

Astérisque

JEAN-PIERRE SERRE

Lettre à M. Tsfasman

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 351-353

http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__351_0

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LETTRE A M. TSFASMAN

Jean-Pierre SERRE

Paris, le 24 Juillet 1989

Cher Tsfasman,

Voici une solution du problème sur le nombre maximum de points d'une hypersurface que vous avez posé à Luminy.

Notations

\mathbf{F}_q est un corps fini à q éléments ;

$\mathbf{P}_n(\mathbf{F}_q)$ est l'espace projectif de dimension n sur \mathbf{F}_q ; son nombre d'éléments est $p_n = q^n + q^{n-1} + \dots + 1$;

$f = f(X_0, \dots, X_n)$ est un polynôme homogène $\neq 0$, de degré $d \leq q + 1$, à coefficients dans \mathbf{F}_q ;

$S = S(f)$ est le lieu des zéros de f dans $\mathbf{P}_n(\mathbf{F}_q)$;

$N = N(f)$ est le nombre d'éléments de S .

THÉORÈME - On a :

$$(1) \quad N \leq d q^{n-1} + p_{n-2} .$$

Démonstration

Le cas $d = q+1$ est trivial, car $d q^{n-1} + p_{n-2}$ est alors égal à p_n . Je supposerai donc $d \leq q$ dans ce qui suit.

Je raisonnerai par récurrence sur n , les cas $n = 0, 1$ étant faciles. On peut donc supposer $n \geq 2$.

Soient g_1, \dots, g_δ les différents facteurs linéaires (à homothétie près) de f (sur le corps de base \mathbf{F}_q , bien entendu), et soient G_1, \dots, G_δ les hyperplans de

$\mathbf{P}_n(\mathbf{F}_q)$ définis par les g_i . La réunion G des G_i est contenue dans S . On va distinguer deux cas, suivant que G est égal à S ou non.

(i) On a $G = S$.

Pour $m = 1, 2, \dots, \delta$, on a

$$(2) \quad |G_1 \cup \dots \cup G_m| \leq mq^{n-1} + p_{n-2} .$$

Cela se voit par récurrence sur m , en remarquant que G_{m+1} a $p_{n-1} = q^{n-1} + p_{n-2}$ points, et que $G_{m+1} \cap (G_1 \cup \dots \cup G_m)$ a au moins p_{n-2} points. Comme $m \leq d$, l'inégalité (2) entraîne (1). (On voit de plus qu'il ne peut y avoir égalité dans (1) que si $\delta = d$, et si les g_i engendrent un espace de dimension 2, i.e. si les hyperplans G_i ont un espace de dimension $n - 2$ en commun.)

(ii) On a $G \neq S$.

Choisissons un point $P \in S$, avec $P \notin G$. Si H est un hyperplan de $\mathbf{P}_n(\mathbf{F}_q)$, passant par P , la restriction de f à H n'est pas identiquement nulle, vu le choix de P . On peut donc appliquer à $S \cap H$ l'hypothèse de récurrence : on a

$$(3) \quad |S \cap H| \leq dq^{n-2} + p_{n-3} .$$

Je vais maintenant employer un procédé combinatoire standard : soit X l'ensemble des couples (P', H) où :

$$\begin{cases} P' & \text{est un point de } S - \{P\} ; \\ H & \text{est un hyperplan passant par } P \text{ et } P' . \end{cases}$$

Pour P' fixé dans $S - \{P\}$, le nombre des H passant par P et P' est égal à p_{n-2} . On en déduit :

$$(4) \quad |X| = (N - 1)p_{n-2} .$$

D'autre part, pour H fixé passant par P , le nombre des $P' \in S - \{P\}$ situés sur H est égal à $|S \cap H| - 1 \leq dq^{n-2} + p_{n-3} - 1$. Comme le nombre des H passant par P est égal à p_{n-1} , on déduit de là :

$$(5) \quad |X| \leq p_{n-1}(dq^{n-2} + p_{n-3} - 1) .$$

En combinant (4) et (5), on obtient :

$$(6) \quad N \leq 1 + p_{n-1}(dq^{n-2} + p_{n-3} - 1)/p_{n-2} .$$

Un calcul ennuyeux, mais sans difficulté, montre que ceci équivaut à

$$(7) \quad N \leq d q^{n-1} + p_{n-2} - (q+1-d)q^{n-2}/p_{n-2} .$$

Comme $q+1-d$ est > 0 , on en déduit :

$$(8) \quad N < d q^{n-1} + p_{n-2} ,$$

ce qui est meilleur que (1). D'où le théorème.

Remarques

1) Dans le cas (ii), on peut obtenir une inégalité un peu meilleure que (8), à savoir :

$$(9) \quad N \leq d q^{n-1} + p_{n-2} - (q+1-d) .$$

2) La démonstration prouve en même temps que, si $d \leq q$, il ne peut y avoir égalité dans (1) que dans le cas trivial où S est réunion de d hyperplans contenant une même variété linéaire de codimension 2.

Par contre, pour $d = q+1$, on peut prouver qu'il y a égalité dans (1) si et seulement si f est combinaison linéaire des polynômes $X_i X_j^q - X_j X_i^q$; si n est impair, l'hypersurface $f = 0$ peut être absolument irréductible, et lisse (exemple : $n = 3$, et $f = X_0 X_1^q - X_1 X_0^q + X_2 X_3^q - X_3 X_2^q$).

Bien à vous

J-P. SERRE
6 avenue de Montespan
75116 PARIS
France