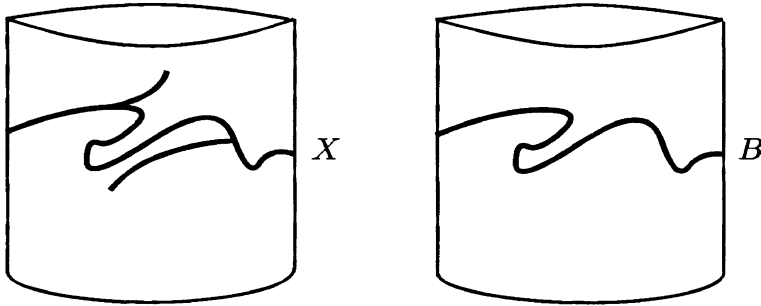
Commençons par écrire certaines propriétés qui n'utilisent d'ailleurs aucunement le fait que f dévie la verticale. Si X est une partie compacte de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ qui sépare l'anneau, notons U_X et V_X les composantes connexes non bornées respectivement inférieure et supérieure de X .

L'ensemble $\mathcal{K}(f)$ des parties compactes, connexes, séparant l'anneau et invariantes par F est non vide, puisqu'il contient $\bigcap_{n \geq 0} F^n(\mathbb{T}^1 \times [-M, M])$. Si X

et X' sont deux parties de cet ensemble, l'intersection de U_X et de $V_{X'}$ est vide puisqu'elle est ouverte, bornée et invariante par F , et que F diminue les aires. Les ensembles

$$U = \bigcup_{X \in \mathcal{K}(f)} U_X \text{ et } V = \bigcup_{X \in \mathcal{K}(f)} V_X$$

sont donc disjoints. Il est facile de voir que le complémentaire de leur réunion est un élément B de $\mathcal{K}(f)$, le plus petit élément de cet ensemble, et qu'il est frontière commune de U et de V , les deux composantes connexes de son complémentaire. On l'appelle l'attracteur de Birkhoff de F (ou de f); on l'obtient en prenant un élément quelconque X de $\mathcal{K}(f)$, par exemple $X = \bigcap_{n \geq 0} F^n(\mathbb{T}^1 \times [-M, M])$ et en ne gardant que les points adhérents à U_X et à V_X , en effet $B = \bar{U}_X \cap \bar{V}_X$. On écrira $B(f)$ quand on fera varier f .

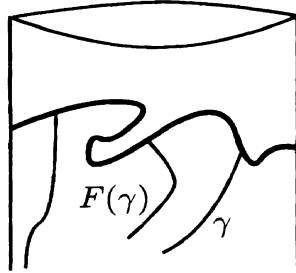


Définissons maintenant les nombres de rotation extérieurs d'un élément X de $\mathcal{K}(f)$, obtenus par la théorie des bouts premiers.

Le difféomorphisme F peut être prolongé en un homéomorphisme \hat{F} de la sphère $(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}) \cup \{N, S\}$ obtenue en compactifiant $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ par les bouts N et S , et celui-ci fixe les deux bouts. On munit alors cette sphère d'une structure complexe.

Si X est un élément de $\mathcal{K}(f)$, alors $\hat{U}_X = U_X \cup \{S\}$ est ouvert et simplement connexe, il existe donc un difféomorphisme analytique Θ envoyant U_X sur $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. La théorie des bouts premiers permet de montrer que le difféomorphisme $\Phi = \Theta^{-1} \circ F \circ \Theta$ se prolonge au bord en un homéomorphisme de $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ (voir [Ma1]). La restriction de Φ à $\mathbb{D}^* \setminus \mathbb{D}$ est donc un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation; on peut, choisissant l'orientation usuelle, lui associer un nombre de rotation, élément de \mathbb{T}^1 . Celui-ci est indépendant du choix de Θ , il ne dépend que des valeurs de F au voisinage de X et indique comment s'ordonnent les itérés d'un chemin à valeurs dans U_X aboutissant en un point de X .

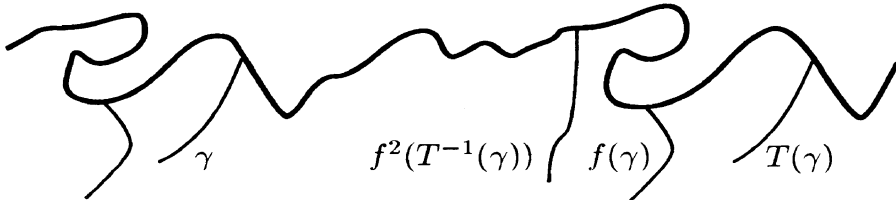
Notons $\tilde{\mathbb{D}}^*$ le revêtement universel de $\mathbb{D}^* \setminus \{\Theta(S)\}$, et $\tilde{\mathbb{D}} \subset \tilde{\mathbb{D}}^*$ celui de $\mathbb{D} \setminus \{\Theta(S)\}$, et considérons un relèvement $\theta : \pi_1^{-1}(U_X) \rightarrow \tilde{\mathbb{D}}$ de la restriction



de Θ à U_X . Il existe un unique ^{$F^2(\gamma)$} difféomorphisme φ de \mathbb{D} tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{-1}(U_X) & \xrightarrow{f} & \pi_1^{-1}(U_X) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{D} \end{array}$$

Celui-ci se prolonge en un homéomorphisme de \mathbb{D}^* , qui restreint à $\mathbb{D}^* \setminus \mathbb{D}$ a un nombre de rotation, cette fois-ci réel, qui ne dépend que de f et qui indique comment s'ordonnent les itérés d'un chemin à valeurs dans $\pi_1^{-1}(U_X)$ et aboutissant en $\pi_1^{-1}(X)$.



On notera $\rho_{\bar{X}}$ ce nombre de rotation, on peut définir de la même façon un nombre de rotation ρ_X^+ . Remarquons que la différence entre ces deux nombres ne dépend pas de f mais seulement de F . Remarquons également que cette définition des nombres de rotation extérieurs peut être généralisée à n'importe quel élément f de $D^0(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ sans aucune condition de différentiabilité ou de propriété sur les aires.

Revenons maintenant à la propriété de déviation de la verticale. Les résultats du paragraphe précédent nous permettent déjà d'affirmer qu'il existe un intervalle fermé, composante connexe de $\mathcal{R}_0(f)$, tel que toute composante connexe de $\mathbb{R} \setminus \mathcal{R}_0(f)$ est du type montant si elle est à gauche de celui-ci et du type descendant si elle est à droite. Nous allons montrer des résultats plus précis sur cet ensemble de rotation.

Intéressons nous d'abord à la forme des éléments de $\mathcal{K}(f)$. Comme nous l'avons fait dans le paragraphe 3 pour la théorie de Birkhoff, nous pouvons construire, pour tout l'élément X de $\mathcal{K}(f)$ deux parties $U_{\bar{X}}$ et U_X^+ de U_X vérifiant

$$U_X^- \cap U_X^+ = U_X^0, \quad F(U_X^+) \subset U_X^+, \quad F^{-1}(U_X^-) \subset U_X^-,$$

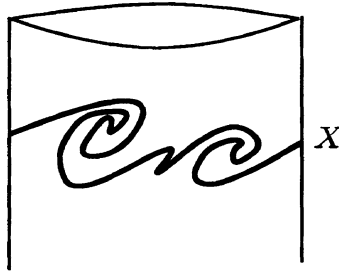
où U_X^0 est l'ensemble des points radialement accessibles. Le fait que F diminue les aires nous dira que $U_X^- \setminus U_X^0$ est vide. Si nous notons $(x, \mu_X^-(x))$ et $(x, \mu_X^+(x))$ les points de $(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap X$ d'ordonnées respectivement minimale et maximale, nous aurons le résultat suivant, qui est l'analogie de la théorie de Birkhoff dans le cas dissipatif.

Théorème. *i) Si $X \in \mathcal{K}(f)$, l'application μ_X^- est continue à droite et a une limite à gauche en chaque point, alors que μ_X^+ est continue à gauche et a une limite à droite en chaque point.*

ii) L'image par f^{-1} de l'adhérence du graphe de μ_X^- (resp. μ_X^+) est contenue dans le graphe de μ_X^- (resp. μ_X^+).

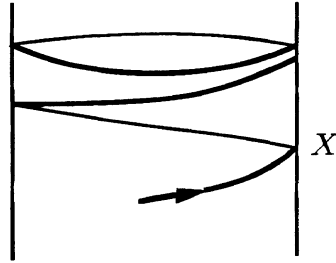
iii) Il existe sur le graphe de μ_X^- (resp. μ_X^+) un ensemble fermé bien ordonné de nombre de rotation ρ_X^- (resp. ρ_X^+).

iv) L'image par f^{-1} d'un point de U_X ou de V_X radialement accessible est encore radialement accessible.



Ainsi, les nombres de rotation extérieurs ρ_X^- et ρ_X^+ appartiennent à $\mathcal{R}_0(f)$. Il est facile de montrer que $\rho_X^- \leq \rho_X^+$ et que $\rho_{X'}^- \leq \rho_X^- \leq \rho_X^+ \leq \rho_{X'}^+$, si X' est un autre élément de $\mathcal{K}(f)$ qui contient X . De plus, l'ensemble α -limite d'un point du graphe de μ_X^- est un ensemble bien ordonné minimal; si ρ_X^- est irrationnel, il ne dépend pas du point; si ρ_X^- est rationnel, c'est une orbite périodique, qui n'est attractive que si le point est lui-même sur une orbite périodique attractive, et qui peut dépendre du point choisi.

Les deux nombres de rotation ρ_X^- et ρ_X^+ peuvent être distincts comme le montre la figure suivante, où l'ensemble X est la réunion d'un graphe invariant de nombre de rotation irrationnel et d'une branche de la variété instable d'un point fixe hyperbolique.



Dans cet exemple, l'attracteur est un graphe et n'a qu'un nombre de rotation. En fait Birkhoff a montré en 1932 que l'attracteur lui-même pouvait avoir deux nombres de rotation (voir [Bi5]).

Théorème. *Il existe $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ déviant la verticale à droite, vérifiant la propriété (D) tel que $\rho_B^- < \rho_B^+$.*

Idee de la démonstration. Donnons les grandes lignes de la démonstration originale de Birkhoff. On part d'un difféomorphisme $f_0 \in D^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ déviant la verticale, préservant l'aire et ayant une région d'instabilité C délimitée par deux graphes C^- et C^+ . On considère une application $\psi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ dont le graphe divise la région en deux parties d'aires égales et on définit une famille d'applications $f_\varepsilon = f \circ h_\varepsilon$, où $h_\varepsilon(x, y) = (x, (1-\varepsilon)y + \varepsilon\psi(x))$. Chacune de ces applications dévie la verticale, vérifie la propriété (D) et a son attracteur de Birkhoff B_ε contenu dans C et séparant cet ensemble en deux parties d'aires égales. On considère maintenant une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ convergeant vers 0, telle que la suite $(B_{\varepsilon_n})_{n \geq 0}$ converge vers un certain ensemble B pour la topologie de Hausdorff. Celui-ci est connexe, sépare l'anneau, et est invariant par f_0 ; de plus, il ne se réduit pas à un des deux bords à cause de la propriété d'aire énoncée plus haut. La théorie de Birkhoff nous dit qu'il contient les deux bords; on en déduit facilement que les deux suites formées des nombres de rotation extérieurs de B_{ε_n} convergent vers les nombres de rotation des graphes C^- et C^+ et sont distincts quand n est grand.

On peut trouver également des difféomorphismes explicites (même analytiques!) ayant cette propriété (voir [L3]) en choisissant $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de période 1 et de classe C^1 , vérifiant

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \quad \min \varphi'(x) < -2.$$

L'application $f_0 : (x, y) \mapsto (x + y, x + \varphi(x + y))$ dévie la verticale à droite et préserve l'aire, le difféomorphisme F_0 de l'anneau relevé par f_0 n'a aucun graphe invariant, et la forme $F_0^*(y dx) - y dx$ est exacte. L'application $f_\lambda : (x, y) \rightarrow$

$(x + y, \lambda x + \varphi(x + y))$ dévie également la verticale à droite et vérifie (D). Si on note ρ_{λ}^{-} et ρ_{λ}^{+} les nombres de rotation de l'attracteur de Birkhoff, on montre que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \rho_{\lambda}^{-} = -\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 1} \rho_{\lambda}^{+} = +\infty.$$

Les attracteurs de Birkhoff avec deux nombres de rotation sont probablement les premiers attracteurs rencontrés ayant des propriétés topologiques et dynamiques compliquées. Ils ne sont pas homéomorphes à des cercles ; ce sont précisément des continus indécomposables : ils ne s'écrivent pas comme réunion de deux compacts connexes propres. La démonstration de ce résultat de 1934 est due à Marie Charpentier, la preuve qu'elle en donne montre en fait le résultat plus général suivant (voir [Chr1]).

Théorème. *Si $F \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ et si X est une partie compacte, connexe, séparant l'anneau, invariante par F , qui est la frontière commune des deux composantes non bornées de son complémentaire et qui n'est pas un continu indécomposable, alors pour tout relèvement f de F à \mathbb{R}^2 , il existe deux réels ρ et M tels que, pour tout $z \in \pi_1^{-1}(X)$ et tout entier k , on a*

$$-M < p_1 \circ f^k(z) - p_1(z) - k < M ;$$

de plus $\rho_X^{-} = \rho_X^{+} = \rho$.

Le fait d'avoir un attracteur de Birkhoff avec deux nombres de rotation n'est pas exceptionnel, comme le prouve le résultat suivant (voir [L3]).

Proposition. *Les applications $f \mapsto \rho_{B(f)}^{-}$ et $f \mapsto \rho_{B(f)}^{+}$ sont respectivement semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement sur l'ensemble des éléments de $D^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ déviant la verticale et vérifiant (D), muni de la C^0 -topologie. En particulier, l'ensemble des difféomorphismes tels que $\rho_{B(f)}^{-} < \rho_{B(f)}^{+}$ est ouvert pour la C^0 -topologie.*

Cette proposition est un corollaire du fait que l'application $f \mapsto B(f)$ est semi-continue inférieurement. Cette dernière application, par contre, n'est pas continue et on a même le résultat plus fort suivant (voir [L3]).

Proposition. *Les applications $f \mapsto \rho_{B(f)}^{-}$ et $f \mapsto \rho_{B(f)}^{+}$ définies sur l'ensemble des éléments de $D^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ déviant la verticale et vérifiant (D), ne sont pas continues pour la C^1 -topologie.*

L'ensemble invariant dessiné plus haut ne contient que deux ensembles bien ordonnés, l'un de nombre de rotation irrationnel, l'autre de nombre de rotation 0, et le difféomorphisme n'a aucun ensemble bien ordonné dont le nombre de rotation soit compris entre ces deux nombres. Nous allons voir qu'une telle situation est impossible pour l'attracteur de Birkhoff (voir [L1]).

Théorème. *Pour tout nombre $\rho \in [\rho_B^-, \rho_B^+]$, il existe un ensemble bien ordonné de nombre de rotation ρ contenu dans B .*

Démonstration. Puisque $\mathcal{R}_0(f)$ et B sont fermés, il suffit de montrer le résultat pour $\rho \in]\rho_B^-, \rho_B^+[\cap \mathbb{Q}$. On écrit $\rho = p/q$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux, et on considère les ensembles $C_{p,q}$, $U_{p,q}$ et $V_{p,q}$ définis au paragraphe précédent. Supposons que ρ n'appartienne pas à $\mathcal{R}_0(f)$, dans ce cas, l'une des deux inclusions suivantes est vraie :

$$U_{p,q} \subset F(U_{p,q}) , \quad V_{p,q} \subset F(V_{p,q}) .$$

Supposons que ce soit la première. Puisque $\rho_B^- < p/q$, l'ensemble $U_{p,q}$ contient les ensemble bien ordonnés qui sont formés de points radialement accessibles par le bas, c'est-à-dire les points du graphe de μ_B^- , il rencontre donc B ; il rencontre également V_B puisque il est ouvert et puisque B est frontière de V_B . L'ensemble $U_{p,q} \cap V_B$ est donc une partie non vide, ouverte, bornée, et contenue dans son image puisque $F(U_{p,q} \cap V_B) = F(U_{p,q}) \cap V_B$. Ceci contredit le fait que f diminue l'aire. On aboutit à une contradiction du même type avec la deuxième inclusion.

Il reste à démontrer que les orbites obtenues sont dans l'ensemble B . C'est une conséquence du résultat plus général qui dit qu'un ensemble bien ordonné de nombre de rotation $\rho \in]\rho_X^-, \rho_X^+[$ appartient à X , pour toute partie X de $\mathcal{K}(f)$. On montre en effet, en utilisant le fait que F dévie la verticale à droite, qu'un tel ensemble est disjoint de U_X^0 et de V_X^0 , ensembles des points radialement accessibles de U_X et de V_X , puis que son nombre de rotation est ρ_X^- s'il rencontre $U \setminus U^0$, ceci grâce à l'interprétation de ρ_X^- en termes de bouts premiers.

On voit l'analogie qui existe entre la dynamique de F sur un attracteur de Birkhoff et celle d'une région d'instabilité, analogie provenant d'une propriété d'intersection, due dans le premier cas au fait que F préserve l'aire, et dans le second cas au fait que f diminue l'aire et que B est frontière des deux composantes connexes de son complémentaire. L'analogie avec le cas conservatif ne s'arrête pas là, et on montre de la même façon le résultat générique suivant (voir [L4]).

Théorème. *Si $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ dévie la verticale à droite et vérifie les propriétés (D) et (G), alors :*

- i) *il existe une partie ouverte et dense U de $] \rho_B^-, \rho_B^+ [$ telle que tout ensemble bien ordonné dont le nombre de rotation est dans U est un ensemble hyperbolique ;*
- ii) *l'ensemble des nombres rationnels pour lesquels il existe une orbite périodique bien ordonnée attractive dont c'est le nombre de rotation n'a que des points isolés ;*
- iii) *pour tout nombre de rotation rationnel $\rho \in] \rho_B^-, \rho_B^+ [$, il existe une orbite Ξ périodique hyperbolique bien ordonnée dont c'est le nombre de rotation, avec des intersections homoclines, et on a alors $B = \overline{W^u(\Xi)}$.*

Remarque. Si le cas conservatif apparaît comme un cas limite du cas dissipatif quand le coefficient de dissipation tend vers 1, le cas des endomorphismes de \mathbb{T}^1 de degré un apparaît également comme un cas limite, cette fois-ci quand le coefficient tend vers 0. Ainsi on peut retrouver l'existence d'un intervalle de rotation, pour une application $g = \text{Id} + \varphi$ où $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et de période 1, (voir [NPT], voir également [CGT]) à partir de celle d'un intervalle de rotation pour l'attracteur de Birkhoff B_λ de l'application $f_\lambda : (x, y) \mapsto (x+y, \lambda x + \varphi(x+y))$. On montre en effet que l'ensemble B_λ converge vers le graphe de φ et que l'intervalle de rotation $[\rho_{B_\lambda}^-, \rho_{B_\lambda}^+]$ converge vers celui de g , quand λ tend vers 0.

Remarques sur les attracteurs. Si (X, d) est un espace métrique compact et $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme, C. Conley (voir [Co2]) définit la notion d'attracteur de la façon suivante :

« une partie A est un attracteur, s'il existe un voisinage fermé N de A tel que $f(N) \subset N$ et tel que $A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(N)$ ».

Un attracteur est alors fermé et invariant. L'ensemble

$$V_A = \{x \in X \mid \omega(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

est ouvert, invariant par f , et s'écrit également $V_A = \bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(N)$. Son complémentaire est alors un répulseur A^* , c'est-à-dire un attracteur de f^{-1} , et on a alors les propriétés suivantes :

$$V_A = \{x \in X \mid \omega(x) \subset A\} ,$$

$$(V_A \setminus A) \cup A^* = \{x \in X \mid \alpha(x) \subset A^*\} .$$

L'intersection de deux attracteurs est un attracteur, de même que la réunion. Par contre une intersection non finie d'attracteurs n'est pas nécessairement un attracteur ; un tel ensemble est appelé un quasi-attracteur.

On peut définir l'ensemble récurrent par chaîne ; c'est l'ensemble des points x tels que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(x_n)_{0 \leq n \leq N}$, $N > 0$, tel que $d(f(x_n), x_{n+1}) < \varepsilon$ et $x_N = x_0 = x$. Le complémentaire de cet ensemble est la

réunion des ensembles $V_A \setminus A$ quand A décrit l'ensemble des attracteurs. On dit d'autre part qu'une partie Y est transitive par chaîne, si pour tout points x et y de Y , et pour tout ε , il existe une suite $(x_n)_{0 \leq n \leq N}$ ayant les propriétés que l'on vient de décrire, avec $x_0 = x$ et $x_N = y$. Il n'y a pas toujours d'attracteur transitif par chaîne, par contre il y a toujours un quasi-attracteur ayant cette propriété (on peut prendre un élément minimal pour l'inclusion parmi ces ensembles)

Remarquons que, contrairement à l'attracteur de Van der Pol, l'attracteur de Birkhoff n'est pas toujours un attracteur ni même un quasi-attracteur au sens de Conley. Une telle propriété impliquerait en effet que l'application $f \mapsto B(f)$ soit continue, ce qui n'est pas le cas. D'autre part, comme pour l'attracteur de Van der Pol, $B(f)$ peut posséder des orbites périodiques attractives, et même une infinité de telles orbites, ce n'est pas un ensemble transitif par chaîne.

Il existe différentes notions d'attracteurs (voir par exemple [Co2], [Hu], [M], [R]), qui se complètent et permettent d'englober un grand nombre de situations. On demande généralement à un attracteur d'être fermé (et souvent compact), d'être invariant, d'attirer tous les points d'un ouvert ou au moins d'un ensemble de mesure non nulle, enfin de vérifier une propriété d'indécomposabilité plus ou moins forte comme l'existence d'une mesure ergodique supportée par l'ensemble, l'existence d'une orbite dense (i.e. la transitivité topologique), ou plus faiblement la transitivité par chaîne. Rappelons pour mémoire trois types intéressants d'attracteurs de difféomorphismes de surfaces.

L'attracteur de Plykin (voir [PI]) d'un difféomorphisme de S^2 , est compact, connexe, topologiquement transitif et sépare la sphère en quatre parties. Il est hyperbolique et attire tous les points de la sphère à l'exception d'un point fixe répulsif dans chacun des composantes du complémentaire. Il faut noter qu'un attracteur hyperbolique transitif de la sphère divise celle-ci en au moins quatre composantes connexes, on ne peut pas avoir de tels attracteurs pour un élément de $\text{Diff}_0^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ vérifiant la condition (D).

L'attracteur de Handel (voir [Hd1]) est défini pour un difféomorphisme F envoyant $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ en son intérieur, l'ensemble $A = \bigcap_{n \geq 0} F^n(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ est un pseudo-cercle qui sépare l'anneau et qui est minimal; il existe un nombre irrationnel ρ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_1 \circ f^n(z)/n = \rho$ pour tout $z \in \pi_1^{-1}(A)$.

L'attracteur de Hénon de l'application $F(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx)$, où $|b|$ est petit et où a est proche de -2 et supérieur à cette valeur est la variété instable d'un des points fixes (qui sont hyperboliques), il attire tous les points d'un certain ouvert et, pour chaque b , contient une orbite dense pour un ensemble de mesure non nulle du paramètre a (voir [BC]). On retrouve cet attracteur, quand on a des bifurcations tangentielles non dégénérées (voir [MV]), en particulier dans les intervalles de bifurcation de l'équation de Van der Pol étudiée au tout début.

Chapitre 2

Phases génératrices des difféomorphismes du tore et de l'anneau

1. Présentation des résultats.

Nous nous sommes intéressés dans le chapitre précédent aux applications déviant la verticale. Nous verrons dans ce chapitre ce qui subsiste des résultats rencontrés quand cette propriété n'est plus vérifiée.

Commençons par rappeler l'énoncé du théorème de Poincaré-Birkhoff ([Bi1]).

Théorème. *Soit $f \in D^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ un homéomorphisme qui préserve l'aire et qui vérifie la relation suivante :*

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad p_1 \circ f(x, 0) < x < p_1 \circ f(x, 1) .$$

Il existe alors au moins deux points fixes de f dont les projections dans $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ sont distinctes.

On déduit de ce théorème qu'un homéomorphisme de l'anneau relevé par un élément $f \in D^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ a une orbite périodique de type (p, q) dès que le nombre rationnel p/q est compris entre les nombres de rotation induits par f sur les deux bords. Le théorème d'Aubry-Mather apparaît donc comme une version forte du résultat précédent dans le cas d'une application déviant la verticale, puisqu'il donne des précisions sur les orbites obtenues.

Supposons que f dévie la verticale, considérons une suite de nombres rationnels $(\rho_n = p_n/q_n)_{n \geq 0}$ convergeant vers un nombre irrationnel ρ , et choisissons pour tout $n \geq 0$, une orbite bien ordonné de type (p_n, q_n) donnée par le théorème d'Aubry-Mather : toute valeur d'adhérence de la suite obtenue est alors un ensemble bien ordonné de nombre de rotation ρ . Par contre, on ne peut rien dire des valeurs

d'adhérence de cette suite si les orbites de type (p_n, q_n) ne sont pas bien ordonnées. Ainsi, si f ne dévie pas la verticale, on ne pourra rien dire des valeurs d'adhérence des suites formées d'orbites de type (p_n, q_n) données par le théorème de Poincaré-Birkhoff. En particulier, on ne sait toujours pas s'il existe, pour chaque nombre irrationnel ρ compris entre les nombres de rotation induits sur les bords, un ensemble compact non vide invariant Ξ tel que $\mathcal{R}_\Xi(f) = \{\rho\}$. Cependant M. Handel [Hd3] a montré qu'un tel ensemble existait, sauf pour un ensemble discret éventuel de valeurs du nombre ρ ; il a montré également le résultat suivant.

Théorème. *Si $f \in D^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$, l'ensemble*

$$\mathcal{R}^*(f) = \{\rho \in \mathbb{R} \mid \text{il existe } z \in \mathbb{R} \times [0, 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} p_1 \circ f^n(z)/n = \rho\}$$

est fermé.

Il peut donc être utile de généraliser la notion d'orbite bien ordonnée au cas où f ne dévie pas la verticale, en distinguant certaines orbites de type (p, q) parmi d'autres. La caractérisation suivante, due à P. Boyland [Bo1] et qui ne suppose pas le caractère conservatif de f , permet de le faire.

Soit f un élément de $D^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$, soit F l'homéomorphisme de $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ relevé par f , soit $z \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ un point de type (p, q) de f , où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux, et $O(z) \subset \mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ l'orbite de type (p, q) de F associée. La restriction de l'homéomorphisme F à $\mathbb{T}^1 \times [0, 1] \setminus O(z)$ est irréductible comme homéomorphisme de cette dernière surface, au sens de la théorie de Nielsen-Thurston (voir [CB], [FLP], [T]) et donc isotope, soit à un difféomorphisme périodique, soit à un difféomorphisme pseudo-Anosov. Dans le premier cas on dira que l'orbite est non-enlacée, dans le second cas qu'elle est enlacée. Il existe plusieurs façons de distinguer les deux cas.

- i) Dans le premier cas, on peut trouver une isotopie $(f_t)_{t \in [0, 1]}$ dans $D^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ joignant $f_0 = f$ à $f_1 : (x, y) \mapsto (x + p/q, y)$ et un chemin continu $(z_t)_{t \in [0, 1]}$ partant de z et formé pour tout t d'un point de type (p, q) de f_t ; dans le second cas on ne le peut pas.
- ii) Si on considère une isotopie $(f_t)_{t \in [0, 1]}$ joignant $f_0 = \text{Id}$ à $f_1 = f$, et l'isotopie $(F_t)_{t \in [0, 1]}$ correspondante dans $\text{Diff}_0^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$, l'ensemble

$$\Gamma = \{(F_t(\tilde{z}), t), \tilde{z} \in O(z), t \in [0, 1]\}$$

est une tresse dans $\mathbb{T}^1 \times [0, 1] \times [0, 1]$ qui se referme en un noeud dans l'ensemble $(\mathbb{T}^1 \times [0, 1]) \times [0, 1]/0 \simeq 1$ homéomorphe à $\mathbb{T}^1 \times [0, 1] \times \mathbb{T}^1$, où on identifie $(\tilde{z}, 0)$ et $(\tilde{z}, 1)$, pour tout $z \in \mathbb{T}^1 \times [0, 1]$. L'ensemble $D^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ étant

contractile, la classe d'isotopie de ce noeud est alors indépendante de l'isotopie $(f_t)_{t \in [0,1]}$ choisie et ne dépend que de $O(z)$. Ce noeud est isotope au noeud

$\Gamma^* = \{k/q + tp/q \mid k \in \{0, \dots, q-1\}, t \in [0, 1]\} \subset (T^1 \times [0, 1]) \times [0, 1] / 0 \simeq 1$, si et seulement si l'orbite est non-enlacée.

iii) L'application F induit un isomorphisme F^* du groupe fondamental de $\mathbb{T}^1 \times [0, 1] \setminus O(z)$; celui-ci est périodique dans le premier cas et a un coefficient de dilatation $\lambda > 1$ dans le second cas, c'est-à-dire que si $(s_i)_{0 \leq i \leq I}$ est une partie génératrice du groupe fondamental et si $\nu(s)$ est la longueur du mot le plus court écrit dans les lettres s_i et s_i^{-1} , $i \in \{0, \dots, I\}$, représentant s , alors, pour tout élément s du groupe fondamental, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\nu(F^{*n}(s)))^{1/n} = \lambda$.

A toute orbite de type (p, q) on peut associer un entier qui est le nombre d'auto-enlacement de Γ (voir par exemple [Bm]). Si cette orbite est non enlacée, ce nombre est nul; par contre il peut être nul même si l'orbite est enlacée. Or dans le cas où f dévie la verticale à droite, on peut choisir l'isotopie $(f_t)_{t \in [0,1]}$ de ii) parmi les difféomorphismes qui dévient la verticale à droite, sauf pour $t = 0$. On en déduit que le noeud est déterminé, à isotopie près, par l'ordre des points $p_1 \circ f^i(z) + j$, où i et j décrivent \mathbb{Z} . En particulier, si l'orbite est mal ordonnée, le nombre d'auto-enlacement du noeud est strictement négatif et l'orbite est donc enlacée.

Dans le cas où l'orbite est enlacée, on sait que l'entropie topologique de F est strictement plus grande que $\ln \lambda$ (voir R. Bowen [Bw]), on a ainsi l'explication du résultat énoncé à la fin du paragraphe 5 du chapitre 1. Rappelons pour mémoire le résultat suivant de Katok [Ka1]: si F est de classe $C^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, et d'entropie topologique strictement positive, il existe des orbites périodiques hyperboliques avec des intersections homoclines transverses.

Le théorème de Poincaré-Birkhoff dans le cas d'un difféomorphisme peut être précisé sous la forme suivante (voir [L7]).

Théorème. *Si $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ préserve l'aire, et si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont deux entiers premiers entre-eux, tels que p/q soit compris entre les nombres de rotation induits sur les bords, il existe au moins deux points de type (p, q) définissant deux orbites périodiques distinctes non-enlacées.*

L'ensemble des couples $(f, z) \in D^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1]) \times (\mathbb{R} \times [0, 1])$, tel que z soit un point de type (p, q) de f correspondant à une orbite non enlacée, est une partie ouverte et fermée de l'ensemble des couples $(f, z) \in D^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1]) \times (\mathbb{R} \times [0, 1])$, tel que z soit un point de type (p, q) de f . Comme tout homéomorphisme de l'anneau préservant l'aire est limite d'une suite de difféomorphismes ayant même propriété, on en déduit l'existence d'une orbite non enlacée si l'on suppose dans les hypothèses du théorème que f est seulement un homéomorphisme.

Dans le cas non conservatif, on a le résultat plus général suivant de Boyland [Bo3] qui généralise un théorème énoncé au paragraphe 5 du chapitre 1 .

Théorème. *Si $f \in D^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ a un point de type (p, q) , où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux, correspondant à une orbite enlacée, alors f a un point de type (p', q') correspondant à une orbite non enlacée, pour tout nombre p'/q' appartenant à l'intervalle de Farey $[p^-/q^-, p^+/q^+]$ de p/q défini au chapitre 1 .*

Dans ce chapitre nous verrons comment les arguments de [L7], qui s'inspirent beaucoup de l'article d'Angenent [An] peuvent s'appliquer également dans le cas non conservatif, ce qui était déjà vrai dans [An].

Il existe deux types de démonstration du théorème de Poincaré-Birkhoff. Un de ceux-ci convient aux difféomorphismes et utilise le fait que F est un difféomorphisme symplectique. La méthode a été introduite par C. Conley et E. Zehnder (voir [CZ]) et consiste à démontrer le résultat plus général suivant sur le tore \mathbb{T}^2 .

Théorème. *Si $f = \text{Id} + \varphi \in D^1(\mathbb{T}^2)$ préserve l'aire et si $\int_{\mathbb{T}^2} \varphi(x, y) dx dy = 0$, alors f a au moins trois point fixes, correspondant à des points distincts dans \mathbb{T}^2 .*

La méthode de Conley-Zehnder, qui se généralise en dimension supérieure pour minorer le nombre de points fixes d'un difféomorphisme symplectique F (plus précisément d'isotopies hamiltoniennes) sur une variété symplectique M , est le point de départ d'une branche active de la géométrie symplectique actuelle. Rappelons les grandes lignes de ce type de méthode. On construit une fonction H sur un espace de la forme $M \times \mathbb{R}^N$, qu'on appelle une phase génératrice : les points fixes de F correspondent alors aux points critiques de H . Pour minorer ce nombre, on exhibe des ensembles ouverts bornés U , appelés des blocs isolants, dont la frontière se décompose ainsi :

$$\text{Fr}U = U^+ \cup U^- \cup U^0,$$

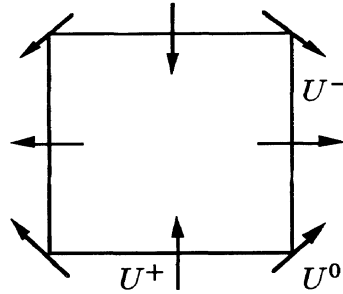
où

$$U^+ = \{x \in \text{Fr}U \mid \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]0, \varepsilon[, x^t \in U \text{ et } x^{-t} \notin \bar{U}\},$$

$$U^- = \{x \in \text{Fr}U \mid \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]0, \varepsilon[, x^{-t} \in U \text{ et } x^t \notin \bar{U}\},$$

$$U^0 = \{x \in \text{Fr}U \mid \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]0, \varepsilon[, x^t \notin \bar{U} \text{ et } x^{-t} \notin \bar{U}\},$$

et où x^t est la position du point x au temps t sous l'action du flot de gradient de H .



Le cas particulier où la frontière de U se limite à U^+ (resp. à U^-) étant le cas où l'ensemble est attractif (resp. répulsif). L'ensemble invariant maximal Λ par le flot, contenu dans U est compact. Si on connaît précisément les ensembles U , U^- , U^+ et U^0 , on peut minorer le nombre de points critiques de H par la théorie de Ljusternik-Schnirelmann (ou de Morse dans le cas générique). Si on ne les connaît pas précisément, on peut utiliser alors la théorie de l'indice de Conley (voir [Co1], [CE]) dont nous allons rappeler une petite partie. Le type d'homotopie pointé de l'espace $\bar{U}/(U^- \cup U^0 \sim x_0)$, où la partie fermée $U^- \cup U^0$ est réduite à un point x_0 , pointé en x_0 , ne dépend que de Λ ; en d'autres termes, si V est un bloc isolant admettant une décomposition de sa frontière: $\text{Fr}(V) = V^- \cup V^+ \cup V^0$, du même type que celle de U , et ayant Λ comme ensemble maximal invariant, les types d'homotopie $[\bar{U}/(U^- \cup U^0 \sim x_0), x_0]$ et $[\bar{V}/(V^- \cup V^0 \sim y_0), y_0]$ sont les mêmes. On appelle ce type d'homotopie pointé, l'indice de Conley de U (ou de Λ). Parmi les propriétés de cet indice, rappelons que s'il est non nul (i.e. différent de $\{x_0\}$), alors Λ est non vide et H a au moins un point critique.

La démonstration du théorème d'Aubry-Mather expliquée au chapitre 3 du paragraphe 1, s'apparente à ce type de méthodes. En effet, nous avons cherché le minimum d'une fonction \tilde{H} sur un espace compact \tilde{S} et avons montré qu'il était atteint en un point d'un ouvert \tilde{W}^* . Or si l'application f avait été prolongée à l'anneau $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, la fonction H aurait été définie sur $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^{q-1}$, les ensembles $\text{Int}(\tilde{S})$ et $\text{Int}(\tilde{S}) \cap \tilde{W}^*$ étant des ouverts répulsifs et donc des blocs isolants du gradient de \tilde{H} d'indice de Conley non nul (pouvant d'ailleurs être calculés). Ainsi, le premier bloc isolant nous donne le théorème de Poincaré-Birkhoff, alors que le second, plus petit, nous donne le théorème d'Aubry-Mather.

Dans le cadre plus général du théorème de Poincaré-Birkhoff ou de Conley-Zehnder, il y a plusieurs façons de construire une phase génératrice. Ainsi Conley et Zehnder commencent par construire une fonctionnelle, la fonctionnelle d'action, sur un espace de lacets (donc de dimension infinie) dont les points critiques correspondent aux points fixes, et par un procédé de Liapounoff-Schmidt, ramènent le problème à la dimension finie et à l'étude d'une phase génératrice. Un peu plus tard M. Chaperon (voir [Chp1], [Chp2]) montra comment construire directement

une phase génératrice, par une méthode de géodésiques brisées. Nous verrons dans ce chapitre comment construire une telle fonction, en utilisant les applications qui dévient la verticale. Nous utiliserons pour cela les résultats suivants.

Proposition 1.1. *Tout élément $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ s'écrit $f = f_{n-1} \circ \dots \circ f_0$, où chaque f_i , $i \in \{0, \dots, n-1\}$, appartient à $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ et dévie la verticale. De plus si f préserve l'aire, on peut supposer qu'il en est de même de chaque f_i , $i \in \{0, \dots, n-1\}$.*

Démonstration. L'application $f^* : (x, y) \mapsto (x + y, y)$ appartient à $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$, dévie la verticale à droite et préserve l'aire. Il existe donc un voisinage \mathcal{V} de f^* dans $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ tel que si $f \in \mathcal{V}$ alors $f \circ f^{*-1}$ dévie la verticale à gauche. Tout élément $f = (f \circ f^{*-1}) \circ f^*$ de \mathcal{V} est donc la composée de deux applications déviant la verticale. L'ensemble $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ étant connexe, il est formé d'applications composées d'éléments de \mathcal{V} et donc composées d'applications déviant la verticale. L'ensemble des difféomorphismes de $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ qui préservent l'aire étant également connexe, la seconde partie de la proposition est également vraie.

La même démonstration permet d'obtenir le résultat suivant sur le tore.

Proposition 1.2. *Tout élément $f \in D^1(\mathbb{T}^2)$ s'écrit $f = f_{2n-1} \circ \dots \circ f_0$, où chaque f_i , $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$, appartient à $D^1(\mathbb{R}^2)$, dévie la verticale, et relève un difféomorphisme du tore isotope au difféomorphisme F^* relevé par $f^* : (x, y) \mapsto (x + y, y)$ si i est pair, isotope à F^{*-1} si i est impair. Si f préserve l'aire, on peut supposer qu'il en est de même de chaque f_i , $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$.*

Nous utiliserons également la version avec paramètre suivante.

Proposition 1.3. *Soit $(f^\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'éléments de $D^1(\mathbb{T}^2)$ dépendant continûment d'un paramètre α dans un espace topologique compact A . On peut alors écrire $f^\alpha = f_{2n-1}^\alpha \circ \dots \circ f_0^\alpha$, où chaque f_i^α , $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$, appartient à $D^1(\mathbb{R}^2)$, dévie la verticale, et relève un difféomorphisme du tore isotope au difféomorphisme F^* relevé par $f^* : (x, y) \mapsto (x + y, y)$ si i est pair, isotope à F^{*-1} si i est impair, et tel que la famille $(f_i^\alpha)_{\alpha \in A}$ dépende continûment de α , pour tout $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$.*

Démonstration. L'ensemble $D^1(\mathbb{T}^2)$ est contractile (voir [EE], [Sm3]), il existe donc une famille continue $(f^{\alpha,t})_{\alpha \in A, t \in [0,1]}$ d'éléments de $D^1(\mathbb{T}^2)$, telle que, pour tout $\alpha \in A$,

$$f^{\alpha,0} = \text{Id} \quad \text{et} \quad f^{\alpha,1} = f^\alpha .$$

Grâce à la compacité de A , on peut trouver un entier $n > 0$, tel que, pour tout couple (t, t') de $[0, 1]$ et tout élément α de A ,

$$|t - t'| \leq 1/n \Rightarrow (f^{\alpha, t})^{-1} \circ f^{\alpha, t'} \in \mathcal{V},$$

où \mathcal{V} est un voisinage de l'identité tel que si $f \in \mathcal{V}$, alors $f \circ f^{*-1}$ dévie la verticale à gauche.

On définit alors, pour $t \in [0, 1/n]$,

$$\begin{aligned} f_i^{\alpha, t} &= f^* \text{ si } i \text{ est pair,} \\ f_i^{\alpha, t} &= f^{*-1} \text{ si } i \text{ est impair et inférieur à } 2n - 2, \\ f_{2n-1}^{\alpha, t} &= f^{\alpha, t} \circ f^{*-1}; \end{aligned}$$

puis pour $t \in [1/n, 2/n]$,

$$\begin{aligned} f_i^{\alpha, t} &= f^* \text{ si } i \text{ est pair,} \\ f_i^{\alpha, t} &= f^{*-1} \text{ si } i \text{ est impair et inférieur à } 2n - 4, \\ f_{2n-1}^{\alpha, t} &= f_{2n-1}^{\alpha, 1/n} \\ f_{2n-3}^{\alpha, t} &= (f^{\alpha, 1/n})^{-1} \circ f^{\alpha, t} \circ f^{*-1}; \end{aligned}$$

et ainsi de suite. On pose alors $f_i^\alpha = f_i^{\alpha, 1}$ pour avoir la décomposition désirée.

Rappelons ce qui a été fait dans [L7]. En écrivant un élément $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ comme composée de difféomorphismes déviant la verticale, puis en prolongeant chacune des ces applications en un élément de $D^1(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$, on va construire un champ de vecteurs sur un espace $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^N$, de type gradient si chacune des applications préserve l'aire, dont les singularités seront en bijection avec les points de type (p, q) de f , modulo T_1 . Si p/q est compris entre les nombres de rotation induits par f sur chacun des bords, on construira un bloc isolant \tilde{U} dont on calculera l'indice de Conley; on obtiendra ainsi des points de type (p, q) dans le cas conservatif. Comme dans la théorie d'Aubry-Mather, on définira également un ensemble ouvert \tilde{W}^* avec les propriétés suivantes :

- i) toute orbite de type (p, q) qui correspond à une singularité appartenant à \tilde{W}^* est non-enlacée,
- ii) l'ensemble $\tilde{U} \cap \tilde{W}^*$ est un bloc isolant de même indice de Conley que \tilde{U} .

Pour comprendre la situation, revenons au cas de la théorie d'Aubry-Mather. Les orbites minimisantes ne minimisent pas seulement la fonction \tilde{H} , mais également le nombre d'enlacement (en fait l'opposé de ce nombre quand l'application dévie la verticale à droite), en effet les orbites bien ordonnées sont les seules orbites de type

(p, q) dont le nombre d'enlacement soit nul. Toutes les orbites dont les singularités correspondantes n'appartiennent pas à \tilde{W}^* ont un nombre d'enlacement strictement négatif. En fait, il existe une fonction à valeurs entières, définie sur un ouvert W de l'ensemble de configurations qui a la propriété d'être définie sur chaque orbite, à l'exception d'un ensemble discret de valeurs du temps, de décroître le long de l'orbite, et d'avoir un saut à chaque passage par une mauvaise valeur du temps ; cette fonction représente le nombre d'enlacement de la configuration au sens suivant : appliquée à un point critique, elle est égale au nombre d'enlacement de la courbe Γ de $\mathbb{T}^1 \times [0, 1] \times \mathbb{T}^1$ définie plus haut par l'orbite périodique associée. En particulier l'ensemble \tilde{W}^* des points où cette fonction s'annule, qui est une composante connexe de l'ensemble de définition, est un répulseur.

Dans le cas où l'on a une composée de difféomorphismes déviant la verticale, il existe également une phase génératrice discrète ayant les propriétés énoncées plus haut, l'ensemble \tilde{W}^* est une certaine composante connexe bien définie de l'ensemble de définition de cette fonction.

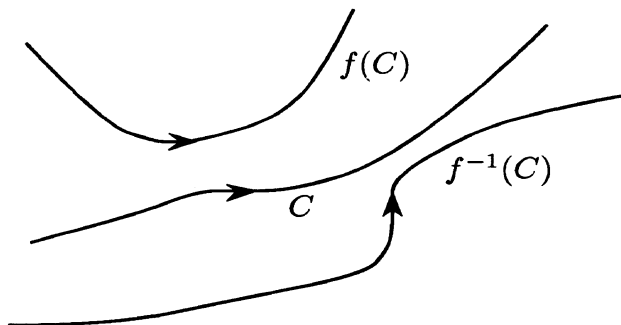
Si on se fixe maintenant un autre nombre rationnel p'/q' , la recherche des orbites de type (p', q') se ramène à l'étude des singularités d'un champ de vecteurs sur un espace de configurations analogue (mais de dimension différente). On peut définir sur un ouvert du produit des deux espaces de configurations une fonction continue à valeurs entières ayant mêmes propriétés de décroissance sous l'action du flot produit et définissant cette fois-ci le nombre d'enlacement de deux configurations : appliquée sur un couple de singularités, elle est égale au nombre d'enlacement des deux courbes fermées définies par ces orbites.

Pour mieux comprendre la signification de ceci, on peut remarquer la chose suivante : si F préserve l'aire, on peut écrire $F^*(ydx) - ydx = dh$, où h est une fonction de classe C^2 valant 0 sur $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$. La phase génératrice a la propriété d'être égale en un point critique à la somme des valeurs de h sur l'orbite périodique associée et peut se définir géométriquement comme la somme algébrique de l'aire de certains ensembles définis par la configuration, le fait qu'elle décroisse le long des orbites est alors une conséquence géométrique de la préservation de l'aire. Si l'on remplace maintenant la mesure de Lebesgue par une autre mesure invariante, on va retrouver une fonction décroissant au sens large le long des orbites. Si celle-ci est la mesure de Dirac, de masse q , associée à une orbite périodique de type (p, q) , la fonction qu'on définit ainsi sur l'ensemble de configuration associée à (p', q') n'est rien d'autre que le nombre d'enlacement des deux configurations ; en particulier, si la seconde est une singularité, c'est le nombre d'enlacement des deux courbes de $\mathbb{T}^1 \times [0, 1] \times \mathbb{T}^1$ définies par les orbites périodiques associées. Le résultat énoncé plus haut exprime qu'on peut définir un nombre d'enlacement pour deux configurations qui ne sont pas des singularités.

Nous démontrerons dans le paragraphe 2 le résultat-clé de cette étude (proposition 2.1) qui nous permettra ensuite de définir les fonctions d'enlacement. Nous utiliserons ces fonctions dans le chapitre 3 pour reprendre les démonstrations de [L7] et les généraliser. Nous démontrerons ainsi que si F est un difféomorphisme qui préserve l'aire, il existe une orbite de type (p, q) , pour tout rationnel p/q entre les deux nombres de rotation induits sur les bords, telle que l'entrelacs défini sur $\mathbb{T}^1 \times [0, 1] \times \mathbb{T}^1$ par toutes ces orbites est isotope à l'entrelacs obtenu dans le cas où f est une application affine (Théorème 3.1).

Le deuxième type de démonstration du théorème de Poincaré-Birkhoff est topologique et convient plus généralement aux homéomorphismes (voir par exemple [B1], [BN], [Cr], voir également [B3], [Che1]). La propriété de préservation des aires est alors remplacée par une propriété d'intersection : toute courbe fermée simple non homotope à zéro rencontre son image. En fait, comme le remarque J. Franks (voir [Fr1]), ce théorème apparaît sous sa forme faible (existence d'un seul point fixe), comme une conséquence d'un théorème plus puissant, le théorème de translation de Brouwer (voir [Bwr], [Br], [Fa], [Gu]).

Théorème. *Si f est un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 qui préserve l'orientation et qui n'a pas de point fixe, alors, par tout point $z \in \mathbb{R}^2$ passe une courbe C , image orientée d'un plongement propre de \mathbb{R} , telle que $f(C)$ soit strictement à gauche de C et $f^{-1}(C)$ strictement à droite (une telle courbe sera appelée une courbe de Brouwer). En particulier, tout point est errant.*



En effet, supposons que $f \in D^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ relève $F \in \text{Diff}_0^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ qui vérifie la condition d'intersection énoncée plus haut, et que les nombres de rotation ρ^- et ρ^+ induits sur les bords vérifient $\rho^- < 0 < \rho^+$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut construire une pseudo-orbite de taille ε , allant d'un bord à un autre, c'est-à-dire une suite $(z_n)_{0 \leq n \leq N}$ telle que

$$\begin{aligned} z_0 &\in \mathbb{R} \times \{0\} , \\ z_N &\in \mathbb{R} \times \{1\} , \\ \|f(z_n) - z_{n+1}\| &< \varepsilon . \end{aligned}$$

En effet l'ensemble des points U que l'on peut atteindre par une pseudo-orbite de F de taille ε , issue de $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$, est ouvert, et tout disque de rayon ε centré en un point de $f(\bar{U})$ est contenu dans U . On a un résultat analogue pour la composante connexe V de U qui contient $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$; on en déduit, en utilisant la propriété d'intersection, que \bar{V} rencontre $\mathbb{T}^1 \times \{1\}$, de même que V puisque $f(\bar{V}) \subset V$. D'autre part, on peut construire une pseudo-orbite de taille ε joignant un point z de $\mathbb{R} \times \{0\}$ (resp. $\mathbb{R} \times \{1\}$) à $T_1^k(z)$ où k est un réel négatif (resp. positif), on peut d'ailleurs prendre une orbite périodique quand le nombre de rotation est rationnel. En utilisant une pseudo-orbite allant de $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ à $\mathbb{T}^1 \times \{1\}$, une pseudo-orbite allant de $\mathbb{T}^1 \times \{1\}$ à $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ et une pseudo-orbite sur chaque bord avec les propriétés indiquées, on peut construire, pour tout ε , une pseudo-orbite $(z_n)_{0 \leq n \leq N}$ de f de taille ε qui soit fermée (i.e. telle que $z_N = z_0$). Or on peut fermer cette orbite, tout en restant proche de f dans $D^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$. Ainsi dans tout voisinage de f , on peut trouver une application ayant une orbite périodique, donc un point fixe par le théorème de translation de Brouwer. Ceci implique que f a un point fixe (pour plus de détails voir [Fr1]).

Dans ce qui précède on applique le théorème de translation de Brouwer à une application proche de f . En fait dès 1928, B. de Kerekjarto [Ke] s'était demandé si le théorème de Poincaré-Birkhoff n'était pas un cas particulier du théorème de translation de Brouwer appliqué aux éléments de $D^0(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ ou de $D^0(\mathbb{T}^2)$ avec des propriétés d'équivariance. Suivant ces idées, L. Guillou a obtenu une démonstration équivariante du théorème de translation de Brouwer qui lui permet de montrer entre autres ce qui suit (voir [Gu]).

Théorème. *Si $F \in \text{Diff}_0^0(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ n'a pas de point fixe, alors, deux cas sont possibles :*

- i) *il existe une courbe simple séparant l'anneau et ne rencontrant pas son image par F ,*
- ii) *il existe un arc joignant les deux bords ayant même propriété.*

Nous avons indiqué dans le paragraphe 5 du chapitre 1, que les méthodes variationnelles du type Aubry-Mather permettent, même dans un cas non conservatif, de retrouver des démonstrations simples de résultats topologiques sur les applications déviant la verticale (voir Angenent [An]). Nous verrons dans le paragraphe 4 comment la décomposition d'un élément de $D^1(\mathbb{T}^2)$ en application déviant la verticale permet, grâce aux fonctions d'enlacement, d'obtenir un théorème de translation de

Brouwer équivariant pour les difféomorphismes du tore, et même d'avoir une version avec paramètre de ce théorème (théorème 4.1).

Nous utiliserons ensuite ce théorème dans le paragraphe suivant pour retrouver une démonstration rapide dans le cas des difféomorphismes de résultats sur les ensembles de rotation des homéomorphismes du tore (théorèmes 5.1 et 5.2).

Enfin, dans le dernier paragraphe, toujours par les mêmes méthodes, nous regarderons les propriétés d'enlacement des orbites périodiques des difféomorphismes du tore (théorème 6.1). Dans le cas conservatif, nous précisons le théorème de Conley-Zehnder et montrerons l'existence d'au moins trois orbites périodiques non-enlacées sous les hypothèses adéquates ; dans le cas non conservatif nous montrerons l'analogie du résultat de Boyland énoncé au début de cette introduction.

2. Composition de difféomorphismes du plan déviant la verticale.

Soit f un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 qui s'écrit comme composée d'éléments de $DV(\mathbb{R}^2)$, c'est-à-dire de difféomorphismes déviant la verticale :

$$f = f_{n-1} \circ \dots \circ f_0 .$$

Considérons la suite $(f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de difféomorphismes définie par la relation de périodicité $f_{i+n} = f_i$, notons $G_i = (g_i, g'_i)$ l'application associée à f_i par la relation (*) définie au paragraphe 2 du premier chapitre, et posons $\varepsilon_i = 1$ ou -1 suivant que f_i dévie la verticale à droite ou à gauche.

Définissons sur l'espace de configurations

$$S = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_{i+n} = x_i\} \simeq \mathbb{R}^n$$

un champ de vecteurs $\xi : x \mapsto (\xi_i(x))_{i \in \mathbb{Z}}$ par les équations

$$\xi_i(x) = g'_{i-1}(x_{i-1}, x_i) - g_i(x_i, x_{i+1}) \quad ;$$

et notons q_i , q'_i , p_i et p'_i les applications de S dans \mathbb{R}^2 définies par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} q_i(x) &= (x_i, g_i(x_i, x_{i+1})) \quad , \\ q'_i(x) &= (x_i, g'_i(x_{i-1}, x_i)) \quad , \\ p_i(x) &= \left(\xi_i(x), \xi_i(x) \frac{\partial g_i}{\partial x}(x_i, x_{i+1}) + \xi_{i+1}(x) \frac{\partial g_i}{\partial x'}(x_i, x_{i+1}) \right) \quad , \\ p'_i(x) &= \left(\xi_i(x), \xi_{i-1}(x) \frac{\partial g'_{i-1}}{\partial x}(x_{i-1}, x_i) + \xi_i(x) \frac{\partial g'_{i-1}}{\partial x'}(x_{i-1}, x_i) \right) \quad . \end{aligned}$$

De la relation :

$$f_i(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow y = g_i(x, x') \text{ et } y' = g'_i(x, x') ,$$

on déduit l'équation suivante :

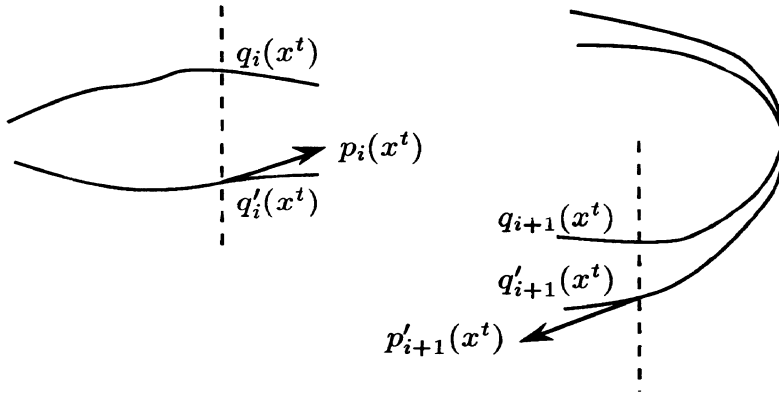
$$Df_i(x, y).(X, Y) = (X', Y') \Leftrightarrow \begin{cases} Y = \frac{\partial g_i}{\partial x}(x, x')X + \frac{\partial g_i}{\partial x'}(x, x')X' \\ Y' = \frac{\partial g'_i}{\partial x}(x, x')X + \frac{\partial g'_i}{\partial x'}(x, x')X' \end{cases} ,$$

puis celle-ci :

$$f_i(q_i(x)) = q'_{i+1}(x) , \quad Df_i(q_i(x)).p'_i(x) = p'_{i+1}(x) .$$

Ainsi à chaque orbite x^t du flot défini par ξ correspondant $2 \times 2n$ arcs de classe C^1 , $z_i^t = q_i(x^t)$, $z'_{i+1}^t = q'_{i+1}(x^t)$ vérifiant

$$\frac{d}{dt} z_i^t = p_i(x^t) , \quad \frac{d}{dt} z'_{i+1}^t = p'_{i+1}(x^t) .$$



Si x est une singularité de ξ , alors $q_i(x) = q'_i(x)$ pour tout entier i , ainsi $z_0 = q_0(x)$ est un point fixe de f . Réciproquement, si z_0 est un point fixe de f et si on définit la suite $(z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ par la relation $z_{i+1} = f_i(z_i)$, la configuration $(p_1(z_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ est alors une singularité de ξ .

Notons pour finir que si chaque f_i préserve l'aire et si $(h_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est la suite de fonctions définies par la relation (***) définie au paragraphe 2 du premier chapitre, le champ ξ est alors le champ de gradient de la fonction

$$H : S \rightarrow \mathbb{R} , \quad (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} h_i(x_i, x_{i+1}) .$$

Fonctions d'enlacement.

Nous allons construire une fonction à valeurs entières décroissante le long des orbites.

Posons $\sigma(x) = 1$ (resp. -1) si x est un réel strictement positif (resp. strictement négatif) et définissons sur la partie ouverte de S

$$V = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in S \mid x_i \neq 0 \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}\}$$

la fonction

$$K : V \rightarrow \{-n, \dots, n\}, \quad x \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \sigma(x_i) \sigma(x_{i+1})$$

et la fonction

$$L : x \mapsto \frac{1}{4} \left(K(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \right).$$

Cette fonction s'écrit également

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{1}{4} \left(- \sum_{i \in I_x} \varepsilon_i + \sum_{i \notin I_x} \varepsilon_i - \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i \in I_x} \varepsilon_i, \end{aligned}$$

où

$$I_x = \{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid x_i x_{i+1} < 0\};$$

le cardinal de cet ensemble étant pair, c'est une fonction à valeurs entières comprises entre $-n/2$ et $n/2$.

La fonction K (et donc la fonction L) se prolonge par continuité sur la partie ouverte

$$W = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in S \mid x_i = 0 \Rightarrow \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i \sigma(x_{i-1}) \sigma(x_{i+1}) < 0\},$$

et elle ne se prolonge par continuité sur aucun ensemble plus grand. En effet, on remarque que la quantité $\varepsilon_{i-1} \sigma(x_{i-1}) \sigma(x_i) + \varepsilon_i \sigma(x_i) \sigma(x_{i+1})$ ne dépend pas de $\sigma(x_i)$ et vaut 0 si $\varepsilon_{i-1} \varepsilon_i \sigma(x_{i-1}) \sigma(x_{i+1}) < 0$.

Considérons l'application

$$\delta : S \times S \rightarrow S, \quad (x, x') \mapsto x - x',$$

et définissons la partie ouverte $W_0 = \delta^{-1}(W)$ de $S \times S$ et la partie ouverte $W_1 = \xi^{-1}(W)$ de S .

La fonction $L_0 = L \circ \delta$ est alors définie sur W_0 et symétrique; la fonction $L_1 = L \circ \xi$ est par contre définie sur W_1 . Ces deux fonctions sont liées par la propriété évidente qui suit :

« si $x \in W_1$ et si t est petit et non nul, alors $(x, x^t) \in W_0$ et $L_0(x, x^t) = L_1(x)$ ».

En effet, si $\xi_i(x)$ est non nul, il en est de même de $x_i^t - x_i$, pour t petit et non nul, et $\sigma(x_i^t - x_i) = \sigma(t)\sigma(\xi_i(x))$.

On a le résultat fondamental suivant :

Proposition 2.1.

i) Si x et x' sont deux points distincts de S et si $(x, x') \notin W_0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \varepsilon[$,

$$(x^{-t}, x'^{-t}) \in W_0, \quad (x^t, x'^t) \in W_0 \quad \text{et} \quad L_0(x^t, x'^t) < L_0(x^{-t}, x'^{-t}) \quad ;$$

en particulier, (x^{-t}, x'^{-t}) et (x^t, x'^t) appartiennent à deux composantes connexes distinctes de W_0 .

ii) Si $x \in S$ n'est pas une singularité de ξ et si $x \notin W_1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \varepsilon[$,

$$x^{-t} \in W_1, \quad x^t \in W_1 \quad \text{et} \quad L_1(x^t) < L_1(x^{-t}) \quad ,$$

$$(x, x^{-t}) \in W_0 \quad \text{et} \quad L_0(x, x^{-t}) = L_1(x^{-t}) \quad ,$$

$$(x, x^t) \in W_0 \quad \text{et} \quad L_0(x, x^t) = L_1(x^t) \quad ;$$

en particulier, x^{-t} et x^t appartiennent à deux composantes connexes distinctes de W_1 .

Démonstration. Commençons par montrer i). Puisque $x - x'$ est non nul et n'appartient pas à W_0 , il existe une partition de \mathbb{Z} en intervalles I_r et J_r , $r \in \mathbb{Z}$, avec $I_r < J_r < I_{r+1}$ tels que $x_i - x'_i$ soit nul si et seulement si i est dans un intervalle de la forme I_r .

Considérons un tel intervalle et supposons d'abord qu'il se réduise à un point i . Ecrivons les équations

$$\frac{d}{dt} x_i = g'_{i-1}(x_{i-1}, x_i) - g_i(x_i, x_{i+1}) \quad ,$$

$$\frac{d}{dt} x'_i = g'_{i-1}(x'_{i-1}, x'_i) - g_i(x'_i, x'_{i+1}) \quad ,$$

et souvenons-nous de ce que $\partial g'_{i-1}/\partial x$ et $\partial g_i/\partial x'$ ont les signes respectifs de $-\varepsilon_{i-1}$ et de ε_i .

Si $\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i(x_{i-1} - x'_{i-1})(x_{i+1} - x'_{i+1})$ est négatif, on ne peut rien dire du signe de $\frac{d}{dt}x_i - \frac{d}{dt}x'_i$, mais de toute façon la quantité

$$\varepsilon_{i-1}\sigma(x_{i-1}^t - x_{i-1}'^t)\sigma(x_i^t - x_i'^t) + \varepsilon_i\sigma(x_{i+1}^t - x_{i+1}'^t)\sigma(x_i^t - x_i'^t)$$

sera toujours nulle, pour t petit, dès qu'elle sera définie.

Par contre, si $\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i(x_{i-1} - x'_{i-1})(x_{i+1} - x'_{i+1})$ est positif, le signe de $\frac{d}{dt}x_i - \frac{d}{dt}x'_i$ est le même que celui de $-\varepsilon_{i-1}\sigma(x_{i-1} - x'_{i-1}) = -\varepsilon_i\sigma(x_{i+1} - x'_{i+1})$. Ainsi la quantité écrite plus haut est bien définie pour t petit et non nulle, elle vaut 2 pour t négatif et -2 pour t positif.

Supposons maintenant que $I_r = \{k, \dots, l\}$ ait au moins deux éléments. On peut alors montrer par une récurrence simple le résultat suivant (voir [L7]).

Lemme. Si $m \in \{-1, \dots, [(l - k - 1)/2]\}$, alors

$$x_{k+m}^t - x_{k+m}'^t \sim A_m t^{m+1} \text{ et } x_{\ell-m}^t - x_{\ell-m}'^t \sim B_m t^{m+1} ,$$

où A_m a le même signe que

$$(-1)^{m+1}\varepsilon_{k-1} \dots \varepsilon_{k+m-1}(x_{k-1} - x_{k-1}') ,$$

et B_m le même signe que

$$(-1)^{m+1}\varepsilon_{\ell} \dots \varepsilon_{\ell-m}(x_{\ell+1} - x_{\ell+1}') ;$$

de plus, si $\ell - k = 2m'$ est pair et si $\varepsilon_{k+m'-1}A_{m'-1}$ et $\varepsilon_{\ell-m'}B_{m'-1}$ ont même signe, il existe C de signe contraire, tel que

$$x_{k+m'}^t - x_{k+m'}'^t \sim C t^{m'+1} .$$

Démonstration. Considérons les $l - k + 3$ fonctions $\delta_i : t \mapsto \delta_i^t = x_i^t - x_i'^t$, $i \in \{k - 1, \dots, l + 1\}$, définies sur \mathbb{R} . Montrons par récurrence sur $m \in \{-1, \dots, [(l - k - 1)/2]\}$ la propriété (Q_m) suivante :

- $\delta_{m+k}^t \sim A_m t^{m+1}$,
- $\delta_{\ell-m}^t \sim B_m t^{m+1}$,
- $m + 1 \leq m' \leq [(l - k + 1)/2] \Rightarrow \delta_{m'+k}^t = o(t^{m+1})$ et $\delta_{\ell-m'}^t = o(t^{m+1})$,

où A_m et B_m ont les signes indiqués dans l'énoncé du lemme.

La propriété (Q_{-1}) est évidente. Supposons que (Q_m) soit vraie, où $m \in \{-1, \dots, [(l - k - 3)/2]\}$. Si on écrit les équations

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_i &= g'_{i-1}(x_{i-1}, x_i) - g_i(x_i, x_{i+1}) \quad , \\ \frac{d}{dt}x'_i &= g'_{i-1}(x'_{i-1}, x'_i) - g_i(x'_i, x'_{i+1}) \quad ,\end{aligned}$$

pour $i = k + m + 1$, on en déduit d'abord que

$$\frac{d}{dt}x_{k+m+1}^t - \frac{d}{dt}x'_{k+m+1}{}^t \sim \frac{\partial g'_{i-1}}{\partial x}(x_{k+m}, x_{k+m+1}) A_m t^{m+1} \quad ,$$

au temps $t = 0$, puis que

$$x_{k+m+1}^t - x'_{k+m+1}{}^t \sim \frac{1}{m+2} \frac{\partial g'_{i-1}}{\partial x}(x_{k+m}, x_{k+m+1}) A_m t^{m+2} \quad .$$

Puisque $\partial g'_{i-1}/\partial x(x_{k+m}, x_{k+m+1})$ et ε_{i-1} ont des signes contraires, on a montré la première partie de (Q_{m+1}) ; on montre de même la seconde partie.

Pour finir la démonstration du lemme, on suppose que $l - k$ est pair et que $\varepsilon_{k+m'-1}A_{m'-1}$ et $\varepsilon_{l-m'}B_{m'-1}$ ont même signe. Quand on écrit les équations

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_i &= g'_{i-1}(x_{i-1}, x_i) - g_i(x_i, x_{i+1}) \quad , \\ \frac{d}{dt}x'_i &= g'_{i-1}(x'_{i-1}, x'_i) - g_i(x'_i, x'_{i+1}) \quad ,\end{aligned}$$

pour $i = k + m'$, on trouve

$$\begin{aligned}x_{k+m'}^t - x'_{k+m'}{}^t \sim & \frac{1}{m'+1} \left(\frac{\partial g'_{m'-1}}{\partial x}(x_{k+m'-1}, x_{k+m'}) A_{m'-1} - \right. \\ & \left. \frac{\partial g_{m'}}{\partial x'}(x_{k+m'}, x_{k+m'+1}) B_{m'-1} t^{m'+1} \right) \quad ,\end{aligned}$$

ce qui est exactement ce que l'on veut.

En particulier, la quantité $\sum_{i=k-1}^{\ell} \varepsilon_i \sigma(x_i^t - x'_i{}^t) \sigma(x'_{i+1}{}^t - x_{i+1}^t)$ est toujours bien définie, sauf dans le cas où $k - \ell$ est pair et où $\varepsilon_{k+m'-1}A_{m'-1}$ et $\varepsilon_{\ell-m'}B_{m'-1}$ ont des signes contraires, mais on peut alors la calculer si $x_{k+m'} - x'_{k+m'}{}^t$ est non nul.

La différence entre les valeurs de cette fonction pour t négatif et pour t positif vaut $-2(k - \ell + 1)$ si $k - \ell$ est impair; si $k - \ell$ est pair, elle vaut $+2(k - \ell + 2)$ si $\varepsilon_{k+m'-1}A_{m'-1}$ et $\varepsilon_{\ell-m'}B_{m'-1}$ ont même signe, et $+2(k - \ell)$ dans le cas contraire . Dans tous les cas, c'est un multiple de 4.

Ainsi, pour t petit et non nul, pratiquement toutes les égalités $x_i^t = x'_i{}^t$ disparaissent. Les seules qui restent éventuellement correspondent exactement aux

égalités qui permettent de définir W . Ainsi (x^t, x'^t) appartient à W_0 , et comme (x, x') n'appartient pas à W_0 , la fonction L_0 a eu un saut en 0 :

$$L_0(x^{-t}, x'^{-t}) > L_0(x^t, x'^t) \quad \text{si } t \text{ est petit et positif} \quad .$$

Pour montrer ii) et iii) on reprend mot à mot la démonstration de i). Il existe une partition de \mathbb{Z} en intervalles I_r et J_r , $r \in \mathbb{Z}$, où $I_r < J_r < I_{r+1}$ et où $\xi_i(x) = 0$ si et seulement si i appartient à un intervalle I_r .

Si $I = \{k, \dots, \ell\}$, on peut écrire

$$\frac{d}{dt} x_{k+m}^t \sim A_m t^{m+1} \quad , \quad \frac{d}{dt} x_{\ell-m}^t \sim B_m t^{m+1} \quad ,$$

pour $m \in \{0, \dots, [(\ell - k - 1)/2]\}$, où A_m a même signe que

$$(-1)^{m+1} \varepsilon_{k-1} \dots \varepsilon_{k+m-1} \xi_{k-1}(x) \quad ,$$

et B_m même signe que

$$(-1)^{m+1} \varepsilon_{\rho} \dots \varepsilon_{\ell-m} \xi_{\ell+1}(x) \quad .$$

De plus, si $\ell - k = 2m'$ est pair et si $\varepsilon_{k+m'-1} A_{m'-1}$ et $\varepsilon_{\ell-m'} B_{m'-1}$ ont même signe, il existe C de signe contraire tel que

$$\frac{d}{dt} x_{k+m'}^t \sim C t^{m'+1} \quad .$$

On en déduit que, si t est petit et positif,

$$x^t \in W_1 \quad , \quad x^{-t} \in W_1 \quad \text{et} \quad L_1(x^{-t}) > L_1(x^t) \quad .$$

De même, on en déduit que

$$x_{k+m}^t - x_{k+m} \sim \frac{A_m}{m+2} t^{m+2} \quad , \quad x_{\ell-m}^t - x_{\ell-m} \sim \frac{B_m}{m+2} t^{m+2} \quad ,$$

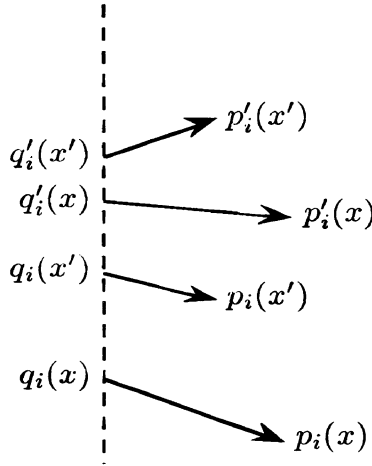
pour $t \in \{0, \dots, [(\ell - k - 1)/2]\}$ et, dans le cas éventuel, que

$$x_{k+m'}^t - x_{k+m'} \sim \frac{C}{m'+2} t^{m'+2} \quad .$$

Comme $x_i^t - x_i \sim \xi_i(x)t$ si i appartient à un intervalle de la forme J_r , $x_i^t - x_i$ a même signe que $\frac{d}{dt} x_i^t$ pour t petit et positif, le signe contraire pour t petit et négatif dès qu'on peut déterminer ce signe. Les autres cas correspondant aux égalités définissant W_1 , on peut conclure.

Remarques.

- i) Si x et x' sont deux points distincts de S et si x^t et x'^t sont définis pour tout t dans un certain intervalle, il existe au plus $n/2$ valeurs de t pour lesquelles (x^t, x'^t) n'appartient pas à W_0 . De plus, la fonction qui à t associe $L(x^t, x'^t)$ est décroissante sur son domaine de définition. On a un résultat du même type avec W_1 , pour un point x qui n'est pas une singularité.
- ii) Si $(x, x') \in W_0$ et si $i \in \mathbb{Z}$, les couples (x_i, x_{i+1}) et (x'_i, x'_{i+1}) sont distincts; il en est donc de même d'une part de $q_i(x)$ et $q_i(x')$, d'autre part de $q'_{i+1}(x)$ et de $q'_{i+1}(x')$. De façon analogue, si $x \in W_1$, alors les vecteurs $(\xi_i(x), \xi_{i+1}(x))$, $p_i(x)$ et $p'_{i+1}(x)$ sont non nuls.
- iii) Soit x et x' deux points de S tels que $(x, x') \in W_0$ et tels que $x_i = x'_i$, pour un entier i . Les points $q_i(x)$, $q'_i(x)$, $q_i(x')$ et $q'_i(x')$ sont alors sur la même verticale. Dire que $(x, x') \in W_0$ signifie que les vecteurs $q_i(x) - q_i(x')$ et $q'_i(x) - q'_i(x')$ ont même sens, en d'autres termes, que l'on peut construire un homéomorphisme de la droite $x = x_i$, préservant l'orientation, envoyant $q'_i(x)$ sur $q_i(x)$ et $q'_i(x')$ sur $q_i(x')$.



Remarquons également que si $q_i(x')$ (resp. $q'_i(x')$) appartient au segment $]q_i(x), q'_i(x)[$, le point $q'_i(x')$ (resp. $q_i(x')$) n'appartient pas à ce segment, et que $\xi_i(x') = -g_i(x'_i, x'_{i+1}) + g'_{i-1}(x'_{i-1}, x'_i)$, qui est la première coordonnée de $p_i(x')$ et de $p'_i(x')$, est non nulle. Plus précisément, l'angle que fait le vecteur $q'_i(x) - q_i(x)$ avec $p_i(x')$ ou avec $p'_i(x')$ est compris strictement entre $-\pi$ et 0.

- iv) Dans le cas où toutes les applications f_i dévient la verticale à droite, l'ensemble $L_1^{-1}(\{0\})$ est répulsif : la position x^t de tout point x de l'adhérence de $L_1^{-1}(\{0\})$ est contenue dans $L_1^{-1}(\{0\})$, pour toute valeur de $t < 0$. Si x est sur la frontière de $L_1^{-1}(\{0\})$, alors x^t n'appartient pas à l'adhérence de

$L_1^{-1}(\{0\})$ pour $t > 0$. Cet ensemble est formé des configurations x telles que $(\xi_i(x))_{i \in \mathbb{Z}}$ a un signe constant strict, ce sont celles que S. Angenent appelle les sur-solutions et les sous-solutions ; on peut rapprocher la proposition précédentes aux propriétés de ces configurations remarquées par celui-ci (voir [An]).

- v) On a vu au paragraphe 2 du chapitre 1 que l'on pouvait choisir, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, une isotopie $(f_i^t)_{t \in [0,1]}$ joignant l'identité à f_i à valeurs dans $DV(\mathbb{R}^2)$ sauf en $f_i^0 = \text{Id}$. On obtient une isotopie $(f^t)_{t \in [0,n]}$, de l'identité à f , en posant

$$f^{k+t} = f_k^t \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_0 \quad \text{si } k \in \{0, \dots, n-1\} \quad \text{et } t \in [0,1] \quad .$$

Soit $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et $x^* = (x_i^*)_{i \in \mathbb{Z}}$ deux singularités distinctes de ξ , soit $z_0 = q_0(x)$ et $z_0^* = q_0(x^*)$ les points fixes de f correspondants. Le couple (x, x^*) appartient à W_0 , d'après la proposition précédente.

Proposition 2.2. *Le nombre $L_0(x, x^*)$ est exactement le nombre d'enlacement des courbes $\Gamma = \{(f^t(z_0), t), t \in [0, n]\}$ et $\Gamma^* = \{(f^t(z_0^*), t), t \in [0, n]\}$ de*

$$\mathbb{R}^2 \times [0, n]/(z, 0) \sim (z, n) \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^1 \quad .$$

Démonstration. En effet, les courbes Γ et Γ' se décomposent chacune en n arcs Γ_i et Γ'_i , l'arc Γ_i joignant $z_i = q_i(x)$ à $z_{i+1} = q_{i+1}(x)$ et Γ'_i joignant $z'_i = q_i(x')$ à $z'_{i+1} = q_{i+1}(x')$. A chaque changement de signe des quantités $x_i - x'_i$ et $x_{i+1} - x'_{i+1}$, les courbes se croisent, celle de gauche passant au dessus de celle de droite si $\varepsilon_i > 0$, en-dessous si $\varepsilon_i < 0$. La somme de ces changement de signes affectés du coefficient ε_i est égal au nombre d'enlacement des deux courbes, au facteur multiplicatif -2 près.

La fonction L_0 représente le nombre d'enlacement de deux configurations.

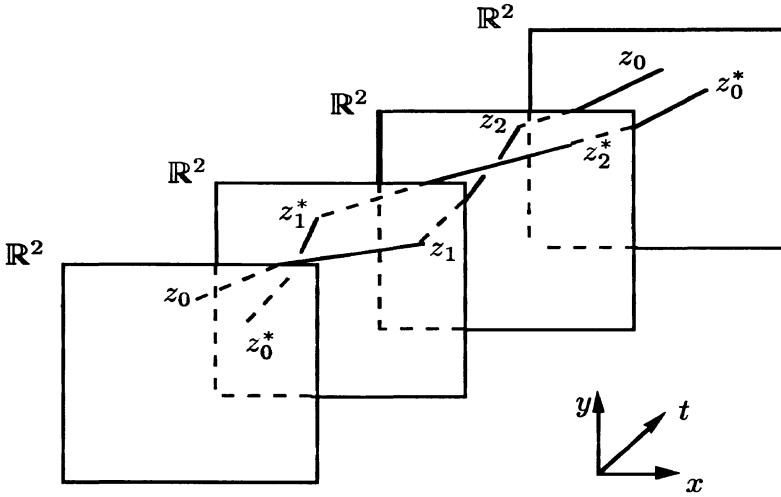
Exemples. $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$, $N(x, x') = -1$.

[Voir figure au sommet de la prochaine page.]

Nous finissons ce paragraphe par un résultat infinitésimal analogue à la proposition 2.1 que nous utiliserons au paragraphe 4 ; nous notons $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur S .

Proposition 2.3. *Soit $x \in S$ et $\varepsilon > 0$ tel que x^t soit défini pour $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Il existe alors deux réels $\eta > 0$ et $\delta > 0$ tels que les relations suivantes :*

- i) $\|X\| < \eta$, $\|X'\| < \eta$,



ii) $((x + X)^t, (x + X')^t) \in W_0$, pour $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$,

impliquent que $\frac{X-X'}{\|X-X'\|}$ soit à une distance au moins δ de l'ensemble K formé des points de $S \setminus W$ de norme 1, qui est compact (puisque W est ouvert).

Démonstration. Considérons le champ de vecteurs linéarisé

$$\Xi(X) = D\xi(x) \cdot X \quad ,$$

c'est le champ de vecteurs associé à la famille $(Df_i(q_i(x)))_{i \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de $DV(\mathbb{R}^2)$. Appliquons la proposition 2.1.

Si $X^* \in K$, il existe $t \in [\varepsilon/2, \varepsilon]$ tel que

$$e^{D\xi(x)t}X \in W \quad , \quad e^{-D\xi(x)t}X \in W \quad \text{et} \quad L(e^{D\xi(x)t}X) < e^{-D\xi(x)t}X \quad ,$$

où l'endomorphisme $e^u = \sum_{k \geq 0} u^k/k!$ est l'exponentielle de u .

Comme K est compact et W ouvert, il existe $\alpha > 0$ et $\delta > 0$, tels que, pour tout X à une distance inférieure ou égale à δ de K , il existe $t \in [\varepsilon/2, \varepsilon]$ tel que

$$\begin{aligned} \left\| X' - e^{D\xi(x)t}X \right\| < \alpha \quad , \quad \left\| X'' - e^{-D\xi(x)t}X \right\| < \alpha \\ \Rightarrow X' \in W \quad , \quad X'' \in W \quad \text{et} \quad L(X') < L(X'') \quad . \end{aligned}$$

Il existe $\eta > 0$ tel que les relations

$$X \neq X' \quad , \quad \|X\| < \eta \quad , \quad \|X'\| < \eta \quad ,$$

impliquent :

$$\left\| \frac{(x + X)^t - (x + X')^t}{\|X - X'\|} - e^{D\xi(x)t} \frac{X - X'}{\|X - X'\|} \right\| \leq \eta' \quad .$$

Ainsi, si $X - X' / \|X - X'\|$ est à une distance plus petite que δ de K , il existe $t \in [\varepsilon/2, \varepsilon]$ tel que $(x + X)^t - (x + X')^t$ et $(x + X)^{-t} - (x + X')^{-t}$ sont dans deux composantes connexes distinctes de W . Il existe donc t' entre $-t$ et t tel que $(x + X)^{t'} - (x + X')^{t'}$ n'appartient pas à W .

3. Existence d'orbites non enlacées pour les difféomorphismes conservatifs de l'anneau.

Nous fixons dans ce paragraphe un difféomorphisme $F \in \text{Diff}_0^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ qui préserve l'aire, et un relèvement $f \in D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$. Nous notons ρ^- et ρ^+ les nombres de rotation définis par f sur les bords respectifs $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\mathbb{R} \times \{1\}$, et nous supposons que $\rho^- < \rho^+$. Nous considérons l'application $f_* : (x, y) \mapsto (x + \rho^- + y(\rho^+ - \rho^-), y)$, qui est l'application affine, élément de $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$, dont les nombres de rotation induits sur les bords sont les mêmes que ceux de f . L'application f_* dévie la verticale à droite et préserve l'aire.

Théorème 3.1. *Pour tout nombre rationnel $\rho \in [\rho^-, \rho^+]$ qui s'écrit $\rho = p/q$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux, il existe $z_\rho \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ de type (p, q) vérifiant la propriété suivante :*

pour tous $\rho_0, \dots, \rho_m \in \mathbb{Q} \cap [\rho^-, \rho^+]$, il existe une isotopie $(f^t)_{t \in [0, 1]}$ dans $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ joignant f à f_ et $m + 1$ chemins continus $(z_k^t)_{t \in [0, 1]}$, $k \in \{0, \dots, m\}$, tels que $z_k^0 = z_{\rho_k}$, et tels que z_k^t soit un point de type (p_k, q_k) de f^t , si ρ_k s'écrit p_k/q_k , où $p_k \in \mathbb{Z}$ et $q_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux.*

Remarques.

i) Si $(f_t)_{t \in [0, 1]}$ est une isotopie joignant l'identité à f dans $D^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$, si $(F_t)_{t \in [0, 1]}$ est l'isotopie correspondante dans $\text{Diff}_0^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$, et si O_ρ est l'orbite périodique de F définie par z_ρ , chaque ensemble

$$\Gamma_\rho = \{(F_t(z), t), t \in [0, 1], z \in O_\rho\}$$

de

$$\mathbb{T}^1 \times [0, 1] \times [0, 1] / (z, 0) \sim (z, 1) \simeq \mathbb{T}^1 \times [0, 1] \times \mathbb{T}^1$$

est une courbe fermée simple. On obtient ainsi une famille infinie de courbes Γ_ρ , telle que toute sous-famille finie soit un entrelacs indépendant, à isotopie près, de l'isotopie $(f_t)_{t \in [0, 1]}$, conséquence de la contractilité de $D^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$. Le théorème exprime que l'on peut choisir les z_ρ de telle façon que cette famille soit la plus simple possible, à savoir que toute sous-famille finie définisse le même entrelacs que celui obtenu pour une application affine.

- ii) Dans le cas où f dévie la verticale à droite, les orbites minimisantes de la théorie d'Aubry et de Mather vérifient la propriété énoncée par le théorème (voir S. Angenent et C. Golé [AG]); on peut généraliser ainsi, bien faiblement cependant, la notion d'orbite minimisante.
- iii) Chaque orbite O_ρ est en particulier une orbite de Birkhoff généralisée, définie dans l'introduction. Nous verrons dans la démonstration qu'il en existe au moins deux pour chaque $\rho \in \mathbb{Q} \cap [\rho^-, \rho^+]$.

Nous allons commencer la démonstration du théorème. On a vu au paragraphe 1 de ce chapitre que l'on pouvait écrire f comme composée d'applications déviant la verticale et préservant l'aire. On peut être encore plus précis.

Lemme 1. *Il existe n isotopies $(f_i^t)_{t \in [0,1]}$, $0 \leq i \leq n-1$, dans $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0,1])$, telles que :*

- i) f_i^t dévie la verticale et préserve l'aire,
- ii) $f_i^0 = f_i^*$ est une application affine,
- iii) $f_* = f_{n-1}^0 \circ \dots \circ f_0^0$,
- iv) $f = f_{n-1}^1 \circ \dots \circ f_0^1$,
- v) le nombre de rotation de $f^t = f_{n-1}^t \circ \dots \circ f_0^t$ restreint au bord supérieur (resp. inférieur) est ρ^+ (resp. ρ^-).

Démonstration. La démonstration est identique à celle de la proposition 1.3. Choisissons une isotopie $(f^t)_{t \in [0,1]}$ joignant f_* à f parmi les applications de $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0,1])$ qui préservent l'aire. Grâce aux propriétés des homéomorphismes du cercle, on montre facilement, quitte à composer f^t par une application affine α^t dépendant continûment de t , que l'on peut supposer constants les nombres de rotation induits sur chaque bord. Puisque $[0,1]$ est compact, il existe un entier $m > 0$ tel que

$$|t - t'| \leq \frac{1}{m} \Rightarrow (f^t)^{-1} \circ f^{t'} = (f^{*-1} \circ f^t)^{-1} \circ (f^{*-1} \circ f^t) \in \mathcal{V}.$$

où le voisinage \mathcal{V} a été défini dans la proposition 1.1. On définit alors $2m$ familles $(f_i^t)_{t \in [0,1]}$, $0 \leq i \leq 2m-1$, d'applications déviant la verticale de la façon suivante : si $t \in [0, 1/m]$

$$\begin{aligned} f_i^t &= f^* \text{ si } i \text{ est pair ,} \\ f_i^t &= f^{*-1} \text{ si } i \text{ est impair et inférieur à } 2m - 2 , \\ f_{2m-1}^t &= f_*^{-1} \circ f^t \circ f^{*-1} ; \end{aligned}$$

si $t \in [1/m, 2/m]$,

$$f_i^t = f^* \text{ si } i \text{ est pair ,}$$

$$f_i^t = f^{*-1} \text{ si } i \text{ est impair et inférieur à } 2m - 4 ,$$

$$f_{2m-1}^t = f_{2m-1}^{1/m}$$

$$f_{2m-3}^t = (f^{1/m})^{-1} \circ f^t \circ f^{*-1} ;$$

et ainsi de suite. On obtient la décomposition voulue

$$f^t = f^* \circ f_{2m-1}^t \circ \dots \circ f_0^t .$$

Ecrivons $f = f_{n-1} \circ \dots \circ f_0$ comme composée de difféomorphismes déviant la verticale, où $f_i = f_i^1$ et prolongeons chaque f_i en un élément de $DV(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ préservant l'aire. Définissons la famille $(f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ par la relation de périodicité $f_{i+n} = f_i$, et posons $\varepsilon_i = 1$ si f_i dévie la verticale à droite et $\varepsilon_i = -1$ si f_i dévie la verticale à gauche. Enfin, notons h_i l'application associée à f_i par la relation (**), et écrivons $g_i = -\partial h_i / \partial x$, $g'_i = \partial h_i / \partial x'$.

Si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont fixés premiers entre eux, on peut définir sur

$$S = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_{i+nq} = x_i + p\} \simeq \mathbb{R}^{nq}$$

un champ de vecteurs $\xi : x \mapsto (\xi_i(x))_{i \in \mathbb{Z}}$ par la relation

$$\xi_i(x) = g'_{i-1}(x_{i-1}, x_i) - g_i(x_i, x_{i+1}) ,$$

tel qu'aux singularités de ξ correspondent les points de type (p, q) . Ce champ de vecteurs est le gradient de la fonction

$$H : S \rightarrow \mathbb{R} , \quad x \mapsto \sum_{i=0}^{nq-1} h_i(x_i, x_{i+1}) ,$$

et il est invariant par les fonctions

$$\tau : S \rightarrow S , \quad (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_i + 1)_{i \in \mathbb{Z}} ,$$

et

$$\varphi : S \rightarrow S , \quad (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+n})_{i \in \mathbb{Z}} .$$

Puisque le difféomorphisme F_i relevé par f_i laisse invariant la courbe $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$, son flux de Calabi est nul et la forme $F_i^*(ydx) - ydx$ est exacte; ceci signifie que $h_i(x+1, x'+1) = h_i(x, x')$ pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$. Ainsi H commute avec τ et φ .

On peut donc définir sur l'espace quotient

$$\tilde{S} = S/\tau \simeq \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^{nq-2}$$

un champ $\tilde{\xi}$ vérifiant $\tilde{\xi} \circ \Pi = \xi$, gradient de la fonction $H : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{H} \circ \Pi = H$, où $\Pi : S \rightarrow \tilde{S}$ est la projection canonique. Puisque φ commute avec τ , on définit également $\tilde{\varphi} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ par la relation $\tilde{\varphi} \circ \Pi = \Pi \circ \varphi$.

Construction des fonctions d'enlacement de $\tilde{\xi}$.

D'après la proposition 2.1, il existe une fonction continue L à valeurs entières, définie sur

$$W = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_i = 0 \Rightarrow \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i x_{i+1} x_i < 0\} \quad ,$$

telle que

$$L(x) = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=0}^{nq-1} \varepsilon_i \sigma(x_i) \sigma(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{nq-1} \varepsilon_i \right) \quad ,$$

si x appartient à

$$V = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_i \neq 0 \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}\} \quad .$$

L'application $L_0 = L \circ \delta$ définie sur l'ouvert $W_0 = \delta^{-1}(W)$ de $S \times S$, où $\delta : S \times S \rightarrow S$, $(x, x') \mapsto x - x'$, vérifie l'assertion 1 de la proposition 2.1.

Si $(x, x') \in W_0$, les couples $(\tau(x), \tau(x'))$ et $(\varphi(x), \varphi(x'))$ appartiennent également à W_0 , et la fonction L_0 a même valeur en chacun de ces couples (rappelons que τ et φ ont été définies plus haut). De plus, il existe $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tel que, si $x^* \in S$, $x'^* \in S$ et $k \in \mathbb{Z}$ vérifient

$$|x - x^*| < \varepsilon \quad , \quad |x' - x'^*| < \varepsilon \quad , \quad |k| \geq M \quad ,$$

alors, la suite $(x_i^* - x'^*_i - k)_{i \in \mathbb{Z}}$ a un signe constant strict, le couple $(x^*, \tau^k(x'^*))$ appartient à W_0 et $L_0(x^*, \tau^k(x'^*)) = 0$.

L'ensemble

$$W'_0 = \{(x, y) \in S \times S \mid (x, \tau^k(y)) \in W_0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}\}$$

est donc ouvert, et l'application

$$L'_0 : (x, x') \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} L_0(x, \tau^k(x')) \quad ,$$

qui est une somme finie, est bien définie sur W'_0 . Il existe alors une application \tilde{L}_0 , symétrique, continue, à valeurs entières, définie sur l'ouvert

$$\tilde{W}_0 = \Pi_2(W'_0) = \{(x, x') \in \tilde{S} \times \tilde{S} \mid \Pi^{-1}(\{x\}) \times \Pi^{-1}(\{x'\}) \subset W_0\}$$

de $\tilde{S} \times \tilde{S}$ et rendant commutatif le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccc} W'_0 \subset S \times S & \xrightarrow{\Pi_2} & W_0 \subset \tilde{S} \times \tilde{S} \\ & \searrow L'_0 & \downarrow \tilde{L}_0 \\ & & \mathbb{Z} \end{array}$$

où

$$\Pi_2 : S \times S \rightarrow \tilde{S} \times \tilde{S} , (x, x') \mapsto (\Pi(x), \Pi(x')) .$$

Celle-ci vérifie l'assertion i) de la proposition 2.1 où l'on remplace ξ par $\tilde{\xi}$.

Définissons maintenant la fonction

$$\tilde{L}_2 : \tilde{W}_2 \rightarrow \mathbb{Z} , x \mapsto \sum_{k=1}^{q-1} \tilde{L}_0(x, \varphi^k(x))$$

sur

$$\tilde{W}_2 = \{x \in \tilde{S} \mid (x, \varphi^\ell(x)) \in \tilde{W}_0 \text{ pour tout } \ell \in \{1, \dots, q-1\}\} .$$

Grâce à la proposition 2.1 et au fait que $\varphi(x^t) = \varphi(x)^t$, on a le résultat suivant (en remarquant que $x \neq \varphi^\ell(x)$ pour $\ell \in \{1, \dots, q-1\}$ si p et q sont premiers entre eux).

Proposition 3.1. *Si x n'appartient pas à \tilde{W}_2 , il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \varepsilon[$,*

$$x^{-t} \in \tilde{W}_2 , \quad x^t \in \tilde{W}_2 \text{ et } \tilde{L}_2(x^t) < \tilde{L}_2(x^{-t}) ;$$

en particulier x^{-t} et x^t appartiennent à deux composantes connexes distinctes de \tilde{W}_2 .

On peut interpréter également la fonction \tilde{L}_2 de la façon suivante. Soit $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Pi^{-1}(\tilde{W}_0)$, il y a égalité entre x_i et x_{j+k} si $(i-j)p = nqk$, d'après la définition de S . Si on suppose que $x_i \neq x_{j+k}$ dès que $i-j \in n\mathbb{Z}$ et $(i-j)p \neq nqk$, la valeur de $\tilde{L}_2(x')$, où $x' = \Pi(x)$, est donnée par la formule

$$\tilde{L}_2(x') = \sum_{(i,j,k) \in I_x} \varepsilon_i$$

où

$$I_x = \{(i, j, k) \in \{0, \dots, nq-1\} \times \mathbb{Z}^2 \mid i-j \in n\mathbb{Z}, \\ x_i - x_j - k > 0 \text{ et } x_{i+1} - x_{j+1} - k < 0\} .$$

C'est le nombre d'enlacement de la configuration x ; si ce point est critique c'est le nombre d'enlacement de la courbe simple de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^1$ construite dans l'introduction à partir de l'orbite périodique associée à x .

Remarque.

On peut comprendre la propriété de décroissance comme une propriété du même type que celle de croissance de H et qui a d'ailleurs la même raison géométrique.

En effet, si $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une configuration dans W , on peut construire une famille de triangles $(\Delta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ définis ainsi :

$$\Delta_i = \{z \in \mathbb{R} \times [0, 1] \mid p_1(z) < x_i \text{ et } p_1 \circ f_i(z) \geq x_{i+1}\} \text{ si } \varepsilon_i = -1 ,$$

et par

$$\Delta_i = \{z \in \mathbb{R} \times [0, 1] \mid p_1(z) \geq x_i \text{ et } p_1 \circ f_i(z) < x_{i+1}\} \text{ si } \varepsilon_i = 1 .$$

La valeur de H en $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ s'écrit alors

$$\sum_{0 \leq i \leq nq-1} \varepsilon_i \mu(\Delta_i) ,$$

où μ est la mesure de Lebesgue, alors que celle de \tilde{L}_2 s'écrit

$$- \sum_{0 \leq i \leq nq-1} \varepsilon_i \mu_i(\Delta_i) ,$$

où μ_i est la mesure de Dirac associée à l'ensemble

$$\{(x_{i+nj} + k, g_i(x_{i+nj}, x_{i+nj+1})), (j, k) \in \mathbb{Z}^2\} .$$

Soit $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ deux autres entiers premiers entre eux tels que $p'/q' \neq p/q$; notons S' et \tilde{S}' les ensembles de configurations, $\Pi' : S' \rightarrow \tilde{S}'$ la projection, et ξ' et $\tilde{\xi}'$ les champs de vecteurs associés. Si $x \in S$ et $x' \in S'$ sont tels que $x_i \neq x'_j + k$ pour tout triplet d'entiers (i, j, k) tel que $i - j \in \mathbb{Z}$, on peut définir de la même façon

$$L_3(x, x') = \sum_{(i,j,k) \in I_{x,x'}} \varepsilon_i$$

où

$$I_{x,x'} = \{(i, j, k) \in \{0, \dots, nq - 1\} \times \mathbb{Z}^2 \mid i - j \in n\mathbb{Z}, \\ x_i - x'_j - k > 0 \text{ et } x_{i+1} - x'_{j+1} - k < 0\} .$$

Cette fonction symétrique se prolonge par continuité sur la partie ouverte

$$W_3 = \{(x, x') \in S \times S' \mid x_i = x'_j + k \text{ et } i - j \in n\mathbb{Z} \\ \Rightarrow \varepsilon_{i-1}\varepsilon_i(x_{i-1} - x'_{i-1} - k)(x_{i+1} - x'_{i+1} - k) < 0\} .$$

Ayant défini

$$\Pi_2 : S \times S' \rightarrow \tilde{S} \times \tilde{S}' , (x, x') \mapsto (\Pi(x), \Pi'(x')) ,$$

on obtient une fonction $\tilde{L}_3 : \tilde{W}_3 = \Pi_2(W_3) \rightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant $L_3 = \tilde{L}_3 \circ \Pi_2$. La même démonstration que celle de la proposition 2.1 nous donne cette fois-ci le résultat qui suit.

Proposition 3.2. *Si $(x, x') \in \tilde{S} \times \tilde{S}'$ n'appartient pas à \tilde{W}_3 , il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, \varepsilon[$,*

$(x^{-t}, x'^{-t}) \in \tilde{W}_3$, $(x^t, x'^t) \in \tilde{W}_3$ et $\tilde{L}_3(x^t, x'^t) < \tilde{L}_3(x^{-t}, x'^{-t})$; en particulier (x^{-t}, x'^{-t}) et (x^t, x'^t) appartiennent à deux composantes connexes distinctes de \tilde{W}_3 .

Existence de points critiques.

Le théorème de Poincaré-Birkhoff exprime que f a au moins deux orbites de type (p, q) dans $\mathbb{T}^1 \times]0, 1[$, si p/q est entre ρ^- et ρ^+ , et donc que $\tilde{\xi}$ a au moins deux singularités dans l'ensemble $\tilde{U} = U/\tau$ où

$$U = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid 0 < g_i(x_i, x_{i+1}) < 1 , \text{ pour tout entier } i\} .$$

Nous allons utiliser les fonctions précédentes pour montrer que $\tilde{\xi}$ a des singularités dans une partie plus petite de l'espace de configurations, le fait d'être dans cette partie impliquant le caractère non enlacé de l'orbite correspondante.

Commençons par définir cette partie.

Le champ $\tilde{\xi}^*$ associé à la suite $(f_i^*)_{i \in \mathbb{Z}}$ défini sur \tilde{S} est un champ de gradient linéaire; sa dynamique est donc très simple. L'ensemble des points critiques est normalement hyperbolique, et comme chaque point critique correspond à un point de type (p, q) , cet ensemble est une courbe simple non homotope à zéro de \tilde{S} . Plus précisément, si $f_i^*(x, y) = (x + \lambda_i y + \mu_i, y)$, alors $\tilde{\xi}^*$ s'écrit

$$\tilde{\xi}_i^*(x) = -\lambda_i^{-1}(x_{i+1} - x_i - \mu_i) + \lambda_{i-1}^{-1}(x_i - x_{i-1} - \mu_{i-1}) ,$$

c'est le champ de gradient de

$$H : S \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/2 \sum_{i=0}^{nq-1} \lambda_i(x_{i+1} - x_i - \mu_i) .$$

D'après la proposition 3.1 appliquée à $\tilde{\xi}^*$, cette courbe est dans une composante connexe de \tilde{W}_2 . Nous noterons \tilde{W}^* cette composante connexe particulière qui correspondra à des orbites non enlacées et que nous reverrons souvent par la suite. Nous allons commencer par montrer la proposition suivante.

Proposition 3.3. *L'ensemble $\tilde{W}^* \cap \tilde{U}$ contient au moins deux singularités de $\tilde{\xi}$ correspondant à des orbites distinctes.*

Si x est un point de la frontière de U , l'ensemble des entiers i tels que $g_i(x_i, x_{i+1}) = 0$ ou 1 est non vide. Si $\varepsilon_i = 1$ pour tous les entiers de cet ensemble, on dira que $x \in U_+$, si $\varepsilon_i = -1$ pour tous les entiers, on dira que $x \in U_-$, et dans le cas restant on dira que $x \in U_0$.

Lemme 2.

- Si $x \in U_+$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, \varepsilon[$, $x^{-t} \in U$ et $x^t \notin \bar{U}$;
- si $x \in U_-$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, \varepsilon[$, $x^t \notin \bar{U}$ et $x^{-t} \in U$;
- si $x \in U_0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, \varepsilon[$, $x^{-t} \notin \bar{U}$ et $x^t \notin \bar{U}$.

Démonstration. La démonstration est du même genre que celle de la proposition 2.1. Supposons par exemple que

$$g_{i-1}(x_{i-1}, x_i) > 0, \quad g_i(x_i, x_{i+1}) = 0, \quad g_{i+1}(x_{i+1}, x_{i+2}) > 0,$$

et étudions, au temps $t = 0$, le signe de

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_i(x_i^t, x_{i+1}^t) &= \frac{d}{dt} x_i^t \frac{\partial g_i}{\partial x}(x_i^t, x_{i+1}^t) + \frac{d}{dt} x_{i+1}^t \frac{\partial g_i}{\partial x'}(x_i^t, x_{i+1}^t) \\ &= (-g_i + g'_{i-1}) \frac{\partial g_i}{\partial x} + (-g_{i+1} + g'_i) \frac{\partial g_i}{\partial x'}. \end{aligned}$$

Puisque la courbe $\mathbb{R} \times \{0\}$ est invariante par f_i et puisque $g_i = 0$, il en est de même de g'_i . De plus, le signe de $\partial g_i / \partial x$ est contraire à $\partial g_i / \partial x'$, c'est celui de $-\varepsilon_i$. En effet, il existe un difféomorphisme croissant ψ de \mathbb{R} de classe C^1 , tel que $g_i(x, x') = 0$ si et seulement si $x' = \psi(x)$, ainsi

$$\frac{\partial g_i}{\partial x}(x, x') + \psi'(x) \frac{\partial g_i}{\partial x'}(x, x') = 0, \quad \text{si } g_i(x, x') = 0.$$

Nous venons de montrer que $\frac{d}{dt} g_i(x_i^t, x_{i+1}^t)$ est strictement positif si $\varepsilon_i = -1$, strictement négatif si $\varepsilon_i = 1$.

Pour montrer rigoureusement le lemme, il faut maintenant étudier la situation générale où il y a plusieurs valeurs de i pour lesquelles $g_i(x_i, x_{i+1}) = 0$ ou 1.

Puisque p/q appartient à $] \rho^-, \rho^+ [$, on peut trouver une partition de \mathbb{Z} en intervalles $(I_r)_{r \in \mathbb{Z}}$ avec

$$\dots < I_r < I_{r+1} < \dots ,$$

tels que, pour $i \in I_r$, $g_i(x_i, x_{i+1})$ soit toujours nul, toujours égal à 1 ou alors toujours contenu dans $]0, 1[$, et tel que I_r et I_{r+1} correspondent à deux cas différents. Si $g_i(x_i, x_{i+1}) = 0$, pour tout $i \in I_r = \{k, \dots, l\}$, une démonstration identique à celle du lemme de la proposition 1.1 nous dit que

$$g_{k+m}(x_{k+m}^t, x_{k+m+1}^t) \sim A_m t^{m+1} , \quad g_{\ell-m}(x_{\ell-m}^t, x_{\ell-m+1}^t) \sim B_m t^m ,$$

pour $m \in [(k - \ell)/2]$, où

$$A_m \text{ a le signe de } (-1)^{m+1} \varepsilon_k \dots \varepsilon_{k+m}$$

et

$$B_m \text{ le signe de } (-1)^{m+1} \varepsilon_\ell \dots \varepsilon_{\ell-m} ,$$

et de plus, si $\ell - k = 2m'$ est pair et si $A_{m'-1}$ et $B_{m'-1}$ ont même signe, alors

$$g_{k+m'}(x_{k+m'}^t, x_{k+m'+1}^t) \sim C t^{m'+1} ,$$

où C a le signe de $-\varepsilon_{k+m'} A_{m'-1}$.

Dans le cas où $g_i(x_i, x_{i+1}) = 1$ pour $i \in I_r$, on obtient les mêmes développements limités avec $1 - g_i$, ceux-ci impliquent exactement l'énoncé du lemme.

On peut donc écrire la frontière de \tilde{U} comme réunion de l'ensemble des points rentrant $\tilde{U}_- = \Pi(U_-)$, de l'ensemble des points sortant $\tilde{U}_+ = \Pi(U_+)$ et de l'ensemble des points « tangents extérieurement » $\tilde{U}_0 = \Pi(U_0)$. Ceci implique que le plus grand ensemble invariant par le flot de $\tilde{\xi}$ contenu dans \tilde{U} est le même que celui contenu dans son adhérence et donc qu'il est compact. En d'autres termes, \tilde{U} est un bloc isolant de $\tilde{\xi}$ (voir Conley [Co1]).

A un bloc isolant B d'un champ de vecteurs, c'est-à-dire à un ouvert relativement compact tel que le plus grand ensemble Λ invariant par le flot contenu dans B soit compact, on peut associer son indice de Conley, qui est un type d'homotopie pointé. Si B' est un autre bloc isolant ayant Λ comme ensemble maximal invariant, les deux indices de Conley correspondent. Enfin, si on peut écrire la frontière de B comme union de l'ensemble des points rentrants B_- , des points sortants B_+ et des points tangents extérieurement B_0 (c'est-à-dire correspondant aux trois cas définis par le lemme), l'indice de Conley est le type d'homotopie pointé $[\bar{B}/B_+ \cup B_0, B_+ \cup B_0]$ de l'espace quotient $\bar{B}/B_+ \cup B_0$, où l'ensemble fermé $B_+ \cup B_0$ est réduit à un point. Si l'ensemble Λ est vide, l'indice de Conley est égal à $0 = ([\{x\}, x])$ (voir Conley [Co1], Conley-Easton [CE]).

On suppose qu'il y a d applications $(f_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ qui dévient la verticale à droite et $g = n - d$ applications qui la dévient à gauche ; remarquons que $d \geq 1$ car $\rho^- < \rho^+$. Le lemme qui suit, qui utilise pour la première fois l'hypothèse $\rho^- < p/q < \rho^+$, va nous permettre de calculer l'indice de Conley de U .

Lemme 3. *Il existe un homéomorphisme $\tilde{\Phi}$ entre*

$$\tilde{K} = \Pi(\{x \in S \mid 0 \leq g_i(x_i, x_{i+1}) \leq 1\}) \text{ et } \mathbb{T}^1 \times D^{qg} \times D^{qd-1} \text{ ,}$$

où $D^r = \{x \in \mathbb{R}^r \mid \|x\| \leq 1\}$ envoyant

$$\tilde{U}_+ \text{ sur } \mathbb{T}^1 \times \text{Int}(D^{qg}) \times \text{Fr}(D^{qd-1}) \text{ ,}$$

$$\tilde{U}_- \text{ sur } \mathbb{T}^1 \times \text{Fr}(D^{qg}) \times \text{Int}(D^{qd-1}) \text{ ,}$$

$$\tilde{U}_0 \text{ sur } \mathbb{T}^1 \times \text{Fr}(D^{qg}) \times \text{Fr}(D^{qd-1}) \text{ ,}$$

$$\tilde{U} \text{ sur } \mathbb{T}^1 \times \text{Int}(D^{qg}) \times \text{Int}(D^{qd-1}) \text{ .}$$

où, rappelons-le, $\text{Int}(D^r)$ et $\text{Fr}(D^r)$ représente l'intérieur et la frontière de D^r .

Démonstration. Définissons

$$D = \{i \in \mathbb{Z} \mid \varepsilon_i = 1\} \text{ et } G = \{i \in \mathbb{Z} \mid \varepsilon_i = -1\} \text{ ,}$$

et écrivons

$$D \cap \{0, \dots, nq - 1\} = \{i_0, i_1, \dots, i_{nd-1}\} \text{ ,}$$

$$G \cap \{0, \dots, nq - 1\} = \{i_{nd}, i_{nd+1}, \dots, i_{nq-1}\} \text{ ,}$$

où

$$i_0 < i_1 < \dots < i_{nd-1} \text{ et } i_{nd} < i_{nd+1} < \dots < i_{nq-1} \text{ .}$$

Définissons, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, des applications θ_i^0 et θ_i^1 par les relations :

$$\text{si } i \in D, f_i(x, 0) = (\theta_i^0(x), 0) \text{ , } f_i(x, 1) = (\theta_i^1(x), 1) \text{ ,}$$

$$\text{si } i \in G, f_i(x, 0) = (\theta_i^1(x), 0) \text{ , } f_i(x, 1) = (\theta_i^0(x), 1) \text{ ,}$$

puis une famille $(\theta_i^u)_{u \in [0,1]}$ de difféomorphismes de \mathbb{R} par la relation :

$$\theta_i^u = (1 - u)\theta_i^0 + u\theta_i^1 \text{ .}$$

On va construire une application continue Ψ de

$$K = \{x \in S \mid \theta_i^0(x_i) \leq x_{i+1} \leq \theta_i^1(x_i)\} \text{ ,}$$

dans $[0, 1]^{ng}$ (constante dans le cas où G est vide), faisant apparaître K comme un fibré trivial de base $[0, 1]^{ng}$ et de fibre $\mathbb{R} \times [0, 1]^{nd-1}$ et les ensembles U , U_+ , U_- et U_0 comme des fibrés triviaux de bases respectives

$$]0, 1[^{ng},]0, 1[^{ng}, \text{Fr}([0, 1]^{ng}) \text{ et } \text{Fr}([0, 1]^{ng}) ,$$

et de fibres respectives

$$\mathbb{R} \times]0, 1[^{nd-1}, \mathbb{R} \times \text{Fr}([0, 1]^{nd-1}), \mathbb{R} \times]0, 1[^{nd-1} \text{ et } \mathbb{R} \times \text{Fr}([0, 1]^{nd-1}) .$$

On définit Ψ ainsi :

$$\Psi((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (u_l)_{nd \leq l \leq nq-1} \Leftrightarrow x_{i_l+1} = \theta_{i_l}^{u_l}(x_{i_l}) .$$

Si $u = (u_l)_{nd \leq l \leq nq-1}$, l'ensemble $\psi^{-1}(u)$, est défini par les équations

$$\begin{aligned} \theta_{i_l}^0(x_{i_l}) \leq x_{i_l+1} \leq \theta_{i_l}^1(x_{i_l}) , \text{ si } l \in \{0, \dots, nd-1\} , \\ x_{i_l+1} = \theta_{i_l}^{u_l}(x_{i_l}) , \text{ si } l \in \{nd, \dots, nq-1\} , \end{aligned}$$

c'est-à-dire par les équations

$$\begin{aligned} A_l^u(x_{i_l}) \leq x_{i_l+1} \leq B_l^u(x_{i_l}) , \text{ si } l \in \{0, \dots, nd-1\} , \\ A_{nd-1}^u(x_{i_{nd-1}}) \leq x_{i_0} \leq B_{nd-1}^u(x_{i_{nd-1}}) ; \end{aligned}$$

où

$$A_l^u = \theta_{i_s}^{u_s} \circ \dots \circ \theta_{i_r}^{u_r} \circ \theta_{i_l}^0 \text{ et } B_l^u = \theta_{i_s}^{u_s} \circ \dots \circ \theta_{i_r}^{u_r} \circ \theta_{i_l}^1 ,$$

et où i_r, \dots, i_s sont les éléments de G situés entre i_l et i_{l+1} (après i_{nd-1} et avant i_0 pour l égal à $nd-1$).

On peut écrire l'équation précédente sous la forme suivante

$$A_l^u(x_{i_l}) \leq x_{i_l+1} \leq B_l^u(x_{i_l}) ,$$

$$(B_{l+1}^u)^{-1} \circ \dots \circ (B_{nd-1}^u)^{-1}(x_{i_0} + p) \leq x_{i_l+1} \leq (A_{l+1}^u)^{-1} \circ \dots \circ (A_{nd-1}^u)^{-1}(x_{i_0} + p)$$

pour tout $l \in \{0, \dots, nd-1\}$;

ou encore

$$R_l^u(x_{i_0}, x_{i_l}) \leq x_{i_l+1} \leq S_l^u(x_{i_0}, x_{i_l}) ,$$

avec

$$R_l^u(x_{i_0}, x_{i_l}) = \max(A_l^u(x_{i_l}), (B_{l+1}^u)^{-1} \circ \dots \circ (B_{nd-1}^u)^{-1}(x_{i_0} + p)) ,$$

et

$$S_l^u(x_{i_0}, x_{i_l}) = \min(B_l^u(x_{i_l}), (A_{l+1}^u)^{-1} \circ \dots \circ (A_{nd-1}^u)^{-1}(x_{i_0} + p)) .$$

Des résultats suivants :

- les fonctions A_l^u et B_l^u dépendent continûment de u pour la topologie uniforme,
- on a $A_l^u < B_l^u$, pour tout $l \in \{0, \dots, nd - 1\}$,
- pour tout $u \in [0, 1]^{ng}$, on a

$$\begin{aligned} A_{nd-1}^u \circ \dots \circ A_0^u(x) &\leq A_{nd-1}^{u^*} \circ \dots \circ A_0^{u^*}(x) < x + p \quad , \\ B_{nd-1}^u \circ \dots \circ B_0^u(x) &\geq B_{nd-1}^{u^{**}} \circ \dots \circ B_0^{u^{**}}(x) > x + p \quad , \end{aligned}$$

où $u^* = (1, \dots, 1)$ et $u^{**} = (0, \dots, 0)$, ce qui est une conséquence de l'hypothèse $\rho^- < p/q < \rho^+$ qui apparaît ici pour la première fois,

on peut déduire les assertions :

- $R_0^u < S_0^u$,
- si $(x_{i_0}, \dots, x_{i_{l-1}})$ vérifie les l premières doubles-inegalités

$$R_j^u(x_{i_0}, x_{i_l}) < S_j^u(x_{i_0}, x_{i_l}) \quad \text{pour tout } j \in \{0, \dots, l - 1\} \quad ,$$

alors $R_l^u(x_{i_0}, x_{i_l}) < S_l^u(x_{i_0}, x_{i_l})$.

On comprend maintenant comment est construit $\Psi^{-1}(\{u\})$. On choisit x_{i_0} quelconque, puis x_{i_1} dans un intervalle borné, puis x_{i_2} dans un autre intervalle, et ceci jusqu'à $x_{i_{nd-1}}$. En particulier $\Psi^{-1}(\{u\})$ est homéomorphe à $\mathbb{R} \times [0, 1]^{nd-1}$, et comme cette construction peut être faite globalement, \mathbb{Z} -équivariante, et de façon continue pour tous les u , l'application Ψ définit nos ensembles K , U , U_+ , U_- et U_0 comme des fibrés triviaux dont les bases et les fibres sont celles indiquées plus haut.

On en déduit que l'indice de Conley de \tilde{U} est égal à l'ensemble $S^{nd-1} \vee S^{nd}$, c'est-à-dire à la réunion de deux sphères ayant un point en commun, pointé en ce point si $nd - 1 > 0$, pointé au point isolé de $S^0 \vee S^1$ si $n = d = 1$. Il n'est nul dans aucun cas, ainsi l'ensemble maximal invariant contenu dans \tilde{U} n'est pas vide, et comme $\tilde{\xi}$ est un champ de gradient, il a une singularité. En fait le lemme 3 nous dit mieux : la projection p de $\tilde{\Phi}(\Lambda)$ sur \mathbb{T}^1 est surjective, il y a soit une infinité de points critiques, soit deux valeurs critiques, il y a donc au moins deux orbites périodiques de type (p, q) .

La proposition 3.1 nous dit que l'ensemble $\tilde{W}^* \cap \tilde{U}$ est également un bloc isolant de $\tilde{\xi}$, mais le calcul de l'indice de Conley est alors plus difficile, car l'ensemble \tilde{W}^* se définit de façon compliquée. Nous allons utiliser les propriétés de continuation de cet indice ainsi que le lemme 1.

Nous notons $\tilde{\xi}^t$ le champ de vecteurs associé à la suite $(f_i^t)_{i \in \mathbb{Z}}$ définie par le lemme 1, qui dépend continûment de t en C^1 -topologie, et définissons de même

des ensembles \tilde{K}^t , \tilde{U}^t , \tilde{U}_+^t , etc... La démonstration du lemme 2 implique en fait qu'il existe un homéomorphisme $(t, x) \mapsto (t, \tilde{\Phi}^t(x))$ entre $M = \{(t, x) \mid x \in \tilde{K}^t\}$ et $[0, 1] \times \mathbb{T}^1 \times D^{ng} \times D^{nd-1}$ envoyant (t, \tilde{K}^t) sur $\{t\} \times \mathbb{T}^1 \times D^{ng} \times D^{nd-1}$; (t, \tilde{U}^t) sur $\{t\} \times \mathbb{T}^1 \times \text{Int}(D^{ng}) \times \text{Int}(D^{nd-1})$; etc...

Chaque $\tilde{U}^t \cap \tilde{W}^*$ est donc non seulement un bloc isolant de $\tilde{\xi}^t$, mais aussi un bloc isolant de $\tilde{\xi}^{t'}$ si t' est proche de t . Les propriétés de l'indice de Conley, nous disent que l'indice de Conley de $\tilde{U}^t \cap \tilde{W}^*$ pour $\tilde{\xi}^t$ ne dépend pas de t . Or on peut le calculer pour $t = 0$, en effet, la courbe des points critiques étant contenue dans \tilde{W}^* , c'est le même indice que celui de \tilde{U}^0 . En particulier, il est non nul et on a donc au moins une singularité de $\tilde{\xi}$ dans $\tilde{U} \cap \tilde{W}^*$. On a en fait deux points critiques correspondant à des orbites distinctes; en effet, les propriétés de continuation nous disent que l'action $p^* : H^*(\mathbb{T}^1) \rightarrow H^*(\tilde{\Phi}^t(\Lambda^t))$ de la projection p sur \mathbb{T}^1 , induite sur les groupes de cohomologie d'Alexander est injective quelque soit t et que $p(\tilde{\Phi}^t(\Lambda^t)) = \mathbb{T}^1$ (voir [FI]).

Fixons maintenant $\rho_0, \dots, \rho_m \in \mathbb{Q} \cap [\rho^-, \rho^+]$ où $\rho_k = p_k/q_k$, avec $p_k \in \mathbb{Z}$ et $q_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ premiers entre eux. Pour chaque $k \in \{0, \dots, m\}$, on note ξ^k (resp. $\tilde{\xi}^k$) le champ de vecteurs défini sur l'espace S^k (resp. \tilde{S}^k) associé à (p_k, q_k) , et on considère $\Pi^k : S^k \rightarrow \tilde{S}^k$. On note ξ (resp. $\tilde{\xi}$) le champ de vecteurs produit défini sur $S = S^0 \times \dots \times S^m$ (resp. $\tilde{S} = \tilde{S}^0 \times \dots \times \tilde{S}^m$) et $\Pi : S \rightarrow \tilde{S}$ la projection naturelle. Sur l'ouvert \tilde{W} de \tilde{S} formé des points (x^0, \dots, x^m) pour lesquels les quantités $\tilde{L}_2(x^k)$ et $\tilde{L}_3(x^k, x^\ell)$ sont définies pour tout k et ℓ de $\{0, \dots, m-1\}$ distincts; on peut considérer la fonction

$$\tilde{L} : x \rightarrow \sum_{0 \leq k \leq m} \tilde{L}_2(x^k) + \sum_{0 \leq k < \ell \leq m} \tilde{L}_3(x^k, x^\ell)$$

qui est le nombre d'enlacement de la configuration totale, elle vérifie donc le résultat suivant :

Proposition 3.4. *Si $x \notin \tilde{W}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, \varepsilon[$,*

$$x^{-t} \in \tilde{W}, \quad x^t \in \tilde{W}, \quad \tilde{L}(x^t) < \tilde{L}(x^{-t}) ;$$

en particulier x^{-t} et x^t appartiennent à deux composantes connexes distinctes de \tilde{W} .

Définissons, pour tout $k \in \{0, \dots, m\}$, l'ensemble U^k des points $x \in S^k$ tels que $0 < g_i(x'_i, x'_{i+1}) < 1$, puis l'ensemble $\tilde{U}^k = \Pi^k(U^k)$ qui est relativement

compact, et enfin, posons $\tilde{U} = \tilde{U}^0 \times \dots \times \tilde{U}^m$ qui est un bloc isolant de $\tilde{\xi}$. Les points critiques de $\tilde{\xi}$ contenus dans \tilde{U} correspondent à une famille d'orbites périodiques dans $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$. Nous pouvons montrer, exactement de la même façon l'existence d'une singularité de $\tilde{\xi}$ appartenant à la fois à \tilde{U} et à la composante connexe \tilde{W}^* de \tilde{W} qui contient le tore de dimension $m + 1$ formé des singularités du champ de vecteurs associé à la suite $(f_i^*)_{i \in \mathbb{Z}}$, en calculant l'indice de Conley de $\tilde{U} \cap \tilde{W}$.

Il reste à montrer ce qui suit.

Proposition 3.5. *Si x est un point critique de $\tilde{\xi}$ appartenant à $\tilde{W}^* \cap \tilde{U}$, il existe n isotopies $(f_i^t)_{t \in [0,1]}$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$, dans $DV(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ joignant f_i à f_i^* , et un chemin continu $(x_t)_{t \in [0,1]}$ dans \tilde{S} partant de x et tel que x_t soit une singularité du champ de vecteur $\tilde{\xi}^t$ défini par la suite $(f_i^t)_{i \in \mathbb{Z}}$, pour tout $t \in [0, 1]$.*

Démonstration. Nous raisonnons dans le revêtement universel. L'ensemble $V \subset W = \Pi^{-1}(\tilde{W})$ des points $x = (x^0, \dots, x^m)$ de S tels que

$$\begin{aligned} x_i^k - x_j^\ell &\notin \mathbb{Z} \quad \text{si } i - j \in n\mathbb{Z} \quad \text{et } k \neq \ell, \\ x_i^k - x_j^k &\notin \mathbb{Z} \quad \text{si } i - j \in n\mathbb{Z} \quad \text{et } i - j \notin nq\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

est ouvert, et chaque composante connexe est convexe et définie par des inégalités entre les $x_i^k + j$, $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, $k \in \{0, \dots, m\}$.

Nous dirons que deux composantes v et v' de V sont adjacentes si les inégalités qui les définissent sont les mêmes, à l'exception d'une qui est inversée ; l'intersection de leur adhérence contient alors une partie ouverte d'un hyperplan $E_{v,v'}$.

Soit $x \in W^* = \Pi^{-1}(\tilde{W}^*)$ une singularité. Définissons pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$ l'ensemble

$$Z_i = \Pi(\{(x_j^k, g_j(x_j^k, x_{j+1}^k)), 0 \leq k \leq m, j - i \in n\mathbb{Z}\})$$

correspondant aux orbites périodiques de F associées à x .

On construit facilement n isotopies $(\Phi_i^t)_{t \in [0,1]}$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$, dans $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$, proches de l'identité, telles que Φ_i^0 soit l'identité, telles que p_1 soit injectif sur $\tilde{\Phi}_i^1(Z_i)$, où $\tilde{\Phi}_i^t$ est le difféomorphisme de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ relevé par Φ_i^t , et telles que $f_i^t = \Phi_{i+1}^t \circ f_i \circ (\Phi_i^t)^{-1}$ dévie la verticale. On obtient alors naturellement un chemin $(x_t)_{t \in [0,1]}$ dans \tilde{S} formé de singularités du champ de vecteurs $\tilde{\xi}^t$ défini par la suite $(f_i^t)_{i \in \mathbb{Z}}$, associées à l'ensemble $\tilde{\Phi}_0^t(Z_0)$ formé d'orbites périodiques de $f_{n-1}^t \circ \dots \circ f_0^t$, tel que x_0 soit égal à x et tel que x_1 appartienne à V .

On peut donc supposer que x appartient à une composante v_x de V . On peut joindre $\Pi(x)$ à un point de Λ^* par un chemin à valeurs dans \tilde{W}^* , on peut donc joindre x à un point x^* de $\Pi^{-1}(\Lambda^*)$ par un chemin à valeurs dans W^* , et on peut toujours supposer que $x^* \in V$; on note alors v_{x^*} la composante connexe de V qui le contient. La réunion dénombrable des espaces de codimension 2, intersections de deux hyperplans $E_{v,v'}$, ne sépare aucun ouvert de S ; d'autre part, la famille $(E_{v,v'})_{v,v'}$ est localement finie : seul un nombre fini d'hyperplans rencontre un compact donné. On en déduit qu'il existe une famille $(v_\ell)_{0 \leq \ell \leq L}$ de composantes de V contenues dans W^* telles que v_0 soit égal à v_x , v_L à v_{x^*} et telle que v_ℓ et $v_{\ell+1}$ soient adjacentes pour $\ell \in \{0, \dots, L-1\}$. La proposition est alors une conséquence des deux lemmes suivants.

Lemme 4. *La proposition 2.5 est vraie si x appartient à v_{x^*} .*

Lemme 5. *Si v et v' sont des composantes adjacentes de V appartenant à la même composante connexe de W , et si x appartient à v , il existe n isotopies $(f_i^t)_{t \in [0,1]}$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$ dans $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0,1])$, formées d'applications déviant la verticale et partant de f_i , et un chemin $(x_t)_{t \in [0,1]}$ formé de singularités du champ de vecteurs ξ^t défini par $(f_i^t)_{i \in \mathbb{Z}}$, telles que x^0 soit égal à x et tel que x^1 appartienne à v' .*

Démonstration du lemme 4. Puisque x et x^* sont dans la même composante connexe de V , il existe n isotopies $(\varphi_i^t)_{t \in [0,1]}$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$ dans l'ensemble des difféomorphismes de \mathbb{R} commutant avec les translations entières, telles que $\varphi_i^0 = \text{Id}$, $\varphi_i^t(x_i^k) = x_i^{k+k}$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et pour tout $k \in \{0, \dots, m-1\}$. Si on note $G_i = (g_i, g'_i)$ et $G_i^* = (g_i^*, g'^*_i)$ les applications associées respectivement à f_i et à f_i^* par la relation $(*)$ définie au paragraphe 1 du premier chapitre, on peut définir G_i^t par l'égalité

$$G_i^t(x, x') = (g_i^t(x, x'), g'^t_i(x, x')) = G_i(\varphi_i^t(x), \varphi_i^t(x'))$$

et obtenir ainsi, toujours grâce à $(*)$, une isotopie $(f_i^t)_{t \in [0,1]}$ dans $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0,1])$. Le chemin $(\Phi_i^t(x))$ est formé de points critiques du champ de vecteur ξ_t associé, il part de x et aboutit en x^* .

Le segment joignant G_i^1 à G_i^* permet de définir, toujours par la même relation, une isotopie $(f_i^t)_{t \in [1,2]}$ joignant f_i^1 à f_i^* ; le point x^* est une singularité commune de chaque champ de vecteurs $\tilde{\xi}^t = (2-t)\tilde{\xi}^1 + (t-1)\tilde{\xi}^*$ associé à $(f_i^t)_{i \in \mathbb{Z}}$. On obtient ainsi une isotopie explicite vérifiant presque les conditions du lemme, mais malheureusement cette isotopie ne laisse pas invariants les bords.

Si l'on veut construire une isotopie laissant invariant chaque bord, on commence par construire n isotopies $(\tilde{\Phi}_i^t)_{t \in [1,2]}$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$, dans $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0,1])$,

partant de l'identité, telles que Φ_i^t laisse fixe chaque verticale, de telle façon que si Z_i^t est l'ensemble défini par x^* , qui est un point critique de chaque de vecteurs $\tilde{\xi}^t$, $1 \leq t \leq 2$, associé à la suite $(f_i^t)_{i \in \mathbb{Z}}$, où $f_i^t = \Phi_{i+1}^t \circ f_i^1 \circ (\Phi_i^t)^{-1}$, alors, pour $t = 2$, cet ensemble soit le même que celui défini par x^* et $(f_i^*)_{i \in \mathbb{Z}}$. Les images par f_i^2 et f_i^* des feuilletages verticaux, définissent le même ordre sur l'ensemble Z_{i+1}^2 , il n'y a aucune difficulté à construire n isotopies entre f_i^2 et f_i^* envoyant Z_i^2 sur Z_{i+1}^2 , et formées d'applications déviant la verticale.

Démonstration du lemme 5. Supposons que v et v' soient définies par le même système d'inégalités, à l'exception de la relation $x_i^k < x_j^\ell + r$, $i - j \in n\mathbb{Z}$ qui est inversée. Le fait que v et v' sont dans la même composante de W , exprime en particulier que la quantité

$$\varepsilon_{i-1} \sigma(x_{i-1}^k - x_{j-1}^\ell - r) \sigma(x_i^k - x_j^\ell - r) + \varepsilon_i \sigma(x_i^k - x_j^\ell - r) \sigma(x_{i+1}^k - x_{j+1}^\ell - r)$$

est la même dans la composante v et dans la composante v' , et donc que la quantité

$$\varepsilon_{i-1} \varepsilon_i (x_{i-1}^k - x_{j-1}^\ell - r)(x_{i+1}^k - x_{j+1}^\ell - r)$$

est négative dans chacune des composantes.

Plusieurs cas sont à envisager et se traitent de la même façon. Nous supposons par exemple que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i-1} &= -1, & \varepsilon_i &= 1, \\ x_{i-1}^k &< x_{j-1}^\ell + r, \\ x_{i+1}^k &< x_{j+1}^\ell + r, \\ x_i^k &< x_j^\ell + r. \end{aligned}$$

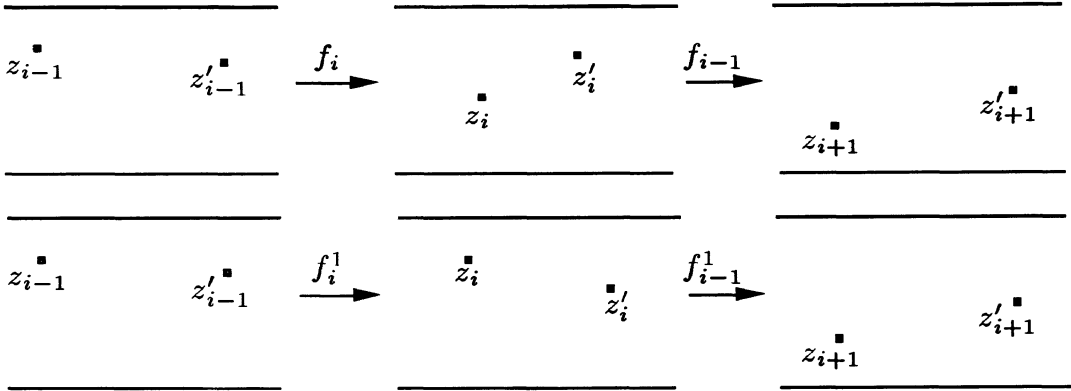
Nous notons pour simplifier

$$\begin{aligned} z_u &= (x_{i+u}^k, g_{i+u}(x_{i+u}^k, x_{i+u+1}^k)) , \\ z'_u &= (x_{j+u}^\ell + r, g_{j+u}(x_{j+u}^\ell + r, x_{j+u+1}^\ell + r)) . \end{aligned}$$

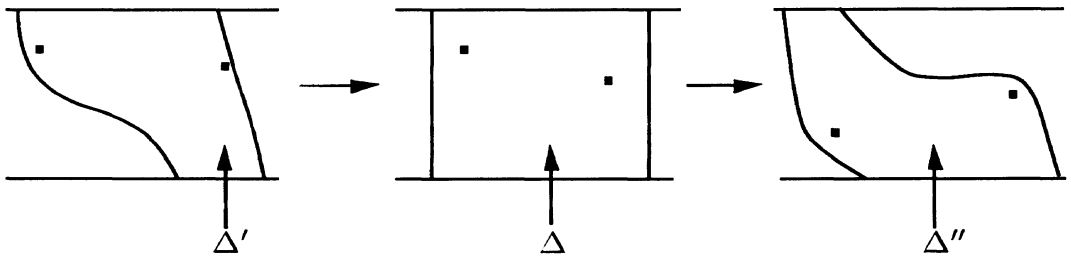
Rappelons que $f_i(z_u) = z_{u+1}$, $f_i(z'_u) = z'_{u+1}$.

Nous avons la figure

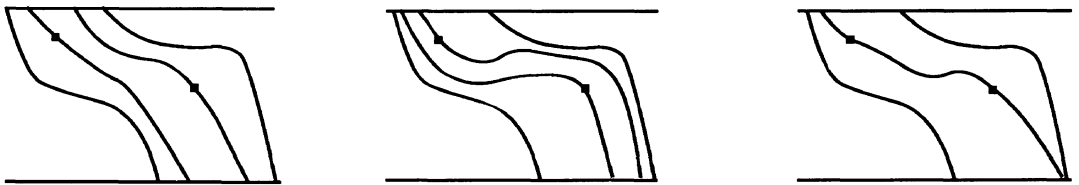
et voulons aboutir de façon continue à celle-ci



Nous allons modifier les applications f_s de façon à ne toucher à aucun ensemble Z_s , si $s \neq i$, et à aucune application f_s , si s est différent de $i - 1$ et de i . Plus précisément, nous allons modifier f_{i-1}^{-1} et f_i sur le rectangle Δ dessiné ci-dessous (et ses translatés par T_1)



Les feuilletages sur Δ' , définis par des graphes $y = \psi(x)$ sont de trois types, suivant que la feuille passant par z_{-1} est à gauche, à droite ou est la même que celle qui passe par z'_{-1} .

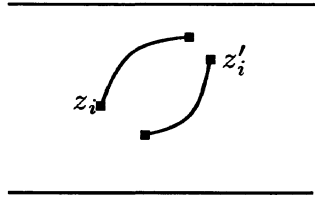


De même, les feuilletages sur Δ'' définis par des graphes $y = \psi(x)$ se divisent en trois types. Les feuilletages \mathcal{F}_- et \mathcal{F}_+ définis sur Δ' et Δ'' respectivement comme image par f_{i-1}^{-1} et par f_i du feuilletage vertical de Δ sont tous deux du premier type.

On peut construire deux familles continues de feuilletages (\mathcal{F}_-^t) et (\mathcal{F}_+^t) partant de \mathcal{F}_- et de \mathcal{F}_+ , du premier type pour $t < \frac{1}{2}$, du troisième type pour $t = \frac{1}{2}$, et du second type pour $t > \frac{1}{2}$.

On peut trouver également deux chemins de classe C^1 , disjoints, $(z_0^t)_{t \in [0,1]}$ et $(z_0^{*t})_{t \in [0,1]}$, partant de z_0 et de z_0^* , tels que

$$\begin{aligned} p_1(z_0^t) &< p_1(z_0^{*t}) \text{ si } t < \frac{1}{2} \quad , \\ p_1(z_0^t) &= p_1(z_0^{*t}) \text{ et } p_1(z_0^t) > p_1(z_0^{*t}) \text{ si } t = \frac{1}{2} \quad , \\ p_1(z_0^t) &> p_1(z_0^{*t}) \text{ si } t > \frac{1}{2} \quad . \end{aligned}$$



Il n'y a aucune difficulté à construire deux chemins (f_{i-1}^t) et (f_i^t) partant respectivement de f_{i-1}^{-1} et de f_i , formés d'applications de classe C^1 définies de Δ dans Δ' par la première famille, de Δ dans Δ'' par la seconde, envoyant le feuilletage vertical sur \mathcal{F}_- et sur \mathcal{F}_+ et de ce fait déviant la verticale à droite, et telles que :

$$\begin{aligned} f_{i-1}^t(z_0^t) &= z_{-1} \quad , \quad f_{i-1}^t(z_0^{*t}) = z_{-1}^* \quad , \\ f_i^t(z_0^t) &= z_1^t \quad , \quad f_i^t(z_0^{*t}) = z_1^{*t} \quad , \end{aligned}$$

et on peut faire les constructions des feuilletages et des applications de telle façon que les applications restent de classe C^1 quand on les prolonge en dehors de Δ .

Démonstration du théorème 3.1. Commençons par indexer les éléments de $\mathbb{Q} \cap [\rho^-, \rho^+]$ en une suite $(\rho_k)_{k \geq 0}$. Pour chaque entier $m \geq 0$, on a un point critique $x^m = (x^{0,m}, \dots, x^{m,m})$ du champ $(\tilde{\xi}^0, \dots, \tilde{\xi}^m)$ défini sur $\tilde{S}^0 \times \dots \times \tilde{S}^m$, appartenant à $\tilde{U}^0 \times \dots \times \tilde{U}^m$ et à l'ensemble \tilde{W}_m^* construit plus haut (qui dépend de m mais qui n'est pas un produit).

Le point $(x^{0,m'}, \dots, x^{m,m'})$ appartient également à \tilde{W}^m si $m' \geq m$. Comme chaque \tilde{U}^k est relativement compact, on peut construire une suite $(m_l)_{l \geq 0}$ convergent vers $+\infty$, telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la suite $(x^{k,m_l})_{l \geq 0}$ converge vers

un élément x^k de \tilde{S} . Le $m + 1$ -uplet (x^0, \dots, x^m) appartient à l'adhérence de $\tilde{W}_m \cap \tilde{U}^0 \times \dots \times \tilde{U}^m$ et est une singularité de $\tilde{\xi}^0 \times \dots \times \tilde{\xi}^m$. Comme cet ensemble est un bloc isolant, en fait il contient la singularité.

Ainsi la famille $(O(z^k))_{k \geq 0}$ des orbites périodiques associées aux $(x^k)_{k \geq 0}$ vérifie l'assertion du théorème.

Remarques.

- i) On peut montrer que tout élément de $D^0(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ qui préserve l'aire est limite d'éléments de $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ ayant même propriété, et les nombres de rotation induits sur les bords convergent vers les nombres de rotation de l'homéomorphisme. En utilisant la caractérisation des orbites obtenues, en termes d'entrelacs, on en déduit, par un passage à la limite, qu'il y a un théorème analogue au théorème 3.1 pour les homéomorphismes.
- ii) Dans la démonstration, on a utilisé une décomposition $f = f_{n-1} \circ \dots \circ f_0$ provenant d'une isotopie $f^t = f_{n-1}^t \circ \dots \circ f_0^t$ pour appliquer les propriétés de continuation de l'indice de Conley. Si l'on connaît a priori une décomposition $f = f_{n-1} \circ \dots \circ f_0$ qui ne provient pas d'une isotopie, on peut montrer directement qu'il existe des singularités dans l'ensemble \tilde{W}^* défini par la décomposition, il faut pour cela prolonger par continuité les f_i à \mathbb{R}^2 de façon convenable, ceci nécessite des lemmes assez techniques. Si tous les f_i dévient la verticale à droite, \tilde{W}^* est répulsif, et contient donc des points critiques. L'ensemble $W^* = \Pi^{-1}(\tilde{W}^*)$ se définit ainsi

$$W^* = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid jp/q + k < j'p/q + k' \Rightarrow x_{i+nj} + k < x_{i+nj'} + k'\} \quad ,$$

on retrouve les orbites de Birkhoff d'une composée d'applications déviant la verticale à droite (voir Mather [Ma9] qui les appelle des applications « positivement "tilt" »).

4. Un énoncé équivariant du théorème de translation de Brouwer.

La démarche que nous venons de suivre, à savoir écrire un difféomorphisme f de $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ qui préserve l'aire comme composée d'applications qui dévient la verticale et qui préservent l'aire, prolonger ces applications à \mathbb{R}^2 , puis construire un champ de gradient $\tilde{\xi}^k$ pour chaque nombre rationnel ρ_k , peut être faite si f ne préserve pas l'aire, avec comme seule différence que le champ $\tilde{\xi}^k$ n'est plus un champ de gradient. En particulier, on obtient deux blocs isolants \tilde{U}^k et $\tilde{W}^* \cap \tilde{U}^k$, mais les ensembles maximaux invariants correspondants, qui ne sont pas vides, n'ont

pas nécessairement de singularité. Nous verrons que l'absence de singularité signifie l'existence d'une courbe essentielle (i.e. non homotope à zéro) ne rencontrant pas son image. En fait nous allons voir un résultat analogue pour les difféomorphismes du tore, et pour cela nous allons donner, avec la méthode utilisée dans le paragraphe précédent, une version équivariante du théorème de translation de Brouwer, avec de plus une dépendance par rapport à un paramètre.

Théorème 4.1. *Soit A un espace topologique compact, $(f^\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'éléments de $D^1(\mathbb{T}^2)$, dépendant continûment de α , telle que f_α n'ait jamais de point fixe. Il existe alors une famille $(\zeta^\alpha)_{\alpha \in A}$ de champs de vecteurs continus sur \mathbb{T}^2 , uniquement intégrables, sans singularités, dépendant continûment de α pour la C^0 -topologie, telle que chaque courbe intégrale du champ ζ^α relevé à \mathbb{R}^2 soit une courbe de Brouwer de f^α .*

Remarque. Le théorème appliqué au cas où A se réduit à un point nous dit que si $f \in D^1(\mathbb{T}^2)$ n'a pas de point fixe, on peut trouver un champ de vecteurs continu ζ sur \mathbb{T}^2 , uniquement intégrable, dont toute courbe intégrale est une courbe de Brouwer de f . Si ζ' est un champ de de vecteurs proche de ζ en topologie C^0 , il vérifiera également cette propriété. Or on peut choisir ζ' de classe C^∞ par exemple, on peut également supposer que ζ' a des orbites fermées. Ainsi, il existe une courbe fermée simple du tore qui se relève en une courbe de Brouwer. Remarquons que cette courbe peut rencontrer son image par le difféomorphisme F de \mathbb{T}^2 relevé par f . D'ailleurs, M. Handel et M. Betsvina ont construit un difféomorphisme du tore isotope à l'identité et sans point fixe, tel que toute courbe fermée non homotope à zéro rencontre son image. La situation est tout à fait différente dans l'anneau où l'on a le résultat de Guillou énoncé dans le paragraphe 1 de ce chapitre.

Avant de prouver ce théorème, nous allons voir comment associer à un élément f de $D^1(\mathbb{T}^2)$ (ayant des points fixes ou non) un champ de vecteurs sur un espace de configurations, dont les singularités éventuelles correspondent aux points fixes de f .

L'application $f^* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, y)$, est un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 qui dévie la verticale à droite, qui relève un difféomorphisme de \mathbb{T}^2 non isotope à l'identité. Nous notons G_+ l'application associée à f^* par la relation $(*)$ et G_- l'application associée à f^{*-1} . Ces applications vérifient les propriétés suivantes.

$$f^* \circ T_1 = T_1 \circ f^* , \quad f^* \circ T_2 = T_1 \circ T_2 \circ f^* , \quad (P_0)$$

$$G_+ \circ T_1 = T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \circ G_+ , \quad G_+ \circ T_2 = T_1 \circ T_2 \circ G_+ , \quad (Q_0)$$

$$f^{*-1} \circ T_1 = T_1 \circ f^{*-1} , \quad f^{*-1} \circ T_2 = T_1^{-1} \circ T_2 \circ f^{*-1} , \quad (P_1)$$

$$G_- \circ T_1 = T_1 \circ T_2 \circ G_- , \quad G_- \circ T_2 = T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \circ G_- . \quad (Q_1)$$

D'après la proposition 1.2 on peut écrire $f = f_{2n-1} \circ \dots \circ f_0$, où f_i dévie la verticale à droite (resp. à gauche) si i est pair (resp. impair), et vérifie la propriété P_0 (resp. P_1), l'application $G_i = (g_i, g'_i)$ associée vérifiant Q_0 (resp. Q_1).

Chercher les points fixes de f revient à chercher, d'après le paragraphe 2, les singularités du champ de vecteurs $\xi : x \mapsto (\xi_i(x))_{i \in \mathbb{Z}}$ défini sur

$$S = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_{i+2n} = x_i\} \simeq \mathbb{R}^{2n}$$

par les équations

$$\xi_i(x) = g'_{i-1}(x_{i-1}, x_i) - g_i(x_i, x_{i+1}) .$$

Considérons maintenant le champ de vecteurs ξ^* associé à la suite $(f_i^*)_{i \in \mathbb{Z}}$ où $f_i^* = f^*$ si i est pair et $f_i^* = f^{*-1}$ si i est impair; il s'écrit

$$\xi_i^*(x) = (-1)^i (x_{i-1} - x_{i+1}) .$$

Les conditions Q_0 et Q_1 impliquent que le champ de vecteurs $\beta = \xi - \xi^*$ est invariant par chaque translation entière, et qu'il est donc borné. Le champ de vecteurs ξ^* étant invariant par les translations

$$\tau_P : S \rightarrow S, (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_i + \frac{1}{2}(1 + (-1)^i))_{i \in \mathbb{Z}} ,$$

$$\tau_I : S \rightarrow S, (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_i + \frac{1}{2}(1 + (-1)^{i+1}))_{i \in \mathbb{Z}} ,$$

il en est de même de ξ . Ceux-ci relèvent donc deux champs de vecteurs $\tilde{\xi}$ et $\tilde{\xi}^*$ définis sur

$$\tilde{S} = S / \langle \tau_P, \tau_I \rangle \simeq \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^{2n-2} .$$

Etudions la dynamique de $\tilde{\xi}^*$. Le champ de vecteurs ξ^* est le gradient de la fonction $H^* : S \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} H^*(x) &= \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} x_i x_{i+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} (x_{2n-1} - x_{2j+1})(x_{2j} - x_{2j+2}) . \end{aligned}$$

Cette fonction est invariante par τ_P et τ_I , ainsi $\tilde{\xi}^*$ est également un champ de gradient.

La fonction H^* est une forme quadratique de signature $(2, n - 1, n - 1)$; on peut écrire

$$S = S^* \oplus S^- \oplus S^+ ,$$

où

$$S^* = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_i = x_j, \text{ si } i - j \text{ est pair}\}$$

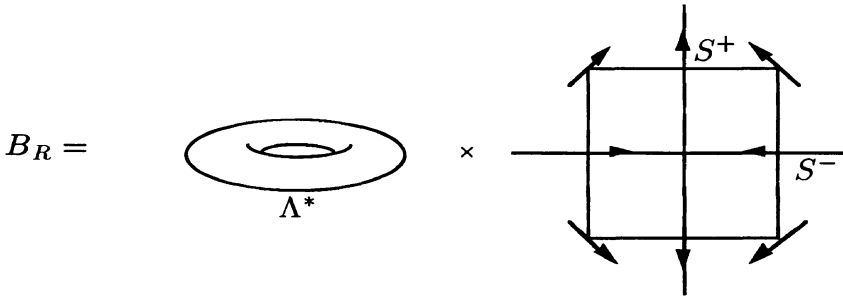
est le noyau de H^* , et où S^+ (resp. S^-) est la somme des sous espaces propres associés aux valeurs propres strictement positives (resp. négatives). L'ensemble S^* est alors invariant par τ_P et τ_I et le groupe \tilde{S} se décompose donc ainsi :

$$\tilde{S} = \Lambda^* \oplus S^- \oplus S^+ ,$$

où $\Lambda^* = S / \langle \tau_P, \tau_I \rangle$ est le tore normalement hyperbolique formé des singularités de $\tilde{\xi}^*$. Chaque élément x de \tilde{S} s'écrit de façon unique $x = x^* + x^- + x^+$ où $x^* \in \Lambda^*$, $x^- \in S^-$, $x^+ \in S^+$ et chaque ensemble

$$B_R = \{x \in \tilde{S} \mid \sup(\|x^+\|, \|x^-\|) < R\} , \quad R > 0 ,$$

où $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne sur S , est un bloc isolant de $\tilde{\xi}^*$.



Dès que R est assez grand, chaque point de la frontière de B_R , sortant, rentrant ou tangent extérieurement pour $\tilde{\xi}^*$, a la même propriété pour $\tilde{\xi}$ et même pour les champs de vecteurs $\tilde{\xi}_t = \tilde{\lambda} + t(\tilde{\xi} - \tilde{\lambda})$, $t \in [0, 1]$, ceci parce que $\tilde{\xi}$ est propre et parce que β est borné; en particulier, B_R est un bloc isolant de $\tilde{\xi}_t$. D'autre part la projection $r : \tilde{S} \rightarrow \Lambda^*$, $x \mapsto x^*$, est une rétraction de \tilde{S} sur Λ^* . On en déduit les assertions suivantes (voir [Co1], [CE], [FI]) :

- l'ensemble Λ formé des orbites bornées de $\tilde{\xi}$ est compact, c'est l'ensemble maximal invariant contenu dans B_R , dès que R est grand;
- Λ a même indice de Conley que Λ^* ;
- l'application $r^* : H^*(\Lambda^*) \rightarrow H^*(\Lambda)$, sur les groupes de cohomologie d'Alexander, est injective;

- la restriction de r à Λ est surjective ;
- la “cup-length” de Λ est supérieure ou égale à deux.

Remarque. Si on suppose que f préserve l’aire, alors f est isotope à l’identité parmi les éléments de $D^1(\mathbb{T}^2)$ qui préservent l’aire (voir [CZ]). On peut donc trouver une décomposition $f = f_{2n-1} \circ \dots \circ f_0$ du type précédent, mais en supposant, de plus, que les applications préservent l’aire. Si $h_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de classe C^2 associée à f_i par la relation (**) du paragraphe 2 de ce chapitre, le champ ξ est le gradient de la fonction

$$H : (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{i=0}^{2n-1} h_i(x_i, x_{i+1}) \quad .$$

Si on suppose de plus que $\int_{\mathbb{T}^2} (f - \text{Id}) \, dx dy = 0$, on montre sans difficultés que cette fonction est invariante par τ_P et τ_I , et donc que $\tilde{\xi}$ est également un champ de gradient, la fonction \tilde{H} associée est une phase génératrice. En effet, soit Γ le segment qui joint un point x de S à $\tau_P(x)$, et $\tilde{\Gamma}$ la courbe simple de \tilde{S} définie par projection de ce segment. Posons $C_i = q_i(\Gamma)$ et $C'_i = q'_i(\Gamma)$. La courbe C_i définit la transformation de revêtement $T_1^{-1} \circ T_2$ si i est pair, T_2 si i est impair, et se projette en une courbe fermée \hat{C}_i de l’anneau $\mathbb{A}_i = \mathbb{R}^2/T_1^{-1} \circ T_2$, si i est pair, $\mathbb{A}_i = \mathbb{R}^2/T_1^{-1}$ si i est impair. Chaque f_i est un relèvement d’un difféomorphisme \hat{f}_i de \mathbb{A}_i dans \mathbb{A}_{i+1} qui envoie \hat{C}_i sur \hat{C}'_{i+1} , qui préserve l’aire et l’orientation.

On peut écrire

$$\begin{aligned} H(\tau_P(x)) - H(x) &= \int_{\Gamma} dh = \int_{\Gamma} \sum_{i=0}^{2n-1} -g_i(x_i, x_{i+1}) + g'_{i-1}(x_{i-1}, x_i) \, dx_i \\ &= \sum_{i=0}^{2n-1} - \int_{C_i} y dx + \int_{C'_i} y dx \quad . \end{aligned}$$

Ainsi cette intégrale est la somme algébrique des aires comprises entre \hat{C}_i et \hat{C}'_i , c’est donc l’aire comprise entre \hat{C}_0 et $\hat{f}(\hat{C}_0)$, où \hat{f} est le difféomorphisme de \mathbb{A}_0 relevé par f . Le fait que $\int_{\mathbb{T}^2} (f - \text{Id}) \, dx dy$ soit nul implique que cette aire est également nulle, on montre de même que $H(\tau_I(x))$ est égal à $H(x)$.

Puisque la “cup-length” de Λ est supérieure ou égale à deux, on en déduit que $\tilde{\xi}$ a au moins trois singularités dans cet ensemble, et donc que f a au moins trois points fixes de projection distincte dans \mathbb{T}^2 . On retrouve ainsi une démonstration du

théorème de Conley-Zehnder, analogue à la démonstration du théorème de Poincaré-Birkhoff donnée au paragraphe 3; c'est une méthode très proche de la méthode des géodésiques brisées donnée par M. Chaperon [Chp2].

Dans le cas où f ne préserve pas l'aire, $\tilde{\xi}$ n'a pas nécessairement de fonction de Liapounoff. Nous allons voir cependant que ce champ de vecteurs admet une phase génératrice discrète. Nous notons $\Pi : S \rightarrow \tilde{S}$ la projection naturelle. Dans le paragraphe 2, nous avons construit une fonction L sur

$$W = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in S \mid x_i = 0 \Rightarrow x_{i-1}x_{i+1} > 0\} \quad ,$$

une fonction $L_0 = L \circ \delta^{-1}$ sur l'ouvert $W_0 = \delta^{-1}(W)$ de $S \times S$, et une fonction $L_1 = L \circ \xi$ sur $W_1 = \xi^{-1}(W)$. L'ensemble ouvert W_1 est invariant par τ_P et τ_I , de même que la fonction L_1 ; on définit $\tilde{L}_1 : \tilde{W}_1 = \Pi(W_1) \rightarrow \mathbb{Z}$ de telle façon que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} W_1 \subset S & \xrightarrow{\Pi} & \tilde{W}_1 \subset \tilde{S} \\ & \searrow L_1 & \downarrow \tilde{L}_1 \\ & & \mathbb{Z} \end{array}$$

Si (x, x') appartient à W_0 , les couples $(\tau_P(x), \tau_P(x'))$ et $(\tau_I(x), \tau_I(x'))$ appartiennent également à W_0 , et L_0 a même valeur en chacun de ces couples. De plus, il existe $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tels que, si $x^* \in S$, $x'^* \in S$, $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ vérifient

$$|x - x^*| < \varepsilon \quad , \quad |x' - x'^*| < \varepsilon \quad , \quad \max(|k| + |k'|) \geq M \quad ;$$

alors, l'une des suites

$$(x_{2i}^* - x'_{2i}{}^* - k)_{i \in \mathbb{Z}} \quad \text{ou} \quad (x_{2i+1}^* - x'_{2i+1}{}^* - k)_{i \in \mathbb{Z}}$$

a un signe constant strict. Le point $(x^*, \tau_P^k \circ \tau_I^{k'}(x'^*))$ appartient alors à W_0 et $L_0(x^*, \tau_P^k \circ \tau_I^{k'}(x'^*)) = 0$. On peut donc définir une fonction L'_0 sur

$$W'_0 = \{(x, x') \in S \times S \mid (x, \tau_P^k \circ \tau_I^{k'}(x')) \in W_0, \quad \forall (k, k') \in \mathbb{Z}^2\} \quad ,$$

par la relation

$$L'_0(x, x') = \sum_{(k, k') \in \mathbb{Z}^2} L_0(x, \tau_P^k \circ \tau_I^{k'}(x')) \quad ,$$

puis une fonction \tilde{L}_0 continue, symétrique, à valeurs entières sur l'ouvert

$$\tilde{W}_0 = \Pi_2(W_0) = \{(x, x') \in \tilde{S} \times \tilde{S} \mid \Pi^{-1}(\{x\}) \times \Pi^{-1}(\{x'\}) \subset W_0\} \quad ,$$

où

$$\Pi_2 : S \times S \rightarrow \tilde{S} \times \tilde{S} , (x, x') \mapsto (\Pi(x), \Pi(x')) ,$$

telle que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} W'_0 \subset S \times S & \xrightarrow{\Pi_2} & \tilde{W}_0 \subset \tilde{S} \times \tilde{S} \\ & \searrow L'_0 & \downarrow \tilde{L}_0 \\ & & \mathbb{Z} \end{array}$$

On a alors une proposition analogue à la proposition 2.1 en remplaçant ξ , W_0 , W_1 , L_0 , L_1 respectivement par $\tilde{\xi}$, \tilde{W}_0 , \tilde{W}_1 , \tilde{L}_0 , \tilde{L}_1 . On peut définir également, comme dans le paragraphe 1, des applications

$$\tilde{q}_i, \tilde{q}'_i : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{T}^2 \quad \text{et} \quad \tilde{p}_i, \tilde{p}'_i : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

par les relations

$$\tilde{q}_i \circ \Pi = \pi \circ q_i , \quad \tilde{q}'_i \circ \Pi = \pi \circ q'_i , \quad \tilde{p}_i \circ \Pi = p_i , \quad \tilde{p}'_i \circ \Pi = p'_i .$$

Nous savons que si le couple (x, y) appartient à \tilde{W}_0 , alors $\tilde{q}_i(x) \neq \tilde{q}_i(y)$ et $\tilde{q}'_i(x) \neq \tilde{q}'_i(y)$ pour tout entier i ; de même si $x \in \tilde{W}_1$, alors $\tilde{p}_i(x) \neq 0$.

Définition. Une partie X de \tilde{S} , bornée et invariante par le flot induit par $\tilde{\xi}$ est un bon ensemble si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- i) tout couple (x, x') de points distincts de X appartient à \tilde{W}_0 ,
- ii) tout point x de X qui n'est pas une singularité appartient à \tilde{W}_1 .

Remarque. La condition ii) est une conséquence de la condition i). En effet, si $x \in X$ n'est pas une singularité et si x n'appartient pas à \tilde{W}_1 , alors pour $t > 0$ petit, les couples (x^{-t}, x) et (x, x^t) sont dans \tilde{W}_0 et vérifient $\tilde{L}_0(x^{-t}, x) < \tilde{L}_0(x, x^t)$, d'après la proposition 2.1. On en déduit que l'un des couples (x^{-t+s}, x^s) , $s \in]0, t[$, n'est pas dans \tilde{W}_0 , et donc que X ne vérifie pas la condition i).

Nous allons donner des propriétés des bons ensembles, remarquons les ressemblances avec celles des ensembles bien ordonnés des applications déviant la verticale énoncées au paragraphe 3 du chapitre 1 .

Proposition 4.1.

- i) Si X est un bon ensemble, son adhérence aussi.
- ii) La partie formée des bons ensembles fermés non vides est fermée pour la topologie de Hausdorff.

Démonstration. L'adhérence d'un bon ensemble X est bornée et invariante par le flot. Si x et x' sont deux points distincts de \bar{X} , et si (x, x') n'appartient pas à \tilde{W}_0 , alors pour $t > 0$ petit, les couples (x^t, x'^t) et (x^{-t}, x'^{-t}) sont dans \tilde{W}_0 et $\tilde{L}_0(x^t, x'^t) < \tilde{L}_0(x^{-t}, x'^{-t})$. On peut trouver x_* et x'_* dans X , distincts et assez proches de x et de x' , pour que $\tilde{L}_0(x_*^t, x'^t_*) < \tilde{L}_0(x_*^{-t}, x'^{-t}_*)$. Ceci contredit le fait que (x_*^s, x'^s_*) appartient à \tilde{W}_0 pour tout $s \in [-t, t]$. L'assertion ii) se montre comme l'assertion i).

Proposition 4.2. Si X est un bon ensemble, et si i est un entier, alors :

- i) les restrictions de \tilde{q}_i et de \tilde{q}'_i à X sont injectives,
- ii) les applications \tilde{q}_i et \tilde{q}'_i induisent des homéomorphismes bilipschitziens entre X et son image,
- iii) les applications \tilde{p}_i et \tilde{p}'_i ne s'annulent sur X qu'aux singularités éventuelles.

Démonstration. D'après la proposition précédente, on peut se limiter au cas où X est fermé. Les assertions i) et iii) sont des conséquences de la définition de \tilde{W}_0 et de \tilde{W}_1 . Pour montrer l'assertion ii) il suffit de montrer que $(\tilde{q}_i|_X)^{-1}$ et $(\tilde{q}'_i|_X)^{-1}$ sont lipschitziennes, et comme X est compact par hypothèse, qu'elles sont localement lipschitziennes en tout point. Limitons nous à la première application et raisonnons par l'absurde en nous plaçant dans le revêtement S . Supposons qu'il existe deux suites $x^k = (x_i^k)_{i \in \mathbb{Z}}$ et $x'^k = (x'_i{}^k)_{i \in \mathbb{Z}}$ dans $\Pi^{-1}(X)$ convergeant vers $x \in \Pi^{-1}(X)$, telles que $x^k \neq x'^k$ pour tout entier k , et telles que l'on ait

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|x^k - x'^k\|}{\|z^k - z'^k\|} = +\infty ,$$

où $z^k = q_i(x^k)$ et $z'^k = q_i(x'^k)$. La quantité $\|z^k - z'^k\|$ est équivalente à $\|(x_i^k, x_{i+1}^k) - (x'_i{}^k, x'_{i+1}{}^k)\|$ à un facteur multiplicatif près, ainsi les deux composantes de rang i et $i+1$ de $\frac{x^k - x'^k}{\|x^k - x'^k\|}$ convergent vers zéro et $\frac{x^k - x'^k}{\|x^k - x'^k\|}$ s'approche de l'ensemble des points de $S \setminus W$ de norme 1 défini à la fin du paragraphe 2. Ceci contredit le fait que $((x^k)^t, (x'^k)^t)$ est contenu dans W_0 pour $t \in [-1, 1]$, d'après la proposition 2.2.

Proposition 4.3. *Soit X un bon ensemble. Si x et x' sont deux points de $\Pi^{-1}(X)$ et si $q_i(x)$ (resp. $q'_i(x')$) appartient au segment $]q_i(x), q'_i(x)[$, alors l'angle orienté que font les vecteurs $q'_i(x) - q_i(x)$ et $p_i(x')$ (resp. $p'_i(x')$) est compris strictement entre $-\pi$ et 0 .*

Démonstration. C'est une conséquence, remarquée dans le paragraphe 2, du fait que le couple (x, x') appartient à W_0 .

La proposition exprime en un certain sens que les segments orientés $]q_i(x), q'_i(x)[$ (ou les arcs orientés si on se place dans le tore), sont transverses aux champs de vecteurs $p_i \circ (q_i |_{\Pi^{-1}(X)})^{-1}$ et $p'_i \circ (q'_i |_{\Pi^{-1}(X)})^{-1}$ définis respectivement sur $q_i(\Pi^{-1}(X))$ et sur $q'_i(\Pi^{-1}(X))$ et intersectent ces champs de vecteurs toujours de droite à gauche. On peut déduire deux corollaires de cette propriété.

Corollaire 1. *Si Λ est un bon ensemble et si f n'a pas de points fixes, le champ de vecteurs $\tilde{\zeta} = \tilde{p}_0 \circ (\tilde{q}_0 |_{\Lambda})^{-1}$ défini sur $\tilde{q}_0(\Lambda) = \mathbb{T}^2$ n'a pas de singularité, et toute courbe intégrale du champ ζ relevé à \mathbb{R}^2 est une courbe de Brouwer de f .*

Démonstration. Définissons, pour tout entier i , les champs de vecteurs $\tilde{\zeta}_i = \tilde{p}_i \circ (\tilde{q}_i |_{\Lambda})^{-1}$ et $\tilde{\zeta}'_i = \tilde{p}'_i \circ (\tilde{q}'_i |_{\Lambda})^{-1}$, et notons ζ_i et ζ'_i les champs relevés à \mathbb{R}^2 . La proposition 4.2 nous dit qu'ils n'ont pas de singularités. Soit $x \in \Pi^{-1}(\Lambda)$, la courbe intégrale C_i de ζ_i (resp. C'_i de ζ'_i) qui passe par $q_i(x)$ (resp. $q'_i(x)$) est l'image par q_i (resp. q'_i) de la courbe intégrale de ξ passant par x , et on a $f_i(C_i) = C'_{i+1}$; c'est un plongement propre de \mathbb{R} . Chacune de ces courbes divise le plan en deux parties, l'une strictement à droite et l'autre strictement à gauche. Puisque le segment $]q_i(x), q'_i(x)[$ est transverse à ζ_i et à ζ'_i si $q_i(x)$ et $q'_i(x)$ sont distincts, $q'_i(x)$ est alors strictement à gauche de C_i , et $q_i(x)$ strictement à droite de C'_i . Ainsi $f_i(C_i)$ est à gauche de C_{i+1} , pour tout entier i . Comme les applications f_i préservent l'orientation, on en déduit que $f(C_0)$ est à gauche de C_0 . De plus, pour qu'un point $z = q_0(x^t)$ appartienne à la fois à C_0 et à $f(C_0)$, il faut avoir l'égalité $q_i(x^t) = q'_i(x^t)$ pour tout entier i , ce qui est impossible puisque x^t n'est pas une singularité, et $f(C_0)$ est donc strictement à gauche de C_0 (en fait on ne peut pas avoir l'égalité $q_i(x^t) = q'_i(x^t)$ pour deux entiers consécutifs car $x^t \in \tilde{W}_1$). On démontre de même que $f^{-1}(C_0)$ est strictement à droite de C_0 .

Corollaire 2. *Si X est une orbite fermée homotope à zéro dans \tilde{S} qui est un bon ensemble, alors la courbe $\tilde{C}_0 = \tilde{q}_0(X)$ est une courbe fermée simple, homotope à zéro dans \mathbb{T}^2 . Si C_0 est un relèvement de \tilde{C}_0 dans \mathbb{R}^2 , alors l'une des images $f(C_0)$ ou $f^{-1}(C_0)$ est contenue dans la composante connexe bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus C_0$;*

on en déduit que f a au moins deux points fixes dont les projections dans \mathbb{T}^2 sont distinctes.

Démonstration. Chacune des courbes $\tilde{C}_i = \tilde{q}_i(X)$ et $\tilde{C}'_i = \tilde{q}'_i(X)$, $i \in \mathbb{Z}$, est une courbe fermée simple, homotope à zéro. Fixons $x \in \Pi^{-1}(X)$, l'orbite de x est fermée et l'image de cette orbite par q_i (resp. par q'_i) est une courbe fermée simple C_i (resp. C'_i) de \mathbb{R}^2 relevant \tilde{C}_i (resp. \tilde{C}'_i), et on a $f_i(C_i) = C'_{i+1}$. Chacune de ces courbes divise le plan en deux parties, l'une strictement à gauche, l'autre strictement à droite, et l'une d'elle est bornée. Le segment $[q_i(x^t), q'_i(x^t)]$ étant transverse aux courbes C_i et C'_i et les intersectant de droite à gauche si $q_i(x^t) \neq q'_i(x^t)$, on en déduit, comme les courbes sont fermées, qu'il ne rencontre la première courbe qu'au point $q_i(x^t)$ et la seconde qu'au point $q'_i(x^t)$. Ainsi, C'_i est à gauche de C_i , et C_i à droite de C'_i ; comme dans le corollaire 1, on montre ensuite que $f(C_0)$ est strictement à gauche de C_0 et $f^{-1}(C_0)$ strictement à droite. Une propriété d'indice nous dit alors que f a un point fixe dans la composante intérieure à C_0 et un autre point fixe en dehors de cette composante et de ses translatés.

Nous verrons dans la proposition suivante qu'une orbite fermée est toujours un bon ensemble. Plus précisément, nous verrons comment construire de bons ensembles.

Nous notons $O(x)$ l'orbite d'un point x de S ou de \tilde{S} sous l'action du flot correspondant, et nous notons $\alpha(x)$ et $\omega(x)$ les ensembles α -limite et ω -limite de ce point. Nous écrivons de même $\alpha(x, x')$ et $\omega(x, x')$ pour les ensembles α -limite et ω -limite d'un couple (x, x') sous l'action du flot produit. Nous notons également Δ (resp. $\tilde{\Delta}$) la diagonale de $S \times S$ (resp. de $\tilde{S} \times \tilde{S}$).

Proposition 4.4. *Soit (x_*, x'_*) un couple de $\Lambda \times \Lambda$, et (x, x') un élément de $\omega(x_*, x'_*)$ ou de $\alpha(x_*, x'_*)$. Nous avons alors les propriétés suivantes :*

- i) *l'adhérence de $O(x) \cup O(x')$ est un bon ensemble ;*
- ii) *si l'ensemble $O(x) \times O(x') \setminus \Delta$ est non vide, l'application \tilde{L}_0 , qui est bien définie sur cet ensemble, est constante ;*
- iii) *si $O(x) \times O(x') \setminus \Delta$ est non vide, et si la fonction précédente est non nulle, les ensembles $\overline{O(x)}$ et $\overline{O(x')}$ contiennent chacun soit une singularité, soit une orbite fermée homotope à zéro.*

Démonstration. On n'étudiera que le cas où (x, x') appartient à $\omega(x_*, x'_*)$, l'autre cas se traitant de façon analogue. Pour montrer i) il suffit de montrer que $O(x) \cup O(x')$ est un bon ensemble. Cette réunion est bornée et invariante par le flot. Si x^t et x'^t sont distincts et si (x^t, x'^t) n'appartient pas à \tilde{W}_0 , alors, pour

$s > 0$ petit, $(x^{t+s}, x'^{t'+s})$ et $(x^{t-s}, x'^{t'-s})$ sont dans \tilde{W}_0 et $\tilde{L}_0(x^{t+s}, x'^{t'+s}) < \tilde{L}_0(x^{t-s}, x'^{t'-s})$.

Le couple $(x^t, x'^{t'})$ appartenant à $\omega(x_*, x'^{*})$, on peut trouver deux réels t_0 et t_1 , avec $t_0 < t_1$, tels que :

$$\begin{aligned} (x_*^{t+t_0}, x'^{*t'+t_0}) &\in \tilde{W}_0, (x_*^{t+t_1}, x'^{*t'+t_1}) \in \tilde{W}_0 ; \\ \tilde{L}_0(x_*^{t+t_0}, x'^{*t'+t_0}) &= \tilde{L}_0(x^{t+s}, x'^{t'+s}) ; \\ L_0(x_*^{t+t_1}, x'^{*t'+t_1}) &= \tilde{L}_0(x^{t-s}, x'^{t'-s}) . \end{aligned}$$

Ceci contredit la décroissance de \tilde{L}_0 le long des orbites du flot produit.

Puisque $(x, x) \in \omega(x_*, x_*)$ et puisque $(x', x') \in \omega(x'_*, x'_*)$, on en déduit de même qu'un couple formé de deux points distincts de $O(x)$ ou de deux points distincts de $O(x')$, appartient à \tilde{W}_0 . Ainsi $O(x) \cup O(x')$ est un bon ensemble.

Pour démontrer ii) il suffit de remarquer que l'application \tilde{L}_0 est continue, à valeurs entières, que $O(x) \times O(x') \setminus \Delta$ est connexe si les orbites $O(x)$ et $O(x')$ sont distinctes; vide si elles sont égales à la même singularité; connexe encore si elles sont égales à la même orbite fermée; enfin que cet ensemble a au plus deux composantes connexes et qu'elles sont symétriques dans le cas restant. Il est facile de voir que la fonction $t \mapsto \tilde{L}_0(x_*^t, x'^{*t})$ est constante pour t assez grand et que \tilde{L}_0 est égale à cette constante sur $O(x) \times O(x') \setminus \Delta$.

Si $x^* \in \Pi^{-1}(O(x))$ et $x'^{*} \in \Pi^{-1}(O(x'))$ sont distincts, alors $(x^*, x'^{*}) \in W_0$. Si la fonction \tilde{L}_0 est égale à une constante non nulle, on peut choisir x^* et x'^{*} pour que $L_0(x^*, x'^{*})$ soit non nul. Par un raisonnement identique à celui fait dans \tilde{S} , on montre que L_0 est constante sur $O(x^*) \times O(x'^{*}) \setminus \Delta$. Si l'un des ensembles $O(x^*)$ ou $O(x'^{*})$ n'est pas borné, on fixe un élément dans l'autre, on choisit alors un élément dans l'ensemble non borné suffisamment éloigné; comme la projection dans \tilde{S} de ces ensembles est bornée, la différence entre les coordonnées paires ou les coordonnées impaires de ces deux éléments sera alors de signe constant strict, la valeur de L_0 sur le couple ainsi formé sera nulle. Ceci contredit le fait que L_0 est une fonction constante non nulle.

Prolongeons le champ de vecteurs $\tilde{p}_0 \circ (\tilde{q}_0 |_{\overline{O(x)}})^{-1}$ en un champ continu sur \mathbb{T}^2 . Puisque l'orbite relevée $O(x^*)$ est bornée, le théorème de Poincaré-Bendixson nous dit que ce champ de vecteurs a une singularité ou une orbite fermée homotope à zéro sur l'adhérence de $\tilde{q}_0(O(x))$, on en déduit la même chose pour $\tilde{\xi}$ sur $\overline{O(x)}$.

On peut maintenant démontrer le théorème.

Démonstration du théorème 4.1. Si $f \in D^1(\mathbb{T}^2)$ n'a pas de point fixe et si $\tilde{\xi}$ est le champ de vecteurs défini plus haut sur un espace de configurations \tilde{S} , par une décomposition en applications déviant la verticale, alors Λ est un bon ensemble. En effet, dans le cas contraire, il existe deux points distincts x_* et x'_* de Λ tels que (x_*, x'_*) n'appartiennent pas à \tilde{W}_0 . D'après la proposition 3.2, deux cas sont alors possibles :

pour $t > 0$ assez grand, $(x_*^t, x'^t_*) \in \tilde{W}_0$ et $\tilde{L}_0(x_*^t, x'^t_*) < 0$,

pour $t < 0$ assez petit, $(x_*^t, x'^t_*) \in \tilde{W}_0$ et $\tilde{L}_0(x_*^t, x'^t_*) > 0$.

Limitons-nous au premier cas et choisissons $(x, x') \in \omega(x_*, x'_*)$. Puisque, par hypothèse, ξ n'a pas de singularité, l'ensemble $O(x) \times O(x') \setminus \Delta$ n'est pas vide, la fonction \tilde{L}_0 est alors strictement négative sur cet ensemble. Or $\overline{O(x)}$ ne peut posséder, ni singularité, ni orbite fermée homotope à zéro puisque f n'a pas de point fixe ; on a donc une contradiction.

Soit maintenant $(f^\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'éléments de $D^1(\mathbb{T}^2)$ dépendant continûment d'un paramètre α dans un espace topologique compact et n'ayant jamais de point fixe. On a construit au paragraphe 1 une décomposition

$$f^\alpha = f_{2n-1}^\alpha \circ f_{2n-2}^\alpha \circ \dots \circ f_0^\alpha,$$

du type étudié dans ce paragraphe, mais où chaque f_i^α dépend continûment, en C^1 -topologie, de α . La famille de champs de vecteurs associée $(\tilde{\xi}^\alpha)_{\alpha \in A}$, définis sur le même espace de configurations, dépend continûment en C^1 -topologie de α . D'après ce que l'on vient de voir, l'ensemble des solutions bornées de $\tilde{\xi}^\alpha$ est un bon ensemble Λ^α . Si R est assez grand, l'ensemble ouvert B_R défini au début du paragraphe, est un bloc isolant pour chaque $\tilde{\xi}^\alpha$, ainsi la famille $(\Lambda^\alpha)_{\alpha \in A}$ est uniformément bornée. On en déduit que $(\Lambda^\alpha)_{\alpha \in A}$ dépend continûment de α pour la topologie de Hausdorff, puis que chaque fonction $\tilde{p}_i \circ (\tilde{q}_i |_{\Lambda^\alpha})^{-1}$ et $\tilde{p}'_i \circ (\tilde{q}'_i |_{\Lambda^\alpha})^{-1}$, $i \in \mathbb{Z}$, dépend continûment en C^0 -topologie de α . Ainsi la famille $(\tilde{\zeta}^\alpha = \tilde{p}_0 \circ (\tilde{q}_0 |_{\Lambda^\alpha})^{-1})_{\alpha \in A}$ vérifie toutes les conclusions du théorème.

5. Etude des ensembles de rotation des difféomorphismes du tore.

Les résultats du paragraphe précédent permettent de retrouver, dans le cas des difféomorphismes, quelques théorèmes sur les ensembles de rotation qui sont vrais plus généralement pour les homéomorphismes du tore, et dans certains cas de les améliorer.

Rappelons deux propriétés simples des nombres de rotation des mesures de probabilités invariantes de F . Soit μ une telle mesure.

- i) Si $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne, et si α et β sont deux réels tels que, pour tout $z \in \mathbb{R}^2$,

$$\psi(T_1(z)) = \psi(z) + \alpha, \quad \psi(T_2(z)) = \psi(z) + \beta,$$

alors $\psi \circ f - \psi$ et $\psi - \alpha p_1 - \beta p_2$ sont en fait des fonctions définies sur \mathbb{T}^2 . Si la seconde appartient à $L^1(\mu)$, il en est de même de la première et

$$\int_{\mathbb{T}^2} \psi \circ f - \psi d\mu = \alpha \rho_1(\mu) + \beta \rho_2(\mu),$$

ceci, parce que

$$\int_{\mathbb{T}^2} (\psi - \alpha p_1 - \beta p_2) \circ f d\mu = \int_{\mathbb{T}^2} \psi - \alpha p_1 - \beta p_2 d\mu.$$

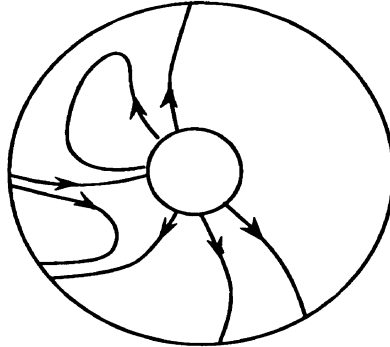
- ii) S'il existe une courbe essentielle C de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ disjointe de son image par l'application $\hat{f} \in \text{Diff}_0(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ relevée par f , et si μ' est la mesure obtenue sur $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ en relevant μ , la mesure de l'anneau, fermé en C , ouvert en $\hat{f}(C)$, défini par ces deux courbes, est égal à $\rho_2(\mu)$ si $\hat{f}(C)$ est au-dessus de C , et à $-\rho_2(\mu)$ si $\hat{f}(C)$ est en-dessous.

L'application, qui à $f \in D^0(\mathbb{T}^2)$ associe l'ensemble de rotation $\mathcal{R}(f)$, est semi-continue supérieurement. Plus précisément, supposons données, pour tout entier n , une application $f_n \in D^0(\mathbb{T}^2)$ et une mesure $\mu \in M(f_n)$ de nombre de rotation ρ_n , telles que les suites $(f_n)_{n \geq 0}$ et $(\rho_n)_{n \geq 0}$ convergent respectivement vers $f \in D^0(\mathbb{T}^2)$ et vers $\rho \in \mathbb{R}$, alors toute valeur d'adhérence μ de $(\mu_n)_{n \geq 0}$ pour la topologie vague appartient à $M(f)$ et a un nombre de rotation égal à ρ . Par contre elle n'est pas continue, comme le montre l'exemple suivant (voir [MZ1]), où f est le temps 1 d'un champ de vecteurs qui n'a que des orbites fermées, à l'exception de deux composantes de Reeb séparées par une orbite fermée. L'ensemble de rotation de f est un segment $[a, b] \times \{0\}$; si on perturbe f en composant par une petite translation verticale vers le bas au voisinage de la courbe de séparation, l'ensemble de rotation se réduit au point $(b, 0)$.

[Voir figure au sommet de la prochaine page.]

Si X est une partie fermée de \mathbb{T}^2 invariante par F , on rappelle que $\mathcal{R}_X(f)$ est l'ensemble des nombres de rotation des mesures invariantes de F à support dans X .

Nous allons donner une démonstration, dans le cas des difféomorphismes, de résultats qui sont vrais plus généralement pour les homéomorphismes. Le premier



résultat est dû à J. Llibre et R. Mac Kay ([LM]) et à J. Franks ([Fr2]) et utilise le théorème de translation de Brouwer, le second à M. Misiurewicz et K. Zieman ([MZ2]) et utilise la théorie des difféomorphismes des surfaces de Thurston.

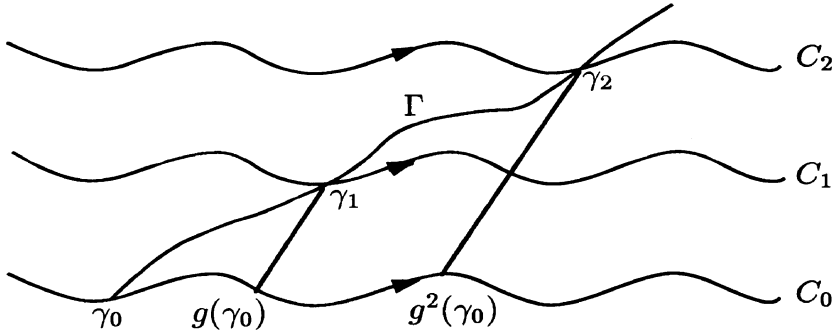
Théorème 5.1. *Soit f un élément de $D^1(\mathbb{T}^2)$ sans point fixe. Alors, $(0, 0)$ n'appartient pas à $\mathcal{R}_e(f)$. De plus, ce point n'appartient pas à l'intérieur de $\mathcal{R}(f)$, et si il est sur la frontière de $\mathcal{R}(f)$, ce n'est pas un point extrémal et son support est à pente rationnelle.*

Théorème 5.2. *Les éléments de $D^1(\mathbb{T}^2)$ dont l'ensemble de rotation est d'intérieur non vide forment une partie ouverte. L'application qui à un élément de celle-ci associe son ensemble de rotation est continue.*

Démonstration du théorème 5.1. Puisque f n'a pas de point fixe, on peut appliquer le théorème 4.1. Le champ de vecteurs $\tilde{\zeta}$ alors défini n'ayant pas de singularité, il est de type rationnel ou irrationnel, précisons ce que cela signifie.

1. Cas irrationnel. C'est le cas où $\tilde{\zeta}$ n'a pas de courbe intégrale fermée. Il existe alors une courbe fermée simple essentielle \tilde{C} transverse à $\tilde{\zeta}$, et le flot est une suspension d'un homéomorphisme \tilde{g} de \tilde{C} de nombre de rotation irrationnel; on note Ω l'ensemble minimal de ce flot.

On oriente \tilde{C} de telle façon que $\tilde{\zeta}$ soit pointé vers la gauche, on considère la translation de revêtement T définie par cette courbe orientée et on choisit une autre translation T' engendrant avec T le groupe fondamental. L'ensemble $\pi^{-1}(\tilde{C})$ est formé de courbes $(C_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ vérifiant $C_{i+1} = T'(C_i)$, et rencontrant chaque courbe intégrale de ζ en un point γ_i (dépendant bien sûr de la courbe); on choisit T' de façon que C_{i+1} soit à gauche de C_i . Il existe alors un relèvement g de \tilde{g} à C_0 tel que $\gamma_i = T'^i(g^i(\gamma_0))$.



On supposera, pour simplifier l'écriture, que T et T' sont les translations canoniques T_1 et T_2 .

Il existe une application continue λ de C_0 dans \mathbb{R} et un nombre irrationnel α tel que

$$\lambda(T_1(z)) = \lambda(z) + 1, \quad \lambda(g(z)) = \lambda(z) + \alpha.$$

On peut prolonger λ de façon continue à \mathbb{R}^2 en considérant, pour tout $z \in \mathbb{R}$, le point d'intersection $\gamma_0(z)$ de C_0 et de la courbe intégrale de ζ passant par z , et en posant $\lambda(z) = \lambda(\gamma_0(z))$. Cette application vérifie

$$\begin{aligned} \lambda(T_1(z)) &= \lambda(\gamma_0(T_1(z))) = \lambda(T_1(\gamma_0(z))) = \lambda(\gamma_0(z)) + 1 = \lambda(z) + 1, \\ \lambda(T_2(z)) &= \lambda(g^{-1}(z)) = \lambda(z) - \alpha. \end{aligned}$$

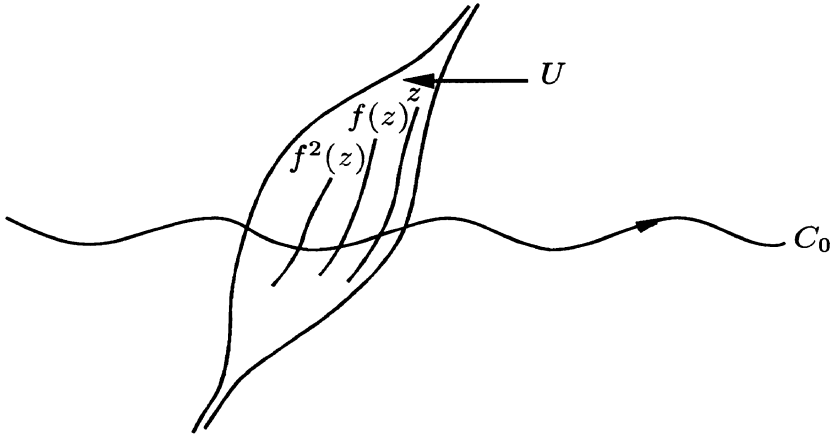
Ainsi $\theta = \lambda \circ f - \lambda$ est une fonction continue sur \mathbb{T}^2 , la propriété du champ de vecteurs ζ décrite par le théorème 4.1 exprime que $\theta(z)$ est toujours positif. De plus, $\theta(z)$ est nul si et seulement si z et $f(z)$ sont dans l'adhérence d'une même composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \pi^{-1}(\Omega)$.

Si μ est une mesure de probabilité invariante, alors

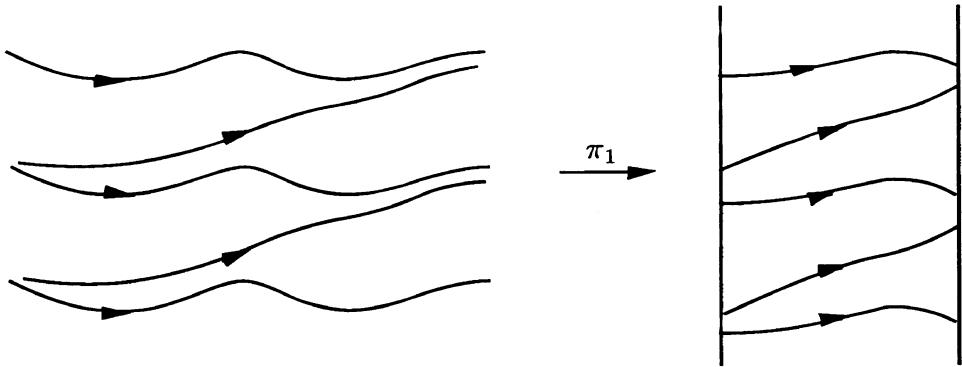
$$\rho_1(\mu) - \alpha \rho_2(\mu) = \int_{\mathbb{T}^2} \theta d\mu \geq 0.$$

Montrons, par l'absurde, que cette intégrale est strictement positive. Si elle est nulle, le support de μ est contenu dans $\theta^{-1}(\{0\})$; il est donc disjoint de Ω puisque tout point z de Ω vérifie $\theta(z) > 0$ ou $\theta(\tilde{f}^{-1}(z)) > 0$. Soit $z \in \pi^{-1}(\text{supp } \mu)$. La suite $(f^k(z))_{k \geq 0}$ reste dans la même composante connexe U de $\mathbb{R}^2 \setminus \pi^{-1}(\Omega)$ puisque la suite $(\theta(f^k(z)))_{k \geq 0}$ est constamment nulle; de plus, cette composante se projette homéomorphiquement sur son image dans le tore, et l'image d'un point qui tend vers l'infini se rapproche de Ω . Puisque le support de μ est à une distance strictement positive de Ω , on en déduit que la suite $(f^k(z))_{k \geq 0}$ est bornée. On peut donc minorer la distance entre $\gamma_0(f^k(z))$ et $\gamma_0(f^{k+1}(z))$ par un nombre strictement positif indépendant de k ; ceci est clairement impossible.

L'ensemble de rotation est donc contenu dans le demi-plan d'équation $x - \alpha y > 0$.



2. Cas rationnel. C'est le cas où il y a des orbites fermées, qui sont toutes, au signe près, dans la même classe d'homotopie. La réunion de celles-ci est un ensemble fermé X , et chaque composante du complémentaire est un anneau délimité par des orbites périodiques, orientées dans le même sens ou dans le sens contraire; dans ce cas, on a une composante de Reeb, celles-ci sont en nombre fini. Là encore, pour simplifier l'écriture, on supposera que les orbites fermées sont homotopes à $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ et on notera \hat{f} le difféomorphisme de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ relevé par f .

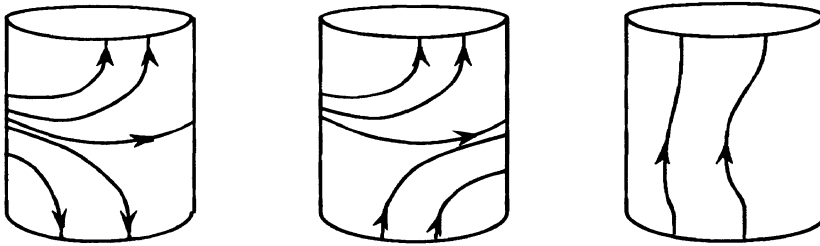


Chaque orbite périodique du champ $\hat{\zeta}$ alors défini sur $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ est envoyé au-dessus ou en-dessous d'elle-même par \hat{f} . Si V est une composante connexe de $\mathbb{T}^2 \setminus X$ et si \hat{V} est une composante connexe de $\pi_2^{-1}(V) \subset \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, l'ensemble maximal invariant $\Xi_{\hat{V}} = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}^k(\hat{V})$ contenu dans \hat{V} est compact. La projection $\Xi_V = \pi_1(\Xi_{\hat{V}})$ est indépendante de \hat{V} , c'est un ensemble qui est non vide pour un nombre fini de composantes V , en particulier pour les composantes de Reeb qui

sont des ouverts attractifs ou répulsifs, ceci car les distances entre les orbites fermées de $\tilde{\zeta}$ et leurs images sont minorées par un nombre strictement positif.

Lemme. Si Ξ_V est non vide, l'ensemble $\mathcal{R}_{\Xi_V}(f)$ est situé sur $\mathbb{R} \times \{0\}$, à droite ou à gauche strictement de $(0, 0)$.

Démonstration. Seule la deuxième assertion n'est pas triviale. Notons $\tilde{\zeta}'$ le champ de vecteurs obtenu à partir de $\tilde{\zeta}$ par une rotation d'angle $+\pi/2$. Soit il possède une orbite périodique essentielle \tilde{C}' dans V (c'est le cas, par exemple, pour une composante de Reeb), soit il définit un feuilletage vertical de V .



Dans le premier cas, on choisit un homéomorphisme $\tilde{\lambda} : \tilde{C}' \rightarrow \mathbb{T}^1$ préservant l'orientation, où l'orientation de \tilde{C}' est déterminée par T_1 . La courbe intégrale de ζ passant par un point z de V coupe \tilde{C}' en un unique point $\gamma(z)$. On peut donc prolonger $\tilde{\lambda}$ par continuité sur V , en posant $\tilde{\lambda}(z) = \tilde{\lambda}(\gamma(z))$, puis prolonger $\tilde{\lambda}$ en une fonction mesurable de \mathbb{T}^2 dans \mathbb{T}^1 en posant $\tilde{\lambda}(z) = p_1(z)$ si $z \notin V$. Cette application se relève en une application mesurable $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\lambda(T_1(z)) = \lambda(z) + 1, \quad \lambda(T_2(z)) = \lambda(z).$$

Le théorème 4.1 exprime que $\lambda \circ f - \lambda$ garde un signe constant strictement positif ou strictement négatif sur Ξ_V et donc que $\rho_1(\mu)$ est toujours strictement positif, ou alors toujours strictement négatif, quand μ est une mesure à support dans Ξ_V .

Dans le second cas, on choisit un morceau \tilde{C}' de courbe intégrale de $\tilde{\zeta}'$ contenu dans V et joignant les deux bords. Il existe alors un homéomorphisme ψ de \tilde{C}' sans point fixe tel que la courbe intégrale de $\tilde{\zeta}$ passant par $z \in V$ coupe \tilde{C}' en un ensemble de points z'_i , $i \in \mathbb{Z}$, tels que $z'_{i+1} = \psi(z_i)$. On a ainsi une application continue naturelle de V dans l'ensemble quotient \tilde{C}'/ψ qui est homéomorphe à \mathbb{T}^1 .

En choisissant une bonne orientation sur \tilde{C}'/ψ , puis un homéomorphisme $\lambda : \tilde{C}'/\psi \rightarrow \mathbb{T}^1$ préservant l'orientation, on peut refaire le raisonnement précédent.

Fin de la démonstration du théorème. Supposons d'abord que $\tilde{\zeta}$ ait une composante de Reeb. Chaque orbite périodique de $\tilde{\zeta}$ délimite avec son image un anneau errant pour F . Ainsi les supports des mesures ergodiques sont contenus dans les ensembles Ξ_V . Dans ce cas, l'ensemble de rotation est contenu dans $\mathbb{R} \times \{0\}$ et l'ensemble $\mathcal{R}_e(f)$ est à une distance strictement positive de $(0, 0)$.

Si, par contre, f n'a pas de composante de Reeb, toutes les orbites fermées de $\hat{\zeta}$ sont envoyées du même côté par \hat{f} . Si μ est une mesure ergodique dont le support n'est pas dans un ensemble Ξ_V , la mesure $\hat{\mu}$ doit charger l'anneau délimité par une orbite périodique C de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ correspondant à un bord de V , et son image par \hat{f} , et donc $\rho_2(\mu) > 0$, ou $\rho_2(\mu) < 0$ suivant la situation de $\hat{f}(C)$ par rapport à C .

L'ensemble de rotation appartient dans chacun des trois cas à un demi-plan fermé, défini par une droite passant par $(0, 0)$, et dans le cas irrationnel, à un demi-plan ouvert. L'origine n'appartient jamais à l'ensemble des mesures ergodiques $\mathcal{R}_e(f)$, ni à l'intérieur de $\mathcal{R}(f)$. Si elle appartient à $\mathcal{R}(f)$, on est dans le cas rationnel, ce n'est pas un point extrémal et sa droite d'appui est la droite passant par $(0, 0)$ et définie par la classe d'homotopie des orbites fermées.

On peut également montrer ce qui suit.

Proposition 5.1. *Soit f un élément de $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ sans point fixe et \hat{f} le difféomorphisme de $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ relevé par f . Il existe une famille finie, éventuellement vide, de courbes essentielles de $\mathbb{T}^1 \times]0, 1[$, disjointes deux à deux, ne rencontrant pas leur image par \hat{f} , et telles que l'ensemble maximal invariant contenu entre deux courbes consécutives ne soit pas vide et ait son ensemble de rotation, strictement à droite ou strictement à gauche de 0.*

Démonstration. On peut facilement prolonger f à \mathbb{R}^2 de telle façon qu'il relève un difféomorphisme F de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{T}^2$ isotope à l'identité, et cela sans ajouter de points fixes. On note également \hat{f} le difféomorphisme de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ relevé par f .

L'ensemble de rotation de f est contenu dans $\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \{0\}$. S'il est à gauche ou à droite de 0, le théorème est vrai avec la famille vide. Sinon, le champ de vecteurs $\tilde{\zeta}$ construit par le théorème 4.1 sur le tore est de type rationnel et les orbites fermées homotopes à $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$.

On reprend les notations de la démonstration précédente. L'ensemble des courbes intégrales fermées est fermé pour la topologie de Hausdorff; de plus, pour des raisons de compacité et de périodicité, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que tout point de l'image d'une courbe intégrale fermée C soit à une distance au moins ε de C . On en déduit qu'il n'existe qu'un nombre fini de composantes annulaires \hat{V} , contenues dans une partie bornée donnée, telles que $\Xi_{\hat{V}}$ ne soit pas vide. En particulier, il n'y

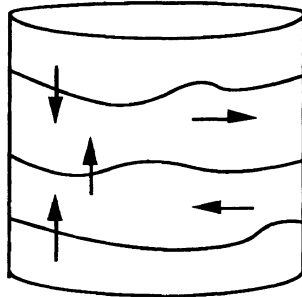
a qu'un nombre fini de composantes \widehat{V} qui rencontre $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ et telles que $\Xi_{\widehat{V}}$ ne soit pas vide. Ainsi le théorème est vrai si aucune des orbites fermées \widehat{C} de $\widehat{\zeta}$ ne rencontrent les bords de $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$, et, plus généralement, il est vrai si, pour toute composante \widehat{V} qui rencontre un bord de $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$, telle que $\mathcal{R}_{\Xi_{\widehat{V}}}(f)$ ne soit pas vide, cet ensemble est du même côté de 0 que le nombre de rotation induit par f sur ce bord.

Si cela n'est pas vrai, il n'existe aucun point de ce bord dans $\Xi_{\widehat{V}}$, et par conséquent, pour tout point z , il existe deux entiers $k_1 \leq 0 \leq k_2$ tels que $f^{k_1}(z)$ et $f^{k_2}(z)$ ne soient pas dans \widehat{V} . La seule situation possible est la suivante : la bord de l'anneau rencontre les deux bords de \widehat{V} et celle-ci n'est pas une composante de Reeb. Plusieurs cas se présentent qui sont tous équivalents, nous allons étudier le cas où le bord est le bord supérieur de l'anneau $\widehat{C}_1 = \mathbb{T}^1 \times \{1\}$, où les deux bords de \widehat{V} sont envoyés vers le haut, et où $\Xi_{\widehat{V}}$ rencontre $U(\widehat{C}_1)$, nous notons \widehat{C} le bord inférieur de \widehat{V} .

Puisque \widehat{C}_1 et \widehat{C} se rencontrent, le premier étant invariant et le second envoyé au-dessus, les ensembles $V(\widehat{C}^1)$ et $U(\widehat{C})$ s'intersectent et, par conséquent, l'adhérence de $U(\widehat{C}^1) \cap V(\widehat{C})$ ne sépare pas l'anneau. Ainsi, les composantes connexes de ce dernier ensemble ont un diamètre uniformément borné quand on les relève à \mathbb{R}^2 . Soit W une telle composante connexe qui rencontre $\Xi_{\widehat{V}}$. La suite $(\widehat{f}^k(W^k))_{k \geq 0}$ est formée d'ouverts connexes contenus dans $U(\widehat{C}^1) \cap V(\widehat{C})$, la suite des diamètres est donc uniformément bornée dans le revêtement universel. Or l'adhérence de W rencontre \widehat{C}_1 , on en déduit qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \pi_1^{-1}(W)$ et pour tout $k \geq 0$,

$$-M < p_1(f^k(z)) - p_1(z) - k\rho_1 < M \quad ,$$

et donc que ρ_1 appartient à $R_{\Xi_{\widehat{V}}}$.



On en déduit le corollaire suivant qui est déjà une conséquence de [Hd3], et même plus précisément une conséquence de [Fr2].

Corollaire. *Si f est un élément de $D^1(\mathbb{T}^1 \times [0, 1])$ sans point fixe, il existe $\varepsilon > 0$ tel que f n'a pas de point de type (p, q) , si $|p/q| < \varepsilon$.*

Montrons maintenant le théorème 5.2 . Grâce à la semi-continuité supérieure de l'application $f \mapsto \mathcal{R}(f)$, à la convexité des ensembles de rotation et à la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il suffit de montrer la proposition suivante.

Proposition 5.2. *Soit $f \in D^1(\mathbb{T}^2)$ et ρ un point de l'intérieur de $\mathcal{R}(f)$ à coordonnées rationnelles. Alors, si $f' \in D^1(\mathbb{T}^2)$ est suffisamment proche de f , le point ρ appartient également à $\mathcal{R}(f')$.*

Démonstration. Quitte à remplacer f par $T_1^{p_1} \circ T_2^{p_2} \circ f^q$ où p_1, p_2, q sont des entiers, on peut toujours supposer que ρ est nul. On va raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe une suite $(f^{(k)})_{k \geq 0}$ d'éléments de $D^1(\mathbb{T}^2)$ sans point fixe convergeant vers f . L'ensemble formé des termes de la suite $(f^{(k)})_{k \geq 0}$ et de f est compact, on peut donc trouver une décomposition de f en produit d'applications déviant la verticale $f = f_{2n-1} \circ f_{2n-2} \circ \dots \circ f_0$ et, pour tout $k \geq 0$, une décomposition du même type $f^{(k)} = f_{2n-1}^{(k)} \circ f_{2n-2}^{(k)} \circ \dots \circ f_0^{(k)}$, où la suite $(f_i^{(k)})_{k \geq 0}$ converge vers f_i , pour tout $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$.

Le paragraphe 4 permet de définir une suite de champs de vecteurs $(\tilde{\xi}^{(k)})_{k \geq 0}$ sur le même ensemble de configurations \tilde{S} , convergeant en C^1 -topologie vers le champ $\tilde{\xi}$ défini pour f . De plus, on peut trouver un bloc isolant B_R suffisamment grand pour contenir chacun des ensembles $\Lambda^{(k)}$ formé des orbites bornées de $\tilde{\xi}^{(k)}$. En particulier, la suite $(\Lambda^{(k)})_{k \geq 0}$ est bornée et on peut supposer qu'elle converge vers un ensemble fermé borné Λ' de S , invariant par le flot induit par $\tilde{\xi}$.

Puisque $f^{(k)}$ n'a pas de point fixe, chaque $\Lambda^{(k)}$ est un bon ensemble. Montrons qu'il en est de même de Λ' . Si x et x' sont deux points distincts de Λ' , et si $(x, x') \notin \tilde{W}_0$, il existe $t > 0$ tel que

$$(x^{-t}, x'^{-t}) \in \tilde{W}_0, \quad (x^t, x'^t) \in \tilde{W}_0, \quad \tilde{L}_0(x^t, x'^t) < \tilde{L}_0(x^{-t}, x'^{-t}).$$

On peut approximer x et x' par deux points x^* et x'^* distincts de $\Lambda^{(k)}$, si k est assez grand, et obtenir une relation analogue avec x^* , x'^* et le flot défini par $\tilde{\xi}^{(k)}$. Ceci contredit le fait que $\Lambda^{(k)}$ soit un bon ensemble.

On peut donc définir des champs de vecteurs $\tilde{\zeta}_i = \tilde{p}_i \circ (\tilde{q}_i |_{\Lambda'})^{-1}$ et $\tilde{\zeta}'_i = \tilde{p}'_i \circ (\tilde{q}'_i |_{\Lambda'})^{-1}$ sur \mathbb{T}^2 . Ce sont les limites, pour la C^0 -topologie, des champs de vecteurs $\zeta_i^{(k)}$ et $\zeta'_i{}^{(k)}$ définis au paragraphe 4.

Comme on l'a vu précédemment, au champ de vecteurs $\tilde{\zeta}_0^{(k)}$ est associé une droite orientée $\Delta^{(k)}$ passant par $(0, 0)$ (dans le cas rationnel avec composantes de Reeb, la droite n'est pas orientée, on choisit une orientation arbitraire), et l'ensemble de rotation $\mathcal{R}(f^{(k)})$ est à gauche de cette droite. On peut toujours supposer que la suite $(\Delta^{(k)})_{k \geq 0}$ converge vers une droite orientée Δ' . L'un des points $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ ou $(0, -1)$ est strictement à droite de Δ' ; on supposera que c'est le premier et qu'il est strictement à droite de tous les $\Delta^{(k)}$.

Puisque $(0, 0)$ est contenu dans l'intérieur de $\mathcal{R}(f)$, on peut trouver, d'après le théorème 5.1, un entier $m > 0$ et un point $z_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $f^m(z_0) = z_0 + (1, 0)$. Il existe un unique point $x \in \Pi^{-1}(\Lambda')$ tel que $q_0(x) = z_0$. Puisque z_0 n'est pas fixe, x n'est pas une singularité de ζ , c'est un élément de W_1 et l'un des nombres $\xi_0(x)$ ou $\xi_1(x)$ n'est pas nul. On supposera d'abord que c'est le second.

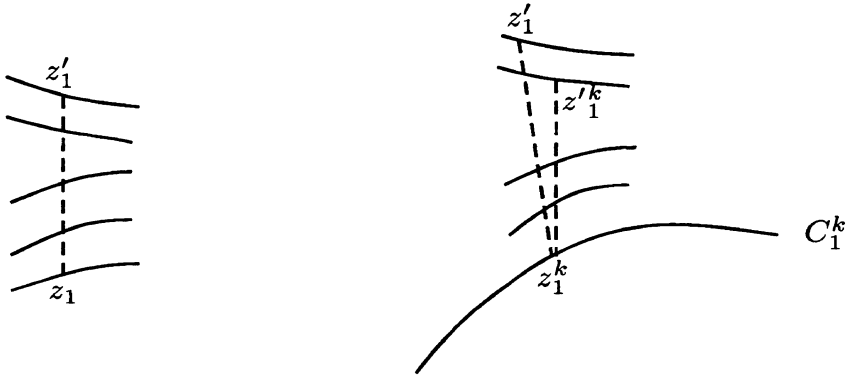
Définissons $z_i = q_i(x)$ et $z'_i = q'_i(x)$, pour tout entier i . Puisque $\xi_1(x)$ est non nul et puisque Λ' est un bon ensemble, le segment $[z_1, z'_1]$ n'est pas trivial et est transverse au champ de vecteurs ζ_1 , relevé de $\tilde{\zeta}_1$ à \mathbb{R}^2 . Définissons maintenant, pour tout entier $k \geq 0$, le point $x^{(k)}$ de $\Pi^{-1}(\Lambda^k)$ tel que $q_0(x^{(k)}) = z_0$ et posons $z_i^{(k)} = q_i(x^{(k)})$, $z'_i = q'_i(x^{(k)})$, pour tout entier i . Si $C_i^{(k)}$ est la courbe intégrale de $\zeta_i^{(k)}$ passant par $z_i^{(k)}$, alors $f^i(C_i^{(k)})$ est à gauche de $C_{i+1}^{(k)}$ d'après le paragraphe 4.

Les suites $(z_i^{(k)})_{k \geq 0}$ et $(z'_i{}^{(k)})_{k \geq 0}$ convergent respectivement vers z_i et z'_i . Ainsi dès que k est grand, $z_1^{(k)}$ et $z'_1{}^{(k)}$ sont distincts et le segment $[z_1^{(k)}, z'_1{}^{(k)}]$ est transverse à $\zeta_1^{(k)}$. De façon plus précise, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si k est assez grand, tout point z' qui est à une distance au plus ε de $z'_1 = z'_1{}^{(k)} = f_0(z_0)$ peut être joint à $z_1^{(k)}$ par un chemin γ transverse à ζ_1^k et se trouve donc à gauche de $C_1^{(k)}$.

[Voir figure au sommet de la prochaine page.]

Puisque $f^m(z_0) = T_1(z_0)$, le point

$$\begin{aligned} z' &= f_1^{-1} \circ \dots \circ f_{2n-2} \circ (f_{2n-1}^{(k)})^{-1} \circ (f^{(k)})^{-m+1}(T_1(z_0)) \\ &= f_0 \circ (f^{(k)})^{-m}(f^m(z_0)) \end{aligned}$$



est proche de $z_1' = f_0(z_0)$, si k est grand, ainsi il est à gauche de $C_1^{(k)}$. On en déduit que

$$T_1(z_0) = (f^{(k)})^{m-1} \circ f_{2n-1}^{(k)} \circ f_{2n-2} \circ \dots \circ f_1(z')$$

est à gauche strictement de C_0^k . Or $(1, 0)$ étant à droite de Δ^k , ceci n'est possible que dans un cas : $\tilde{\zeta}_0^{(k)}$ a une composante de Reeb et $x^{(k)}$ appartient à une orbite fermée de $\tilde{\xi}^{(k)}$ dont la projection $C_0^{(k)}$ définit l'orientation opposée à $\Delta^{(k)}$.

Mais dans ce cas, le chemin qui joint z_1' à $z_1^{(k)}$ et qui est transverse à $\xi_1^{(k)}$, ne traverse aucune composante de Reeb de $\tilde{\zeta}_1^{(k)}$; il existe donc une courbe intégrale $C_1'^{(k)}$ entre $C_1^{(k)}$ et $T_1(C_1^{(k)})$ correspondant à une orbite fermée de $\tilde{\zeta}_1^{(k)}$ définissant l'orientation de Δ_k . Le point z' est donc à gauche de $C_1'^{(k)}$. Ainsi $T_1(z_0) = (f^{(k)})^{m-1} \circ f_{2n-1}^{(k)} \circ \dots \circ f_1(z')$ est à gauche de la courbe $C_1'^{(k)}$ correspondant à la même orbite périodique de $\tilde{\xi}^{(k)}$ que $C_1^{(k)}$, et donc finalement à droite strictement de $T_1(C_0)$, on a encore une contradiction.

Dans le cas où c'est le vecteur ξ_0 qui est non nul, on peut faire le même raisonnement en utilisant l'égalité $f^{-m}(z_0) = T_1^{-1}(z_0)$.

6. Orbites périodiques des difféomorphismes du tore.

Nous avons montré l'existence d'orbites périodiques non enlacées, sous les hypothèses du théorème de Poincaré-Birkhoff appliqué à une itérée d'une application de l'anneau. Nous allons montrer de même l'existence d'orbites périodiques non enlacées, sous les hypothèses du théorème de Conley-Zehnder. Nous verrons également comment retrouver la première partie du théorème de Boyland, et même sa généralisation au cas des difféomorphismes du tore.

Soit f un élément de $D^0(\mathbb{T}^2)$ et z un point de type (p_1, p_2, q) , où $p_1 \in \mathbb{Z}$, $p_2 \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux. S'il existe une isotopie $(f_t)_{t \in [0,1]}$ joignant f à $f_* : (x, y) \mapsto (x + p_1/q, y + p_2/q)$ et un chemin $(z_t)_{t \in [0,1]}$ dans \mathbb{R}^2 , tel que z_t soit un point de type (p_1, p_2, q) de f^t , nous dirons que z est un point de type (p_1, p_2, q) non enlacé, nous dirons de même que l'orbite $O(z)$ de l'homéomorphisme du tore F relevé est non enlacée. Si $(f^t)_{t \in [0,1]}$ est une isotopie joignant l'identité à f et $(F^t)_{t \in [0,1]}$ l'isotopie correspondante dans $\text{Diff}_0^0(\mathbb{T}^2)$, alors la courbe simple

$$\Gamma = \{(F^t(z^*), t), z^* \in O(z), t \in [0, 1]\}$$

de $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]/(z^*, 0) \sim (z^*, 1) \simeq \mathbb{T}^3$ est isotope à la courbe

$$\Gamma^* = \{(t \frac{p_0}{q} + \mathbb{Z}, t \frac{p_1}{q} + \mathbb{Z}, t - [t]), t \in [0, q]\} .$$

Théorème 6.1. Soit $p_1 \in \mathbb{Z}$, $p_2 \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ trois entiers premiers entre eux :

- i) si $f \in D^1(\mathbb{T}^2)$ préserve la mesure de Lebesgue μ et si $\int_{\mathbb{T}^2} f^q \circ T_1^{-p_1} \circ T_2^{-p_2} d\mu = 0$, alors f a au moins trois orbites de type (p_1, p_2, q) non enlacées ;
- ii) si $f \in D^1(\mathbb{T}^2)$ a une orbite de type (p_1, p_2, q) , alors f a une orbite de type (p_1, p_2, q) non enlacée.

Démonstration. On considère une décomposition $f = f_{2n-1} \circ \dots \circ f_0$ donnée par le paragraphe 1. On définit ensuite, sur l'espace de configurations

$$S = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_{i+2nq} = x_i + a_i\} ,$$

où

$$a_i = p_1 \text{ si } i \text{ est pair, } a_i = p_1 + p_2 \text{ si } i \text{ est impair,}$$

le champ de vecteurs $\xi : x \mapsto (\xi_i(x))_{i \in \mathbb{Z}}$, défini par :

$$\xi_i(x) = -g_i(x_i, x_{i+1}) + g'_{i-1}(x_{i-1}, x_i) .$$

Ce champ de vecteurs est invariant par les trois applications suivantes, qui commutent deux à deux :

$$\tau_P : S \rightarrow S , (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \rightarrow \left(x_i + \frac{1}{2}(1 + (-1)^i) \right)_{i \in \mathbb{Z}} ,$$

$$\tau_I : S \rightarrow S , (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \rightarrow \left(x_i + \frac{1}{2}(1 + (-1)^{i+1}) \right)_{i \in \mathbb{Z}} ,$$

$$\varphi : S \rightarrow S , (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \rightarrow (x_{i+2n})_{i \in \mathbb{Z}} .$$

On peut définir un champ de vecteurs $\tilde{\xi}$ sur

$$\tilde{S} = S / \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \approx \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^{2nq-2} ,$$

vérifiant $\tilde{\xi} \circ \Pi = \xi$, où $\Pi : S \rightarrow \tilde{S}$ est la projection naturelle, et une application $\tilde{\varphi} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ vérifiant $\tilde{\varphi} \circ \Pi = \varphi$ et laissant invariant $\tilde{\xi}$.

On peut écrire $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}^* + \tilde{\beta}$ où $\tilde{\beta}$ est un champ de vecteurs borné et où $\tilde{\xi}^*$ est le champ de vecteurs associé à la suite $(f_i^*)_{i \in \mathbb{Z}}$ définie comme suit

$$\begin{cases} f_i^* : (x, y) \mapsto (x + y, y) & \text{si } i \text{ est pair} , \\ f_i^* : (x, y) \mapsto (x - y + \frac{p_0}{nq}, y + \frac{p_1}{q}) & \text{si } i \text{ est impair} . \end{cases}$$

C'est un champ de gradient, relèvement du champ de vecteurs linéaire ξ défini par :

$$\xi_i^*(x) = (-1)^i \left(x_{i-1} - x_{i+1} + \frac{a_{i-1}}{nq} \right) ,$$

qui est le gradient de la fonction

$$H : S \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{j=0}^{nq-1} \left(x_{2nq-1} - x_{2j+1} + j \frac{p_1 + p_2}{nq} \right) \left(x_{2j} - x_{2j+2} + \frac{p_1}{nq} \right) ,$$

et celle-ci commute avec τ_P et τ_I .

On peut alors écrire $\tilde{S} = \Lambda^* \oplus S^- \oplus S^+$, où

$$\Lambda^* = \{x \in S \mid x_{i+2} - x_i = a_i/nq\} / \langle \tau_P, \tau_I \rangle$$

est l'ensemble normalement hyperbolique formé des singularités de $\tilde{\xi}^*$. On sait que l'ensemble Λ des solutions bornées de $\tilde{\xi}$ est compact et que c'est le plus grand ensemble invariant contenu dans le bloc isolant

$$B_R = \{x \in \tilde{S} \mid \sup(\|x^+\|, \|x^-\|) < R\}$$

quand R est grand, où x^- et x^+ sont les composantes dans S^- et S^+ d'un point x de S .

On peut définir, comme dans le paragraphe 4, une fonction \tilde{L}_0 continue à valeurs entières sur la partie ouverte

$$\tilde{W}_0 = \Pi_2(W'_0) = \{(x, x') \in \tilde{S} \times \tilde{S} \mid \Pi^{-1}(\{x\}) \times \Pi^{-1}(\{x'\}) \subset W_0\}$$

où

$$W'_0 = \{(x, x') \in S \mid \forall (i, k, k') \in \mathbb{Z}^3, \\ x_i - x'_i = k \Rightarrow (x_{i-1} - x'_{i-1} - k')(x_{i+1} - x'_{i+1} - k') > 0\}$$

et

$$\Pi_2 : S \times S \rightarrow \tilde{S} \times \tilde{S}, \quad (x, y) \mapsto (\Pi(x), \Pi(y)),$$

puis une fonction \tilde{L}_2 sur

$$\tilde{W}_2 = \{x \in \tilde{S} \mid (x, \tilde{\varphi}^k(x)) \in \tilde{W}_0, \text{ si } k \in \{1, \dots, q-1\}\},$$

qui à x associe $\sum_{1 \leq k \leq q-1} \tilde{L}_0(x, \tilde{\varphi}^k(x))$.

Puisque p_1 , p_2 et q sont premiers entre eux, les $\tilde{\varphi}^k(x)$, $1 \leq k \leq n-1$, sont tous distincts et on a donc le résultat suivant.

Proposition 6.1. *Si $x \notin \tilde{W}_2$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, \varepsilon[$,*

$$x^{-t} \in \tilde{W}_2, \quad x^t \in \tilde{W}_2 \text{ et } \tilde{L}_2(x^t) < \tilde{L}_2(x^{-t}) ;$$

en particulier x^{-t} et x^t appartiennent à des composantes distinctes de \tilde{W}_2 .

L'ensemble Λ^* , qui est connexe et formé de singularités de $\tilde{\xi}^*$, se trouve donc dans une composante connexe de \tilde{W}_2 d'après la proposition précédente, on la note \tilde{W}_2^* .

Pour R suffisamment grand, l'ensemble $B_R \cap \tilde{W}_2^*$ est un bloc isolant de $\tilde{\xi}$, et même plus précisément de tous les champs de vecteurs $t\tilde{\lambda} + (1-t)\tilde{\xi}$, quand t décrit $[0, 1]$. De plus, les points rentrants, sortants et tangents extérieurement sont les mêmes pour chacun de ces champs de vecteurs. On en déduit que l'ensemble maximal invariant Λ' de $\tilde{\xi}$ contenu dans $B_R \cap \tilde{W}_2^*$ a même indice de Conley que Λ^* , que l'application $r^* : H^*(\Lambda^*) \rightarrow H^*(\Lambda')$ induite sur les groupes de cohomologie par la projection r sur Λ^* est injective, que la projection de Λ' sur Λ^* est surjective, et finalement que la "cup-length" de Λ' est supérieure ou égale à deux, comme c'était le cas pour $\tilde{\Lambda}$.

Une démonstration analogue à celle du lemme 2 de la proposition 3.6 nous donne le résultat suivant.

Proposition 6.2. *Si x est un point critique de $\tilde{\xi}$ qui appartient à \tilde{W}_2^* , il existe $2n$ isotopies $(f_i^t)_{t \in [0,1]}$ dans $DV(\mathbb{R}^2)$ formées de relèvements de difféomorphismes du tore, joignant f_i à f_i^* et un chemin $(x^t)_{t \in [0,1]}$ partant de x et tel que x_t soit une singularité du champ de vecteur $\tilde{\xi}^t$ associé à la suite $(f_i^t)_{t \in [0,1]}$.*

Si f vérifie les hypothèses de i), alors le champ $\tilde{\xi}$ est un champ de gradient qui commute avec φ , ainsi il a au moins trois singularités dans Λ' qui correspondent à des orbites distinctes; ces orbites sont non enlacées, d'après la proposition qui précède.

Montrons la condition ii) du théorème 6.1 maintenant. Si Λ' possède une singularité, le problème est terminé. On supposera dorénavant qu'il n'y a pas de singularité sur cet ensemble.

Si Λ' était un bon ensemble, on pourrait trouver un champ de vecteurs $\tilde{\zeta}$ sur \mathbb{T}^2 vérifiant les conditions du théorème 4.1. pour l'application $f^q \circ T_1^{-p_1} \circ T_2^{-p_2}$. Comme f a par hypothèse un point de type (p_1, p_2, q) , ce n'est pas le cas, ainsi Λ' n'est pas un bon ensemble et il existe deux points x^* et x'^* de Λ' distincts, tels que (x^*, x'^*) ne soit pas dans \tilde{W}_0 . On a vu au paragraphe trois qu'il existait alors un bon ensemble formé d'une orbite fermée Γ homotope à zéro dans $\alpha(x^*)$ ou dans $\omega(x^*)$.

Posons $\tilde{C}_i = \tilde{q}_i(\Gamma)$, on sait que \tilde{C}_0 délimite un ouvert simplement connexe attractif ou répulsif et contenant un point $z' = \tilde{q}_0(x')$, où $x' \in \Lambda$ est une singularité de $\tilde{\xi}$. On va montrer que l'orbite de type (p_1, p_2, q) associée est non enlacée.

On montre facilement que les ensembles

$$X = \cup_{0 \leq i \leq q-1} \varphi^i(\Gamma) , \quad X' = \cup_{0 \leq i \leq q-1} \{x'_i\} \text{ et } X \cup X' ,$$

sont également des bons ensembles. La raison étant que $X^* \times X'^*$ est formé de points récurrents pour le flot produit, si X^* et X'^* sont choisis parmi les ensembles $\varphi^i(\Gamma)$ et $\{x'_i\}$. De plus, les orbites $\varphi^i(\Gamma)$, $0 \leq i \leq q - 1$, sont distinctes car p_1 , p_2 et q sont premiers entre-eux.

La projection $\tilde{q}_i(X \cup X')$ est formée des q courbes \tilde{C}_{i+2kn} , $k \in \{0, \dots, q-1\}$, qui sont disjointes deux à deux, et des points $F^k(z')$, $k \in \{0, \dots, q - 1\}$.

Lemme. *Pour tout entier i , il existe une famille $(h_i^t)_{t \in [0,1]}$ d'homéomorphismes de \mathbb{R}^2 , laissant fixe chaque verticale, commutant avec T_1 et T_2 , et dépendant continûment de t telles que :*

- i) $h_i^t = h_j^t$, si $i - j \in 2n\mathbb{Z}$,
- ii) $h_i^0 = \text{Id}$,

- ii) $h_i^1(q'_i(x)) = q_i(x)$, pour tout $x \in \Pi^{-1}(X)$,
- iii) $h_i^t(z) = z$, pour tout $z \in q_i(\Pi^{-1}(X'))$.

Démonstration. Pour tout $x \in \Pi^{-1}(X)$, et pour tout $\varepsilon > 0$, on définit le segment $I_i(x)$ joignant $q_i(x)$ à $q'_i(x)$, et le segment $I_i^\varepsilon(x)$ de même milieu et dont la longueur est $1 + \varepsilon$ fois celle de $I_i(x)$. Dans le corollaire 2 du paragraphe 4, on a vu que les segments $I_i(x)$ et $I_i(x')$ étaient disjoints si x et x' étaient distincts. Si ε est petit, $I_i^\varepsilon(x)$ et $I_i^\varepsilon(x')$ sont également disjoints si x est différent de x' . En effet, si cette assertion était fautive, on pourrait trouver deux suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(x'_n)_{n \geq 0}$ telles que $I_i^{1/n}(x_n)$ et $I_i^{1/n}(x'_n)$ se rencontrent. On peut supposer que nos suites convergent, elles ont alors la même limite x , et on a $\xi_i(x) = 0$. On note $q_i(x^t) = y^t$ et $q'_i(x^t) = y'^t$. On peut écrire $x_n = x^{t_n}$ et $x'_n = x^{t'_n}$, où $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(t'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tendent vers 0. Il existe alors t''_n entre t_n et t'_n tel que $\xi_i(x^{t''_n}) = 0$, et donc tel que $y^{t''_n} = y'^{t''_n}$ (dans le cas le plus simple t''_n est égal à 0, mais on peut imaginer des situations plus compliquées). Puisque $x \in W_1$, les vecteurs $p_i(x) = (0, \alpha)$ et $p'_i(x) = (0, \beta)$ ne sont pas nuls et ont même signe (ils sont même égaux dans les cas compliqués). On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} y_i^{t_n} - y_i^{t''_n} &= \alpha(t_n - t''_n) + o(t_n - t''_n) \quad , \\ y_i^{t'_n} - y_i^{t''_n} &= \beta(t_n - t''_n) + o(t_n - t''_n) \quad , \\ y_i^{t'_n} - y_i^{t_n} &= \alpha(t'_n - t''_n) + o(t'_n - t''_n) \quad , \\ y_i^{t'_n} - y_i^{t''_n} &= \beta(t'_n - t''_n) + o(t'_n - t''_n) \quad . \end{aligned}$$

Ceci implique que la somme des longueurs des intervalles $I_i(x'_n)$ et $I_i(x_n)$ est majorée par une expression de la forme $|\alpha - \beta| |t_n - t'_n| + o(t_n - t'_n)$, alors que la distance entre les intervalles est minorée par une quantité équivalente à $\inf(|\alpha|, |\beta|) |t_n - t'_n|$, et ceci contredit le fait que $I_i^{1/n}(x_n)$ et $I_i^{1/n}(x'_n)$ se rencontrent, pour tout entier n .

[Voir figure au sommet de la prochaine page.]

Si ε est assez petit, chaque $I_i^\varepsilon(x)$, $x \in \Pi^{-1}(X)$ est disjoint de $\Pi^{-1}(X')$. Il n'y a aucune difficulté à construire, pour tout i , une famille $(h_i^t)_{t \in [0,1]}$ vérifiant les conditions du lemme et étant égale à l'identité en dehors des $I^\varepsilon(x)$, on peut même donner une formule explicite et obtenir des difféomorphismes en dehors des points $q_i(x)$ correspondant aux points x où ξ_i s'annule.

Considérons l'isotopie dans $D^0(\mathbb{T}^2)$ définie par

$$f^t = h_{2n-1}^t \circ f_{2n-1} \circ \dots \circ h_0^t \circ f_0 \quad .$$



Tout point $z \in q_0(\Pi^{-1}(X'))$ est un point de type (p_1, p_2, q) de f^t , pour tout $t \in [0, 1]$, et tout point de $q_0(\Pi^{-1}(X))$ un point de type (p_1, p_2, q) de f^1 .

On peut construire une isotopie dans $D^0(\mathbb{T}^2)$ joignant f^1 à une application f^2 constante sur $q_0(\Pi^{-1}(X \cup X'))$, et telle que tout point des composantes simplement connexes délimitées par les courbes \tilde{C}_i soit de type (p_1, p_2, q) pour f^2 .

Le noeud défini par le couple (f^2, z') où $z' \in q_0(\Pi^{-1}(X'))$ est le même (à isotopie près) que celui défini par (f^2, z) où $z \in q_0(\Pi^{-1}(X))$. On en déduit que le noeud défini par (f^1, z) est le même que celui défini par (f, z') . Il reste à montrer que $z = q_0(x)$ est une orbite non enlacée de f^1 .

On peut toujours approximer h_i^1 par un difféomorphisme $h'_i \in D^1(\mathbb{T}^2)$ tel que :

- i) $h'_i(q'_{i+2kn}(x)) = q_{i+2kn}(x)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
- ii) $h_i \circ f_i$ dévie la verticale.

Les noeuds définis par (f^1, z) et (f', z) où

$$f' = h'_{2n-1} \circ f_{2n-1} \circ \dots \circ h'_0 \circ f_0 ,$$

sont alors les mêmes. Or x est une singularité appartenant à W^* du champ de vecteurs $\tilde{\xi}'$ défini sur \tilde{S} par la décomposition de f' en applications déviant la verticale $f'_i = h'_i \circ f_i$, le point z est donc un point de type (p_1, p_2, q) non enlacé de f' .

Bibliographie

- [AY] K. ALLIGOOD, J. YORKE. *Cascades of period-doubling bifurcations : a prerequisite for horseshoes*, Bull. Amer. Math. Soc., **9** (1983), 319-322.
- [An] S. B. ANGENENT. *Monotone recurrence relations, their Birkhoff orbits and topological entropy*, Ergod. Th. Dynam. Sys., **10** (1990), 15-41.
- [AG] S. B. ANGENENT, C. GOLE. *Lamination by ghost circles*, preprint E.T.H. Zurich (1991).
- [AL] S. AUBRY, P. Y. LE DAERON. *The discrete Frenkel-Kontorova model and its generalizations*, Physica **8D** (1983), 381-422.
- [Ba1] V. BANGERT. *Mather sets for twist maps and geodesics on tori*, Dynamics reported, Vol I, 1988, John Wiley and Sons.
- [Ba2] V. BANGERT. *Minimal geodesics*, Ergod. Th. Dynam. Sys., **10** (1989), 263-286.
- [BS] M. BARGE, R. SWANSON. *Rotation shadowing properties of circle and annulus maps*, Ergod. Th. Dynam. Sys., **8** (1988), 509-521.
- [BG] M. BARGE, R. M. GILLETTE. *Rotation and periodicity in plane separating continua*, preprint, Montana State University.
- [BC] M. BENEDICKS, L. CARLESON. *The dynamics of the Hénon map*, Ann. of Math., **133** (1991), 73-169.
- [Be] D. BERNSTEIN. *Birkhoff periodic orbits for twist maps with the circle intersection property*, Ergod. Th. Dynam. Sys., **5** (1985), 531-537.
- [BK] D. BERNSTEIN, A. KATOK. *Birkhoff periodic orbits for small perturbations of completely integrable Hamiltonian systems with convex Hamiltonians.*, Invent. Math., **88** (1987), 225-241.
- [Bi1] G. D. BIRKHOFF. *Proof of Poincaré's last geometric theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., **14** (1913), 14-22; et Collected Math. Papers, vol I, 673-681, Dover, New-York, (1978).

- [Bi2] G. D. BIRKHOFF. *Surface transformation and their dynamical applications*, Acta Math., **43** (1920), 1-119; et Collected Math. Papers, vol II, 111-229.
- [Bi3] G. D. BIRKHOFF. *An extension of Poincaré's last geometric theorem*, Acta Math., **47** (1926), 297-311; et Collected. Math. Papers vol II, 252-260.
- [Bi4] G.D. BIRKHOFF. *On the periodic motions of dynamical systems*, Acta. Math., **50** (1927), 359-379; et Collected Math. Papers, vol II, 333-353.
- [Bi5] G. D. BIRKHOFF. *Sur quelques courbes fermées remarquables*, Bull. Soc. Math. France, **80** (1932), 1-26; et Collected Math. Papers, vol II, 444-461.
- [Bi6] G. D. BIRKHOFF. *Sur l'existence de régions d'instabilité en dynamique*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **8**, (1932), et Collected Math. Papers, vol II, 418-443.
- [Bi7] G.D. BIRKHOFF. *Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques*, Memoriae Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei, **1** (1935), 85-216; et Collected Math. Papers, vol II, 530-661.
- [Bm] J. BIRMAN. *Braids, links and mapping class groups*, Annals of Math. Studies, **81**, Princeton Univ. Press, 1974.
- [BGM] L. BLOCK, J. GUCKENHEIMER, J. MISIUREWICZ, L. S. YOUNG. *Periodic points and topological entropy of one dimensional maps*, L. N. in Math., **819**, Springer Verlag, (1980), 18-34.
- [Bo1] P. L. BOYLAND. *Braid Types and a topological method of proving positive entropy*, preprint.
- [Bo2] P. L. BOYLAND. *Rotations sets and Morse decomposition in twist maps* Ergod. Th. Dynam. Sys., **8** (1988), 33-61.
- [Bo3] P. L. BOYLAND. *Rotation sets and topologically monotone orbits for annulus homeomorphisms*, preprint, Univ. of Minnesota.
- [BH] P. L. BOYLAND, G. R. HALL. *Invariant circles and the order structure of periodic orbits in monotone twist maps*, Topology, **26** (1987), 21-35.
- [Bw] R. BOWEN. *Entropy and the fundamental group*, L. N. in Math. **668**, Springer Verlag, (1978), 21-29.
- [BF] R. BOWEN, J. FRANKS. *The periodic points of maps of the disk and the interval*, Topology, **15** (1976), 337-342;
- [Bwr] L. E. J. BROUWER. *Beweis des ebenen Translationssatzes*, Math. Ann., **72** (1912), 37-54.
- [Br] M. BROWN. *A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, Houston J. of Math., **10** (1984), 35-41.
- [BN] M. BROWN, W. D. NEUMANN. *Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem*, Mich. Math. J., **24** (1977), 21-31.
- [By] M.-L. BYALYI. *Aubry-Mather sets and Birkhoff's theorem for geodesic flows on a two-dimensional torus*, preprint, Weizmann Inst., (1988).
- [Cr] P. H. CARTER. *An improvement of the Poincaré-Birkhoff theorem* Trans. Amer. Math. Soc., **269** (1982), 285-299.

- [CL] M. L. CARTWRIGHT, J. E. LITTLEWOOD. *On non-linear differential equations of the second order : I. The equation $\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha)$, k large*, J. London Math. Soc., **20** (1945), 180-189.
- [Ci1] M. CASDAGLI. *Periodic orbits for dissipative twist maps*, Ergod. Th. Dynam. Sys., **7** (1987), 165-173.
- [Ci2] M. CASDAGLI. *Rotational chaos in dissipative systems*, Physica **29D** (1988), 365-386.
- [CB] A. J. CASSON, S. A. BLEILER, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, London Math. Soc. Students Texts, **9** (1988).
- [Chp1] M. CHAPERON, *Une idée de "géodésiques brisées" pour les systèmes hamiltoniens*, C. R. Acad. Sc. Paris, **298** (1984), 293-296.
- [Chp2] M. CHAPERON. *An elementary proof of the Conley-Zehnder theorem*, L. N. in Math., **1125** (1985), 1-8.
- [Chr1] M. CHARPENTIER. *Sur quelques propriétés des courbes de M. Birkhoff*, Bull. Soc. Math. France, **62** (1934), 193-224.
- [Chr2] M. CHARPENTIER. *Sur des courbes fermées analogues aux courbes de M. Birkhoff*, J. Math. Pures et Appl., **14** (1935), 1-48.
- [Che1] A. CHENCINER. *Sur un énoncé dissipatif du théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff*, C. R. Acad. Sc. Paris, **294** (1982), 243-246.
- [Che2] A. CHENCINER. *La dynamique au voisinage d'un point fixe elliptique conservatif : de Poincaré et Birkhoff à Aubry et Mather*, Séminaire Bourbaki, **622**, Astérisque, Soc. Math. France., (1985), 165-173.
- [CGT] A. CHENCINER, J. M. GAMBAUDO, C. TRESSER. *Une remarque sur la structure des endomorphismes de degré 1 du cercle*, C. R. Acad. Sc. Paris, **299** (1984), 145-147.
- [Co1] C. CONLEY. *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conference, **38**, Providence RI, Amer. Math. Soc., 1978.
- [Co2] C. CONLEY. *The gradient structure of a flow (I)*, Ergod. Th. Dynam. Sys., **8*** (1988), 11-31.
- [CE] C. CONLEY, R. EASTON. *Isolated invariant sets and isolating blocks*, Trans. Amer. Math. Soc., **158** (1971), 35-61.
- [CZ] C. CONLEY, E. ZEHNDER. *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of Arnold*, Invent. Math., **73** (1983), 33-49.
- [ID] J. DENZLER. *Mather sets for plane Hamiltonian systems*. J. Appl. Math. Phys.(ZAMP), **38** (1987), 791-812.
- [Do] R. DOUADY. *Application du théorème des tores invariants*, Thèse de troisième cycle, Univ. Paris VII, 1982.
- [EE] C. EARLE, J. BELLS. *A fibre bundle description of Teichmüller theory*, J. Differential Geometry, **4** (1970), 169-185.
- [Fa1] A. FATHI. *Une interprétation plus topologique de la démonstration du théorème de Birkhoff*, Appendice du Chap. I de [Hm2].

- [Fa2] A. FATHI. *An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, L'enseignement Math., **33** (1987), 315-322.
- [Fa3] A. FATHI. *Expansiveness, hyperbolicity and Hausdorff dimension*. Comm. in Math. Phys., **126** (1989), 249-262.
- [FLP] A. FATHI, F. LAUDENBACH, V. POENARU. *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Asterisque, **66-67**, Soc. Math. France, (1979).
- [Fl] A. FLOER. *A refinement of Conley index and an application to the stability of hyperbolic invariant sets*, Ergod. Th. Dynam. Sys., **7** (1987), 93-103.
- [Fr1] J. FRANKS. *Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem*, Ann. of Math., **128** (1988), 139-151.
- [Fr2] J. FRANKS. *Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms*, Ergod. Th. Dynam. Sys., **8*** (1988), 99-107.
- [Fr3] J. FRANKS. *A variation on the Poincaré-Birkhoff theorem*, Contemporary Mathematics, **81** (1988), 111-117.
- [Fr4] J. FRANKS. *Realizing rotation vectors for torus homeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc., **311** (1989), 107-115.
- [Gol] C. GOLE. *Ghost circle for twist maps*, preprint, University of Minnesota, (1990).
- [Gor] D. L. GOROFF. *Hyperbolic sets for twist maps*, Ergod. Th. Dynam. Sys., **5** (1985), 337-354.
- [Gu] L. GUILLOU. *Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff*, preprint, Univ. Paris-Sud, (1990).
- [Hal] G. R. HALL. *A topological version of a theorem of Mather on twist maps*. Ergod. Th. Dynam. Sys., **4** (1984), 585-603.
- [Ha2] G. R. HALL. *Some problems on dynamics of annulus maps*, Contemporary Mathematics, **81** (1988), 135-151.
- [Hd1] M. HANDEL. *A pathological area preserving C^∞ diffeomorphism of the plane*, Proc. Amer. Math. Soc., **86** (1982), 163-168.
- [Hd2] M. HANDEL. *Zero entropy surfaces homeomorphisms*, preprint, CUNY, (1986).
- [Hd3] M. HANDEL. *The rotation set of a homeomorphism is closed*, Comm. Math. Phys., **127** (1990), 339-349.
- [Hl] G. A. HEDLUND. *Geodesics on a two-dimensional Riemannian manifold with periodic coefficients*. Ann. of Math., **33** (1932), 719-739.
- [Hn] M. HENON. *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, Comm. Math. Phys., **50** (1976), 69-77.
- [Hm1] M. R. HERMAN. *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à une rotation*. Publ. Math. I.H.E.S., **49** (1979), 5-234.
- [Hm2] M. R. HERMAN. *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau*, Astérisque, **103-104**, Soc. Math. France, (1983).

- [Hm3] M. R. HERMAN. *Inégalités à priori pour des tores lagrangiens invariants par des difféomorphismes symplectiques*, Publ. Math. I.H.E.S., **70** (1989), 47-101.
- [Hm4] M. HERMAN. *On the dynamics on Lagrangian tori invariant by symplectic diffeomorphisms*, preprint, Ecole Polytechnique, (1990).
- [HH] K. HOCKETT, P. HOLMES. *Josephson's junction, annulus maps, Birkhoff attractors, horseshoes and rotation sets*, Ergod. Th. Dynam. Sys., **6** (1986), 205-239.
- [Hu] M. HURLEY. *Attractors : persistence, and density of their basins*, Trans. Amer. Math. Soc., **269** (1982), 247-271.
- [Ka1] A. KATOK. *Lyapounov exponents, entropy and periodic points for diffeomorphisms*, Publ. Math. I.H.E.S., **51** (1980).
- [Ka2] A. KATOK. *Some remarks on Birkhoff and Mather twist map theorem*, Ergod. Th. Dynam. Sys., **2** (1982), 185-194.
- [Ka3] A. KATOK. *Minimal orbits for small perturbations of completely integrable Hamiltonian systems*, preprint, Cal. Tech.
- [Ke] B. de KERÉKJARTO. *The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré*, Acta Sci. Math. Szeged, **4** (1928-29), 86-102.
- [Ku] I. KUPKA. *Contribution à la théorie des champs génériques*, Contributions to Diff. Equations, **2** (1963), 457-484.
- [L1] P. LE CALVEZ. *Existence d'orbites quasi-périodiques dans les attracteurs de Birkhoff*, Commun. Math. Phys., **106** (1986), 383-394.
- [L2] P. LE CALVEZ. *Propriétés dynamiques des régions d'instabilité*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., **20** (1987), 443-464.
- [L3] P. LE CALVEZ. *Propriétés des attracteurs de Birkhoff*, Ergod. Th. Dynam. Sys. **8** (1987), 241-310.
- [L4] P. LE CALVEZ. *Les ensembles d'Aubry-Mather d'un difféomorphisme conservatif de l'anneau déviant la verticale sont en général hyperboliques*. C. R. Acad. Sci. Paris. **306** (1988), 51-54.
- [L5] P. LE CALVEZ. *Propriétés générales des applications déviant la verticale*. Bull. Soc. Math. France, **117** (1989), 69-102.
- [L6] P. LE CALVEZ. *Etude topologique des applications déviant la verticale*, Ensaio Matemáticos, Soc. Bras. Math., vol. 2 (1990).
- [L7] P. LE CALVEZ. *Existence d'orbites de Birkhoff généralisées pour les difféomorphismes conservatifs de l'anneau*, preprint, Univ. Paris-Sud, (1989).
- [L8] P. LE CALVEZ. *Construction d'orbites périodiques par perturbation d'un difféomorphisme déviant la verticale*, preprint, Univ. Paris-Sud, (1991).
- [Lv] M. LEVI. *Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations*, Mem. Amer. Math. Soc., **24** (1981), 1-147.
- [Ln] N. LEVINSON. *A second order differential equation with singular solutions*, Ann. of Math., **50** (1949), 127-153.

- [Li1] J. E. LITTLEWOOD. *On non linear differential equations of the second order : III*, Acta Math., **97** (1957), 267-308.
- [Li2] J. E. LITTLEWOOD. *On non linear differential equations of the second order : IV*, Acta Math., **98** (1957), 1-110.
- [LM] J. LLIBRE, R. S. MAC KAY. *Rotations vectors and entropy for diffeomorphisms of the torus isotopic to the identity*, Ergod. Th and Dynam. Sys., **11** (1991), 115-128.
- [Ma1] J. MATHER. *Invariant subsets of area-preserving homeomorphisms of surfaces*, Advances in Math. Suppl. Studies, **7B**,
- [Ma2] J. MATHER. *Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus*, Topology, **21** (1982), 457-467.
- [Ma3] J. MATHER. *Glancing Billiards*, Ergod. Th. Dynam. Sys. **2** (1982), 597-403.
- [Ma4] J. MATHER. *Non-uniqueness of solutions of Percival's Euler-Lagrange equation*, Comm. Math. Phys., **86** (1982), 465-473.
- [Ma5] J. MATHER. *A criterion for the non-existence of invariant circles*, Publ. IHES, **63** (1986), 153-204.
- [Ma6] J. MATHER. *Destruction of invariant circles* Ergod. Th. Dynam. Sys., **8*** (1988), 199-214.
- [Ma7] J. MATHER. *Minimal measures*, Comment. Math. Helv., **64** (1989), 375-394.
- [Ma8] J. MATHER. *Minimal action measures for positive definite Lagrangian systems*, a paraître dans Proc. IXth Int. Conf. Math. Phys.
- [Ma9] J. MATHER. *Variational construction of orbits of twist diffeomorphisms*, (1990).
- [MS] R. S. MAC KAY, J. STARK. *Lectures on orbits of minimal actions for area preserving maps*, preprint, Univ. of Warwick.
- [Mi] J. MILNOR, *On the concept of attractor*, Comm. Math. Phys., Commun. Math. Phys., **99** (1985), 177-195.
- [MZ1] M. MISIUREWICZ, K. ZIEMAN. *Rotation sets for maps of tori*, preprint, Univ. of Warwick, 1988.
- [MZ2] M. MISIUREWICZ, K. ZIEMAN. *Rotation sets and ergodis measures for torus homeomorphism*, Fund. Math., **137** (1991), 45-52.
- [MV] L. MORA, M. VIANA. *Abundance of strange attractors*, preprint, IMPA, Rio de Janeiro, (1989).
- [Mo1] J. MOSER. *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus*, Nachr. Akad. Wiss., Gottingen, Math. Phys., **KI** (1962), 1-20.
- [Mo2] J. MOSER. *Monotone twist mappings and the calculus of variation*, Ergod. Th. Dynam. Sys., **6** (1986), 401-413.
- [Mo3] J. MOSER. *Recent developments in the theory of Hamiltonian systems*, SIAM Review, **8** (1986), 459-485.

- [N1] S. NEWHOUSE. *Diffeomorphisms with infinitely many sinks* *Topology*, **13** (1974), 9-18.
- [N2] S. NEWHOUSE. *The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms*, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **50** (1979), 101-151.
- [NPT] S. E. NEWHOUSE, J. PALIS, F. TAKENS. *Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms*, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **57** (1983), 5-72.
- [PT] J. PALIS, F. TAKENS. *Homoclinic bifurcations : hyperbolicity, fractional dimension and infinitely many attractors*, Cambridge Univers. Press, à paraître.
- [PI] P. PLYKIN. *Sources and sinks for A -diffeomorphisms*, *USSR Math. Sb.* **23** (1978), 233-253.
- [Po] H. POINCARÉ. *Sur un théorème de géométrie*, *Rediconti del Circolo Matematico di Palermo*, **33** (1912), 375-407.
- [Ro] R. C. ROBINSON. *Generic properties of conservative systems : I, II*, *Amer. J. Math.*, **92** (1970), 562-603 et 897-906.
- [Ru] D. RUELLE. *Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors*, *Commun. Math. Phys.*, **82** (1981), 137-151.
- [Sc] S. SCHWARTZMAN. *Asymptotic cycles*, *Ann. of Maths*, **68** (1957), 270-284.
- [SM] C. L. SIEGEL, J. K. MOSER. *Lectures on celestial mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, (1971).
- [Sm1] S. SMALE, *Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms*, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **17** (1963), 97-116.
- [Sm2] S. SMALE, *Differentiable dynamical systems*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 747-817.
- [Sm3] S. SMALE, *Diffeomorphisms of the 2-sphere*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 621-626.
- [T] W. P. THURSTON. *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **19** (1988), 417-431.

Index

Chap. 1. §2. \mathbb{T}^n , p_1 , p_2 , π_1 , π_2 , π , T_1 , T_2 , $C^k(M, \mathbb{R}^m)$, $\text{Diff}^k(M)$, $\text{Diff}_0^k(M)$, $D^k(\mathbb{T}^1 \times I)$, $D^k(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$, $D^k(\mathbb{T}^2)$, $DV(\mathbb{R}^2)$, $DV(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$, $DV(\mathbb{T}^2)$, $\rho(g)$, $\rho(\mu)$, $\mathcal{R}(f)$, $\mathcal{R}_e(f)$, $\mathcal{R}_X(f)$, $M(F)$.

Chap. 1. §3. S , \tilde{S} , τ , H , \tilde{H} , W^* , \tilde{W}^* , $\mathcal{X}(F)$, $\mathcal{X}(f)$, $\mathcal{R}_0(f)$, $\mathcal{R}'_0(f)$.

Chap. 1. §4. C^+ , C^- , A_k^+ , A_k^- , Ω_k^+ , Ω_k^- , A^+ , A^- , Ω^+ , Ω^- .

Chap. 1. §5. $C_{p,q}$, $\tilde{C}_{p,q}$, $U_{p,q}$, $V_{p,q}$, $W_{p,q}$, μ^+ , μ^- , ν^+ , ν^- .

Chap. 1. §6. $\mathcal{K}(f)$, U_X , V_X , B , ρ_X^+ , ρ_X^- , μ_X^+ , μ_X^- .

Chap. 2. §2. \mathcal{V} , S , ξ , f_i , g_i , g'_i , ε_i , q_i , q'_i , p_i , p'_i , H , σ , V , W , K , L , δ , W_0 , W_1 , L_0 , L_1 .

Chap. 2. §3. \tilde{S} , Π , Π_2 , τ , φ , $\tilde{\xi}$, \tilde{H} , W'_0 , \tilde{W}_0 , \tilde{W}_2 , \tilde{W}_3 , L'_0 , \tilde{L}_0 , \tilde{L}_2 , \tilde{L}_3 , Λ^* , \tilde{W}^* .

Chap. 2. §4. G^+ , G^- , τ_P , τ_I , ξ^* , β , $\tilde{\xi}^*$, $\tilde{\beta}$, \tilde{q}_i , \tilde{q}'_i , \tilde{p}_i , \tilde{p}'_i , H^* , Λ^* , S^+ , S^- , B_R , ζ , $\alpha(x, x')$, $\omega(x, x')$.

Chap. 2. §5. \hat{f} , $\hat{\xi}$, Ξ_V .

Summary

In the first chapter of this monography, we give a survey of the theory of monotone twist maps of the annulus, most of them related to the problem of the existence of periodic orbits, or more generally, or orbits with a given number of rotation. At the beginning we look at the conservative case : we give a short survey of the Aubry-Mather theory and we explain what is the Birkhoff theory, then we give some criteria of existence of periodic orbits without the area-preservation property and we apply them in the area-decreasing case and recall the properties of the Birkhoff attractors.

A diffeomorphism of the closed annulus which is isotopic to the identity can be written as the composition of monotone twist maps. In chapter 2, we try to generalize some points of the Aubry-Mather theory to such maps. We obtain a version of the Poincaré-Birkhoff theorem where the periodic orbits have the braid type the most simple as possible : the same as for the linear case. A diffeomorphism of the torus isotopic to the identity is also a composition of twist maps and we can get a proof of the Conley-Zehnder theorem, with the same kind of conclusions about the braid type, in the case we are looking for periodic orbits. In fact the method can be used even if the map is not area-preserving to get the following result : if a diffeomorphism f of the plane which is a lift of a diffeomorphism of the torus isotopic to the identity is fixed point free, there is a continuous vector field on the torus, uniquely integrable and without singularity, such that every integrable curve lifted to the plane separates its image and its inverse image. So we obtain an equivariant version of the Brouwer translation theorem which permit us to get new proves of some results about the rotation set of diffeomorphisms of the torus.